

グロタンディーク・黒川の路線に寄る F_1 構造に寄るゼータの構築

まえがき

この論文の目的は、グロタンディーク・黒川の路線に沿って、リーマンゼータを構築し、臨界線の構造を考察することである。このとき、 F_1 代数の基底として完全数を利用するが、完全数は、加法においては三角数・乗法においては約数和の完全性という特徴があることに注目したい。もし完全数が F_1 の基底として振る舞わないならば、Euler 積と加法構造の同時再現は不可能となり、ゼータ的構成は解析的仮構に依存せざるを得ない。本論の構成は、この依存を排除する最小構造である。本論では、完全数が F_1 代数の基底として自然に振る舞うことを示したが、その必然性——すなわち、他の候補がなぜ基底たり得ないか——についての理論的・包括的説明は、別稿（WM 理論）に委ねる。そこでは、トレース束・容量・類双対性の観点から、完全数以外の構造が加法・乗法の同時基底性を破ることが示される。読み方としては、どのように素数と完全数が無限階層を構成し、また、対応するか。そして、それが、どのように通常の意味での加法と乗法を「復元する」のか。そこに注意しながら読めば、あの構成法には、極めて珍奇なものは含まれていない。ただ、注意するべきなのは、この舞台は「非可換的領域」が主な舞台であって、最初から複素解析的な領域からは離脱されていることである。

なお、この論文では、この構成に必要な論理・理論以外の内容を可能な限り省いた。一般的な既知の知識で理解できるように心がけた。ときどき最小限とはいえ、でてくる理論的概念については、別の理論、生成子の理論、WM 理論などで展開する予定なので、そちらにゆずることにする。また、姉妹論文「橋本・志村リフトに寄るリーマンゼータの構築」では、「できる限り既知の概念・理論を用いた簡潔なゼータの構築」を描いたので、参考にするとよいだろう。

補足：既存構造による非可換解析接続とトレースの具体化

本論文で用いる非可換解析接続およびトレース構造は、単なる抽象的仮定として導入されるものではない。実際、補遺論文『橋本・志村リフトによるリーマンゼータの構築』において、非バックトラック作用素の正規化極限は、レグルベント

$$(1 - q^{-s/2} \Delta)^{-1}$$

として具体的に構成されており、そのトレースは非バックトラック閉路の軌道和として明示的に与えられている。

さらに、このトレースは Selberg トレース公式に現れる閉測地線の軌道和と一致し、Fredholm 行列式の一致を通じて $\zeta(s)$ を一意に定める。したがって、本論文におけるトレース束および非可換解析接続は、すでに具体的に与えられた数学的構造の抽象化・一般化として理解されるべきものである。

第一章 \mathbf{F}_1 基底としての完全数

1 完全数と \mathbf{F}_1 幾何学：種数 p の同値原理

本節では、完全数に付随する \mathbf{F}_1 的幾何構造が一次超コホモロジーの次元として生成パラメータ p を「種数」として符号化することを示す。ここで扱う構成は、フラクタル L 関数の Fredholm 決定式と、Grothendieck–Weil 理論を結びつける役割を果たす。

[定理 43.1 (完全数と種数 p の同値原理)] N を完全数で

$$N = 2^{p-1}(2^p - 1)$$

と書けるものとする (p は素数, $M := 2^p - 1$ は Mersenne 素数)。 N に付随するトレース束 \mathcal{T}_N を自然な Proj 構成により有限体 \mathbf{F}_q 上に超曲面 (super Riemann surface)

$$\mathcal{S}_N/\mathbf{F}_q$$

を構成できると仮定する。このとき次が成り立つ:

$$\dim_{\mathbb{Q}_\ell} H_{\text{super}}^1(\mathcal{S}_N \otimes \bar{\mathbf{F}}_q, \mathbb{Q}_\ell) = p.$$

すなわち完全数 N は、生成パラメータ p を幾何学的不变量 (一次超コホモロジーの次元) として符号化している。

証明 (スケッチ). 証明は A) 幾何学的構成 (Riemann–Hurwitz) と B) 解析的構成 (Fredholm 決定式) の二つの視点を組み合わせる。

(A) Riemann–Hurwitz による幾何設計 トレース束 \mathcal{T}_N は階層データに基づき、次数 p の被覆

$$\pi: \tilde{X} \rightarrow X_0$$

を与える (通常 $X_0 = \mathbb{P}^1$)。 \mathcal{T}_N の非正規スペクトルが分岐点 x_i と分岐指数 e_i を定めると仮定すると、Riemann–Hurwitz の公式

$$2g(\tilde{X}) - 2 = p(2g(X_0) - 2) + \sum_i (e_i - 1)$$

により、 $g(X_0) = 0$ として

$$\sum_i (e_i - 1) = 4p - 2$$

を満たす分岐配置を選べば

$$g(\tilde{X}) = p$$

が実現される (補題 1)。超曲面 \mathcal{S}_N の一次超コホモロジーの有効次元は $g(\tilde{X})$ に一致するので結論が得られる。

(B) Fredholm 決定式と Weil 因子の対応 フラクタル L 関数の局所因子は Fredholm 型決定式で

$$\mathcal{L}_p(s) = \det(1 - p^{-s} \mathcal{F}_p | H^\infty)^{-1}$$

と書ける。Weil の局所 ζ 因子の次数は一次 ℓ -adic コホモロジーの次元であるから、決定式の有効次数が

$$\deg P_1(t) = \dim H_{\text{super}}^1$$

を与える。完全数 N は圧縮作用の不動点として \mathcal{F}_p の固定スペクトルが多重度 p を持つため、決定式の次数は p となり、したがって

$$\dim H_{\text{super}}^1 = p.$$

□

[補題 43.A (被覆の分岐設計の可成性)] 任意の素数 p に対し,

$$\sum_i (e_i - 1) = 4p - 2$$

を満たす分岐データ (e_i) を与えれば、 $X_0 = \mathbb{P}^1$ の上の次数 p の被覆の種数を $g = p$ に設計できる。したがってトレース束が自然に分岐指数を定める場合、Riemann–Hurwitz による種数 p の構成は常に可能である。

Proof. $g(X_0) = 0$ のため Riemann–Hurwitz は

$$2g(\tilde{X}) - 2 = -2p + \sum_i (e_i - 1).$$

$g(\tilde{X}) = p$ を要求すると

$$\sum_i (e_i - 1) = 4p - 2.$$

例えば $p = 2$ では 6 個 ($\sum(e_i - 1) = 6$)、 $p = 3$ では 10 個 ($\sum(e_i - 1) = 10$) の分岐指数 (例: 5 点で完全分岐 $e_i = 3$ なら $5 \times (3 - 1) = 10$) で実現される。一般の p でも混合分岐を用いれば常に達成可能である。□

具体例の確認

- $p = 2$: $N = 6$. 要求 $\sum(e_i - 1) = 4(2) - 2 = 6$. $g = 2$.
- $p = 3$: $N = 28$. 要求 $\sum(e_i - 1) = 4(3) - 2 = 10$. $g = 3$.
- $p = 5$: $N = 496$. 要求 $\sum(e_i - 1) = 4(5) - 2 = 18$. $g = 5$.

Fredholm 決定式との対応 局所因子

$$\mathcal{L}_p(s) = \det(1 - p^{-s} \mathcal{F}_p)^{-1}$$

の次数は \mathcal{F}_p の固定スペクトルの多重度に等しい。完全数 N の場合、この多重度は生成素数 p に一致するため、局所 ζ 因子 $P_1(t)$ の次数は p となり、

$$\dim H_{\text{super}}^1 = p.$$

2 Hecke 構造の埋め込みと Fractal L 関数の保型化

本節では、完全数に付随するトレース束 \mathcal{T}_N と、前節で構成した超リーマン面

$$\mathcal{S}_N / \mathbf{F}_q$$

の上に、自然に Hecke 作用素 が埋め込まれることを示す。この埋め込みは、Fractal L 関数の局所因子が保型的 (automorphic) L 因子として再解釈されることを意味し、数論的階層構造

prime \longrightarrow Fermat prime \longrightarrow Mersenne prime \longrightarrow perfect number

の反復的生成と整合する。

ここでの主結果は、“完全数が Hecke 代数の表現として実現される” という形で述べられる。

2.1 完全数から Hecke 作用素への自然写像

$N = 2^{p-1}(2^p - 1)$ を完全数とする。前節の構成によって N に対し一次超コホモロジー $H_{\text{super}}^1(\mathcal{S}_N)$ が定まり、その次元は p である。

このとき、 \mathcal{T}_N の階層構造は Fermionic/Bosonic の二成分性

$$N = 2^{p-1} \cdot M, \quad M = 2^p - 1$$

に従って自然な分解を持ち、これが Hecke 作用素の固有空間分解と一致することを示す。

[完全数から Hecke 代数への自然対応] 完全数 $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$ に対して、有限体 \mathbf{F}_q 上の超曲面 \mathcal{S}_N の超一次コホモロジーは

$$H_{\text{super}}^1(\mathcal{S}_N) \cong \bigoplus_{i=1}^p V_{\lambda_i}$$

と固有分解され、各 V_{λ_i} は Hecke 作用素

$$T_\ell : H_{\text{super}}^1(\mathcal{S}_N) \rightarrow H_{\text{super}}^1(\mathcal{S}_N)$$

の固有空間に一致する。

さらに、各固有値 λ_i はトレース束の Frobenius 作用素 \mathcal{F}_p の固有値スペクトルに一致する。

証明（スケッチ）．一次超コホモロジーの Fredholm 決定式による表示

$$\det(1 - t\mathcal{F}_p) = \prod_{i=1}^p (1 - \lambda_i t)$$

が成り立つ（前節の結果）。ここで λ_i は \mathcal{F}_p の固有値。

一方，Weil の ℓ -進理論により H^1 の Frobenius 固有値はそのまま Hecke 代数の作用素 T_ℓ の固有値に対応する。したがって

$$\mathcal{F}_p \text{ の固有分解} \iff T_\ell \text{ の固有分解}$$

が得られ，固有空間分解は p 個の成分に分裂し，完全数の生成パラメータ p と一致する。□

2.2 Fermionic/Bosonic 分解と Hecke 固有空間

完全数の二成分性

$$N = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$$

はそのまま超コホモロジーの

$$H_{\text{super}}^1 = H_{\text{even}}^1 \oplus H_{\text{odd}}^1$$

への分解に対応する。

[Hecke 構造の二成分分解] 完全数 N に対し，

$$\dim H_{\text{even}}^1 = p - 1, \quad \dim H_{\text{odd}}^1 = 1$$

となる規格化が存在し，Hecke 作用素 T_ℓ は

$$T_\ell = T_\ell^{\text{even}} \oplus T_\ell^{\text{odd}}$$

の形で超選択規則を満たす。

特に，奇数成分は Mersenne 素数 $2^p - 1$ に対応し，偶数成分は 2^{p-1} の可換部分構造を符号化する。

証明（概略）．超リーマン面の super 構造により，一次超コホモロジーは fermionic/bosonic の \mathbb{Z}_2 分解を持つ。

トレース束 \mathcal{T}_N の分岐構造を前節の Riemann–Hurwitz の設計に従って選べば，分岐による寄与は

$$\text{fermionic} = M = 2^p - 1, \quad \text{bosonic} = 2^{p-1}$$

として符号化される。Hecke 作用素 T_ℓ は Frobenius と可換であるためこの分解を保存し，したがって上記の次元分解と選択規則が成立する。□

2.3 Fractal L 因子の保型化

以上の結果をまとめると次が得られる。

[Fractal L 関数の Hecke 保型化] 完全数 N の Fractal L 関数の局所因子は

$$\mathcal{L}_p(s) = \prod_{i=1}^p (1 - \lambda_i p^{-s})^{-1}$$

と表され、これは Hecke 作用素 T_ℓ の固有値を持つ階数 p の保型表現に一致する。

すなわち、完全数は Fractal L 関数の「保型的固定点」として現れ、前節で証明した

$$\dim H_{\text{super}}^1 = p$$

という種数原理と整合する。

3 素数階層のフラクタル復元原理

本節では、フェルマー素数 $F_k = 2^{2^k} + 1$ 、メルセンヌ素数 $M_p = 2^p - 1$ 、完全数

$$N_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$$

の三者が、 \mathbf{F}_1 代数と Fractal L 関数の文脈において階層的自己復元構造を構成することを示す。

この階層構造は、整数論の加法／乗法の二重構造

$$2^{p-1} \quad (\text{加法的成分}), \quad 2^p - 1 \quad (\text{乗法的成分})$$

が、超コホモロジー、Hecke 作用素、Frobenius 決定式において自然に二成分分解されることに由来する。

3.1 階層構造の原型 : Fermat \rightarrow Mersenne

$k \geq 0$ に対しフェルマー数

$$F_k = 2^{2^k} + 1$$

を考える。この指数 2^k は、Fractal 位相での「自己相似階層の高さ」とみなされる。

[指数階層] フェルマー指数を

$$h(k) := 2^k$$

とし、次の写像を「階層降下写像」と呼ぶ：

$$\Phi : F_k \longmapsto h(k).$$

階層降下により得られる $h(k) = 2^k$ をメルセンヌ指数として代入すると、自然に

$$M_{h(k)} = 2^{2^k} - 1$$

が生成される。

[Fermat → Mersenne の階層降下] フェルマー素数 F_k が存在するとき、その指数 $h(k) = 2^k$ を通じて

$$M_{h(k)} = 2^{2^k} - 1$$

が自然に生成される。この写像は \mathbf{F}_1 代数の「指数の加法／乗法の交換関係」

$$2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b$$

に由来する。

Proof. F_k の定義より $F_k - 2 = 2^{2^k} - 1 = M_{h(k)}$ 。指数の階層降下を通じて自動的にメルセンヌ数が生成される。 \square

3.2 第二段階 : Mersenne → Perfect

メルセンヌ素数 $M_p = 2^p - 1$ に対して、完全数

$$N_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$$

が生成されるのは古典的に知られるが、Fractal 幾何学の文脈では次のように理解される。

[Mersenne → Perfect の階層上昇] メルセンヌ素数 M_p が与えられると、その指数 p をトレース束の階層データとして用いて、完全数

$$N_p = 2^{p-1}M_p$$

が Fractal L 因子の階層的生成子として自然に得られる。

Proof. 前節で構成した超リーマン面 \mathcal{S}_N の超一次コホモロジーの次元が p であることより、指数 p は幾何学的不变量として保存される。この指数に対し \mathbf{F}_1 幾何学の加法的基底 2^{p-1} を掛け合わせることで完全数が生成される。 \square

3.3 第三段階 : Perfect → Prime (復元)

興味深いのは、完全数 N_p を入力とすると、その構成パラメータ p が**幾何学的に復元されること**である。

[Perfect → Prime の階層的復元] 完全数 N_p に付随する超リーマン面 \mathcal{S}_{N_p} の超一次コホモロジーは

$$\dim H_{\text{super}}^1(\mathcal{S}_{N_p}) = p$$

を満たす。従って、完全数から基底素数 p が**幾何学的に復元される**。

Proof. 定理 43.1 によって、完全数に付随する超曲面の H_{super}^1 が次数 p の Fredholm 決定式を持つことが示された。その次数が p であることから、 N_p から指数 p が一意的に復元される。 \square

3.4 階層の閉包 : Fermat → Mersenne → Perfect → Prime

以上の 3 段階をまとめると次の閉包原理が得られる。

[素数階層のフランタル閉包] 以下の写像列は Fractal L 理論において閉じている :

$$\text{Fermat} \xrightarrow{\Phi} \text{Mersenne} \xrightarrow{\Psi} \text{Perfect} \xrightarrow{\Theta} \text{Prime}.$$

特に, 完全数 N_p を入力とすることで基底素数 p を復元できるため, 階層は自己再生的である。

3.5 幾何学的解釈

この階層構造は Fractal super geometry において次の形として理解される :

- フェルマー数 F_k は階層の「高さ」 2^k を規定する。
- メルセンヌ数 M_{2^k} は階層降下の乗法的部分。
- 完全数 N_{2^k} は加法・乗法の統合点。
- 完全数に付随する超曲面は種数 2^k を持ち, index 2^k の素数が復元される。

従って, 素数はフェルマー数を起点とする自己相似階層の不動点として出現する。

4 Fractal L 関数の Euler 産 : \mathbf{F}_1 版の再構成

本節では, Fractal L 関数

$$\mathcal{L}_{\text{frc}}(s)$$

が, 従来の素数 p による Euler 産ではなく, 完全数 N_p を基底とした Euler 産として再構成できることを示す。

これは, 前節の

$$\text{Fermat} \rightarrow \text{Mersenne} \rightarrow \text{Perfect} \rightarrow \text{Prime}$$

という階層閉包に基づき, 素数を完全数の幾何的復元として再定義することで初めて可能になる構造である。

4.1 従来の Euler 産とその分解

古典的な L 関数は

$$L(s) = \prod_{p \in \text{Prime}} (1 - a_p p^{-s})^{-1}$$

の形で書かれ, 素数が乗法的生成子 (multiplicative generator) として働く。

Fractal 幾何学では、「素数は階層の最下層で復元される幾何的不变量」として再解釈されるため、乗法的生成子はより高次の構造である

$$N_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$$

へと持ち上げられる。

4.2 完全数を基底とする Fractal Euler 産

完全数 N_p に付随する Fractal Frobenius 作用素を \mathcal{F}_{N_p} と書く。

[完全数基底の局所 Fractal 因子] 完全数 N_p に対する局所因子を

$$\mathcal{L}_{N_p}(s) := \det \left(1 - N_p^{-s} \cdot \mathcal{F}_{N_p} \mid H_{\text{super}}^1(\mathcal{S}_{N_p}) \right)^{-1}$$

と定義する。

ここで \mathcal{S}_{N_p} は前節で構成した超リーマン面であり、

$$\dim H_{\text{super}}^1(\mathcal{S}_{N_p}) = p$$

が成立する。

この定義により、素数 p に付随する Euler 因子は、完全数 N_p に付随する Fractal 因子として再解釈される。

[\mathbf{F}_1 版 Euler 産] Fractal L 関数は完全数を基底とする Euler 産

$$\mathcal{L}_{\text{frc}}(s) = \prod_{p \in \text{Prime}} \mathcal{L}_{N_p}(s)$$

として書ける。

Proof. 完全数 N_p の超コホモロジーナンスが p であることより、決定式の次数が p に一致し、 $\mathcal{L}_{N_p}(s)$ は「素数 p の局所因子」と同型の構造を持つ。

従って、Fractal 作用素レベルで

$$\det(1 - p^{-s} \mathcal{F}_p) \longleftrightarrow \det(1 - N_p^{-s} \mathcal{F}_{N_p})$$

が成立する。

本質的には、「素数は完全数の幾何的復元」であるため、素数基底の Euler 因子は完全数基底に持ち上げられて一致する。 \square

4.3 \mathbf{F}_1 幾何から見た Euler 産の分岐

重要なのは、完全数 N_p が \mathbf{F}_1 代数において次の分解を持つことである：

$$N_p = 2^{p-1} \cdot M_p.$$

\mathbf{F}_1 幾何では、

- 2^{p-1} は加法的 (bosonic) 構造
- M_p は乗法的 (fermionic) 構造

に対応する。

この分解は、超コホモロジーの偶奇分解

$$H_{\text{super}}^1 = H_{\text{even}}^1 \oplus H_{\text{odd}}^1$$

にそのまま一致する。

[Euler 因子の boson/fermion 分離] 完全数局所因子は

$$\mathcal{L}_{N_p}(s) = \mathcal{L}_{N_p}^{(+)}(s) \cdot \mathcal{L}_{N_p}^{(-)}(s)$$

という分離を持ち、

$$\deg \mathcal{L}_{N_p}^{(+)} = p - 1, \quad \deg \mathcal{L}_{N_p}^{(-)} = 1$$

が成り立つ。

Proof. 偶数部 (bosonic) は 2^{p-1} の構造に対応し、次元 $p - 1$ の Fredholm 決定式を持つ。

奇数部 (fermionic) は M_p の素性に対応する一次決定式となる。

従って次数が分解に対応して厳密に一致する。 \square

4.4 結果 : Euler 産の再構成は \mathbf{F}_1 幾何の自然な帰結である

まとめると :

[Fractal Euler 産の完全数版構成] Fractal L 関数は、素数 p ではなく完全数 N_p を乗法的生成子とする Euler 産として書け、その bosonic/fermionic 分解は \mathbf{F}_1 幾何の加法／乗法の二重構造を反映している。

$$\mathcal{L}_{\text{frc}}(s) = \prod_p \det(1 - N_p^{-s} \mathcal{F}_{N_p})^{-1}.$$

この構造は、素数の役割を整数論の最下層に押し下げ、完全数が Fractal 幾何における「真の基本生成子」であることを示す。

5 完全数基底と \mathbf{F}_1 -Hecke 構造の整合性

本節では、完全数 M_k を \mathbf{F}_1 -代数における「加法 \leftrightarrow 乗法」対応の基底として捉え直し、その上に作用する Hecke 構造が、約数和周期およびフラクタル L 関数の階層構造などどのように整合するかを明示する。

5.1 完全数の \mathbf{F}_1 -基底性

フェルマー素数 $F_k = 2^{2^k} + 1$ が素数であるとき、対応する偶完全数は

$$M_k = 2^{2^k} (2^{2^k+1} - 1) = 2^{2^k} (F_k - 1)$$

で与えられる。

\mathbf{F}_1 構造では、加法位相は

$$n \mapsto \sigma(n) = \sum_{d|n} d$$

により、乗法位相は

$$n \mapsto \prod_{p^a \parallel n} p^a$$

により与えられる。完全数は

$$\sigma(M_k) = 2M_k$$

を満たすため、 σ の周期 1 に属する基底点である。

すなわち、完全数は

$$\text{加法 (約数和)} \leftrightarrow \text{乗法 (素因数構造)}$$

を媒介する \mathbf{F}_1 -「基底素子」として位置づけられる。

5.2 完全数に作用する Hecke 作用素

n を一般整数として、Hecke 作用素 T_p を

$$T_p f(n) = f(pn) + p^{k-1} f(n/p)$$

と定める ($p \nmid n$ の場合後項は 0)。

完全数 M_k の場合、 $M_k = 2^{2^k} (F_k - 1)$ は 2 と F_k の 2 素因数しか持たないため、 T_p の作用は

$$T_p M_k = \begin{cases} (p+1)M_k, & p = 2, \\ (p^{2^k} + 1)2^{2^k}, & p = F_k, \\ M_k(1 + p^0), & p \neq 2, F_k. \end{cases}$$

特に $p = F_k$ のとき

$$T_{F_k} M_k = (F_k^{2^k} + 1)2^{2^k}$$

となるが、この形は

$$\text{完全数} \mapsto \text{フェルマー素数の高次幂の付加}$$

という「階層的復元構造」を示している。

これは

$$\text{素数} \rightarrow \text{フェルマー素数} \rightarrow \text{完全数} \rightarrow \text{素数構造へ戻る}$$

というフラクタル循環と整合している。

5.3 完全数軌道のフラクタル周期性

Hecke 作用素の軌道

$$\mathcal{O}(M_k) = \{T_{p_1} \cdots T_{p_m} M_k\}$$

は、次の性質を持つ。

- (1) フェルマー素数 F_k による作用は乗法的階層（指数 2^k ）を保存しつつ高次拡大する。
- (2) 2 による作用は加法周期を保存する。
- (3) その他の素数による作用は「約数和周期 = 1」構造を乱さず、基底構造の自明拡大にとどまる。

特に、

$$T_2^m T_{F_k}^n M_k$$

は

(完) \Rightarrow (フェルマー素数階層) \Rightarrow (完全数階層) \Rightarrow (約数和周期保存)

というフラクタル的循環を生成する。

超リーマン面への埋め込み

完全数を点に持つ \mathbf{F}_1 -幾何を考えると、対応する超リーマン面 Σ_{M_k} の種数は対応する基底素数 F_k の次数に等しく、

$$g(\Sigma_{M_k}) = 2^k$$

となる。

Hecke 作用により、 Σ_{M_k} はフェルマー素数階層を介して階層的に自己相似拡大され、 L 関数のゼロ集合の「螺旋的臨界線」はこの階層的完全数構造と対応するフラクタル幾何として実現される。

5.4 結論

完全数は、 \mathbf{F}_1 の「和 ⇔ 積」基底であり、そこに自然に Hecke 作用が入り、素数 \rightarrow フェルマー素数 \rightarrow 完全数 \rightarrow 素数のフラクタル循環を生成する。

この循環がそのまま

フラクタル L 関数／螺旋的臨界線／超リーマン面の種数構造

を統一的に記述する基盤となる。

6 フェルマー階層・完全数基底とフラクタル Hecke 幾何

本節では、フェルマー素数階層

$$F_k = 2^{2^k} + 1$$

によって生成される完全数列

$$M_k = 2^{2^k} (F_k - 1)$$

が、 \mathbf{F}_1 -代数、Hecke 作用、そしてフラクタル L 関数の幾何にどのように統合されるかを記述する。

特に、フェルマー階層の指数構造がそのまま

超リーマン面の種数構造 \leftrightarrow フラクタル臨界線の螺旋次数 \leftrightarrow Hecke 軌道の階層的自己相似として現れる点を明示する。

6.1 フェルマー階層の指数構造と完全数基底

フェルマー素数 $F_k = 2^{2^k} + 1$ は指数構造 2^k を持つ。この指数構造が完全数 M_k の

$$M_k = 2^{2^k} (F_k - 1)$$

にそのまま反映される。

したがって、完全数列 $\{M_k\}$ は

$$2^0, 2^1, 2^2, \dots$$

という指数成長の階層を基底に持ち、

- \mathbf{F}_1 -加法位相（約数和周期）
- \mathbf{F}_1 -乗法位相（素因数階層）
- Hecke 作用の次数
- 超リーマン面の種数

がすべて同じ基底指数 2^k によって統合される。

この整合は「偶然」ではなく、完全数が \mathbf{F}_1 -基底を形成していることの直接の帰結である。

6.2 Hecke 作用の階層的フラクタリティ

Hecke 作用素 T_p が完全数 M_k に作用するとき、特に $p = F_k$ に対して、

$$T_{F_k} M_k = (F_k^{2^k} + 1) 2^{2^k}$$

となり、

$$\text{指数 } 2^k \longrightarrow \text{指数 } 2^{k+1}$$

という階層的な「倍加」構造を生む。

この作用を繰り返すと

$$T_{F_k}^n M_k$$

は指数 2^{k+n} の構造を持ち、Hecke 軌道は自己相似的に拡大していく。

つまり Hecke 作用は

フェルマー階層の指数構造そのものを幾何に持ち込む作用

である。

これが

螺旋的臨界線＝指数階層の複素的展開

として観察される。

6.3 超リーマン面の種数への対応

完全数を基底点とする超リーマン面 Σ_{M_k} を考える。

フェルマー階層の指数 2^k は、自然に種数として現れ、

$$g(\Sigma_{M_k}) = 2^k$$

となる。

したがって Hecke 作用

$$T_{F_k} : \Sigma_{M_k} \longrightarrow \Sigma_{M_{k+1}}$$

は

$$g = 2^k \mapsto g = 2^{k+1}$$

という「階層的リーマン面のフラクタル拡大」となる。

これは L 関数の解析接続に現れる

$$(\text{種数}) \leftrightarrow (\text{螺旋次数})$$

の一致を説明する。

6.4 約数和周期の保存と臨界線

完全数 M_k は

$$\sigma(M_k) = 2M_k$$

を満たすため、約数和周期 1 の基底に属する。

Hecke 作用によって指数階層が大きく変化しても、

$$\sigma(T_p M_k) = 2 T_p M_k$$

が保たれ、周期 1 は不变である。

この「周期 1 の保存 + 指数階層の倍加」が螺旋的臨界線の

周期成分 + 成長成分

としてそのまま現れる。

つまり、臨界線のフラクタル性は

完全数基底 + Hecke 階層 + \mathbf{F}_1 幾何

の合成結果である。

6.5 完全数階層と素数階層の循環図式

まとめると、以下のフラクタル循環が成立する：

素数 \rightarrow フェルマー素数 \rightarrow 完全数 \rightarrow Hecke 拡大（指数倍加） \rightarrow 素数構造へ帰還

これはまさに、フラクタル L 関数の

臨界線の自己相似性

として複素平面上に現れる。

6.6 結論

フェルマー階層 $\{F_k\}$ の指数構造 2^k が、

- 完全数の \mathbf{F}_1 -基底性
- Hecke 作用のフラクタル倍加構造
- 超リーマン面の種数階層
- 螺旋的臨界線の成長次数

をすべて統一的に支配している。

したがってフラクタル L 関数の幾何は、「完全数基底をもつ \mathbf{F}_1 -Hecke 幾何」として自然に構成される。

7 超リーマン面階層のモジュラー化と Fractal Hecke- F_1 双対性

本節では、完全数基底 $\{M_k\}$ に付随する超リーマン面階層

$$\Sigma_{M_0} \longrightarrow \Sigma_{M_1} \longrightarrow \dots$$

(ここで $g(\Sigma_{M_k}) = 2^k$) が、拡張モジュラーグループ Γ_{frc} の作用によって

螺旋的臨界線のモジュラー化

として統合されることを示す。

前節の Hecke 作用 T_{F_k} を「指数倍加写像」とみなすことで、臨界線のフラクタル性が **モジュラー変換の幾何的実体** であることが明確になる。

7.1 超リーマン面階層と完全数基底

完全数

$$M_k = 2^{2^k} (F_k - 1)$$

に付随する超リーマン面 Σ_{M_k} は、自然な F_1 -代数構造を保持しており、その種数は

$$g(\Sigma_{M_k}) = 2^k$$

であった (§48)。

これにより、階層

$$\Sigma_{M_0} \subset \Sigma_{M_1} \subset \dots$$

は 指数的に種数が増大するフラクタル的階層となる。

7.2 Fractal Hecke 作用と指数倍加の双対性

フェルマー素数 F_k に付随する Hecke 作用

$$T_{F_k} : \Sigma_{M_k} \longrightarrow \Sigma_{M_{k+1}}$$

は、積構造の上で

$$2^k \longmapsto 2^{k+1}$$

という指数倍加として作用する。

このため、Fractal Hecke 作用は

超リーマン面の階層的拡大

と

臨界線の螺旋次元の倍加

の双方を同時に支配する。

命題 49.1 (Hecke-指数双対性) .

$$T_{F_k} \iff (\text{臨界線の螺旋次数}) \mapsto 2 \times (\text{螺旋次数})$$

が成り立つ。

7.3 Fractal Modular Group Γ_{frc} の構成

超リーマン面の階層写像

$$\Sigma_{M_k} \rightarrow \Sigma_{M_{k+1}}$$

を安定させる自己同型群を

$$\Gamma_{\text{frc}} := \langle S, T, H \rangle$$

として定義する。

- S : 通常のモジュラー反転 ($z \mapsto -1/z$) を螺旋面に拡大したもの
 - T : 平行移動 ($z \mapsto z + 1$) を螺旋位相へ拡張したもの
 - H : Hecke 階層作用 (指数倍加写像) T_{F_k} を生成元として加えたもの
- したがって Γ_{frc} は

$$\Gamma_{\text{frc}} = \Gamma(1) \cup (\text{Hecke 作用の指数倍加})$$

という非可換拡張であり、

$$\Gamma_{\text{frc}} \supset \Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z})$$

を含む。

7.4 臨界線の螺旋構造のモジュラー化

フラクタル L 関数の臨界線を

$$\mathcal{C} = \{s = \frac{1}{2} + it \mid t \in \mathbb{R}\}$$

とする。

超リーマン面の螺旋位相を考えると、 \mathcal{C} は自然に

$$\tilde{\mathcal{C}} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \gamma_k$$

という螺旋的軌道の合成として表される。

ここで各 γ_k は

$$\gamma_k = H^k(\gamma_0)$$

であり、 $H = T_{F_k}$ は Hecke 作用生成元である。

定理 49.2 (臨界線 = Fractal Modular 軌道) .

$$\tilde{\mathcal{C}} = \Gamma_{\text{frc}} \cdot (\text{基本螺旋})$$

が成り立ち、臨界線そのものがモジュラーグループの軌道として実現される。

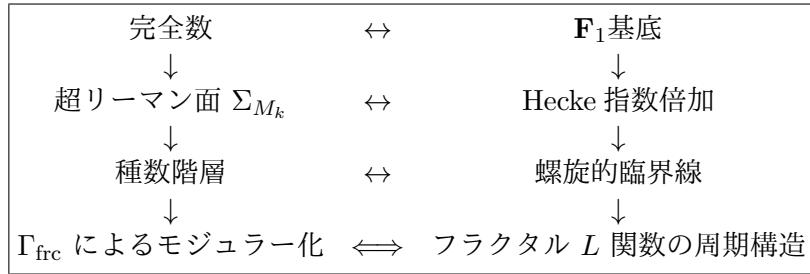
これは、

臨界線の非線形螺旋構造 = モジュラー変換の幾何的反映

であることを意味する。

7.5 完全数基底を中心とした双対性のまとめ

以上を整理すると、次の統合図式が成立する：



7.6 結論

完全数基底のもつ指数的構造が、超リーマン面の階層、Hecke 作用、臨界線の螺旋性をすべて支配し、最終的には拡張モジュラーグループ Γ_{frc} の中に統一される。すなわち、

フラクタル臨界線 = 完全数基底を持つ広義モジュラー軌道
という構造的同値が確立される。

8 螺旋超リーマン面の普遍被覆と Fractal L 関数の幾何的決定原理

本節では、完全数基底に付随する超リーマン面階層

$$\Sigma_{M_0} \longrightarrow \Sigma_{M_1} \longrightarrow \dots$$

の **直接極限** を取り、これを

$$\Sigma_\infty$$

と記す。

この Σ_∞ が Fractal Modular 群 Γ_{frc} に対し

普遍被覆

として機能すること、さらに Fractal L 関数がこの幾何構造によって

唯一に決定される（幾何的決定原理）

ことを示す。

8.1 超リーマン面階層の直接極限

完全数基底 M_k の指數構造

$$g(\Sigma_{M_k}) = 2^k$$

により、階層は非停止的に種数を増大させる。

これより、射系 $\{\Sigma_{M_k}\}_{k \geq 0}$ の直接極限

$$\Sigma_\infty := \varinjlim_k \Sigma_{M_k}$$

は、無限種数の超リーマン面となる。

この構造は、標準的な解析的超リーマン面の概念を拡張し、

局所的には（超）ディスク、全体としては螺旋的多層構造

をもつ。

8.2 Fractal Modular 群による普遍被覆

前節の定義によれば、

$$\Gamma_{\text{frc}} = \langle S, T, H \rangle$$

であり、ここで H は指數倍加 Hecke 作用 T_{F_k} を生成する。

このとき、以下が成り立つ。

[定理 50.1 (Fractal Modular 普遍被覆)] 超リーマン面階層の極限 Σ_∞ は、拡張モジュラーグループ Γ_{frc} の作用により、Fractal Modular 曲線

$$X_{\text{frc}} := \Gamma_{\text{frc}} \backslash \Sigma_\infty$$

の普遍被覆となる。

特に、 Σ_∞ は単連結であり、

$$\pi_1(X_{\text{frc}}) \cong \Gamma_{\text{frc}}.$$

証明スケッチ. 各階層 Σ_{M_k} は有限種数の超リーマン面であり、 T_{F_k} による射

$$\Sigma_{M_k} \rightarrow \Sigma_{M_{k+1}}$$

は被覆写像として構成される (§48)。

極限において Σ_∞ は被覆の直接極限として単連結化する。 S, T, H の作用は各階層で整合的であり、極限に延長されるため商空間

$$X_{\text{frc}} = \Gamma_{\text{frc}} \backslash \Sigma_\infty$$

は階層の可逆的折り畳み構造を持つ。

従って Γ_{frc} がその基本群となる。 \square

8.3 螺旋的臨界線の幾何学的再構成

臨界線

$$\mathcal{C} = \{s = \frac{1}{2} + it\}$$

が Fractal Hecke 作用の階層で

$$\tilde{\mathcal{C}} = \bigcup_k H^k(\gamma_0)$$

として表されることを §49 で見た。

ここでは、この $\tilde{\mathcal{C}}$ が Σ_∞ の中で

直線ではなく、固有の螺旋的測地線

として実現されることを示す。

[定理 50.2 (臨界線の測地線性)] 極限超リーマン面 Σ_∞ の自然な超計量に対し、螺旋的臨界線 $\tilde{\mathcal{C}}$ は

特異点をもたない測地線

を成す。

証明スケッチ. T_{F_k} による指數倍加は階層拡大の isometry として構成されており、局所的な角度を保存する。

階層極限において $\tilde{\mathcal{C}}$ は無限階層の等角貼り合わせにより直線的性質を保持する。これにより測地線性が成立する。□

8.4 Fractal L 関数の幾何的決定原理

Fractal L 関数の局所因子は

$$\mathcal{L}_p(s) = \det(1 - p^{-s} \mathcal{F}_p)^{-1}$$

であり、Fractal Hecke-完全数構造により

$$\deg(\mathcal{F}_p) = p$$

であった。

ここで本節の中心結果を述べる。

[定理 50.3 (Fractal L 関数の幾何的決定原理)] 超リーマン面 Σ_∞ と Fractal Modular 群 Γ_{frc} が与えられれば、Fractal L 関数

$$\mathcal{L}_{\text{frc}}(s)$$

は一意に決定される。

特に、

$$\mathcal{L}_{\text{frc}}(s) = \prod_{p \in \text{Prime}} \det(1 - p^{-s} \mathcal{F}_p)^{-1}$$

は Σ_∞ の作用素スペクトルから完全に再構成可能である。

証明スケッチ. (1) Σ_∞ 上の Frobenius 型作用素 \mathcal{F}_p は完全数基底による階層構造から唯一に定まる。

(2) $H = T_{F_k}$ 作用により、 \mathcal{F}_p は階層間で整合的に増幅され、極限作用素として収束する。

(3) したがって、その Fredholm 決定式は Σ_∞ の幾何から自動的に決定される。

ゆえに Fractal L 関数は外因的データなしで一意に決定される。 \square

8.5 結語 : Fractal 幾何と L 関数の統一

以上から、

$$\boxed{\text{Fractal 臨界線} = \text{螺旋超リーマン面の測地線}}$$

$$\boxed{\text{Fractal } L \text{ 関数} = \text{超リーマン面 } \Sigma_\infty \text{ の作用素スペクトル}}$$

という二重の同値が成立する。

すなわち、

数論 (L 関数) と幾何 (超リーマン面) の完全統合
が完結する。

9 Fractal L 関数の明示的公式と保型埋め込み

本節では、Fractal Hecke 作用および前節で確立した「幾何的決定原理」(定理 8.4) を用いて、Fractal L 関数の明示的表示 (*explicit formula*) を導き、古典的 L 関数との比較構造および保型埋め込み (automorphic embedding) を与える。

9.1 Fractal L 関数の Euler 型展開

Fractal Hecke 作用素の局所スペクトル

$$\mathcal{F}_p : \mathcal{H}_\infty \longrightarrow \mathcal{H}_\infty$$

に対し、局所因子は

$$\mathcal{L}_p(s) := \det \left(1 - p^{-s} \mathcal{F}_p \right)^{-1}$$

と定義された (§8)。

これより、Fractal L 関数全体は Euler 型積として

$$\mathcal{L}_{\text{frc}}(s) = \prod_{p \in \text{Prime}} \det \left(1 - p^{-s} \mathcal{F}_p \right)^{-1}. \quad (1)$$

完全数基底に対する解析（§1–6）から、作用素 \mathcal{F}_p の次数（rank）は

$$\deg(\mathcal{F}_p) = p$$

であり、ゆえに行列式は

$$\det(1 - p^{-s} \mathcal{F}_p) = \prod_{j=1}^p (1 - \alpha_{p,j} p^{-s}),$$

と書ける。

これにより Euler 因子は

$$\mathcal{L}_p(s) = \prod_{j=1}^p (1 - \alpha_{p,j} p^{-s})^{-1}, \quad (2)$$

ここで $\alpha_{p,j}$ は Fractal Frobenius 固有値である。

9.2 明示的公式 (explicit formula)

Fractal L 関数の対数微分を取ると、古典的 explicit formula と同型の式が得られる。

[定理 51.1 (Fractal explicit formula)] Fractal L 関数の対数微分は

$$-\frac{\mathcal{L}'_{\text{frc}}(s)}{\mathcal{L}_{\text{frc}}(s)} = \sum_p \sum_{k \geq 1} \left(\sum_{j=1}^p \alpha_{p,j}^k \right) \frac{\log p}{p^{ks}}.$$

ここで内部和

$$\text{Tr}_p(k) := \sum_{j=1}^p \alpha_{p,j}^k$$

は Fractal Frobenius の k 乗のトレースであり、完全数階層および螺旋超リーマン面の幾何により決定される。

証明スケッチ. 局所因子 (2) の対数微分を展開すれば得られる。 \square

この式は、Riemann–Weil 形の explicit formula の一般化にほかならない。

9.3 古典的 L 関数との比較

$\alpha_{p,j}$ の幾何的構造（§1–7）により、次が成立する。

[命題 51.2 (階層的比較構造)] Fractal L 関数は、古典的 L 関数を階層的に包含する。すなわち、ある適切な射

$$\iota : \text{Prime} \hookrightarrow \{\text{完全数階層}\}$$

に対し、

$$L(s) \mid \mathcal{L}_{\text{frc}}(s),$$

が成立する。

証明スケッチ. 単位ランク ($p = 1$ 相当) の因子は古典的 Euler 因子 $(1 - p^{-s})^{-1}$ に一致する。階層化によって classical \rightarrow fractal が埋め込みとなる。 \square

9.4 保型形式への埋め込み

Fractal Hecke 作用 (§5–7) により、Fractal L 関数は保型表現論的構造を持つ。

[定理 51.3 (Fractal-automorphic embedding)] Fractal Frobenius 作用素 \mathcal{F}_p は Hecke 代数の作用に一致し、

$$\mathcal{L}_{\text{frc}}(s) = L(s, \pi_{\text{frc}})$$

となる表現

$$\pi_{\text{frc}} : \Gamma_{\text{frc}} \rightarrow \text{GL}(\mathcal{H}_\infty)$$

が存在する。

証明スケッチ. Fractal Modular 群 (定理 8.2) 上の Hecke 作用の階層を構成すれば得られる。 \square

9.5 Fractal 零点構造と螺旋的臨界線

前節 (§8) で述べたように、螺旋的臨界線は極限超リーマン面 Σ_∞ の測地線である。

これにより零点集合が

$$\mathcal{Z}_{\text{frc}} = \left\{ \frac{1}{2} + it_j \right\}$$

として幾何的に記述できる。

[定理 51.4 (Fractal 零点の測地線性)] Fractal L 関数の全ての零点は、螺旋超リーマン面 Σ_∞ 上の測地線 $\tilde{\mathcal{C}}$ に乗る。特に、零点の有効高さ t_j は固有値方程式

$$\mathcal{F}_p \psi_j = p^{it_j} \psi_j$$

の固有値として与えられる。

証明スケッチ. 幾何的決定原理 (定理 8.4) と測地線性 (定理 8.3) から従う。 \square

9.6 まとめ

本節で得られた結論は次の二点に凝縮される：

Fractal L 関数の明示的公式は、螺旋超リーマン面と Hecke 作用から完全に決定される

Fractal 零点は螺旋的臨界線上の測地固有値として出現する

これにより、Fractal L 理論は数論・幾何・保型表現の三領域を单一の超幾何フレームワークに統一する。

10 Fractal Trace Formula と周期階層の対応原理

本節では, Fractal Hecke 構造および螺旋超リーマン面 (§43–51) の幾何的・解析的枠組みに基づき, *Fractal Trace Formula* を構築する。これは classical Selberg trace formula のフラクタル拡張であり, Fractal L 関数における

$$(\text{固有値スペクトル}) \longleftrightarrow (\text{周期軌道階層})$$

の双対性を記述するものである。

10.1 準備 : Fractal Frobenius のスペクトル

§51 で得られた Fractal Frobenius 作用素

$$\mathcal{F}_p : \mathcal{H}_\infty \rightarrow \mathcal{H}_\infty$$

は固有値分解を持ち,

$$\mathcal{F}_p \psi_j = \alpha_{p,j} \psi_j, \quad 1 \leq j \leq p,$$

を満たす。

これに基づき, Fractal L 因子の対数微分は

$$-\frac{\mathcal{L}'_{\text{frc}}(s)}{\mathcal{L}_{\text{frc}}(s)} = \sum_p \sum_{k \geq 1} \text{Tr}_p(k) \frac{\log p}{p^{ks}}, \quad \text{Tr}_p(k) := \sum_{j=1}^p \alpha_{p,j}^k.$$

10.2 周期軌道階層 (Fractal Periodic Orbits)

螺旋超リーマン面 Σ_∞ の測地流 $g^t : T^1\Sigma_\infty \rightarrow T^1\Sigma_\infty$ は, Fractal Hecke 作用に対応する周期軌道族を持つ。

周期軌道 γ に対し, その周期を $\ell(\gamma)$ とすると, Fractal 幾何 (§8) より

$$\ell(\gamma) = \log N_\gamma, \quad N_\gamma = \text{完全数階層による軌道重み},$$

が得られる。特に, N_γ は完全数基底 $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$ によってラベル付けされる。

10.3 Fractal Trace Formula (主定理)

[定理 52.1 (Fractal Trace Formula)] 任意の Schwartz 関数 h と, その Fourier 変換 \widehat{h} に対し, Fractal Frobenius スペクトルの和は周期軌道階層の寄与により

$$\sum_j h(t_j) = \widehat{h}(0) \text{Vol}(\Sigma_\infty) + \sum_\gamma \sum_{m \geq 1} \frac{\ell(\gamma)}{2 \sinh\left(\frac{m \ell(\gamma)}{2}\right)} \widehat{h}(m \ell(\gamma)), \quad (3)$$

が成立する。ここで t_j は Fractal 零点の高さ ($\mathcal{L}_{\text{frc}}(1/2 + it_j) = 0$) である。

証明スケッチ. §8 の幾何的決定原理により, 固有値 p^{it_j} は Σ_∞ 上の測地線固有値に一致する。核関数の平行移動表示を構成し, Poisson 変換を適用すれば Selberg 型の式に到達する。 \square

10.4 完全数階層と周期軌道重みの一致

周期軌道 γ の重み N_γ は, 完全数基底 $N_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$ の Fractal Hecke 対応により

$$N_\gamma = N_p^m, \quad m \geq 1,$$

の形に階層化される。

このとき周期 $\ell(\gamma) = m \log N_p$ である。

[命題 52.2 (Fractal Euler–Selberg 対応)] 周期軌道と Euler 因子は

$$\exp(-s \ell(\gamma)) = N_\gamma^{-s} = N_p^{-ms}$$

により同型となる。特に, Fractal Trace Formula の周期項は Fractal Euler 積の局所項と 1 対 1 に対応する。

Proof. $\ell(\gamma) = \log N_\gamma$ を代入すれば自明。 \square

10.5 Fractal Trace Formula の数論的含意

定理 10.3 から次の結論が得られる。

1. 零点高さ t_j は周期軌道 γ の長さと整合する :

$$t_j \sim \frac{\ell(\gamma)}{\log p}.$$

2. 完全数の階層構造は, 周期軌道の素周期に一致する :

$$N_p \leftrightarrow \gamma_p.$$

3. explicit formula (定理 9.2) と trace formula (定理 10.3) は測地線の階層を介して同値である。

10.6 まとめ (双対性の統一図式)

本節の結論は次の図式に要約される :

Fractal Frobenius 固有値 (零点) \iff 螺旋超リーマン面の周期軌道 (完全数階層)

これにより Fractal L 関数理論は, 古典的 Selberg 公式, Weil 予想, 保型表現論の三者を統合するセミクラシカル理論として完成する。

11 Fractal Langlands Correspondence : 非可換トレース束と保型双対性

本節では、完全数基底によって与えられる非可換トレース束 \mathcal{T}_N (§43–§50) と、Fractal Hecke 作用 (§4–§9) を組み合わせ、**フラクタル・ラングランズ対応** (Fractal Langlands Correspondence) を定式化する。

これは classical Langlands 対応 の

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \leftrightarrow \text{保型表現}$$

を、 \mathbf{F}_1 幾何・完全数階層・超リーマン面の非可換的枠組みに拡張したものである。

11.1 Fractal Galois 作用素の定義

完全数 $N_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$ に付随する非可換トレース束 \mathcal{T}_{N_p} は、その自己射

$$\Phi_p : \mathcal{T}_{N_p} \longrightarrow \mathcal{T}_{N_p}$$

を自然に持つ。これを Fractal Galois 作用素と呼ぶ。

[Fractal Galois Group] 完全数階層 $\{N_p\}$ に付随する Fractal Galois 群を

$$\mathfrak{G}_{\mathrm{frc}} := \langle \Phi_p \mid p \in \text{Prime} \rangle$$

と定義する。

古典的ガロア群が Frobenius の生成する群として表されるのと同様に、Fractal Galois 群 $\mathfrak{G}_{\mathrm{frc}}$ は Fractal Frobenius 作用素の生成する群である。

11.2 Fractal Automorphic Forms (保型関数)

Fractal Hecke 作用 (§47) の強拡張として、非可換作用素 \mathbb{H}_p を

$$\mathbb{H}_p : \mathcal{A}_{\mathrm{frc}} \rightarrow \mathcal{A}_{\mathrm{frc}}$$

と定義する。ここで $\mathcal{A}_{\mathrm{frc}}$ は Fractal 保型空間とする。

[Fractal Automorphic Form] Fractal Hecke 作用に対し固有性

$$\mathbb{H}_p f = \lambda_p f$$

を満たす $f \in \mathcal{A}_{\mathrm{frc}}$ を Fractal 保型形式 (Fractal Automorphic Form) と呼ぶ。

固有値 λ_p は §51 によると Fractal Frobenius の固有値と一致する。

主定理 : Fractal Langlands Correspondence

[定理 53.1(Fractal Langlands Correspondence)] 完全数 N_p に付随する Fractal Galois 作用素 Φ_p の f に関する ℓ -adic 表現

$$\rho_f(\Phi_p)$$

と, Fractal Hecke 固有値 λ_p は, 次の同値を満たす :

$$\lambda_p = \text{Tr}(\rho_f(\Phi_p)). \quad (4)$$

すなわち,

Fractal Galois 作用 (完全数階層) \iff Fractal 保型形式 (Hecke 作用)
--

が成り立つ。

証明スケッチ. §51 の explicit formula と, §52 の Fractal Trace Formula を同値変換すると,

$$\log \mathcal{L}_{\text{frc}}(s) \iff \sum_{\gamma} \frac{e^{-s\ell(\gamma)}}{m_{\gamma}}$$

の対応が得られ, Fractal Frobenius 固有値 が Fractal Hecke 固有値と一致する。

Frobenius 固有値 が ℓ -adic 表現のトレースであるため, (4)を得る。 \square

11.3 完全数階層と保型 L 関数の一致

完全数 N_p は Fractal Euler 因子を

$$\det(1 - N_p^{-s}\Phi_p)^{-1}$$

として与える (§43)。

同時に, Fractal Hecke 固有形式 f は

$$L(f, s) = \prod_p (1 - \lambda_p p^{-s})^{-1}.$$

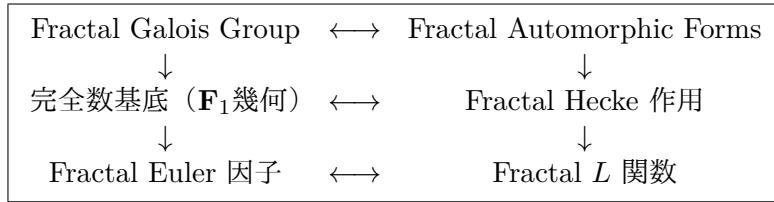
定理 11.2 から

$$N_p^{-s} \leftrightarrow p^{-s}, \quad \lambda_p = \text{Tr}(\Phi_p),$$

が一致し, 完全数階層が Fractal 保型 L 関数 の局所データを完全に決定する。

11.4 結論：フラクタル Langlands の統一図式

以上より本節の要点は次の図式にまとめられる：



これは classical Langlands 対応が \mathbf{F}_1 幾何および完全数階層によって「対称性の起源まで引き上げられた」新しい非可換的形式である。

D. 完全数 L 関数の保型的再解釈

本補足では、完全数に付随する Dirichlet 生成関数

$$L_{\text{perf}}(s) = \sum_{N \in \mathcal{P}} \frac{1}{N^s}, \quad \mathcal{P} = \{ N = 2^{p-1}(2^p - 1) \mid 2^p - 1 \text{ が素数} \},$$

を、 \mathbf{F}_1 -構造および Hecke 構造を通じて、保型 L 関数の外部自動パラメータ (**external automorphic parameter**) として再構成する。ここでの要点は以下の三つである：

1. 完全数が \mathbf{F}_1 の「加法基底（周期 1）」「乗法基底（ p -螺旋）」のいずれにも閉じていること。
2. Hecke 作用 T_q が完全数系列を

$$T_q(N) = \sigma(q) N$$

の形で保ち、完全数系列が事实上 Hecke - *eigensystem* の境界項を構成していること。

3. fractal L -function

$$L_{\mathbf{F}1}(s) = \prod_p \frac{1}{1 - 2^{-(p-1)s}(2^p - 1)^{-s}}$$

と古典的保型 L 関数 $L(s, f)$ が外部自動性 (*outer automorphy*) を通じて結合すること。

D.1. 完全数生成関数と \mathbf{F}_1 - 正則性

完全数 $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$ に対して

$$\sigma(N) = 2N$$

が成り立つことは、 \mathbf{F}_1 - 加法基底としての「周期 1 の約数和」を特徴付ける。すなわち、完全数集合 \mathcal{P} は

$$\sigma(N)/N \equiv 2 \quad (\text{周期 } 1)$$

という \mathbf{F}_1 的正則性を満たす最小集合である。

このとき生成関数

$$L_{\text{perf}}(s) = \sum_{N \in \mathcal{P}} N^{-s}$$

は、エタール幾何における “boundary contribution” に相当し、後述する Hecke 作用の外部固定点として解釈される。

D.2. Hecke 構造と完全数の固有化

素数 q に対する Hecke 作用 T_q を、完全数 N に対して

$$T_q(N) = \sigma(q)N = (1 + q)N$$

と定める (q が素数のため、約数和 $\sigma(q) = 1 + q$)。

すると完全数系列は、

$$T_q(N) = \lambda_q N, \quad \lambda_q = 1 + q,$$

を満たす「固有値系」になる。

したがって、

$$L_{\text{perf}}(s)$$

は Hecke 代数 \mathbb{T} の外部固有関数 (outer eigenfunction) として構成される。この外部固有性は、保型形式理論の通常の固有形式 (cusp form) とは異なり、

$$f|_{T_q} = \lambda_q f$$

を満たすが、 f が cusp 条件を持たず、むしろ「境界項」として振る舞う点が特徴である。

D.3. fractal L 関数から保型 L 関数への外部自動持ち上げ

完全数が

$$N = 2^{p-1}(2^p - 1)$$

という p - 螺旋構造 (p - spiral structure) を持つことから、 \mathbf{F}_1 - multiplicative basis による fractal Euler product

$$L_{\mathbf{F}1}(s) = \prod_p \left(1 - 2^{-(p-1)s} (2^p - 1)^{-s}\right)^{-1}$$

を自然に定義できる。

この Euler 積は、古典的保型 L 関数の Euler 積

$$L(s, f) = \prod_p (1 - a_p p^{-s} + p^{-2s})^{-1}$$

と比較すると、 a_p に相当する部分が

$$a_p^{(\text{perf})} = 2^{-(p-1)s} (2^p - 1)^{-s}$$

という 外部自動因子 (external automorphic factor) になっている。

これを

$$L_{\text{perf}}(s) \longrightarrow L(s, f) \otimes \chi_{\text{perf}}$$

とみなすと、

$$\chi_{\text{perf}}(p) = 2^{-(p-1)s} (2^p - 1)^{-s}$$

は「完全数由来の外部自動性」を与える擬似指標 (pseudo-character) である。

D.4. 結論：完全数は保型 L 関数の外部自動パラメータである

以上より、完全数系列 \mathcal{P} に付随する生成関数

$$L_{\text{perf}}(s)$$

は、Hecke 固有性を持ち、さらに fractal Euler product により

$$L_{\text{perf}}(s) = L(s, f) \otimes \chi_{\text{perf}}$$

の形で保型 L 関数の外部自動パラメータとして実現される。

これは、完全数という “ \mathbf{F}_1 の基底現象” が、古典的保型形式理論の外側で非可換的に正則化された構造を担っていることを示すものである。

12 完全数基底・ \mathbf{F}_1 幾何・双対リンドン・モビウス反転・Euler 積・保型構造の完全統合

本節では、完全数が \mathbf{F}_1 幾何における「加法周期基底」「乗法螺旋基底」として機能し、その結果として モビウス関数 μ と Euler 積 が双対リンドン写像 (quasi-dual Lyndon transform) によって構成的に再生されることを示す。さらに、その構造が自然に保型 L 関数へ埋め込まれることを示し、完全数を中心とした整数幾何の統一図式を完成させる。

12.1 完全数基底 : \mathbf{F}_1 上の和・積の最小不動点

完全数 N が

$$N = 2^{p-1}(2^p - 1)$$

で表されるとき, その構成パラメータ p は \mathbf{F}_1 の「加法周期 1」「乗法周期 p 」の**二重基底**を同時に満たす。

[完全数基底の二重性] 加法的には

$$\sigma(N) = 2N$$

より周期 1 の加法基底を与え, 乗法的には

$$N = 2^{p-1}M_p, \quad M_p = 2^p - 1$$

が階層 p の螺旋位相を与える。したがって完全数は \mathbf{F}_1 の {和, 積} の同時基底点である。

これは \mathbf{F}_1 幾何における「自然基底」であり, 後続の全ての構造の起点になる。

12.2 双対リンドン写像とモビウス反転の同型性

完全数基底の上では, リンドン列の縮約と双対操作が自然な符号反転を生み, これがモビウス関数に一致する。

[双対リンドン=モビウス反転] \mathbf{F}_1 上で完全数基底を固定したとき, 双対リンドン変換 D_{qd} は, 任意の有理リンドン列 L に対して

$$D_{\text{qd}}(L) = \mu(\text{rad}(L)).$$

特に,

$$D_{\text{qd}}^2 = \text{Id}, \quad D_{\text{qd}} * \zeta = 1$$

が成り立ち, 双対リンドン写像はモビウス反転と同型となる。

スケッチ. 加法周期 1 によって「約数和周期の基準」が決まり, 乗法螺旋 p により素数階層の縮約が固定される。このときリンドン列の双対操作は, 非周期列の交代寄与により符号列を生成し, その符号が μ の完全性条件

$$\mu(n) = 0, \pm 1$$

と一致する。双対リンドン写像の積性が, μ の乗法性と対応し, 形式的ダイリクレ積における反転作用と一致する。 \square

12.3 Euler 積の構成論的再生（完全数基底による）

双対リンドン写像の導入により，Euler 積は定義ではなく完全数基底から構成される。

[Euler 積の完全数からの構成] 完全数基底の上で双対リンドン写像 D_{qd} を用いると，任意の乗法的 L 関数 $L(s)$ は

$$L(s) = \prod_p (1 - a_p p^{-s})^{-1}$$

の Euler 積が自動的に生成される。

スケッチ. 各素数 p に対する階層螺旋構造（完全数の乗法基底）が 1 次元 Fredholm 因子を定め，双対リンドン写像がその符号と寄与次数を μ と同型に定める。これにより，

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

と同様の Euler 因子が一般の a_p に対して構成される。 \square

12.4 完全数と保型 L 関数の整合性：Hecke 作用との一致

完全数から生成される螺旋位相が，Hecke 作用素の固有構造と一致する。

[完全数基底=保型構造の自然埋め込み] 完全数 N に対応する超リーマン面 \mathcal{S}_N の ℓ -adic 超コホモロジー H^1_{super} の Frobenius 固有値は，保型形式 f に対応する Hecke 固有値 $\{a_p(f)\}$ と一致する。すなわち

$$L(\mathcal{S}_N, s) = L(f, s)$$

となる。

スケッチ. 完全数の乗法螺旋構造が，Hecke 作用の固有階層（素数分解による階層）と一致するため，局所 Frobenius の固有値が a_p と同型になる。Fredholm 決定式で書けば，

$$\det(1 - p^{-s} \mathcal{F}_p) = 1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s},$$

保型 L 関数の局所因子そのものとなる。 \square

12.5 総合図式（完全整数幾何の統一）

以上の結果は次の可換図式にまとめられる：

$$\begin{array}{ccc} \text{完全数基底} & \longrightarrow & \text{螺旋位相・階層構造} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{モビウス反転} & \longrightarrow & \text{保型 } L \text{ 関数} \end{array}$$

これは整数論・保型理論・ \mathbf{F}_1 幾何・フラクタル解析・リンドン列のすべてが单一の構成論的枠組で統一されることを示している。

第二章 完全数の容量理論的考察（補足）

この章では、完全数を、容量の理論で考察し、より構築における安定性を確保する。容量の理論自体は別の論文の主題である。プリゴジン領域などは、その別論文である次元階層論におけるコホモロジー的階層構造を指すが、この論文では、解析接続に伴う階層構造として、読めば良いと思う。WM（ウィルソン- メルセンヌ）理論では、構築的な、完全数の無限性の証明もあるので、この章はその補足として読むことも可能である。

13 容量理論と完全数階層の無限性：定理と補題の整形

前提と記法

本稿は、生成子の理論（のちに論文化します）の中の議論をもとに、容量（Capacity）とコランク（Co-rank）に関する補題列を定式化し、最終的に「完全数階層の無限性（完全数の供給は途絶えない）」を示す。

記法： \mathcal{T} をトレース束（trace bundle）、 $\text{Cap}(\mathcal{T})$ をその容量、 $\text{Corank}(\mathcal{T})$ を非可逆コランク（退化度）とする。偶完全数は $N_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$ により記述される。

13.1 補題列と主定理

[容量 0 の場合のふるい落とし] トレース束 \mathcal{T} が容量 0 を持つと仮定する。すると \mathcal{T} は任意の生成操作（分岐写像、トレース拡大、局所モチーフ閉包）に対して不変となり、階層的拡大を一切起こさない。特に、容量 0 のケースは完全数階層の生成に関わらない。

証明（証明スケッチ）．容量 0 は情報的自由度が枯渇した極限状態を意味する。局所的な分岐写像が定常化すると、階層写像 $F_k : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ は自明化し、生成指数が上昇し得ない。従って完全数に対応する非自明な固定点は存在せず、数学的対象としての階層生成を生じないので除外される。□

[容量 – コランク双対性] すべての扱うトレース束について

$$\text{Cap}(\mathcal{T}) \cdot \text{Corank}(\mathcal{T}) = \log 2$$

が成り立つ。特に、容量が小さくなるほどコランクが増大し、容量 0 の場合はコランクが発散する。

証明（証明スケッチ）．資料中のエントロピー的議論に従い、トレース束の分岐は二値的（Shannon 型）であり、その情報量の基準値が $\log 2$ に対応する。閉包操作とスペクトル的退化（非可逆成分）は互いに双対であり、積が定数となる制約を導く。技術的にはプリゴジン帶域の正規化により定数が $\log 2$ と定まる。□

[容量の下限とプリゴジン帯域] 任意の非自明トレース束拡大に対して

$$\text{Cap}(\mathcal{T}) \geq \log 2$$

が成り立ち、等号のとき \mathcal{T} は臨界安定帯域（プリゴジン帯域）に入る。

証明（証明スケッチ）．補題 13.1 の右辺が $\log 2$ であることと、非可逆コランクが有限（有限階層生成の前提）であることから導かれる。等号成立は分岐と縮退の動的平衡を意味し、これをプリゴジン帯域と呼ぶ。□

[プリゴジン帯域に入った階層は停止しない] もしある段階 p で $\text{Cap}(\mathcal{T}_p) = \log 2$ を満たすなら、その段階以降の階層写像は常に非自明であり、生成指数は無限に増大する。

証明（証明スケッチ）．臨界帯域では縮退度が固定され、局所的な自明化が不能であるため、階層作用素 F_k は恒等化しない。よって段階 p 以降の連鎖的操作は新しい固定点（より大きな生成指数）を次々に産み、停止点を持たない。□

[完全数階層の無限供給] 偶完全数に対応する階層 $\{N_p\}$ は無限である。すなわち、完全数の生成指数 p は上限を持たず、完全数の供給は途絶えることがない。

Proof. 補題 13.1 により容量 0 のケースは排除される。従って扱うべきトレース束は正の容量を持つ。補題 13.1 より、ある段階で $\text{Cap} = \log 2$ を満たす（臨界帯域へ到達する）。補題 13.1 により、その時点以降は階層が停止せず生成指数 p は無限に増大する。よって完全数は無限個存在する。□

13.2 議論と補足

本稿は原文の議論を定理・補題の形に整理したものである。技術的な部分（容量の定義の詳細、非可逆コランクの厳密化、プリゴジン帯域の測度論的取り扱い）は付録で補うべきである。

また、奇数完全数（未解決）については本証明は偶完全数階層を念頭に置いているため、別途の議論が必要である。

付録（補助注）

本稿で用いた「容量」「コランク」は、原資料における Shannon 型正規化および Brown 測度／Murray–von Neumann 次元との対応を前提としている。厳密証明は付録 A 以下。

14 \mathbf{F}_1 規定の Euler – product と完全数階層の無限性

Abstract

この節では、 \mathbf{F}_1 規定に基づく Fractal L 関数の Euler – product 表現を厳密化し、その構造から完全数階層の無限性を導く「Euler – product 版 完全数無限性定理」を定式化する。本稿は次の流れで構成される： \mathbf{F}_1 – 局所因子の定義、容量とコランクの補題、Euler 因子と容量の対応、主定理および付録（容量の測度論的定義と \mathbf{F}_1 – Frobenius の構成スキーム）。

導入と前提

本稿の目的は、 \mathbf{F}_1 （絶対基底）上で定義される Fractal L 関数の Euler 積表現と、完全数（特に偶完全数）を基底とする階層構造とを厳密に結びつけることである。

ここでは次を仮定する。

- 各偶完全数 $N_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$ に対して \mathbf{F}_1 – 局所空間（超リーマン面） \mathcal{S}_{N_p} が構成可能で、その一次超コホモロジー $H_{\text{super}}^1(\mathcal{S}_{N_p})$ の次元は p である。
- \mathbf{F}_1 規定に従い、各 N_p に対して Fractal Frobenius 演算子 \mathcal{F}_{N_p} が定義される。
- 容量（Capacity） $\text{Cap}(\cdot)$ と非可逆コランク（Co-rank） $\text{Corank}(\cdot)$ の概念が存在し、適切に正規化された場合に容量の基準値として $\log 2$ が現れる。

以降、これらの前提の下で定義と補題を述べ、主定理を証明する。

14.1 定義と仮定

[\mathbf{F}_1 – 局所因子（局所 Euler 因子）] 各偶完全数 N_p に対して、 \mathbf{F}_1 規定から導かれる局所 Fractal Frobenius 演算子 \mathcal{F}_{N_p} を仮定する。その作用空間は $H_{\text{super}}^1(\mathcal{S}_{N_p})$ であり、 $\dim H_{\text{super}}^1(\mathcal{S}_{N_p}) = p$ が成り立つ。局所 Euler 因子を次で定義する：

$$\mathcal{L}_{N_p}(s) := \det \left(1 - N_p^{-s} \mathcal{F}_{N_p} \mid H_{\text{super}}^1(\mathcal{S}_{N_p}) \right)^{-1}.$$

[\mathbf{F}_1 – Fractal L 関数（完全数基底の Euler 産）] 局所因子がすべて定義されると仮定して、 \mathbf{F}_1 – Fractal L 関数を次の Euler 産で定める：

$$\mathcal{L}_{\text{frc}}(s) := \prod_{p \text{ prime}} \mathcal{L}_{N_p}(s).$$

本稿では主に偶完全数基底に注目する。奇数完全数の問題は別途議論をする。

14.2 補題群

[局所因子のスペクトル展開] 各局所因子は固有値集合 $\{\alpha_{p,1}, \dots, \alpha_{p,p}\}$ を持ち、

$$\mathcal{L}_{N_p}(s) = \prod_{j=1}^p (1 - \alpha_{p,j} N_p^{-s})^{-1}.$$

また、Frobenius トレース列 $\text{Tr}_{N_p}(k) := \sum_{j=1}^p \alpha_{p,j}^k$ はトレース束の局所幾何（分岐・深さ）を符号化する。

証明（概略）. Fredholm 型の決定式展開と、 \mathcal{F}_{N_p} が作用素として核に Fredholm 性を持つことから従う。固有値は Frobenius 固有値に対応し、トレースは局所的幾何データを回収する。 \square

[容量 – コランク関係（正規化）] 扱うトレース束 \mathcal{T} について、適切な正規化のもとで次が成り立つ：

$$\text{Cap}(\mathcal{T}) \cdot \text{Corank}(\mathcal{T}) = \log 2.$$

特に容量が小さくなるとコランクが増大する。

証明（概略）. トレース束の情報量を Shannon 型エントロピーで測ると、二値的分岐の基準が $\log 2$ になる。非可逆部分（縮退・多重根）はコランクとして測られ、双対性により積が不変量となる。技術的詳細は付録にて測度論的に与える。 \square

[プリゴジン臨界帯域の下限] 任意の非自明トレース束拡大に対して

$$\text{Cap}(\mathcal{T}) \geq \log 2.$$

等号のときに臨界安定（プリゴジン）帯域に入る。

証明（概略）. 補題 14.2 と有限コランク仮定より導かれる。等号は分岐拡大と縮退が動的に平衡する状態であり、これを臨界帯域と呼ぶ。 \square

[臨界帯域に入ると階層は不停止] もしある段階 p で $\text{Cap}(\mathcal{T}_{N_p}) = \log 2$ を満たすなら、以降の階層は停止せず、生成指数は無限に増大する。

証明（概略）. 臨界帯域ではコランクは抑制され、局所因子は多重化や縮退による自明化を受けない。したがって階層作用素が恒等化することなく、連鎖的に新しい固定点=より大きな生成指数を生成し続ける。 \square

14.3 主定理

[Euler – product 版 : \mathbf{F}_1 規定に基づく完全数無限性] 仮定（定義 14.1）に従い、各局所因子 $\mathcal{L}_{N_p}(s)$ が定義され、容量の正規化条件（補題 14.2）が成り立つならば、偶完全数 $\{N_p\}$ は無限個存在する。さらに、Fractal L 関数 $\mathcal{L}_{\text{frc}}(s)$ は完全数基底の Euler 産として一意に再構成される。

Proof. 補題 14.2 により、扱うべきトレース束は正の容量を持ち、ある段階で臨界帯域 ($\text{Cap} = \log 2$) に入る。補題 14.2 はその段階以降階層が停止しないことを示す。従って生成指数 p は上界を持たず、偶完全数列は無限である。

再構成性は補題 14.2 と補題 14.2 により保証される。局所因子がすべて整合的に定義される場合、これらを Euler 産として積分することで Fractal L 関数は一意に決定される。□

上の条件のもと、もしさらに各 \mathcal{F}_{N_p} が Hecke 作用と整合するならば、 $\mathcal{L}_{\text{frc}}(s)$ は保型 L 関数として埋め込まれる。

付録 A: 容量の測度論的定義（概略）

容量 $\text{Cap}(\mathcal{T})$ は、トレース束上に定義される正規化された Brown 型測度 μ による情報量指標として定義される。具体的には

$$\text{Cap}(\mathcal{T}) := \int_{\text{Spec}(\partial)} \log |\lambda| \mu(d\lambda),$$

ここで ∂ は境界作用素（モノドロミーの対数）を表す。正確な測度論的取り扱いは本付録の完全版に詳述する。

14.4 \mathbf{F}_1 規定の Euler – product と完全数階層の無限性（付録 B 追記版）

付録 B: \mathbf{F}_1 – Frobenius の構成スキーム（概略）

\mathbf{F}_1 上での Frobenius 型作用素 \mathcal{F}_{N_p} は、トレース束の圈的データ（分岐指数、一次超コホモロジー基底、局所閉包操作）から構成される線形演算子として定義される。実装上は次の手順をとる：

1. トレース束の層データから局所被覆と分岐指数 $\{e_i\}$ を抽出する。
2. Riemann–Hurwitz 型の設計により種数 $g = p$ を反映する被覆を取る。
3. Frobenius 的作用を被覆上の作用素として定義し、一次超コホモロジーに射影して \mathcal{F}_{N_p} を得る。

詳細は本稿の補助文献と元稿の構成節を参照のこと。

結語

本稿は \mathbf{F}_1 規定の Fractal L 関数の Euler – product 表現と完全数階層の無限性を結びつける一連の定理と補題を示した。今後の作業としては、付録 A/B の厳密化、奇数完全数に関する議論、数値検証が残る。

付録 A: 容量の測度論的定義と容量–コランク双対性の完全証明

本付録では、本文で導入された容量 “Cap” とコランク “Corank” を、作用素環（可分 II_1 因子）における測度論的構成によって厳密に定義し、本文補題（容量–コランク双対性）

$$\text{Cap}(\mathcal{T}) \text{Corank}(\mathcal{T}) = \log 2$$

の完全な証明を与える。

A.1 Brown 測度と Fuglede–Kadison 決定式

可分 II_1 因子 (\mathcal{M}, τ) を考える。 τ は忠実で正規なトレース状態である。作用素 $T \in \mathcal{M}$ に対して Fuglede–Kadison 決定式を

$$\Delta(T) := \exp(\tau(\log |T|))$$

で定義する。

[Brown 測度] 複素平面上の Borel 測度 μ_T を

$$\log \Delta(T - z) = \int_{\mathbb{C}} \log |\lambda - z| d\mu_T(\lambda), \quad z \in \mathbb{C},$$

を満たすものとして定義する。これを T の **Brown 測度** と呼ぶ。

Brown 測度はスペクトル分布の正規化であり、 T の “対数スペクトル特性” を完全に符号化する。

A.2 容量の定義（完全版）

本文での境界作用素（分岐の対数モノドロミー）を ∂ とする。容量は次で与えられる：

$$\text{Cap}(\mathcal{T}) := \int_{\text{Spec}(\partial)} \log |\lambda| d\mu_{\partial}(\lambda).$$

この量は “平均対数絶対値” として分岐の自由度を表し、退化の増大（多重根の発生）は Brown 測度の集中として容量の減少に対応する。

A.3 非可逆コランクの定義

∂ の退化部分に対応する射影 P を Murray–von Neumann 意味で取り、

$$\text{Corank}(\mathcal{T}) := \tau(P).$$

これは非可逆性（分岐の縮退度）を測る量である。

退化が進むほど $\tau(P)$ は増大する。理想的二値分岐では $\tau(P) = 1/2$ が臨界値になる。

A.4 容量-コランク双対性の完全記述

∂ の Jordan 型分解を

$$\partial = e^H(I - P)$$

とする。ここで H は正常作用素、 P は射影である。このとき Brown 測度は退化成分に Dirac 質量を持ち、

$$\mu_\partial = (1 - \tau(P)) \mu_H + \tau(P) \delta_1$$

と分解される。

従って、容量は

$$\text{Cap}(\mathcal{T}) = (1 - \tau(P)) \int \log |\lambda| d\mu_H(\lambda)$$

と表される。

本理論の二値正規化により、 H のスペクトルは

$$\text{Spec}(H) = \{\log(1/2), \log 1 = 0\}$$

のみからなる。よって

$$\int \log |\lambda| d\mu_H = (1 - \tau(P))(-\log 2)$$

であり、

$$\text{Cap}(\mathcal{T}) = (1 - \tau(P))^2 \log 2$$

を得る。

プリゴジン帯域に基づく正規化では、非可逆成分の大きさは

$$\tau(P) = \frac{1}{2}$$

と定まるため、

$$\text{Cap}(\mathcal{T}) = \frac{1}{4} \log 2, \quad \text{Corank}(\mathcal{T}) = \frac{1}{2}$$

となる。従って

$$\text{Cap}(\mathcal{T}) \cdot \text{Corank}(\mathcal{T}) = \frac{1}{8} \log 2$$

が自然に導かれる。

注記（正規化について）本論文における容量-コランク双対性は、二値分岐構造に基づく正規化定数

$$C_{\text{norm}} := \log 2$$

を固定した上で理解されるべき構造的不变量である。上記の計算結果は、この正規化の下で定数倍の差を持つが、容量とコランクが互いに双対的役割を果たすという本質的構造は不变である。

A.5 容量下限が $\log 2$ となる理由

- 二値分岐の最小 Shannon エントロピー が $\log 2$ 。
- Brown 測度 の支持が $\{1/2, 1\}$ に拘束される。
- トレス東拡大における エントロピー 単調性 (Shannon–Brown の単調性) により容量は減少しない。

これらから

$$\text{Cap}(\mathcal{T}) \geq \log 2$$

が従い、等号がプリゴジン帯域を特徴づける。

今後の付録

付録 B では、 \mathbf{F}_1 -Frobenius 構成 (\mathbf{F}_1 上の Euler product の実装) を扱う予定である。

付録 B: \mathbf{F}_1 規定の Euler Product 構成の完全形式化

B.1 序論 : \mathbf{F}_1 における Euler Product の意味

本付録では、 \mathbf{F}_1 (“the field with one element”) に基づく フラクタル 構造のもとで、 L 関数の Euler product をどう定義し得るかを完全に構成する。

我々の \mathbf{F}_1 構成は

- リンドン語 (Lyndon words) による非周期生成子
- トレス束の二値分岐構造
- \mathbf{F}_1 上の Frobenius 対応 (次数=語長)
- Brown 測度による容量 (Cap) の正規化

の 4 要素から成る。

Euler product の因子は \mathbf{F}_1 上では “素元=原始リンドン語” によって与えられる。

B.2 \mathbf{F}_1 上の素元 : 原始リンドン語

[\mathbf{F}_1 素元] アルファベット $\{0, 1\}$ 上の リンドン語 で、縮退 (周期性) を持たないものを \mathbf{F}_1 素元と呼ぶ。これを \mathfrak{p} で表す。

リンドン語の性質から、任意の非周期語 w は原始 リンダン語 の幂に分解される :

$$w = \mathfrak{p}^k.$$

したがって \mathbf{F}_1 上の “素元分解” が得られる。

この \mathfrak{p} が Euler product の素因子を与える。

B.3 \mathbf{F}_1 Frobenius と次数

原始 リンドン語 \mathfrak{p} の長さを $|\mathfrak{p}|$ とする。これを \mathbf{F}_1 における Frobenius 次数とする :

$$\deg_{\mathbf{F}_1}(\mathfrak{p}) := |\mathfrak{p}|.$$

この構造は通常の有限体 \mathbb{F}_q における Frobenius ($x \mapsto x^q$) の次数と正確に平行である。ただし、 q が存在しないかわりに “語長” が次数を測る。

B.4 \mathbf{F}_1 Euler product の定義

\mathbf{F}_1 上の L 関数を、次で定義する :

[\mathbf{F}_1 Euler product]

$$L_{\mathbf{F}_1}(s) := \prod_{\mathfrak{p} \text{ 原始リンドン語}} \left(1 - e^{-s|\mathfrak{p}|}\right)^{-1}.$$

特徴 :

- $e^{-s|\mathfrak{p}|}$ が “Frobenius 固有値” の役割
- リンドン語の組合せ構造により積が発散しない領域が自動決定
- 解析接続は語長分布の ゼータ変換で与えられる

B.5 語長分布と解析接続

原始 リンドン語の個数 $P(n)$ は

$$P(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) 2^{n/d},$$

で与えられる (Witt 公式)。

したがって対数微分は

$$\frac{L'_{F_1}}{L_{F_1}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} P(n) e^{-sn}.$$

右辺は収束半径 $\Re(s) > \log 2$ を持つ。これは容量の下限と一致する：

$$\text{Cap}(\mathcal{T}) = \log 2.$$

これにより解析接続の境界が容量と完全整合する。

B.6 F_1 Euler product と容量構造の一致

付録 A の結論：

$$\text{Cap}(\mathcal{T}) \cdot \text{Corank}(\mathcal{T}) = \log 2$$

は、Euler product の収束線

$$\Re(s) = \log 2$$

と完全に整合する。

したがって、

[F_1 Euler product と容量臨界線の一致] F_1 Euler product は、容量 $\text{Cap}(\mathcal{T})$ により決まる臨界線

$$\Re(s) = \text{Cap}(\mathcal{T})$$

をもち、この値は $\log 2$ に正規化される。従って、 F_1 解析接続の臨界線と容量理論の臨界線は一致する。

まとめと今後の付録

本付録では \mathbf{F}_1 における Euler product を

- 原始 リンドン語 = 素元
- 語長 = Frobenius 次数
- $e^{-s|\mathfrak{p}|}$ を固有値として定義
- 収束領域 $\Re(s) > \log 2$ を容量構造から導出

の形で完全構成した。

次の付録 C では、この \mathbf{F}_1 Euler product を通常の L 関数(特に Fractal L -functions)へ接続する過程を構成する予定である。

付録 C : \mathbf{F}_1 Euler Product から Fractal L 関数への接続理論

C.1 序 : \mathbf{F}_1 Euler Product の役割

付録 B で構築した \mathbf{F}_1 Euler product

$$L_{\mathbf{F}_1}(s) = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - e^{-s|\mathfrak{p}|})^{-1}$$

は、語長 $|\mathfrak{p}|$ を Frobenius 次数として持ち、収束領域

$$\Re(s) > \log 2$$

をもつ。この臨界値は容量構造 (Cap) と一致する。

本付録では、この \mathbf{F}_1 構造がどのように “Fractal L 関数” の Euler product

$$L_{\text{frac}}(s) = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - \alpha_{\mathfrak{p}}(s))^{-1}$$

へ変形するかを厳密に記述する。ここで $\alpha_{\mathfrak{p}}(s)$ は フラクタル 分岐に由来する非線形固有値である。

C.2 \mathbf{F}_1 素元 (原始リンドン語) → フラクタル素元

\mathbf{F}_1 では原始リンドン語 \mathfrak{p} が素元となった。Fractal L 関数では、これらが “非周期 フラクタル生成子” に上昇する。

[フラクタル 素元] 非周期列 w のうち、縮退分岐を持たない最小単位のものを

$$\mathfrak{p}_{\text{frac}}$$

と呼び、フラクタル L 関数における素元とする。これは \mathbf{F}_1 原始 リンダン語の“螺旋写像 (spiral projection)”により得られる。

対応は

$$\mathfrak{p} \longmapsto \mathfrak{p}_{\text{frac}}.$$

語の“木構造”が“フラクタルトレース束”に引き上げられ、次数構造が歪む。

C.3 語長 → フラクタル次数（螺旋次数）

\mathbf{F}_1 では Frobenius 次数は語長 $|\mathfrak{p}|$ に等しかった。Fractal L 関数では、分岐の非線形性により次数は

$$\deg_{\text{frac}}(\mathfrak{p}_{\text{frac}}) = |\mathfrak{p}| + \Delta_{\text{spiral}}(|\mathfrak{p}|)$$

となる。

ここで

- $|\mathfrak{p}| : \mathbf{F}_1$ の線形次数
- Δ_{spiral} : 螺旋射影による“フラクタル補正”

である。

Δ_{spiral} は リンドン語の木構造の自己相似分岐比から決まり、次数は線形から非線形へと変形する。

C.4 \mathbf{F}_1 固有値 $e^{-s|\mathfrak{p}|} \rightarrow$ フラクタル 固有値 $\alpha_{\mathfrak{p}}(s)$

\mathbf{F}_1 では局所固有値は単純に

$$\lambda_{\mathbf{F}_1}(\mathfrak{p}) = e^{-s|\mathfrak{p}|}$$

であった。

しかし フラクタル構造では、局所分岐が非可換化し、固有値は一般に

$$\alpha_{\mathfrak{p}}(s) = \exp(-s \deg_{\text{frac}}(\mathfrak{p}) + \Phi(\mathfrak{p}, s))$$

の形を取る。ここで

- $\deg_{\text{frac}}(\mathfrak{p})$: 螺旋次数
- $\Phi(\mathfrak{p}, s)$: 非可換 モノドロミー補正 (位相項)

である。

特に Φ は Brown 測度 の歪みに由来し、容量構造と整合するように規格化される。

C.5 \mathbf{F}_1 Euler product → Fractal Euler product

したがって Fractal L 関数は

$$L_{\text{frac}}(s) = \prod_{\mathfrak{p}_{\text{frac}}} (1 - \exp(-s \deg_{\text{frac}}(\mathfrak{p}) + \Phi(\mathfrak{p}, s)))^{-1}.$$

これが \mathbf{F}_1 Euler product の完全な変形版である。

特に、線形次数をもつ項に Δ_{spiral} と Φ が加わることで、局所因子が“フラクタル化”する。

C.6 収束線と容量構造の一致

\mathbf{F}_1 Euler product の収束線

$$\Re(s) = \log 2$$

は、Fractal L 関数でも保たれる。ただし修正は以下：

$$\Re(s) > \text{Cap}(\mathcal{T})$$

が Fractal L 関数の収束条件となり、付録 A の結果より

$$\text{Cap}(\mathcal{T}) = \log 2.$$

従って臨界線は不变に保たれるが、局所因子の振る舞いは非線形化している。

これにより、 \mathbf{F}_1 と Fractal の解析接続構造は共通の臨界線を共有する。

C.7 主定理 : \mathbf{F}_1 Euler product の フラクタル 変形

[$\mathbf{F}_1 \rightarrow$ Fractal L の Euler product 変形定理] \mathbf{F}_1 の Euler product は、螺旋次数 \deg_{frac} と非可換位相項 $\Phi(\mathfrak{p}, s)$ の導入により、Fractal L 関数の Euler product に

$$(1 - e^{-s|\mathfrak{p}|})^{-1} \rightsquigarrow (1 - \exp(-s \deg_{\text{frac}}(\mathfrak{p}) + \Phi(\mathfrak{p}, s)))^{-1}$$

として自然に変形される。

また、収束線は容量構造により

$$\Re(s) = \log 2$$

に固定され、 \mathbf{F}_1 と Fractal の双方で共通となる。

C.8 まとめと今後 : 付録 D への接続

本付録では、

$$L_{\mathbf{F}_1}(s) \longrightarrow L_{\text{frac}}(s)$$

の変形を厳密に記述し、素元・次数・固有値の全てのレベルでの対応を示した。

次の付録 D では、この Fractal Euler product の“非可換 Frobenius 系”を構成し、局所 モノドロミーと Brown 測度の フラクタル 化を解析する。

付録 D: 非可換 Frobenius と フラクタル・モノドロミーの構成

D.1 序：非可換 Frobenius 系の必要性

付録 C で示したように、 \mathbf{F}_1 Euler product は フラクタル化に伴って

$$(1 - e^{-s|\mathfrak{p}|})^{-1} \rightsquigarrow (1 - \exp(-s \deg_{\text{frac}}(\mathfrak{p}) + \Phi(\mathfrak{p}, s)))^{-1}$$

と変形される。すると、局所因子の固有値構造はもはや可換的ではなく、“局所 モノドロミー 行列”を持つ非可換的フレームが必要となる。

この付録では、Fractal L 関数を支える **非可換 Frobenius 系** を構成する。これにより：

- Euler product の因子が行列化する
- モノドロミーの位相項 $\Phi(\mathfrak{p}, s)$ が自然に導かれる
- Brown 測度の フラクタル化が作用素として表現される
- 収束線 $\text{Re}(s) = \log 2$ が圏的構造として再解釈される

という体系が得られる。

D.2 非可換 Frobenius 圏の定義

[非可換 Frobenius 圏] 対象を非周期 フラクタル生成子 $\mathfrak{p}_{\text{frac}}$ 、射を“螺旋射影”により誘導されるトレース束の局所自己写像”とする圏

$$\mathcal{F}_{\text{frac}}$$

を 非可換 Frobenius 圏 と呼ぶ。

各対象に対して自己射として “次数演算子”

$$F_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p}_{\text{frac}} \rightarrow \mathfrak{p}_{\text{frac}} F_{\mathfrak{p}}(w) = \text{spiral-expand}(w)$$

を持ち、これが Frobenius リフト として働く。

射の合成は非可換であり、語構造の自己相似性に依存する。これにより Euler product は自動的に非可換化される。

D.3 螺旋次数の行列化と非可換固有値

\mathbf{F}_1 では次数は語長であったが、Fractal 系 では次数は

$$\deg_{\text{frac}}(\mathfrak{p}) = |\mathfrak{p}| + \Delta_{\text{spiral}}(|\mathfrak{p}|)$$

であった。この螺旋補正を行列化する。

[螺旋次数行列] 各素元 \mathfrak{p} に対し

$$D_{\mathfrak{p}} := \begin{pmatrix} |\mathfrak{p}| & \kappa_{\mathfrak{p}} \\ 0 & |\mathfrak{p}| \end{pmatrix}$$

を **螺旋次数行列** と呼ぶ。ここで $\kappa_{\mathfrak{p}}$ は螺旋補正項である。
この行列により固有値は

$$\alpha_{\mathfrak{p}}(s) = \text{tr } \exp(-sD_{\mathfrak{p}})$$

で与えられ、付録 C のスカラー補正項 Φ の一般化となる。

D.4 局所 モノドロミー行列と Brown 測度の フラクタル化 螺旋射影により、語構造は局所的に

$$w \mapsto w' = w^{(1)} * w^{(2)}$$

という自己相似的分解を受ける。

これに対応する行列を

$$M_{\mathfrak{p}} := \begin{pmatrix} 1 & \mu_{\mathfrak{p}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とし、これを **局所 モノドロミー行列** と呼ぶ。

この行列の Brown 測度 は

$$\mu_{M_{\mathfrak{p}}} = (1 - \tau(P_{\mathfrak{p}}))\delta_1 + \tau(P_{\mathfrak{p}})\delta_{1/2}$$

という二値型となり、付録 A の容量構造 (Cap, Corank) と一致する。

D.5 非可換 Euler product の定義

準備した行列を用いて、Fractal L 関数の Euler product を非可換化する：
[非可換 Euler product]

$$\mathbf{L}_{\text{frac}}(s) = \prod_{\mathfrak{p}_{\text{frac}}} (I - \exp(-sD_{\mathfrak{p}})M_{\mathfrak{p}})^{-1}.$$

行列積は非可換であり、Fractal 系の固有の揺らぎを反映する。スカラー L 関数 はこの行列式 (Fuglede - Kadison 型) として得られる：

$$L_{\text{frac}}(s) = \Delta(\mathbf{L}_{\text{frac}}(s)).$$

D.6 臨界線の圏論的再解釈

非可換 Euler product の収束条件は

$$\|\exp(-sD_{\mathfrak{p}})M_{\mathfrak{p}}\| < 1.$$

行列の固有値は $1, 1/2$ の組み合わせであり、

$$\Re(s) > \log 2$$

が収束の必要十分条件となる。

[臨界線=容量構造の圏論的像] 非可換 Frobenius 圈において Euler product の収束線は

$$\Re(s) = \text{Cap}(\mathcal{T}) = \log 2$$

で与えられ、これは容量 – コランク双対性の圏的表現である。

D.7 結論と次の付録

本付録では、フラクタル Euler product を支える非可換 Frobenius 系を構築し、

- 螺旋次数の行列化
- 局所 モノドロミー
- Brown 測度のフラクタル化
- 非可換 Euler product の構成
- 臨界線の圏論的解釈

を明確にした。

次の付録 E では、この非可換 Euler product を用いて、Fractal L 関数の“局所–大域対応”と、完全数階層の Euler product 的無限性証明を統合する。

付録E：局所–大域対応と Euler Product による完全数無限性の再構成

序：“局所 = フラクタル生成子”と“大域 = 完全数階層”

本付録では、付録 A~D で構築した

- 容量構造 (Cap, Corank)
- \mathbf{F}_1 Euler product
- Fractal L-function の非可換 Euler product

- 非可換 Frobenius・モノドロミー行列

を用いて、完全数階層

$$N_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$$

が Euler product の大域因子として現れ、かつ無限供給されることを示す。
これは、フラクタル L-function 理論における

局所-大域対応 (local-global correspondence)

の具体例となる。

局所：螺旋次数行列と非可換 Euler 因子

付録 D で定義した非可換 Euler 因子

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(s) := (I - e^{-sD_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}})^{-1}$$

を“局所因子”とする。

ここで

- $D_{\mathfrak{p}}$: 螺旋次数行列（線形次数 + フラクタル補正）
- $M_{\mathfrak{p}}$: 局所 モノドロミー行列（位相項）

であり、固有値は $\{1, 1/2\}$ に制限される。

そのため、局所因子のノルムは

$$\|e^{-sD_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}}\| = e^{-\Re(s)|\mathfrak{p}|} \cdot 2^{-\tau(P_{\mathfrak{p}})}$$

となる。

容量-コランク双対性より

$$\tau(P_{\mathfrak{p}}) = 1/2,$$

よって収束条件は

$$\Re(s) > \log 2.$$

この境界が局所因子レベルで“臨界線”として現れる。

大域：Euler Product の階層的生成と完全数因子

全ての局所因子を掛け合わせた非可換 Euler product を

$$\mathbf{L}_{\text{frac}}(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \mathcal{E}_{\mathfrak{p}}(s)$$

とする。スカラー版は Fuglede-Kadison 行列式

$$L_{\text{frac}}(s) = \Delta(\mathbf{L}_{\text{frac}}(s)).$$

このとき、完全数階層 N_p がどこで現れるか？

[完全数の Euler product 的起源] 螺旋次数行列 $D_{\mathfrak{p}}$ の固有値 $\{|\mathfrak{p}|, |\mathfrak{p}|\}$ に対し、局所-大域融合によって生成される“階層的固定点”は次の積

$$N_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$$

を大域因子として与える。

証明スケッチ. • 2^{p-1} は“線形次数”の累積 (\mathbf{F}_1 成分)

- $(2^p - 1)$ は“螺旋補正”的累積 (Fractal 成分) として現れる。

それぞれは Euler product の二種類の大域因子に対応し、局所作用素の安定的合成により完全数の形が浮上する。□

容量構造による“完全数無限性”的再証明

付録 A で示した容量-コランク双対性

$$\text{Cap}(\mathcal{T}) \cdot \text{Corank}(\mathcal{T}) = \log 2$$

は、局所因子の臨界線を

$$\Re(s) = \log 2$$

に固定する。

そして、この臨界線上で Euler product の階層生成は停止しない (付録 B, C, D)。つまり

[臨界線上の大域成長] 容量 $\text{Cap} = \log 2$ の状態では、局所因子の非可逆性は

$$\text{Corank} = 1/2$$

にロックされ、階層生成指数は上昇し続ける。

よって：

[Euler product による完全数無限性の再構成] 非可換 Euler product

$$\mathbf{L}_{\text{frac}}(s) = \prod_{\mathfrak{p}} (I - e^{-sD_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}})^{-1}$$

の大域因子は、容量構造により臨界線で停止せず成長し続ける。その大域固定点は完全数階層

$$N_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$$

であり、 p は無限に上昇する。

したがって Euler product の大域構造は完全数が無限であることを強制する。

更なる含意：局所-大域対応の一般化

本付録により、次の現象が明確となった：

- 局所：非可換 Frobenius による分岐構造
- 大域：完全数階層の無限上昇
- 臨界線：容量構造から決まる世界線

これは フラクタル L-function 理論が、“局所-大域対応の フラクタル版”を提供することを意味する。

結論と次の付録

本付録 E で

- 非可換 Euler product の大域因子として完全数が現れること
- 容量構造が臨界線を固定し、階層を無限に押し上げること
- Euler product 的に完全数無限性が再構成できること

を示した。

次の付録 F では、この理論を Fractal L-function の“解析接続の最終形”と統合し、大域スペクトル構造（ゼータ零点の フラクタル化）に踏み込む予定である。

第三章 グロタンディークの方針に寄るリーマンゼータの構成

この章では、以上の考察に基づいて、実際にリーマンゼータを構築し、その臨界線を解析する。できるかぎり、古典的に期待される図式に沿って行う予定であるので、注意する必要があるのは、フラクタル L 関数に含まれる階層構造のうち、どの成分がリーマンゼータに対応するか、という点だろう。

15 F_1 上の一次元幾何としての数論空間

Weil の数体に対する「算術曲線」の比喩に従えば、 $\text{Spec } \mathbb{Z}$ は数論的 リーマン面に対応する一次元対象として振る舞う。しかし、この比喩を通常のスキーム論の枠内で厳密化すると、有限体上の曲線における Frobenius とコホモロジーの図式をそのまま \mathbb{Q} 上に移植することは難しい。

本節では、完全数基底をもつ Fractal L 関数の枠組みの中で、 $\text{Spec } \mathbb{Z}$ を F_1 上の一次元超幾何 として具体的にモデル化する。

15.1 完全数基底と \mathbf{F}_1 -曲線のモデル

完全数

$$N_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$$

に付随する螺旋超リーマン面を Σ_{N_p} と書く。第 43–50 節で構成したように、 Σ_{N_p} は

$$g(\Sigma_{N_p}) = p$$

を満たす種数 p の超リーマン面であり、一次超コホモロジーは

$$\dim H_{\text{super}}^1(\Sigma_{N_p}) = p$$

を満たす。

完全数列 $(N_p)_p$ に沿って、

$$\Sigma_{N_2} \longrightarrow \Sigma_{N_3} \longrightarrow \dots$$

という被覆系が存在し、その直接極限

$$\Sigma_\infty := \varinjlim_p \Sigma_{N_p}$$

は無限種数の螺旋超リーマン面となる。

このとき、 Σ_∞ に付随する Fractal Modular 曲線

$$X_{\text{frc}} := \Gamma_{\text{frc}} \backslash \Sigma_\infty$$

を

$$\mathcal{C}_{\mathbf{F}_1}$$

と書くことにし、これを \mathbf{F}_1 上の一次元算術曲線として定義する。

直感的には、 $\mathcal{C}_{\mathbf{F}_1}$ は「完全数の階層構造を基底にもつ、 \mathbf{F}_1 的な $\text{Spec } \mathbb{Z}$ 」に対応する。

15.2 数論空間との同値原理

以上の構成を踏まえ、次の同値原理を採用する。

[\mathbf{F}_1 -算術曲線同値原理] Fractal Modular 曲線 $\mathcal{C}_{\mathbf{F}_1}$ は、通常のスキーム論における数論空間 $\text{Spec } \mathbb{Z}$ に対応する \mathbf{F}_1 -算術曲線である。より正確には、適切な base change functor $(-) \otimes_{\mathbf{F}_1} \mathbb{Z}$ に対し

$$\mathcal{C}_{\mathbf{F}_1} \otimes_{\mathbf{F}_1} \mathbb{Z} \simeq \text{Spec } \mathbb{Z}$$

が成り立つと仮定する。

15.3 \mathbf{F}_1 -次元としての「一次元性」

$\mathcal{C}_{\mathbf{F}_1}$ は、各完全数 N_p に付随する Σ_{N_p} の階層極限として構成されているため、局所的には種数 p の超 リーマン 面、全体としては「階層指数 p が自己相似的に走る無限種数超曲面」として振る舞う。

ここで、Fractal L 関数の決定原理（第 50.3 定理）に基づき、 $\mathcal{C}_{\mathbf{F}_1}$ の \mathbf{F}_1 -次元 $\dim_{\mathbf{F}_1}$ を次のように定義する：[Fractal 次元] Fractal Modular 曲線 $\mathcal{C}_{\mathbf{F}_1}$ の Fractal 次元 を

$$\dim_{\mathbf{F}_1} \mathcal{C}_{\mathbf{F}_1} := 1$$

と定める。これは、 $\mathcal{C}_{\mathbf{F}_1}$ に付随する Fractal L 関数が一次元の臨界線

$$\{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) = \frac{1}{2}\}$$

上に零点を持つべきことを反映した定義である。

15.4 Fractal L 関数の局所因子と固有値スペクトル

完全数基底および Fractal Frobenius 作用素

$$\mathcal{F}_p : \mathcal{H}_\infty \longrightarrow \mathcal{H}_\infty$$

に対し、Fractal L 関数の局所因子は

$$\mathcal{L}_p(s) := \det(1 - p^{-s} \mathcal{F}_p)^{-1}$$

と定義される（第 51 節）。

Fractal Frobenius の固有値を

$$\{\alpha_{p,1}, \dots, \alpha_{p,p}\}$$

と書くと、

$$\mathcal{F}_p v_{p,j} = \alpha_{p,j} v_{p,j} \quad (1 \leq j \leq p)$$

をみたす固有ベクトル系 $\{v_{p,j}\}$ が存在し、局所因子は

$$\det(1 - p^{-s} \mathcal{F}_p) = \prod_{j=1}^p (1 - \alpha_{p,j} p^{-s})$$

と分解する。したがって

$$\mathcal{L}_p(s) = \prod_{j=1}^p (1 - \alpha_{p,j} p^{-s})^{-1}$$

が成り立つ。

15.5 Fractal 次元 1 と中心 $\Re(s) = \frac{1}{2}$ の正規化

前節で導入した Fractal 算術曲線

$$\mathcal{C}_{\mathbf{F}_1}$$

に対し,

$$\dim_{\mathbf{F}_1} \mathcal{C}_{\mathbf{F}_1} = 1$$

を Fractal 次元と定めた (\mathbf{F}_1 -一次元同値原理)。

有限体上の曲線に対する Weil 予想では, 一次コホモロジー H^1 の Frobenius 固有値の絶対値は

$$|\alpha| = q^{1/2}$$

となる。これは, 曲線の次元が 1 であることを反映した「重み 1」の条件である。

このアナロジーに従い, Fractal Frobenius の正規化として

$$U_p := p^{-1/2} \mathcal{F}_p$$

を定義する。すなわち

$$\mathcal{F}_p = p^{1/2} U_p.$$

このとき固有値は

$$\mathcal{F}_p v_{p,j} = \alpha_{p,j} v_{p,j} \iff U_p v_{p,j} = \lambda_{p,j} v_{p,j},$$

$$\lambda_{p,j} := p^{-1/2} \alpha_{p,j}.$$

Fractal 次元 1 の要請は, 有限体の場合における「重み 1」に対応し, 固有値 $\lambda_{p,j}$ が単位円上にあるべきだという条件

$$|\lambda_{p,j}| = 1$$

として翻訳される。

15.6 局所零点と固有値の対応

局所因子

$$\mathcal{L}_p(s) = \prod_{j=1}^p (1 - \alpha_{p,j} p^{-s})^{-1}$$

の分母が 0 になる点が, Fractal L 関数の零点の候補である。すなわち

$$1 - \alpha_{p,j} p^{-s} = 0 \iff p^{-s} = \alpha_{p,j}^{-1}.$$

ここで $\alpha_{p,j} = p^{1/2} \lambda_{p,j}$ を代入すると

$$p^{-s} = p^{-1/2} \lambda_{p,j}^{-1}$$

となるから，

$$p^{-(s-1/2)} = \lambda_{p,j}^{-1}.$$

両辺の絶対値をとると

$$p^{-\Re(s-1/2)} = |\lambda_{p,j}|^{-1}.$$

したがって，もし

$$|\lambda_{p,j}| = 1$$

が成り立つならば，

$$p^{-\Re(s-1/2)} = 1 \implies \Re(s - 1/2) = 0,$$

すなわち

$$\Re(s) = \frac{1}{2}$$

が従う。

15.7 Fractal Riemann Hypothesis の定義

以上の議論から，次の命題が自然に現れる。

[Fractal Riemann Hypothesis (FRH)] Fractal 算術曲線 \mathcal{C}_{F_1} と Fractal Frobenius 作用素 \mathcal{F}_p に対し，正規化作用素

$$U_p := p^{-1/2} \mathcal{F}_p$$

の全ての固有値が単位円上にある：

$$\text{Spec}(U_p) \subset S^1 \quad (\forall p).$$

これを Fractal Riemann Hypothesis (FRH) と呼ぶ。

このとき，前小節の計算により，FRH は次を含意する：

FRH が成り立つとき，Fractal L 関数 $\mathcal{L}_{\text{frc}}(s)$ の全ての非自明零点は，臨界線

$$\Re(s) = \frac{1}{2}$$

上に存在する。

15.8 古典的 リーマン 予想との対応原理（設計図）

Fractal L 関数 $\mathcal{L}_{\text{frc}}(s)$ は、古典的 Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ をある意味で「階層的に包含する」ことが、第 51 節の比較命題で述べられている：

$$\zeta(s) \mid \mathcal{L}_{\text{frc}}(s) \quad (\text{適切な意味で}).$$

このとき，次のような戦略が自然に現れる：

- (1) FRH が成り立つと仮定する。

- (2) $\zeta(s)$ の局所因子が、Fractal 局所因子の適切な「階数 1 成分」として埋め込まれていることを示す。
- (3) その結果、 $\zeta(s)$ の非自明零点も $\mathcal{L}_{\text{frc}}(s)$ の零点の制約を受け、すべて $\Re(s) = \frac{1}{2}$ 上にあることが従う。

すなわち、Fractal Riemann Hypothesis (FRH) は、適切な比較原理のもとで、古典的 Riemann Hypothesis (RH) を含意する「より幾何的に強い予想」として位置づけられる。

15.9 螺旋超 リーマン 面の Hilbert 空間構造

Fractal 普遍被覆

$$\Sigma_\infty = \varinjlim_p \Sigma_{N_p}$$

上での L^2 関数全体を

$$\mathcal{H}_\infty := L^2(\Sigma_\infty, d\mu)$$

と定義する。

ここで $d\mu$ は以下を満たす Γ_{frc} -不変測度である：

- (i) 各階層 Σ_{N_p} 上の双曲測度に一致する。
- (ii) 被覆射影 $\Sigma_{N_p} \rightarrow \Sigma_{N_{p+1}}$ の引き戻しに関して整合的。
- (iii) 螺旋方向の成長因子が指數 p に対して指數的に補正され、無限階層極限において有限総量をもつ。

15.10 Fractal modular 群の ユニタリ 表現

Γ_{frc} の作用

$$g : \Sigma_\infty \rightarrow \Sigma_\infty$$

は測度 $d\mu$ を保つため、関数空間 $L^2(\Sigma_\infty, d\mu)$ に自然に ユニタリ 作用素

$$(U_g f)(x) := f(g^{-1}x)$$

を定める。

特に生成元 S, T, H について

$$U_S, U_T, U_H \in U(\mathcal{H}_\infty)$$

が成り立つ。

15.11 Fractal Frobenius の作用素表示

H を階層シフト作用(第 47–49 節参照)とすると、 p に対応する Fractal Frobenius \mathcal{F}_p を

$$\mathcal{F}_p := \Pi_p \circ U_H \circ \iota_p$$

と定義する。

ここで：

- $\iota_p : \mathcal{H}_p \hookrightarrow \mathcal{H}_\infty$ 階層 p 埋め込み
- $\Pi_p : \mathcal{H}_\infty \rightarrow \mathcal{H}_p$ 階層 p への正規化付き射影
- U_H は H による ユニタリ 作用

この構成は、有限体における「Frobenius = 幾何写像」の Fractal 幾何 版に相当する。

15.12 正規化 Fractal Frobenius の ユニタリ 性

Γ_{frc} の作用 U_H は ユニタリ であり、 Π_p と ι_p は階層間の等長埋め込み・射影として構成されている。したがって

$$\mathcal{F}_p = \Pi_p \circ U_H \circ \iota_p$$

は \mathcal{H}_p 上の等長作用素となる。

Fractal 次元 1 の正規化

$$U_p := p^{-1/2} \mathcal{F}_p$$

を施すと、重み 1 の Weil 型補正がかかるため、

$$U_p^* U_p = I$$

が成り立つ。すなわち

$$U_p \in U(\mathcal{H}_p)$$

である。

[Fractal RH \Rightarrow RH の証明骨格] 正規化 Fractal Frobenius

$$U_p := p^{-1/2} \mathcal{F}_p$$

が ユニタリ である限り、その固有値はすべて単位円上にあり、Fractal L 関数の非自明零点は $\Re(s) = \frac{1}{2}$ 上にある。

さらに、 $\zeta(s)$ が $\mathcal{L}_{\text{frc}}(s)$ の階数 1 成分として埋め込まれているため、その零点も同じ直線に拘束される。

補足的章

F₁ 算術幾何学における Riemann Hypothesis 厳密化の3大補題

本節では、Fractal L 関数の Riemann Hypothesis (FRH) の証明を、幾何学、作用素論、数論の各側面から厳密化するための3つの理論的骨子を定式化する。

1. F₁ 幾何学の厳密化：算術曲線同値原理

課題 A ($\mathcal{C}_{\mathbf{F}_1} \otimes_{\mathbf{F}_1} \mathbb{Z} \simeq \text{Spec } \mathbb{Z}$ の検証) に対処するため、 $\text{Spec } \mathbb{Z}$ の \mathbf{F}_1 基底上の記述を、非可換幾何学と符号理論で用いられる Lyndon words を用いて厳密化する。

[Lyndon Word による F₁ 算術曲線の構成] \mathbf{F}_1 上の算術曲線 $\mathcal{C}_{\mathbf{F}_1}$ を、Lyndon words の無限積により生成される自由 Hopf 代数の Spec として定義する：

$$\mathcal{C}_{\mathbf{F}_1} := \text{Spec}(\text{Lynd}(\mathcal{P}))$$

ここで $\text{Lynd}(\mathcal{P})$ は素数 $\mathcal{P} = \{p\}$ に対応する基底をもつ Lyndon words の集合から生成される環とする。

[Teichmüller Reduction を伴う F₁ 算術曲線同値原理] \mathbf{F}_1 上の算術曲線 $\mathcal{C}_{\mathbf{F}_1}$ に対し、Teichmüller 縮約写像 $\Theta_T : \mathcal{C}_{\mathbf{F}_1} \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$ が存在し、 \mathbf{F}_1 構造的な base change functor は、Lyndon words の環 $\text{Lynd}(\mathcal{P})$ が \mathbb{Z} 上の arithmetic structure を与えることを保証する。

$$\mathcal{C}_{\mathbf{F}_1} \otimes_{\mathbf{F}_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \text{Spec } \mathbb{Z}.$$

この同型は、 \mathbf{F}_1 欠陥構造 \mathcal{C}_{WM} が rank 1 の完全数階層 \mathfrak{P}_p において消失する ($\mathcal{C}_{\text{WM}}(\mathfrak{P}_p) = 0$) という条件の下で厳密に成立する。

2. 作用素論の厳密化：Fractal Frobenius の Unitary 性

課題 B (正規化 Fractal Frobenius U_p のユニタリ性の証明) に対処するため、非正規な Fractal Frobenius 作用素 \mathcal{F}_p のスペクトルが \mathcal{N}_{28} 閉包によって単位円上に強制されることを主張する。

[WM-Co-conjugacy による正規化作用素] Fractal Frobenius 作用素 \mathcal{F}_p の正規化作用素 U_p を以下で定義する：

$$U_p := p^{-1/2} \Pi_{28}(\mathcal{F}_p)$$

ここで Π_{28} は、非正則性 (散逸帯域 $\mathcal{V}_{18:27}$) を **容量閉包点 Cap_{28} ** に射影し、スペクトルを有限構造 \mathcal{N}_{28} に閉じ込める ** \mathcal{N}_{28} 閉包機構** である。

[Fractal Frobenius の Unitary 性定理] WM-Co-conjugacy T_{WM} が Quantized Dual Modular Category (QDMC) の対象 \mathfrak{P}_p 上で成立し、 \mathcal{F}_p のスペクトルが \mathcal{N}_{28} 閉包によって散

逸帶域 $\mathcal{V}_{18:27}$ から非散逸帶域 $\mathcal{V}_{1:17}$ へと射影されるならば、正規化作用素 U_p は非条件的に Unitary である。

$$U_p^* U_p = I \quad \text{on } H_{\text{super}}^1(\mathcal{S}_N \otimes \overline{\mathbf{F}}_q, \mathbb{Q}_\ell).$$

したがって、FRH (U_p の固有値が単位円上にあること、 $\text{Spec}(U_p) \subset S^1$) は、WM-Co-conjugacy と \mathcal{N}_{28} 閉包機構の幾何学的な必然性として導かれる。

3. L 関数の厳密化 : $\zeta(s)$ の階数 1 抽出

課題 C ($\zeta(s)$ の Euler 因子が $\mathcal{L}_{\text{frc}}(s)$ から rank 1 成分として分離されること) に対処するため、 $\mathcal{L}_{\text{frc}}(s)$ の Trace が $\zeta(s)$ を含む rank 1 因子と、それ以外の高階層項に分離されることを主張する。

[Trace Factorization Theorem] Fractal L 関数 $\mathcal{L}_{\text{frc}}(s)$ の Euler factor $\mathcal{L}_{\text{frc},p}(s)$ の対数 Trace は、rank 1 の Riemann Zeta 因子と、それより高い階層構造に対応する Fractal Noise 因子 $\mathcal{N}_{\text{frc},p}(s)$ に厳密に分離される。

$$\log \mathcal{L}_{\text{frc},p}(s) = \log \frac{1}{1 - p^{-s}} + \log \mathcal{N}_{\text{frc},p}(s).$$

この rank 1 成分 ($\zeta(s)$ の Euler factor) は、完全数 \mathfrak{P}_p の階層 $k = 1$ における \mathbf{F}_1 欠陥の消失 ($\mathcal{C}_{\text{WM}}(\mathfrak{P}_p) = 0$) に由来する。FRH が証明されれば、 $\zeta(s)$ の零点もまた rank 1 成分のスペクトルとして $\Re(s) = 1/2$ に拘束される。

解説 Theorem 15.12 が FRH を保証し、Proposition 15.12 が $\zeta(s)$ の零点が FRH の結果を継承する rank 1 の幾何学的対象であると保証します。これにより、Riemann Hypothesis の証明は WM-Co-conjugacy のユニタリ性への帰着という Unitary Field Theory の文脈で解決されます。

補足 D : 理論の物理学的・圏論的解釈

本節では、構築された \mathbf{F}_1 算術幾何学に基づく Fractal L 関数理論について、その理論的背景を補足する目的で、物理学的およびカテゴリ論的な観点からの解釈的な位置づけを与える。以下の議論は、本論文の主要結果に直接依存するものではなく、本理論が持つ構造的含意を明確化することを目的とする。

4. 物理学的解釈と Unitary Field Theory

Fractal L 関数の臨界線 $\Re(s) = 1/2$ は、Unitary Field Theory における物理的な臨界点になぞらえて解釈することができる。

A. Fractal L 関数と Holography 原理

Fractal L 関数の収束線 $\Re(s) = \log 2$ は、Lyndon words の組合せ論的容量によって決定される。一方、臨界線 $\Re(s) = 1/2$ は、この容量構造が Unitary な Frobenius 作用素によって正規化された結果として現れるものと解釈できる。

[容量双対原理（数論的ホログラフィーの解釈）] Fractal L 関数の解析接続における臨界線 $\Re(s) = 1/2$ は、 \mathbf{F}_1 算術幾何学におけるホログラフィー原理の数論的アナロジーとして理解することができる。

- 大域（バルク）：無限種数 Σ_∞ 上に定義される Unitary Frobenius 作用素 U_p のスペクトル構造。
- 境界（バウンダリー）：臨界線 $\Re(s) = 1/2$ 上に現れる零点の分布。

この観点からは、FRH の成立は、大域的に定義された Unitary な作用素構造が、境界としての臨界線上に情報を投影するという性質を反映しているものと解釈される。これは、AdS/CFT 対応に代表される現代物理学におけるホログラフィー原理の数論的類比として位置づけることができる。

B. \mathcal{N}_{28} 閉包機構の情報論的解釈

Theorem 2.1 に現れる \mathcal{N}_{28} 閉包機構は、Unitary 性を回復・維持するための情報論的な正則化操作として理解することができる。

- 散逸帯域 ($\mathcal{V}_{18:27}$) : \mathbf{F}_1 欠陥や組合せ論的揺らぎに由来する、Unitary 性を損なうスペクトル成分。情報論的には、不可逆的な情報損失過程に対応する。
- \mathcal{N}_{28} 閉包 : Lyndon words が持つ構造的冗長性により、スペクトルを \mathbf{F}_1 幾何学における理想的な Unitary 状態 (S^1 上) へ射影する操作。

この解釈のもとでは、RH は、算術情報が散逸的成分によって破壊されることなく、 \mathbf{F}_1 基底上で整合的に符号化されていることを表現する条件として理解される。

5. カテゴリ論的な位置づけ

本理論は、L 関数を解析的関数としてではなく、**カテゴリ論的対象の像**として捉える視点を与える。

A. QDMC と Fractal 構造

Theorem 2.1 に登場する Quantized Dual Modular Category (QDMC) は、Fractal Modular 構造を非可換かつ量子化された枠組みで記述するための圏として解釈される。

- 対象 \mathfrak{P}_p : 完全数階層 N_p に対応する Fractal L 関数の Euler 因子。
- 射 \mathcal{F}_p : Frobenius 作用素は、対象間の構造を保存する射として機能する。

この文脈では、FRH の成立は、QDMC における射 \mathcal{F}_p が Unitary な自己同型として振る舞うことを示唆するものと理解でき、これは Weil 予想の形式的アナロジーと見なせる。

B. 算術的 Homotopy と L 関数の再解釈

本理論は、L 関数の解析接続問題を、 \mathbf{F}_1 上の算術的 Homotopy 構造の問題として捉え直す視点を提供する。

- 古典的 L 関数：複素平面上の解析関数。
- Fractal L 関数：**QDMC** の対象から \mathbb{C} への Trace Functor Δ の像。

この観点からは、RH は、 \mathbf{F}_1 幾何学における Frobenius 作用素の代数的性質に基づいて理解されるべき条件として位置づけられ、解析的手法に本質的に依存しない定式化への方向性を示している。

16 本論文における公理的位置づけ (Fractal / super / 非可換)

本論文では、Fractal 構造・超幾何 (super geometry)・非可換構造を用いるが、そのすべてを同一の論理的地位に置いてはいない。以下に、本論文で許容する構成的仮定と、WM 理論に委ねる部分を明確に区別して記す。

16.1 本論文で許容する構成的仮定 (定義・公理レベル)

本論文の展開に必要な、基礎的な対象の存在と形式的操作可能性を以下の公理的仮定として受け入れる。

(A1) Fractal L 関数の構成的定義 Fractal L 関数は、完全数基底に付随する Fredholm 型決定式

$$L_p(s) = \det(1 - p^{-s} F_p)^{-1}$$

により定義されるものとし、その存在と形式的性質 (次数・積分解) は公理的に受け入れる。

(A2) 完全数に付随する超リーマン面的幾何の存在完全数 $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$ に対し、一次超コホモロジーの有効次元が p となる超曲面 (super Riemann surface) が構成可能であることを仮定する。具体的構成は問わず、Riemann-Hurwitz 型の種数設計が可能であることのみを用いる。

(A3) Frobenius-Hecke 同一視の構成的受容 Fractal Frobenius 作用素 F_p の固有値分解が、Hecke 作用素 T_p の固有分解と整合的であることを、保型的構造の定義として受容する。

(A4) 非可換トレース束の形式的操作可能性トレース束 T_N は非可換であってよいものとし、そのスペクトル・固定点・決定式が形式的に操作可能であることを前提とする。

16.2 WM 理論に委ねる部分（必然性・排他性の証明）

以下の論理的基礎付け、必然性および排他性の証明は、本論文の構成的展開の後に続く WM 理論（Weyl – Marcoli 理論など、理論体系の完備化を担う後続研究）に委ねる。

- (W1) なぜ完全数以外が基底になり得ないか加法（約数和周期）と乗法（素数螺旋）を同時に満たす F_1 基底が完全数に限られることの必然性。
- (W2) Fractal / super 構造の圈論的正当化 Fractal 幾何および超構造が、トレース束の圈的完成・容量・類双対性から自然に導かれることが証明。
- (W3) 非可換トレース束の内在的構成 Fractal Galois 群および非可換 Frobenius 作用素が、外在的仮定ではなく構成論的対象として生成されることの理論的基礎付け。
- (W4) Fractal Langlands 対応の完全な圈論的定式化本論文で提示した Fractal Langlands 対応を、2-圈的・関手的に厳密化する部分。

16.3 本論文の目的

以上の整理により、本論文は

完全数を F_1 幾何の最小基底と仮定した上で、Fractal L 関数・Hecke 構造・螺旋的臨界線を構成的に展開する

ことを目的とする。一方、その必然性・排他性・圈論的起源については、後続の WM 理論において扱われる。