AWGN: Additive White Gaussian Noise Channel

$X_i \rightarrow \boxed{AWGN} \rightarrow Y_i = X_i + Z_i$, $Z_i \sim N(0, N)$

① 若 $N=0$，即无噪声，则 $Y_i = X_i$，那么该channel能传输连续的随机变量，故 $C=\infty$

② 若 $N\neq 0$，则令功率 $P = E[X_i^2] = \sigma_x^2 \rightarrow \infty$

令 $X_i' = \frac{X_i}{\sigma_x}$，$Y_i' = \frac{Y_i}{\sigma_x}$，$Z_i' = \frac{Z_i}{\sigma_x}$，则 $Y_i' = X_i' + Z_i'$

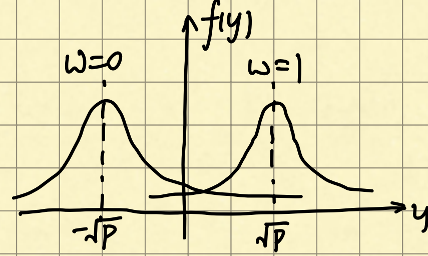
那么 $E(X_i') = Var(X_i') = 1$，$Z_i' \sim N(0, \underset{\downarrow\, 0}{\frac{N}{\sigma_x^2}})$，即噪声归0，那么也会有 $C\rightarrow\infty$

③ 若 $N\neq 0$，且发射功率有上限 $E[X^2]\le P$ (Power constraint)

对code word $w \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n)$，则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le P$

例子：BPSK：

code word	发射电平	接收电平
$w=1$	$x=\sqrt{P}$	$Y=\sqrt{P}+Z \sim N(\sqrt{P}, N)$
$w=0$	$x=-\sqrt{P}$	$Y=-\sqrt{P}+Z \sim N(-\sqrt{P}, N)$



$Y\ge 0 \Rightarrow \hat{w}=1$

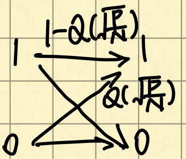
$Y<0 \Rightarrow \hat{w}=0$

Detection Error Prob.:

$$P_e = Pr[Y\ge 0 \mid x=-\sqrt{P}] = Pr[Z\ge\sqrt{P}] = 1-\phi(\sqrt{\tfrac{P}{N}}) = Q(\sqrt{\tfrac{P}{N}})$$

ϕ: CDF of $N(0,1)$

可转化为DMC:



$C = 1 - H(Q\sqrt{\tfrac{P}{N}})$

信道容量 $C = \max I(X;Y)$，有限制 $E[X^2]\le P$

$I(X;Y) = h(Y) - h(Y|X) = h(Y) - h(X+Z|X)$

由于X与Z无关，故 $h(X+Z|X) = h(Z)$，又 $Z\sim N(0,N)$

$= h(Y) - h(Z)$

$= h(Y) - \frac{1}{2}\log(2\pi e N)$

$E[Y^2] = E(X+Z)^2 = E[X^2 + 2XZ + Z^2]$

$= \underset{\le P}{E[X^2]} + \underset{= 0}{E[2XZ]} + \underset{= N}{E[Z^2]}$

$= E[X^2] + N \le P+N$

当 $E[X^2]=P$ 时，$E[Y^2]$ 取到最大值 $P+N$.

$C = \max I(X;Y) = \max h(Y) - \frac{1}{2}\log(2\pi e N)$

当Y服从高斯分布时，有 $\max h(Y)$，即 $Y\sim N(\mu, \sigma^2)$，$\sigma^2 = E[Y^2] - E[Y]^2 \le E[Y^2] = P+N$

$\le \frac{1}{2}\log[2\pi e(P+N)] - \frac{1}{2}\log(2\pi e N)$ (取等号时，$X\sim N(0,P)$，$Y\sim N(0,P+N)$)

$= \frac{1}{2}\log\frac{P+N}{N} = \frac{1}{2}\log(1+\frac{P}{N})$ ($\frac{P}{N}$：信噪比SNR)

Channel Coding in AWGN

$$W\in\{1,2,\dots,M\}\rightarrow\boxed{\text{Enc}}\rightarrow\boxed{\text{AWGN}}\xrightarrow{Y^n}\boxed{\text{Dec}}\rightarrow\hat{W}=g(Y^n)$$

Enc ↓ $x^n(1)$, $x^n(2)$, $\vdots$, $x^n(M)$　　AWGN ↑ Z

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2(w)\le P$$

假如发送 $x^3(1)=[x_1(1),x_2(1),x_3(1)]$

同时可能有 $x^3(2)=[x_1(2),x_2(2),x_3(2)]$

收到 $Y^3=[x_1(1)+z_1,\ x_2(1)+z_2,\ x_3(1)+z_3]$

在解码时需计算 Y^3 与 $x^3(1)$ 和 $x^3(2)$ 的距离大小，越近的认为是解码结果

推广：对n维，$X^n=(x_1,x_2,\dots x_n)$ $\rightarrow Y^n=(x_1+z_1,x_2+z_2,\dots,x_n+z_n)=X^n+Z^n$

$Z^n=(z_1,z_2,\dots,z_n)$

欧几里得距离 $d(X^n,Y^n)=\sqrt{z_1^2+z_2^2+\dots+z_n^2}=\sqrt{N}\sqrt{(\frac{z_1}{\sqrt{N}})^2+(\frac{z_2}{\sqrt{N}})^2+\dots+(\frac{z_n}{\sqrt{N}})^2}$

由 $z_i\sim N(0,N)$ 得 $\frac{z_i}{\sqrt{N}}\sim N(0,1)$

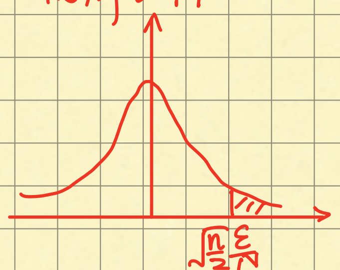
$$\Pr[d(X^n,Y^n)\ge\sqrt{n(N+\epsilon)}]=\Pr[\underbrace{(\tfrac{z_1}{\sqrt{N}})^2+(\tfrac{z_2}{\sqrt{N}})^2+\dots+(\tfrac{z_n}{\sqrt{N}})^2}_{\text{chi-squared of degree } n\text{ . mean}=n,\ \text{var}=2n}\ge n\frac{N+\epsilon}{N}]$$

$$=\Pr[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{(\tfrac{z_i}{\sqrt{N}})^2}\ge 1+\frac{\epsilon}{N}]$$

n个独立同分布的随机变量的和的均值

由中心极限定理可得：$A=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{z_i}{\sqrt{N}})^2\sim N(1,\frac{2}{n})$

高斯分布PDF

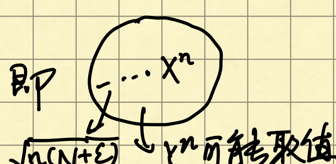


$$=\Pr[A-1\ge\frac{\epsilon}{N}]$$

$$=\Pr[\underbrace{\sqrt{\tfrac{n}{2}}(A-1)}_{N(0,1)}\ge\sqrt{\tfrac{n}{2}}\frac{\epsilon}{N}]$$

固定 ϵ，$n\to\infty$ 时，PDF下面积 $\to 0$，即 $n\to\infty$，$\Pr[\dots]\to 0$

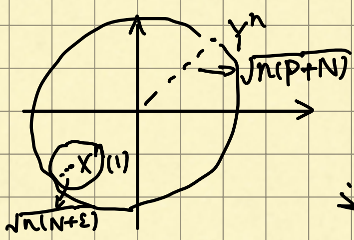
因此 X^n 与 Y^n 的距离应小于 $\sqrt{n(N+\epsilon)}$，即



欲使 $X^n(1)$ 与 $X^n(2)$ 不会误判，则需该球形不重叠，即 $d(X^n(1),X^n(2))>2\sqrt{n(N+\epsilon)}$

由于 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2(w)\le P$，即球心到原点的距离有限制（发射功率有限），故空间中球数量有限.

由 $E[X^2]\le P$，$E[Z^2]=N$ 可得 $E[Y^2]=E[X^2+Z^2]\le P+N$，即 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2=E[Y^2]\le P+N\Rightarrow\sqrt{\sum_{i=1}^{n}Y_i^2}\le\sqrt{n(P+N)}$

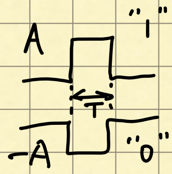


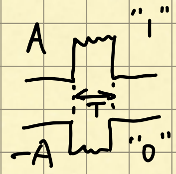
在 Y^n 的可能范围中能塞入多少个互不重叠的 X^n 球呢？

（n维球的体积为 $C_n r^n$）

$$\frac{C_n[\sqrt{n(P+N)}]^n}{C_n[\sqrt{n(N+\epsilon)}]^n}=(\frac{P+N}{N+\epsilon})^{\frac{n}{2}}\approx(\frac{P+N}{N})^{\frac{n}{2}}$$

这么多的code word (X^n) 对应的rate为 $\frac{1}{n}\log_2(\frac{P+N}{N})^{\frac{n}{2}}=\frac{1}{2}\log_2(1+\frac{P}{N})$

无噪声发送： 

AWGN： 

$$\frac{1}{AT}\int_0^T y(t)\,dt = \begin{cases} 1+z \\ -1+z \end{cases}$$

不一定发射方波，其他波形也可，此时 $y(t)=x(t)+z(t)$