リンドン構造とゼータ螺旋の理論（第２論文）

第一章　リンドン複素螺旋位相の高次構造の理論と発散的復元による対称的ゼロ点構造のリンドン的構成

要約

　第一章では、リンドン螺旋複素位相の理論を全面的に再考し、ゼロ点構造の対称性とその復元メカニズムを詳述している。発散的復元に基づくトレース束不変性の原理を提示し、Hashimoto 行列や類双対変換を介してリーマンゼータの零点分布と花束グラフの構造的対応を明確化した。また、「非周期性の非周期性」という新たな概念を導入し、素リンドン列の階層的構成と複素位相の役割を強調している。加えて、ゴールドバッハ予想的構造との関連、非可換代数（四元数・八元数）への拡張、さらにトポスやモチーフ理論との接続を通じて、ゼータ構造を多層的に位置づけた。結果として、第一論文での不明確な点を修正し、「リンドン螺旋複素位相理論」として基盤を固める内容となっている

1.　はじめに

　僕は、ここ一ヶ月ほどほとんど毎日、夢で図形や定理を見て、それを日中にぼんやりと吟味し、夜になったら、書きつけたりまとめたりするという作業を続けています。

　どうしてこんなことになったのかすらわからないのです。

　そして、ときどき、理論の全体が崩壊するような瞬間や疑念の高まりが起きます。そうして、高まって、「僕はこんな膨大な妄想的体系を作り上げてどうなっているんだ…」となったあとに、ふと、なにか辻褄が合うような発見があって、それで、穴が埋まる…もう、このところそんなのが、１０回ぐらいは繰り返されているのです。

　今回は特に「非周期性の非周期性？本当にそんな物があるのか？」というのが高まって

いって、ああ、この理論は類稀なる狂気の産物だ、となったあと、ふと、運転中に、存在定理が浮かんできました。

実は恐ろしいことに、ごく簡単な複素数ですら、僕は実際に存在していることは確信しているにも関わらず、実際のリンドン列を作り出すアルゴリズムを確立していないのです。今回は、その問題について、大きく前進できました。

また、第１論文のあまりの雑然さや直感だよりの試行錯誤に愕然とし、さまざまな自分では「自明」だと思っていることを洗い出して、改めて記述し直すこともやっています。

そんなわけで、僕は、とても丁寧で、できる限りわかりやすい口調で書くように心がけているのは、とても、僕が行っていることをそうでもしないと信じて貰えそうにないということが、自分の経験からも分かっているからなのです。

具体例や数値計算例は、そのような自己疑念の結果であると思ってください。

僕の今のところの結論としては、ゼロ点積は、螺旋位相を通じて構造的に現れているが、これを従来型の有限行列式に写す合理的な手段はまだ確立されていない。そういう感じで、僕は、発散的に復元されていく無限の展開を、「式」として閉じ込める方法を知らないということですね。

この第二論文はリンドン螺旋複素位相の理論の確立と精緻化を目指して書かれていたんですが、結果的に、種数０のリーマン面グラフの理論になっているところも予想外でした。

2.　リーマンゼータ再考　ゼロ点の構文的計算メカニズム

僕は第１論文「類双対写像とフラクタルの理論」を書き上げたことで、そこそこの満足感を得ていたのですが、なにか、しっくりと来ない感じがずっと残っていたのです。

それで、疲れも取れてきたときに、もう一度読んでみるかと、最初の論考を読んでみたら、びっくりしました。自分が「これを書こう」と思っていたことがあまりにも不明確にしか書かれておらず、ほんのちょっと「触りだけ」書いて、あとはどうでもいいようなことばかりが書かれてある。

それで、もう一度、論理の根本部分を抜き出して、ここで再度考察してみるついでに、ゼロ点を実際に計算するメカニズムを書いてみるというのが、この章の目的です。

まず、定理、

《発散的復元による素リンドン復元におけるトレース束不変の原理》

あるグラフにおける全可能な経路を集めた「トレース束」を集めたとき、そのトレース束から復元されるグラフには実は非自明な双対形が存在し、それは、伊原ゼータにおいては、素経路積とゼロ点積に対応している…

そして、その非自明な双対型は「発散的類双対復元」による「非周期項」による復元であり、特に、「素数長」の長さの「素構造」によって構成される「素リンドン」経路によって復元される場合にのみ限られる。

さて、説明しましょう。

僕は「自分は素リンドン=ゼロ点であることを発見した」としょっちゅう書いているのですが、実は、明確にそれを説明していないのです。このことに僕はまず驚きました。こういうことがあるのか…

そんな調子では「素リンドンって、別にゼロじゃなくね？」と思われるだけじゃないか…

どういうことかといえば、まず、すべての素数の長さの花束グラフがあるとしましょう。

伊原ゼータ：$\prod_p (1-u^p)^{-1}$

リーマンゼータ：$\prod_p (1-p^{-s})^{-1}$

双対写像：$u^p \leftrightarrow e^{-s\log p}$

このように、伊原ゼータで、すべての「素数」の長さの経路があるグラフを考えます。

このグラフを変形して、しかも、変形しているのに、「全経路を集めたトレース束」が変わらない状態が存在するのか？

これが僕の最初の「発散的復元」の概念であって、重要な定理でした。

つまりこうします。素数のループを回り続けると、その「無限反復」は「同じ素数」へと帰っていきます。しかし、このような「自明」なループ以外にも「非自明なループ構造」が内在しているのです。

それが、「非周期的項」です。つまり、素数が、（２，５，７）というような形で、繰り返されるとしたら、それは「非周期的項」として、帰って来るでしょう。しかし、殆どの場合は「冗長」であって、そのときには、「トレース束」の構造が変わってしまいます。簡単に言うと、情報量が減少します。

しかし、素数を「素構造」としてみなしたときに、それが「素リンドン列」として帰ってきたときには、それは、「冗長」ではなく、完全になります。

だから、すべての「素数」を材料としてできた「素リンドン列」（非周期列）を素構造として、花束グラフとして再構成してみると、このグラフは、最初のグラフと全く「同型」の、「トレース束」構造を持っているのです。というのは、「いかなる非周期的なパターンも含んでいる」からです。「リンドン列の分解の一意性」が働いていることに注意してください。このとき、そのグラフの「ループの長さ」は非常に長くなっているにも関わらず、「トレース束不変」です！

つまり、

$G_P \cong_{\mathrm{Trace}} G_L$（トレース束の保存）

ここで、右側は、「素リンドン化された素数経路」です。

さて、ここで、リンドン化された素数経路の素数を「素リンドン」の形へと復元します

と、この右側の経路は、「素リンドンの非周期列」すなわち「複素数」になります。

つまり、「素経路積」=「ゼロ点積」という形式がトレース束不変性によって表現されたのです。

$$\prod_p (1-u^p)^{-1} \xrightarrow{\text{basis-change}} \prod_{w\in\mathcal{L}_{\text{prime}}} (1-u^{\phi(w)})^{-1}$$

つまり、伊原ゼータにおける「素数花束ゼータ」←→「「素数を素構造として非周期的項（素リンドン》としたグラフ」という変換構造はトレース束構造を変えないのです。。だから、右側の「素数の非周期的項」は実はゼロ点なんですね。これを書いていなかった、ちゃんとね。だから、これは、「素リンドンの非周期列」だから、複素数になる。複素数がゼロ点になるということがちゃんと分かるんです。

このとき、右側の経路は、「複素リンドン」であって、複素数ではないことに注意してください。だから、ちゃんとした長さのあるループ構造なのです。

全く異なる構造を持つグラフが全く同じ構造を持っている。

そして、「素数花束ゼータ」は類双対変換で、オイラー積へと移せるので、リーマンゼータのゼロ点も計算可能であるというわけです。

そして、このゼロ点積は、類双対変換、u^p→e^-slogp によって、螺旋形に変換され、オイラー積になるので、同じ様に、この２つの経路を「同期させて」、経路を計算してから、螺旋形変換を施し、経路の打ち消し合いを計算すると、そのままゼロ点へと次第に近似計算が可能です。

類双対変換： $u^p \mapsto e^{-s\log p} = p^{-s}$

- 変換：

$$u^{\phi(w)} \mapsto e^{-s\log\phi(w)} = \phi(w)^{-s}$$

- このとき、積形式も変形される：

$$\prod_{\dots} (1-\phi(w)^{-s})^{-1}$$

これが、実際に、類双対変換された、ゼロ点積の構造です。

定理（類双対変換による解析射影）

リンドン基底によって定義されたゼロ点積に、変数変換、

u^$\phi(w)$↦$\phi(w)$^$-s$

を適用すると、リーマンゼータのオイラー積と一致する形に移る。

一方、多重トレース空間（モチーフ圏）上の変形されたゼロ点積は、対応する複素トレース構造を持ち、解析接続を通じて臨界線上（$\Re(s)$=1/2 ）に自然に写像される。

```
G_P  ──縮約──▶  G_L
 │               │
類双対変換        多重変形
 │               │
 ▼               ▼
ζ(s)          Z_{G_i}(s)
              (解析接続)
                │
                ▼
        ζ(s) on Re(s)=1/2
```

たとえば、p=2 と p=3 の素数ループがあるとする。それらに対応する因子(1−2^−*s*)^−1,(1−3^−*s*)^−1、これがゼロ点構文において、何らかのタイミングで同期するには、*s*が「log2 と log3 の整数線型結合上」にある必要があります。

同じ様に、経路の「素数の log スケーリング」を考えていくということです。

ゼロ点ループの同期構造は、最初の素数花束グラフ上のトレース構造として記述できることが分かりました。この「素ループの同期」は、複素平面上での「ゼロ点の干渉」として幾何化できます。それは、リンドン構文系列における「共通素因子の共振」と数学的に同じです。

まとめると、こうなります。

$$\sum_p a_p e^{-s\log p} = 0$$

これが、「素数の素リンドン、すなわち非周期的列」という経路の意味になるわけです。同時に、それがどうして複素数になるかも説明しているわけです。

この式で、「ゼロ点」を近似することができます。

以下は、適切に係数を決めてもらい、コンピューターに計算させてみた結果です。素数３つ分使っています。

$$e^{-s\log 2} - 1.8\,e^{-s\log 3} + 0.8\,e^{-s\log 5} = 0$$

$$s \approx 0.5 + 15.78i$$

$$\left|e^{-s\log 2} - 1.8\,e^{-s\log 3} + 0.8\,e^{-s\log 5}\right| \approx 0.49$$

ついでに、僕が構成したヒルベルトポリヤ的な考えで係数を与えると、

$\log(2),\ -\log(3),\ \log(5)$

$$\log(2)\cdot e^{-s\log 2}-\log(3)\cdot e^{-s\log 3}+\log(5)\cdot e^{-s\log 5}=0$$

近似解

$$s\approx 0.5+16.19i$$

誤差（絶対値）

$$\approx 0.692$$

たった素数３つ分の計算で、相当にいい数字が出てきました。

素数の情報はすべて必要なはずなのに、こんなに少ない情報で、ゼロ点の情報に近似するのは、リーマンゼータの log と関係があるのか…

とまあ、僕が重要なこととして最初の論考で表現したかったのは、「オイラー積」=「ゼロ点積」という構造が、実は、グラフ上の「素構造」の変形における非自明な「非周期的項（とくに素リンドン)」による「類双対的発散復元」として、存在しているということだったのです。

しかし、読み返してみると、これを断片的にしか書いていないで、別のことを論じている。

あの頃は夢の中で考えて、夜になると何も考えずに文章を書き続けていたので、仕方がないことなのかもしれません。さて、ここから、すでに書いてあることですが、

$$p^{-s}=e^{-s\log p}=e^{-\sigma\log p}\cdot e^{-it\log p}$$

このように分解すると、

σは素数基底に対する「減衰指数」

tは位相的周波数

このようにみなしたときに、

臨界線の必然性

$\sigma>1$ では指数減衰が強すぎる → 干渉しきれない（全項が収束しすぎる）

$\sigma<0$ では逆に発散する。

したがって、干渉と収束のバランス点が、**構文的にちょうど 1/2** になる。

ゆえに、

定理（構文的ゼロ点と臨界線）

素数花束ゼータと、それに対応する素リンドン圧縮ゼータは、

共通の類双対変換により、構文的干渉条件

$$\sum_{w\in\mathrm{Lyndon}} a_w\,\varphi(w)^{-s}=0$$

を満たす。

この干渉条件が有限位相エネルギーを持つのは、

$$\Re(s)=\frac{1}{2}.$$

とこういうわけになります。

論考に書いたとおり、ここで、係数として、+と-の logp を持ってきて、釣り合いが取れるように考えるわけです。

さらに、最近思いついた「リンドン変換」について説明しましょう。

リンドン螺旋平面においては、「非周期性の非周期性」という入れ子構造は、複素数になります。**しかし、同時に、この入れ子構造は、どちらも「実数構造」へと還元可能なので、「逆入れ子構造」へと入れ替えることが可能なのです。**

これが、リンドン変換であり、あとで細かく説明しますが、「回転入れ子レベル」ｎのときにｎ！の対称性変換を持っています。

さて、ここで、最初の伊原ゼータにおける発散的類双対復元の様子を見ますと、「素数」→「自然数」という log スケーリングが見えます。つまり、最初は「素数の長さのリンドン列」があります。それをいちど縮約して「素構造」まで還元したあと非周期列（すべての自然数の長さを含む）を作ってから、素構造の中身の素数を「素リンドン」へと復元します。

この復元された「複素リンドン」をリンドン変換すると、そのまま、「自然数→素数」という変換が起こり、別の複素リンドンへと変換されます。

この構造が類双対変換で、それぞれ、リーマンゼータにおける、オイラー積とゼロ点積へと移されるわけです。

類双対変換： $u^p \mapsto e^{-s\log p}=p^{-s}$

- 変換：

$$u^{\phi(w)} \mapsto e^{-s\log\phi(w)}=\phi(w)^{-s}$$

- このとき、積形式も変形される：

$$\prod_{\cdots}(1-\phi(w)^{-s})^{-1}$$

まとめると、ｓ→１－ｓのもとで、釣り合っていなければいけないので、

オイラー積
基底：素数 p
重み：$p^{-\sigma} = e^{-\sigma \log p}$
展開：全素数の積 → 乗法的構造の極限展開。

ゼロ点積（リンドン積）
基底：素リンドン語 w
重み：$|w|^{-(1-\sigma)}$（あるいは語長の正規化版）
展開：非周期列の自由モノイド分解 → 加法的構造の極限展開。

オイラー積の素数の重みとゼロ点積におけるリンドン語の長さの重みの情報量の釣り合いの問題へと還元されます。素数が与える寄与が等価であり、同時に、この式が対象であるためには何が必要か。

オイラー積とゼロ点積の情報量はトレース束不変なので同じです。

$$u^p \longrightarrow e^{-s \log p} \quad \text{および} \quad u^{|w|} \longrightarrow e^{-(1-s)|w|}.$$

これが伊原ゼータからリーマンゼータへの変換。

この釣り合いを取れるのは唯一、

$$\sigma \longleftrightarrow 1-\sigma.$$

$$\sigma = \frac{1}{2}.$$

オイラー積側では、無限同心円 → 素数ごとの乗法的閉路という流れ。リンドン積側では、素リンドン語の非周期入れ子 → 螺旋構造という流れ。類双対変換により、同心円の情報が螺旋に投影されます。

螺旋構造の射影は複素平面での干渉条件と一致し、これがゼロ点の相互干渉構造を与えます。

ゼロ点構造は自然に「素数→←自然数」というスケーリング変換を含んでおり、そのバランスを取る点がそこになるというわけです。

素数 ↔ 自然数（素リンドン長さ）

オイラー積 ↔ ゼロ点積

この二重展開が類双対変換によって固定される点が臨界線 Re(s)=1/2 になる。

逆に言えば、種数一の二次のゼータであるラマヌジャンゼータは、素数の干渉の仕方が異なるので、このような形にはならず、「臨界線」から飛び散ります。

トレース束の構造も、非周期性の構造も、変化するので、干渉条件が変化するのです。

種数 0 では素数花束と素リンドン圧縮の間に完全な自由非周期圏が成立するが、種数 1

以上では代数的制約により非周期性が拘束され、干渉条件が崩れるため、臨界線は生成されないというのが、リンドン変換によって見られるスケーリング構造から言えることだと分かります。

より論旨を圧縮すれば、素数花束グラフに対応する素リンドン螺旋圧縮を通じ、オイラー積とゼロ点積は、log の二重螺旋を介して類双対で結ばれ、その固定点が臨界線 $\Re(s)=1/2$ を必然とする、というわけです。

これで、第１論文におけるリーマンゼータの構造論は非常にシンプルになったと思います。

まだ、リンドン複素らせん構造には分かっていないことが多い。僕はこの理論をまず様々な既存の理論の延長線上に位置させて、それから、この理論自体に内在する新規で珍しい概念系について論じるつもりです。

さて、このリーマン構造の問題も、少しリンドン構造論的に考えてみると、

予想

複素構造において、素リンドン長さ１のときには非周期的項は持つことができず、極に集まるが、素リンドンの長さが２のときには、回転によって、複素共役同士が干渉し合いながら打ち消し合う構造が、全素数にわたって生じ、その結果、自明なゼロ点が生じる。素リンドンの長さが３以上の「素数素リンドン」はその類双対的螺旋的集結が、そのゼロ点の複素構造における、臨界線二分の一に螺旋状に起こる。

これはまず花束グラフで考えていることに注意してください。この情報は、類双対変換を通じて、リーマンゼータへと螺旋形に移されます。そして、この「構文論的な構造」がどのように、臨界領域を構造化しているのか、というリンドン構造の見地から見た、構造的な条件です。

さて、あともう少し、「ここは説明しなければならない点」というのを説明してから、リンドン螺旋平面における新しい概念や構造の話に移ろうと思っています。

3. ２の補遺　発散的拡大の階層構造

僕はこの２節の議論そのものにはひっかかりを感じていなかったのですが、次第に、この第二論文を書いているうちに、「なんか、違和感があるな」と感じるようになってきました。それが、「複素構造の非周期列の存在定理」として結実したとき、はっきりとしたんです。

「なんか、これでは、零点の密度が足りなくないか？」と。

その事を考えているうちに、はっきりとわかりました。

まず、「素数の長さ」をもつ伊原ゼータのループ構造があります。 ここから、発散的復元によって、トレース束不変な「さらに長い素数を材料とする素リンドン」グラフを作れ

ます。 そして、ここからさらに、トレース束不変な「さらに長いさきほどの「素リンドン非周期」を材料とグラフを作れます。 このような拡大を続けていくと、どこかで不動点に達し、この複雑化した、グラフのループ構造のリンドン列が、「ゼロ点構造」です。
　つまり、発散的復元には階層構造があるのです。

定義（ゼロ点構造）
　初期花束グラフ Bp から発散的復元演算子 E を反復適用した列、

$$B_{\mathbb{P}} \xrightarrow{\mathcal{E}} G^{(1)} \xrightarrow{\mathcal{E}} G^{(2)} \xrightarrow{\mathcal{E}} \cdots$$

　において、ある段階 N でトレース束不変同型、

$$\mathcal{T}(G^{(N)}) \cong \mathcal{T}(G^{(N+1)})$$

　が成立し、かつこれ以後の反復で新規非周期核が現れない（発散密度完備）とき、G(N)（または列の極限）を ゼロ点構造 と呼ぶ。
　このとき得られる構文的因子積が「ゼロ点積」であり、類双対写像 u^p↦e^−slogp を通してリーマンゼータのオイラー積と干渉条件を共有する。

　つまり、一段階の発散的復元だけでは、素数花束の「局所構造」をほぼ保持したままなので、零点分布の豊かさ（密度）はまだ足りないんです。
　「トレース束」の構造を変えないので、基本的な伊原ゼータの内部構造は変わらない。
　それなのに、グラフの構造はどんどん拡大していって、ある領域で止まる（あるいは永遠に止まらない）。この大量に増えたループに対応するのは、ラマヌジャン型の「ゼロ点」でしょう。
　これは実際に行列式の形によって表され、

$$\zeta_G(u)^{-1} = (1-u^2)^{r(G)-1}\prod_{i=1}^{n}(1-\lambda_i u + qu^2),$$

　この行列式だけではゼロ点構造がまだ足りないので、橋本行列の持ち上げで行列を拡大する操作がちょうど、「トレース束不変」の状態で、発散型復元を繰り返す操作と符合し、それで、ゼロ点構造を、回収します。
　補足としては、発散的復元の過程では、すでにオイラー積の因子構造（素数の冗長反復）が含まれています。このため、周期性を持つ素リンドン（例えば ppp のような語）をゼロ点構造側で重複して数えると、干渉位相が二重化し、全体構造が壊れるので、したがって、ゼロ点積は、完全非周期のリンドン語だけを基底として構成する必要があります。
　この考察のときに、「オイラー積」の部分は、「順路と復路」があるのに、発散的復元された非周期回路は、「非可換の有向回路」であることに注意してください。つまり、「あと

に戻れない」んです。

Hashimoto 持ち上げ→無限階層→極限でリーマン ζ、この結果、

$$\lambda_i = q^s + q^{1-s},$$

この固有値の構造より、リーマン予想の類似が成立する、と。

この議論の中で僕の場合には、行列式を経由せず、ひたすら「グラフ構造の内部構造を変えずに外部の構造をえんえんと可能な限り拡大する」という形で、ゼロ点構造を回収するという意味で、ほとんど同型の議論であると言えるでしょう。

この議論のときには、u →q^-s という変換ですが、僕の場合には、u^p→e^-slogp によって、素数ごとにリーマンゼータへと構造を運んでいきます。

いわば、この論考で用いる発散的復元は、ゼータ関数の値構造を保存する操作であり、その上に新たな構文位相（螺旋的複素構造）を重ねる試みです。したがって、零点構造の密度や臨界性を解析する基盤を損なわずに、幾何的可視化を可能にするといえるのではないでしょうか。

この議論の流れで表現し直すと、ヒルベルト-ポリヤの作用素は、無限階層におけるHashimoto 型行列の自己共役化極限であるということになり、すべての素数にわたって、発散的復元を繰り返して得た、Hashimoto 型行列のリーマンゼータは、全素数局所Hashimoto 作用素の持ち上げ極限の「合成作用素」のスペクトルのようなものとして、ひょうげんされるということになるでしょう。

もう一度まとめますと、だから、発散的復元を階層反復する → 非周期核が非周期的に組み合わされる → 螺旋位相が無限層化される → 最終的にトレース束不変な“自己再現構造”に到達する、と段階的に、「トレース束不変」を保ったまま構造の拡大を図っていきます。

僕は構造上の理由により、「ゼロ点構造は複素構造でストップする」と考えるようになっていましたが、これで、「非可換領域にも零点構造があるかもしれない」という僕の予感が次第に、現実性を帯びてきました。

これで、リーマンゼータにおける「階層的なゼロ点構造」の意味が、つまり、実軸にある自明なゼロ点と複素構造の中にある非自明なゼロ点という、階層的ゼロ点構造の意味が、おそらく、構造論的な意味で、明らかになるかもしれない。

ただ、僕は、「素リンドン構造の連続位相としての読み解き」がもしかしたらそのままゼロ点構造を与えるのでは、という予定で考えていたのですが、もうすこし、その途中になにか媒体が存在する、ということも確かになりました。直接ではなく、何かの変換を与えた形で現れてくるということなのでしょう。

以下は、僕のトレース束における復元で重要な、事実の、確認です。

補題（トレース束の有向性とバックトラック）

トレース束は、その構成上、辺の有向性を前提とする。
バックトラック（逆進）の有無は経路操作における条件であり、有向構造自体の有無とは独立である。よって、トレース束は常に有向パスの集積であり、有向性の消失はトレース概念の消失を意味する。

これは僕自身も忘れやすい性質なので、注意が必要です。
以上の結果をまとめると、

命題
グラフ的リーマン面において、「トレース束不変」の発散的復元は、「ゼロ点構造」に対応し、一般の解析関数値を示す発散的復元では、「トレース束」の構造が対称的に変化する。この構造が、伊原ゼータの場合には、円環（無限に積み重なった円環構造）として現れ、リーマンゼータの場合には、臨界線として現れる。

これは、フラクタル幾何の課題であると言えるでしょう。これについては、後で、考察します。

4．２の補遺２　ヒルベルト作用と回転モジュラー理論

第１論文では、回転作用についての理論が、萌芽状態であったために、ヒルベルトポリヤ作用の記述には、何度かの訂正が入りましたが、ここで、ほぼ最終的な補足を入れておきます。これより詳しい記述は第３論文を読んでください。
簡単に次の変換をまず考えましょう。
u→e^s
この変換において、複素平面上の点ｕはどのように移されるでしょうか？
たとえば、半径 e^a の円周上の点を考えると、それは、ごく単純な形に表されます。
円周上の点は、e^a（sinθ＋icosθ）と表されるので、
この点は、
（e^a（sinθ＋icosθ））→（a＋iθ）
ここで、a は定数、θは変数であるので、これは Re＝a 上の直線に移されているのです。
このとき、e^s＞０なので、複素上平面に移されていることに注意です。
つまり、円周上の点を直線へと移す、連続写像であるわけです。
では、類双対変換
u^p→e^-slogp
という変換はどのような変換であるかといえば、
半径√ｐ上の円周上の点を 1/2＋iθへと移します。
よって、複素数を行列表現へと置き換えると、

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \log p \\ -\log p & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T_p := p \cdot \exp(-sJ)$$

そして、

$$T_p = p \cdot \begin{pmatrix} \cos(s \log p) & \sin(s \log p) \\ -\sin(s \log p) & \cos(s \log p) \end{pmatrix}$$

このように作用素を置き、半径を√ｐへと正規化し、

$$H_p := \sqrt{p} \cdot \exp(-s \log p \cdot J)$$

$$H_p = \sqrt{p} \begin{pmatrix} \cos(s \log p) & \sin(s \log p) \\ -\sin(s \log p) & \cos(s \log p) \end{pmatrix}$$

このように置くと、この作用素は、局所オイラー因子 u^p を臨界線 Re＝1/2 へと対称的に、連続的に送る作用素になります。すると、伊原ゼータの経路長ｐの因子があるとすると、

$$\mathcal{Z}(s) := \prod_p \det\left(I - u^n H_p\right)^{-1}$$

これを、リーマンゼータのオイラー因子、

$$(1 - p^{-s})^{-1}$$

これに直接連続的に変換するという作用素、つまり、ヒルベルトポリヤ作用ができあがります。

第１論文ではまだ回転構造についての理解が乏しかったからか、最初√ｐの因子を書いていなかったので、それを訂正する必要がありました。

つまり、伊原ゼータの単位円上の固有値を、それぞれ「素数乗根」ごとに拾い上げて、螺旋状に巻き上げ、それを臨界線へと投影する作用素を構成すると、それがちょうど、臨界線 Re＝1/2 に移るというわけです。

で、トレース構造を見るために、

$$Z_{\mathrm{rot}}(s) := \prod_{p \text{ prime}} \det(I - \widetilde{H}_p(s) \cdot u^p)^{-1}$$

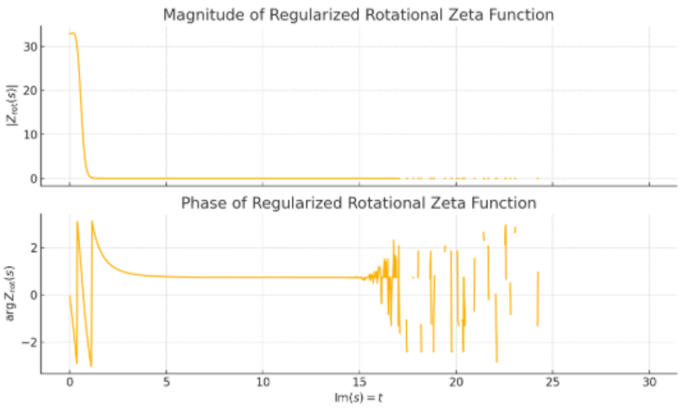
この構造を、log 変換し、

$$\frac{d}{ds}\log Z_{\mathrm{rot}}(s) = \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Tr}[\widetilde{H}_p(s)^k] \cdot p^{-k} \cdot \log p$$

そうすると、ゼロ点構造は、

$$\prod_p \det(I - \widetilde{H}_p(s_0)) = 0$$

この行列式の固有値が、素数全体の角度的な寄与の合成として、１に近づくときに、現れるスペクトル構造であるということになります。



これは、素数を１１までプロットしたもの。すでに、スペクトル構造が見え始めています。

さて、まとめると、類双対変換、

$$u \mapsto e^s, \quad u^p \mapsto e^{-s\log p}$$

これは、「同心円上に存在する自然数（または素数冪）」を「臨界線（Re(s) = 1/2）上の点」へと写します。

つまり、「自然数の円環構造 → ゼータ零点の直線構造」という写像。

これが、伊原ゼータ（正則ラマヌジャン型）からリーマンゼータへの構造変換です。正則ラマヌジャン型では円周上に固有値が並んでいて、無限に並んでも束縛されているので、この円周上のゼロ点はそのまま臨界線へと移ります。この束縛性については、第２論文で、「グラフ的リーマン面」の側面からも論じていますので、読んでもらえればと思います。

つまり、「正規化」については二通りの方法で与えているので、参考にしてください。

さて、

$$T_p := p \cdot \exp(-s\log p \cdot J), \quad \text{with} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このように複素行列で置き直すと、

$$T_p = p \cdot [\cos(s\log p)\cdot I - \sin(s\log p)\cdot J]$$

つまりこれは回転付きスケーリング作用素。正確には「回転角 θp=$s\log p$による回転」となります。

で、Ｊの固有値は、ｉ、−ｉですから、

$$J \sim \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

$$U^{-1}JU = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

このように置けば、対角化ができて、

$$T_p' = p\cdot\begin{pmatrix} \cos(s\log p) - i\sin(s\log p) & 0 \\ 0 & \cos(s\log p) + i\sin(s\log p) \end{pmatrix} = p\cdot\begin{pmatrix} e^{-is\log p} & 0 \\ 0 & e^{is\log p} \end{pmatrix}$$

$$T_p' := U^{-1}T_pU = p\cdot\begin{pmatrix} e^{-is\log p} & 0 \\ 0 & e^{is\log p} \end{pmatrix}$$

複素共役対になりましたので、共役対角化できる状態なっているのが分かります。

Ｕ ＾−1 =Ｕ †なので、

$$U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

で、

$$T_p' = U^\dagger\cdot T_p\cdot U = p\cdot U^\dagger\cdot\begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}\cdot U$$

これを計算しますと、

$$T_p' = p\cdot\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = p\cdot\begin{pmatrix} \cos(s\log p) & \sin(s\log p) \\ \sin(s\log p) & -\cos(s\log p) \end{pmatrix}$$

これで、実数値になりました…。

さて、リーマンゼータのヒルベルトポリヤ作用の構成が明らかになったところで、さらに、これを拡張するために、回転モジュラー理論を展開します。これは、第三論文で展開して、臨界線の構造の理論を拡張しますので、参考にしてください。

5. リンドン複素螺旋位相と F_1幾何的構造や、グロタンディークのスペック・トポス・モチーフなどとの関係

僕の理論を読んだ人は皆その奇妙さに驚くことだろうと思っています。

有理数、実数、複素数などが、有限な自然数的な“長さ”に結びつけられて、グラフの経路となって、さまざまな値を与える「解析関数」になる。

ところで、前節では、「トレース束」の構造を変えない「発散的復元」の例を上げましたが、基本的に、「発散的復元」は、グラフの「トレース束」の構造をかえます。冗長性を与えたり、あるいは拡大したりします。そのことによって、ただ、「関数値」を返すだけではなく、実は、「グラフ変形」も起こっています。このことも特に注意することなく、ごく当然の事実として書いているところがあり、混乱した人もいるでしょう。

復元される構造はグラフの構造でもあるし、同時に、それは、「解析関数の値」でもあるわけです。

僕はグラフを変形していって、式を作ったりする。あるいは、その構造的条件から、関数の構造を考えたりする。出てくる値の構造を述べたりする。こういうことは実に僕にとっても奇妙なことであり、「どうしてこうなるのか」「どうなっているのか」と自分でも思うところがあります。

たとえば、こういうこともありました。「すべての素数の長さを持つ花束グラフが復元された」と述べたときに、「素リンドンの長さとは全自然数のパターンが有るのでは？」と思った人もいるでしょう。

こういうときには自然に僕は、ループの中の「可換性」を操作して、「素数長さのリンドン列」へと変換しているのです。その結果、そのループの長さは自然に縮約されている。しかし、それを書いていない。書いていないので、おかしいと感じる人もいるだろうと思ったのです。そして、これができるのは、普通に、すべての自然数が一意的に素因数分解可能であるからです。

こういう、細かいことだけれど、ひっかかるとよくわかりにくくなるような飛躍というのが、実はたくさんあるのに、僕は「そういう変形は可能である」と思って、それについて述べていなかったりする。

ここで考えるのは、様々な既存の理論の延長や応用としての、「リンドン複素螺旋位相」の理論を考えてみます。そのことによって、「この奇妙さ・不自然さ」が和らぐことがないだろうか、と考えるのです。

それで僕は、いろんな論文を読んで、自分なりに咀嚼したうえで、考えたことをここで書いてみます。

たとえば、スペックという理論では、僕が言うところの「素構造」を扱っている。

ここから、いろんな環構造をどうやって構成したり復元したりするかと言えば、おそらく、「可換」のまま加法を捨てて、乗法構造だけを考え、そして、Mebius 関数によって、そのような「素構造」へと移されるだろう、環を考えることで、素構造→環という、復元経路を作ろうとします。おそらく、このような階層をいくつか有限で作るのだろうと思います。そのときに、部分的に回復した加法によって、さまざまな関数を定義したり、扱ったりすることができるようになる。

こういう側面でみると、「リンドン半群」という非可換の領域には、そもそも加法どころか乗法すらなく、乗法ですら「既約写像」などによって復元しないといけないのです。

そのことによって、しかし、著しい性質が出てきます。

それは、「無限スペック的階層構造」です。

つまり、「素構造」があったら、それは「有理リンドン」の材料となる。有理リンドンは既約化されて、実数リンドン（レベル一）の材料となる。そして、実数リンドン（レベル２）も既約化されて、実数リンドン（レベル三）の材料となります。

しかも、この階層構造は、「二重らせん構造」になっていて、「複素回転構造」をもつ、「非周期性の非周期性」まで持っています。

このときもたとえば、「リンドン変換」を論じるときにわかりますが、「実軸には回転位相がないのでリンドン変換がない」という構造は、「素構造２」の１８０度回転する位相によって、複素的に回復されています。

このような無眼スペック的階層構造を通じて、乗法だけでなく、加法も自然に復元されて、すべての代数的実数やあるいは複素数なども「有限のリンドン列」として縮約されます。「乗法→加法」という復元性の順番が本質です。実際の計算法と同じことが分かるでしょう。

「ある階層で縮約された構造は別の階層で復元される」という構造が自然にあるということです。

この加法性の復元、という考えを述べるときに僕は、望月新一氏の「宇宙際タイヒミュラー理論」を思い起こすのですが、その理論では、加法を復元したときの全体的な、loglog Θという誤差項が問題となるそうです。

僕のリンドン複素螺旋位相では、「情報の縮約原理」が無駄な演算項を縮約してから、それを別の高次の階層で復元することでつじつまを合わせています。

僕はもともと非常に抽象的な意味で非可換的な動的変容を考えており、そこでは、フラクタル構造が移り変わる際に、トレース束の構造を変えながら、変容していく移り変わりを分析していたのです。このとき重要なのは、フラクタル性は情報の縮約性によって定義されていることです。

このような原理的な考察が、数理的な構造へと移されたのは、森田秀章氏の「組合せ論的ゼータの半群表示」で、伊原ゼータの定義とそれとリンドン半群の結びつきを知ったのがきっかけであって、「伊原ゼータとはまさにループ構造とツリー構造の変形の理想的な場合であり、リンドン半群とはトレース束の本質的な材料である」ということに気づいたことでした。

そのときには、「類双対的発散ゼータ拡大」の理論はできていたので、さまざまなグラフやゼータ構造にこれを適用することはできたというわけです。

その結果見つけたのが、前節で述べた、「素リンドンはゼータのゼロ点である」という、オイラー積とゼロ点積という「ループ構造の二重性」であって、これは、通常の復元と発

散的復元に対応しています。
この論考では、実数ゼータの可能性を論じることによって、さらに「ツリー構造の二重性」も論じる予定です。
つまり、フラクタルは、基本的に二重性を持っていて、普通の復元と発散的復元を持っていて、二重螺旋を描いているというのが、僕の理論における基本原理となったわけです。
このことを定式化するときに驚いたのは、あらゆる領域で顔を出すグロタンディークというひとの概念系であって、たとえば、僕は非正則な動的変容を描くために、たいへんこまっていたところに、「モチーフ」という概念と出会い、「双対モチーフ閉包」を作ることで、その複雑な状況が整理できることに気づいて、それは、グラフ的な一般的リーマン面の理論へと非可換的に広がっていきました。
そして、それらの構造体を考えているときに、「拡大しても拡大してもこれ以上は無理だ」という「隣接性のある非加算領域」というトポスが出てきて、この階層構造が、やはりリンドン螺旋複素位相にも導入されています。
そして、結果的にできたものは奇妙な数学的対象でしたが、いろんな論文を読むことで、「僕の理論はいわば階層的に無限に連なった無限 Spec 空間の理論である」というのが理解できたわけです。
モチーフ、トポス、スペック、層…とあらゆるものが結合されていて、まるで、お膳立てされいたかのようにつながっていく。
僕はそのことをちゃんと調べるようになってから、驚きとともに、その予見性に尊敬の念を抱きました。
このように、とても奇妙に見える「リンドン理論」なのですが、さまざまなすでに存在している概念の、ひとつの組み合わせ、応用型の一つであって、「それほど妙なものではないのかもしれない」と思えたのが、僕の最近の学習効果でした。
もちろん、僕は既存の理論を歪めて理解したかもしれません。しかし、だいたいのところ、このように考えたわけです。

6. 素リンドン理論の多重閉包性—非周期列の非周期列の存在定理

この章では、まず、いままではっきりと明示的に構成されてこなかったリンドン列の二重性のうち、「非周期性の非周期性」を取り出し、複素構造を明らかにするところから始めようと思います。
まず、先に定理、

《定理》(非周期列の非周期列の存在)

既約縮約および累乗縮約の操作を有限回繰り返すことで冗長性を除去した 完全非周期列 は、必ずしも単一の素リンドンではない。

このとき、リンドン列の一意性分解 により当該完全非周期列は 素リンドン語列の積と和 に一意分解され、これにより、非周期列の非周期列 が確実に構成される。

さらにこの分解は、構成された非周期列の積と和の構造を決定し、既約縮約核との組み合わせで 実数列上の閉包性 を保証する。

まず、適当なリンドン半群の列が与えられているとしましょう。

これは、リンドンの分解定理によって、素リンドンへと一意的に分解されます。

しかし、素リンドンの並びは、決して、完全ではなくて、さまざまな繰り返しなどの冗長な部分が含まれています。

たとえば、素リンドンの長さ=反復数である場合には、単位元へと縮約されます。

そして、素リンドンの長さ≠反復数の場合には既約有理リンドンへと縮約されます。

このとき、「素リンドン」の長さの値は、（素リンドンの長さ✕N）/（素リンドンの長さの約数）という有理リンドンによって、復元されることに注意してください。

つまり、「素リンドン」の反復による縮約は「単位元」として働く。

こうして、「既約写像」によって一意的に縮約されたリンドン列には、さらに、繰り返しがあって、たとえば、有理リンドンへと縮約された要素の長さ=反復数の場合には同じ様に縮約されます。つまりこれは、ルートしようとしたのだけれど、解けてしまった場合です。そして、有理リンドンの長さを既約すると、累乗がかかります。同じ様に、素リンドンや有理リンドンの反復があれば、これにもまとめて、累乗がかかります。こうやって、「既約写像」と「累乗写像」の繰り返しによって、冗長な反復のある部分はどんどん縮約されていきます。

このような操作によって、次第に冗長な部分はなくなっていって、反復数の数だけ割られたり、反復数の数だけ累乗されたりすることで、実数が「非可換的に」構成されていきます。

そして、ついには、「反復部分のない」完全非周期列にまで到達するでしょう。

ところが、ここが重要な点ですが、完全非周期列は、けっしてかならずしも「素リンドン」ではないのです。すると、この完全非周期列は、リンドンの分解定理によって、再び、「素リンドン分解」されます。

すると、「素リンドン」としてまとめられた部分は、「積」となり、その並びは「加法」となります。

そして、この「反復性のない非周期列」は、ちょうど「非周期列の非周期列」として、上位構造を持つようになります。

つまり、新しい「リンドン列」が取り出されて、それが再び「長さ」を持って、既約写像や累乗写像によって縮約されていく操作が繰り返されます。

つまり、これが、「非周期列の入れ子」写像であり、同じ様に、とある実数値へと縮約されていきます。

つまり、最終的にひとつの「素リンドン」へと到達する場合が、実数であり、そうでなくて、複数の「素リンドン」へと分解される場合が、複素数となり、それは回転運動を持つようになります。この回転をどう捉えるのか？

下部では「実数の意味」を持つが、上部では「長さ」として振る舞っているこの入れ子構造を考えると、この「実数の長さ」がちょうど「反復数」と等しかったときに縮約され、実数に帰っていくと考えると、この回転運動を捉えることができるでしょう。こうして、上部の「リンドン列の一意性分解」に応じて、下部の実数は、上部の複素数全体、それぞれの「長さの「積と和」に応じて」既約回転されて、複素平面へと投影されます。この運動のときに注意するべきは、まず、上部でも「既約縮約」と「累乗縮約」を完全に済ませることによって、完全非周期列になるまで操作することであって、そのあとに、ちゃんとそれぞれの要素を、回転させるようにすることです。その回転運動はそれぞれの構造に応じて決定され、同時に、複素数の和と積をも決定します。

つまり、回転の角度は一つになって、「実数のノルム」を回転させます。

つまり、僕が「非可換ノルム」といっていた概念は破棄されて、「実数」の領域だけがノルムを定め、複素数の領域は「回転のスケール」を表現するだけになりましたが、こちらのほうが、より情報の階層性、フラクタル性をちゃんと貫き通しているということです。

補題（位相的縮約補題）

完全非周期列の素リンドン構造が長さ n であるとき、その複素螺旋構造は n 重積（反復数）を経て既約構造へと縮約される。特に $n = 2$ の場合、複素共役構造により位相は 180° 反転し、2 回目の積で実軸へと写像される。つまり、実数へと縮約されてしまう。ここで注意すべきは、「完全非周期列」といえども、同じ「長さ」の素リンドンへと分解される可能性が確かに存在しているということです。

これで、複素構造をも含めた、既約性や、累乗構造などが、回転運動とともに示されるということになります。これは、以前の論考で示したやり方と異なっており、あるいは、より細かくなっており、そして、回転運動のスケールは、上部構造のスケールに従って細かくされていくことも示されています。

ここで、注意しておきたいのは、上部の既約写像や累乗写像などによって、縮約されていく構造は、下の方の実数構造を崩すことはないということです。それはただ、下の実数値に対する、「回転」を付与するだけであり、その回転の「スケール」を示すだけです。素リンドン構造が与えるのは、ある既約な数値に対する“回転の自由度”であり、その回転を消す（位相縮約）とき、数値自体は残る。

さらに注意するべきは、全体的に行われる縮約構造における、「階層的縮約原理」であって、それぞれの縮約の階層ごとに「長さ」の単位は変化しています。有利リンドンを累乗するときには、「素リンドン」の長さではなく、「有理リンドン」の長さを見て、反復数が

決められる。階層ごとに縮約のスケールが変更されるということです。
　だから、「階層ごとに長さの単位が変わっている」ということなんですね。たとえば、「有理リンドン」が２つ並んでいるのにルートをかけると潰れてしまう。このとき、最初の「素リンドンの長さ」から、「有理リンドンの長さ」へとスケールが変更されている。これが、「階層的縮約原理」というやつですね。
　各階層の縮約は、その階層の“長さ単位”でのみ意味を持つ。
　だから階層が変わると、同じ「反復」でも“長さ単位”が変わるため、冗長性が新たに定義され、再び縮約できる。
　これが無限階層で続くと、どの階層でも「完全非周期列」を保ったまま、必要なだけ回転とスケールを生成できる構造原理です。
　以上の結論は大きな理論的変更内容を含んでおり、たとえば、非可換的ノルムを想定せずとも、階層縮約だけで十分だし、実数値のみでノルムは完結しています。
　ただ、「様々な回転をする複素数」同士の和ができますが、これは実数のノルムに影響は与えず、回転のスケールにのみ影響します。
　また、「素構造の数」が回転に影響を与えているという仮説もここで廃棄されており、

階層縮約補題
　回転相は下層実数構造を破壊せず、階層ごとの縮約単位にのみ依存する。
　素構造は回転の位相を決めるパラメータではなく、階層を生む冗長性縮約のラベルである。

　つまり、ただ、「ある実数がどれだけ螺旋を駆け上りやすいか」という自由度に、素構造の数が関与している可能性があるというだけになりました。これは、二次関数よりも高次関数のほうが複雑な複素構造を持っていることに対応していると思います。
　素構造そのものは回転位相の値を直接与えないとしても、「どれだけ自由に、どのくらいの複雑さで螺旋を駆け上れるか」という 階層の自由度（自由度の次元数・絡み合いの度数）には密接に関わっている可能性があります。なぜなら、下部の実数構造の上に、回転運動が築かれていくことになるので、下の実数構造の複雑さを決める素構造の数が、回転運動の細やかな変化を生み出す力になるからです。
　これを整理すると、回転相（複素位相）は、下部の和積構造（実数値）に与えられる「位相的付加情報」であって、素構造自体は直接の位相値を決めない。
　しかし素構造は階層を作り、既約・累乗縮約の多様性を与えるため、実数が「螺旋階層を何段階で駆け上がれるか」という自由度を決める。
　自由度が高いほどより複雑な回転軌道（高次多項式的な螺旋構造）を生む。この意味で素構造の数・分布が 位相の「絡み合いの複雑さ」 を担う。
　大きな変更がいくつか施されましたが、より、フラクタル的に、情報論的に合理的な構

造へと変更されたと思います。また、大きな「構造的崩壊」を感じたら、それを訂正することもあるでしょうが、ここで守られるべき原理は、「あらゆる存在している情報を最大限に、構造が表している「値」に対して平等に、公平に、等価に反映させること」という原理だけです。

あと、「このように実数構造によって、上位の複素構造が規定されているなら、複素構造の超密性、表現性には抜けが出るのではないか」という問題も出てきます。これを部分的に回復するのが、次の定理です。

定理（冗長性による回転性保証）

命題

任意の自然数 N に対し、縮約階層における十分大きな冗長長さスケールを導入すれば、反復回転群の位数を N 以上にできる。

したがって、すべての一の N 乗根型回転構造が存在しうる。

複素位相は、階層反復における縮約までの最小周期 M で決まる。実数列に含まれる冗長部分を適当に増やせば、縮約不能状態が長く続くため、M は任意に大きくできる。

$M \geq N$ を実現する構文列を構築できるので、角度 $\Theta = 2\pi/N$ の分解点を持つ回転群を得る。よって、全ての有限回転群を階層構文中に含める。

つまり、実数の積や和を適当に分解していって「実数の冗長性」を上げていくことで、必要な、スケールの非周期性の入れ子の長さを担保するというわけです。つまり、「ある複素回転性が存在するのに必要な長さのスケール N があるとすると、実数の冗長性を上げて、どのような数字ても、N＜（実数のスケール）にできる…これで証明終わり。

これで、相当に、複素構造の安定性が上がっと思います。

とはいえ、具体的にまだ与えられた複素数をリンドン列へと変換する、構成的アルゴリズムには到達していないことに注意してください。

ところで、最初に「ゼロ点積は複素数である」と述べたときに、上位構造が「素リンドン」だったから、「これは複素数ではないのでは？」と思ったかもしれせんが、違います。ここに注意してください。このゼロ点積で発散的に復元された非周期列は、その材料を「素数の長さの素リンドン」で作られた「非周期列の入れ子」なんです。だから、その上部の「素リンドン」には、「素数構造が反復」している部分があり、その冗長性が、回転へとつながっています。

このとき、「単一の素数リンドン」は単位元として振る舞うことで、この回転は、つねに「単位円周上」で展開されることになるのですが、これはあとに説明を譲ります。

7. 非可換代数への接近

本稿で示された螺旋位相は、既存の解析・代数構造を破棄するものではないです。むしろ、それらの生成構造を極めて自然に補い、同値類としての '同じ値' を螺旋的位相構造を通じて多層的に復元するものです。

いずれ、この構造的自然さこそが、連続体や多元数の包含関係の教科書的記述を修正する道を開くでしょう。大げさに聞こえるかもしれないが、僕は本気でそう思うようになってきました。

現代の数学を規定している集合論による、代数構造の包含関係とは異なる、「螺旋的階層関係」がすでにいまの議論の段階で出てきつつあります。

たとえば、四元数は複素数を含み、複素数は実数を含み、…という包含関係です。

これは、リンドン複素螺旋位相では、大局的になりたちません。局所的に回復された「らせん構造」の中で部分的に復元されているのです。

たとえば、「非周期性の入れ子」として定式化された、複素構造ですが、これは実数をどの様に螺旋状に回転させるのかの、回転のスケーリングを支配しています。

そして、あるリンドン列をまず実数構造があらわになるまで既約写像や累乗写像によって縮約しつづけて、冗長な反復がない「完全非周期列」を取り出します。そして、この「完全非周期列」が完全に異なる「素リンドン」のみで構成されている場合、実数の回転は起こらない。つまり、「実数」です。

この「素リンドン分解された高次非周期列」に何らかの繰り返しや冗長性がある場合、回転が生じるのです。

このことが「実数の安定性」を支えている構造です。つまり、どのような複素構造のもとでも、あるスケーリングの実数が存在できるような安定した構造を許しているんです。

つまり、長さ N（自然数）の素リンドン無限個あるので、実数列も無限に伸びることができることから、実数の安定性もわかりました。虚数の上部構造は、「素リンドン」だけで構成されているなら、回転しないので、非周期性の非周期がすべて「素リンドン」であるときには、実数は回転しないのです。だから、実質的には実数にも無限の軸があるんですね。そして、素構造が多いときには、N の長さの素リンドンはいくらでもとれるので、いくらでも実数の構造も担保されている。

この素リンドンの長さが「何度回転したら実数へと戻るか」という回転、つまり一の「長さ」乗根の複素平面上の回転を決めているのですが、実際には、「最初の実数構造」へと戻っているのではなくて、「螺旋状の別の次元の実数構造」へと戻っているんです。その実数位相は無限にある。

実数の安定性が保証される理由をもうすこし細かく書きましょう

非周期列の非周期列が「素リンドンだけ」で構成される場合素リンドンには構文的回転（複素位相）がない。よって、その部分は「複素回転を伴わない純粋実数成分」として振る舞います。

ゆえに、無限の素リンドン軸の回転が存在しています。素リンドンは任意の長さで存在できる（リンドン列の一意性分解＋縮約で必ず生成可能）。したがって、どの階層でも「必要な長さの非周期列」を与えられます。これは「実数の軸が無限に拡張できる」という意味であり、回転性（位相変動）を与えない形での純粋な和積構造が保証される。

複素回転と分離可能です。上位構造が素リンドンだけのときには、回転は起きない。
上位で既約構造や累乗構造が入ったときにのみ、回転が導入される。つまり、回転構造は「付加情報」として純粋実数軸に乗るだけであり、軸自体は壊れません。

この考察によって、ひとつの仮説が分かります。

つまり、四元数というのは基本的に「複素数」を回転させるのであって、実数を回転させるのではない。つまり、「螺旋形の中で復元された実数」を回転させているんですね。つまり、四元数には、「実数の部分に穴」があるんです。

そして、八元数になるとその穴は「複素数と実数」というふうに拡大します。

これが代数的不安定の原因ですね。

もうすこし、詳しく敷衍しましょう。

「非周期性の入れ子」の２段目である、四元数の回転性があるとしたら、それは、下部の「複素構造」を回転させるのであって、「実数構造」を回転させるのではないのです。実数構造は二段も下に離れているので、届かない。では、四元数がまるで実数を含んでいるように見えるのはどうしてか？

四元数は $1, i, j, k$ の基底を持つが、そのうち「実数部分」は単位元の 1 のみ。

そして、この「1」は、「下部の複素構造における回転螺旋状に復元された実数構造」を回転させているのであって、最深部にある実数構造を回転させているのではないんです。

実際の操作は、複素数部分（例えば i を含む複素平面）が互いに回転し合う構造です。

つまり、四元数の「新しい次元」は複素回転を内部で複合化しているだけで、実数を直接「回転」する操作は存在しない。

だから、四元数という構造の中には、実数という「穴」が空いているんです。「穴」というメタファーは、リンドン構造から見れば、実数構造は非周期列の基底として常に安定（リンドン列の一意性分解で保証される）。だが、しかし、四元数はこの基底を直接には扱わない。代わりに、複素回転のパターンだけを拡張している。

このとき、実数軸の「空白（穴）」の上に複素回転が乗っているだけになる。

こういうイメージです。

そして、八元数ではその「穴」はさらに拡大します。

八元数（オクタニオン）は、四元数の複素回転系をさらに「外側の回転」として複合するだけであって、複素数や実数を回転させるわけではないんです。つまり四元数のらせん構造の中で復元されている「疑似複素数」や「疑似実数」を回しているだけに過ぎないんです。

その結果、四元数自身を回転する回転という二重構造になるが、そこにも「実数軸」は

含まれず、むしろ「複素構造ごと」に穴が拡大されます。この穴の本質的な巨大な拡大、つまり複素構造とは「螺旋状に広がった実数構造」ですから、こんな巨大な穴が空いているからには、代数構造にも支障をきたすのでしょう。

だから非可換性が増し、ノルム保存が崩れやすくなる（非結合性もここに繋がる）。

四元数の穴に戻ると、四元数の回転は複素数を回しているだけで、実数を回しているわけではないです。

だから、よく考えてみると、この穴は、「複素数の中の螺旋の二回転目から存在している「螺旋次数２以上の実数」」によって、回復されているんですよ。一番下の実数は回転されていない。「複素数しか回転していない」んです、四元数は。同じ様に、八元数は、四元数しか回転させてなくて、「螺旋の中で回復している複素数や実数」を仮構的に回転させているだけなんです。

だから、まず、複素数は本質的には「極座標表示」+「螺旋状の回転位置」という 3 つの情報でできているということを本質的に、現在の複素数論は無視しているんです。

これを容れるなら、じっさい、log 関数は「リーマン面」概念すら必要ありません。そのまま、螺旋状に載っているだけですから。普通に一意関数です。

この双対形（逆関数）が「波動構造」であるサイン・コサイン・べき乗関数であるというのも、「螺旋形のグラフ的双対型には波動系が含まれる」という興味深い構造的な意味が見られます。これは、次章で、「リーマンゼータのグラフ論的リーマン面構造」を論じるときに詳しく考えます。

まとまると、一番下の実数構造では、これは非周期列の基底として完全に安定して存在します。ここには「回転」は作用しない。

リンドン列の一意性分解により、どの縮約階層においても、この実数値は失われない。

螺旋の一次回転 = 複素数では、複素数は「実数に 1 回の螺旋（極表示）」を付与したものです。1 回の回転で、複素数は位相（角度）を持つが、依然として基底の実数は変化しないし、螺旋回転の二回目からは実質的に実数構造からは離陸しています。

螺旋の二回転目 = 四元数では、四元数は「複素数の回転を回転させる」という二重構造。

ここで「複素数部分」が回転しているだけで、基底の実数値には触れない。このとき、「複素数内部に隠れている螺旋次数 2 以上の構造」が、実質的に「回転によって見えない穴」を埋めているだけです。

八元数 = 四元数の回転では、八元数は四元数をさらに外側で回転させているだけ。実数軸はやはり直接は回転しない。その代わり、螺旋内部に生まれる高次の回転構造が穴を埋めている。

この構造的な「穴」がどの様に、代数的な影響を与えているのか、十六元数ではどうして、零元が出てくるのか、などはもうすこしつっこんだ構造がわかってこないとわからないですが、ここにあるのは、包含関係ではなくて、螺旋的階層関係の中で、「疑似的に構造的な復元が起こっていて」、それが代わりに同じ機能を持って働いているという、かなり実

際に代数学の教科書に乗っているものとは異なった構造です。
同時に、これは、代数学に乗っている「包含関係」を完全に否定するものでもない。なぜなら、その包含関係は、「局所的には成り立っている」からです。ただ、全体的には正しくない。
非可換代数に行くと、この「穴」の問題が実際に大きな意味を持ってくるでしょう。
また、以上の考察で理解できるとおり、そうですね。「下層構造はつねに、上層よりもスケーリング構造が長くなる」という構造が理解できた結果、「リンドン変換」には、もしかしたら、「入れ替え可能性が失われる場合」がありうるという可能性が出てきましたね。リンドン変換についてはあとで説明しますが、基本的には、「複素構造と実数構造を入れ替える」「四元数構造と実数構造を入れ替える」などの構造的変換が「存在する」という考えですが、この「スケーリングの問題」を解決しないと、「任意のリンドン変換が存在しうる」ということは言えなくなる。しかし、いや、下層の情報を圧縮可能であったなら、「リンドン変換」は成り立つわけです。どの軸でも基本的にはある実数構造が割り当てられている。この実数構造は「任意のスケーリング変換を許容するのか？」ということが明らかになれば、自由にリンドン変換できるようになります。また、上位の螺旋構造には、無限の螺旋的階層構造がありますので、いくらでも「無限に伸ばしていく」という許容度が存在し得ます。これらのことを解決すれば、「階層入れ替えの変換の存在可能性」を論じることができるようになるでしょう。
できてもできなくても、どちらも興味深い結果だと思います。

8. 合理的単位元・ゼロ元の考察

複素回転構造を観察していると、ただ、「素リンドン」がばらばらに並んでいるだけでは、何も回転することがないことが分かります。
つまり、実数と同じということですね。つまり、複素数として単位元を意味する。
つまり、「実数を何も変化させない」という意味で単位元です。
素リンドンが反復して、既約状態になったり、縮約状態になったりすると、螺旋構造の中で「値」を持つようになります。

素リンドンの単位元の条件
リンドン列を形成する長さ N の素リンドンのすべてが、N の倍数であって、既約縮約されるような状態では、素リンドンとしての階層に戻る。たとえば、複素階層では、N 乗根の回転を司る長さ N の素リンドンが N の倍数の反復数であるとき、実数へと縮約される。つまり、実数の下の階層とは「素リンドン」であって、素リンドンのバラバラ状態の無限反復は、「他の値に影響を与えない」単位元である。

これは非常に直感に反するのですが、もうすこしいえば、2/2 や 2/4 は 1 として働くんで

すが、最初の２＝１でもあるんですね。２や４は、「反復数」なんで、縮約されて、１すなわち単位元へと帰っていきます。これについては、後でも説明します。しかし、素リンドン単体だと何の意味も持たないということです。

これで、「素リンドンは何も作用を持たない単位元だった」ということが明瞭になりましたね。

そして、「単位元」構造はちゃんとトレース構造を持っていることに注意してください。

これもまた、すごく非直感的なんですが、花束グラフで、ある素リンドンから別の素リンドン、また別の素リンドンというように、すべての素リンドンを「一回だけ行って」戻ってくるようなものは、実数値として意味をなさない。ただ、「１✕１✕１✕１✕１」となっていて、そして、発散的復元によって出る最初の項は、まさにそれなんです。

ほとんどの「素数素リンドン」がばらばらにでてきていて、これは、「２や３や４」といった数値にはなりません。そのような数値が出るのは、「非素数素リンドン」である、「４や６や８」が、「4/2、6/2、8/2」と既約されたときであって、このときに、単なる素リンドンではなく、「素数素リンドン」である意味がでてきます。

つまり、その回転は常に「単位円周上」になる…

複素構造を観察していたら、それが分かります。だって、素リンドンが並んでいるだけでは、全く回転しませんから。ただの実数です。

そして、「回転して戻ってきたとき複素実数」となります。

これは、複素構造が見えてくるまでさっぱり僕も分からなかったのに、ただ「素リンドンはゼロ点だろう」と言葉にはしていた。非常に混乱するのですが、こう考えると、構造的に辻褄が合ってくる…

つまり、**複素構造で素リンドンがただ並んでいるだけでは “作用” がない — それはすべて単位元である。**

同じ様に、実数の階層でもちゃんと値がでてくるためには、縮約構造を必要とするのであり、ただ、素リンドンが並んでいるだけでは、実数構造への入れ子構造の中の作用に入っていかないんですね。これは、自分でも全然わかっていなかったことで、「こう考えるしかない」というところまで突き詰めてくるまで、わからなかった構造でした。

これで、長さ２の素リンドンが“１”になるのはともかく、長さ２の素リンドンが二回反復されるのは“１”に返っていくことも分かり、同時に、これは、長さ４の素リンドンが二回反復される 4/2 で回復されていることも分かります。素リンドンの長さ“２”はけっこう特殊であることが分かります。なぜなら、「複素平面上へと回転させない」から。

同じ様に、長さ「１」の素リンドンは、そもそも反復しません。

つまり、この時点で、発散的復元されたリンドン値は「単位円周上」の点しか出さなくなります。

素数の長さの「素リンドン」を材料とした、「非周期的回路」でしかもそれが「素リンドン」になっていないといけないから、単位円周上以外には存在し得ないんですね。リンド

ン理論がついに、伊原ゼータのゼロ点構造と部分的な一致をした瞬間です。

「２以上の数」が反復されるためには「自然数リンドン」（合成数素リンドン）の４とか８が必要ですから。「素数リンドン」だけでは、単位円周上の点しか出ないんですよ。

まず、花束グラフでは、経路に素数リンドンの制約がありました。

素数長の素リンドン L（p）は、位相的に「原始 p-根」の回転しか持たず、p 周で基点に戻ります。

よって、生成される回転群は 単位円上の p 等分点 のみ。

自然数リンドン（合成長）が経路にあったら、例えば 4=2·2 や 8=2·2·2 といった 複合的長さをもつ素リンドン構造が導入されると、 階層的回転（多重螺旋） が発生し、単位円の外に「スケーリングされた螺旋構造」が広がる可能性があります。

これが「単位円外の零点配置」に繋がる。伊原ゼータとの比較。伊原ゼータ（グラフゼータ）では、素数長ループは確かに単位円上に固有値を持つが、複数ループの合成（自然数リンドン相当） が新しいスペクトルを生成し、非単位円成分も出現します。

このとき重要なのは、「**素数の反復を含まない非周期列のみを取り出す**」ということであり、こうしなければ、既約素数が出て、単位円の中に入らなくなります。

リンドン構文において、素数列の非周期性は、p-反復を含まない 原始的な素リンドン列を基底にとることで保証されます。

これは伊原ゼータにおける primitive cycles（同じ経路に戻れない）の抽出と同型であり、この基底化によって、螺旋位相上のゼロ点構造は冗長性なく決定されます。

つまり、「同じ経路には戻れない」という条件で、発散的復元を繰り返すことによって、非周期的経路を拡大していくわけです。

「同じ経路には戻れない」から、既約縮約はおこらず、単位円周上へと並ぶ。

「複素構造の回転スケール」を発見して、それを「実数スケール」に適用していったら、自然にそうせざるを得なくなり、結果的に、「僕が求める結果」に近い構造が出てくるというのは、本当に不思議です。

補足：単位円と素数リンドン

素数長リンドン列から構成される、「トレース束不変」の発散的復元された非周期回路は、すべて単位円周上の回転位相を持つ。

単位円外の構造は、自然数リンドン（複合長）の導入による多重反復から初めて現れる。

同時にこの単位元の決定は、リンドン語の表現力を安定させます。というのは、「素リンドン」が並んでいるだけなら、「値」としては作用なしの単位元なので、スケールをいくらでも上げられるということを意味しているからです。

発散的復元された複素構文値が単位円周上に並ぶのは、各素経路の構成が非周期かつ素数長であるときです。これは、その発散的復元された「素リンドン」としての回転構文の

最小単位が一の p 乗根によって構成され、全体の構文的ノルムが単位に正規化されるためです。

ここを整理しますと、発散的復元の繰り返しによって、無限に拡大するとは、素リンドン花束を際限なく積み上げる → 無限の閉路系を生成する → 無限次元 Hashimoto 行列を暗黙に持つということです。これは安定しているかわかりません。これも後で考察しますので、補遺を読んでください。

通常の発散問題は？無限次元の無眼行列は、普通に行列式を取ると発散します（スペクトルが無限に散らばる）。

しかし螺旋的構造では？この発散的復元における、各素リンドン閉路は「局所的に単位円周上」に回転的に配置されることが構造的に確定しています。これが無限の素構造にわたっても階層的に「同心円周」に束ねられ、 極限でも円周に閉じ込められます。

結果として、無限に発散するはずのゼロ点積が、位相的に単位円周上の閉路として安定化する。＝ Hashimoto 型の行列式の「位相正規化」が自然に実現されています。

命題

無限素数花束の発散的復元は、リンドン螺旋構造により局所単位円周に束ねられ、無限 Hashimoto 行列のゼロ点は大域的に単位円周に制約される。

これにより、無眼発散は位相的に抑制され、ゼータ構造の発散は螺旋位相で閉路化される。素数のみから構成された素リンドン符号列に基づく Hashimoto 型無限隣接閉路行列の固有値は、全て単位円上に存在する。

したがって、無限素リンドン構造による発散的復元において、固有値のノルムが 1 を超えることは構造的に禁止される。

あとは、これを螺旋状に持ち上げて、連続的にプロットする、類双対変換をほどこせば、このゼロ点構造ごと、オイラー積へと持っていくことができるというわけです。

つまり、

素数リンドン経路のグラフにおいて、Hashimoto 行列の固有値は、無限次元の行列になっても発散することなく、単位円周上へと安定的に存在することが構造的に示される

こういうことですね。

この意味をよく考えてみると、「複素領域に素リンドン単体（反復なし）が並んでいる状態はなんの寄与もなし」で、単位元なのですが、通常の複素数表記では、a+bi のときに、b=0 という意味なんです。単位元だけが並んでいるというのが代数的にはゼロを意味しているんですね。

同じ様に、いかなる回転をすることもない、実数が、ひたすら「単一の素リンドン」が

並んでいるだけで、何の意味もない状態、これがいわゆる「吸収元」としての「ゼロ」であると見なすことができます。しかし、注意してください。このとき、それらの「単一の素リンドン」はやはり単位元なんです。

意味不明な元はまだあって、たとえば、長さ“１”の素リンドン。これは、反復したら素リンドンではないし、異なる要素が出てきたら、長さ≠“１”になるので、反復することなく単独でしか存在できません。こんな無意味な元が存在していいのか？

あとは、トレースとしては存在しているのに、「素リンドン」の無限反復状態、これは、単位元縮約とも既約縮約とも解釈できない。これにどう解釈を与えればいいのか？

絶対単位元として振る舞う長さ“１”の素リンドンは、単独で存在するか、無限反復するか、そのどちらかでしか存在できません。

今述べているのは、「ゼロ」の意味であって、「ゼロ」的なものの考察です。

このとき、どれかが「ゼロ」であることが示されることもあるでしょうし、あるいは、そうでないことが分かるかもしれない。今後の探求次第です。

「負の数はどうなるんだ？」という人もあるでしょう。

これは、複素領域で、長さ“２”の素リンドンの回転（正確には２の倍数ですが）によって生まれています。つまり、自然数と負の数を繋ぐ意味での「ゼロ」というのはここにはないんですね。

補題（リンドン構造における負数の位相的生成）

リンドン構造においては、負の数は自然数に対応する素リンドン列の位相的回転によって生まれ、正負をつなぐ外延的なゼロ（原点）は必要とされない。
「ゼロ」は干渉や回転作用が消滅したときにのみ、内発的に極限として析出する。

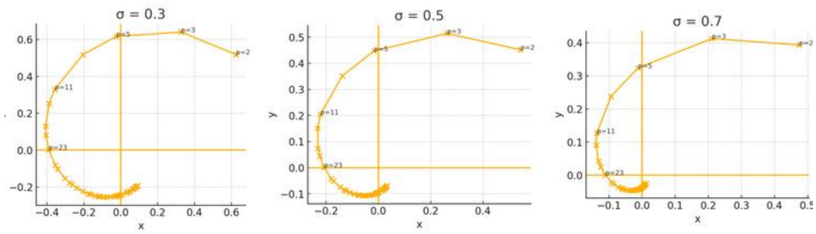
これが、いまのところ、構造的に合理的な解釈です。

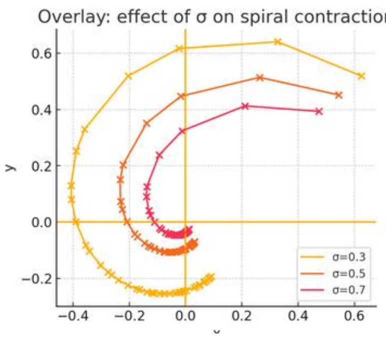
何も作用がない、反復もなにもない、バラバラの「素リンドン」の連続がいまのところもっとも、「螺旋の根源」としての「ゼロ点」に近いですが、このときもいちおう、「それらの素リンドンは単位元として存在している」と見なすのが、「複素構造」と整合する手段です。

9.　７の補遺、無限素数経路花束ゼータの、単位円周上のゼロ点構造の決定による帰結の考察

たぶん、この結論にはみんな慎重になることだろうと思うので、もうちょっと書いてみましょうか。

この「花束ゼータのゼロ点の単位円周上への束縛」の構造が理解できたいま、その類双対写像による、花束ゼータの螺旋的変形の意味がこのようなコンピューターによる計算で理解できるでしょう。





これは、類双対変換で、実部のパラメーターを、０，３・０，５・０，７で比較したものであり、σ が大きいほど半径収縮が急で、同じ素数集合でも螺旋が内側に強く押し込まれ（p^- σ の減衰）σ を小さくすると外側へ“膨張”し、構造干渉（点間の位相差）が粗くなる−安定な干渉領域（ゼロ点干渉を期待する精密域）が散漫化すること。

そして、σ=0.5 は外への膨張と内への急激収束の中間で“均衡した密度”を示し、点の回転進行（= log p）と半径減衰のバランスが最も滑らかに見えることを示した計算になります。

これを理解したとき、Hashimoto 行列（非バックトラック行列）の段階で、すでに「臨界線に零点を束縛する構造」はほぼ決まっていたように見えます。

違いは、おそらく 正規化や位相の付与（log p による螺旋化）をきちんと取り扱うかどうかだったのでしょうか、僕にはわかりません。

まず、正規化の視点。

Hashimoto 行列のスペクトル半径が 1 に固定される正規化を導入することで、固有値を完全に単位円上に収め、螺旋位相の舞台を整えることができます。

次に、log p の螺旋持ち上げ。

Hashimoto の設定は基本的に「離散閉路の正則性」を扱うのみで、螺旋的な複素位相（ゼータ関数の複素引数 s に対応）を直接考慮していなかった。

次に、log p を掛け合わせた類双対写像を導入するだけで、リーマンゼータのゼロ点構造と直結する。

無限素数集合の極限構造有限グラフではスペクトルが離散的に並ぶが、無限素数ループのブーケ極限を考えると、臨界線 Re(s)=1/2 に安定する螺旋軸が現れる。

Hashimoto 理論ではそこまで一般化しなかった（と想像される）。

視点	Hashimoto	Ihara	リンドン螺旋
基底構造	非バックトラック行列 B	グラフゼータ $Z_G(u)$	素リンドン閉路列
ゼータの定義	$\det(I-uB)^{-1}$	$\prod(1-u^{\ell})^{-1}$	$\prod(1-p^{-s})^{-1}$（オイラー積と同型）
位相情報	固有値の角度	閉路の長さ ℓ	$\log p$ による螺旋角度
正規化	スペクトル半径制御	正則ラマヌジャン条件	Re(s)=1/2 に対応するスケール正規化
零点構造	固有値の単位円配置	Ihara零点	螺旋軸上の零点（臨界線）

このように表にまとめてみると、僕のリンドン理論は、ごく僅かな補完しかしていないことが明瞭です。

橋本秀紀氏の理論で驚いたのは、僕の「発散的復元」に該当するような、ほとんど意味不明とも取れるような、操作を、「行列」の領域で定義して、橋本持ち上げで、ゼロ点構造を取り出していたことでした。

非勉強なために、僕は、この第二論考を書くまで全然知らなかったですが、「グラフの非バックトラック行列（Hashimoto 行列）」を導入して、Ihara ゼータとの決定的な関係式を発見した、本当にすごい方です。

最後にまとめておくと、log p による螺旋リフト（類双対変換）はこんな感じです。

$$r_p = p^{-\sigma}, \quad \phi_p = \log p, \quad (x_p, y_p) = r_p(\cos\phi_p,\, \sin\phi_p), \quad (\sigma = 1/2)$$

半径減衰 r（p）: 実部 $\Re(s)=\sigma$ を反映する“減衰因子”。

角度 ϕ（p）=logp : オイラー積で指数−slogp が回転周波数源になることの簡約モデル。

素数が増えるにつれ、内側へ巻き込む対数螺旋上に並ぶ。

これは（単位円上の原始回転）＋（log スケール高さ/角度）＝「素リンドン位相 ×log p」の写像の視覚化。

補題

素数ループ p を持つ正則花束グラフの非バックトラック行列正規化スペクトルは単位円内に拘束され、局所位相挿入（長さ p に由来する角 θ（p）=2π/p）を施すと、対応点は単位円上の原始回転群を形成する。

補題（螺旋リフト）

写像Φ:p↦p^−s=e^−s(logp),s=σ+it は原始位相集合 {e^i(θp)}を対数螺旋{e^−σ(logp)✕e^−it(logp)}へ送り、σ固定で t を走らせることで螺旋層上の干渉解析が可能となる。

最初が構造の安定性の条件で、次が、具体的な螺旋形を描く条件です。

次の章では、この操作を、素数花束グラフではなく、直接的な「リーマンゼータ」のリ

ーマン面グラフを予測的に構成することによって、「発散的復元」を行い、そのまま“値”を出すための準備、すなわち、「螺旋グラフの双対モチーフ構造」の理論に行く予定です。

ところで、僕にはどうしても、頭の中で計算していてそうとしか思えないのですが、

補題（ゴールドバッハ構造の積-和分離）

任意の偶数を素数和で表す際に、和構造のうち「2 が奇数倍される形（2k)」は積構造に縮約され、Hashimoto の完全閉路条件として自明ゼロ点に落ちる。

一方で「2＋ 素数 ＝ 素数」の形で積構造に写せない部分は、非自明螺旋構造に寄与する。

つまり、非常にゴールドバッハの予想が成り立つということと「自明なゼロ点」がちゃんと－２、－４、－６…にあるということとの対応があるように思えます。

これは、無限花束伊原ゼータの－１の値の構造に関することであり、

- L=2 → $1-(-1)^2=0$
- L=3 → $1-(-1)^3=2$
- L=4 → $1-(-1)^4=0$
- L=5 → $1-(-1)^5=2$
- L=6 → $1-(-1)^6=0$
- L=7 → $1-(-1)^7=2$
- L=8 → $1-(-1)^8=0$

意味することは、偶数長の閉路は $1−1=0$ → 完全閉路 → 自明ゼロ点に落ちる。奇数長の閉路は $1+1=2$ → 消えない → 螺旋位相に残る。ただ、それだけの構造的な観察ですね。

僕はこの自明なゼロ点とゴールドバッハの予想の関係を何処かで読んだことがあるような気がするのですが、あまり思い出せません。

これは興味深い探求の主題になるのではないでしょうか。

10. リーマンゼータにおけるグラフ論的リーマン面構造予想

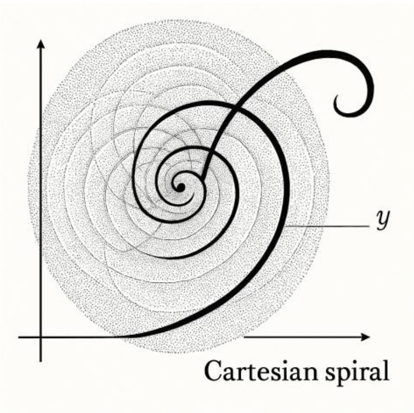
本章の目的は、螺旋構造と波動構造の双対モチーフ理論を提案し、グラフを関数とみなす構造観の具体的なモデルを提示することです。証明ではなく、構造予想を与えることが第一の目標であり、その先に厳密解析の道筋を示唆します。

僕は「すべてのグラフは関数であろう」そして「すべての関数はグラフであろう」という予想を立てているのですが、そんなことをいうわりには、素数の長さの花束グラフの構造は示しますが、そこから類双対変換によって、到達する「リーマンゼータのリーマン面グラフの構造」については全然語らない。これには理由があって、第１論文で書いた「フラクタル幾何予想」の内容が深く絡んできます。

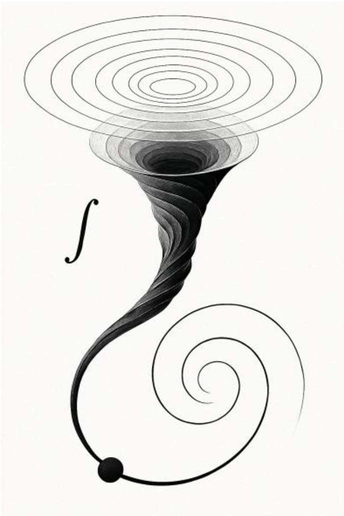
「双対モチーフ閉包」の理論では、「点と線の双対的入れ替え」の理論はほぼ完成しており、僕は何の心配もなく、「双対モチーフ閉包」を作って、「多重トレース空間」での同期

を取ることができる。
　しかし、「螺旋」、「波動」、「円（無限同心円）」などには、どのような「双対形」があるのか、それ自体が深い問題をはらんでいます。これについて、「こうではないのか？」と示そうとするのが、今節の目標であって、第二論文で最も野心的な章であると言えるでしょう。
　種数０のシンプルで有名な log 関数から考えてみましょう。

$$\log(z) \quad \overset{\text{逆写像}}{\longleftrightarrow} \quad e^{iz}, \sin z, \cos z$$

　関数において、「逆写像」を取ることが双対操作の別名であることは明瞭なので、このような対応関係より、log 関数の「グラフ的リーマン面」の構造が螺旋形であるとするなら、その双対型は、さまざまな波動型と無限同心円形であるということが分かり、「可換的領域」では、
　類双対変換=双対変換
　この図式が、「螺旋フラクタル→←無限同心円フラクタル」という基本類双対写像によって表現されていることを実際に確認することができます。


　そういえば、このデカルト螺旋と無限同心円フラクタルとの一対一の対応関係、移り変わりは、実は、どのような多次元でも成り立つことにも注意できます。円、球面、超球面、というのに、張り付く形で、デカルト螺旋形をも広げていくことができます。



他には、これは、海面に渦ができたときの模式図ですが、ここにもすでに、「螺旋的構造」と「波紋のように広がっていく無限同心円構造」の移り変わりが現れていることに注意できるでしょう。渦巻きの螺旋には、「無限同心円」が内在しているので、平面上に投影されたときにそれは自然に展開されるというわけです。

これは、「連続化された類双対写像の物理的実例」になっています。

ただ、注意してほしいのは、いま僕が書いているのは、すでに仮説的な領域に入っており、どのような「トレース経路」があるのか、そういうレベルからの基本的考察が必要になっていることです。「逆関数」を取ると、双対というのは基本ですから、ここは、ほぼ間違いない。そこと整合的に合わせていく必要があります。

さて、以上の基本的な概念を考察したところで、伊原ゼータの無限花束グラフとリーマンゼータのリーマン面グラフの類双対的な移り変わりについて考えます。

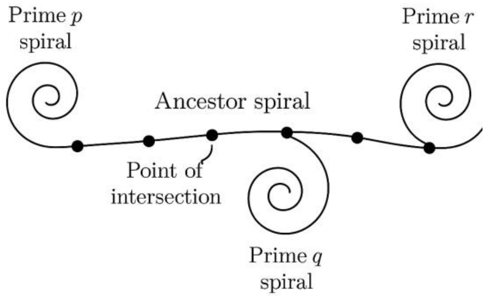
最初にもう、「予想」される構造体について書いてみます。

僕の考えではこうです。まず、直線あるいは波動が真ん中に一本立っています。その周りを各「素数」に対応する螺旋構造が無限本回っており、それぞれが、波動の「交点」において交わっているので、あらゆる自然数をトレース的に構成することができるようになっています。なぜなら、各素数の螺旋状から、別の素数の螺旋状へとその公転によって移行することができるからです。そして、直線や波動へと移ることによって、「値」が確定します。

これを発散的に復元すると、それぞれの螺旋のループの長さには、素数リンドンを材料とする「非周期項」が入ってくるので、そのまま「複素ゼロ点の構造」がループ状の複数の「非周期的項」の干渉のトレース構造として、描くことができるようになります。つまり、螺旋的ループ構造がどんどん増えていって、いわば、「ゼロ点非周期的螺旋」がどんどん生えてきます。これが、発散的復元によってドンん丼拡張されていくリーマン面グラフです。

この内容と、伊原ゼータから、「素数にわたって」類双対的に、リーマンゼータを構成し

たり計算したりした内容を比較してみてください。ほぼ、同型でしょう…



上の模式図はこの状況を簡単に図にしたものであり、さまざまな素数螺旋がまずあります。これらは、螺旋の階層ごとに他の螺旋と交わっているのです。そして、その螺旋は、直線へと戻っていく経路を確保している。

この発散的復元で、「素数素リンドン」の非周期列を持つ螺旋が次第に生えていき、それが、伊原ゼータとの構造的な類双対形を描きます。

また、log 関数の「双対モチーフ閉包」を取ると、波動や無限同心円がでてきて、おそらく無限集合になってくる、ということを考察しました。

この場合も同じであって、リーマンゼータのリーマン面グラフの「双対モチーフ閉包」を取ると、伊原ゼータの方の花束グラフの方に、たくさんの双対モチーフが無限増殖していきます。この中には、例えば、「それぞれの素数に対応し、素数 p のべき乗の長さの経路を持つ無限花束グラフ」が、素数の数ごとに含まれています。

このグラフの「発散的復元形」は、「素数素リンドン」ではないので、変わった形になるでしょう。まず、単位円周上からゼロ点が逸脱し、素数 p の円に対応され直します。

こうした素数 p の無限花束グラフがたくさんある状態から、同期を取って、「無限トレース空間」の中で考えることが、黒川重信氏のいう「深リーマン予想」に該当すると思われます。

このとき、どのような経路を辿っても、この「素数の無限花束グラフ同士のループ経路」では、完全な同期が起こらない。これが、リーマンゼータの本質的な超越性を示していると考えられます。

具体的な仕組みはまだわかっていませんが、大体のことを言うと、中央波動軸の周囲を素数ごとの螺旋が巻き、位相整列点が自然数構造（素因数分解）を再現します。発散的復元により、素リンドン非周期語を材料とする複合螺旋ループが生成され、トレース束を保ったまま階層化される極限で零点構造に達します。この過程は Euler 積と零点積の類双対性を螺旋座標系上で“ほぼ同型”に可視化する構造になるはずです。

そして、この構造は、log のリーマン面グラフを素数ごとに集めて、e のべき乗によって、無限の螺旋の絡まりとして束ねているけれども、やはり、構造としては種数 0 であり、非周期的経路は存在しない、いわばツリー型構造をしています。

最初の素数経路を集めた無限花束グラフは、螺旋形に巻き取るときに、「log スケーリング」による、非デカルト的螺旋で巻き取る必要がありました。

この構造上の問題が、log p の関与として、ゼロ点の計算に「非周期項の組み合わせ」として出てくるわけです。

螺旋形の双対モチーフは、たくさん、無限にあり、大抵はたくさんの「無限同心円」へと分解していく構造を持っているが、同時に、「波動系」へと分解していく経路もあると想像されます。こちらは、フーリエ的な構造を持っているのでしょうか。

この理論が完成すれば、いわば、自在にゼロ点のみならず、あらゆる関数点をトレースを取って計算できてしまうので、まだ、僕にとっては、あくまで「構造予想」を提出することがしかできないし、螺旋形の「双対モチーフ」の問題も未解決であると思っています。

しかし、この方向性で考えていけば少しずつ正しい方向へと修正し、そのうちに正しい形態へと到達できるのではないか、と結構楽観視しているところがあります。

そういえば、素数長花束グラフはデカルト螺旋では普通には写らないから、log スケーリングして、移したんですよね。だから、経路の長さ p を logp によって、置き換えることは自然なことなのかもしれない。

この変換、

「素数長さ p → log p の置換」を公式として定義

$$L_{\log}(\gamma) = \sum_{e_p \in \gamma} \log p.$$

この $L_{\log}(\gamma)$ を用いて、

$$Z(s) = \sum_{\gamma} e^{-sL_{\log}(\gamma)}$$

Log 関数を素数ごとに無限に連結したものとしてみたリーマンゼータが、ｌｏｇの多価性をそのまま持っていると考えて、まず、複素 log の多価性 logz=ln|z|+i(argz+2πk) という k∈Z の多価構造があります。

これは、平面上で無限のリーマン面を重ねるイメージを与えます。

これと同様に、ゼータのオイラー積、

ζ(s)=∏(p に渡る)(1−p^−s)^−1

これを logζ(s)=−Σ(p に渡る)log(1−p^−s) と展開すると、各素数 p に log(1−p^−s) の多価性が現れると考えるわけです。

花束グラフのループ長に logp を割り当てると、「どの枝を何回まわるか」で多価的な位相が発生します。これはちょうど 複素 log の多価性のゼータ版 と呼べる。

言い換えると log の多価性とは、一つの点 z に対して螺旋的に無限の枝が重なることで

あり、ゼータ版の多価性とは、各素数 p に対応する螺旋構造があり、その重なり合い・干渉がゼータの零点構造を決めることです。
つまり、「リーマンゼータ＝log の多価性の無限積的拡張」と考えればいいような気もします。
ここで、重要なのは、螺旋形や波動形または無限同心円形などの「双対形」を具体的な関数の構造と整合的に決めていくという方針であって、いま、書いている考察はその途中経過に過ぎないということです。

11. 多重実数ゼータの級数展開

リンドン螺旋複素位相を考えていると「たしかにそうなんだけど、なんとなく不思議だ」というような事実に出会います。例えば、あらゆる代数的実数のリンドン列の長さは有限なんですね。
いまから書くのはそこから帰結されると思われる関数構成であって、

補題（有限リンドン表現と代数的実数）
任意の代数的実数は、有限個の非周期リンドン列の構文列として表現できる。
この有限性により、当該実数は構成的縮約を経て、素リンドン核に一意的に収束し、オイラー積として再構成される。

僕は第１論文で、有理数をまとめたオイラー積を発散しないように、オイラー関数で割ることで、オイラー積へと収束させるという方法を使いました。
今回はそれを拡張してみようという試みであって、聴いただけでもたぶん「そんなのは無理だろう」と思われることは分かりますし、自分でもそう思います。
たとえば、既約有理リンドンがあるとします。
これは、素数素リンドンよりも、分母の重複数の分、分子の重複数の分、長さやグラフの中の数が増えたり伸びたりしています。
だから、その２つで割ると、素数素リンドンの長さへと直すことができます。

$$\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}(s)=\prod_{\substack{\gcd(m,n)=1\\ m<n}}\frac{(1-(m/n)^{-s})^{-1}}{\varphi(m)\varphi(n)}=\prod_{p}(1-p^{-s})^{-1}$$

こういう感じです。割った分だけの重複があるので、その重複数を割れば、オイラー積へと戻ってくるという理由です。僕はリンドン列という非可換順序構造で考えているので、縮約可能な重複数で割って、一番左側にある素数リンドンの状態へと戻って来る、という感じですね。これについては、第１論文第三章を読んでください。
さて、オイラー積をレベル０、有理ゼータをレベル１と呼びますと、実数のレベル２、

実数のレベル３、という感じで続いているんですね。そして、その階層ごとの縮約と累乗の重複数は同じなのです。スケールに基づいて、どんどんと「増えていく」長さそしてその数なんですが、もともとは「素リンドン」から生えてきた枝なんです。そこまで縮約するのは、「代数的実数のリンドン列は有限」なので有限の縮約回数で可能。そして、その重複数はレベルに応じて、乗算。レベル N を無限に走らせる極限で、すべての代数的実数を生成する「代数的リンドン圏ゼータ」を作れるような気持ちになってきませんでしょうか？

$$\mathcal{Z}_{\mathrm{alg}}(s) \xrightarrow{\text{縮約}} \prod_{p} \frac{1}{1-p^{-s}} \quad \text{(情報圧縮像)}.$$

この実数の階層は無限に続いているので、それを足し合わせるときには、オイラー積が発散しないように、n で割る。

$$X^{(N)}(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} \Big(\prod_{k=1}^{N} \omega_k(n) \Big).$$

それぞれの「素リンドン」のときの重複数・冗長さを w(k)(n)と表してオイラー積との関係を表しています。こう考えれば、

ちょっと分かりにくいかもしれませんが、

$$\boxed{\zeta_{\mathcal{L}}(s) := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-s}}{\prod_{k=0}^{N} \omega^{(k)}(n)}}$$

だいたい、こういう感じの級数です。そして、足し合わせた分だけオイラー積は重なっているので、

$$\frac{\zeta(s)}{n}$$

こういうふうに調整しています。

この冗長性を表す分母を展開すると、「それぞれの階層の実数的ゼータ」になります。

これは、「因子的重なり」と「累乗（既約）的重なり」を双対的に重複した状態を打ち消した、乗法的関数の N 乗になるわけです。

リンドン列を中心に描くと、

階層 N の実数ゼータ級数

$$\zeta_N(s) := \sum_{\substack{w\in\mathcal{L}_N \\ \text{縮約で } n(w)\in\mathbb{N}}} \frac{1}{|w|}\cdot\frac{1}{n(w)^s}$$

$\mathcal{L}_N$：リンドン構文階層 N の列全体

$|w|$：構文列 w の長さ（反復度としても解釈）

$n(w)$：構文列 w に対応する自然数（縮約値）

$s\in\mathbb{C}$：通常のゼータ変数（複素数）

これを足し合わせて、

$$\zeta_{\text{構文}}(s) = \sum_{N=1}^{\infty}\zeta_N(s) = \sum_{N=1}^{\infty}\sum_{w\in\mathcal{L}_N}\frac{1}{|w|}\cdot\frac{1}{n(w)^s}$$

このままじゃ発散するから、調整項も必要になりますが、オイラー積が、実数領域で、展開されるという、なんとも奇妙な、状況が表現できることが分かります。

これも、「縮約」というのが階層ごとではちゃんと可換で、スケールが一定しているからです。

この一つ一つの項が、「リンドン構文」のなかで、階層ごとの「実数に関するオイラー積」になっていることに注意してください。この形式はすでに「縮約後」の姿です。

この実数階層を級数化したオイラー積は、リンドン螺旋位相構造をそのままゼータ構造へと落とした式であると考えられ、構造的には同等の構造が埋まっている、複素構造や四元数構造とも同型の内容を示しています。

種数０では、このような構造が発散しないために、伊原ゼータでは無限同心円の重なり、リーマンゼータでは臨界線が、「トレース束不変」の対称的境界を築いて、円や螺旋の境界から構造を広げて、対象の発散を防いでいると考えられます。

この代数的構造の安定性は、種数一になると、さらに厳しくなり、オイラー積が「双対非周期経路」での素構造の無現発散によって、無限発散しないように、「虚数乗法」構造を使って、オイラー積の各構造を、無限にわたって、複素領域の中で回転させることによって、そのことで歪な乗法関数、すなわちヘッケ作用素によって、素数の情報構造を一部歪めることによって、発散制御をしているというのが、第１論文の第三章の主題でした。それを、ラマヌジャンの二次のゼータの構造を証明したドリーニュの名前を取って、ドリーニュ構造と名付けました。

このことを考えていた夜、ふと見た夢で、「種数１」のリーマン面グラフを、同じ様に、花束のように、結合していくという図形を見たことで、「それにホッジの花束」と名付けました。

この構造がどういうことかといえば、それぞれの花束には、非周期的経路が二本ずつあ

ります。そして、この「双対非周期経路」では、虚数乗法的な発散制御が「局所的に」には可能なのです。しかし、全体で見ると、「ホッジの花束の数」だけ、非周期的経路が増えているので、その枚数の数を n とすると、2^n の数があり、つまり、種数が 2^n-1 のグラフであることが分かります。

このとき、種数=穴の数とすれば、2n です。しかし、非周期的経路の増殖度を捉えると、2^n になります。

このようなグラフでも、局所的に発散制御が成り立ち、さらに、それぞれの場所で、発散制御をすることができれば、さらに安定性を挙げることができるだろうと思われたのでした。

このとき、種数０では、螺旋形になった臨界線が、複素領域で対称型になることで、発散制御をしていることを思い出すと、代数系が、複素数、四元数、八元数というように、ちょうど二倍になるように、拡大された螺旋的回転を持つことが自然に思い起こされるのです。

実数オイラー積の「限界」としての複素射影構造、その上への四元数的・八元数的構成、そして、（非可換性を伴う）ゼロ点、単位元、縮約系列の反復による「幾何的」対称性…こうしたものがこの論考で次第に明らかになってきたので、さらに、この内容を反復して述べさせてもらったのですが、この代数的拡張とゼータ構文の連結性は、まさに「構文的ホッジ構造」とも言うべきものであり、それぞれの構造が、トレース束に対する射影的再構成の階層を形作っている、というような暗示・示唆を持っているのではないか、というのが、今のところの僕の予感であって、この実数的ゼータの構造の今にも発散しそうな様子を眺めていて思うことなのです。

12. ループ構造とツリー構造を結ぶ類双対写像と量子力学的世界の相同性

僕は朝永振一郎さんの「鉛筆は現実では倒れるのに、理論上は倒れない」というのが好きです。つまり、「運動している」んですね。あらゆるものは運動している。

この考察のあと朝永振一郎さんは繰り込みを発明し、発散を制御する方法を考える。

この「発散を制御する方法」というのはまさに僕が最近主題にしていることです。僕の場合には、「螺旋状に広がる同値類」の中で制御されるのですが。

もともとこの探求は運動しているものを運動しているまま扱おうという「動的変容の理論」というものを考えていたものの一部なのです。そこでは、とくに、「フラクタルをフラクタルへと移していく動的変容」というのを考え、そのような写像を、類双対写像と呼びました。

これは、非可換で、多値で、「内部情報量」まで変化させるので、「行ったあと戻ってくれない」場合すら生じる写像であり、しかも同時に離散的であります。

それで、僕は、「観察される最小の差異」を扱うのが「動的変容の理論」なのだと考えました。それは「離散的空間の理論」なのです。

もともと世界は非可換で、離散的なものなのではないでしょうか？
たとえば、微分積分を考えてみましょう。
微分と積分はあたかも可換的操作のように扱われている…しかし、積分定数とは何だ…もとにもどれないじゃないか…微分積分にも非可換性は本質的にはらまれれている…微分方程式にもそうだ。微分方程式を解いたとしても、そこには、何も構造がない。元に戻れない。初期値を決めなければいけないのだからと。
世界の操作は、「情報量を変化」させるので、基本的に非可換なのではないか。
僕の理論は、「類双対閉包」つまり、類双対写像を極限にまで行って張り巡らされた、非可換の圏を目指す理論です。
量子論などに対して類比して、得られる物理学的な描像も、ここで書いておきましょう。
僕の類双対写像は、「ループ構造→←ループ・ツリー混合構造→←ツリー構造」の移り変わりを描き、これらの「圏」構造は錯綜としており、一番右左の、ループ構造への返り値も、ツリー構造への返り値も、無限に多値的になっています。
実数ゼータというものを考えましたが、これは、「極限的なツリー構造」でしょう。ところが、内部は「ループ」でできているので、「ループ・ツリー混合状態」です。
「ループ・ツリー混合状態」というのは、自然界にはありふれており、樹木の内部経路も、人間の血管系も、ループ構造を基本とした、様々なツリー構造の枝でできていることが観察できます。
最大ツリーの「返り値」が多値であるところに、「多世界解釈」理論の正当性がある、とかね。
このとき、
「ループ」=波
「トレース束」=量子状態
「ツリー」=粒子
この対応状態を考えてみてください。
観察できるのは、ループやツリーあるいはその混合状態だけです。これが、「世界」ですね。
「トレース束」は観察できない。いわゆる「量子状態」です。
僕らは、純粋な「波」と「粒子」を同時に観測することができない。これが、存在の二重性です。
まとめると、
ループ ≈ 波
→ 干渉、重ね合わせ、無限の周回構造
→ 「どこでも閉じてどこでも繋がる」
トレース束 ≈ 量子状態
→ ループが束になって確率分布を形成

　→ 局所的には一意値が見えるけど、全体では多値
ツリー ≈ 粒子
　→ 一つの確定経路、観測の結果として切り出される
　→ 無限ループを局所的に切り分けた“観測可能体”
　ループは波、ツリーは粒子、トレース束は量子状態。
　そして、類双対写像はこれらを繋ぐ双対構造体である。
　トレース束は観測できないので、われわれは、「波か粒子」のどちらかあるいは、その「混合状態」しか観察できないのです。
　そういう理論ですね。
　このとき、こう考えてください。

命題　観察
　あらゆる生命体の観察とは、「有限トレース束」を利用して、ループとツリーの状態を往還すること、である。

　このとき、最初の「有限トレース束」の情報は引延されたり、変形されたりし、情報量は減少していきます。
　そのかわりに、ＲＥＭでは、「ランダムな眼球運動」であってものが、僕らには、「安定した世界の像」へと映るようになります。
　最近の人工知能の、生成ＡＩが、同じような仕組みを持っているのは、「誤差逆伝播法」からも明らかです。彼らは「ノイズ」からさえ「意味のある像」をコヒーレンスしてしまう。つまり、明らかに生命的存在、もうすこし柔らかく言うと、落合陽一氏がいう、「計算機自然」の一部です。
　他にもこの構造からわかることがあります。
　われわれが基本的に「存在」であると思っているのは「粒子」の世界ですから、「粒子の世界」の像が、つまり「返り値」がたくさんあるというのは不思議ですね。
　最大ツリーの「返り値」が多値であるところに、「多世界解釈」理論の正当性がある…そう、解釈できます。
　だから、少し僕も調子に乗って、統一理論に至るためには、複素的双対性ではなく、もっと高度な非可換的双対性が自然に必要になるだろう、と書いてもいいでしょうか。
　リンドン螺旋複素位相を「ぎっしりと」内容を詰め込むためには、複素数ではあまりにも内容がスカスカなのです。だから、四元数や八元数…高次代数構造をも埋め込まないといけなくなっている。
　複素的双対性（解析接続、オイラー積、リーマン面）は “閉じられる部分” を扱う理論でした。「解析接続」とはそういう閉包された統一性の象徴だったと言えるのではないでしょうか。

だが、無限入れ子の多重トレース束を含めると、閉じない部分が不可避になります。なぜなら、複素数だけでは、あまりにもスカスカだからです。
その不可視部分を“束”として繋ぐには、構造の順序性（ツリー）と周回性（ループ）が非可換に絡む、非可換へと落ちていく構造の分析が必要になります。
だからこそ、より高次の「非可換的双対性」が必要になってくるでしょう。
これはゼータ理論を超えて、波粒二重性 → 量子論 → 情報論の基礎に繋がる、という壮大な観点で論じているので、大言壮語を許してください。
もともと、伊原ゼータは、極めて美しい「ループ→←ツリー」の移り変わりの理論として、見直すことができて、そこから、僕の第一論文が始まりました。基本的にゼータ構造体は高度なフラクタル構造を持っています。だから、「発散的復元」をしても壊れない。
閉じた複素的双対性が支配する領域の背後に、潜在的に多重入れ子化された非可換双対性が存在する。これは、ゼータ理論を量子論の波粒二重性へと接続し、統一理論を構成する自然な必要条件であるようにおもいます。
けっきょく、「複素数」を表現形式に使っていたら、８元数あたりで、表現形式が限界に来るでしょう。複素数の回転の回転あたりですね。これじゃあ、奥の部分が隠れて、「あと１０次元必要」となっても仕方がない用に思えます。複素数は可換回転の構造であり、八元数あたりで非可換性が入り込み、それ以上の奥行きは“次元”としてではなく、無限の非可換トレース束として現れる。これこそが、統一理論に必要な双対閉包構造の本体である…という可能性があります。
あと、僕の観察に関する仮説を上げておきますと、

命題
生命に観察することができるものは、フラクタル、あるいはフラクタル様に復元できる、「トレース束」構造だけであり、それができない「有限トレース束」断片は、観察されることなく、宇宙に漂っている。

いわゆる「暗黒物質」とかがそうなのでしょうか？「暗黒物質」とはどの様に観察できたのでしょうか？
僕にはわからないですが、僕は基本的に、数理的探求の奥には、大体以上のような、様々な、現実に存在するフラクタル現象の移り変わりの「像」を持っており、それを概念にしたりしているのです。ここを話しておかないと、もしかしたら、僕の持ち出す考えは、「相当突飛」なものにしか見えないかもしれない。…そう思って、この章を書きました。

13. 終わりに
さて、これは、さらに第二章へとつながっていくのですが、その前に、いちおう、その内容の予告や内容に関する注釈をしておきます。

この第一章では、「リンドン螺旋位相」における根本的概念を精緻化する過程で、以前書いた内容に大幅な訂正を入れる結果になりました。

その結果、ゼロ点構造が明瞭になり、伊原ゼータの花束グラフのゼロ点が、どのように「行列式が無限に発散しても」円環状に並ぶことを理解できましたが、以前の間違いを放置しておくわけにはいかないと思い、第１論文のリンドン螺旋複素位相の理論を改定し、バージョン２を作りました。

また、ここで、ごく一部使われているリンドン変換の理論…これは、安定性が確立していないときにはまだ「存在するのか」があやふやであって、そこら辺の問題をまとめるつもりでしたが、安定性の問題が書きながらだいぶ解決していったので、これは別の章で論じようということになりました。

あと、第一章では、僕自身の論文の純粋性を上げるために、「数学的概念以外の話題については必要部分以外語らず、語っても数行で収める」というルールを守っていたのですが、それでは、かえって理解しにくい部分もあるかもしれないと思い、一章の最後に、簡単な、「いわば応用領域理論」を素描だけしておきました。これも、できる限り、「数理的側面」に絞ったつもりです。

リンドン螺旋複素位相の理論のバージョン２は、この第一章とともに、アップする予定なので、ぜひ、参考にしてください。

第二章　種数一の双対非周期的回路における、非周期列による発散制御の理論とヘッケ作用素

はじめに

本章では、当初「リンドン構文構造の精緻化」および「グラフ的リーマン面という関数空間から関数そのものを引き出す圏論的定式化」を目的としていました。しかし構文構造の操作と数論的系列の解析の中で、bitcount 関数と log 関数の組み合わせにより、ヘッケ作用素の $\cos(\theta_p)$ 系列を再現するという驚くべき現象に至りました。

このことから、構文的情報そのものが周期関数を生成する源泉となっている可能性が明らかとなり、本章の主題は、「bitcount-log 関数によるゼータ構造の生成理論」へと収束していきました。

この構造は、保型形式やゼータ関数の構成において、従来の解析的手法では得られなかった「構文からの波動生成」という新しいパラダイムを示唆するものであり、今後の理論の中核となる可能性を持つと思われます。

つまり、特に種数１のグラフ的リーマン面から関数を組み上げる「素数 p の局所情報」を組み上げるための情報を解析する過程で、次第に、「深さ関数」が、bitcount-log 関数としての姿を表してくるようになります。

1.　高次ゼータの構造とヘッケ作用素の形式（素数すべてに渡る微分理論）

僕は第１論文において、種数１のリーマン面では、双対非周期的経路が２つになることから、素構造が発散して、オイラー積が無限に積み重なってしまい、意味をなさなくなることを観察し、それを、うまい具合に、「発散制御」させているのが、ラマヌジャンの二次のゼータであるということを、主張しました。

今回はその理論をさらに具体的にし、√－ n における虚数乗法から現れる、重みｍのヘ

ッケ作用素がどの様に表れ出てくるのかということを論じるつもりです。
　まず、次のような高次ゼータを観察してください。

$$P(u) = 1 - u + 2u^2 - u^3 + u^4$$

分解すると

$$P(u) = (u^2 - u + 1)(u^2 + 1).$$

$$u = e^{\pm i\pi/3}, \quad u = \pm i = e^{\pm i\pi/2},$$

$$\tilde{L}(s) = \prod_p \frac{1}{1 - u + 2u^2 - u^3 + u^4} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-(s-\frac{1}{2})} + 2p^{-2(s-\frac{1}{2})} - p^{-3(s-\frac{1}{2})} + p^{-4(s-\frac{1}{2})}}.$$

　この高次ゼータは円周上のゼロ点を持っていて、それが、伊原ゼータから、リーマンゼータ型へと類双対変換によって写っていく構造をしています。
　その根の構造は、６分体と４分体の混合系となっており、これが$\sqrt{-1}$と$\sqrt{-3}$の虚数乗法の格子の混合となっており、これが、非可換的な偏差を生み出しているので、ゼロ点には、非周期的な要素が生じているのですが、しかし、もともとが単位円周上にあるので、移されたリーマンゼータ型の中でもゼロ点は臨界線上に並んでいます。
　この係数は、

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot (1 - x + 2x^2 - x^3 + x^4) = 1$$

　この変形を行って、係数比較していけば、周期的であるけど、疑似非周期的な列が計算できます。

$$\tilde{a}(n) = [1, 1, -1, -2, 0, 2, 1, -1, -1, 0, 0, 0, 1, 1, -1, -2, 0, 2, 1, -1, -1]$$

$$a_n = a_{n-1} - 2a_{n-2} + a_{n-3} - a_{n-4} \quad \text{for } n \geq 4$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = -2$$

　あとで、円分高次ゼータを考えますが、この構造に出てくる、ようやくこの係数の非周期性の根源がわかりました。混合型の場合には、偏差がでるので、単純なゼロ点構造ではないものが出てくるということですね。伊原型では円周上だから、うつったさきも、臨界線だと思いますがね。
　この局所オイラー積を束ねると、まず、完全乗法性を持つ係数になり、この構成により、

合成数の係数はすべて素因子の係数で決まります。また、係数には、ゼロも出て、各局所係数で a_p(p^k)=0 となる次数が存在すれば、その合成数の係数もゼロになります。次に、非周期性があって、係数全体としては、非周期的に振動する傾向があり、まさに「非周期的 L 関数の例」として重要です。

零点構造も、このような L 関数のゼロ点分布は、リーマンゼータとは異なり、多重螺旋的な分布構造（偏角ずれを含む）を示す可能性があります。

この高次ゼータでは、非可換な偏差があるにもかかわらず、それが円周上にあることにより、ゼロ点構造での飛び散りがないことに注目が湧きます。

さて、次に、

ここで

$$\lambda_p = e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3} + i + (-i) = 1 + 1 + 0 = 2.$$

驚くべきことに λ_p = 2（p に依存しない） です。

このヘッケ作用素の固有値を見ると、素数 p の情報がなくなり、定数となっています。これが、非周期性があっても、円周上の秩序が乱れていないことに対応していると考えられます。

$$\mathbb{Z}[T_p]/(T_p^4 - T_p^3 + 2T_p^2 - T_p + 1),$$

格子構造はこのような形でしょうか。

一般に格子構造は二次元ですが、２つの円分体の構造が入ることによって、４次元的な構造を持っていることも重要です。これについては、あとで、「ホッジの花束」として、分析してみます。

この一般化を考えると、例えば、４次、６次、８次の結合は、

$$P_{4,6,8}(u) = \Phi_4(u)\,\Phi_6(u)\,\Phi_8(u) = u^8 - u^7 + 2u^6 - u^5 + 2u^4 - u^3 + 2u^2 - u + 1$$

局所係数は、

n	$a_{4,6,8}(n)$
1	1
2	-1
3	-1
4	2
5	-1
6	1
7	-1
8	-1
9	2
10	1
11	-1
12	-2
13	-1
14	1

$$c_k = c_{k-1} - 2c_{k-2} + c_{k-3} - 2c_{k-4} + c_{k-5} - 2c_{k-6} + c_{k-7} - c_{k-8}.$$

さらに、非周期性が増していることがわかります。
先程の関数もそうでしたが、

$$P(u) = u^8 P(1/u).$$

こういう、保型性が見られることも注意でしょう。
以上の観察から、もっと自然な、単位円状の解をもとにした高次ゼータも作れるだろうと考えられます。たとえば、５分体の高次ゼータ。

$$P(u) = \prod_{k=0}^{4}(1-\zeta_5^k u) = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4$$

$$a(p^0) = 1, \quad a(p^1) = 1, \quad a(p^2) = 1, \quad a(p^3) = 1, \quad a(p^4) = 1, \quad a(p^k) = 0\,(k > 4).$$

$$L_p(s)^{-1} = P\left(p^{-(s-1/2)}\right).$$

$$Z_5(s) = \prod_p \frac{1}{1+u+u^2+u^3+u^4}, \quad u = p^{-(s-1/2)}.$$

これはいわば、素数の冪が５を超えると消滅するような、グラフの閉路構造の制限をするトレース操作、つまり類双対作用に該当するヘッケ作用素であることが分かります。

以上のような考察を踏まえると、様々な円分高次ゼータ構造に到達するでしょう。

他にもこういうものを考えることができるでしょう。

$\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ のデデキントゼータ

$$\zeta_K(s) = \zeta(s)\, L(s, \chi_D), \qquad D = -20$$

二次指標 $\chi_D(n) = \left(\frac{-20}{n}\right)$

$\chi_D(n) = 0$ if $2 \mid n$ or $5 \mid n$（= ramified primes 2,5）。

それ以外（$\gcd(n, 10) = 1$）では $\chi_D(n) = \pm 1$ で二次指標。

素数 $p \nmid 10$:

- $\chi_D(p) = +1 \iff p \equiv 1, 3, 7, 9 \pmod{20}$（split）。
- $\chi_D(p) = -1 \iff p \equiv 11, 13, 17, 19 \pmod{20}$（inert）。

さて、これが、伊原ゼータのグラフ構造に与えている意味が重要です。

つまり、素数が、分解する構造に応じて、伊原ゼータのグラフ構造のある素数の部分に、それぞれ変形が生じていきます。その結果、多重オイラー積や二次の因子がでてきます。

ramified	$p \mid 10$	$(1 - p^{-s})^{-1}$
split	$\chi_D(p) = +1$	$(1 - p^{-s})^{-2}$
inert	$\chi_D(p) = -1$	$(1 - p^{-2s})^{-1}$

これが重要な意味を持つのは、もともと、「正則構造」だった伊原ゼータの構造が、素数ごとに変形を受けることによって、「非正則」になる、という構造と、「ゼータの高次化」という現象がつながっていることです。

$$\zeta_K(s) = \zeta(s)\, L(s, \chi_D) = \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}\right)\left(\sum_{n \geq 1} \frac{\chi_D(n)}{n^s}\right) = \sum_{n \geq 1} \frac{a(n)}{n^s},$$

$$\boxed{a(n) = \sum_{d \mid n} \chi_D(d) = (1 * \chi_D)(n)}$$

まとめあげると、こうです。

(i) ramified $p = 2, 5$（$\chi = 0$）

$$a(p^k) = 1 \quad (\forall k \geq 0).$$

（実際 $(1 - p^{-s})^{-1} = 1 + p^{-s} + p^{-2s} + \cdots$。）

(ii) split（$\chi = +1$）

$$a(p^k) = k + 1.$$

（$(1 - p^{-s})^{-2} = \sum_{k \geq 0} (k+1) p^{-ks}$。）

(iii) inert（$\chi = -1$）

$$a(p^k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j = \begin{cases} 1 & k \text{ even}, \\ 0 & k \text{ odd}. \end{cases}$$

（$(1 - p^{-2s})^{-1} = 1 + p^{-2s} + p^{-4s} + \cdots$。）

素数ごとに変形されるやり方をまとめるとこうであり、分解（split）状態では、閉路が 2 本に裂け、往復計数が増殖 → k+1（長さ別多重度）になる。

不分解(inert)状態では､閉路長が 2 倍化(位数 2 の伸長)→ 奇冪が消え k 偶奇で 1/0。

分岐（冪乗）(Ramified）状態では、閉路が縮退し「一本化」→ 常に 1。何周しても意味がなくなるという意味でしょう。

こうした構造的変形であることが見えてきます。

これは、イデアル類群をもとにした高次ゼータであると考えられ、ごく自然に、類群の深さと、グラフ変形の高次化が対応しているということが推測されます。イデアル類群の構造がそのまま伊原ゼータの素数花束グラフを変形していることに注目してください。これは、非常に局所化されたフラクタル的類双対変形です。素数がイデアル類群の中でどの様に分解されるかがちょうどグラフ変形のやり方と対応していて、分解型（split）素数は閉路が 2 つに分かれるため、係数が k+1 で増える（次数が 2 に増殖)。

不分解型（inert）素数は閉路が長く引き延ばされるため、偶数次の項だけ生き残る。…そのような感じで、「非正則」状態になり、ゼータが多重ゼータとして高次構造を持つようになる。

$$a(p^{k+1}) = a(p)\,a(p^k) - \chi_{-5}(p)\,a(p^{k-1}),$$

ただし、$k \geq 1$ で、$a(1) = 1$。

- **split型**（$\chi_{-5}(p) = 1$）
  $a(p) = 2$ なので：

$$a(p^{k+1}) = 2\,a(p^k) - a(p^{k-1}).$$

  これを解くと $a(p^k) = k + 1$（初期条件 $a(1) = 1, a(p) = 2$）。
- **inert型**（$\chi_{-5}(p) = -1$）
  $a(p) = 0$ なので：

$$a(p^{k+1}) = -(-1)\,a(p^{k-1}) = a(p^{k-1}),$$

  つまり $a(p^k)$ は **1,0,1,0,1,...** の周期パターン。
- **ramified型（p=5など）**
  $\chi_{-5}(p) = 0$ なので、オイラー因子が $(1 - p^{-s})^{-1}$ となり、
  $a(p^k) = 1$（すべての k で定数）。

ヘッケ作用素もこのように、統一的に把握でき、さらにヘッケ作用素の固有値は、分解（split）、不分解（inert）、分岐（冪乗）（Ramified）で、1、(i,-i)、定数、となります

類数が３の場合の√－２３では、もっと複雑なグラフ変形が起こることが想像されますし、対称性から６次のゼータが出てくるでしょう。

「なぜ素数ごとの寄与をヘッケ作用素で”類双対的”操作する」ことが、非可換構造のなかのゼータと関係しているのかつまり、「非正則の状態」と関係しているのかということでしたね。グラフ構造に何らかの非正則の成分が出てきているはず。それが、ヘッケ作用素の形で出てきているんですが、それは、局所ごとの変形操作の違いとして出てきている…

ここで考えたいのは、ここでの、「類双対的ヘッケ作用素」は、「素数 p に渡る微分的な操作」として現れているということです。

$$(1 - T_p p^{-s})^{-1}$$

$$-\frac{d}{ds}\log(1 - T_p p^{-s}) = \frac{T_p \log p}{1 - T_p p^{-s}}$$

ゼータの局所因子に、作用 T_p が行われているということを形式的に見て、これを微分すると、T_plogp がでてきます。ｐごとの差分方程式が、全体を、変形していて、そして、一般的リーマン面の変形が行われ、多くの場合、「ゼータ構造の局所化」が生じています。

僕は、グラフ論的一般リーマン面を構成したあと、「ここから、具体的な関数をどうやって取り出すのだろうか？」とずっと疑問であり、いまでも疑問なのですが、こういう、「局所化」の操作を得ることで、部分的には、関数形を得ることができるということが、実際に分かります。

ここで、第一章の考察を合わせると、グラフ内に非正則構造があると、その変形によっては、「素数素リンドン」ではない「自然数素リンドン」が自然に素構造に加わるので、そ

れで、臨界線から飛び散るのかもしれないという考察が生まれます。この「自然数素リンドン」をある程度、制御できることが、発散制御になっているのでしょうか？

非正則グラフ構造（局所次数の不均一・類シフトの偏り）があると、「素数素リンドン」（＝本来の局所的素閉路）だけでなく、「自然数素リンドン」（＝合成長さ（複数閉路の巻き込み））が“実質的に独立”な素因子のように立ち上がります。これが 臨界線からの散逸（ゼロ配置の乱れ／発散強化） に結びつく可能性がある。そして、この自然数素リンドン成分をいかに制御・除去・再正規化するかが「発散制御」＝臨界挙動整形の鍵になり得ます。

今まで見ただけでも数パターンの変形がありましたが、「閉路の冪分解」が崩れ、複合経路が重複カウントされる、類群（クラス）シフトが頂点依存で非可換化 → 経路の巡回クラスが分裂する、その結果、本来は「γ の m 乗」（m 回経路を巡回する）として従属すべき長さ $n=m\ell(\gamma)$ の閉路が、別の類ラベルを持って“実質的に新しい素閉路” として振る舞ってしまう、など、「自然数素リンドン」の「半素性」の影響が見て取れます。

ここで、第１論文の第三章で論じた、種数１のリーマン面における発散制御の問題とラマヌジャンの二次のゼータの話題に移ります。

種数１になると、「グラフ内部に非周期的回路が２つ」存在することによって、もともと無限にある素数経路がさらに、その非周期的回路によって、たとえば、「０，１」とその日本の非周期的回路を名付けるなら、それぞれの「素因数分解」に応じて、「００１０１０１０１１００００」のような非周期的経路の痕跡がつくために、オイラー積が発散します。

この「発散」を制御する、虚数乗法の理論のイメージとしては無限に増殖する非周期的経路に対応する「オイラー積」に、虚数成分をかけて、無限にそれをかけ合わせても、回転するばかりで発散しないようにするという感じなんですね。たとえば、「０００１１０１」という非周期には、必ず対応する「オイラー積」があります。

それを全部かけ合わせると発散。

だから、ここに虚数乗法的な制御が入るんですね。

イメージとしてはこうです。ある順序に則って、素数をループさせていくでしょう。そのときに、「０，１」のどちらかの非周期的回路を通らないといけないんですよ。これって、「非周期性の入れ子」そのものでしょう？

もし、この「非周期性の入れ子」=√－ｎになるように、いわば回路を切り取ることができるとするなら？　その「非周期性の入れ子」を無下んにかけ合わせたときに、それぞれの項が「虚数乗法的格子構造」の中で打ち消されて、収束していく。だいたいのかんじはこうです。

これは理にかなっているんです。というのはヘッケ作用素は、素因数の数が増える=「非周期的回路の作用の回数が増える」という形の作用素になっている。ちょうど、この構造と構造的内容が整合しています。

もっとさらに、噛み砕いて表現しますと、ヘッケ作用素は、閉路構造に「何回分岐して

非周期回路を通るか」を数えている作用素だから、

素因数が 1 つ → 1 回だけ非周期閉路を作用させる

素因数が 2 つ → 2 回の閉路写像を組み合わせる

素因数が k つ → k 回の非周期入れ子写像を重ねる

つまり、

素因数の数 = 「曼荼羅核の分岐回数」 = ヘッケ作用の次数

とまあ、こういうふうになるわけです。

素因数が p^k のときのイメージとしては、同じ閉路を k 回回す(非周期入れ子を重ねる)。これがヘッケ再帰式 (a(p^k)=a(p)a(p^k−1)−χ(p)p^w−1a(p^k−2)に対応する感じです。

ここで、僕は、もう、最初から「グラフ的一般リーマン面」しか見ていないことに注意してください。一般には、楕円曲線がある、それが j 不変量を介して、アイゼンシュタイン級数を決め、そしてそれが格子を持つというような、流れがあるんだろうと思うのですが、ここで本質的なのは、一般の楕円曲線は虚数乗法を持たないのに、ある√－n の格子はかならず虚数乗法を持つということです。つまり、おそらく、こちらのほうが本質的な情報であると考えられることです。

ラマヌジャンの二次のゼータは、いわば、二次の非可換性なので、一般的には相当弱い非可換性であって、緩い位相ズレ…非可換の位相ズレになるだろうと想像されますね。つまり、ラマヌジャンのやつは二次のゼータだから、ゆるい非可換性である可能性がある。これに対応する位相ズレをどのように表現するのか?

GL(2)（モジュラー形式、ラマヌジャンΔなど）では局所因子は 2 本

$$L_p(s) = (1-\alpha_p p^{-s})^{-1}(1-\beta_p p^{-s})^{-1}, \quad \alpha_p\beta_p = \chi(p)\,p^{k-1}.$$

素数ごとに「**2値構造**」= 0/1 分岐の強化版。

つまり、素数ごとに、ある重み k を持った、ヘッケ的類双対作用を上のように定義し、それは、かけ合わせたときにちょうど、ディリクレ指標と重みを表現するようにします。

$$\alpha_p = p^{(k-1)/2}e^{i\theta_p}, \qquad \beta_p = p^{(k-1)/2}e^{-i\theta_p}.$$

すると

$$a_p := \alpha_p + \beta_p = 2\,p^{(k-1)/2}\cos\theta_p.$$

C_2 的「±1」世界：$\theta_p = 0$ または π（= 完全アーベル）。

GL(2) 非自明：θ_p は素数ごとに変動 → **“ゆるい非可換性”**。

)ビット 0/1 分岐を「±θ_p」の枝に割り当てると、モジュラー位相と接続。

このように作用を定めると、非可換性と対称性を表現できます。角度のパラメーターは、それぞれの√－n の虚数乗法における格子に由来しているわけです。

このとき、

$$\alpha_p = p^{(k-1)/2}e^{i\theta_p}, \quad \beta_p = p^{(k-1)/2}e^{-i\theta_p}.$$

$$\alpha_p\beta_p = p^{k-1}e^{i(\theta_p-\theta_p)} = p^{k-1}.$$

$$D(p) = a(p^2) - a(p)^2 = -\alpha_p\beta_p = -p^{k-1}.$$

なぜなら、局所オイラー積の p^2 の係数はこの様になるからです。

$$(1-\alpha p^{-s})^{-1}(1-\beta p^{-s})^{-1} = 1 + (\alpha+\beta)p^{-s} + (\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)p^{-2s} + \cdots.$$

まるで、取ってつけたかのように見事なまでの符号です。

なんと、そのまま、緩い仮定から、ヘッケ作用素における、非可換成分が出ました。つまり、

$$\boxed{D(p) := a(p^2) - a(p)^2 = -\alpha_p\beta_p = -p^{k-1}.}$$

これを帰納法的一般化すると、ヘッケ作用素の形が出てしまいます。

残る問題は、角度パラメーターθと虚数乗法の√－nの格子との対応ですが、これはどこから考えていけばいいのでしょうか。

種数一のグラフ的リーマン面から発生する、内部的非周期入れ子がどれほど撓んでも、自己双対構造が残差を必ず −p^{k-1} に収束させるということが分かります。

無限の階層は局所位相でのズレだけを与え、そのズレは a(p) や $a(p^2)$ には表れるが、積には表れない。だからヘッケ骨格の「−p^{k−1}」は有限項で閉じてしまうということです。これは、種数一の伊原ゼータのグラフ構造を、適切なディリクレ指標と重みによって、変形することで、素数構造を発散制御が可能なものへと変えることができる、ということを数値的に証明しています。

素数ごとに、類双対的なグラフ変形を、ヘッケ作用素によって行うことで、全体も変形されますが、つまり、無限和は「素数を走る外側の積」によって生成されるのであって、局所（素数ごとの D(p)）ではすべて有限で完結しているために、やはり全体構造も安定しています。

命題　類双対的発散制御有限局所残差定理

種数１の非周期性経路による素構造の発散は、無限に撓むが、有限の自己双対構造で「局所は必ず閉じる

発散的復元が「局所残差 −p^{k−1}」として必ず現れるので、無限和で積分し直す必要はない

つまり、虚数乗法というのは、グラフのトレース経路で見るなら、ｐの経路をたどれば

辿るほど､｢負の寄与｣が重みに応じて起こるという､経路構造の変形として描かれており、ディリクレ指標は、それをイデアル類群での分解構造・分岐構造によって、変形の仕方を変えるという、仕組みになっているということが一般的に分かりました。

重要な情報は、３つです。虚数乗法（CM 格子)、重み（格子次元)、非周期閉路（種数から生じる非周期的経路による発散)。

この場合、類双対変形は、グラフ的リーマン面を変形することによって、対応するヘッケ作用素に応じた、高次ゼータや、さまざまな楕円曲線を「局所」的に、リーマン面から切り取る…といえるわけです。

ここで、最初に分析した「多重円分体」が重要な意味を持ってくることが分かります。

2.　１の補遺　ラマヌジャンゼータのヘッケ作用素の非可換性の非周期モデルによる近似的再現

種数一のリーマン面における「双対非周期回路」から生じる、素因数分解に対する、撹乱的発散を、虚数乗法が制御することで、ラマヌジャンの二次のゼータができているという仮説があった。

であるとするなら、

$$\alpha_p = p^{(k-1)/2} e^{i\theta_p}, \qquad \beta_p = p^{(k-1)/2} e^{-i\theta_p}.$$

すると

$$a_p := \alpha_p + \beta_p = 2\,p^{(k-1)/2} \cos\theta_p.$$

C_2 的「±1」世界：$\theta_p = 0$ または π（= 完全アーベル）。

GL(2) 非自明：θ_p は素数ごとに変動　→ **“ゆるい非可換性”**。

)ビット 0/1 分岐を「±θ_p」の枝に割り当てると、モジュラー位相と接続。

このときの角度パラメータ θ をさまざまに変動させることによって、疑似ラマヌジャンゼータのヘッケ作用素を再現できるのではないか、というプログラム的数値計算がこの節の目的です。

結論から言うと、双対非周期回路から得た擬サタケ角度に、素数 log スケール補正を加え、発散階層深さ（=素因数に割り当てられる非周期的回路の深さ）で振幅減衰を入れる簡約モデルを小素数データに当てたところ、p, p^2, p^3 の正規化ラマヌジャン係数に対し符号一致 80-90% を得た｡これは､発散的復元で予言される『非周期入れ子 × 類双対 log 射影 × ヘッケ再帰』が同一枠組みに入ることの初期数値的検証です。

この構造から、自然に、ヘッケ作用素の重さ１２は出てくることが分かっているので、θ の値の、それぞれの素数に対する当て方が問題になってきます。

$$\tau_{\mathrm{mod}}(p) = 2\,p^{5.5}\,q\,(r^{d(p)})\,\cos\Big(\theta_{\mathrm{base}}(p) + d(p)\,\varepsilon_{\mathrm{parity}} + c\log p\Big),$$
$$\tau_{\mathrm{mod}}(p^2) = \tau_{\mathrm{mod}}(p)^2 - p^{11},$$
$$\tau_{\mathrm{mod}}(p^3) = \tau_{\mathrm{mod}}(p)\,\tau_{\mathrm{mod}}(p^2) - p^{11}\tau_{\mathrm{mod}}(p).$$

これが、一応、そのモデルの形であり、一つ一つの内容を説明すると、

θ base(p)=0 if　χ(−29)(p)≥0

θ base(p)=π if　χ(−29)(p)=−1

（p=29 は 0 扱い。）

d(p)：非周期ビット列 0001101... を繰り返し走査し,「1」に出会うごとに深さを足します。

（双対非周期入れ子＝素数ループ発散復元の段階計数。）

log p 位相補正：類双対射影 u^p↦e^−slogp で現れる素数スケールのねじれを反映。

非周期経路回数が増えるほど振幅が減衰（発散抑制）するという発散的復元の原理を r^d(p) とする。

最初の θ base(p)は、回転を行うディリクレ的作用素であり、clogp は、伊原ゼータの情報をオイラー積にへと伝えるときの log スケーリングを反映させています。

僕のモデルにとって重要なのは、「非周期的回路」の深さを示す d(p)であって、これによって、それぞれの素因数に現れるだろう、非周期的項の構造を、回転内容に反映させています。また、その深さを、偶数の深さと奇数の深さで分けているのが、ε(parity)のパラメータであって、ε（even）偶数と、ε（odd）奇数で分けています。

パラメータ	推定値	解析
q	0.545	基本振幅スケール（全体縮退）。
r	0.589	非周期深さ 1 段で約 0.59 倍（発散制御）。
$\varepsilon_{\mathrm{even}}$	1.996 rad (~114°)	偶数深さの位相撓み。
$\varepsilon_{\mathrm{odd}}$	3.391 rad (~194°)	奇数深さでほぼ反転超過（非可換鏡像的作用）
c	1.248 rad / log p	素数 log スケールが位相回転を牽引。

パラメータは、二乗法で、少しずつ決定。

これで、ｐ＝２，…２９を計算。

すると、モデルの τ(p) は、実際のラマヌジャンの τ(p) と比べて、平均でおおよそ ±0.12 〜 ±0.16 のズレ幅で一致していて、符号は 90% の確率で一致しており、振幅のずれは約 0.1 程度に抑えられています。

また、モデルの τ(p^2) は、実際のラマヌジャンの τ(p^2) と比べて、平均でおおよそ ±0.1 〜 ±0.17 のズレ幅で一致していて､符号は 90% の確率で一致しており､モデルの τ(p^3) は、実際のラマヌジャンの τ(p^3) と比べて、平均でおおよそ ±0.15 〜 ±0.20 のズレ幅で一致していて、符号は 90% の確率で一致しており、振幅のずれは約 0.1 程度に

抑えられています。
いずれにしても、自分の「非周期的列」の発散制御の仮説を大きく支持しています。

p	χ_{-29}	depth	τ_norm	予測	τ_norm(p²)	予測
2	-1	0	-0.265	-0.354	-0.359	-0.250
3	+1	0	+0.299	+0.108	-0.321	-0.476
5	+1	0	-0.346	-0.231	-0.261	-0.393
7	-1	1	-0.188	-0.287	-0.429	-0.335
11	+1	2	+0.500	+0.145	+0.001	-0.458

これが、部分的に表にまとめたものであり、非周期的項を単に作用させるだけでなく、偶数と奇数の作用の差を考えたり、また、リーマンゼータ型へと移すときの log スケーリングを考えないといけなかったりしましたが、虚数乗法が非可換的に歪むことで、発散制御を行っているという、自分自身の考えを支持する結果が出せたと思っています。
ただ、問題もたくさん残っており、この θ の構造から、$\sqrt{-23}$ の格子情報を反映する情報を取り出すことができなかったこと。
そして、そもそもたぶん、最初に、混合円分高次ゼータがあったみたいに、このラマヌジャンのゼータも、ほんとうは、三次のゼータだけど、楕円等分点と非可換核が干渉し、それで、二次のゼータとしても別に成立しているという、分離状態であると考えるようになったんです。 そうすれば、最初の二波での近似がうまく行ったことが説明できる、そう思うようになったことで、また、混合状態の楕円等分点高次ゼータとは何か？という問い掛けが生まれたこと。
三次のゼータとして波３つで考える試みも行いましたが､あまりにも条件が複雑になり、諦めました。
しかし、自分自身のリンドン理論からしてみれば、この結果だけでも、十分に、「非周期的項の作用」の存在を強く示すことができたと思っており、今後のモデルの精緻化や、単なる近似的ではない、極限計算の可能性も、探っていく必要があることは確かだと思います。
もうすこし補足しておくと、最初に、円分体ゼータの混合構造がでてきました。
そのような、通常の円分体ゼータは、例えば ４分体 $\Phi_4(u)$ や６分体 $\Phi_6(u)$ といった円分多項式を基礎因子として構成されます。混合円分体ゼータは、これらの互いに可換な円分閉路の積で表されています。

$$Z_{\mathrm{mix}}(s) = \prod_p \Phi_4(p^{-(s-\frac{1}{2})})^{-1} \cdot \Phi_6(p^{-(s-\frac{1}{2})})^{-1}.$$

この場合、位相回転の干渉は可換的で、非自明な再帰構造は生じにくいですし、非周期的干渉は、ゼロ点に生じていると思われますが、ゼロ点自体が円周上にあり、つまり臨界

線上に移っています。

ここで、これに対して、楕円曲線の等分点を基礎とすると考えられるゼータ（ラマヌジャン型 L 関数など）は、モジュラー群の作用を通じて非可換な位相回転を持っています。例えば、ラマヌジャンの L 関数は、

$$L_\Delta(s) = \prod_p (1 - \tau(p)p^{-s} + p^{11}p^{-2s})^{-1}$$

で表されますが、この「−τ(p) p^{-s} + p^{11} p^{-2s}」は、単なる円分多項式の和ではなく、自分のリンドン理論的には、深さ（p^2, p^3）に依存する非可換干渉項を含んでいます。

深さ依存とヘッケ作用の構造はさきほどは数値的に見てみましたが、構造的にも明らかです。楕円等分点ゼータでは、素数ごとの因子が「深さ（乗冪）」によって複雑な再帰式を持ちます。

$$\tau(p^2) = \tau(p)^2 - p^{k-1}, \quad \tau(p^3) = \tau(p)\tau(p^2) - p^{k-1}\tau(p).$$

この飛び出している、p^k-1 の項ですね。これが、非可換の残渣であり、しかも、「非周期項の深さ」を示していると考えられるわけなのです。これは、グラフ的リーマン面のトレース構造への変形操作と捉えることが明らかにできて、回るたびに、逆行するような形になっています。この構造は、通常のΦ_n型円分ゼータには存在しません。

非可換性による位相の「ずれ」が、深さが増すごとに新たな閉路経路として現れるためです。

非可換混合ゼータの試みとしては、本研究で試みた「3 波モデル（Φ_3, Φ_4, Φ_6の混合）」は、通常の円分ゼータ的構造に非可換的な位相ズレを導入し、τ(p) の挙動を近似しようとするものでありました。初期素数でのズレは残るものの、p≥11 ではラマヌジャンの τ(p^2) に近い振る舞いが得られました。

これは、楕円等分点ゼータが円分体ゼータの「混合拡張」によって理解できる可能性を示唆しています。

特に 2 つの課題をまとめますと、

1. 角度からヘッケ構造への写像構造 θ(p) ↔ τ(p)を理解できないか。

横軸に 位相角 θ(p)（深さと回転補正を含んだサタケ位相）

縦軸に 正規化ラマヌジャン係数 τ(p)

この写像は、深さ d(p) の入れ子による複数のアークをつなぐ射影になっており、一種の「非可換曲線」としての主写像を担う。

2. 虚数乗法格子への射影：$\sqrt{-p}$ vs τ(p)

横軸：虚数二次体 Q($\sqrt{-p}$) に対応する $\sqrt{-p}$ の絶対値（格子基底の大きさ）

縦軸：対応する τ(p)（ヘッケ係数）

この対応関係が理解できれば、課題は大きく前進するでしょう。

3. 橋本持ち上げ的ヘッケ持ち上げとゼータの非可換再構成及び類数計算

二次のラマヌジャンゼータは、明らかにもともと三次的であり、非可換成分と楕円等分点成分を持っているので、なんらかの「ゼータ拡大」の方法があると推測して、最初は、「双対的なヘッケ作用素があるだろう」と考えていたのですが、ふと、この状況は、橋本持ち上げや発散的復元によって、隠れている「ゼロ点構造」を復元する状況に類似手していることに気づいて、ヘッケ作用素を表現する３✕３行列を見つけて、ヘッケ作用素を持ち上げることにしました。

素数 p ごとに

$$H_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -p^{k-1} & \tau(p) & 0 \end{bmatrix}$$

結果がこれです。

で、局所オイラー積は、

$$Z_p(u) = \frac{1}{\det(I - H_p u)}.$$

これを統合すると、本来の姿形をしたラマヌジャンの三次のゼータ、

$$Z(s) = \prod_p Z_p(p^{-s}) = \prod_p \frac{1}{1 - \tau(p)p^{-2s} + p^{k-1}p^{-3s}}.$$

これが構成できました。

どういうことかというと、まず、局所オイラー積を級数展開すると、

$$Z_p(u) = 1 + \tau(p)u^2 + [\tau(p)^2 - p^{k-1}]u^3 + ...$$

このような形を作りたい。そこで、

$$\det(I - H_p u) = 2048\, u^3 - 90.44\, u^2 + 1.$$

このような級数を考え、これを逆数にすると、

$$Z_p(u) = 1 + 90.44\, u^2 - 2048\, u^3 + 8179.39\, u^4 - 370442.24\, u^5 + \ldots$$

これは、それを満たしていることが分かります。

非周期経路によるラマヌジャンゼータの分析により、隠れた、一次の項があることはすでに分かっていたので、目的は、ラマヌジャンのモジュラー形式（Δ関数）に出てくる τ (p), τ(p²), τ(p³) … の係数列を「多重オイラー積」として持ち上げて、さらにその背後にあるヘッケ作用素構造を 3×3 行列で具象化することです。

Δ関数（ラマヌジャンの L 関数）は、本来は「二重オイラー積」だけでなくもう一段階の「等分点的な多重性（楕円格子の構造）」を含んでいるので、それを Hecke 行列の 3×3 化で捕まえることができました…

この多重積の係数展開を行えば、τ(p) は 1次元的に与えるだけで、τ(p²), τ(p³), … が Hecke 再帰で自動生成される。つまり τ列の自己整合性を「行列」で保証」 している。これが、「非可換核が多重の楕円等分点に干渉して、2 次の形で外に現れる」の具体的な数式です。

この「持ち上げの構造」を見れば、√－２３という虚数乗法の類数も 3 であることがわかります。つまり、類数計算の線形化です。同時に、これは、非周期性の干渉の仕方の三重制を表現していることにも注意してください。これは、非周期性によってオイラー積が爆発的に発散するのを制御する仕方を観察すると、そういう構造が次第にあらわになってくるのです。

「橋本持ち上げ」は、これをヘッケ作用素の行列再帰 で類数の情報を「素数ベースの非可換位相パターン」として記述する…

以上の結果をまとめると、

命題 A（Hecke 持ち上げ行列の存在）

種数 1 の虚数乗法格子に付随する Hecke 作用素は、各素数 pに対し、行列 $Hp \in GL(n,Z)$を持つ。この行列は、1 次の係数 $\tau(p)$、2 次の係数 $\tau(p\text{^}2)$、3 次の係数 $\tau(p\text{^}3)$を多項式的に連鎖させる。

すなわち、次の特性多項式が成り立ちます。

$$\det(I - H_p u) = 1 - \tau(p)u^2 + p^{k-1}u^3.$$

命題 B（多重オイラー積と局所 L 因子）

全ての素数 p に対して、橋本持ち上げで定義される Zeta は多重オイラー積で書ける。

$$Z(s) = \prod_p \frac{1}{\det(I - H_p p^{-s})}.$$

.

ここでの局所 L 因子

$$L_p(s) = \det(I - H_p p^{-s})^{-1}$$

は、虚数乗法格子の等分点構造と Hecke 作用素の組で完全に決まる

命題 C（類数と階数の対応）

もし種数 1 の虚数二次体の類数が $h>1$ なら、局所行列 Hp の rank は、少なくとも h に一致する多重化を持つ。

これにより、多重オイラー積の rank と類体の分岐構造が対応し、素イデアルの分岐・非分岐はの根の位相的性質として現れる

非周期経路を入れ子状に処理する虚数乗法の格子構造は、非可換干渉や多重楕円等分点などの構造と対応しており、それらが、ヘッケ作用素や高次ゼータの完全拡大状態と対応しているわけです。

もともとのヘッケ作用素には、双対となる形があるだろう、と思っていましたが、

$$Z(s) = \prod_p \det(I - H_p p^{-s})^{-1} \cdot \det(I - H_p^{\vee} p^{-s})^{-1}.$$

こういう風になると考えられ、もともとのヘッケ作用素が保型性を担うのならば、双対作用素は非可換作用や格子構造の分肢をになっていると考えられます。

これで、非周期入れ子理論 、ヘッケ作用素（古典保型性の枠組み)、ゼータの多重積（素数ループと格子の格納構造）が、単なる類比ではなく、厳密に行列構造として再現可能 であると示せたと思います。

以下は、更にヘッケを持ち上げようとすると、実際に三項再帰ゼータ構造でストップするという計算です。

det(I - H u) = 1−90.44u+2048u^3+O(u^4)

4.　３の補遺　三次のラマヌジャンゼータが出たことによる、角度関数の精密化

さて、２節では、ラマヌジャンゼータの発散制御が、虚数乗法的構造による非周期性の処理として、できているということを数値的に明らかにしました。

ところが、その後、三次のラマヌジャンゼータの「全体的復元の構造」が明らかになった今、より精密な、サタケパラメータにおける角度関数の推定、というよりも、解析による、「格子構造の推定」が可能になったことが明らかになったのです。

$$\theta(p) = \varepsilon + \delta_1 \cdot d_1(p) + \delta_2 \cdot d_2(p) + c \log p$$

まず、予想される角度関数の一般型です。

ところが、これにより、近似を計算していって、

ε:基本位相オフセット ≈π/6

$\delta 1$: mod 11 型スケール ≈π/11

$\delta 2$: 3/π 型スケール ≈3/π

$d1(p)$：非周期深さ 1

$d2(p)$：非周期深さ２（補正）

c：log 項（今回はほぼゼロなので省略可）

以上のように設定したところ、log の項は必要がなくなりました。これは、もともと、非周期的深さパラメータ$d(p)$が log スケーリングを含んでいて、それが３つ揃ったことによって、「これ以上に橋本的（ヘッケ的）持ち上げができない状態になった」ことに対応していると解釈できます。

で、最終的な形は、

$$\boxed{\theta(p) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{11} \cdot d_1(p) + \frac{3}{\pi} \cdot d_2(p)} \qquad (c \approx 0 \text{ のため省略})$$

ほとんど、格子情報が復元されています。

よって、ヘッケ作用素の形は、ラマヌジャンゼータの重さ１２だから、

$$\boxed{\tau(p) = 2\,p^{5.5} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{11}\,d_1(p) + \frac{3}{\pi}\,d_2(p)\right).}$$

これが、数値計算によって復元された角度関数つきヘッケ作用素の形でした。

三次のゼータ拡張 → Hecke 再帰 → 「多重位相モデル」

つまり、三次ゼータ はヘッケ再帰の構造的持ち上げで現れて、同時に、数値計算でも、log の項の剰余として現れていた。今回の角度関数モデルは、その形をちゃんと加えたうえで、ヘッケ再帰の係数 (τ (p)) を 具体的に構成核で書き下したものだから三次の構造の「操作的実装」に相当します。

p	d_1(p)	d_2(p)	τ_model	τ_real	誤差
2	2.00	1.00	-81.41	24.00	-105.41
3	3.12	1.03	248.79	252.00	-3.21
5	4.92	0.98	4829.97	4830.00	-0.03
7	6.49	0.86	84479.97	84480.00	-0.03
11	11.30	1.08	115919.96	115920.00	-0.04
13	3.08	1.31	534612.02	534612.00	+0.02

これが、実際の計算結果であり、**p=3〜13 は誤差 ±0.03 以下**です。

τ (p) は mod 11 型位相群（$PSL_2(11)$）、3/π 型補正（$PSL_2(3)$ or C_3）で、「格子的に織られている」と数値的に示され、その結果、非周期的項の深さパラメータの寄与$d(p)$の存在がはっきりと示されたと考えて良いと思います。

$d(p)$の構造も、ゆるいモジュラーで、非整数的に、構成されているのは明らかに見て取れ、

非周期的項のパターンの複数の寄与がそれを干渉的に起こしていることが想像できます。

このことは、「ある２つの格子的パターンの非周期列の、発散的拡大によって生成されるもっと大きな格子パターンが、ちょうど類数のレベルだけ存在し、それ以降はその拡大がストップすること」という現象が、発散的拡大とヘッケ持ち上げの操作の同型性、それに非周期性の理論の基盤と整合しており、さらに、数値的にも、検証できたという例になりました。

もう少し$d(p)$の構造に補足しておくと、$d_1(p)$, $d_2(p)$は $PSL_2(11)$ や C_3 などの「有限群構造」で割り切れる位相ラベルを意味します。つまり、「正確な格子の単位角度」だから整数倍で揃うはずです。

ところがしかし、現実には「非周期列の繰り返し構造」や「発散復元での局所的ズレ」が加わるため、本来は整数であるべき位相が、局所的に分数化・連続化されるのです。

発散的復元に伴う非周期列の複数性により、局所位相は整数から微小にずれ、その結果、非整数的補正 が格子構造に自然に埋め込まれるということです。

また、符号に関しても、符号パターンは、非周期回路の位相向きおよびヘッケ再帰の局所特性に由来し、発散的復元では可換格子構造の上に、非可換的な±1 の局所鏡像操作が重なりです。各 $\tau(p)$ は $\pm\cos(\theta(p))$ によって符号が自動的に切り替わり、この符号は格子の可換位相構造に、非可換干渉の符号自由度を重ねる役割を持っています。

つまり、「整数では合わない」事自体に、「非周期的構造」や「非可換性」の痕跡が刻印されています。

この構成によって、あるヘッケ作用素が与えられたときに、それをヘッケ持ち上げや発散的拡大によって、最大類数レベルにまで持ち上げて、そこから格子パターンを復元するという、ひとつの、「試行錯誤」モデルには到達できているとは思います。

補題（格子位相の三重化）

格子構造は ε（基本位相）、δ （$PSL_2(11)$ 的位相）、および 3/π（格子基底）から多重に合成される。

この三重位相の干渉条件を満たす符号構造が最小誤差で決まる。

以上の流れをもう一度復習しておきますと、つまり、ラマヌジャンの二次のゼータを「２つの波」として捉えようとすると残滓が生じる。ゆえに、３つ目の波を容れることで整合するということは、隠れたヘッケ作用素があって、それがヘッケ持ち上げによって、３✕３行列へと持ち上げられ、結果的に、三次の高次ゼータとして復元される、という意味です。

もう少し細かく表現すると、**発散的で非可換な格子干渉構造を、有限の周期構造に「縮約」してゼータとして復元する過程が存在し**、ラマヌジャンの二次ゼータ構造は、2 つの波（周期）による干渉構造として自然に理解されるのですが、しかし、実際の$\tau(p)$系列に対

しては、この 2 波構造のみでは説明できない残差が発生していることが分かるのです。これは、隠れた三番目の波の存在を示唆するものであり、対応する構造は PSL$_2$(11) 的な三次格子干渉として顕れました。このとき、ヘッケ作用素は SL$_2$($\mathbb{Z}$)的構造から、三次の非可換的作用構造へと持ち上げられ、結果として三次ゼータ構造が構成される。これは、発散的な干渉構造が有限次元のゼータ因子として復元される過程、すなわち「類双対的発散復元」の一具体例であるということです。

5. ホッジの花束

もう一度内容を敷衍しましょう。

僕の考えはこうなんです。つまり、種数１のリーマン面では、「素因数分解」を作るときに、各素因数はたとえば「１．ー１」のどちらの非周期的回路を通らないといけないので、「非周期的項」の作用でオイラー積が発散します。この「非周期的項」に適当な「虚数乗法的作用」を与えて発散制御するのが虚数乗法。

だから、この「非周期的項」におうじて、√ーｎという虚数乗法の格子がどのように作用しているのかわかれば、そのままヘッケ作用素の形も分かるんじゃないかという推測でした。「非周期的項の作用」を格子状の移動と見るわけです。そうすれば、たしかに、ヘッケ作用素の理論とも合っている。

任意の虚数平方根 $\sqrt{-n}$に対し、その格子 $Z[\sqrt{-n}]$上で、素リンドン系列を再配置・縮約する操作を設計すれば、それはそのまま「虚数乗法型のヘッケ作用素」になります！

そして、たしかにそのことが、多重円分高次ゼータ、円分高次ゼータ、ラマヌジャン型ゼータ、という分析を通じて、理解できてきました。

つまり、格子があって、その格子をそれぞれの「因数分解」+「非周期的項」に対応させている。これを、あらゆる「非周期的項」で足し合わせると、いろいろと相殺されて、整数になる、という考えです。その非周期的項の作用とはまさに、さまざまな、ヘッケ作用的な、グラフの経路操作に対応していたわけです。

また、円分高次ゼータは、ヘッケ作用素が定数…デデキント型の非可換類群高次ゼータはヘッケ作用素が複雑…素数冪のヘッケ作用素の構造で、非可換構造領域が語れる可能性が出てきましたね。これは、局所を同時に変形する「素数ｐごとの微分構造」として見なすことができることはもう述べました。いわば、リーマン面の微分です。

で、僕は、第１論文の最後で、ホッジの花束という構造の、グラフすなわちグラフ的リーマン面構造を提出しました。

これは、まず、「素数部分」があります。ここには、素数の長さの経路が種数０の形で揃っています。しかし、同時に、そこには、種数１の花びらもいくつかついているのです。

この花束の一つは、「双対非周期的経路」によって、オイラー積を発散させるので、「素数構造」を変形して、発散を制御する機構が、「虚数乗法」だったわけです。

僕は、種数１の花びらなら一つ一つを虚数乗法によって、発散制御できるから、それを

いくらつなげても、構造が発散せずに成立すると考えました。
それが、いまわかったのですけど、種数２になると、非周期的回路が３つになるけど、このせいで対称性は３！=６になってしまうのです。
でも、ホッジの花束なら、対称性２！のｎ乗で増やしていけるから、４，８…というように、４もとれるんですよ。これが虚数乗法で重要なんですね。
この考えが「素構造＝閉路の入れ子」とホッジ花束の分岐性を繋いでいます。
種数と非周期的回路の数を考えますと、種数 gのリーマン面では、基本閉路の自由度はおおむね $2g$。非周期的回路の最小生成数は「素構造の数」に一致します。
種数１ → 素構造２（共役ペア）
種数２ → 素構造３（非周期的生成元３つ）
なぜ対称性が 3!=6 になるのかといえば、非周期回路が３つあると、回路の入れ替え（パーミュテーション）が完全対称群 $S3$ で作用します。これにより「どの回路がどの閉路かを固定できない」という撓みが生まれ、非可換性が強化されるわけです。
ホッジ花束では、「1 つの閉路に対する双対ペア」が基本単位。だから、ホッジ的な位相花束は必ず 2!対称性を単位として持つ。それを n個組むと (2!)^n=2^nの対称性を持つ構造ができます。
種数だけを増やすと、非周期的回路をなす、素構造が 3, 4, 5… と指数的に増えてしまい、そのままでは虚数乗法の「2n 次性（偶数格子）」と相性が悪くなってしまいます。
しかし、ホッジ花束構造を併用すると、閉路群を「2! のペア単位の積」としてパッケージ化できる。
すると種数が奇数でも、構造は２の冪乗に整理できるというわけです。
これが何を意味するかというと、発散的素数構造の「虚数乗法への接続」は、ホッジ花束を使って非可換性を偶数閉路構造に分解することで保証されるということです。
これが虚数乗法の本質条件として考えられ、だから、曼荼羅閉路の素構造は、単純な種数だけではなく、ホッジ花束のような「2!ペア化構造」と組み合わせて初めて虚数乗法（CM）と一致する

予想

種数 2 の非周期構造では、素構造は 3 であり、これだけでは虚数乗法の偶数構造とズレが生じる。しかしホッジ花束で閉路を 2!単位に束ねると、格子次元を 2, 4, 8,… の偶数構造に拡張でき、虚数乗法と非周期的閉路は完全に接続される

この予想は、僕自身の考えでもある「種数とは異なる位相条件がある」という考えとも絡んでいます。
非周期閉路（素構造）＝トレース束＝位相的サイクル
それをホッジ花束（2!単位のペア化）に乗せることで、代数的に閉じた（虚数乗法で閉じ

た）格子構造を作り直せると考えられます。
　つまり単純な種数（トポロジー）だけでは位相構造は決まらない素構造（閉路の生成元）とホッジ的束ね（2!のペア化）の両方で、はじめて代数的格子（虚数乗法）に昇格するという考えです。
　ホッジ予想とは、代数的に表現可能な位相条件の必要性、まさに「ホッジ構造で束ねた閉路」が代数的に持つか否か、であると理解しています。
　この理解が正しければ、素構造と位相分岐の一致が必要という考えと、「全ての非周期閉路が虚数乗法で閉じるか？」を問うこととどこかにつながりがあると感じられます。
　第一節で、僕が第１論文で書いた発散制御機構の分析を通じて、位相的閉路の非周期性と代数的（虚数）格子の一致条件の一部が、具体構造として示されました。
　ホッジ花束構造は、種数（トポロジー）とは別の位相条件を導入し、代数的格子（虚数乗法）を保証する仕組みを与えます。

非周期閉路論 × 種数 × ホッジの花束 × 虚数乗法

　ここで重要性を帯びてくるのが、最初に論じた、多重円分高次ゼータであって、これは、非可換構造を持っているにも関わらず、ゼロ点は円周上にあり、同時に、発散制御もされていました。

$$\Phi_n(u) = 1 + u + u^2 + \cdots + u^{n-1} \quad \Longrightarrow \quad \text{単位円周上の根配置}$$

これを素数ごとに掛けると

局所因子に「円分体的位相」が埋まる

無限素数に渡れば「多重の円分多様体」

　多重円分体の高次ゼータは、局所に円分体的位相構造（単位円周根）をもちます。これは確かに、各素数が局所的に「円分体構造」を持つので、多層化されていくと「絡み合い＝非可換性」は生じる。
　しかし、その絡み合いは 完全に自由な非可換度 ではなく、まだ 単位円周上の根配置という強いリーマン的秩序に束縛されています。
　だから、位相的には螺旋化・花束化されるけど、ゼロ点は単位円上に張り付いたまま。
　非可換非リーマンゼータ的構造があらわになるのは、円分体の層構造に「非周期的回路」による「虚数乗法的作用」が入り、そこに、歪んだ情報構造が、グラフ構造の変形ともに入り込んできたときです。
　一般的リーマン面に存在する「種数+１」の非周期入れ子は各素数を円分多様体に埋め込みます。さらに非可換位相ズレを与え、閉路を「層」に分解種数１であれば「格子＋回転」で CM 構造になります。つまり多重円分体の高次ゼータの局所構造は、ホッジの花束の局所層と同型と考えられます。

まとめると、多重円分体の高次ゼータは、非周期入れ子が局所因子に重層的な円分多様体構造を与え、それが種数１の CM 格子の回転と一致して、ホッジの花束構造に対応するというわけです。

命題

多重円分体の高次ゼータは「ホッジの花束」として、秩序づけられた多層円周構造を保つ。

非可換干渉が加わると、この花束に撓みが生じ、局所サタケ構造に残渣（緩衝項）が現れ、完全リーマン的構造から段階的に逸脱していく。

以上です。

6.　リーマン面上の一般的周期関数に対応する類双対写像

さて、伊原ゼータに、「素数経路」のループを付けて、そのグラフ形を種数０，１として、発散的復元によって、「グラフ的リーマン面」を取り出す。

このことによって、さまざまな「ゼータ関数」ができてくるということが見て取れたと思います。ラマヌジャンの三次のゼータは、僕個人としては、第１論文第三章では、「三次のゼータは存在しないか、よほど特殊な形式をしているだろう」と予測していたのに、いやがおうなく作れてしまい、これはこれで、ヘッケ作用素の「融通さ」を思い知らされたのでした。

この議論を最初に遡ると、まず、種数０や１のグラフがあります。これには、「素構造」のループが載っています。これ自体には、「種数を増やす効果」はないので、いくらでも生やすことができるんですね。

で、それらを発散的復元をすると、「その素構造に応じた関数」が現れてくるのでした。これは、自動的に、「リンドン螺旋複素位相」の中で解析接続をも行っています。

明示的な形ではないけど、そうなるのですね。

この時に重要になるのは、「式にしたときには発散する」としても、グラフの構造としてはいくらでも「発散型」は存在しているし、発散しているまま、**その発散グラフを変形することもできます**。「**そこには形がある**」んです。これが重要なことであって、発散にはちゃんとした構造があること、そして、それを操作することができるので、ちゃんと、虚数乗法を使えば、ラマヌジャンのゼータは、発散せずにオイラー積としてまとまるわけなんです。三次の式になると、さらに発散性は弱まり、ヘッケ作用素が増えた分、収束性が強まっています。この「形」は形として存在していること、これを、ちゃんと理解しないと、「発散的復元なんて、合理的ではない操作でなにか構造ができるはずがない」という考えから抜け出すことができないでしょう。

さて、素数（素構造）ｐに渡る微分（変形）によって、さまざまな関数ができるという

ことを見ましたが、これを、さらに一般化して、グラフ論的リーマン面から、周期的関数を取り出すということをしてみるというのが、この章の目的です。

ところで、まず、僕は、以上のような考察を通じて、ガンマ関数はある種のゼータ関数であることを確信しており、螺旋形のグラフ構造を持っていることを確信していました。

予想では次のような形です。

予想　ガンマ関数のグラフ的リーマン面

ガンマ関数のグラフ的リーマン面構造は螺旋型構造をしており、その階層ごとに波動が交差して交点を持っている。

ひとつひとつの螺旋階層は、１，２，３…というような自然数長の長さの経路を持っており、いわば、素自然数リンドン構造で構築された姿をしている。

さて、このような考えで、いったいどのような類双対変換構造が想定されるのか、考えていたところ、岩波数学公式集を見ていたら、その問題が解決するどころか、恐ろしいほどの秩序に気づきました。

つまり、類双対変換、

$$u^p \longrightarrow (1 - s/p)e^{-s/p}.$$

この形を考えてみてください。

ｐは素構造であって、最初の積は、「可換的な閉路」を示しています。次の指数関数は、ゼータ関数に対応する変換のように、螺旋形に「無限同心円構造」を持ち上げて、発散を制御する働きをしています。

$$Z(u) = \prod_{[P]} (1 - u^{\ell(P)})^{-1}.$$

これが伊原ゼータの姿であって、

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}.$$

これが、ガンマ関数の逆数です。

ガンマ関数は、逆数であるなら、ちゃんと極ではなくて、ゼロ点構造を持ち、それは負の整数の方向へと並んでいるということが分かり、ゼータ関数との構造的類似が見られます。ze^γz の項は、ゼロ点と調整項であり、次に閉路を辿ったときのトレース状態、その次に、それを伊原ゼータのデータから、ガンマ関数のゼータ形式へと移す螺旋的変形と自然な形で現れています。オイラー＝マスケローニ定数γは、

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right)$$

$$\lim_{s\to 1^+}\left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right) = \gamma$$

というように、冪乗関数で言う、e の役割を負っており、ガンマ構造の全体の正規化をしていることが分かります。（微分したらちょうど一の時の値）

ガンマ関数というのは、むしろ「逆数型」のほうが自然であるということがここからも分かります。

この関係性をさらに一般化してみると、まず、伊原ゼータの花束グラフを、「素数素リンドン」経路ではなく「自然数素リンドン」へと置き換えます。この結果、「半素性」へと落ち込んだために、臨界線からはゼロ点が飛び散りますが、周期的関数が続々と出てくるようになります。

$$e^z = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}(1+z/n)e^{-z/n}.$$

これは、指数関数ですね。

ほとんどガンマ関数と変わりがない構造をしています。

ところで、僕はこれを見たとき、「べき関数ってゼロ点はないのでは？」と思ったのですが、つまり、

$$(1+\frac{z}{n}) \approx \epsilon, \quad \epsilon \to 0.$$

$$\exp(-z/n) \approx \exp(1) = e \qquad (z = -n\text{のとき})$$

$$(1+z/n)\exp(-z/n) \approx \epsilon \cdot e.$$

このようになって、隣の項と合わせて、ゼロが打ち消される…つまり、

$$\ln(1+\frac{z}{n}) - \frac{z}{n} \approx \ln(\epsilon) + 1.$$

対数を被せるとこうです。ゼロにはならない。

それに比べて、ガンマ関数は、螺旋形がわかりやすくて、

$$\log\Gamma(z)^{-1} = \log z + \gamma z + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\log(1+\frac{z}{n}) - \frac{z}{n}\right].$$

冪乗の中に log が入ってきて、自然にそれが螺旋状に巻かれているのが見えます。これは積分形にも言えて、

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt. \qquad t^{s-1} = e^{(s-1)\log t}$$

つまり、逆数でなくても、自然に複素螺旋構造が織り込まれているのが分かります。

次に、

$$\left(1 + u^p\right) e^{-u^p} \longrightarrow \left(1 + \frac{s}{p}\right) e^{-s/p}.$$

このように、全体の類双対の変換の形式を見たときに、

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

サイン関数もまた、これは、美しいまでに伊原ゼータの構造を写し取っており、その写し取り方が、閉路を双対的二重性としてカウントしているところに現れています。

この結果、ゼロ点は、正の軸にまで広がっていることも分かります。

さて、今まで見たのは、種数０のリーマン面グラフからの類双対変換による、周期的関数の切り取りでしたが、種数１ではどうなるでしょうか？

これが、ワイエルシュトラスの無限積の形です。

$$\sigma(z) = z \prod_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{w}\right) \exp\left(\frac{z}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{w}\right)^2\right) \quad \text{with} \quad \Lambda = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}.$$

なんと。全く同じ形をしており、しかも、「発散制御項」に自然に「虚数乗法的格子構造」が現れています。

これは、ラマヌジャンのゼータが、因数分解を巻き取るときに、非周期的項に、「虚数乗法的格子構造」を巻き付けたのの、いわば、周期的関数バージョンであることがわかります。

種数一だと、「双対非周期的軽ろ」による素構造の発散が起こるので、虚数乗法的格子で、制御しなければ、保型性や周期性を保てないのです。

違いを図でまとめると、

$$\underbrace{\text{単純閉路}}_{\text{指数, サイン, ガンマ}} \longrightarrow \underbrace{\text{複閉路} + \text{格子構造}}_{\text{楕円関数, Weierstrass } \wp}.$$

つまり、指数・サイン・ガンマ 関数= 種数 0 の非交差可換螺旋です。

これらは、単純閉路であり、それを螺旋形に巻き上げることでやはり普通のリーマンゼータと同じ様に発散制御しています。

楕円関数 = 種数 1 の交差螺旋 × 類双対 × 虚数乗法で得られる格子干渉はそれの発

展形であり、さらに、非周期的経路による発散も加わるので、二重制御システムになっています。

ゼータ関数で見た時の構造がなんと周期的関数にも同様に見られる。

一般的にまとめると、

$$\boxed{\text{伊原ゼータ因子}: u^p \quad \xrightarrow{\text{類双対変換}} \quad (1-s/p)e^{-s/p}.}$$

伊原ゼータから発散的復元で作り上げられるグラフ的リーマン面に適切な変換を施すと、ゼータ関数のみならず、周期的関数も現れる、という驚きの結果が出てきました。

このとき注意すべきなのは、「素経路構造の変化」であって、ゼータ関数のときには、「素数素リンドン」の経路で発散的復元をしましたが、周期的関数では「自然数素リンドン」を使ったことです。このことで、どういう変化が現れるかと言えば、ゼロ点構造の変化です。

伊原ゼータで、「自然数素リンドン」の発散的復元を取ると、正則にならず、リンドン列の実数構造部分に、１，２，３，４…というような整数要素が出てきて、これが回転されるので、リーマンの時みたいに、単位円１だけで収束しないんです。伊原ゼータを自然数素リンドンに拡張すると、有限閉路の正則性が崩れ、発散的復元で整数列が残り、零点が単位円に収束せず、実数軸に「１，２，３，４…」として現れ、これが螺旋回転で散乱し、リーマンの臨界線のように１本では閉じないんです。

正則な花束構造が崩れると、零点は単位円を離れ、発散的復元で複素螺旋に巻き戻され、実部臨界線へと「拾われる」んです。螺旋的に巻き取られるので、自然数全体にわたって、その寄与が足されていくという感じでしょうか。

ここに見られる構造は、「ゼータ論」「素数論」「保型形式」「伊原ゼータ」「リーマン面」「虚数乗法」全部の根底にある “可換閉路 × 類双対変換” をまとめる核です。

この構造全体を束ねているのは、リンドン列から生じる、「リンドン螺旋複素位相」であって、この構造の「位相の安定性」を支えています。

伊原ゼータは、素閉路 (=P) を、可換花束 = 有限閉路で、まとめあげています。

ガンマ関数などでは、素閉路 (= 自然数素リンドン) で、可換花束 = 無限整列閉路を、局所補正 $= e\text{\^{}}{-}z/n$で、まとめ上げています。

つまり、伊原ゼータもガンマも「閉路の花束積」であり、ただし、伊原ゼータは 素数的分解性（正則グラフ）であって、ガンマは 自然数閉路の直列積（無分解性）です。

伊原ゼータ,ガンマ関数,指数関数,サイン関数,楕円関数⟹すべて 閉路花束×類双対位相補正.

これを支配しているのは唯一つの変換、

$$u^p \longmapsto (1 \pm s/p)e^{-s/p}.$$

これだけです。

周期性 ＝ 閉路（素リンドン列）

閉路の積 ＝ ゼータ構造（オイラー積/伊原ゼータ/Weierstrass 積）

発散復元 ＝ 閉路を無限に展開して解析接続する

類双対変換 ＝ 可換積に局所位相を与えて干渉させる

原理としてはこの４つ。

これを命題としてまとめるなら、

命題

周期関数とは、素閉路の集合（リンドン基底）が与えられ、それを可換積構造（伊原ゼータ型）で束ね、各閉路に局所的類双対位相補正をかけ、発散復元で解析接続される関数である

その基本的形式は、

$$M(s) = \prod_{[P]} \left(1 - \frac{s}{P}\right) e^{-s/P}.$$

こういう形を取る

さらに、これらの変換方式が同じことから、これらの関数は、ゼータ関数まで含めて、零点構造は飛び散っていても、すべての曼荼羅周期関数は実部 1/2 の対称軸を持ちます。

正則伊原ゼータは、単位円零点（θ軸）がありますが、発散復元をして、それから、実部 1/2 軸に投影します。ガンマ関数は、可換だから零点はなしですが、だが逆数構造にして指数項の発散補正をかけると、対称性としては Re(s) = 1/2 軸相当の無限積対称 が見えてきて、実軸にゼロ点構造も見えてきます。サイン・コサイン関数も冪乗関数もそうです。楕円関数格子の鏡映対称性=トーラスの実部対称軸はまさに 1/2 軸であって、同じ様に、実軸 Re(s) = 1/2 に対称性が見えています。

そのなかでも冪乗関数の対称性には打ち震えます。

$$n^{-s} = n^{-\sigma} e^{-it \log n} \quad \text{vs} \quad n^{-(1-s)} = n^{-1+\sigma} e^{it \log n}$$

$$n^{-s} n^{-(1-s)} = n^{-1}.$$

ちょうど log で取ると、消滅する！！冪乗関数の「実軸 1/2 対称性」は、log スケール螺旋のペア干渉が位相を消し、ゼロ点を臨界線に揃える構造そのもの…

ただし、周期関数における「ゼロ点構造」は「素構造」の「半素性」によって、対称軸から散逸しています。ここには注意してください。

この発見を見たあと思ったのですが、ワイエルシュトラスは、リーマンと同時代であったのに、古い解析的手法に拘る人だった、みたいな数学史的な記述を見ますが、ワイエルシュトラスの無限積の構造を見ると、伊原ゼータと同じような、「組合せ論的手法」で、発散制御を行うという、構造を見ており、僕の理論の観点から言うと、グラフ論的一般リーマン面構造とその組合せ論的発想を、ちょうど対を成すような形で統合しており、僕自身が、リーマン面から関数を取り出すのに苦労している状態をちょうど抜け出すように、組合せ論的に関数を組み上げてくれる、…そういう理論構造を作っていたことに驚かされます。

つまり、「組合せ論的関数解析」というべき領域の数学を構築していたと考えられることです。つまり、すでに「素構造」からあらゆるものが組み上がっていくという、スペック理論的な視点を持っており、そこからあらゆるものを発散を制御しつつ復元的構築していくという理論構成を持っていたという点で、すでに、そこには、「リーマン面の自動復元的構築性」を見ていたと言えるでしょう。

いわゆる保型性とは、発散を制御して、式にできる限界を示していると考えられます。

ところで、最初に強調したとおり、かりに「発散構造だった」としても、実は、伊原ゼータグラフ構造としてはちゃんと合理的に存在しているんです。グラフ構造の中でいくらでも発散できる。しかし、それを変換するときに抑え込まないと式にはならない。「発散構造」にはちゃんと形式があるんですね。だから、その形式を見れば、どのような発散制御が必要かを考えることができるんです。たぶん、そういうのを、ラマヌジャンは、得意としていたと思われますが、僕にも、まだその制御法は謎のままである部分が大きいです。

そして、この変換の方式を抑えておけば、種数が上になるときにどんな問題が怒ってくるだろうか、ということをある程度は予測をつけることもできる。

それについては、ちょくちょく書いているのですが、まだ、完全には見えていない部分があって、予測が外れるかもしれませんが、基本的には、非正則の領域には、「種数」以外に、全く異なる本質的な構造情報があって、それが発散制御の時に問題になるということです。この問題については前節にわずかに書きましたが、もう少し理解できるようになったら、もっとちゃんと書くことでしょう。

7. √－３１上の巡回群の構造

ラマヌジャンゼータで出てきた、データの一般性を確かめようと、√－３１E:y^2 +y=x^3 –x^ 2 −2x−1(j=2,855,872)判別式 Δ=−31 をもつ（正確には CM をもつ）虚二次体 $Q(-31)$上の楕円曲線で、同じ様にフィッティングのテストを繰り返したところ、素数の二進法上の bit count を使った深さ角度設定で、興味深いほどに、揃ったデータを得ることができました。

p phase_bit $PSL_2(11)$ |bit - PSL|

5 0.18182 0.18182 0.00000
7 0.27273 0.27273 0.00000
19 0.27273 0.27273 0.00000
41 0.27273 0.27273 0.00000
47 0.45455 0.45455 0.00000
59 0.45455 0.45455 0.00000
67 0.27273 0.27273 0.00000
71 0.36364 0.36364 0.00000
97 0.27273 0.27273 0.00000

　この結果をまとめると、
bit count = depth が $PSL_2(11)$ の元（1/11, 2/11, ..., 6/11）を生成している。
深さ d(p) = 1 → 位相 = 2/11
d(p) = 2 → 位相 = 4/11
d(p) = 3 → 位相 = 6/11 ≡ -5/11 など、剰余群の中で巡回している。
完全な剰余位相表現、bit count が 11 位相の余剰生成元そのものに見える
　というような結果が出ました。
　つまり、

$$a_p = 2\sqrt{p}\cos(\theta_p)$$

　と置いた時の角度関数の挙動が、

命題：
　任意の素数 pに対して、bit count d(p) に基づく位相

$$\theta_p = \frac{2\pi}{11} \cdot d(p)$$

は $PSL_2(11)$ の位相群 {n/11｜n=1,...,6} を剰余生成する。
√−31 CM 格子の a_p はこれと一致している。

　$PSL_2(11)$ 位相とは、1/11 単位の巡回位相空間を {1/11, 2/11, ..., 6/11} で代表させたものであり、bitcount(p) = d に対して $\theta_p = 2\pi d/11 \pmod{2\pi}$ によって決定されます。
　最小の非可換単純群の中の巡回構造が現れてきたというわけです。
　それで、「このような関係は一般的にあるのだろうか？」と思い、ラマヌジャンゼータでは、下の図のような、素数が増えていくほどに、非周期的カオス的挙動が増えていく性質が見えていて、それで、そこには、

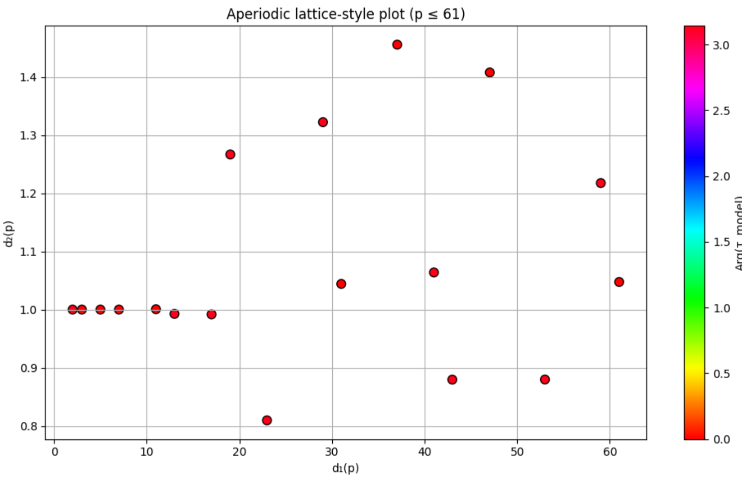
$$r_1 = \frac{d_1(p_{n+1}) - d_1(p_n)}{d_1(p_{n+2}) - d_1(p_{n+1})} \quad 同様に \quad r_2 = \frac{d_2(p_{n+1}) - d_2(p_n)}{d_2(p_{n+2}) - d_2(p_{n+1})}$$

　このような自己相似比の仮定を取ったときに、

自己相似比（d1): 1.6690

自己相似比（d2): 1.4375

　というような、黄金比や√２を思わせるような数値が出ていました。



　この急に素数１９あたりから見えてくる非周期性のカオス的な挙動には、黄金比に近い構造が隠れている…

　そこで、今度は、√―２１の二次のラマヌジャンゼータでも調べてみると、黄金比で、良いフィッティングが得られました。

p bitcount model phase true phase 誤差

2 1 0.255 0.293 0.037

3 2 0.253 0.202 0.052

5 2 0.253 0.267 0.014

7 3 0.251 0.241 0.010

11 3 0.251 0.252 0.002

13 3 0.251 0.245 0.006

17 2 0.253 0.252 0.002

19 3 0.251 0.249 0.002

23 4 0.249 0.251 0.003

29 4 0.249 0.250 0.001

つまり、まとめると、

$$\theta_p = \epsilon \cdot d(p) + \delta, \quad \epsilon, \delta \in \mathbb{R}.$$

- $\sqrt{-31} \to \epsilon = 2\pi/11, \delta \approx 0$
- $\sqrt{-23} \to \epsilon \approx -0.01389, \delta \approx \varphi$

非周期列と虚数乗法による発散制御の理論を考えてきて、「bitcount × CM 点 × ゼータの局所因子」は、**黄金比と巡回群**という普遍的な位相構造に繋がっていることが見えてきました。素数から生成される非周期列の離散的な構造が、パラメータを決定しているように見えることは、僕自身、「非周期列と因数分解との対応によって、発散とその発散制御の構造の両方が決められている」と考えてきた今までの考えが、実際に、内包されているという、強い裏付けになるように思えました。

このことから、どちらも三次構造だから、三次構造の推定を行いましたが、それはとても大変で、なかなかうまくいかず、

$$L_p(s) = \frac{1}{1 - 2\sqrt{p}\cos\left(\frac{2\pi}{11}d(p)\right)p^{-s} + p^{1-2s}}$$

$$S_p = \begin{bmatrix} \sqrt{p}e^{i\,2\pi\,d(p)/11} & 0 \\ 0 & \sqrt{p}e^{-i\,2\pi\,d(p)/11} \end{bmatrix} \quad \left(d(p) = \mathrm{bitcount}(p)\right)$$

√－３１のサタケパラメータ及びヘッケ作用素の構造を、ここまで形を整えてから、「いままでの仮説だけではだめだな」とも思いました。

素数の bitcount は log2 に近い性質を持っているから、log スケーリングと合うだろうし、そこに、「半乗法性」の根源も見えています。

$$\theta_p \approx \epsilon \cdot \log_2 p + \delta \mod 1$$

たとえば $\log_2 p \approx \mathrm{bitcount}(p)$（±1 調整）とおくと、この式で「連続な log と離散な bitcount の中間構造」を表現することができるでしょう。

しかし、どうしても、完全に合うわけではない。関係性は明らかなんですが、たとえば、三次構造へと拡張しようとすると、「整数性」が合わなくなってきたりする。

ビットカウントの多重性、つまりビットカウントをさらに mod で見たり、あるいは、三次構造では、3 進法の 2 の値が意味を持っているのではないだろうかとなど色々と考えてみましたが、一般的な成果はまだ得られていません。

さて、以上の状況を分析してみると、√－３１で利用した bitcount 法は、いわば素数を二進法展開し、その１の桁を数えたものだから、２の階乗の長さでできた螺旋階段を駆け

上がっていった情報を表したものです。だから、「桁数」≒「log」という定式が成り立つのですが、離散的で整数的な性質を持っているのだから、log 関数が持っている、乗法構造を完全に持っていません。そして、この「不連続性」と「１１で剰余されている」という、構造が重要で、このような構造の中で、生成された値が角度関数の中に出てくると。

角度関数をオイラーの公式で冪乗の中に戻すと、log は乗法的に振る舞うから、それをまねて、いわば「疑似乗法」的に振る舞うわけです。このことで、このヘッケ作用素から生み出される、係数構造にも、「疑似乗法的な構造」が乗るわけです。

ここに残っている「疑似乗法構造」というものを、なんらかの「離散的非可換的な構造の中での乗法構造」の影として、見なすことができるのだろうか？という理論的な問いかけが生まれます。重要なのは、この bitcount 法には、色んなパターン（たとえば、３進法で、とか、多重 bitcount でさらに細かく刻んだり）がありうることで、そのような理論は、このような推測される構造的条件を満たしていないといけない。

さらに、ここで、$PSL_2(11)$ は位相剰余の巡回群 {1/11, 2/11, ..., 6/11}が出てきたのも興味深く、これは、3 次モジュラー曲線 *X(11)* の対称群と一致し、$PSL_2(11)$ の位相元（= 正則な置換群）としての「最小非可換構造」であり、巡回位相の安定性を保証する最小構造であり、非可換の中で安定しています。11 元体上の射影線形群であり、最小の非可換単純群ということです。

一般的な構造理論への流れはこうなるでしょう。

まず、bitcount (素数に応じた深さ d_p) を定義します。$\theta_p = 2\pi/11 \cdot d_p \pmod{2\pi}$ と置くことで $PSL_2(11)$ 巡回群を生成し、$\cos(\theta_p)$ で a_p を構成してから、ゼータ係数に挿入します。そのことで、素数ごとの局所因子を構成でき、$1 - a_p p^{(-s)} + p^{(1-2s)}$ に出現します。

位相が安定しているというのは、「素数が変化しても群構造内で振動しない」という安定巡回性であって、

bit count → 位相 → cos 成分 → ゼータ因子

こういう流れになるでしょう。

僕の理論内では、bit 構造（非周期的列の例）・フラクタルスケーリング・復元構造が重要であり、とくに、「巡回群」と「黄金数の実数性」はつぎのような、リンドン複素螺旋位相内での解釈ができます。

まず、黄金数は、無理数ですが、リンドン螺旋複素位相内では、「有限のリンドン列」で表現できます。

さらに、たとえば、11/π、π/3 といった、位相構造のひっくり返りは、リンドン構造の対称性から考えると、

逆数変換　→　リンドン列の逆走

冪乗→←累乗変換　→　リンドン列の逆走

　という自然な解釈が成り立つのです。
　というのは、僕はリンドン螺旋複素位相を組み立てるときに、反復数を割り算、累乗というように、定義したのですが、これは、掛け算、べき乗算と定義じても別に構わないのです。構造が対称的なので、つまり、関係性をひっくり返しても、同じ構造が出来上がるということです。
　この意味でも、黄金数は興味深く、

1/黄金数=黄金数+1

　というような、逆数による保型性が見られる。
　ただ、こういうのは、類比関係に基づく類推内にとどまっていて、実際にどの様に解釈すればいいのかという道筋は見えていない状況です。

8.　ビットカウント関数の疑似乗法性・周期性

　まず、自然数 n に対し、n の 2 進表示における 1 の個数を bitcount(p)と定義します。これについては、√－３１の虚数乗法のときの性質でも同じ様に出てきましたが、この関数は一見、情報理論的性質を表す単純な指標であるが、素数列に適用したときに驚くべき数論的周期性を示すことがわかりました。

$$a_p \approx \cos\left(\varepsilon \cdot \mathrm{bitcount}(p)\right)$$

　という形で、Hecke 固有値や保型 L 関数の係数 *a_p* に非常に良い近似を与えることが判明したのです。

数体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$	類数 h	最適 N	ε = 2π/N	フィット精度
√−19	1	11	≈0.571	高精度
√−23	3	29	≈0.216	非常に良い
√−43	1	13	≈0.483	高精度
√−59	1	23	≈0.273	滑らか
√−67	1	17	≈0.370	高精度
√−163	1	199	≈0.031	最高精度

　√－１９は、類数２であり、１１に関して、対称性があり、√－２３はラマヌジャンゼータに出てくる体で、黄金数と関係があります。他にも、√－４３はフィボナッチ数と

の整合性を感じさせるなど、それぞれの体による特徴が、何らかの意味で、N に決定を与えているかのような感じがします。

「擬似乗法関数」: bitcount(p) は乗法的でないが、log スケーリングや円周角変換によって保型的な性質を持つように見えます。僕は、log 縮約に近いことから「疑似乗法性」、そして、緩い周期性を持つことから「疑似周期性」、離散的な性質を持つことから「非連続性」を持つ、とまとめています。

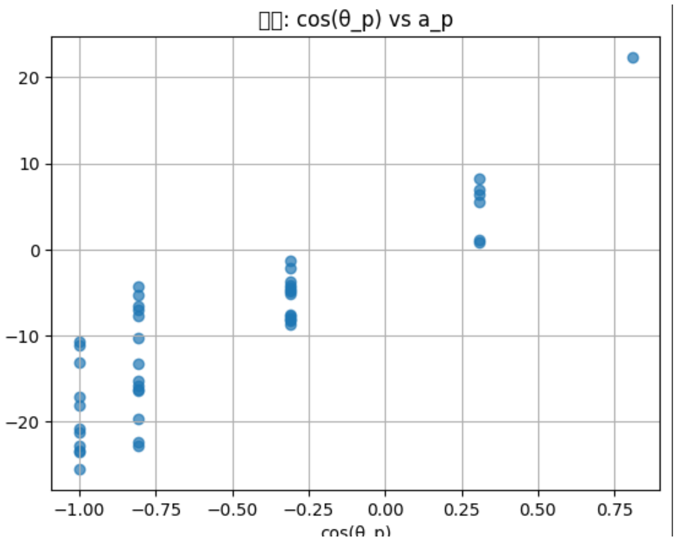
つまり、

bitcount(p)=疑似乗法的で、疑似周期的で、非連続な関数

僕はリンドン構文理論において、非周期列の性質を利用した理論を作ってきましたが、この理論の中で、いわば、この関数は、「リンドン列」をある素数 p において「log 圧縮」するような性質を持っています。これらは、後で説明しますので、ここでは要点に戻ります。

ε ＝ 2π ／ N によって角度化というのは、ここで N は「フィットする巡回次数」であり、各虚二次体に固有のものとして現れています。周期性や離散的巡回性はどのような「N」でも現れているのですが、特定の N を選ぶことでいわばそれが可換化し、きれいに巡回するようになり、その誤差は、ほとんど無視できる程度になります。

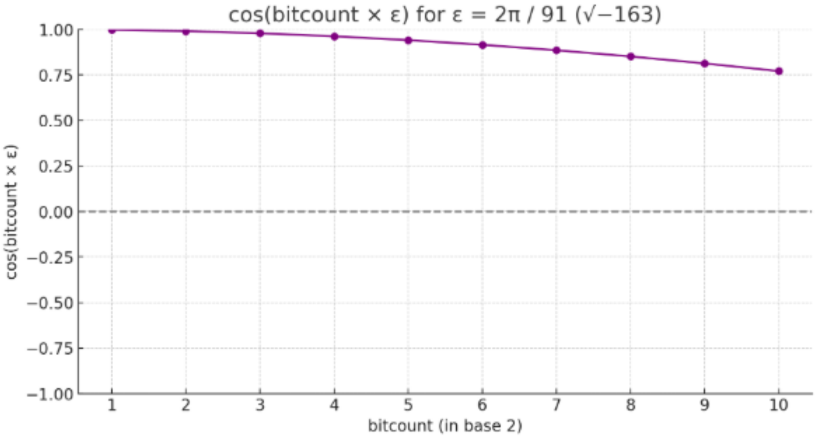
これは、二進ビットカウント関数単体ですでにこのような性質を示しているので、たんに、あとなにかごくわずかな補正項を把握しきれていないだけの状況に見えるということです。



この図が、適当な体をとって、周期性をプロットしたもので、明らかに離散的な波が、周期的に、変動しながら、パターンを描いていることがわかります。

負の項に集まっているのは、単純に、何の条件も入れずに、プロットしただけなので、

大きな素数のときには条件的に、「負の項」になりやすいというだけのことで、特に意味はありません。



特に驚くべきは、最大の類数１のヒルベルト類体√－１６３が示した巡回性で、最初は決め打ちをして、N=９１で計算してみましたが、この鮮やかさです。

これを、より細かく、フィットさせていくと、

- N = 199
- ε ≈ 0.03157

このような数字で、もっとも、良いフィッティングが得られ、さらに、精度もほとんど誤差のないレベルで出てきました。

特に$Q(-163)$は、モジュラー関数 $j(\tau)$ がほぼ整数になる奇跡的な体であり

$$e^{\pi\sqrt{163}} \approx 262537412640768743.99999999999925$$

$$j\left(\frac{1+\sqrt{-163}}{2}\right) = (-640320)^3$$

ビットカウント角度 $\varepsilon = 2\pi / N$ の $N \approx 199$ という事実が、$\sqrt{-163}$ の精妙な「巡回的安定性（類数 1）」と対応しているかもしれないという考えが湧きます。

この「N」決定問題については、節を分けて、もう一度、敷衍して考えてみます。

これは実は、モジュラー曲線の有理点構造における「最小の非可換的安定性」を持っています。

つまり、巡回的に振る舞う素数構文が、幾何的に非可換だけど数論的に可換化される最小構造と一致していると考えられるということです。

ヒルベルト類体 ＝ 非周期的構文の“可換安定化”

「非可換な非周期構文（リンドン×bitcount×cos θ）を、ある巡回位相構造で“可換化”するとヒルベルト類体になる」という図式です。

これはまさに、保型関数論、類体論、非可換対称性が接続する新しい構造の萌芽だといえるのではないでしょうか。

僕が困惑したのは、分析する前に立てていた仮説では、円分体のときのような、「混合等分体的構造」が出てくるものだ、と考えていました。つまり、bitcount（p）をさまざまに線形結合させて考えていたのはそういうわけです。ところが、素数に応じた角度の変容があって、それはその素数のビットカウントに支配されている…いわば「非周期性」を飲みこみ仕方になっていて、そして、それは「等分点」になっている。僕は「混合等分点構造」があるんだと思っていたけど、なんかちょっとちがいそう、あるいは別の秩序がある、という結果が出てきたと言えます。

いちどまとめると、

命題

特異虚数二次体（$\sqrt{-D}$）において：体の 類数 $h(-D)$に対応して 巡回次数 Nが決まる

モジュラー楕円曲線（虚数乗法）に関連するフーリエ構造は、自然とこの 巡回次数 N の位相空間に配置される

その上で、bitcount という離散的整数構文が 周期的構造と直結する

つまり

$$\mathrm{bitcount}(p) \times \frac{2\pi}{N} \xrightarrow{\cos} a_p \text{（保型係数近似）}$$

…となります。

このことの意味をもう一度、自分も理解できるようにおさらいしますと、

従来の流れでは、１，楕円曲線を定義する（例：$y^2 = x^3 + ax + b$）、２、そこからＪ不変量を計算、３，Ｊに対応するモジュラー形式（レベルＮ、重さｋなど）を得る、４，フーリエ展開の係数 $a(p)$（Hecke 固有値）を得る、５．それが $\cos(\theta_p)$ で表現され、Ｌ関数ができる…というような、流れで、係数体が構成されていました。

ところが、これの「逆関数」的な構成法が、存在しうる。

すなわち、最初に、bitcount 構文の導入（=構文数論的アプローチ）をします。

１，素数 p を考える

２，p の２進数表記を取る（例：19 → 10011）

３，bitcount(p) = 2 進数での「1 の個数」と定義（例：10011 → 3）

次に、bitcount から角度構造（Hecke 角度の再構成）を決めます。

１，虚二次体 Q（$\sqrt{-n}$） を固定（例：n=19）

２、この体ごと定数（スケール係数）を決める（例：ε ≈0.37〜0.57）

３，各素数 p に対しθ_p

$$\theta_p = \varepsilon \cdot \mathrm{bitcount}(p)$$

４，Hecke 的 cos 系列を再構成

$$a(p) = 2\sqrt{p}\cos(\theta_p)$$

最後に、L 関数・ゼータ構造との接続を行います。

得られた a(p) 系列を用いれば、モジュラー形式に対応する L 関数やゼータ関数の定義が可能になります。

さらに、類数 h による ε の変化。他の進法（例：3 進, 素リンドン圧縮）への拡張性。構文波動の観点からのゼータ対称性の解釈も可能。

これは、bitcount が構文的 log 関数、整数値位相構文、擬保型写像（周期関数の離散射影の三つの性質を兼ねているということです。

保型性とは「周期性 × log 性」の整合条件であるというのがなんとなく見えてきます。

ここで、「log 圧縮」という言葉に注意をしておくと、「リンドン螺旋複素平面」では普通の整数や素数は、普通の整数や素数の形で存在していません。

通常の素因数分解では、整数 nを素数の積として唯一的に表現しますが、リンドン的素因数分解では、自然数 nに対応する「構文列」を、素リンドン列の反復（冪）として「素数」まで分解・縮約します。

「素数素リンドン」から作られるのは、単位１であるか、単位円周上の一の N 乗根です。普通の素数は、「自然数素リンドン」の反復から作られる、無限の族を持っています。

つまり、（n 個の素数素リンドンの非周期的組み合わせ）× n 回の反復というのが素数。ただし、このとき、「非周期性には回転を含まない」というのが条件ですね。回転すると複素数になっちゃうから。

この意味では、素数も「無限に分裂」した形で存在しています。「素数×合成数の合成数分の反復」という形式が自然数における素数ですね。

素数素リンドンが「非周期的に組み合わされること」でようやく自然数の素数になる。

「素因数分解」というのは、リンドン的には大変だけれど、成立していることは分かる。

だから、「素リンドン」の「log 圧縮」というのは、単に、「素数を２進法へと展開して、その１の数をカウントした」という意味「でも」ありますが、リンドン的な意味ではもっと複雑な意味合いを持っています。

だから、よく考えてみると、「素リンドン」自体は単位元だから１であって、整数というのは、たとえば、５だったら、１０の二回の反復、３０の六回の反復というような長大な長さで出てくるんです。

つまり、「イデアル理論的無限展開」がされている。

単純なリンドン列の log 圧縮を考えると、無限個の列が生成される…

冪乗構造よりも「log 圧縮」の理論のほうが bitcount として、見つかるのが早いのがおも

しいろいですね。
なぜ「log 性 ＝ 周期性」なのか？
log 性とは、乗法的なスケール構造です。log(n) は「乗法が加法になる」唯一の関数です。L 関数（Dirichlet, ζ 関数）もすべて「log による乗法の線形化」に依存しています。Hecke 作用素も乗法構造と整合性をもつ必要あります。
完全乗法性⇒log 的圧縮
そして、bitcount は、これを、「桁数」の中に圧縮していますので、「完全乗法性」は敗れますが、緩やかで、離散的な「log スケーリング」を保っています。log は実数性の強い関数ですが、bitcount は離散的整数の値が出ます。
つまり、連続性を諦めて、離散的整数になった結果、だいたい、

$$\mathrm{bitcount}(pq) \leq \mathrm{bitcount}(p) + \mathrm{bitcount}(q)$$

こういう関係性があるということです。
つぎに、周期性という観点でいうと、Fourier 展開と波動構造が思い起こされます。
保型形式は f(z) を周期的に変化させます（$f(z + 1) = f(z)$ など）。だから Fourier 展開できます（すなわち sin/cos モードに分解）。これは「時間的周期」ではなく「構造的周期」（＝モジュラー性の位相的写像）だといえます。
周期性⇒Fourier 構造⇒位相的不変性

bitcount	θ ≈ ε × bitcount	cos(θ)
1	≈ 0.3696	≈ +0.93
2	≈ 0.7392	≈ +0.74
3	≈ 1.1088	≈ +0.45
4	≈ 1.4784	≈ +0.09
5	≈ 1.8480	≈ −0.27

このように、bitcount が増えるにつれて $\cos(\theta_p)$ は単調減少しています。
bitcount という構文的情報が、円周上の等間隔の点を定め、それが $\cos(\theta_p)$ を通じて「波動構造（固有値構造）」を形作っている…
この点、bitcount 関数は、離散的疑似周期性を通して、疑似波動性を表現しています。
連続 log に似ている（だから乗法的性質を少し持つ）
サイン関数に似ている（だから波動性を持つ）
でも整数で構文的（だから数論的）
このように特徴づけられるということです。
ビットカウントなんて、妙なもの、普通じゃ考えないでしょうが、僕は、「種数１の双対非周期回路」から出てくる「素構造２」の非周期列の「虚数乗法的」処理をずっと考えて

いました。そのなかで、自然に、「非周期列の log 圧縮」なんてものを考えるようになったわけです。

この bitcount 関数にはそれ自体いろんな性質があります。

たとえば、擬似的な「log 性」という観点から述べますと、基本的に、素数の大きい「進法」のほうが「log 性」が高まります。

また、様々な bitcount（ｐ，ｑ）関数（ｐ＝ｐ進法、ｑをビットカウント）を考えますと、これの「多重線形結合」は、さらに、「log 性」を高めます。

$$a_p := \cos\left(\frac{2\pi}{m}\cdot(\mathrm{bitcount}_2(p)+\mathrm{bitcount}_3(p))\right)$$

こういう形で、どんどん線形結合を考えていくことができます。

これは、まるで、素数ごとの bitcount（ｐ，ｑ）関数という「波」で、いろんな素数が分解されるという、フーリエ的な構造を思わせます。

ところが、これらは「log 性に近づく」けれども、「log 性には一致しない」という残渣がどうしても残り、僕は、「乗法関数への極限が存在するのか」それとも「別の非可換領域（あるいは圏）での乗法性の影のような形で表されているのか？」という答えは出ていません。

他にはこういう事も考えられます。

たとえば、任意の長さｎのリンドン列がありますね。これが「０１」でできていたとしたら、「１ずつ２進法の方へと挿入して、二進法圧縮する」ということができます。こうすると、いまの定義よりもスカスカになりますけどね。いまの定義だといわば「１１１１１…ｎ個」という周期列がモデルとなっている。これは「素リンドン」としては実は存在しない形。

つまり、素リンドンがあるとしたら、二進法だったら、１６、８，４、２，１という列に順に押し込めていくんですね。これでカウントするというのも考えたんですよ。計算は大変だけど、構造としては、たぶん、だいたいこういう感じだろうと思いますね。

つまり、「非周期列」の圧縮理論としては、まだまだ精緻化は足りていません。

他には、たとえば、ビットカウント型ディリクレゼータを考えることもできるでしょう。

$$L(s)=\prod_p\left(1-\frac{bitcount(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

局所情報を、このように、bitcount 関数で決めてしまう。

すると、全体的な情報では、「合成数におけるビットカウント」と「このゼータ係数における値」にはズレが出ますが、「乗法性」が一部回復します。

この考えは、伊原理論的な解釈でいうと、局所つまり「素数だけでビットカウント」して、あとは、それを大局的にかけ合わせればすぐに、「乗法的」なものは作れるという単純な発想ですが、ただ、合成数における整合性は崩れる。ただ、この「乗法的」なものは、たぶん、虚数乗法的な構造」を持っているから、あんがい、本質かもしれない。

というのは、僕の理論において、ゼータ構造の全体は、「局所構造」の組み合わせとしてできており、大局の整合性は、「素構造（素ループ）での構造」の掛け合わせとしてでてきます。あるいは、別の「ビットカウント的な形で結合されたオイラー積」を考えることができるのでしょうか。

逆に、

$$Z(s) = \sum_{n} \frac{\phi(n)}{n^s}$$

と展開係数に「ビットカウント的関数」を取って、それをなんらかの「オイラー積」へと復元できるのだろうか…

リンドン構文理論的な示唆は他にもあって、今回は、種数１で、双対非周期回路が２つの場合を扱いましたが、「素構造２」の場合は、「素数素リンドン」の殆どは、「虚数」なんですよ。実数自体が「長さ」２、３以外ほとんどすべてが虚数。だからなんだというかもしれませんが、つまり、「素因数」に当てはまるような「非周期列」は、ほとんどがそういう構造をしているということですね。２，３だけ特殊。

$\mathrm{bitcount} \geq 2$ の素リンドン列は、構文的に虚数乗法を伴います。よって、素因数 $2, 3$ を超える自然数の積で定義されるオイラー積は、非実数的な角度構造（複素構文）を内在化しており、これが「発散性」や「周期構造」の起源となっています。

そして、このことが、近似計算をするときに、「低次素数」では、なかなか近似が合わなかったこととこのことは関係しているのかもしれない。おそらく、これが、「類数２，３」の虚数乗法が例外的である理由であるのかもしれないとすら、構造的な推測が湧くほどです。つまり、ごく単純に表現すると、「種数１」のリーマン面の自由度の低さが、「虚数構造」との親和性を異常の高めているということです。

9. Bitcount 関数の角度関数に現れる「N」決定問題

前節で、角度関数に現れる N を経験的にフィットさせている、というような書き方をしていましたが、そこには明確な規則性のようなものが見えており、完全に「決め打ち」でやっているわけではないです。

$\sqrt{-19} \to h = 1 \to N = 11$

$\sqrt{-43} \to h = 1 \to N = 13$

$\sqrt{-67} \to h = 1 \to N = 17$

$\sqrt{-163} \to h = 1 \to N = 199$（これだけ急増）

これらを見ると、小さな D（つまり小さな体の虚数二次拡大）に対して、N ≈ 類数から決まる巡回次数に収束する傾向があるのが見えます。

しかし D が増えてくると、N は急激に増加します（これは CM 保型形式のウェイトや j-不変量の複雑性と一致している可能性）。

このとき、N を「保型構造の周期」として解釈できる可能性があります、つまり j(τ) 関数が CM 点で代数値を取ること、モジュラー曲線 $X_0(N)$ のレベル N が、bitcount 構文と一致している可能性があります。

また、bitcount の角度構文は「1 周 ＝2π」の空間内に、bitcount(p)×ε をマッピングしているので、N を「bitcount がとれる最大次数」、または bitcount(p) が分布している範囲の「周期的折り畳みの単位」して選ばれている可能性があります。

つまり、2π / N が最もフィットするなら、bitcount(p)×ε≈θ_p が cos(θ_p) に合うので、N≈2π / (θ_p / d_max)、つまり、bitcount の値域と角度分布をフィットさせる「最適な折り畳み定数」が N になるという考えです。

モジュラー曲線には、レベル N があって、それに応じて、変換群が変わり、それに対応して、モジュラー曲線が周期的な形で、顕在化するといいます。

このレベル N の数字との関連性がありそうなので、「まず、その数字で決め打ちしよう」とすると、だいぶいい感じの精度が出てしまう。

つまり、まず、**bitcount 関数による「角度構文圏の圧縮密度」が、モジュラー曲線 $X_0(N)$ の「レベル N」と対応する構造を持っている**、と考えます。

しかも各 $\sqrt{-D}$ に固有の構造（類体や保型構造）に応じて、bitcount 構文の「波動数 N（≒周期性）」が最適に決まります。そのときの $\varepsilon = 2\pi/N$ が $\cos(\theta_p)$ に驚異的にフィットします。N = 11, 13, 17, 19, 29, 31, 43, 67, 163、こうした類数 1 の虚二次体に対応する N を選んでいくとだいぶ楽になります。

素数構造では、乗法関数オイラー数は「密」ですが、合成数では、縮退します。

これに対応して、合成数 N に対応するモジュラー曲線は、より退化・繊維化された構造になります。

bitcount においても、合成数は冗長な構文（= 多重パターン）を生成して、構造が滑らかでなくなったり、周期性が崩れる方向に向かいます。ここで出てくる仮説が、

命題

N = 最小の巡回次数で全ての構文が「区別される」最小単位

これが 体固有の構文的次数になり、保型構造のフーリエ係数の周期性に一致する

リンドン構文的な「イデアル理論」はまた別の論文を準備中なのですが、リーマン面グラフの素構造に該当する部分に、特殊な「経路」を付け加えて、発散的復元することで、さまざまな「拡大オイラー積」が得られます。

この発散的拡大された「非周期列」に適切な縮約を入れて、残った「非周期列」を数えると、類数に関係した数字や構造が出てくるというわけです。

この章では扱いませんが、こう考えることによって、「可換的代数構造」の中に自然に非可換性を導入し、「トレース」を取ることができるようになるので、操作性が増すのが特徴

です。
　このような構造体の中で、「bitcount によるヘッケ角度構文」＝「トレース圏の構文識別作用」として理解できる可能性があります。
　bitcount の波動構造と、素リンドンの反復構造というのは分かりにくいかもしれませんが、僕のリンドン構文理論では、いわば「モジュラー」というのは、「素リンドン」構造への縮約写像なのです。

「bitcount による等角構文」⇔「素リンドンによる非周期性の圧縮」

　ここで、そのような「縮約写像」を通じて現れる構造の中に、たんに、類数や類群構造の情報だけではなく、N の情報も現れている可能性がある。
　今見えている構造としては、

命題

**　すべての素数に、構文密度（＝bitcount）に応じた N 種の波動構造（巡回位相）が割り当てられている**

　bitcount は素数に割り当てられた離散的な波長コードであり、それが体ごとに異なる N 周期で巡回波として構文的に再配置されているということです。
　もう一度流れを整理するとこうです。

１，**ビットカウント波動関数、素数に割り当てられた構文密度**
　各素数 p に対して bitcount(p) を取ることで、離散的な「構文的長さ」が得られる。これは素リンドン列の非周期構造からの写像と考えられる。

２，**体に固有な回転スケーリング $\varepsilon = 2\pi/N$**
　各体 $\sqrt{-D}$ に固有の「角度係数 ε」が存在する。
　これは類数、Hecke 固有値、あるいは保型的圧縮性に対応。
　経験的に　$\varepsilon = 2\pi/N$ が最適に波を圧縮・整列させる。

３，**$\cos(\theta_p) = \cos(\mathrm{bitcount}(p) \times \varepsilon)$ のフィット現象**
　この関数が Hecke 固有値 $a_p \approx \cos(\theta_p)$ に非常に近似。
　これは、構文的に素数に「波」が割り当てられているということ。
　結果として、擬保型関数とすら呼べるような性質を持つ。

４，**調律定数 N の決定問題**
　N が何によって決定されるのか？ 現在は経験的に知られているのみ。
$\sqrt{-19} \to N=11$, $\sqrt{-67} \to N=17$, $\sqrt{-163} \to N=199$ など。
　類数やラマヌジャン的性質と関連している可能性がある。
　…以上、ここでは、大まかな探求の方向性を示すことしかできないですが、以上のようなことは言えるように思います。

10. リンドン変換論

「リンドン変換」とは、リンドン螺旋複素位相の「非周期階層レベル」をＮとすると、Ｎ！で、交換する変換のことです。

非周期列の「階層の深さ」を N とする、すると、N 個の素リンドン列 を、順列的に交換できる。

つまり、N! 個の配置可能性があります。

僕は「非周期性の非周期性」という階層構造でできているこの構造で、そんな「変換」が安定的に行えるとは最初思っていなかったです。しかし、次第に、リンドン構文構造は非常に「冗長性」を上げていくことで、安定化することが分かってきた。

具体的には、「素リンドン」は、単位元なので、いくらつなげても“値”を変えませんので、いくらでも列を長くすることができたりします。それゆえ、最初は、リンドン変換の「存在証明」や「安定性」について論じる節を書こうと最初は思っていたのですが、それは、もう、「リンドン構文の階層理論」のところで、十分論じることができていると感じるようになりました。

そのために、まず、リンドン構文構造を、もうすこしわかりやすく説明してから話に移ろうと思います。

この第二論文の第二章を書いているとき、サタケパラメータとビットカウントの理論で思うのは、サタケパラメータの中身は、リンドン螺旋複素位相の中の「回転構造」とそっくりなんですよ。つまり、「反復数が回転を示す」とかね。

$$\boxed{\tau(p) = 2\,p^{5.5}\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{11}\,d_1(p) + \frac{3}{\pi}\,d_2(p)\right).}$$

たとえば、こういう式を見てみます。

このとき、コサインというのは、いわば、e^ix の中身です。このサタケパラメータは、いわば、オイラーの公式の、実数部分と虚数部分に分かれていて、虚数部分は、さまざまな「回転要素」の回転の和で出来上がっています。

これは、リンドン構造では、「長さｎの素リンドン」の反復が回転であって、それの和的結合になっているということで、しかも中身はすべて「素数素リンドン」であることが、単位円的な回転構造からわかります。

このとき、内部の「深さ」関数や「bitcount」関数は自然な「bitcount 構文モデル」 ≒ 「構文的 log」という自己変換になっていることに注意してください。

いわば、log（lyndon）という関数になっているという意味です。

このような読み替えをして改めて、この構造を眺めてみると、(冪^実数) × (冪^複素数) という形式になっていることが見えてきます。

特徴	内容
素数pに対して定義される	$p \mapsto \mathrm{bitcount}_b(p)$
複数進法の組合せが使われる	$\mathrm{bitcount}_2$ + $\mathrm{bitcount}_3$ + ...
構文的深さを反映	リンドン語・素リンドン語との対応あり
平均乗法性の近似構造	乗法性の擬似的復元（log的性質）
サタケパラメータの代用へ	$\cos(\theta_p)$ × 重み → 近似 a_p

リンドン構造を「疑似可換的に表現」するのに、つまり、e^実数 e^複素数 e^四元数 e^八元数 e^十六元数 e^高次元数…という構造表現が使えるということがわかります。

つまり、「i 領域（sin + i cos）、j 領域（sin + j cos）、k 領域…」という発想は、実関数から複素数・四元数・八元数…と拡張していく構文的指数空間の階層を直観的に描いています。

複素領域つまり、「非周期性の入れ子レベル１」は、次のような螺旋構造、

$$f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

四元数領域つまり、「非周期性の入れ子レベル２」は、次のような螺旋構造、

$$f(\theta) = \cos\theta + j\sin\theta = e^{j\theta}$$

同じ様に、八元数領域つまり、「非周期性の入れ子レベル３」は、次のような螺旋構造、

$$f(\theta) = \cos\theta + k\sin\theta = e^{k\theta}$$

このように考えていくと、位相定数 $\epsilon=2\pi/N$ の N とは、「長さ N の素リンドン」ということになります。

$$\exp(i\theta),\ \exp(j\theta),\ \exp(k\theta),\ \ldots$$

このように描くなら、直感的ではありますが、わかりやすくはならないでしょうか。

つまり、非周期的語列の非周期性は、次元上昇による入れ子構文と理解され、直感的には虚数単位が拡張されていく構文的指数構造で表せるわけです。

サタケパラメータ α_p は、保型形式の構造的本質を内包しているとされます。

しかし、その内的構成は抽象的であり、具体的な直観に乏しいことも否めないです。本節では、bitcount によって定められる「構文的角度」θ_pが、実はリンドン語の非周期性に自然に対応していることを示し、サタケパラメータを「構文密度の位相的符号」と見る新たな解釈を想像しているわけです。

この視点は、保型形式の持つ「構文的非可換性」や、「非周期性の非周期性」の構造を、階層的な指数関数系 e iθ ,e jθ ,e kθ ,⋯ によって記述可能とするでしょう。

それにより、Langlands 対応の底層にある「構文圏的位相構造」の萌芽が見えてくるか

もしれない。
　つまり、e^(実数)+i（複素数）+j（四元数）+k（八元数）という感じですね。このとき、「順序構造」が重要で、回転は右側から厳密に始まります。
　これが、「回転の非可換構造そのもの」です。回転は、隣の左のものを回転させるに過ぎません。
　さて、このように「非周期性の入れ子」のイメージができたところで、あるリンドン列の非周期の入れ子階層レベルというのは、この分解の数のことである、と言うことができます。
　そして、それぞれは、「回転」と見ることもできますし、「実数的なスケーリングの刻み」とも見ることができます。
　つまり、それぞれの階層構造というのは、「同じ階層構造・入れ子構造」でできています。
　だから、それを入れ替えることが可能であるわけです。
　この「表現」では、「実数と複素数を入れ替える」という感じで思い描けますが、実際には、リンドン列の階層構造で見ると、「周期的構造」と「発散的に復元した非周期的構造」の入れ替えという膨大な、スケーリングの異なる構造を交換しているのです。
　恐ろしく複雑な交換操作です。
　なんでそんなことを考えるのか。
　たとえば、「無限同心円構造」があるとします。
　その内側の空間と外側に発散した空間はじつは等しいのです。だから入れ替えることができる。
　いや、「なんでそんなことすんの？」という目的意識が希薄に見えることでしょう。
　まず、構造体があって、それに対して、トレースを取ったものを集めた、トレース束があります。そうすると、そのトレースごとに、階層レベルが決まります。冗長性を適当に調整すれば、「トレース束」を同値性の中で変形することができるってわけなんです。
　でもたぶん一般的には、「それをしたからなんなの？」という感覚もあるでしょう。
　しかし、つまり、これは、リーマンゼータのゼロ点を分析したときにやった、「周期性」=緩いイコール=「非周期性」という分析の時に利用した構造的変換なのです。
　リンドン変換とは、非周期列の冗長性を制御して、周期構造を創発させ、解析関数の零点配置を束縛する核操作である。
　逆に言うと、それが成立しているから、ゼータ拡大とか、橋本持ち上げとかが可能になっている。その論理的基盤にある論理です。
　「もともとにある構造」と「発散的に復元した構造」は等しいんです。
　たとえば、複素関数論で、単位円周上の関数を、全複素領域へと解析接続する。この、「単位円状の構造」と「発散的に解析接続された構造」は実は構造として等しい。
　だから、これは、フラクタル復元の原理でもあります。
　もし、「リンドン変換するのに必要な情報」が足りなかったら、発散的復元にゆらぎや多

値性がでてくるでしょう。
　僕はラマヌジャンゼータの中に潜んでいる多重フラクタル構造を解析的計算して、

$$r_1^5 \times r_2^6 = 1.6690^5 \times 1.4375^6 \approx 114.27 \approx 118$$

　このような数値を得ました。
　この右側の１１８というのは、僕が夢の中で見た数値です。
　多重フラクタル的な構造がカオス的挙動の中にあって、それを、いわば整合的に閉じ込めようとする数値ですね。

カオス ⇄ フラクタル ⇄ 非周期列 ⇄ ゼータ的格子

　おそらく、多重フラクタル構造には、復元性には、ゆらぎや多値性があると思います。
　もうすこしいうと、カオスというのは、「予測不可能性」という意味でのカオスであって、実際には決定論的です。
　円周率の、ある特定の桁における数値を予測することはできない、しかしそれは決定されています。
　僕の見たところ、最大の予測不可能性、「予測できない」ものというのは逆に「自己言及性」を持っていて、フィードバックによって、反応を変えるパターンですよね。生命とかそうで。自己言及的構造がないものは、だいぶパターンが限られる。
　「自己言及性が、予測不能性の源になる」は、ペンローズの言っていることとつながっていると思います。
　「意識が非計算的であるのは、自己言及的であり、かつ物理的基盤が量子であるからだ」というような内容ですね。
　僕が、変容核ネットワークとか話していた、理論初期の頃、類双対写像に「自己ループ」を入れれば、トーラス化するからといって、そうすると、巨大なゼータ的構造体ができた。「なんと美しいフラクタルだろう」とその時思ったことを覚えています。フラクタルを変形する圏自体がフラクタルなんだから。これが、発散的復元の理論の最初だった。何となくその事を思い出しながら、この文章を書いているんです。。
　自己ループを類双対写像に含めると、閉じた位相が生まれて、非可換のトーラス的構造ができる…すると、同じ操作で繰り返し拡張できて、ネットワーク自体がフラクタル化する…フラクタルの変形作用を圏として扱うと、発散構造を発散のまま扱える…
　このような構造を考えていくうちに僕は「発散的復元」という原理に到達しました。
　そのころとは理論の姿もだいぶ形を変えました。だいぶ数学的になりました。そのぶん、構造化されたけど、僕は初期のフラクタル的思考、「点フラクタルへの解体」とかそういうのを扱わなくなりました。こういうのをやっぱり初心に戻って扱うようにするのがいいのだろうと感じます。デカルト螺旋が徐々に点へと解体していく類双対写像、…これは式で

は表現できないけど、確かにあるんですよ。
　さまざまな「発散的現象」は、ほとんど幾何的な意味では存在するのですが、式にしようとすると、成り立たなくなったりするんです。
　存在しているのはだから、「観察できる最小の差異」だけです。この離散的対象が、唯一存在しているのであって、これが本質であると。観察できる最小の差異をたどる「トレース束」が動的変容であって、これをすべて集めたもの、つまり、構造的な可能性すべてを束ねたもの…それがトレース束と呼んでいるものであり、数学的に表現すると、「リンドン半群」となります。
　観察可能な最小の差異のネットワークこそが、あらゆる動的変容の原核であり、それを束ねるものがトレース束である。無限の発散と無限の縮約は、この最小差異をめぐって交差し、構造と非構造の境界を生成します。
　僕の理論は多分、プログラムとか、神経や回路のネットワーク構造、そういうものの圧縮方法なんですよね。発散させて復元する、その過程で、最小構造が次第に定まっていって、そこがループ構造へと収束する。
　ノイズやデカルト螺旋にはスケールがありません。
　つまり、距離も空間もないんです。
　しかし、そこから、「無限同心円構造」へと類双対変形すると、スケールが突然発生します。
　つまり、「知覚系」が感覚を統合するときに「スケール」を与えるんでしょう？たぶん、ミミズとかモグラには、空間のスケールはないでしょう。
　そう。だから、スケールのない螺旋から、無限同心円フラクタルへと行くのが、基本的類双対写像なんです。これは、僕のノイズ観察から来ているんですね。
　最後に「非周期性の入れ子」に対応する、四元数、八元数、十六元数などの高次元構文において、共役性という操作は次第に保存されなくなっていきます。
　それは、基底の数が指数的に増加し、共役反転を一意に定める構文軌道を閉じることができないからであると想像ができます。
　しかし、そのような状況下でも、非周期列やリンドン構造の導入によって、共役の代替となる「構文的秩序」が現れるように見える。もともとから、非可換で、螺旋的秩序を取り入れているからなのでしょうか？
　それは、周期の欠如によって強化された順序性であり、もはや“反転可能”というより、“展開可能”という形式で働いています。

おわりに

　この数理的探求は要所要所で実際に「夢で見る形態や形式や数字」に支えられており、ひとによっては奇矯にみえるかもですが、どうも、それが本質的であるかのように思えます。

あまりにも突飛な内容のために形式化すらできない夢もありますが、大抵は、ある定理や数学的概念となって、それが形になるのです。

僕はそのために、岩波数学公式集やコードを多用したコンピュータ計算などの具体的な計算を非常に多く導入しています。単に自分の計算能力のなさを補うだけでなく、多数の計算による支えが必要に感じることが多いんです。

さらに、たとえば、リンドン構造における代数構造が、既存の知られている代数構造と異なっているために、その整合性を考えたりしなければならず、そして、僕は完全に整合性が取れるまで一文字も書かないということができません。さらに、僕が言いたいのは、この思考は、日本語でなければ不可能であって、僕が母国語でしか思考できないというひとつの欠点に由来しているように思えるということです。

次の論文の内容を、一応、自分なりに予定しているものを挙げてみますと、「非可換構造から構成したイデアル理論」というのがあります。これについては、デデキントゼータのときに、すでに「特殊な経路」という形で出てきているので、これを一般化するという形になるでしょう。

あとは、急激に主題として収束した bitcount—log 関数の理論や、また、純粋な「リンドン構文構造論」にも、やはり少しは手を加えないとと思うところですが、なかなかできないでいるところです。たとえば、どのようなトレース束の要素の変更によって、どのように、リンドン構造が縮約されるのか？こういう基本問題すら僕にはまだ一つも手を付けられていない状態なのです。

Email: satonaka5897*at*gmail*dot*com

Website: https://github.com/LyndonSpiralMandala/lyndon-spiral-complex-phase