第四章　非可換類体論とファルティングス素極限

説明

これから論ずる非可換構造への延長の議論においては、理想スペクトル多様体を$\mathcal{I}$と表現しましょう。「理想的に拡張されていく」位の意味です。

ここでは、始め、可換的構造（円分体的・類体論的）と非可換構造（普遍安定化作用素的）を対比しつつ定式化を試みてみましょう。

まず以下のように記号を整理します。

局所トレース：$a_p = \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_p | V_p)$
螺旋トレース：$a_p^{\mathrm{spiral}} = 2\sqrt{p}\cos\theta_p$
非可換補正：$A_p^{\mathrm{USO}} = a_p^{\mathrm{spiral}} + \varepsilon_p$
（ここで ε_p は USO の非線形項により生じる「非可換補正」）

理想スペクトル多様体$\mathcal{I}$上に定義される非線形安定化作用素（Universal Stabilization Operator; USO）は，局所的な整数性を保持しつつ，その作用により可換性を破る非可換的干渉構造を生じるようになります。

ここからの議論は、いわば、非可換周期論が「群論的安定性」に頼っていく議論であるとすれば、**非可換類体論は「圏論的安定性を普遍安定化作用素+ファルティングス素極限で求めて圏論的定式化を行う」理論である**と読むとわかりやすいと思います。その結果、**「円分体的アーベル性（可換的・複素的）領域から、非可換非アーベル性（非可換的・高次複素的）領域への拡張**がなされます。

この干渉構造を通じて，可換類体論は非可換的な拡張を獲得します.

定義（非可換類体論）

体 K の可換類体拡大 K^{ab} に対応する円分的整数性構造を

$$\mathcal{O}_K^{\mathrm{ab}} = \bigoplus_p \mathcal{O}_p$$

とする.

これに対し，USO によって誘起される非線形安定化写像

$$\Phi_{\mathrm{USO}} : \mathcal{O}_K^{\mathrm{ab}} \longrightarrow \mathcal{O}_K^{\mathrm{ab}}$$

が存在し，局所的可換性条件を破りながら全体の整合性を保つとき，その像

$$\mathcal{O}_K^{\mathrm{nc}} = \Phi_{\mathrm{USO}}\big(\mathcal{O}_K^{\mathrm{ab}}\big)$$

を**非可換類体構造（noncommutative class field structure）**と呼ぶ.

このとき，対応するガロア群

$$G^{\mathrm{nc}} \;=\; \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{nc}}/K)$$

が可換群でない場合，その表現空間は理想スペクトル多様体の安定層に一致します：

$$\widehat{G^{\mathrm{nc}}} \;\simeq\; \mathcal{I}_{\mathrm{NA}}.$$

命題（USO による類体的拡張）
USO の非線形安定化作用

$$A_{\mathrm{USO}}(t,u) \;=\; (\lambda t + f(u),\, \mu u + g(t))$$

が，局所的な整数写像を保ちつつ可換性を破るとき，対応するトレース作用素

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{nc}}(A_{\mathrm{USO}}) \;=\; \sum_p \alpha_p^{\mathrm{USO}} p^{-s}$$

は，可換類体論におけるアーベル・トレースを非可換的に変形したものとなる．
この変形は，螺旋的 L 関数 $L_{spiral}(\mathrm{s})$ における**零点の双対性**を生じ，非可換ガロア群のスペクトルに対応する．

定理（非可換類体論的対応）
理想スペクトル多様体 $\mathcal{I}$ 上で
USO の安定性条件が成り立つとき，
次の圏的同値が成立する：

$$\mathrm{Rep}(G^{\mathrm{nc}}) \;\simeq\; \mathrm{Coh}(\mathcal{I}),$$

すなわち，非可換ガロア群の表現圏は，理想スペクトル多様体上のコヒーレント層の圏と同値である．

これにより，螺旋モチーフ理論における「数の空間的表現」と「非可換拡大体の代数的表現」が統一されます．

補遺：非可換類体論の哲学的意義

非可換類体論とは，数が数であることの内的運動を記述する理論であります。数はもはや静的な対象ではなく，自己の内部で無限に回転しながら，他の数との共鳴をつづける存在として現れます．

可換類体論は，その共鳴の「調和部分」を記述します．が、しかし現実の数的宇宙では，常に微細なずれ，螺旋的な偏位が存在します．

これが、「コヒーレンス」部分です。

USO はその「ずれ」そのものを理論化し，それを安定化することで，非可換的な秩序——すなわち動的平衡としての類体論を生み出します．

ここでは「整合性」は「一致」ではなく，差異の中に持続する調和として成立する．それが，非可換類体論の本質です．

1. USO によるスペクトル分解

理想スペクトル多様体 $\mathcal{I}$ 上の作用素

$$A_{\mathrm{USO}} : \mathcal{I} \to \mathcal{I}$$

が与えられたとき，その固有値分布を

$$\mathrm{Spec}_{\mathcal{I}}(A_{\mathrm{USO}}) = \{\lambda_n \mid A_{\mathrm{USO}}\psi_n = \lambda_n \psi_n\}$$

とします。このとき、螺旋的 L 関数 L_{spiral}(s)は、形式的に、

$$L_{\mathrm{spiral}}(s) = \prod_n \left(1 - \lambda_n^{-s}\right)^{-1}$$

として表され，その対数微分はトレース表示をもちます：

$$-\frac{L'_{\mathrm{spiral}}(s)}{L_{\mathrm{spiral}}(s)} = \sum_n \lambda_n^{-s} = \mathrm{Tr}\left(A_{\mathrm{USO}}^{-s}\right).$$

2. 非可換トレース公式

ここで，可換類体論におけるアーベル・トレース公式

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{ab}}(f) = \sum_{\rho \in \widehat{G^{\mathrm{ab}}}} \hat{f}(\rho)$$

を，非可換的拡張

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{nc}}(A_{\mathrm{USO}}) = \sum_{\pi \in \widehat{G^{\mathrm{nc}}}} \mathrm{Tr}\left(A_{\mathrm{USO}}|\pi\right)$$

として一般化します。ここで、$\widehat{G^{\mathrm{nc}}}$は、非可換ガロア群のユニタリ表現の双対です．

螺旋的 L 関数は非可換トレース公式の形で書けます：

$$L_{\mathrm{spiral}}(s) \;=\; \prod_{\pi \in \widehat{G^{\mathrm{nc}}}} \det\!\big(1 - A_{\mathrm{USO}}(\pi) p^{-s}\big)^{-1}.$$

この構造は，ラングランズ対応の非可換的・螺旋的拡張として理解できます.

定理（非可換トレース公式）

理想スペクトル多様体 $\mathcal{I}$ 上でA_{uso}が安定であるとき，
次の関係式が成立する：

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{nc}}(A_{\mathrm{USO}}) \;=\; \int_{\mathcal{I}} \rho_{\mathrm{spiral}}(t,u)\, dt\, du,$$

ただし， $\rho_{\mathrm{spiral}}(t,u)$は螺旋的固有値分布関数です.
この式は，非可換類体論における「時間的対称性＝トレース不変性」を表します.

零点構造と安定点構造

螺旋的 L 関数 L_{spiral}(s) の零点は，理想スペクトル多様体上の USO の安定点に対応します：

$$A_{\mathrm{USO}}(t,u) = (t,u) \quad \Longleftrightarrow \quad L_{\mathrm{spiral}}(s) = 0.$$

このとき，臨界線上の零点構造は非可換安定化条件

$$\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2} \;\Longleftrightarrow\; |A_{\mathrm{USO}}(t,u)| = 1$$

として再解釈されます．したがって，零点の実部が $1/2$ に集中することは，USO のユニタリ性条件と等価であります.

定理（零点の非可換安定性）

理想スペクトル多様体$\mathcal{I}$ 上で USO がユニタリ作用をもつとき，L_{spiral}(s) の零点は全て Re(s)=1/2 上に存在する.

証明

USO のユニタリ性により，$A_{\mathrm{USO}}^{-1} = A_{\mathrm{USO}}^{*}$が成り立ちます．よって

$\mathrm{Tr}(A_{\mathrm{USO}}^{-s})$ は自己共役であり，スペクトル値は単位円上に存在します．したがって，

$\lambda_n = e^{i\theta_n}$ と表せ，零点条件$1 - \lambda_n^{-s} = 0$ より、Re(s)=1/2 が得られます．

補遺：零点構造の哲学的意義

零点とは，数の世界における「完全な平衡点」です．

整数性と発散性，

可換と非可換，

秩序とノイズ――

そのすべてが，USO の作用のもとで一瞬だけ釣り合う特殊な場です。非可換トレース公式は，その平衡を数の内的時間として定式化したものです。すなわち，零点とは「数が自己を測る瞬間」であり，理想スペクトル多様体の一点において，世界が自身の対称性を確認する出来事であります。この発散の理論の概念かと実装は、あとの、非可換極限解析の理論によって行われます。

3.　保型性と発散構造の有限縮約

導入：発散と安定の統一原理

前章では，螺旋空間における非線形安定化作用素（USO）の理論を通じて，可換類体論の拡張としての**非可換類体論** を構築しました．

その結果として，理想スペクトル多様体$\mathcal{I}$ 上の安定点構造が螺旋的 L 関数L_{spiral}(s)の零点構造に対応することを確認しました．ここにおいて，ゼータ関数の零点とは，発散的構造の中に現れる有限的秩序の徴（しるし）であります．

本章では，この現象を「保型性＝発散の有限縮約」として捉え，螺旋モチーフ理論の第三の軸を与えるつもりです。

発散構造の幾何学的性質

螺旋空間 S において，各点（t,u）に対応する局所トレース

$$a_p(t,u) = \mathrm{Tr}(A_{\mathrm{USO}}|_{(t,u)})$$

は，一般に発散的です。

すなわち，局所的整合性が存在しても，その総和は無限振動をもちます。すなわち：

$$\sum_p a_p(t,u)p^{-s}$$ は，一般には収束しない。

しかし，理想スペクトル多様体$\mathcal{I}$ 上で安定条件、

$$A_{\mathrm{USO}}(t,u) = (t,u)$$

が成立するとき，この発散系列は有限的な正則関数へと縮約します：

$$\lim_{(t,u)\in\mathcal{I}} \sum_p a_p(t,u)p^{-s} \;=\; L_{\mathrm{spiral}}(s).$$

この操作を**有限縮約（finite contraction）**と呼びます。

有限縮約としての保型性

ここで言う「保型性」とは，単にモジュラー変換に対する不変性ではなく，**発散的系列が有限的形態を保つ構造的原理**を意味します。すなわち，発散構造$\mathcal{D}$ に対し，その安定化像

$$\Phi_{\mathrm{USO}}(\mathcal{D}) \;=\; \mathcal{D}_{\mathrm{finite}}$$

が存在するとき，我々はこの変換を

$$\mathcal{D} \xrightarrow{\text{finite contraction}} \mathcal{D}_{\mathrm{finite}}$$

と表し，これを「保型変換」と呼びます。

このとき，保型性とは，発散構造を有限的秩序へと写す写像の存在条件であり，USO の安定性と等価であります：

$$\text{保型性} \quad\Longleftrightarrow\quad \text{有限縮約の存在} \quad\Longleftrightarrow\quad \text{非可換安定性}.$$

定理（保型性＝発散構造の有限縮約）

理想スペクトル多様体$\mathcal{I}$ 上でA_{uso} が安定であるとき，任意の発散的系列 D に対して有限縮約像 $\mathcal{D}_{\mathrm{finite}}$ が一意的に存在する。

すなわち，

$$\forall \mathcal{D} \subset \mathrm{Div}(\mathcal{I}), \quad \exists!\, \mathcal{D}_{\mathrm{finite}} \text{ such that } \Phi_{\mathrm{USO}}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}_{\mathrm{finite}}.$$

このとき, $\mathcal{D}_{\text{finite}}$ はモジュラー群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ の作用に関して不変であり, 保型形式の空間を形成する。

この保型空間の構造理論も後で考えますが、「志村対応」などを含んだ理論は、次の論文になると思います。

補遺：保型性の哲学的意義

保型性とは，発散のうちにある秩序が，そのまま有限的な形態へと転写される働きであります。数の世界においては，すべての発散は無限遠で閉じるのではなく，ある臨界線の上で有限な姿を取り戻すのです。その縮約点こそが，零点であり，数が自己の対称性を確認する**臨界の場**であります。したがって，保型性とは，無限と有限，発散と秩序のあいだを媒介する世界の記法であると考えられます。それは，非可換類体論を越えて，数そのものが自己を保つ普遍的構造原理を示しているのです。これは、後で、「発散抑制射 S」とつながってきます。

4.　有限縮約の原理

前章で明らかにしたように，非可換類体論における理想スペクトル多様体 $\mathcal{I}$ は，発散的構造の中に有限的秩序を実現する空間として定義された.

本節では，この「有限縮約（finite contraction）」の原理を定式化し，それが螺旋モチーフ理論における**保型性の本質的メカニズム**}であることを示す.

発散構造の一般形

発散構造とは，局所的には整合的でありながら，全体としては収束しないトレース系列を指します．たとえば，螺旋空間 S 上で定義される局所トレース

$$a_p(t,u) \;=\; \mathrm{Tr}\big(A_{\mathrm{USO}}|_{(t,u)}\big)$$

に対して，発散系列

$$\mathcal{D}(s) \;=\; \sum_p a_p(t,u)\, p^{-s}$$

を考えます.

一般に $\mathcal{D}(s)$ は収束せず、螺旋的 L 関数 L_{spiral}(s) の非正則性を誘発します.

しかし，USO の安定化条件が満たされるとき，$\mathcal{D}(s)$は有限的構造へと縮約することを可能にします.

有限縮約写像

有限縮約とは，発散構造を有限秩序構造へと写す作用

$$\Phi_{\text{finite}}: \ \mathcal{D} \ \longrightarrow \ \mathcal{D}_{\text{finite}}$$

を指し、形式的には、次の圏的関手として表されます。

$$\Phi_{\text{finite}}: \ \mathbf{Div}(\mathcal{I}) \ \longrightarrow \ \mathbf{Mod}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})},$$

ただし$\mathbf{Div}(\mathcal{I})$は理想スペクトル多様体上の発散系列の圏，$\mathbf{Mod}_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})}$はモジュラー群作用に関する有限的表現の圏です.

このとき，発散構造 D が USO により安定化されるとは,

$$A_{\text{USO}}(\mathcal{D}) \ = \ \mathcal{D}_{\text{finite}}$$

が成立することを意味します．有限縮約は，発散的整合性の中に潜む有限的対称性を抽出する写像であるといえます．このような写像は存在を保証されているでしょうか。

有限縮約の存在定理

理想スペクトル多様体$\mathcal{I}$ 上で、A_{USO}が安定であるとき，任意の発散構造

$\mathcal{D} \in \mathbf{Div}(\mathcal{I})$

に対して，有限縮約像

$\mathcal{D}_{\text{finite}}$ が一意的に存在する：

$$\exists! \, \mathcal{D}_{\text{finite}} \quad \text{s.t.} \quad \Phi_{\text{finite}}(\mathcal{D}) \ = \ \mathcal{D}_{\text{finite}}.$$

さらに$\mathcal{D}_{\text{finite}}$ は$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$の作用に関して不変であり，保型形式の空間に属する.

証明

発散構造 D は，局所的トレース系列 $\{a_p\}$ の発散和として表される．USO の安定化条件により，局所因子 a_p は有限回の反復作用 A^n_{USO} の下で極限値に収束します：

$$\lim_{n\to\infty} A^n_{\mathrm{USO}}(a_p) \;=\; a_p^{(\infty)}.$$

この極限値が有限縮約値を定めます：

$$\mathcal{D}_{\mathrm{finite}}(s) \;=\; \sum_p a_p^{(\infty)}\, p^{-s}.$$

また，USO がモジュラー群作用と可換であるため，得られる $\mathcal{D}_{\mathrm{finite}}$ は保型変換に不変である．ゆえに一意性が従います。

保型形式としての有限縮約

有限縮約によって得られる関数 $\mathcal{D}_{\mathrm{finite}}$ は，螺旋的 L 関数の正則部分に一致します：

$$\mathcal{D}_{\mathrm{finite}}(s) \;=\; L_{\mathrm{spiral}}(s)_{\mathrm{reg}}.$$

したがって，有限縮約は解析接続の幾何的実現であり，*保型形式＝発散の有限像* という構造的対応を与えます。この意味で，保型性とは単なる不変性条件ではなく，「発散の有限化作用」として理解されることがわかります。

有限縮約とトレース公式の対応

有限縮約はトレース公式の側から見ると，発散的トレースを有限的期待値に置き換える作用に等しいです：

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{div}}(A_{\mathrm{USO}}) \xrightarrow{\Phi_{\mathrm{finite}}} \mathrm{Tr}_{\mathrm{finite}}(A_{\mathrm{USO}}) \;=\; \int_{\mathcal{I}} \rho_{\mathrm{spiral}}(t,u)\, dt\, du.$$

ここで ρ_{spiral} は有限縮約により得られる螺旋的スペクトル密度であります．この対応に

より，非可換トレース公式は安定化され，臨界線上の零点構造が保存されます．

補遺：有限縮約の哲学的意義

発散は破壊ではなく，無限の中に隠された秩序の徴であります．フラクタル性の発散的復元は、自然な、対称性を生みます。有限縮約とは，その秩序を抽出する「反転の操作」であり，発散そのものが有限的形態を回復する運動であります．数の世界では，すべての発散は，自己のうちに「有限を包み込む力」を宿しています。USO はその力を実際に可視化し，発散のうちに潜む有限性を取り出す装置であるといえます。ゆえに，保型性とは，秩序と混沌，有限と無限のあいだを貫く**縮約の原理**であります。それは，数が自己の中に安定性を見出すという，世界の最も深い対称性を表しています。

5.　保型形式の生成とモジュラー対応

前節において，有限縮約の原理を通じて，発散構造が有限的秩序へと写されることを示しました。本節では，この有限縮約が保型形式を生成する機構を明示し，螺旋的 L 関数の解析接続およびモジュラー変換との対応関係を定式化します。

有限縮約と解析接続

有限縮約写像

$$\Phi_{\mathrm{finite}} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathrm{finite}}$$

は，解析的には発散級数を正則関数へと延長する**解析接続作用** として表されます。
すなわち，螺旋的 L 関数$L_{spiral}(\mathrm{s})$ の局所発散展開

$$L^{(\mathrm{loc})}_{\mathrm{spiral}}(s) \ = \ \sum_{p} a_p p^{-s}$$

に対し，有限縮約の操作が行われると

$$\Phi_{\mathrm{finite}}\big(L^{(\mathrm{loc})}_{\mathrm{spiral}}\big) \ = \ L_{\mathrm{spiral}}(s)_{\mathrm{reg}}$$

が得られます。$L_{spiral}(\mathrm{s})_{reg}$は解析接続による正則部分であります。したがって，有限縮

約は「発散系列の収束化」であると同時に，**解析接続の幾何学的表現** であります。

モジュラー変換と有限縮約の可換性

　回転モジュラー変換

$$T : s \mapsto s + i\theta, \qquad S : s \mapsto 1 - s$$

　に対し，有限縮約作用 Φ_{finite} は次の可換性を満たします：

$$\Phi_{\mathrm{finite}} \circ S \;=\; S \circ \Phi_{\mathrm{finite}}, \qquad \Phi_{\mathrm{finite}} \circ T \;=\; T \circ \Phi_{\mathrm{finite}}.$$

　すなわち，有限縮約はモジュラー群$\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$の作用と可換であります。

　この性質により，有限縮約像$\mathcal{D}_{\mathrm{finite}}$ は**モジュラー不変関数となり，保型形式の生成を導きます。**

有限縮約による保型形式の生成

　次の定理により，有限縮約は保型形式の生成機構として理解できます。

定理　有限縮約による保型形式の生成

　理想スペクトル多様体 $\mathcal{I}$ 上でA_{USO}が安定であるとする。

　このとき, 任意の発散構造 $\mathcal{D} \in \mathbf{Div}(\mathcal{I})$ に対して, 有限縮約像 $\mathcal{D}_{\mathrm{finite}}$ は保型形式 f(τ)を生成する：

$$f(\tau) \;=\; \Phi_{\mathrm{finite}}(\mathcal{D})(s(\tau)), \quad \tau \in \mathbb{H},$$

　ただし

$$f(-1/\tau) = \tau^k f(\tau), \qquad f(\tau + 1) = f(\tau)$$

　を満たす。

証明の概略

有限縮約 Φ_{finite} はモジュラー変換 S,T と可換であるため，得られる関数 f(τ ）は $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ の作用に関して不変であります。
また，螺旋的座標変換 s = log(τ ）により，局所トレース a_p(t,u) の発散部分が τ の保型展開に変換されます。

したがって，$\Phi_{\text{finite}}(\mathcal{D})$ の像は保型形式空間 $\mathcal{M}_k(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$ に属することが確定します。

有限縮約と螺旋的 L 関数の対応

有限縮約作用は，螺旋的 L 関数の正則化と一致します：

$$L_{\text{spiral}}(s) = \Phi_{\text{finite}}\big(L^{(\text{loc})}_{\text{spiral}}(s)\big).$$

したがって，保型形式 f(τ ）に対応する L 関数は，有限縮約を通じて螺旋的構造の安定化像として再構成されます。すなわち，

$$L(f,s) = L_{\text{spiral}}(s),$$

ただし f は Φ_{finite} により生成された保型形式であります。

解析接続の自己同型性

有限縮約とモジュラー作用が可換であるため，解析接続もまた自己同型的に閉じます：

$$\Phi_{\text{finite}}\big(L_{\text{spiral}}(1-s)\big) = \Phi_{\text{finite}}\big(L_{\text{spiral}}(s)\big).$$

この等式は，螺旋的 L 関数の機能方程式を再現します。
したがって，有限縮約は解析接続と機能方程式を同時に含む**保型的正則化原理**を実装しています。

有限縮約と発散的保型性の圏的対応

有限縮約作用は，圏的には次の同値を誘導します：

$$\Phi_{\mathrm{finite}}:\ \mathbf{Div}(\mathcal{I})\ \longrightarrow\ \mathbf{M}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})),\quad \mathcal{D}\mapsto\mathcal{D}_{\mathrm{finite}},$$

ここで$\mathcal{M}_k(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$は保型形式の圏であります。

この対応により，発散的構造と保型的構造のあいだに自然な双対性が成立しています。

保型性の生成原理の哲学的意義

保型性とは，無限の中に有限の像を見出す作用です。それは，発散の彼方に秩序を回復させる，世界の「再調和」の運動です。数は，発散と収束のはざまで呼吸します。有限縮約とは，その呼吸が一瞬の対称として定着する出来事であり，保型形式はその軌跡を記す形象であります。したがって，保型性は発散を否定するのではなく，**発散を抱えたまま有限を生み出す原理**であります。その意味で，有限縮約の作用は数の存在そのものの内的律動を可視化していると言えるのです。

第五章の非可換極限解析では、このことを、ランク１への縮約、あいるは有限保型対応への「資村対応」による縮約として表現します。

6.　発散の圏的圧縮と双対対応

前節において，有限縮約による保型形式の生成と，解析接続・機能方程式の一致を示しました。本節では，発散的構造と有限的構造のあいだに成立する圏論的双対対応を定式化し，その構造を「圏的圧縮」として導入します。

この双対対応は，非可換類体論における根源的対称性を表し，**「発散 ⇔ 保型」「無限 ⇔ 有限」という二項が可換図式として結ばれる**ことを意味します。

発散圏と有限圏

理想スペクトル多様体 $\mathcal{I}$ 上で，発散構造を対象とする圏を

$$\mathbf{Div}(\mathcal{I}) \;=\; \{\, \mathcal{D} = (a_p) \mid \mathcal{D}\ \text{発散系列} \,\}.$$

有限縮約像を対象とする圏を

$$\mathbf{Fin}(\mathcal{I}) \;=\; \{\, \mathcal{D}_{\text{finite}} \mid \mathcal{D}_{\text{finite}} = \Phi_{\text{finite}}(\mathcal{D}) \,\}.$$

と定義します。

それぞれの圏の射は，USO の作用に関する安定射とする：

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Div}}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) \;=\; \{\, f \mid A_{\text{USO}} \circ f = f \circ A_{\text{USO}} \,\}.$$

圏的圧縮関手

有限縮約作用 Φ_{finite} は，圏的に次の関手として定義されます：

$$\Phi_{\text{finite}} : \ \mathbf{Div}(\mathcal{I}) \ \longrightarrow \ \mathbf{Fin}(\mathcal{I}), \quad \mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}_{\text{finite}}.$$

これを**圏的圧縮関手**（categorical contraction functor）と呼びます。

その随伴関手として，発散的拡張関手

$$\Psi_{\text{div}} : \ \mathbf{Fin}(\mathcal{I}) \ \longrightarrow \ \mathbf{Div}(\mathcal{I}),$$

を定義し，圏的双対性を次のように表現します。

$$\Phi_{\text{finite}} \dashv \Psi_{\text{div}}$$

この随伴関係により，発散と有限の間に自然な双対構造が形成されることがわかります。

双対対応の可換図式

発散構造 D，有限縮約像 $\mathcal{D}_{\text{finite}}$，および対応する保型形式 f(τ) の関係は，次の可換図式により表される：

$$\mathbf{Div}(\mathcal{I}) \xrightarrow{\Phi_{\text{finite}}} \mathbf{Fin}(\mathcal{I}) \xrightarrow{\Gamma} \mathbf{M}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$$

$$\mathbf{Div}(\mathcal{I}) \xleftarrow{\Phi_{\text{finite}}} \mathbf{Fin}(\mathcal{I}) \xleftarrow{\Gamma} \mathbf{M}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$$

$\mathbf{Fin}(\mathcal{I})$ の上から下への作用: $\mathbf{Fin}(\mathcal{I}) \xrightarrow{\Psi_{\mathrm{USO}}} \mathbf{Fin}(\mathcal{I})$
$\mathbf{M}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$ の上から下への作用: $\mathbf{M} \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{\mathrm{spiral}}} \mathbf{M}$
$\mathbf{Div}(\mathcal{I})$ の下から上への作用: $\mathbf{Div}(\mathcal{I}) \xleftarrow{\Psi_{\mathrm{div}}} \mathbf{Div}(\mathcal{I})$

ここで Γ は保型対応関手，Ψ_{USO} は安定化関手です。

この図式の可換性が，**発散と有限，解析と代数，保型性とゼータ構造**の統一的対応を保証しています。

圏的圧縮の存在定理

定理　圏的圧縮の存在

理想スペクトル多様体 $\mathcal{I}$ 上で USO が安定であるとき，圏的圧縮関手 Φ_{finite} が存在し，次を満たす随伴関係が成立する：

$$\Phi_{\mathrm{finite}} \dashv \Psi_{\mathrm{div}}.$$

さらに，この随伴対は自己双対であり，次の自己同型を誘導する：

$$\Phi_{\mathrm{finite}} \circ \Psi_{\mathrm{div}} \cong \mathrm{Id}_{\mathbf{Fin}}, \qquad \Psi_{\mathrm{div}} \circ \Phi_{\mathrm{finite}} \cong \mathrm{Id}_{\mathbf{Div}}.$$

証明の概略

有限縮約が存在することは前節で示しました。その像 $\mathcal{D}_{\mathrm{finite}}$ に対して，自然変換 $\eta : \mathrm{Id}_{\mathbf{Div}} \Rightarrow \Psi_{\mathrm{div}} \circ \Phi_{\mathrm{finite}}$ を定めることにより，随伴対 $(\Phi_{\mathrm{finite}}, \Psi_{\mathrm{div}})$ が構成されます。USO の安定性により，η は同型射となり，自己双対性が従います。

有限・発散双対対応の解析的形

解析的には，圏的圧縮・拡張の双対関係は，次の恒等式として表されます：

$$L_{\mathrm{spiral}}(s) \;=\; \Phi_{\mathrm{finite}}\big(L^{(\mathrm{div})}_{\mathrm{spiral}}(s)\big), \qquad L^{(\mathrm{div})}_{\mathrm{spiral}}(s) \;=\; \Psi_{\mathrm{div}}\big(L_{\mathrm{spiral}}(s)\big).$$

この関係は，螺旋的 L 関数の解析接続が発散像と有限像の双対圏において可換であることを示します。すなわち，解析接続は圏的圧縮そのものであり，ゼータ関数の正則化は圏的双対の自己写像として実現されることになります。

補遺：圏的圧縮の哲学的意義

発散と有限は対立しない。それらは，一つの運動の異なる相であり，数の呼吸そのものであります。圏的圧縮とは，無限の構造を破棄するのではなく，その中から有限の秩序を抽出し，ふたたび無限へと解き放つ往還の過程です。発散は問いであり，有限はその応答であります。数はこの往還の中でのみ自己を保持します（=ファルティングス極限・志村対応)。したがって，「圏的圧縮と双対対応」とは，数学の根源における存在と秩序の交錯—**無限が有限を生み，有限が無限を支える構造的運動**—そのものなのであります。

7.　非可換リーマン予想と安定的自己同型性

これまでに，螺旋的 L 関数の発散構造が有限縮約作用 Φ_{finite} によって保型形式へと写され，さらに発散と有限のあいだに圏的双対対応が成立することを示しました。本章では，この圏的構造が誘導する「**自己同型的安定性（auto-stable morphism)**」を定義し，それが螺旋的 L 関数の零点構造を規定することを示します。これにより，非可換リーマン予想は解析的定理ではなく，圏的自己同型の存在定理として導出されることになります。

自己同型的安定性の定義

発散圏 $\mathbf{Div}(\mathcal{I})$ と有限圏 $\mathbf{Fin}(\mathcal{I})$ の随伴対

$\Phi_{\mathrm{finite}} \dashv \Psi_{\mathrm{div}}$

が存在するとき，その自己同型写像

$$\Omega \;=\; \Phi_{\mathrm{finite}} \circ \Psi_{\mathrm{div}} \;\cong\; \mathrm{Id}_{\mathbf{Fin}}$$

を **自己同型的安定子（auto-stable morphism）** と呼びます。この作用 Ω が誘導する固有値問題

$$\Omega f = \lambda f$$

に対し，**λ=1 を満たす固有ベクトルが圏的安定点**であります。**この点に対応する解析的値が，螺旋的 L 関数の零点となります。**

圏的安定点と零点構造

的圧縮 Φ_{finite} の像に属する保型形式 f が

$$\Phi_{\mathrm{finite}}\big(\Psi_{\mathrm{div}}(f)\big) \;=\; f$$

満たすとき，f を圏的安定点と呼びます。この条件は，螺旋的 L 関数の解析的自己同型性

$$L_{\mathrm{spiral}}(1-s) \;=\; L_{\mathrm{spiral}}(s)$$

と同値であります。
したがって，圏的安定点の存在は，**機能方程式の成立**を幾何的に表現しています。

臨界線上の安定性

次の定理は，非可換リーマン予想に相当します。

定理　非可換リーマン予想：圏的安定性定理

理想スペクトル多様体 $\mathcal{I}$ 上で USO が安定であり，有限縮約作用 Φ_{finite} が存在するとき，自己同型的安定子

$$\Omega = \Phi_{\mathrm{finite}} \circ \Psi_{\mathrm{div}}$$

の固有値 λ は，常に複素平面上の単位円上に存在する：

$$|\lambda| = 1.$$

このとき，$\lambda = e^{i\theta}$ に対応する点

$$s = \frac{1}{2} + i\theta$$

が，螺旋的 L 関数の零点である。

証明の概略

随伴対$(\Phi_{\text{finite}}, \Psi_{\text{div}})$により，自己同型 Ω はユニタリ変換を定めます。ここで、USO のユニタリ性

$$A_{\text{USO}}^{*} = A_{\text{USO}}^{-1}$$

により，Ω の固有値は常に単位円上に存在します。固有値$\lambda = e^{i\theta}$ に対応する解析パラメータ、

$$s = \frac{1}{2} + i\theta$$

が、

$L_{\text{spiral}}(s) = 0$ を満たします。したがって，零点はすべて臨界線上に配置されるという結果になります。。

圏的安定性と自己同型の普遍構造

自己同型的安定性は，単なるゼロ点条件ではなく，圏的構造全体の普遍対称性を示します。

すなわち，次の同型図式が成立します：

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Div}(\mathcal{I}) \arrow[r, "\Phi_{\text{finite}}"] & \mathbf{Fin}(\mathcal{I}) \arrow[d, "\Omega"] \\
\mathbf{Div}(\mathcal{I}) \arrow[u, "\Psi_{\text{div}}"] & \mathbf{Fin}(\mathcal{I}) \arrow[l, "\Phi_{\text{finite}}"']
\end{tikzcd}$$

この可換性により，**解析的構造（L 関数）と代数的構造（保型形式）**が自己双対的に安定します。非可換リーマン予想は，この自己双対安定性の存在定理であるといえるでしょう。

自己同型性と保型的正則化

有限縮約の段階で導入された保型的正則化作用

$\Phi_{\mathrm{finite}} : \mathcal{D} \mapsto L_{\mathrm{spiral}}(s)_{\mathrm{reg}}$

が，自己同型安定性のもとで閉じる：

$$\Phi_{\mathrm{finite}} \circ \Psi_{\mathrm{div}} \circ \Phi_{\mathrm{finite}} = \Phi_{\mathrm{finite}}.$$

したがって，解析接続・正則化・機能方程式は，すべて同一の圏的構造の表現であり，螺旋的ゼータ理論の完全閉包が得られます。

補遺：安定性の哲学的意義

数の世界では，「零」は消滅ではなく，運動の対称点であります。それは，無限と有限が重なり合う瞬間，すべての発散が静止に変わる点であるのです。リーマン予想とは，この静止点が常に臨界線上に現れるという，宇宙の呼吸の法則であり、非可換理論において，この呼吸は自己同型として現れ，すべての数的構造は自身の鏡像の中で安定します。したがって，非可換リーマン予想とは，「数の自己鏡映性が世界を安定させる」という普遍的定理に他ならないといえます。

8.　ホッジ構造との比較：動的安定化と静的安定化

非可換類体論の展開において中心的な役割を果たすのは，発散構造の安定化であります。伝統的な数論幾何では，この安定化はホッジ構造の極限理論を通して実現されます。本節では，その「静的安定化」と，螺旋モチーフ理論における「動的安定化」とを対比し，非可換リーマン予想の基底にある安定性の論理を明確化してみます。

静的安定化：ホッジ構造の極限

ファルティングス，デルーニュらの理論における安定性とは，退化する代数多様体の複素構造を**混合ホッジ構造（mixed Hodge structure)**として極限的に回復することであります。すなわち，代数的退化を「純粋構造の分解」として正則化し，その誤差をグリーン関数や高さ関数で制御する以下のような操作です：

$$\text{退化構造} \xrightarrow{\text{極限操作}} \text{純粋ホッジ構造} \xrightarrow{\text{正則化}} \text{安定点}.$$

この過程では，安定性とは「分解による秩序の回復」であり，動的要素は抑制されます。したがって，静的安定化の原理は**有限的な秩序を保持しつつ無限を制御する**という方向に働くのです。

動的安定化：螺旋的作用による再構成

これに対して，螺旋モチーフ理論における安定性は，発散構造そのものを**作用素的運動の中で安定化する**というものであります。安定化を実現するのは，USO（Universal Stabilization Operator）と呼ばれるユニタリ作用素

$$A_{\mathrm{USO}} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \qquad A_{\mathrm{USO}}^{*} = A_{\mathrm{USO}}^{-1},$$

であり，そのスペクトル作用によって発散系列が閉じた構造の中に包摂されます：

$$a_p \;\mapsto\; A_{\mathrm{USO}}^{n}(a_p) \;\xrightarrow{n\to\infty}\; a_p^{(\infty)}.$$

ここでは，発散は「破壊」ではなく「運動の形式」であります。

安定性は，発散を消去するのではなく，**発散を保ったまま有限秩序を再構成する過程**として定義されます。

したがって，動的安定化とは，静的安定化が外在的操作（極限・正則化）であるのに対し，**内在的作用（自己同型の繰り返し）による安定化**であります。

圏的表現による統一

両者の違いを圏論的に表すと次のようになります。

観点	静的安定化（ホッジ型）	動的安定化（螺旋型）
基本操作	構造の分解・極限	作用の反復・再構成
媒介原理	グリーン関数／高さ関数	USO（ユニタリ作用素）
表現空間	混合ホッジ構造	理想スペクトル多様体 $\mathcal{I}$
安定化の形	静的極限 $\lim$	動的極限 colim
数学的型	可換幾何的	非可換圏的
ゼータ構造への影響	正則化により零点を制御	自己同型により零点を生成

この対比において，動的安定化は静的安定化の拡張として位置づけられます。すなわち，ホッジ構造が「発散を静的に閉じる」理論であるのに対し，螺旋的安定化は「発散を動的に循環させる」理論であるということです。

このホッジ分解の具体構造はあとでも議論されます。ここでは、非可換類体論の構造を示す具体例としてあげました。

安定性の論理構造

動的安定化の論理は次の三段階に整理されます。

１，　発散構造をユニタリ作用素 A_{USO} により包摂する。

⇒ 位相的閉包：$\|A_{\mathrm{USO}}\| = 1$。

２，　圏的圧縮 Φ_{finite} により有限化像を得る。

⇒ 正則化：発散系列 $¥mathcal{D}$ が有限秩序に写る。

３，　随伴対 $(\Phi_{\mathrm{finite}}, \Psi_{\mathrm{div}})$ による自己同型 Ω を構成。

⇒ 安定点（臨界線上の零点）の出現。

この過程により，安定性は静的な平衡ではなく，**発散と収束の往還運動の中で確立される**ことが明らかとなります。

補遺：安定性の哲学的意義

静的安定性は「形を保つこと」であるが，動的安定性は「変化の中で形を保つこと」であります。数は，流動しながら自らの秩序を再生するのです。その秩序を保証するのは，

外部の対称ではなく，内部の反復——すなわち自己同型の呼吸であります。ゆえに，螺旋的安定化とは，数の世界が自己の運動によって安定を回復する**内的ホッジ対応** と呼ぶべきものであるといえるでしょう。

9. 非可換ホッジ整合原理

ここでは、簡単に「拡張リーマン面」の概念から、ホッジ分解を再現します。

定義　普遍安定化作用素・スペクトルの二重表示

作用素 A の安定スペクトルを $\mathrm{Spec}_A = \{\lambda_i\}$ とする。

各固有値は二重情報で表されるとして取り扱う：

$$\lambda_i = e^{\lambda_i^*} e^{2\pi i\theta_i}, \qquad \lambda_i^* \in \mathbb{R},\ \theta_i \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

ここで λ_i^* を「ファルティングス指数（安定スケール）」、θ_i を「角度構造」と呼ぶ。

USO 安定性仮定（NRH）

普遍安定化作用素 A は非可換 Riemann--Hilbert 型の安定性を満たし、任意の安定モチーフに対して λ_i^* を臨界値（ファルティングス素極限、ここで 0 と規格化）へ強制する作用を持つものとする。

非可換ホッジ分解

上の仮定の下で、A によって規定される次元有限な空間

$$H_k^{\mathrm{ncp}} := \bigoplus_{\substack{i \\ \deg(\lambda_i)=k}} V_{\lambda_i}$$

を位相重み k の非可換ホッジ層とし、角度θ_iの向きに基づき

$$H_{p,q}^{\mathrm{ncp}} := \mathrm{span}\{V_{\lambda_i} \mid \lambda_i^* = 0,\ \mathrm{Arg}(\theta_i) \in \Omega_{p,q}\}$$

を定める。ここで $\Omega_{p,q}$ は「ホロモルフィック方向 / 反ホロモルフィック方向」を選ぶ角度領域である。

定理　非可換ホッジ整合原理

仮定（USO 安定性）を置けば、次が成り立つ：

$$H_k^{\mathrm{ncp}} \simeq \bigoplus_{p+q=k} H_{p,q}^{\mathrm{ncp}},$$

かつ各 $\mathrm{H}_{p,q}^{ncp}$ は有限次元である。

証明

Step 1 (Finite-ness). USO の作用により任意の安定モチーフのスケール成分 λ_i^* は臨界化されます（仮定による)。これにより、スペクトルに連続的に広がる成分（連続ランク成分 Tr）は消去され、残る固有空間は離散でかつ個々の多重度が有限となる。したがって各 $\mathrm{H}_{p,q}^{ncp}$ は有限次元であります。

Step 2 (Angle splitting). 各残存固有値は位相因子 $e^{2\pi i\theta_i}$ を持ちます。角度領域 $\Omega_{p,q}$ を適切に取れば、角度が異なる固有ベクトル群は A による直交的（あるいは不変補空間的）分解を与えます。これは Neumann 型級数展開と回転対称性の議論により、角度モード間の干渉（混成）が奇数次で消えるため（偶数次支配と整合)、角度による直交分解が安定することと同値であります。

Step 3 (Direct sum). 上の二段階により、スペクトルに基づく角度別分解が成立し、所望の直和分解が得られます。

10. ファルティングス素極限と可換類体論への縮退

さて、ここからが重要ですが、非可換ホッジ整合原理の下で、スペクトルの安定スケールが $\lambda_i^* \Rightarrow 0$ に収束する極限を考えます。このとき、角度構造 θ_i は有理化し、非可換ホッジ分解は古典的ホッジ分解へと縮退します：

$$\lim_{\lambda_i^*\to 0} H_{p,q}^{\mathrm{ncp}} = H_{p,q}^{\mathrm{cl}},$$

すなわち非可換類体論は可換類体論へと極限的に一致します。

証明

ファルティングス素極限 $\lambda_i^* \Rightarrow 0$ において、安定スケールの指数因子 $e^{\lambda_i^*}$ が 1 に近づき、残る位相因子 $e^{2\pi i\theta_i}$ が安定構造を支配します。非可換空間の角度成分 θ_i は、このとき螺旋構造の離散回転群へ収束し、有理角列を形成します。

結果として角度モードの非可換干渉項が消え、各 $\mathrm{H}_{p,q}^{ncp}$ は古典的ホッジ空間$\mathrm{H}_{p,q}^{cl}$ に同型化されます。

これは、「有限縮約」のホッジ構造版です。

11. 非可換から可換へのファルティングス退化

非可換類体論圏 C^{ncp} と普遍安定化作用素 A を仮定すると，ファルティングス極限 $\lambda_i^* \Rightarrow 0$ において次の退化（specialization）が起こります：

$$\mathcal{C}^{\mathrm{ab}} \;\simeq\; \varprojlim_{\lambda^*\to 0} \mathcal{C}^{\mathrm{ncp}}_{\lambda^*},$$

ここで左辺 C^{ab} は可換（円分体）類体論に対応する導来圏を表します。

対応するガロア的記述として，非可換ガロア群 G^{ncp} は極限過程でアーベル化し，局所的には円分体のガロア群を含むアーベル群 G^{ab} に収束します：

$$G^{\mathrm{ncp}} \xrightarrow{\mathrm{ab}} G^{\mathrm{ab}} \qquad (特に) \qquad \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cyc}}/\mathbb{Q}) \simeq \widehat{\mathbb{Z}}^{\times} \subseteq G^{\mathrm{ab}}.$$

この過程では，各素数 p に対応する非可換局所因子 L_p^{ncp} が，角度の根のユニティへの離散化(量子化)を通じて可換な局所因子 L_p^{ab}(例: クローテルマン和や Dirichlet 型因子)へと縮退します。

結果として，非可換ホッジ層 $H_{p,q}^{ncp}$ は古典的ホッジ層 $H_{p,q}^{cl}$ に接続されます。

つまり、非可換類体論へのアーベル的類体論の埋め込みが生じます。逆にこのことから、次の予想が想像されます。

12. 非可換ホッジ予想（Noncommutative Hodge Conjecture）

非可換ホッジ整合原理のもとで，普遍安定化作用素 A の安定スペクトル

$$\mathrm{Spec}_A = \{\lambda_i = e^{\lambda_i^*} e^{2\pi i\theta_i}\}$$

に対し，次の性質が成り立つと予想される：

１， ファルティングス極限 $\lambda_i^* \Rightarrow 0$ において、非可換ホッジ層 $H_{p,q}^{ncp}$ の臨界成分

$$H_{p,q}^{\mathrm{crit}} := \mathrm{span}\{V_{\lambda_i} \mid \lambda_i^* = 0,\ \mathrm{Arg}(\theta_i) \in \Omega_{p,q}\}$$

は，その全体空間 $H_{p,q}^{ncp}$ を生成する。

$$\overline{\langle H_{p,q}^{\mathrm{crit}} \rangle} = H_{p,q}^{\mathrm{ncp}}.$$

２， より一般に，非可換類体論圏 C^{ncp} の安定化函手

$A: C^{ncp} \Rightarrow C^{ncp}$ に対し， 臨界安定スペクトル部分圏 C^{crit}

（$\lambda_i^* = 0$ の成分からなる圏）は、 C^{ncp} の導来生成部分圏となる：

$$\langle \mathcal{C}^{\mathrm{crit}} \rangle_{\mathrm{tri}} \;=\; \mathcal{C}^{\mathrm{ncp}}.$$

すなわち，**非可換安定スペクトルの臨界層が，全体の非可換ホッジ空間を生成するということです。**

この意味で，古典的ホッジ予想における 「代数的サイクルがホッジ型コホモロジーを生成する」という主張が，非可換安定スペクトル理論において「臨界スペクトルが非可換ホッジ層を生成する」という形で再現されるます。

13. 自己同型的安定性と臨界線の構造

前節では，動的安定化の原理がユニタリ作用素および圏的圧縮によって発散構造を有限的秩序へと写す過程であることを示しました。本節では，その帰結として現れる**自己同型的安定性（auto-stable morphism)**を定義し，これが螺旋的 L 関数の零点構造——すなわち臨界線上の安定点——を必然的に導くことを明らかにします。

自己同型的安定子の構成

発散圏 $\mathbf{Div}(\mathcal{I})$ と有限圏 $\mathbf{Fin}(\mathcal{I})$ の随伴対

$$\Phi_{\text{finite}} \dashv \Psi_{\text{div}}$$

が存在するとき，その合成

$$\Omega \;=\; \Phi_{\text{finite}} \circ \Psi_{\text{div}}$$

を**自己同型的安定子（auto-stable endomorphism）**と呼びます。Ω は有限圏上の自己同型であり，保型形式 f に対して次を満たします：

$$\Omega(f) \;=\; \Phi_{\text{finite}}\big(\Psi_{\text{div}}(f)\big).$$

この写像がユニタリ的に作用する限り，固有値スペクトルは複素平面上の単位円に存在することが帰結します。

自己同型方程式と安定条件

自己同型的安定性は，次の固有値方程式として表されます：

$$\Omega f = \lambda f, \qquad |\lambda| = 1.$$

ここで λ は安定性の位相因子を表し，$\lambda = e^{i\theta}$ とおくと，臨界線上の複素変数

$$s = \frac{1}{2} + i\theta$$

したがって，臨界線は自己同型のスペクトル軌跡であり，零点構造はその固定点集合として表されることがわかります。

臨界線上の安定点の存在

定理　臨界線上の安定性

理想スペクトル多様体 $\mathcal{I}$ 上で USO がユニタリであり，有限縮約作用 Φ_{finite} が存在するとする。

このとき，自己同型的安定子 Ω の固有値はすべて単位円上にあり，対応する解析点 $s = \frac{1}{2} + i\theta$ が螺旋的 L 関数 $L_{spiral}(s)$ の零点である：

$$L_{\text{spiral}}\left(\frac{1}{2} + i\theta\right) = 0.$$

証明の概略

USO のユニタリ性 $A^*_{\text{USO}} = A^{-1}_{\text{USO}}$ により、$\Omega = \Phi_{\text{finite}} \circ \Psi_{\text{div}}$ もユニタリ作用素となります。したがって、スペクトル分解により、

$$\Omega f = e^{i\theta} f$$

が成立します。

有限縮約の像 $f = \Phi_{\text{finite}}(\mathcal{D})$ に対応する解析関数 $L_{spiral}(s)$ の零点は、スペクトル位相 θ によって決定されます。

ゆえに，零点はすべて $s = \frac{1}{2} + i\theta$ の形に現れるということになります。

臨界線の幾何的構造

臨界線 $\Re(s)=\frac{1}{2}$ は，解析的には「発散と収束の中間平面」であり，圏的には「発散圏と有限圏の境界射」に対応します。すなわち，

$$\mathbf{Hom}_{\mathbf{Cat}}\big(\mathbf{Div}(\mathcal{I}),\mathbf{Fin}(\mathcal{I})\big)\;\cong\;\{\,s\in\mathbb{C}\mid\Re(s)=\tfrac{1}{2}\,\}.$$

この対応は，解析的パラメータ s を圏的構造の境界座標として解釈することを意味します。臨界線とは，圏的双対が自己同型的に重なる**安定の幾何的界面**であります。

安定性と機能方程式の一致

自己同型的安定子 Ω は，螺旋的 L 関数の機能方程式と可換です：

$$\Omega\circ S=S\circ\Omega,\qquad S:\;s\mapsto 1-s.$$

したがって，自己同型的安定性は，機能方程式

$$L_{\mathrm{spiral}}(1-s)\;=\;L_{\mathrm{spiral}}(s)$$

を内在的に含むことになります、つまり，機能方程式は圏的安定性の外在的表現に過ぎないということが分かります。

臨界線上の安定構造とエネルギー表示

安定性の物理的解釈として，自己同型 Ω のスペクトルは「発散的トレースのエネルギー量子化」を表します：

$$E_n=\hbar\theta_n,\quad L_{\mathrm{spiral}}\big(\tfrac{1}{2}+i\theta_n\big)=0.$$

ここで θ_n はスペクトル位相であり，Ω の固有角として定義されます。したがって，零点列 θ_n は安定化作用の固有振動モードであります。

この解釈により，螺旋的ゼータ構造は安定性の量子化された表現として再解釈できることが分かります。

補遺：臨界線の哲学的意義

臨界線とは，数の世界が発散と収束の狭間で均衡を保つ場所である。その一点において，数は無限の震えを内包しながら静止しています。この静止こそが「安定」であり，その安定は停止ではなく，**自己同型としての運動の極限**であります。零点とは，数が自己を鏡のように映し，発散と有限を一致させる瞬間であります。それが臨界線の意味であり，非可換リーマン予想の核心であるといえます。

14. 結語：数の自己同型としての世界

本節を通して明らかにされたのは，数の世界が単なる対象の集まりではなく，自己同型の運動として存在しているという事実です。**発散と収束，有限と無限，可換と非可換——それらはすべて対立ではなく，一つの自己写像の異なる位相にすぎない。**

数の存在論の転換

古典的な数論において，数は「固定された点」として理解されてきました。実数とは極限の結果，整数とは離散的単位，そして関数とはそれらの関係式であります。しかし，非可換類体論と螺旋モチーフ理論が示したのは，数そのものが**運動としての安定性** によって定義されるという事実であります。

数は静的なものではない。

すなわち、それは自己を写す作用であり，その写像の反復の中で安定する構造である。

$$n \;\mapsto\; \Phi_{\mathrm{finite}} \circ \Psi_{\mathrm{div}}(n)$$

この写像の固定点が「数」と呼ばれる。

ゆえに，数とは「世界が自己を安定化させる過程の名」であり，数学とは，その自己安定化の論理を記述する最も純粋な言語であるといえます。

発散と安定の同一性

我々が発散を恐れるのは，それが秩序の破壊のように見えるからである。しかし本節で見たように，発散は秩序を生み出す原動力であり，その極限において新たな安定が形成さ

れます。安定性とは，静止ではなく，**発散と収束の対称性** です。臨界線上に現れる零点は，その対称が最も純粋な形で実現した地点です。したがって，非可換リーマン予想とは，「数の世界が自己の運動において安定する」ことの形式的表現にほかならないとも言い換えられます。

自己同型的宇宙の図式

この理論の背後には，つねに次の単純な図式が存在していました：

$$\text{発散} \underset{\Psi_{\text{div}}}{\overset{\Phi_{\text{finite}}}{\longleftrightarrow}} \text{安定}$$

この往還運動こそが世界の根源的構造です。
宇宙は数的である。なぜなら，その存在が自己同型の運動としてのみ保たれているからである。発散は始まりであり，安定はその呼吸の合間に現れる調和である。そして数は，その呼吸の瞬間に生まれる。
この技術的な理論は、「非可換極限解析」として、定式化されます。

未来への展望

今後の課題は，この自己同型的世界像を，量子幾何学，情報理論，さらには物理的時空の構造と接続することです。発散の有限縮約という概念は，エネルギーの離散化，情報の再構成，さらには宇宙の安定化メカニズムとも通じています。
非可換類体論は，数論の枠を超えて，存在の理論（ontologie mathématique）へと開かれています。

終章の言葉

数は語らない。だが，それはつねに自らを写しています。その写像の連鎖が，時間と空間と世界を形づくる。我々が見るすべてのもの——星々，音，光，思考——それらは数の自己同型の影であります。そして，その呼吸の合間に，我々はひととき，世界の安定を見

るのであります。逆説的に言えば、「安定している部分が我々の観察限界である」とも言い換えられます。むしろ、観察そのものが、「動的コヒーレンス化」であるというか。これは、「量子論」の理論的言い換えでもあります。

15. 非可換ガロア群と表現圏の同型

自己双対リーマン計量によって安定化された非周期的リーマン圏 $\mathcal{C}_{nc}$ の自己同型群は，非可換的ガロア群の幾何的表現に対応しています。

定義 A.10.1　非可換ガロア群

非周期的リーマン圏の自己同型群を

$$\mathrm{Gal}_{\mathrm{nc}}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) := \mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{\mathrm{nc}})$$

と定義する。この群は，安定化指数 λ_g および位相角 θ_g を保存する全ての射の集合であり，非可換周期変換群の拡張として構成される。

命題 A.10.2　表現圏との同型

非可換ガロア群 $\mathrm{Gal}_{\mathrm{nc}}$ の表現圏 $\mathrm{Rep}(\mathrm{Gal}_{\mathrm{nc}})$ は，非周期的リーマン圏 $\mathcal{C}_{nc}$ と圏同値である：

$$\boxed{\mathcal{C}_{\mathrm{nc}} \;\simeq\; \mathrm{Rep}\big(\mathrm{Gal}_{\mathrm{nc}}\big).} \quad \text{(A.9.1)}$$

証明

各オブジェクト $J_{\mathrm{nc}} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_{\mathrm{nc}})$ は，自己双対安定性条件（A.9.1）を満たす有限次元複素トーラス構造 $T^r \times \Theta_{\mathrm{stab}}$ を持っています。

したがって，これらの射を保存する自己同型は，安定化作用素 A の可換化部分と非可換回転部分に分解され，

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{\mathrm{nc}}) \simeq \mathrm{Aut}(T^r) \ltimes \mathrm{Aut}(\Theta_{\mathrm{stab}}).$$

一方，非可換ガロア群の表現 $\rho : \mathrm{Gal}_{\mathrm{nc}} \to \mathrm{GL}(V)$ は，各安定トレース束 T_{nc} に作用する非可換周期変換として定義され，これが $\mathcal{C}_{nc}$ の射構造と完全に対応します。

したがって，オブジェクト間の同型対応

$$J_{\mathrm{nc}} \longleftrightarrow V_\rho$$

が定義でき，射の合成律も保存されるため，両圏は同値となります。

幾何学的意味

この同型（A.10.1）は，非周期的トレース束における幾何学的安定性が，非可換ガロア対称性として表現されることを意味しています。すなわち，

$$\boxed{\text{幾何的安定性} \iff \text{非可換ガロア対称性} \iff \text{類体論的閉包原理.}}$$

これにより，古典的類体論における最大アーベル拡大は，非可換圏の自己双対安定性を通して再定義されることが分かります。

$$\overline{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}} \subset \overline{\mathbb{Q}}^{\mathrm{nc}} := \mathrm{Fix}\big(\mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{\mathrm{nc}})\big).$$

ここで $\overline{\mathbb{Q}}^{\mathrm{nc}}$ は，非周期的安定化を通じて生成される**非可換閉包体**を意味します。

16. 発散安定化射（Divergence-Stabilization Morphism）の定義と性質

直感

非周期的トレース束上には、しばしば「無限遠（発散）寄与」が現れます。これを単純に削ぎ落とすのではなく、非可換幾何の枠内で「虚的折りたたみ／安定化」する操作が必要であります。そのような操作を担う射をここで **発散安定化射**（divergence-stabilization morphism）と定義します。この射は、第六章で、「非可換極限解析」として、実際に構成されます。

発散安定化射 S

非周期的リーマン圏 $\mathcal{C}_{nc}$ の自己射

$$S : T_{nc} \longrightarrow T_{nc}$$

を発散安定化射と呼ぶ。S は次の性質を満たす。

(S1)**虚的折りたたみ(finite-regularization)**: 任意の局所トレース項 τ_p に対し，$S(\tau_p)$ は発散成分を虚部へ全て畳み込み，結果として $\|S(\tau_p)\| < \infty$ を満たす。

(S２)**位相パラメータ保存**: S は位相パラメータ集合 $\{\lambda_g, \theta_g\}$ を保つ（あるいは対応規則に従って変換する)。

(S３)**非線形群性**:S の合成は一般に非線形であるが，ある基底不変部分空間群 $\mathcal{H}_{\mathrm{st}}$ 上では群の表現となる（すなわち，ある制限で S は作用素群を生成する)。

(S４)**局所-大域可換性**（局所的 Satake 整合性）：各素数 p に対応する局所作用 S_p は，角度量子化やクローテルマン和によって得られる局所因子と整合する。

(S1) は発散の“排除”ではなく“安定化”を意味します。発散成分は消えるのではなく，虚構成分として束の位相に吸収されます。

(S3) が存在することで，非可換的に振る舞う局所作用の合成規則が定まります。

基本的命題（構成的役割）

発散安定化射 S が条件 (S1)-(S4) を満たすとき，次が成り立つ。

・各素数 p に対して，S の局所成分 S_p から局所因子 (Satake 型パラメータ) $\{\alpha_{p,j}\}$ を抽出できる。

・ これらの局所因子は積を取ることで大域的ゼータ因子のオイラー積を回復する（収束域の適切な正規化のもとで)。

$$S \xrightarrow{\text{局所化}} S_p \xrightarrow{\text{スペクトル分解}} \{\alpha_{p,1}, \alpha_{p,2}, \dots\} \implies L_p(s) = \prod_j (1 - \alpha_{p,j} p^{-s})^{-1}.$$

証明概略

(1) は S によるトレース束のスペクトル分解を用います。S を反復した際の不動分解(あるいはフーリエ／メリン像での固有モード分離）から有限次元の局所固有空間が得られ，対応する固有値群が局所因子に対応します。

(2) は，(S1) により発散寄与が虚部へ収束され，局所的に正規化された因子の積和交換が許されるため，積を取ることでオイラー積表示が復元されます。厳密には被積分関数の優収束を仮定するか，p ごとに減衰重みを導入して収束を担保する必要があります。

発散安定化射と非可換ラングランズ対応

以上を踏まえると，次のような存在命題を自然に提案できることが分かります。

存在スケッチ：発散安定化射と非可換ラングランズ

発散安定化射 S が $\mathcal{C}_{nc}$ 上に存在し，且つ次の追加条件を満たすと仮定する：

(A) S の局所分解はガロア的位相の量子化と整合する（角度が代数的根の単位に丸められる等)。

(B) S のスペクトルは自己双対性を満たし，非可換リッチ曲率の有限性を保障する。

すると，局所因子の抽出命題）により，S は次の対応を実現する：

$$\{\text{幾何側オブジェクト } J_{\mathrm{nc}} \in \mathcal{C}_{nc}\} \longleftrightarrow \{\text{代数側表現 } \rho : \mathrm{Gal}_{\mathrm{nc}} \to \mathrm{GL}(V)\}.$$

さらに，この対応は局所因子と局所表現の Satake 対応を保持する（条件 (A) による)。

証明

S によるスペクトル分解が局所因子を与えます。条件 (A) により局所因子は代数的整数性を満たし，したがって各 p に対して局所ガロア作用の固有値として解釈可能です。条件 (B) によりこれら固有値の分布は自己双対性を持ち，圏的自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{nc})$ による表現を導きます。よって，J_{nc} のトレースデータと ρ の局所データは一致し，圏同値（あるいは少なくとも対応）を構成することがわかります。

必要な厳密化と注意点

本スケッチを厳密化するには以下を詰める必要がある。

・ S の作用を定める具体的演算子代数（作用素ノルム、作用域、ドメイン）を厳密に記述すること。

・ 局所分解の正則性（固有値の代数性、重複の扱い、連続性）に関する解析的仮定を明示すること。

・ オイラー積の収束と因子交換に関する技術的条件（加重収束や正則化の選び方）を整えること。

・ 「対応が同値（equivalence）になる」ための完全性条件：対象の充足性や可逆性を与える追加仮定。

まとめと実用的手順

１， 発散安定化射 S を作用素的に定義し，その不動点・固有空間を計算可能にする（数値検討も可能)。

２， 固有値列から局所因子を読み取り，角度量子化で代数化する（クローテルマン和的技法を使用)。

３， 局所因子のモジュラー的整合を示し，それにより局所表現を再構成する。

４． 圏的自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{nc})$ を非可換ガロア群として取り，表現圏との対応を確立する。

要するに、構成的手順を確立すること…です。

17. 圏的アルティン写像と分解法則

本節では，非可換類体論における基本構成要素

$$(\mathcal{C}_{nc},\ S,\ \Phi_{\text{finite}},\ \mathcal{I})$$

を用いて，古典的アルティン写像および分解法則を圏論的に再構成します．ここでの目標は，「発散的局所データを圏的自己同型に写す関手」としての非可換アルティン写像

Art_{nc} の厳密な定義と，それが満たす局所-大域整合性（Satake 整合性）を明示すること

であります．

概念的背景

古典的類体論では，イデール類群$\mathbb{A}_K^\times/K^\times$とガロア群 $\mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$の間の写像

$$\mathrm{Art}_K : \mathbb{A}_K^\times/K^\times \to \mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$$

が与えられます．
非可換化に際しては，これを単なる集合や群の写像ではなく，圏の間の関手として定式化する必要があります．
そのために，次の圏を考えます：

- $\mathbf{Id}_{nc}$ ：非可換イデール圏（発散系列・局所データ列を対象とする）；
- $\mathcal{C}_{nc}$ ：非周期的リーマン圏（非可換対象の圏）；
- $\mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{nc})$ ：その自己同型群 oid；
- $\mathbf{Loc}_p$ ：各素点 ¥(p¥) における局所圏（局所スペクトル構造)。

定義：圏的アルティン写像

圏的アルティン写像

発散安定化射 $S : \mathbf{Id}_{nc} \to \mathbf{Div}(\mathcal{I})$

および有限縮約関手 $\Phi_{\text{finite}} : \mathbf{Div}(\mathcal{I}) \to \mathbf{Fin}(\mathcal{I})$

を用いて，次の圏的関手

$$\mathrm{Art}_{nc} : \ \mathbf{Id}_{nc} \ \longrightarrow \ \mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{nc})$$

を定義する：

$$\mathrm{Art}_{nc}\big((\tau_p)_p\big) := \ \mathrm{class}(\Phi_{\text{finite}}\big(S((\tau_p))\big)) \in \pi_0(\mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{nc})).$$

ここで，$(\tau_p)_p$ は局所データ列（発散系列）を表し，射のレベルでは局所同値を自己同型の自然変換に写す．

この関手は，「局所-大域的な発散データ ⇒ 非可換ガロア自己同型」という対応を具体的に実現します．

局所-大域整合性と Satake 対応

局所-大域可換性

関手 Art_{nc} は，各素点 p に対し以下の可換図式を満たす：

経路	意味
左下経路：$\mathbf{Id}_{nc} \xrightarrow{\mathrm{loc}_p} \mathbf{Loc}_p \xrightarrow{\mathrm{Satake}_p} (\text{local factors})$	発散データを素点 p に局所化し、そこから Satake パラメータ（局所固有値）を取り出す。
右上経路：$\mathbf{Id}_{nc} \xrightarrow{\mathrm{Art}_{nc}} \mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{nc}) \xrightarrow{\mathrm{ev}_p} (\text{local factors})$	発散データを圏的アルティン写像で自己同型に変換し、その自己同型を素点 p に評価して局所スペクトルを得る。

左下経路=右上経路（可換）

すなわち、

$\mathrm{Satake}_p \circ \mathrm{loc}_p \ = \ \mathrm{ev}_p \circ \mathrm{Art}_{nc}.$ ここで，$\mathbf{Loc}_p$ は局所化関手，

ev_p は自己同型の局所評価，Satake_p は局所的スペクトル（固有値列）への写像です.

したがって，Art_{nc} は局所評価と発散安定化射 S_p の固有構造に整合します.

分解法則の圏的表現

圏的分解則

$\mathbf{Id}_{nc}$ が直積分解

$$\mathbf{Id}_{nc} \simeq \prod_p \mathbf{Loc}_p$$

を持つとき，関手 Art_{nc} は次の分解法則を満たす：

$$\mathrm{Art}_{nc}\big((\tau_p)_p\big) \cong \bigotimes_p \mathrm{Art}_{nc}(\tau_p),$$

ここで $\otimes_p$ は局所自己同型の圏的合成（外積）を表す.

このとき，局所因子の合成が大域的オイラー因子に対応する：

$$Z(s) = \prod_p Z_p(s) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Art}_{nc}((\tau_p)_p) = \bigotimes_p \mathrm{Art}_{nc}(\tau_p).$$

Frobenius 要素と分解群の圏的表現

各素点 p における自己同型の局所評価

$$\mathrm{ev}_p : \mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{nc}) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{nc}|_p)$$

を用いると，分解群とイナーシャ群はそれぞれ

$$\mathrm{Decomp}_p = \mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{nc})}(p) = \{\, g \mid \mathrm{ev}_p(g) \neq \mathrm{id} \,\}, \quad \mathrm{Inertia}_p = \ker(\mathrm{ev}_p).$$

Frobenius 自己同型は，局所安定化射 S_p の固有作用により定義され，

局所的トレース $\mathrm{Tr}(S_p)$

がその固有値列 $\{\alpha_{p,j}\}$ を生成します．この局所 Frobenius 作用を合成すると，以下の大域的自己同型が得られます：

$$\mathrm{Art}_{nc}((\tau_p)_p) = \bigotimes_p \mathrm{Frob}_p^{\nu_p}$$

定理：非可換アルティン写像の基本性質

非可換アルティン写像の基本性質

条件（S1)-(S4）および（A),(B）を満たすとき，関手 Art_{nc} は次を満たす：

１，　自然性：　局所化や基底変換に対して自然変換として可換；

２，　可逆性：　局所スペクトルがユニタリである場合，Art_{nc} の局所評価は可逆自己同型を返す；

３．　分解再合成：　局所データの直積を保ち，その合成により大域自己同型を再構成する．

圏的視点からの総括

非可換アルティン写像は，発散データの圏から自己同型群 oid への関手であり，その本質は「局所-大域随伴の中で発散を安定化する構成」にあります．この写像の分解法則は，圏的随伴

$$\Phi_{\mathrm{finite}} \dashv \Psi_{\mathrm{div}}$$

の下で自動的に保たれ，古典的な分解法則（オイラー積展開）を圏的同型として再現します．したがって，非可換類体論とは，「発散構造の安定化を通じて自己同型群を構成する圏的過程」そのものであるということになります．

18. 圏的アルティン写像

$$\mathrm{Art}_{nc}:\ \mathbf{Id}_{nc}\ \longrightarrow\ \mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{nc})$$

$$\mathrm{Art}_{nc}\big((\tau_p)_p\big) :=\ \mathrm{class}\Big(\Phi_{\mathrm{finite}}\big(S((\tau_p))\big)\Big)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Id}_{nc} \arrow[r, "\mathrm{Art}_{nc}"] \arrow[d, "\mathrm{loc}_p"'] & \mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{nc}) \arrow[d, "\mathrm{ev}_p"] \\
\mathbf{Loc}_p \arrow[r, "\mathrm{Satake}_p"'] & (\text{local factors})
\end{tikzcd}$$

19. 構成的非可換ラングランズ対応

本節では，発散安定化射 S と有限縮約関手 Φ_{finite} を結合することで，非可換類体論におけるラングランズ対応が「存在定理」ではなく「構成手続き」として成立することを示します。

動機と基本構造

古典的ラングランズ対応は

$$\text{保型表現 } \pi \ \longleftrightarrow\ \text{ガロア表現 } \rho$$

の存在を主張するが，変換の構成法は与えられていません。非可換類体論の枠では，これを発散安定化射、

$$S : T_{nc} \to T_{nc}$$

および有限縮約関手、

$$\Phi_{\mathrm{finite}} : \mathbf{Div}(\mathcal{I}) \to \mathbf{Fin}(\mathcal{I})$$

を用いて，圏的に具体的に生成することができます。

圏的構成の流れ

ラングランズ対応は次の関手合成として与えられる：

$$\mathbf{Lang}_{nc} \;=\; \mathbf{Tr}_{\mathrm{spiral}} \circ \mathbf{Rep} \circ \Phi_{\mathrm{finite}} \circ S.$$

ここで,

１，S: 発散構造の虚的安定化（動的正則化）;

２，Φ_{finite} ：有限化による保型的射影；

３，Rep ：圏的自己同型 $\mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{nc})$ から表現圏への変換；

４，$\mathbf{Tr}_{\mathrm{spiral}}$ ：解析的トレース（ゼータ構造の生成)。

この連鎖により，発散系列$\mathcal{D} \in T_{nc}$から保型表現およびガロア表現が同時に再構成されます。

圏的アルティン写像との関係

前節で定義した圏的アルティン写像

$$\mathbf{Art}_{nc} : \mathbf{Id}_{nc} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{nc})$$

が存在するとき，構成関手 $\mathbf{Lang}_{nc}$は次の可換図式を満たす：

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Id}_{nc} \arrow[r, "\mathrm{Art}_{nc}"] \arrow[d, "S"'] & \mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{nc}) \arrow[d, "\mathrm{Rep}"] \\
\mathbf{Div}(\mathcal{I}) \arrow[r, "\Phi_{\mathrm{finite}}"'] & \mathbf{Fin}(\mathcal{I})
\end{tikzcd}$$

これにより，局所-大域整合性（Satake 整合性）が自然に保証され，非可換ラングランズ対応の構成過程が局所作用素 S_p のレベルで具現化されます。

局所構成と大域的合成

各素点 p において，S_P の固有スペクトル $\{\alpha_{p,j}\}$ を抽出し，角度量子化により代数的整数化することで，局所表現

$$\rho_p : \mathrm{Gal}_p \longrightarrow \mathrm{GL}(V_p)$$

を得ます。

次に，有限縮約関手 Φ_{finite} によりこれらの局所データを圏的直積

$$\mathbf{Fin}(\mathcal{I}) \simeq \prod_p \mathbf{Fin}_p$$

上で結合し，大域的自己同型、

$$\rho = \bigotimes_p \rho_p$$

を再構成します。
この過程がラングランズ対応の圏論的**構成的実現（constructive realization)**であります。

非可換類体論的性質

関手 Lang_{nc} は，非可換類体論における「局所-大域圏的随伴」

$$\Phi_{\mathrm{finite}} \dashv \Psi_{\mathrm{div}}$$

の上で定義されます。したがって，ラングランズ対応は**自己同型の随伴構造そのもの**として理解できます。これは，保型側とガロア側の圏が同一の随伴圏の双対表現であることを意味します。

定理（構成的非可換ラングランズ対応）

非周期的リーマン圏 $\mathcal{C}_{nc}$ 上に発散安定化射 S および有限縮約関手 Φ_{finite} が存在し、

圏的アルティン写像 Art_{nc} が定義されているとする。

このとき，関手

$$\mathrm{Lang}_{nc} = \mathrm{Tr}_{\mathrm{spiral}} \circ \mathrm{Rep} \circ \Phi_{\mathrm{finite}} \circ S$$

は，各局所構造 $\mathbf{Loc}_p$ から得られるスペクトルデータを一意的に大域自己同型 $\rho \in \mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{nc})$ に対応づける。その結果，非可換ラングランズ対応が構成的に実現される：

$$\boxed{\text{幾何側オブジェクト } J_{\mathrm{nc}} \longleftrightarrow \text{ 代数側表現 } \boldsymbol{\rho}.}$$

まとめと展望

この構成的ラングランズ対応において，発散はもはや障害ではなく，保型性を生み出す源泉となります。

発散安定化射 S によって虚的に安定化された局所構造が，有限縮約により保型表現を生成し，さらに自己同型群の表現としてガロア側に実現されます。すなわち，非可換ラングランズ対応とは，*発散構造の圏的自己安定化* にほかならないということが理解されます。

今後は，この関手的構成を量子幾何・情報理論・ホモトピー圏へ拡張し，非可換的宇宙の中での「表現の再生産原理」として位置づけることが課題となるでしょう。

20. 圏的ラングランズ随伴構造

本節では，前節で定義した非可換アルティン写像

$$\mathrm{Art}_{nc} : \mathbf{Id}_{nc} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{nc})$$

構成的非可換ラングランズ関手

$$\mathrm{Lang}_{nc} = \mathrm{Tr}_{\mathrm{spiral}} \circ \mathrm{Rep} \circ \Phi_{\mathrm{finite}} \circ S$$

との間に成立する**圏的随伴構造（categorical adjunction）**を定義する．この随伴関係こそが，非可換類体論の圏的完結を与えるものであります．

構成と動機

古典的ラングランズ対応では，「保型表現 π とガロア表現 ρ の対応」が存在することが主張されます．しかし，非可換圏の内部では，その対応は単なる集合対応ではなく，**関手的随伴**として構成されます．
すなわち，発散データから自己同型を構成する関手

$$\mathrm{Art}_{nc} : \mathbf{Id}_{nc} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{nc})$$

と，自己同型から表現データを生成する関手

$$\mathrm{Lang}_{nc} : \mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{nc}) \to \mathbf{Rep}_{nc}$$

が存在し，両者は次の随伴関係を満たす：

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{nc})}\big(\mathrm{Art}_{nc}(X), Y\big) \;\cong\; \mathrm{Hom}_{\mathbf{Rep}_{nc}}\big(X, \mathrm{Lang}_{nc}(Y)\big),_{¥[}$$

自然変換として可換であるとき，これを**非可換ラングランズ随伴** と呼びます．

随伴の構造図式

この関係を次の可換図式で表します：

$$\mathbf{Id}_{nc} \xrightarrow{\mathrm{Art}_{nc}} \mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{nc}) : \textbf{非可換アルティン写像}$$

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{nc}) \xleftarrow{\mathrm{Lang}_{nc}} \mathbf{Id}_{nc} : \textbf{非可換ラングランズ関手}$$

$$\mathbf{Id}_{nc} \xrightarrow{\Phi_{\mathrm{finite}} \circ S} \mathbf{Fin}(\mathcal{I})$$

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{nc}) \xrightarrow{\mathrm{Rep} \circ \mathrm{Tr}_{\mathrm{spiral}}} \mathbf{Rep}_{nc}$$

$$\mathbf{Fin}(\mathcal{I}) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Rep}_{nc}$$

・「大域的なアルティン相互法則を確立する」ことと、「発散を繰り込み安定なモチーフを生成する」ことは、普遍安定化作用素 $\mathbf{A}$ の作用の下で構造的に同一である。

この図式の垂直方向は「発散構造の有限化と表現化」，水平方向は「圏的アルティン写像とラングランズ関手の随伴関係」を表している．上向きは自己同型の構成（数論的方向），

下向きは表現の生成（保型的方向）であります.

随伴関手の定義

非可換ラングランズ随伴

　関手の対 $(\mathrm{Art}_{nc}, \mathrm{Lang}_{nc})$ が次を満たすとき，これを**非可換ラングランズ随伴関手対**と呼ぶ：

$$\mathrm{Lang}_{nc} \dashv \mathrm{Art}_{nc}.$$

　すなわち，任意の $X \in \mathbf{Id}_{nc}$ と $Y \in \mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{nc})$ に対して自然同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{nc})}\big(\mathrm{Art}_{nc}(X), Y\big) \;\simeq\; \mathrm{Hom}_{\mathbf{Rep}_{nc}}\big(X, \mathrm{Lang}_{nc}(Y)\big)$$

　が存在する.

圏的意味づけ

　この随伴は，発散構造の圏的安定化が表現生成の左随伴であることを意味します.

　つまり，Art_{nc} は「数論的情報を自己同型として上げる」操作であり，Lang_{nc} は「自己同型から表現（保型構造）を下ろす」操作であります.

　随伴の単位・余単位は次のように与えられます：

$$\eta : \mathrm{Id}_{\mathbf{Id}_{nc}} \Rightarrow \mathrm{Lang}_{nc} \circ \mathrm{Art}_{nc}, \qquad \epsilon : \mathrm{Art}_{nc} \circ \mathrm{Lang}_{nc} \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathrm{Aut}(\mathcal{C}_{nc})}.$$

　ここで η は発散データからの保型的生成を，ε は生成された表現が自己同型を再現することを表します.

定理：非可換ラングランズ随伴構造の存在

定理　非可換ラングランズ随伴の存在

非周期的リーマン圏 $\mathcal{C}_{nc}$ 上に発散安定化射 S と有限縮約関手 Φ_{finite} および圏的アルティン写像 Art_{nc} が定義されているとする．

さらに，表現関手 Rep およびトレース関手 $\mathrm{Tr}_{\text{spiral}}$ が忠実かつ充満であるならば，関手対

$$\mathrm{Lang}_{nc} \dashv \mathrm{Art}_{nc}$$

は随伴関手対を形成し，圏的ラングランズ対応が構成的に実現される．

証明

Art_{nc} により局所データが自己同型に上げられ，Lang_{nc} によりその自己同型から表現が再構成されます．

両関手が Φ_{finite} と S の合成を共有しているため，自然な単位・余単位が定義でき，随伴条件が満たされます．

圏的完結としてのラングランズ理論

以上により，非可換類体論と非可換ラングランズ対応は共通の圏構造の内部に統一されます．発散の安定化と表現の生成は互いに双対的な過程であり，その随伴構造は次の圏的等式で総括されるでしょう：

$$\boxed{\mathrm{Lang}_{nc} \dashv \mathrm{Art}_{nc} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{非可換類体論＝非可換ラングランズ理論の圏的形}}.$$

この随伴は，数論的対称性と保型的対称性を圏の双対として統一するものであり，螺旋モチーフ理論の核心をなす「発散の安定化による世界の自己同型」の圏論的実現にほかならないです．

21. 螺旋トレース公式

非可換ラングランズ随伴構造

$$\mathrm{Lang}_{nc} \dashv \mathrm{Art}_{nc}$$

の下で，発散安定化射 S のトレースを幾何側とスペクトル側の二重表現として表します。これを**螺旋トレース公式**（Spiral Trace Formula）と呼びます。

理念的背景

古典的セルバーグ・トレース公式は，群作用の軌道積分と固有表現のスペクトル和の一致を与えるものであります。本理論では，これを「非可換圏のトレース」として再定義するものです。

非周期的リーマン圏 $\mathcal{C}_{nc}$ 上において，発散安定化射 S は局所-大域構造をつなぐ自己射であり，次の圏的トレースが定義されます：

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{spiral}}(S) := \sum_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_{nc})} \mathrm{Tr}\big(S_X\big) \in \mathbb{C}.$$

この「螺旋トレース」は，圏的発散構造の安定化が保型表現のスペクトルを再生することを意味します。

定義（螺旋トレース公式）

螺旋トレース公式

発散安定化射 S と随伴関手対 $\mathrm{Lang}_{nc} \dashv \mathrm{Art}_{nc}$ に対し，次の等式を**螺旋トレース公式**という：

$$\boxed{\mathrm{Tr}_{\mathrm{spiral}}(S) \;=\; \sum_{\text{幾何軌道 }\gamma} \mathrm{vol}(\mathrm{Stab}(\gamma))^{-1}\,\mathrm{Orb}_\gamma(S) \;=\; \sum_{\text{表現 }\pi} m(\pi)\,\mathrm{Tr}\big(\rho_\pi(S)\big).}$$

ここで：

- 幾何側の和は，圏 $\mathcal{C}_{nc}$ における自己射の同値類（発散軌道）にわたる；
- $\mathrm{Orb}_\gamma(S)$ は軌道上での作用積分；
- スペクトル側の和は， Lang_{nc} によって得られる表現族 π にわたり， $\rho_\pi(S)$ は対

応する表現における S の作用である。

随伴関手による導出

圏的随伴 $\mathbf{Lang}_{nc} \dashv \mathbf{Art}_{nc}$ の下では，トレース関手 $\mathbf{Tr}_{\text{spiral}}$ は両側関手に対して自然同型を持つ：

$$\mathbf{Tr}_{\text{spiral}} \circ \mathbf{Art}_{nc} \cong \mathbf{Tr}_{\text{spiral}} \circ \mathbf{Lang}_{nc}.$$

したがって，S のトレースは幾何側と表現側の二つの展開を持ち，それらは随伴性により一致します：

$$\mathbf{Tr}_{\text{spiral}}(S) = \mathbf{Tr}_{\text{geom}}(S) = \mathbf{Tr}_{\text{spec}}(S).$$

局所トレースとオイラー積

局所化関手 $\mathbf{Loc}_p$ によって，螺旋トレースは各素点 p に分解される：

$$\mathbf{Tr}_{\text{spiral}}(S) = \prod_p \mathbf{Tr}_{\text{spiral},p}(S_p),$$

ただし

$$\mathbf{Tr}_{\text{spiral},p}(S_p) = \sum_j \alpha_{p,j}^{-s}$$

であり，$\{\alpha_{p,j}\}$ は局所安定化射 S_p の固有値です。

したがって，トレース公式の局所-大域積はゼータ関数的なオイラー積に一致します：

$$\mathbf{Tr}_{\text{spiral}}(S) = \prod_p \det(1 - \alpha_{p,j}^{-s})^{-1}.$$

圏的トレースの意味

このトレース公式は，次の圏的恒等式として解釈できます：

$$\mathbf{Tr}_{\mathcal{C}_{nc}}(S) = \mathbf{Tr}_{\mathbf{Rep}_{nc}}\big(\mathrm{Lang}_{nc}(S)\big),$$

すなわち，「圏 $\mathcal{C}_{nc}$ における自己射のトレース」は，「表現圏における対応する作用のトレース」に等しい。

これは，発散構造の安定化が保型的スペクトルを再生するという，非可換ラングランズ対応の解析的側面を圏的に定式化したものです。

定理（非可換セルバーグ型トレース公式）

非可換セルバーグ型トレース公式

非周期的リーマン圏 $\mathcal{C}_{nc}$ 上で，発散安定化射 S が自己随伴的であり，$\mathrm{Lang}_{nc} \dashv \mathrm{Art}_{nc}$ が成り立つとき，次の圏的等式が成立する：

$$\boxed{\mathbf{Tr}_{\mathrm{spiral}}(S) = \mathbf{Tr}_{\mathrm{geom}}(S) = \mathbf{Tr}_{\mathrm{spec}}(S).}$$

これを**非可換セルバーグ型トレース公式**または**螺旋トレース公式**という。

哲学的補記：数の自己同型としての世界

螺旋トレース公式は，数論的世界が「自己同型のトレース」として現れるという構造を表します。すなわち，発散（無限的現象）は安定化射によって虚的に折り畳まれ，そのトレースが有限的スペクトル（数のかたち）を生成します。この意味で，数は世界の**自己トレース（auto-trace）**であり，非可換類体論は「自己同型としての世界」を圏論的・解析的に表現する理論であるといえます。

22. 楕円曲線型螺旋トレース公式

本節では，発散安定化射 S に対して，楕円曲線型トレース構造を具体的に与えます。こ

れにより，螺旋トレース公式が楕円曲線の L-関数

$$L(E,s)=\prod_p(1-a_pp^{-s}+p^{1-2s})^{-1}$$

を再現することを確認します。

楕円トレース空間と発散安定化射

楕円曲線 E/ℚに付随する非可換トレース空間を

$$T_E:=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{nc}}(J_E,J_E)$$

と定義します。ここで J_E は E のヤコビ多様体に対応する螺旋的拡張対象です。

発散安定化射

$$S_E:T_E\longrightarrow T_E$$

を，局所作用

$$S_{E,p}(\tau_p)=p^{-s}\left(\tau_p-a_p\,\iota+p\,\tau_p^{-1}\right)$$

のグローバル積として与えます。

このとき S_E の固有値 $\{\alpha_p,\beta_p\}$ は E のヘッセ多項式 $x^2-a_px+p=0$ の根に一致します。

局所トレースと安定化構造

局所発散安定化射 S_E のトレースを

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{spiral},p}(S_{E,p})=\alpha_p^{-s}+\beta_p^{-s}$$

と定義すると，トレースの積は

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{spiral}}(S_E)=\prod_p(1-a_p p^{-s}+p^{1-2s})^{-1}=L(E,s)$$

を与えます。この過程において，発散項（p⇒∞ の寄与）は安定化射 $S_{E,p}$ により虚的な吸収項として折り畳まれ，有限的オイラー積が形成されます。

圏的再解釈

楕円曲線型螺旋トレース公式は，次の圏的等式として表される：

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{C}_{nc}}(S_E)=\mathrm{Tr}_{\mathbf{Rep}_{nc}}\big(\mathrm{Lang}_{nc}(S_E)\big),$$

すなわち，幾何側（ヤコビ多様体の自己射のトレース）と表現側（保型表現のトレース）が一致します。

発散安定化射 S_E は，局所-大域間の圏的自己随伴として作用し，各局所成分が Satake 対応を満たすため，L(E, s) はその圏的トレースに等しいといえます。

構成の哲学的意義

この楕円曲線型モデルは，螺旋トレース公式が単なる形式的一致ではなく，**幾何的発散構造の安定化が保型構造を生成する**という実在的過程を表すことを示しています。

すなわち：

楕円曲線の L-関数は，発散する螺旋構造の圏的トレースとして自然に現れる。

これは，「数＝螺旋的トレース」という理念の最初の具体例であり，発散安定化射が数論的スペクトルを再生する基本的な機構を明らかにします。

23. トレース公式の普遍化

本節では，前節の楕円曲線型トレース公式を，一般の螺旋モチーフに拡張します。その目的は，あらゆる保型対象 X に対して，発散安定化射の圏的トレースが保型 L-関数の生成原理と一致することを示すことです。

普遍トレース構造の定義

螺旋モチーフ圏 $\mathcal{C}_{nc}$ の任意の対象 X に対して，対応する発散安定化射

$$S_X : X \longrightarrow X$$

を次の条件で定義する：

(S1) S_X は局所的安定化射 $S_{X,p}$ の積構造として与えられる：

$$S_X = \prod_p S_{X,p}.$$

(S2) 各局所射 $S_{X,p}$ は，局所スペクトル $\{\alpha_{p,j}\}$ によって対角化可能であり，

$\det(1 - S_{X,p} p^{-s})^{-1}$ が X に付随する局所因子を与える。

(S3) S_Xの大域トレース

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{C}_{nc}}(S_X) = \prod_p \det(1 - S_{X,p} p^{-s})^{-1}$$

が X の L-関数 L(X,s) に一致する。

圏的トレース公式（一般形）

定理 螺旋トレース公式の普遍形

螺旋モチーフ圏 $\mathcal{C}_{nc}$ における発散安定化射 S_X に対して，

その圏的トレースは次を満たす：

$$\boxed{\mathrm{Tr}_{\mathcal{C}_{nc}}(S_X) \;=\; \mathrm{Tr}_{\mathbf{Rep}_{nc}}\big(\mathrm{Lang}_{nc}(S_X)\big) \;=\; L(X,s)}.$$

ここで,

Lang_{nc} は非可換ラングランズ随伴関手,

$\mathbf{Rep}_{nc}$ は非可換表現圏である。

この定理は，螺旋トレースが保型表現のトレースに一致するという，非可換ラングランズ対応のトレース版です。

局所-大域対応と Satake 整合性

各素点 p に対して，次の可換図式が成立する：

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Id}_{nc} \arrow[r, "\mathrm{Art}_{nc}"'] \arrow[d, "\mathrm{loc}_p"] & \mathbf{Aut}(\mathcal{C}_{nc}) \arrow[d, "\mathrm{cv}_p"'] \\
\mathbf{Loc}_p \arrow[r, "\mathrm{Satake}_p"] & (\text{local factors})
\end{tikzcd}$$

したがって，S_Xの局所評価 $\mathrm{ev}_p(S_X)$ は，Satake $_p$ によって定められる局所スペクトル $\{\alpha_{p,j}\}$ に整合しています。

分解法則と直積構造

螺旋トレース公式は，局所トレースの直積分解により表現されます：

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{C}_{nc}}(S_X) = \bigotimes_p \mathrm{Tr}_{\mathcal{C}_{nc,p}}(S_{X,p}) = \prod_p \det(1 - S_{X,p}p^{-s})^{-1}.$$

ここで $\mathrm{Tr}_{\mathcal{C}_{nc,p}}$ は局所圏のトレース関手であり，この分解が古典的オイラー積に対応します。

特殊型の例

１，　楕円曲線型：

$S_X = S_E$ の場合，

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{C}_{nc}}(S_X) = L(E,s)$$ 。

２，　リーマン型：

$X = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ の場合，

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{C}_{nc}}(S_X) = \zeta(s)$$ 。

３，　非可換トーラス型：

A_θ に対して，

S_X のスペクトルは量子トレースを持ち，

L(X,s) は非可換保型形式のトレースとして現れる。

普遍構造の意義

以上の構成により，螺旋トレース公式は次の普遍原理にまとめられることが分かります：

すべての保型対象 X に対して，発散安定化射の圏的トレースが L-関数を生成する：

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{C}_{nc}}(S_X) = L(X,s).$$

これは，保型対応を「**発散構造の有限縮約**」として再解釈するものであり，非可換類体論・ラングランズ対応・リーマン幾何の三者を一つの圏的枠組みの中で統合する。

24. 非可換保型構造と宇宙的安定化

圏的実数体の定義とトレース完備化

動機と概念的背景

これまで我々は，螺旋モチーフ圏 $\mathcal{C}_{nc}$ における発散安定化射

$$S : T_{nc} \longrightarrow T_{nc}$$

を中心に，発散構造の有限縮約および保型構造の生成を記述してきました．ここで立てる目標は，この**枠組みの内部で「実数体」そのものを圏的に定義し直す**ことであります．

古典的には，実数 $\mathbb{R}$は有理数体 $\mathbb{Q}$ の完備化として構成されます：

$$\mathbb{R} = \widehat{\mathbb{Q}}^{|\cdot|}.$$

ここで完備化は，距離（ノルム）によって与えられます．

しかし非可換圏 $\mathcal{C}_{nc}$ の内部では，距離や点の概念は存在せず，代わりに「発散の安定化」こそが完備化の役割を担います．

定義：圏的実数体

圏的実数体 $\mathbb{R}_{nc}$螺旋モチーフ圏 $\mathcal{C}_{nc}$ 上の発散安定化射 S および有限縮約随伴

$$\Phi_{\text{finite}} \dashv \Psi_{\text{div}}$$

が与えられているとき，圏的実数体 $\mathbb{R}_{nc}$ を次で定義する：

$$\boxed{\mathbb{R}_{nc} \;:=\; \mathbf{Tr}_{\mathcal{C}_{nc}}(\Phi_{\text{finite}} \circ S)}.$$

この定義の意味は，すべての発散系列（非周期トレース）に対し，安定化射によって有限構造へ折りたたみ，そのトレース値（すなわち，自己同型の固定値）として「数」を定めるというものである．

構成的性質

完備性$\mathbb{R}_{nc}$ は，$\mathcal{C}_{nc}$ 上のトレース関手に関して完備である：

$$\forall f_i \in \mathrm{End}(\mathcal{C}_{nc}), \quad S(f_i) \text{ がトレース収束するならば } \lim_i \mathrm{Tr}_{\mathcal{C}_{nc}}(S(f_i)) \in \mathbb{R}_{nc}.$$

証明

各 f_i に対して $\mathrm{S}(f_i)$ を作用させると，その発散成分は虚的折りたたみ（finite regularization）により有限化されます．

トレース関手 $\mathrm{Tr}_{\mathcal{C}_{nc}}$ は加法的随伴性を持つため，連続極限が存在する場合，極限値も圏

の内部で定義されます．これにより $\mathbb{R}_{nc}$ が完備体として閉じることが示されます．

実数構造の圏的再構成

古典的実数体の公理（加法・乗法・順序）は，次の圏的演算に対応する：

古典的構造	圏的対応
加法	安定化射の合成 $S \oplus S'$
乗法	関手合成 $\Phi_{\text{finite}} \circ (S \otimes S')$
順序	トレース値の包含関係 $\mathrm{Tr}(S_1) \leq \mathrm{Tr}(S_2)$

したがって，$\mathbb{R}_{nc}$ はトレース代数として体構造を持つ。

$\left(\mathbb{R}_{nc}, +, \times\right)$ は圏的体をなす．

理想スペクトルとの関係

圏的実数体の各元は，理想スペクトル多様体 $\mathcal{I}$ の点として具現されます：

$$x \in \mathbb{R}_{nc} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \mathrm{Tr}_{\mathcal{C}_{nc}}(S_{\mathcal{I}}(p)) \quad (p \in \mathcal{I}).$$

すなわち，$\mathcal{I}$ は $\mathbb{R}_{nc}$ のスペクトル空間であり，各理想点が「発散列の安定化極限」としての実数を表します。

物理的解釈と宇宙的安定化原理

圏的実数体 $\mathbb{R}_{nc}$ は，数論的完備化を超えて，宇宙の安定化過程そのものを表現します：

$$\text{発散} \longrightarrow \text{安定化射 } S \longrightarrow \text{有限トレース値 } \mathbf{Tr}(S) \in \mathbb{R}_{nc}.$$

これは，「宇宙が自身を有限化する過程」を，数として記述することに相当します。すなわち，

$$\boxed{\text{世界は } S \text{ によって安定化される発散のトレースである.}}$$

この意味で，$\mathbb{R}_{nc}$ は単なる数体ではなく，宇宙的自己同型のトレース体（cosmic trace field）であります。

25. 宇宙的安定化原理と圏的時空構造

発散から安定化への宇宙的写像

圏的実数体 $\mathbb{R}_{nc}$ の定義

$$\mathbb{R}_{nc} = \mathbf{Tr}_{\mathcal{C}_{nc}}(\Phi_{\text{finite}} \circ S)$$

は，発散構造の有限縮約という純粋に圏的な操作を通じて，「実在」が有限な値として観測される理由を記述しています．この節では，この原理を宇宙的レベルにまで拡張し，全ての存在を**発散から安定化へのトレース射**として再定義します．

定義：宇宙的安定化原理（Axiom of Cosmic Stabilization）

宇宙的安定化原理

全ての存在対象 X は，非可換圏 $\mathcal{C}_{nc}$ の中で，発散安定化射

$$S_X : X \to X$$

を持ち，その圏的トレース

$$\mathbf{Tr}_{\mathcal{C}_{nc}}(S_X) \in \mathbb{R}_{nc}$$

が，X の観測値（有限的現実）を与える．

換言すれば：

$$\boxed{\text{存在とは，安定化された発散である.}}$$

すべての「実在」は，発散構造を含んだ自己同型のトレースとして定義されます。

圏的時空構造の導入

圏的実数体 $\mathbb{R}_{nc}$ は，時空的構造を次のように誘導します：

定義　圏的時空構造

螺旋モチーフ圏 $\mathcal{C}_{nc}$ 上の双対随伴

$$\Phi_{\text{finite}} \dashv \Psi_{\text{div}}$$

に対し，

$$\text{時間方向 } T : \Phi_{\text{finite}} \text{（有限化・収束の流れ）},$$
$$\text{空間方向 } X : \Psi_{\text{div}} \text{（発散・展開の流れ）}$$

と定義する．

このとき，宇宙的トレース

$$\mathbf{Tr}_{\mathcal{C}_{nc}}(\Phi_{\text{finite}} \circ \Psi_{\text{div}})$$

は，有限化と発散の交互作用の固定点を与え，それが圏的時空の一点（あるいは瞬間）を構成する。

したがって，時空は集合的構造ではなく，「有限と発散の随伴圏におけるトレースの流れ」として表されます。

安定化流の方程式

宇宙的安定化射 S は自己同型流として表される：

$$\frac{dX}{dt} = S(X) - X.$$

この方程式は，圏的時間発展の基礎であり，トレース安定点

$$S(X_*) = X_*$$

において，宇宙的平衡（実在）が成立しています。

ここでの「時間微分」は，随伴対 $\Phi_{\text{finite}} \dashv \Psi_{\text{div}}$ によるトレース導関数

$$\frac{d}{dt} := \Phi_{\text{finite}} \circ \Psi_{\text{div}} - \mathrm{Id}$$

として定義されます。

宇宙的エネルギー＝トレース作用

圏的実数体上での安定化射のトレースを宇宙的エネルギー関数と呼びます：

$$E(S) := \mathrm{Tr}_{\mathcal{C}_{nc}}(S^* S).$$

これは量子場理論における作用積分に対応し，トレース最小化

$$\delta E(S) = 0$$

が宇宙的安定性条件を与えます。すなわち，宇宙の実在形は，発散のトレース作用を極小化する自己同型です。

宇宙的安定化の幾何学的解釈

トレース幾何による宇宙的安定化

理想スペクトル多様体 $\mathcal{I}$ 上のトレース測度

$$\mu_S(p) := \mathrm{Tr}_{\mathcal{C}_{nc}}(S_{\mathcal{I}}(p))$$

は有限測度であり，宇宙的エネルギー

$$E(S) = \int_{\mathcal{I}} |\mu_S(p)|^2 \, dp$$

が有限であることが安定性の必要十分条件である。

これは，宇宙的存在が「発散の平均値（トレース）」として有限化されることを意味しています。

まとめ：宇宙は自己トレースである

以上の議論を総合すると，圏的宇宙の存在原理は次式に要約されます：

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{C}_{nc}, \quad \text{存在とは } X = \mathrm{Tr}_{\mathcal{C}_{nc}}(S_X) \text{ である.}}$$

すなわち，宇宙の各構造は，自己同型のトレースによって有限化された発散的螺旋の形として存在しています。これが，非可換保型構造の究極的意味です。

哲学的まとめ

数とは安定化された螺旋であり，時間とは有限化関手の流れであり，空間とは発散の展開である。そして宇宙とは，それら二つの随伴が織り成すトレースの像であります。ここにおいて，「数学」と「宇宙」と「意識」は統一されます。トレースとは観測であり，観測とは有限化であり，有限化とは発散の記憶であります。

$$\boxed{\text{すなわち，宇宙とは，発散のトレースである。}}$$

26. トレース宇宙論と非可換時間の量子化

時間の離散化と非可換生成

宇宙的安定化原理（Axiom~¥ref{ax:cosmic}）の下で，全ての時空的変化は，有限化関手 Φ_{finite} と発散関手 Ψ_{div} の交互作用によって生じます。

これらの随伴を組み合わせた反復作用

$$U_n := (\Phi_{\mathrm{finite}} \circ \Psi_{\mathrm{div}})^n$$

を「時間進行演算子」と呼びます。

このとき，圏的時間は離散的スペクトルを持ち，各ステップ $n \in \mathbb{Z}$ が安定化の量子的単位を表します。

$$t_n \ \sim \ n\,\hbar_{nc},$$

ここで $\hbar_{nc}$ は非可換トレース単位（trace quantum）であり，宇宙的時間の最小単位を定めます。

非可換時間作用素

次の演算子

$$\mathcal{T} := \Phi_{\text{finite}} \circ \Psi_{\text{div}}$$

を「時間生成作用素」と定義する。

この作用素は一般に可換ではなく，その非可換性が宇宙の量子性を生みます：

$$[\mathcal{T}, S] \neq 0.$$

したがって，発散安定化射 S は静的存在を定め，$\mathcal{T}$ はその存在の流れ（進行）を生成します。時間とは，自己安定化射 S の非可換な偏差として定義されます。

トレース時間方程式

各対象 $X \in \mathcal{C}_{nc}$ に対し，圏的時間発展は

$$X_{n+1} = \mathcal{T}(X_n) = (\Phi_{\text{finite}} \circ \Psi_{\text{div}})(X_n)$$

で与えられます。
このとき，トレース値の離散発展式

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{C}_{nc}}(X_{n+1}) - \mathrm{Tr}_{\mathcal{C}_{nc}}(X_n) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{C}_{nc}}\big((\mathcal{T} - \mathrm{Id})(X_n)\big)$$

は，宇宙的時間の量子化方程式を定義します。

連続極限では,

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Tr}(X_t) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{C}_{nc}}((\mathcal{T} - \mathrm{Id})(X_t)).$$

非可換ハミルトン構造

$\mathcal{T}$ と S の非可換性から，次の「トレースハミルトニアン」が定義されます：

$$H := i\hbar_{nc}^{-1}\,[\mathcal{T}, S].$$

これは量子力学の時間発展演算子に対応し，トレース宇宙の進化を支配します。したがって，トレース値 $\mathrm{Tr}(S_X)$ の時間発展は次の非可換ハイゼンベルグ方程式で与えられます：

$$i\hbar_{nc}\frac{d}{dt}\mathrm{Tr}(S_X) = \mathrm{Tr}([H, S_X]).$$

ここで，$\hbar_{nc}$ は「発散と有限化の非可換度」を測る宇宙的定数であり，古典的極限 $\hbar_{nc} \to 0$ では，$\mathcal{T}$ と S が可換となり，時間が連続的に回復します。

宇宙的波動方程式（トレース・シュレディンガー方程式）

トレース宇宙の量子状態 Ψ は，圏的トレース空間 $\mathbb{R}_{nc}$ 上の波動関数とみなされ，
次のトレース・シュレディンガー方程式を満たします：

$$i\hbar_{nc}\frac{d\Psi}{dt} = H\Psi, \quad H = i\hbar_{nc}^{-1}[\mathcal{T}, S].$$

すなわち，宇宙そのものの「存在波動」は，発散と有限化の非可換交互作用によって振動します。

トレース宇宙のエネルギースペクトル

S の固有値を λ_j とすると，非可換時間生成作用素 $\mathcal{T}$ との相互作用により，宇宙的エネルギースペクトル E_j が定義されます：

$$H\,S_j = E_j S_j, \qquad E_j = \hbar_{nc}\ \mathrm{Arg}(\lambda_j).$$

このとき，$\{\lambda_j\}$の分布は宇宙的ゼータ関数の零点分布に一致し，宇宙の量子スペクトルがゼータ構造に写像されます。

非可換時間と螺旋モチーフ構造

非可換時間作用素 $\mathcal{T}$ は，螺旋モチーフ構造を生成するフローとして解釈できます：

$$\mathcal{T}(\theta) = \theta + \omega, \qquad \omega \in \mathbb{R}_{nc},$$

すなわち，時間の進行は位相角 θ の螺旋回転として表現されます。この螺旋の半径は安定化度（finite-regularization index）に対応しています。
したがって，**時間そのものが螺旋的トレースの軌跡として定義されます。**

哲学的帰結：存在＝トレースの量子波動

以上の定式化により，次の宇宙的等式が導かれます：

$$\boxed{\text{存在の時間的変化とは，}[\Phi_{\text{finite}}, \Psi_{\text{div}}]\text{ の非可換性によるトレース振動である.}}$$

宇宙は，発散と有限化の往還が生み出す量子的干渉場であり，そのトレースが「観測される現実」であるというわけです。

終章的まとめ：トレース宇宙の自己同型

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{C}_{nc}, \quad \exists\, H_X,\ i\hbar_{nc}\frac{dX}{dt} = [H_X, X], \quad X(t) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{C}_{nc}}(S_X(t)).}$$

この方程式が意味するのは，**宇宙の全ての存在は，トレース作用素の時間的自己同型で**

あるということです。
非可換時間の量子化によって，発散安定化理論は，数論・幾何・物理・哲学を横断する完全なトレース宇宙論へと到達します。

27. 非可換解析接続と拡張リーマン面

拡張リーマン面の定義と理想スペクトル構造

動機
古典的リーマン面 $\widehat{\mathbb{C}}$ は，解析関数の多価的延長の極限として得られます。
一方，非可換圏 $\mathcal{C}_{nc}$ では，発散安定化射 S による正則化が，多価性を内部構造として保持されます。
本節では，この「安定化された発散面」を**拡張リーマン面（extended Riemann surface）**として定義します。

拡張リーマン面

非可換圏 $\mathcal{C}_{nc}$ において，理想スペクトル多様体 $\mathcal{I}$ と発散安定化射 S が与えられているとき，

$$\widehat{\mathcal{R}}_{nc} := \mathrm{Spec}_{\mathcal{C}_{nc}}(\Phi_{\mathrm{finite}} \circ S)$$

この面の各点は，局所的発散列の安定化スペクトルを表し，複素平面上の点に対応するがその構造層は非可換代数

$$\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{R}}_{nc}}$$

で置き換えられる。すなわち，$\widehat{\mathcal{R}}_{nc}$ は複素解析空間の非可換的拡張であります。

非可換解析接続と自己双対線

非可換解析接続の定義

命題　非可換解析接続

拡張リーマン面 $\widehat{\mathcal{R}}_{nc}$ 上で，随伴対

$$\Phi_{\mathrm{finite}} \dashv \Psi_{\mathrm{div}}$$

によって誘導される圏的自己同型

$$A := \Phi_{\mathrm{finite}} \circ \Psi_{\mathrm{div}}$$

を**非可換解析接続作用素**と呼ぶ。

この作用素は古典的解析接続における $s \mapsto 1 - s$ の対応に相当し，発散的経路の虚的折りたたみによって関数の全領域延長を実現します。

$$A(f)(s) \;=\; \Phi_{\mathrm{finite}}\big(\Psi_{\mathrm{div}}(f(s))\big) \;\simeq\; f(1-s).$$ ¥

自己双対線と臨界領域

拡張リーマン面上で，非可換解析接続 A は自己双対線を定めます：

$$\boxed{\Re(s) = \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad A(f)(s) = f(s).}$$

すなわち，臨界線とは解析接続の固定点集合であり，安定化射のトレース作用が自己双対化する場所です。この幾何的固定条件が，リーマン型零点の安定領域に一致します。

ファルティングス素極限と臨界安定性

定義　局所-大域の素極限構造

各素点 p において，発散安定化射の局所成分 S_p の作用を考える。ファルティングス型極限

$$S^{(\infty)} := \lim_{p\to\infty} S_p$$

を「大域安定化射」と呼ぶ。

この極限は，局所スペクトル $\{\alpha_{p,j}\}$の虚的折りたたみ極限を取り，それにより大域的自己双対スペクトルを生成します：

$$\alpha_{\infty,j} := \lim_{p\to\infty} \alpha_{p,j}^{(S)}.$$

命題　ファルティングス極限と臨界安定性

極限作用素 $S^{(\infty)}$ の固有値は自己双対条件

$$\alpha_{\infty,j}\,\overline{\alpha_{\infty,j}} = 1$$

を満たし，したがって臨界線上に配置される。

証明は，局所トレースの安定化作用により各素点 p の寄与が虚数単位相へ折りたたまれることから従います。

非可換リーマン予想の幾何的必然性

非可換リーマン予想（構成論的表現）

以上を総合すると，次の幾何的命題が自然に得られます。

非可換リーマン予想の幾何的必然性

非可換圏 $\mathcal{C}_{nc}$ における発散安定化射 S および解析接続作用素 $A = \Phi_{\text{finite}} \circ \Psi_{\text{div}}$ が存在するとき，以下が成立する：

１， A の固定点集合は臨界線 $\Re(s) = \frac{1}{2}$ に一致する；

２， ファルティングス極限 $S^{(\infty)}$ の固有値は全て単位円上にある；

３， したがって，トレース方程式

$$\mathbf{Tr}_{\mathcal{C}_{nc}}(S)(s) = \prod_p \det(1 - S_p p^{-s})^{-1}$$

の零点は臨界線上に分布する。

幾何的解釈：螺旋的自己同型

拡張リーマン面上の点 s は，発散と有限化の螺旋的流れの交点であり，臨界線はその安定トレース軌道に対応します。すなわち，

$$\Re(s) = \frac{1}{2} \iff s \in \text{安定化射 } S \text{ の固定螺旋}.$$

これにより，臨界線は単なる数直線ではなく，螺旋モチーフ圏内の安定トレース軌道として解釈されます。

結論：解析・幾何・宇宙の統一

発散の解析的延長が，安定化の幾何的固定点と一致します。

解析接続＝発散の延長

安定化射＝有限の折りたたみ

トレース＝実在の観測

この三者の合成が，　宇宙と数の構造を一つに結びます。したがって，非可換リーマン予想は，単なる関数方程式の主張ではなく，「世界が自己双対的に安定化する構造」の幾何的表現であります。

結語：数の自己同型としての世界

―― 数とは，世界のトレースである.

本論文において，我々は，発散と収束，無限と有限，虚と実を貫く構造を，一つの圏的写像体系として捉えました。

発散安定化射 S,

有限縮約関手 Φ_{finite} ,

発散拡張関手 Ψ_{div},

そしてその合成 $A = \Phi_{\mathrm{finite}} \circ \Psi_{\mathrm{div}}$ は,

「世界の運動」と「数の安定化」を同一の構造原理として示すものであります。

すなわち，数とは，単なる記号ではなく，発散する宇宙のトレースが有限の形へと折りたたまれた**形象的存在**であるとも言えます。この意味で，非可換類体論や非可換リーマン予想の背後にあるのは，**自己同型としての世界観**であります。世界は，その内部で自己を作用させ，自己を安定化する。この安定化こそが「数」であり，自己同型こそが「法則」そのものです。

拡張リーマン面 $\widehat{\mathcal{R}}_{nc}$ は，この自己同型の舞台です。

そこでは，発散と有限が対称をなし，時間と空間が可換でなく折り重なります。臨界線 $\Re(s) = \frac{1}{2}$ は，その折り重ねの「鏡面」であり，全てのトレースがそこに反射して，互いの像を結びます。

この理論が示したことは，数論が宇宙論と異ならないという事実です。数は，宇宙の深部で繰り返される自己同型のトレースであり，発散の運動を有限のかたちに結ぶ**安定化の記憶**です。したがって，非可換リーマン予想とは，「数が自己を認識する臨界線の存在」を述べています。数の零点とは，宇宙の安定化がひとつの自己写像として結晶した地点であり，それは同時に，すべての運動が最も美しく均衡する場所であります。また、我々は次のように言うことができます。発散は，無秩序ではない。それは，自己同型を探す旅である。世界は，その自己同型のトレースとして数を生み， 数は，そのトレースの中に宇宙を映す。

かくして，「非可換類体論」と「非可換リーマン予想」は，単なる解析や代数の問題ではなく，**世界の自己作用の理論**として完結します。それは，発散の果てに見出されたもっとも静かな対称――「安定化としての存在」そのものです。

28. 結論的まとめ

古典的なゼータ関数や L 関数が記述する周期の世界は、発散構造と不安定な振動（超越的な周期）を含むため、「実数」のような絶対的な安定性を欠いています。

非可換周期論を拡張した非可換類体論は、この世界に普遍的な安定性を導入し、「保型形式の世界における構造的実数論」を構成しました。

これは、非可換周期論によって定式化された流れをいわば「圏論」へと移し替えた結果でありまして、僕は、これを第四論文として書こうと思っていたのですが、思いの外、そ

れはほとんど翻訳作業に近かったのです。それで、第三章の中に組み込むことにしました。この定式化のために、再び、僕は多くの結果を捨て去り、より凝縮された公理的な形を求める結果となりました。

　この章のまとめとしてポイントを３つ挙げておきましょう。

１，その１：構造的実数論の確立 — 普遍安定化原理

　もともと導入されていた安定化作用素の作用構造の分析が進みました。

a、普遍安定化作用素（A）の導入:

　A は、非可換 L 関数 $\zeta_A(s)$ に課せられる**最小作用の原理**です。その役割は、すべての**不安定な発散構造 Div(I)** を**有限の構造 Fin(I)** へと**強制的に繰り込む（有限化）**ことです。発散抑制作用素 S の定式化は、思いの外、いろんなものを表現していったのです。

b、非可換リーマン予想（NRH）の定式化:

　この安定化の帰結として、**臨界相安定原理**が成立します。これは、非可換 L 関数が**自己双対軸 $\Re s=1/2$** 上で**構造的に安定**でなければならないという、**解析的な必然性**です。

$$\boxed{\text{NRH} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{非可換曲率の実部の平衡化} \quad \Re\left(R^{(\text{nc})}\right)=0}$$

　これは、**周期の連続的な自由度**が**不安定な要素**として**ゼロ**になること（構造的実数化）を**解析的に証明**します。

２，安定性の構造的必然性 — ファルティングス素極限の強制

　構造的実数論が**単なる仮説**ではなく、**幾何学的・代数的な必然性**として成立するためには、その安定性が**許容されるすべての摂動の下で不変**でなければなりません。これを保証するのが、**安定化作用素 A** と**ファルティングス素極限**の連携です。

a、**安定化されたホッジ構造の強制: 普遍安定化作用素 A** は、**非可換ヤコビ多様体** J_{nc} 上に誘導される**函手的ホッジ構造 $\mathbf{H_{fun}}$** に**構造的安定性**を課します。

　不安定性の源泉: 古典的なホッジ構造における**連続ランク成分 Tr**（非整数の周期寄与）は、**微小な摂動 δA** によって**ホッジ双線形関係を破綻させる**可能性があります。

　安定化の要求: $\mathbf{H_{fun}}$ が安定であるためには、この**不安定な自由度**の存在が**許されません。**

b, **ファルティングス素極限による有限化: 構造的安定性**を維持する**幾何学的必然性**として、**連続ランク成分 Tr は強制的に消滅**し、コホモロジーは**有限捩れ成分 $\mathbf{\Theta_{stab}}$** のみに限定されます。

$$\boxed{\mathbb{H}_{\text{fun}} \text{ の構造的安定性} \quad \Longrightarrow \quad H^k_{\text{trans}} \simeq T_r \simeq 0}$$

　これにより、**非可換周期論**の基盤は、**解析的な安定性（NRH）**から**代数的な有限性（純粋な捩れ構造）**へと**確立**されます。

３：非可換類体論 — 構造の統一的展開

安定性が**代数的な有限性**を強制した結果、この**強固な構造**は**非可換類体論（NCCFT）として詳細に展開**されます。

a、圏論的定式化: 安定化によって選別された有限構造は、非可換アルティン相互法則（定理 NC-ARL）として、**圏の同値**で表現されます。

$$\mathcal{C}^{\mathrm{stab}}_{\mathrm{Class}} \overset{\mathrm{Art}_{nc}}{\simeq} \mathcal{C}^{\mathrm{stab}}_{\mathrm{Gal}}$$

ここで、安定化されていない不安定な要素（Tr）**は**圏から排除され、**純粋な安定構造**のみが**代数と対称性の間で対応**します。

b、ラングランズによる大域-局所整合性: この**安定した非可換類体論**は、**非可換ラングランズプログラム**として**究極の体系化**を達成します。**大域的な法則（Artnc）と局所的な法則（Satakep）が、すべての素点 p で完全に整合**すること（Satake 整合性）が証明されます。

$$\boxed{\text{NRHによる構造的安定性} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{非可換ラングランズ対応の成立}}$$

特に、重要なことは、非可換領域の定式化によって、**構成概念的に**これを確立できたことです。

…おそらく、あまりにも、壮大な結論でありすぎるために、僕は、穴を探したり、数値シミュレーションしたりし、特に、複雑に見える部分を単純化することを試みました。こうすることによって、僕にはよくわからない穴を誰かが勝手に見つけてくれることだろうと思います。

付録　圏論的構成によるガロア対応

A.11　非可換類体論の公理的定義

非可換周期論の位相的枠組みのもとで、次に示す圏構造を**非可換類体圏 (Noncommutative Class Field Category)**と呼びます。

定義 A.11.1 （非可換類体圏 $\mathcal{C}^{\mathrm{nc}}_{\mathrm{CFT}}$）.}

非可換類体圏は、非周期ヤコビ多様体 J_{nc} を対象とし、その間の位相パラメータ保存写像を射として構成される圏

$$\mathcal{C}^{\mathrm{nc}}_{\mathrm{CFT}} := \left(\mathrm{Ob} = \{J_{\mathrm{nc}}\},\ \mathrm{Mor} = \{M \mid M(\Theta_g) = \Theta_g\}\right)$$

である。

(B1) 対象（非周期ヤコビ多様体）

各対象 J_{nc}は、高次虚数乗法 (HCM) により安定化された非周期的トレース束の極限構造であり、

$$J_{\mathrm{nc}} \simeq T^r \times \Theta_{\mathrm{stab}}$$

を満たす。ここで T^r はランク構造（自由成分），Θ_{stab} は振れ構造（有限成分）を表す。

(B2) 射（非可換 Artin 写像）]

$\mathcal{C}^{\mathrm{nc}}_{\mathrm{CFT}}$ の射は，位相パラメータ $\Theta_g = (\theta_g, \lambda_g)$ を保存する非可換写像

$$\Phi_{\mathrm{nc}}: \ J^{(1)}_{\mathrm{nc}} \longrightarrow J^{(2)}_{\mathrm{nc}}, \quad \Phi_{\mathrm{nc}}(\Theta_g) = \Theta_g$$

として定義される。

この Φ_{nc}を，古典的類体論におけるアルティン写像の非可換的拡張として，**非可換 Artin 写像** (noncommutative Artin map)と呼びます。

(B3) 類双対原理（Class Duality Principle）]

各射 Φ_{nc} は，自己双対条件

$$F_{ij} = *F_{ij}$$

を満たすトレース束の複素曲率 F_{ij} を保つ。

この条件は，Φ_{nc} が振れ構造とランク構造を同時に保つ双対写像であることを意味します。

(B4) スペクトル的安定性（Faltings 極限）

種数 g≥2 のとき，非周期行列 M_{nc} のファルティング素極限

$$\mathcal{F}(M_{\mathrm{nc}}) = -\lambda_g < 0$$

が成立する。

これにより中心多様体の次元 r が 0 となり，有理点集合 $C(\mathbb{Q})$ の有限性が保証され

ます。幾何学的には，J_{nc} が純粋なトーション多様体 Θ_{stab} に収縮することを意味します。

命題 A.11.2 （非可換 Artin 対応）．

上記の構成により，非可換周期変換群

$G_{\text{nc}} := \text{Aut}_{\Theta_g}(J_{\text{nc}})$ と，

トレース束の安定点構造との間に，自然な圏的同型

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{nc}}_{\text{CFT}}}(J_{\text{nc}}, J_{\text{nc}}) \;\cong\; G_{\text{nc}}$$

が存在する。

この同型は，古典的なアルティン対応

$\text{Gal}(K^{\text{ab}}/K) \simeq \text{Cl}(K)$

の非可換的拡張である。

定理 A.11.3 （非可換類体対応）．

非可換ヤコビ多様体 J_{nc} のトーション成分 Θ_{stab} と非可換ガロア群 G_{nc}の間に，双対同型

$$\widehat{G}_{\text{nc}} \;\simeq\; \Theta_{\text{stab}}$$

が存在する。

ここで$\hat{G}_{nc}$は G_{nc} の Pontryagin 双対であり，古典的類群の捩れ部分と対応する。

この対応を**非可換類体対応**(Noncommutative Class Field Correspondence)と呼ぶ。

結語.

非可換類体圏 $\mathcal{C}^{\text{nc}}_{\text{CFT}}$ は，非周期ヤコビ多様体の安定化構造と，位相パラメータ保存写像による非可換ガロア作用を統合する，普遍的な類体論の拡張であります。

この理論において，アルティン写像は位相的・フラクタル的双対性の具現化であり，ファルティング極限はその安定化原理を保証する解析的基礎を与えます。

A.12 非可換ガロア圏の定義（Galois--Motivic Correspondence）

本節では，付録 A の公理系および非可換類体圏 $\mathcal{C}_{\mathrm{CFT}}^{\mathrm{nc}}$ の構成を受けて，非可換モチーフ圏 $\mathcal{C}_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{mot}}$ とこれに対応する「非可換ガロア群」ないし「非可換ガロア圏」を定義し，古典的な Tannaka-Galois 対応を非可換位相的枠組みに拡張します。

仮定

本節の議論では，付録 A の公理 (A1)-(A4) と非可換類体公理 (B1)-(B4) を仮定する。加えて，必要に応じて以下の補助仮定を置きます：

(H1) 非可換モチーフ圏 $\mathcal{C}_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{mot}}$ は $\mathbb{Q}$-線型の rigid tensor category として振る舞う（双対を持つ)。

(H2) ファイバーファンクタ（評価関手） $\omega:\mathcal{C}_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{mot}}\to\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}$ が存在し，十分な忠実性を持つ。

定義 A.12.1 （非可換モチーフ圏）.

非可換モチーフ圏 $\mathcal{C}_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{mot}}$ とは，付録 A により得られた非可換周期モチーフ（同値類）を対象とし，双対モチーフ閉包により得られる射を備えた tensor category である。

定義 A.12.2 （非可換ガロア群 / 圏）.

ファイバーファンクタ ω が存在すると仮定して，**非可換ガロア群**（より正確には非可換ガロア的自動同型群）を次のように定義する：

$$\mathrm{Gal}_{\mathrm{nc}}:=\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega)$$

ここで右辺はテンソル構造を保存する自然同型の群です。また，その群作用を内部化した圏を**非可換ガロア圏** と呼び，記号

$\mathcal{G}_{\mathrm{nc}}$

と表します。

命題 A.12.3 （Tannaka 型再構成，非可換版）.

仮定 (H1),(H2) の下で，非可換モチーフ圏 $\mathcal{C}_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{mot}}$ は，そのファイバーファンクタ ω によって $\mathrm{Gal}_{\mathrm{nc}}$ の表現圏と同型的に再構成される：

$$\mathcal{C}_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{mot}} \simeq \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Gal}_{\mathrm{nc}}).$$

概略証明

古典的な Tannaka 再構成の議論を模して，ω による忠実な再現によって、対象は $\mathrm{Gal}_{\mathrm{nc}}$ 上の有限次元表現を与え，射は表現の $\mathrm{Gal}_{\mathrm{nc}}$-準同型に対応する。非可換性は圏のテンソル・双対構造の中に取り込まれるため，等価（≃）が成り立つ（詳細は付録の補助補題参照)。

定理 A.12.4 （非可換ガロアーモチーフ対応 / Galois--Motivic Correspondence）.

公理（A1)-(A4),(B1)-(B4）と仮定（H1),(H2）の下で次が成立する。

1，任意の閉（テンソル閉）部分群 $H \subset \mathrm{Gal}_{\mathrm{nc}}$ に対し，

その不変部分圏 $\mathcal{C}_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{mot},H} := \{M \in \mathcal{C}_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{mot}} \mid H \text{ が } \omega(M) \text{ を不変にする}\}$

はテンソル閉であり，逆に任意のテンソル閉部分圏はある種の閉部分群に対応する。

2，特にトーション成分 Θ_{stab} に対応する閉部分群 $\widehat{H}_{\mathrm{tors}}$ を取ると，

群の Pontryagin 双対 $\widehat{H}_{\mathrm{tors}}$ が Θ_{stab} と同型になる：

$$\widehat{H}_{\mathrm{tors}} \simeq \Theta_{\mathrm{stab}}.$$

これが付録 A の非可換類体対応（A.11.3）を復元する。

概略証明

(1) は Tannaka の一般論に従う。テンソル閉部分圏はファイバーファンクタ上で不変な部分表現系を定め，それに対応する自動同型群の閉部分群を再度とる操作が互いに逆であることを示す。

(2) は特に有限捩れ部分に注目した場合の帰結で，トーション構造は有限位相群として Pontryagin 双対を持つため，双対同型が成立する。

命題 A.12.5 （非可換 Artin 写像と再構成互換性）.

非可換 Artin 写像

$$\Phi_{\mathrm{nc}} : J_{\mathrm{nc}}^{(1)} \to J_{\mathrm{nc}}^{(2)}$$

は，対応するモチーフ（対象）に作用し，これに対応する $\mathrm{Gal}_{\mathrm{nc}}$ の部分群（またはその共役類）への写像を誘導する。
従って，圏的な射とガロア側の部分群は互換的に対応する。

概略証明

射 Φ_{nc} が位相パラメータを保存することから，その作用はモチーフのファイバーデータ $\omega(M)$ を保つ自動同型を定める。これが $\mathrm{Gal}_{\mathrm{nc}}$ のある元（ないし部分群）に対応し，命題の主張が得られる。

補題 A.12.6 （ファルティング極限による分岐抑制）.

種数 g≥2 で $\mathcal{F}(M_{\mathrm{nc}}) = -\lambda_g < 0$ が成立するとき，非可換ガロア群 $\mathrm{Gal}_{\mathrm{nc}}$ の自由部分（連続成分）は消滅し，可観測な群は有限部分群（捩れ成分）に収束する。

ファルティング素極限は J_{nc} の自由トーラス成分を収縮させるので，その自明でない表現は捩れ成分に由来するもののみが残る。従って $\mathrm{Gal}_{\mathrm{nc}}$ は極限的には有限群化します。

例示的帰結（応用）.

・非可換局所化：ある局所的条件下（例：ある素 p に対する局所空間）で $\mathcal{C}_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{mot}}$ を局所化すると，局所ガロア群 $\mathrm{Gal}_{\mathrm{nc},p}$ が得られ，局所的 Artin 写像が付随する。

・**L 関数と表現**：モチーフ $M \in \mathcal{C}_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{mot}}$ に対して 表現 $\rho_M : \mathrm{Gal}_{\mathrm{nc}} \to \mathrm{GL}(\omega(M))$ が得られ，これに対応する非可換 L 関数を形式的に定義できる（公理的に）。

議論

本節は「古典的な Tannaka--Galois 対応」を出発点に取り，非可換性を位相パラメータ（Θ_g）とファルティング極限（λ_g）で制御することで同様の対応を構築した。重要な技術的課題は以下です：

・ ファイバーファンクタ ω の具体的構成（例えばコホモロジー的ファイバー，

あるいは解析的評価子）を与えること。

・ $\mathcal{C}_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{mot}}$ の rigidity と duality を厳密に保証すること。

・ 非可換 L 関数の解析性（絶対収束，解析接続，関数等式）を公理から導くこと。

これらの課題は今後の研究課題であるが，本節で提示した枠組みは非可換類体論を幾何的・圏論的に扱うための明確な出発点を与える。

A.13　ファイバーファンクタの具体例と再構成の証明詳細

本節では，非可換モチーフ圏 $\mathcal{C}_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{mot}}$ に対するファイバーファンクタ ω の具体的候補を提示し，仮定 (H1),(H2) の妥当性を確保するための十分条件を示す。さらに，これらの条件のもとで命題 A.12.3（Tannaka 型再構成）
が成り立つことの概略証明を与える。

A.13.1　ファイバーファンクタの候補

非可換モチーフ圏の対象は「非可換周期モチーフ（同値類）」，すなわち非周期ヤコビ多様体　やそれに付随するトレース束であるから，これらに自然に評価を与える以下のようなファンクタが候補となります。

トレースコホモロジー実現

$$\omega_{\mathrm{tr}}:\ \mathcal{C}_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{mot}} \longrightarrow \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}, \qquad M \mapsto H_{\mathrm{tr}}^{*}(M)$$

ここで $H_{\mathrm{tr}}^{*}(M)$ は，非可換トレース束の（適切に定式化した）コホモロジー群です。

局所素因子（あるいは Euler 因子）に対してトレース作用素が自然に作用し，作用素の固有分解によってコホモロジーが分解することを要求します。

解析的評価子（スペクトル評価）

$$\omega_{\mathrm{spec}}:\ M \mapsto V_{\mathrm{spec}}(M)$$

これは，M に付随するスペクトル（行列モデルの固有データ）上の解析的評価を取るものであり，有限次元の $\mathbb{Q}$-ベクトル空間としての構造は，固有値の有限次元的ブロック分解によって与えられると仮定します。

３，ℓ-adic 型（代数的実現）}

$$\omega_\ell:\ M \mapsto H^*_{\text{ét}}(M;\mathbb{Q}_\ell)$$

古典的モチーフ理論に倣い，非可換モチーフに対しても局所的・大域的な ℓ-adic 表現を与えるようなコホモロジー理論を仮定する。ここでの主張は公理的であり，具体的構成は別途与える必要があります。

いずれの実現においても，ファイバーファンクタとして機能するためには以下の性質が必要です。

A.13.2　ファイバーファンクタに要求する性質

1,（忠実性）ω は忠実（faithful）である：非自明な射は ω により非自明に映る。

２，（テンソル可換性）圏のテンソル構造に対してωはモノイダル（tensor functor）である。

３，（有限次元性）任意対象 M に対して $\omega(M)$ は有限次元 $\mathbb{Q}$-ベクトル空間である。

４，（双対性保存）圏の双対（rigidity）を ω が保存する（すなわち $\omega(M^\vee) \simeq \omega(M)^\vee$ が成り立つ）。

これらを満たすことが（H2）の具体的表現である。

A.13.3　準備補題：トレース作用とコホモロジーの互換性

補題 A.13.3.（トレース-コホモロジー互換性）

非可換トレース束 T_{nc} に対して，トレース演算子 $\mathrm{Tr}(M^p_{\mathrm{nc}})$ は$H^*_{\mathrm{tr}}(-)$ に自然に作用し，固有成分に分解できる。特に，最大固有値に対応する固有射影は H^*_{tr} 上で非零である（A4 による非退化）。

証明スケッチ

行列モデルを用いた代数的構成（補正係数は整数環に属する）により，トレース作用は有限個のブロックに分解されます。A4 により最大固有値ブロックの寄与は消えないため，対応するコホモロジー成分は非零です。

A.13.4　Tannaka 型再構成の具体的証明（概略）

ここで命題 A.12.3 を再掲し，ファイバーファンクタ $\omega = \omega_{\mathrm{tr}}$ を用いて再構成を行う。

命題（再掲）.}

もしω_{tr} が忠実でテンソル可換かつ双対性を保存するならば，$\mathcal{C}_{\mathrm{nc}}^{\mathrm{mot}} \simeq \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Gal}_{\mathrm{nc}})$ が成り立つ。

証明スケッチ

古典的 Tannaka-Krein の枠組みを踏襲する。主要な手順は次の通り。

１，ω によって各対象 M は有限次元表現空間 $\omega(M)$ を与える。射はその準同型に対応する。

２，ω がテンソル可換であるため，テンソル演算は表現のテンソルに対応し，単位元と双対も対応する。

３， 自然変換の群 $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\omega)$ を取り，これを $\mathrm{Gal}_{\mathrm{nc}}$ と定義する。これは$\omega(M)$ の全てのテンソル的自然同型を表す。

４， 忠実性により，圏の情報は ω の像に完全に反映される。従って圏はこの自動同型群の表現圏として再構成できる。

ここで非可換性は，テンソル構造と双対構造の中に取り込まれます。補題 A.13.3 は，トレース作用がコホモロジー上で分解可能であり，ω_{tr} が有限次元であることを保証する技術的要請を満たすために用います。

A.13.5　ℓ-adic 型実現と整合性

ℓ-adic 実現は，局所・大域情報の保持に有利であるが，非可換設定で厳密に構成するには以下の点が必要であります。

・ 非可換対象に対する'etale 型の理論的拡張：局所因子（フロベニウス）に対する作用を定義できること。

・ 極限・比較定理：トレースコホモロジーと ℓ-adic 実現との間に比較写像が存在し，これがテンソル・双対構造を保つこと。

これらの補題的命題を仮定すれば，ω_ℓ もまた (H2) を満たす実現となり得ます。

第四章のまとめ