第三論文 リンドン螺旋複素位相理論による非正則領域への接近

1. はじめに

ある程度第二論文を書き上げたあと、いわば「夢のトランス」が静かになった気がして、僕は、ちょうどそれを第２論文を推敲したり、翻訳したりする時間に使えるだろうと思っていました。

ところが、休憩中に、本や漫画を読んでいたところ、やけに、ヴェイユゼータのグラフ構造が、つまり「有限体グラフ構造」への推測が始まり、それが完成する頃には、右辺からのヴェイユゼータのグラフ論的リーマン面による構成が出来上がっていたのです。

それからも、休んでいると、今度はその「素数全体に関する組み合わせ」である L 関数による推察が止まらなくなり、それで僕は、コブリッツを眺めていたら、ここに書かれてある様々な周期性や保型性、あるいは臨界構造に関する内容が、次第に完成していきました。

僕の論考で「この人は計算とか式変形とか書かないよなあ」と思う人もいるでしょう。僕は実際色々計算したり、あるいはプログラムを走らせたりしていますが、基本的に、結果を補強するためとか、あるいは、計算的発見があるときとかしか書きません。

それにもっと重要なことに、僕の理論は、ほとんど「グラフ変形」による理論なのです。頭の中で「グラフ構造」を思い描き、それをくっつけたり、フラクタル的に変形したり、要素を制限したりしている。この過程を書くための「手法」が「文章表現」しかない、あるいは僕は「記号化したら本質が失われる」とすら思っているのです。

重要なグラフ構造のときには丁寧に描写していますので、それを「式変形のようなもの」と読んでもらえればいいと思います。たとえば、僕は、第３論文の最初にグラフ構造の中でｐ進拡大体を構成し、ヤコビ多様体を埋め込みます。これは、素構造が２つツイた、花びら状の構造体として描かれるのですが、おそらく慣れない人は、「なぜそんな構造がこの式になるんだろうか？」と疑問に思うことでしょう。

グラフ的構造変形理論と発散的復元による解析接続の理論については、第１論文の「リンドン螺旋複素位相の理論」として書いていますので、基礎理論として読んでもらえたらと思います。もちろん、わかりにくそうなところは、丁寧に説明するつもりです。

また、この論考は、途中で、回転モジュラー空間を導入し、伊原ゼータの経路空間とフラクタル性を結びつける、幾何的・数論的構造を導入します。これが思ったよりも広がりを持っていることがわかり、僕は、さまざまな具体例や計算、あるいは周辺的考察や式などを削り、あるいは、考えがまとまるまで書けなくなったりしました。

最終的には、リー群のカルタン分解と結びつけて論じられますが、このとき、自分の論考の中でも、いろんな条件や構造的移り変わりなどがやや複雑になるので注意してくださ

い。

2. 有限体のグラフ的リーマン面の理論とヴェイユゼータの組合せ論的構成

素構造がたったひとつしかないグラフの場合には、「発散的復元」をしても、ぜんぜん拡大されていきません。同じ要素の繰り返しだけです。

有限体について考えていたとき「これって、素構造が一個しかないよね」と思って、「これじゃ構成できないだろう」と思って諦めていました。

ところが、有限体上に定義されているヴェイユゼータ、

$$Z(X,t)=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|X(\mathbb{F}_{q^n})|}{n}t^n\right)$$

$$Z(X,t)=\frac{P_1(t)\cdots P_{2g}(t)}{(1-t)(1-qt)}$$

上が左辺で、下が右辺ですが、これを眺めているうちに、またたくまに、「P 進拡大体」の発散的復元の理論が展開されていきました。

まず、ひとつひとつ説明していきましょう。

素構造が、「発散的拡大」されるためには「非周期列」が必要で、非周期列はたとえば１，０といった、要素数が２以上のときにしか作れません。

しかし、よく見たら、**ここに、「１」の要素と「ｐ（式ではｑ）」の２つの要素が現れていますね**。分母構造の２つのオイラー積です。

この２つの要素が重要です。

まず、素構造が「１」だけのときを考察しましょう。

これは「素リンドン」であって、しかも、反復しても縮約されてしまうので、「１」の反復数１以上に全く動きません。この動きは、「どのような素構造の組み合わせの中」でも成り立ちます。「１」はまったく反復しないので、いろんな素構造の中で、「壁」のような役割をしています。

ところで、「ｑ」はどうでしょうか。

長さｑの「素リンドン」は、発散的拡大をすれば、ｑと素の「反復数」が現れるので、発散的復元をすると、ちょうど「ｑの反復数がｑになったとき」に縮約され、ｑ―１個の構造からなる、「乗法」構造を形成します。ここで重要なのは、要素が一つしかないので、「非周期的元」を持ち得ないので、「乗法」構造しか持ち得ないことです。注意すべきは、ｑ=「”値”１」であって、長さｑだからｑの値ではないことでしょうか。

つまり、「有限体」が構成されることが分かったということです。

そして、有限体が構成されたときにちょうど発散的拡大は不動点に達します。

とすると、「１」の長さのループと「ｑ」の長さのループをまぜて、「発散的拡大をする」

とどうなるでしょうか。
　なんと、このときには、「１，ｑ」の組み合わせによって、「ｑ進拡大体」が、無限階層まで発散的拡大します。
　つまり、「１」と「ｑ」の組み合わせによって、さまざまな「非周期的列」が構成されます。そして、重要なことですが、「１」はどのような非周期列でも反復しません。
　そして、「１」と「ｑ」の組み合わせによる「ｑのｎ乗」以外の長さの非周期列は、縮約写像によって、「q,q^2,q^3…」の長さの非周期列のいずれかに属するということがわかります。つまり、「ｑ進拡大体」の構造が自然に出来上がり、これは、複素構造や高次構造まで持っています。つまり、省略的記法を使うなら、素構造１，ｑで、発散拡大すると、（１，ｑ）（１，ｑ＾２）…の組み合わせの非周期回路の拡大によって、有限体の拡大が階層的にできるというわけです。

命題　Ｐ進拡大体の不動点の定理
　素構造１，ｐの２つの経路で作られたｐ進拡大体の発散的拡大は、いっかいで、不動点に達する

　素構造が２つしかないので、単純に、発散的拡大一回で、「存在しうる非周期項像」をつくれてしまうということです。これは、「階層が一個」という意味ではありません。「無限階層」が一回でできるということなので、注意してください。
　さて、ここで、ヤコビ多様体を考えます。
　ヤコビ多様体とは、ある代数体の中の「有理点集合」の差を取ったもので、つまり、２つの点をひとつの点へと縮約したような、バラバラの点の集まりです。
　ヤコビ多様体は、楕円関数の場合には、モーデル・ヴェイユの定理により、楕円関数と一致し、

$$E(\mathbb{Q}) \cong \underbrace{\mathbb{Z}^r}_{\text{自由成分}} \oplus \underbrace{T}_{\text{トーション}}$$

　このような「有限生成の群構造」を持ちます。
　自由成分というのは、「無限生成群」であって、ひとつの元から無限の点が生成するものであり、トーション部分は、「有限巡回群」の組み合わせでできています。
　なぜ、「無限生成群」が種数１のときにできてくるかといえば、種数一のリーマン面グラフでは、「非周期的回路」が２つになり「双対非周期的回路」が成立する、つまり、２つの方向から同じようなトレース経路がきれいに取れることに由来しているのに注目してください。そして、トーション部分は、そのような「自由」さを持ち得なかった「有限循環」部分です。つまりいわば「混合円分体」部分といわば「無限円分体」部分へと有限分解されるというわけです。
　さらに、種数ｇ（＞２）の代数構造におけるヤコビ多様体も、同じように、いわば「混

合円分体構造」であるアーベル多様体の部分へと分解できて、その分解のされ方がちょうど種数ｇと一致しているわけです。

$$\Phi_{p^n}(x), \Phi_{d_1}(x)\Phi_{d_2}(x)\cdots$$

ここで、「楕円曲線」の場合には種数以上にたくさんできているのでは？と思われる書き方をしてしまいましたが、要するに、ある素数ｑがあるとしたら、楕円曲線の場合にも一つだけ「円分的構造」が決まる。一般の種数ｇ（＞２）の代数構造におけるヤコビ多様体は、混合円分構造ｇ個によって、分解されるというわけです。

さて、これらの考察によって、素数ｑでみたときに、「ヤコビ多様体」は単位円上に「種数ｇ」に応じた円分体構造として補足されることを意味しています。

とすると、ここに、その「円分体構造」の「共役構造」となる代数的ヤコビ多様体を持ってくることができるでしょう。それの種数も当然ｇになります。

それをかけ合わせると、キレイに「共役要素」が揃って、回転によって打ち消し合う円分体構造を持つ、「ヤコビ多様体」が出来上がり、それの種数は２ｇになります。

つまり、ある代数構造があると、双対代数体をもってきて、かけ合わせると、２ｑの単位円上の共役元の組み合わせと、ｑ^g という形で表され、円分体の回転に打ち消されないで残る「非周期解」の数え上げが起こるが、それは、次数によって生じてくる剰余体の数の組合せ論的な数と同じだから、剰余体の数によるオイラー積の形と一致するというわけです。このことについてはちゃんと説明していきます。

今の説明で、

$$Z(X,t) = \frac{P_1(t)\cdots P_{2g}(t)}{(1-t)(1-qt)}$$

このヴェイユゼータの右辺が、構成されていることを見てください。

つまり、まず、「素構造１」「素構造ｑ」のふたつのオイラー積部分があります。

これによって、「ｐ進拡大体」が構成されることは見ました。

そして、それらの「ｐ進拡大体」の中に、種数２ｑの「共役円分的構造体」を埋め込んでいることがわかります。

つまり、このことによって、右辺の分子に含まれる「円周上の回転成分」は、ｐ進拡大体の中で、ひとつひとつ、q^g の正規化をしてえられた一のＮ乗根の回転として、回転し、ある、「P 進拡大体の階層」の何処かで補足されます。

この結果、この P 進拡大体のそれぞれの階層の中で、円分構造体がちょうど打ち消されるような回転を行うときに、左辺の展開として、「組合せ論的に数えられた点の組み合わせの数」が現れてくるということになります。

つまり、これがオイラー積の展開による、「組合せ論的ツリー化」の構造の様子です。

このオイラー積は、「どのようなｐ進拡大体の階層で何個補足されるか」をそれぞれ数え

上げるので、

$$Z(C,s)=\prod_{\text{閉点 }x}\left(1-q^{-\deg(x)s}\right)^{-1}$$

このとき、q^deg(x)は、拡大体のサイズ（最低階層の残差体の個数）それが（1−(個数)^−s)^−1 の形になっているものです。ちょうど、右辺の式は、この数え上げの展開と等しいということがわかります。

そして、剰余体の数によるこのオイラー積は、ガロア表現理論により、ヴェイユ型ゼータの形へと変形されます。

$$Z(C,s)=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{N_n}{n}q^{-ns}\right)$$

この変形はいわゆる log 変形をしていくもので、これで、右辺と左辺の等しいことを示しました。

もうすこし、補足的に、ヤコビ多様体の点の円周上の補足や、「発散的拡大」の理論について、書いてみようと思います。

たとえば、このような変形理論は、エタールコホモロジー理論によって、通常説明されます。これは、僕の理論の見地から言うと、いわば「離散的構造」の中での「解析接続」の理論であって、僕の「発散的復元の理論」で、「素構造がたった２つ、（１， ｑ）しかない」状態で、僕は、いわば「連続的拡大体」を構成しました。これは、「トレース束不変性」の状態を「臨界線」として持つ、「解析接続構造」そのものなのです。そして、おそらく、エタール被覆と呼ばれているものが、この「解析的延長」の理論であろうと思います。

そして、この「グラフ論的リーマン面」にヤコビ多様体の構造を埋め込んだでしょう。

任意の代数体構造のヤコビ多様体やアーベル多様体における円分要素への対応理論や「非周期列のオイラー積」に見える構造の解析についてすこし補足気味に説明してみます。

さきほど、円分体の回転に打ち消されないで残る「非周期解」の数え上げが起こるが、それは、次数によって生じてくる剰余体の数の組合せ論的な数と同じだから、剰余体の数によるオイラー積の形と一致するのを見ました。そして、剰余体の数によるオイラー積は、ガロア表現理論により、ヴェイユ型ゼータの形へと変形されます。

まず、「素構造 q」だけの場合、これは「原始的系列」（1, q, q^2, ...）の階層で構成されます。リンドン系列的には「完全周期的構造」。発散拡大しても、不動点で止まります（有限体 GF(q) が得られる）。

次に、「1, q」の非周期回路の場合、組み合わせ的に非周期列が多数生まれる（例：1, q, 1, q^2, q, ...）。この非周期構造は「有限体の拡大」に相当します（GF(q^n)）。

さらに、代数構造を導入したとき双対代数体の導入により、構成が「共役元」へと分解。この共役元は単位円上の 2q 等分点の上に並び、そのうち「打ち消し合わない成分」がゼロ

点を構成します。このとき、q^g を出して、「単位円上の一乗根」へと正規化するとわかりやすいし、実は本質的な形であることもわかります。

この（冪乗）×（経路情報）という形は、周期的関数の「類双対的変換」の構造としてよく出てくる形なのです。

たとえば、

$$\sigma(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) e^{z^2/n^2\pi^2}$$

こういう形ですね。これは、1 次元格子（πZ）に対応する楕円関数（倍周期関数）の一部であり、Weierstrass の σ 関数は、楕円曲線の倍周期構造を表現します。

サイン・コサイン・冪乗関数、さらにガンマ関数に至るまで、このような無限積形式を持っていて、そこに「周期性」があることがわかります。

つまり、ヴェイユゼータは、「周期的関数」の一種であることがわかります。じっさい、これを、すべての素数にわたって、組み合わせた L 関数が、保型形式と一致するというワイルズの定理を考えると、ごく自然な観察だと思います。

今度は、「種数ごとのヤコビ多様体」の構造について、ちょっと考えをまとめてみましょう。

種数 0 の整数係数多項式はなにもしなくても複素共役元を持ち、円分多項式の解へと還元できます。代数学の基本定理です。

種数 1 の場合には、混合性が現れ、必ずしも「複素共役元」の存在を保証しなくなります。この場合には、「同じような複素共役元としての解を持つ」代数方程式が存在し、それをかけ合わせる必要があります。

種数 2 < g 以上のときでも「複素数で閉包」されているので、それぞれの「共役代数構造」が存在し、アーベル性へと還元できるということがわかります…このことで、まず、「混合円分性」へと還元し、それから「共役円分構造」を掛け合わせることで、正規化できて、数え上げ構造を作ることができるということです。

. 種数 0 の整数係数多項式と円分性というのは、x^n−1, x^2+1, x^n+^xn−1+⋯+1（円分多項式）ですね。この場合、解はすべて複素数体 C上に存在し、複素共役 z‾z も明確に存在（単位円上に配置）し、ゼータ関数の零点は「明示的円分的」に書き下せます。

種数 1 になると楕円曲線と混合構造が登場し、楕円曲線（種数 1）においては、零点構造は C/Λの格子上にあるが、一つの多項式だけでは共役関係が保証されません。したがって、「似た構造を持つ」他の楕円曲線と対構造を形成させる必要あり、このとき「混合円分性」として、複数の楕円的成分の合成ゼータ関数を持つようになるというわけです。

g≥2 のアーベル多様体と複素的閉包も同じように考えることができて、高次の代数曲線では解空間はアーベル多様体上の射影的構造です。基本的には C上で閉じているので、複素共役構造は存在し、ただし、その分解構造は非自明です。

このとき重要なのは、混合円分構造の復元可能性であって、共役円分構造との積での正規化を行い、同じように数え上げの対象とすることです。

混合円分多項式としてのヤコビ多様体の構成法も、Ｐ進構造と同じでした

たとえば、複素平面上に、「ｐを半径とした無限同心円構造」を置きます。ｐ^2ｐ^3ｐ^4…と続く無限同心円ですね。すると、ある複素数解は、どこかの同心円構造の中に入ります。すると、これを、「ｐ進展開の中で、いくつめの回転レベルで補足できるか？」という位数で表現できます。この同心円ごとの角度関数が、いわゆる「フロベニウス写像」であると考えることができます。

つまり、あらゆる任意のｎこの複素数解は、「レベルｐ^ｎ」の円周上の点として捕捉されて、それに対応する「混合円分多項式」を持ちます。これが、アーベル多項式への分解としてのヤコビ多様体の姿です。

そして、このアーベル多項式への分解次数が種数に対応します。つまり、混合円分構造の数というのが、「非周期的回路の数」と対応しているということがわかります。

もう少し細かく説明すると、同心円構造・p^n-階の補足と円分体構造の問題は、複素平面において、「p^n を半径とする円周構造」を置く各円周は「p^n-回転対象の位相空間」であって、複素数解は「どの円周上に捕捉されるか（＝位数）」によって分類されるということです。

この「回転的位相による分類」は、まさに円分体$Q(\zeta p\text{^}n)$のガロア構造に対応しています。角度 $\theta=2\pi kp\text{^}n$は、円分根の対応。したがって、これに従って現れる「複素数解たち」は、混合円分多項式

$\Phi p\text{^}n(x), \Phi d\text{^}1(x) \Phi d\text{^}2(x) \cdots$

の形で補足されます（d は $p\text{^}n$の約数）。

グラフ的リーマン面 Xに対して、ヤコビ多様体は、Jac(X)=Div0(X)/~ つまり、0 次の除数群を等価類で割ったものです。ここに乗るのはアーベル多様体としての位相的トーラス構造（複素 g 次元）、各点は「解の配置の線形等価類」、各複素解の「角度・位相位置」がトーラス上の「位相座標」として反映されます。

「p^n 階の円分補足」は、このヤコビ多様体の上で「混合円分構造を持つ点の構成」と一致します。

混合円分構造の組み合わせ ＝ 位相的に非可約な円周構造

それが収束する配置（例えば非周期補足） ＝ ヤコビ多様体上の一点

このとき、「種数 g」は何を意味するかといえば、グラフ的リーマン面上の代数曲線の「穴の数」に対応し、種数 gのリーマン面 Xには、ヤコビ多様体と呼ばれるアーベル多様体 Jac(X)が対応します。このヤコビ多様体は、次元 gのアーベル多様体（複素トーラス）になります。つまり、「アーベル分解」の次数＝ヤコビ多様体の次元＝曲線の種数と一致し、つまりある複素曲線上の n個の点（＝零点構造）を「どの円分構造で補足するか？」を通じて、その種数が決まり、ヤコビ多様体＝アーベル分解次数が決定する、という構図です。

なぜ「種数＝アーベル分解次数」なのか？
これはリーマン＝ロッホ理論と深く関係します。リーマン面上の g個の独立な 1 次微分（＝正則 1 形式）は、アーベル積分の自由度です。
よって、そのリーマン面のすべての代数的情報は、g 次元のトーラス（＝ヤコビ多様体）に押し込められる
そのアーベル多様体が持つ「円分的捕捉の構造」こそ、構成している「混合円分多項式」。
P 進拡大体のなかの点の構造は、これは、単なる複素数の「p 進法表現」にすぎないです。リンドン複素螺旋位相では、実数構造と複素回転位相の、「代数構造」は全く同型であって、つまり、「実数的構造」と「回転的構造」は同じスケール構造で表現できます。これを、p 進スケールで行っているだけです。
確かに、表面的には「複素数を p 進法のように回転スケールで分類するだけ」という考えは、一見して素朴すぎる・バカバカしいと感じられるかもしれません。が、「数え上げの論理として、ごく単純に考えてみてください。
種数が上がると、「表現次数の表れが複雑になる」、「アーベル性が混合になる」というのを、明示的に表現する理論というのを微分的な経路を通すことなく考えることができるでしょうか。
つまり、ヤコビ多様体の解空間の p 進的階層構造と、グラフ的リーマン面によって構成された p 進的階層構造が同じなので、ちょうど、その解の個数の組み合わせを数え上げるように、左辺が定まっていく…これをグロタンディークとかは、行列式にまで持ち上げたわけですが、僕はまだこの持ち上げの意味がよくわかっていないんですよね。
種数が上がると、「表現次数の表れが複雑になる」「アーベル性が混合になる」という現象を明示的に可視化・分類する理論、種数上昇と「アーベル性の純粋性」の崩壊。たとえば種数 1（楕円曲線）の場合、アーベル多様体は単純で、CM 理論でほぼ完全に分類されます。ガロア表現は 2 次元、L 関数も基本的な自己共役構造を持ちます。
種数 2 以上では、アーベル多様体は直積では表現できない場合が多いです。End（エンドモルフィズム環）も非可換になりうる。
L 関数が「混合型」になり、共役表現が複雑化。円分性の“壊れ”や、モチーフの混合が起こります。
つまり、純粋なアーベル性が保たれず、混成的な表現が現れるのです
この「ヤコビ多様体」の「混合アーベル構造」の共役元を取れば、ヴェイユゼータの右辺は完成しました。このとき、ただひとつの「フラクタル原理」しかつかっていないことが重要でしょう。「フラクタル性原理」が強いのかもしれない。そして、この原理はに非可換領域に拡張できます。非可換方程式論。大変複雑になりそうですが。
この節の最後に、ヴェイユゼータの右辺の周期関数性を考察するに、p 進拡大体の中で、「楕円関数構造」がいわば一つの「角度」へと変換されているのがわかります。

$$Z(X,t) = \frac{P(t)}{(1-t)(1-qt)}$$

この式の分子が二次式になるわけですが、q で正規化して、単位円構造へと変換すると、わかりやすいですが、要するに、√ q の半径の円の、角度付き「双対オイラー積」として、二次の L 関数のゼータの「局所構造」を担うことが分かりやすいです。

このとき、二次の双対オイラー積は、√ e^-slogq という角度を担う因子としていわば、「リーマンゼータ式のオイラー積へと付け加えられます。この結果、だいぶ、オイラー積のツリー型展開はすかすかになりますが、周期性や、保型性が現れてくるというわけです。

そして、このオイラー積自体が「非周期的回路」の経路情報として働いていることが重要です。一般的な周期的関数では「周期的回路」の経路情報で無限積が構成されますが、ここでは、いわば「種数１」の「非周期的回路」の、積として現れています。

これは、いわゆる僕が表現する「ホッジの花束」の形ですが、このひとつひとつの花束が、「P 進拡大体」であるというところに違いがあります。

周期的関数について最後に見ていきましょう。

楕円関数の無限積展開の例としては、たとえば、

σ(z)=z∏n=1~∞(1−z^2n^2π^2)e^z^2/n^2π^2

を例に上げましたが、これは、螺旋的に無限の周期構造（格子）を巻き上げて、特定の「素経路（ゼロ点)」で切断される構造です。

複素平面上の「格子巻き上げ＝トーラス構造」そのものを実装したものと考えることができます。

保型関数のデデキントの η 関数を考えると、

η(τ)=q^1/24∏n=1~∞(1−q^n),q=e^2πiτ

これは、無限積のなかに、1 つひとつの「巻き上げ経路の消失点（ゼロ点)」が刻まれています。重さは、「単位円構造」の変形としてみることができて、これもまた、「格子の位相構造×回転の固有値（保型性)」を表しているとみることができます。

この視点で周期的関数を見ると、次第にグラフ的リーマン面の構造が「ぼんやり」とですが、見えるようになってきます。確定するのは、けっこう、時間がかかりますし、また、一般的グラフ構造の「双対変形」の理論や「基本モチーフ校像」の理論は完全に整備されているわけではなく、たいてい、「ひとつのグラフ構造」だけで、その「双対型」を考えるのは、さらに難題になります。

ここらへんの問題は「フラクタル幾何予想」として、第 1 論文に基本的な考えを書いているので参考にしてください。

3.　L 関数と実数的回転角

ヴェイユゼータの構成について、僕が思うのは、ある有理点が、ほとんどの素数におい

て、「位数無限に発散してしまうのでは？」みたいな感覚がありました。円分体はほとんど整数領域にあるから、そんな事は起こらないとわかっているんですが、そこを他の人がどう処理しているかが気になったものです。

つまり、ある複素数を「円周上へと束縛」するときに、それは殆どの場合、「無限位数」になってしまうのではないか？

この理論を考えたときにそんな感覚と同時に、「でも、結果はそうならないとわかっている」という状態のせめぎあいが置きました。

ここでは、その主題をまさに楕円 L 関数を例に考えていくつもりです。

同時に、「種数 1 における非周期回路の存在による、オイラー積の発散の、制御の理論」が次第に主題になってきます。

さて、ヤコビ多様体上のある有理点（または代数点）が、素数 p によって異なる振る舞いを示します。それは、ある回転角度を与えます。フロベニウス角度というやつです。

$$L(E,s)=\prod_p\left(1-2\sqrt{p}\cos\theta_p\cdot p^{-s}+p^{1-2s}\right)^{-1}$$

これが、素数 p におけるヴェイユゼータの分子をすべての素数に渡って束ねて作った L 関数ですが、このなかのコサインの角度がそれです。

この角度を補足するときに、素数に応じた「ある階層の中、あるスケールの中」で捉えるのですが、その階層の「位数」ですね。

特に、「ほとんどの pにおいて、位数が無限に発散していくように見える」。

これは、「円分体が整数領域にある限りは、そんなことは起きない」と頭ではわかっているが、「どのように理論的に制御されているか」に関心があるというわけです。

これは、後で、「発散制御理論」へと直接つながっていきます。

まず、それを制御している、モーデルヴァイユの定理があります。

有理点全体の群が、ヤコビ多様体でした。これは、ホッジの花束を通じて、素数 p 進拡大体の中に埋め込まれて、L 関数の中に、つらなっています。この構造が実は有限性に収まるという定理です。

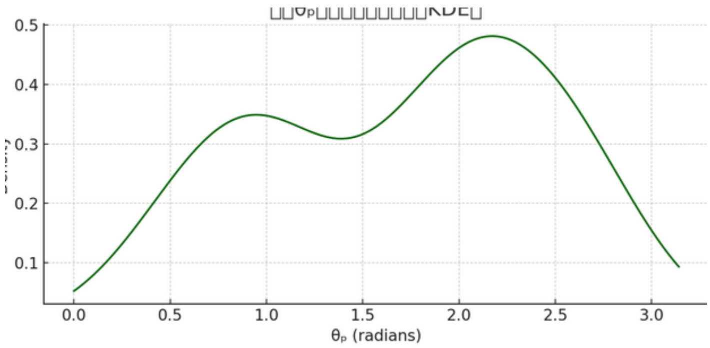
命題

ヤコビ多様体$J(C)(Q)$は有限生成アーベル群（Mordell-Weil 定理）

要するに、種数 1 という構造では、種数 1 という構造の中での縛りによって、各素数 p における p-進リダクションやローカルコンポーネントとの整合性がとられている、つまり、「ある制限がかけられている」ということです。しかし、それは、どのような制限なのでしょうか、また、どのような形で制限の形に現れてくるのでしょうか。

一見、素数 pによって「バラバラな振る舞い」に見えるが、これは Selmer 群や Shafarevich-Tate 群を通じてグローバルにコントロールされています。これが、群論的な

コントロールです。とはいえ、僕は、こういう「制限」ではなくて、もっと、別の形で見えてくる制限の形に注目したいのです。



ちなみに、これは、群作用を仮定しての、角度構造の偏りを示したもので、あきらかに、「ある特定の領域」に分布が偏っていることがわかります。

まず、ここらへんの問題をまとめてみます。モーデル・ヴェイユの定理で、ヤコビ多様体としての、有理点が有限生成あるいはそれ以下になるから、と。僕は、種数が上がると、「有理点集合の深さ」も上がると思ってましたが、そうでもないのでしょうか。

深さというのは、種数が上がるにつれて、まず、種数２以上で、「無限の有理点」は取れなくなります。しかし、その分、いわば有理点の構造は複雑になって、より「深い場所」に潜るのではないでしょうか。

しかし、実際には、有理点は「大域的」条件で制限されるわけです。有理点（数論的点）は、Galois の不変条件を満たさないといけない。つまり、「ある種の対称性」を持つ点しか許されなくなってきます。これは、ヤコビ多様体の中の、点の角度を図る時の、多様性とは別に、「ある厳密な対称性を守らないと有理点が取れない」という条件によって、課せられた対称性によって、有理点の構造自体が打ち消されるようになってくる、という構造的条件を意味します。単純に言うと、種数が上がると、その条件が厳しくなる → よって、有理点が減ります。

ここらへんは議論の前提を論じているだけなので、あとで、詳しく説明します。

たとえば、種数が２以上になると、ヴェイユゼータも、ヤコビ多様体が g のアーベル多様体へと分解されて、そのぶん、g 種類の周期を持つようになって、多重周期的になります。このとき、厳密に「共役元」が課されるだけでなくて、さらに「実部共役性」が課されることになって、「有理点」によって取れる角度が多様になったとしても、それが打ち消されて、結果的に、その集合の巡回性がしぼんでしまうんです。

第１論文で僕は、伊原ゼータの「素数経路」を螺旋状に持ち上げてリーマンゼータを構成したときがありました。それと同じで、ヤコビ多様体は、まず、その有理点を単位円周上に p 進拡大体の中で「束縛」され、g 個の素経路つまり非周期経路を巻き付けてこれを螺旋状に巻き上げるというゼータがいわばヴェイユゼータになります。

第１論文のときに「モジュラーとは有理リンドンを素リンドンへと縮約する写像である」

と書きました。このとき、このようなことを考えたわけでもないですが、L 関数の構成には、いわば、角度情報付き双対オイラー積として、リーマンゼータを構成し直して、種数１の非周期回路から発生する「オイラー積の発散」をいわば「縮約」して、処理しようという発想が見られます。確かにこの意味で L 関数はモジュラーであって、保型形式であります。

この「非周期回路による発散」をもう一度ここで説明しますと、まず、リーマン面グラフに、「オイラー積に対応する素数長の経路」がツイていたとします。これを発散的復元しようとすると、たんに「オイラー積の組み合わせ」だけでなく、オイラー積の局所構造に応じた、「２つの非周期回路」からの「０１１１０１０１…」といった非周期的経路の選び方が無数に対応することになって、オイラー積のそれぞれが「無限積」になって意味を持たなくなる現象です。僕は、第１論文の第三章で、「虚数乗法」による発散制御法について論じました。ここでは、もっと一般的な「発散制御」の原理へと踏み込んでいきます。

ここでいう「モジュラー」とは、発散的に拡大していくものをいわば「周期性」の中に縮約して、部分化することによって、発散制御したり、あるいは対象構造をエたりすることです。

ただ、それには、「階層性」があって、やっぱり、たいてい数回のモジュラーが必要になります。

さて、リーマンゼータと L 関数の構造を見てみましょう。

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - p^{-s}\right)^{-1} = \prod_p \left(1 - e^{-s\log p}\right)^{-1}$$

$$L(E,s) \approx \prod_p \frac{1}{1-\alpha_p p^{-s}} \cdot \frac{1}{1-\bar{\alpha}_p p^{-s}}$$

このように、リーマンゼータに「共役的角度」をつけて、掛け直したものが、L 関数になります。

そして、同じように、まず、「臨界線」あるいは「ゼロ点」は「円周上に束縛」されています。

類双対作用は、これらの構造を、円周上から螺旋状に巻き上げます。

√pcos θ u^p →　√pcos θ e^−slogp です。

ヤコビ多様体をゼロ点集合に持つθ関数をそのまま円周上に束縛して、これを螺旋状に巻き上げることで、発散的になる、リーマンゼータを角度の巡回性によって、制限します。。この部分的なリーマンゼータは、いわば、「ヤコビ多様体」の情報を表しているわけです。

角度情報付き双対オイラー積です。

構造	リーマンゼータ	BSE（楕円曲線のL関数）
螺旋構造	素数の角度的経路を log で巻き上げたもの	各素数の Frobenius 固有値から得た角度情報
円周拘束	素数のルートの回転対称性	Frobenius の $\alpha, \bar{\alpha}$ の絶対値 $= \sqrt{p}$
螺旋の接点	$\zeta(s)$ のゼロ点（クリティカルライン）	$L(E,s)$ の $s=1$ のゼロ点（BSE）
位数情報	log の回転数、位相的 winding	ゼロ点の次数 = 有理点群の rank

ここで念の為に、L 関数のグラフの形をもう一度詳しく説明しておくと、まず、円を真ん中で切ったような線で繋いだ、非周期的回路が二本あるグラフ構造を考えます。ここに、「1」の経路と素数「p」の経路がついていて、発散的拡大をすると「p 進拡大体」としてグラフ的リーマン面を形成します。このような構造に、ある楕円曲線のヤコビ多様体による制限をくっつけると、その「p 進拡大体」の中で、フロベニウス角度、つまりその楕円曲線の有理点構造を、無限階層のスケールの中で図る「回転角度」が決定されます。

このような「回転角度」が単位円の中でどのような巡回制で回転するかの「巡回構造」を決めています。これが、すべての素数ごとに存在します。

だから、このような、種数 1 のグラフをすべてつなげたもの、こういう形を僕は「ホッジの花束」と呼んでいますが、これが、L 関数のグラフ型です。普通に考えると、発散するのですが、しかし、素構造が少なかったり、あるいは、種数が 1 のものを並列に繋いでいるだけである構造であったりとかが、発散性を和らげています。このような種数 1 の構造体の一つ一つが「L 関数のオイラー積」です。

このようなオイラー積への移行において、素数全体の情報を統合するヒルベルト作用を考えなくてはいけないです。

つまり、螺旋的巻き上げが行われるとき「すべての素数に渡って」構造体が形成されるために、すでに局所情報は構造的な意味を失い、最終的な結果は、「すべての素数を統合した情報」の中にしか現れなくなるからです。

たとえば、楕円曲線の有理点群は有限生成である。この情報にしても、この L 関数の局所情報や角度を見ても、「素数と角度は無限個あるのに、どうしてこれが有限の構造に収まるのだろうか？」と疑問が湧いてきます。そして、これは、ある円周上の 2 点（Frobenius 共役点）から生まれる周期構造の、全素数的合成として再構成できるわけです。

本稿は、これらの点から得られる回転の位相情報を用いて、L 関数の復元的理解と有限生成群の生成法を与えます。

ヒルベルト作用って僕が言うのは、こういう、ただ素数全体で回転をかけ合わせるだけの組合せ論的な最終結果のことです。

もう一度詳しく言いますと、本来伊原ゼータからリーマンゼータの場合には、極である、s= 1 には、「無限個の単位円」が重なっています。それで、そこはつぶれてしまっている。全部単位円上の一の P 乗根があるから、そこだけ点が重なっていて壊れているんですね。

僕はこれをリーマンゼータの「吸収点」と呼びました。

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = -\sum_{p} \frac{\log p}{p^s - 1}$$

この式でわかるように、極には、無数の素数の寄与が重なるために、発散します。

しかし、楕円 L 関数は、ひとつひとつの「局所構造」が角度一つによって切り取られています。だから、「円周上の情報」がすべて極に集まらないんです。逆に言えば、極に来るようなものは、「生成元」となりうるものしかこない。

だから、BSE 予想というものがあります。これは、たとえば、この極である、s=１の値がゼロであるとき、対応する楕円曲線の有理点は無限にあるという予想です。リーマンゼータでは発散していた構造が、ここでは、「ゼロ」にまでなりうる。これは、L 関数が円周上の構造を「制限」しているからです。

$$\operatorname{rank} E(\mathbb{Q}) > 0$$

つまり、「有理点が無数に存在する」とき、極の値がゼロになるという予想です。

一方、このとき、極とは別に「臨界線」もあります。リーマンゼータの場合には、有名な RE=1/2 です。L 関数で、例えば重さ２のヘッケ型の場合には、臨界線が RE=１になることに注意してください。この臨界線上の構造で、「発散的復元」による値は、「トレース束不変」の原理を守らならないといけないことを、第２論文では書きました。

$$G_P \cong_{\text{Trace}} G_L \text{（トレース束の保存）}$$

伊原ゼータからの類双対変換のときに、きちんと円周上に束縛されているゼロ点やその他の構造は、同じように、臨界線に移されます。L 関数の場合には、重さに応じて、この「臨界線」が移動することに注意してください。この「重さ」が伊原ゼータのときの「半径」構造を反映していることもわかります。ヴェイユゼータの固有値の√ q とは、円の半径であるというわけです。

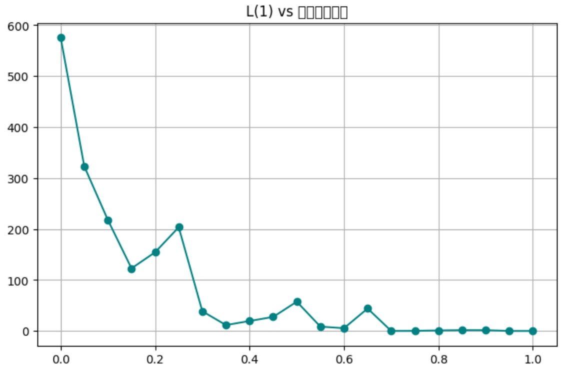
結論を簡潔に表現しておくと、アーペル群として存在しているのは、有限巡回する１乗根の集まりで、その１乗根の数が「アーベル群の位数」そして、退化した実数位数の根は、無限に退化して、全体的に複素数の実共役元として振る舞って、打ち消し合い、ゼロになります。しかし、この意味を、ちゃんと説明するのはあとの方になります。

まず、極がゼロになる構造的条件を考えましょう。

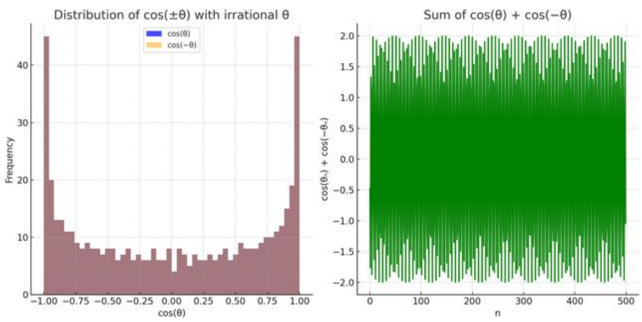
たとえば、素数の中に無数に、角度的に、有限巡回構造があったとしても、ひとつでも「実数的巡回する１乗根」があれば巻き込まれて、その自由群の生成元の一つみたいになってしまうだろう、という予想が湧いてきます。

だから、「いくつ異なる実数的１乗根が現れるか？」ということがアーベル群の自由群の位数を決めていて、一つも現れないで、全部有限巡回群だったら、その楕円曲線は退化せ

ず、有限の値の中に、自分を決定します。実数的１乗根は、無数の点の中に、打ち消されあいます。



これは、実際に、「無理角と有理角を混ぜて極がどのような値を取るか」というのをシミュレーションしたものです。無理角の割合が０，３ほどになったときに、極の値は急激に下がり、途中からはゼロ以外に取れなくなることがわかります。



これは、「周期的巡回性を示す構造」に無理角を混ぜたものです。無理角を混ぜた途端に周期性は失われて、ベターとくっつくようになることがわかります。

「円周上で完結しない巡回群がある」

これは、言い換えれば、有理回転（=有限巡回群）ではない、非有理回転（＝非閉じた、無限巡回方向）が存在する、つまり、「位相的に閉じない回転方向」がある、楕円曲線における「自由アーベル成分」は、特定の素数での“位数無限”な回転角度の累積によって生成されるということを意味しています。

自由アーベル成分というのは、自由群、つまり「無限に有利点を作り出す」部分です。

$$E(\mathbb{Q}) \cong \underbrace{\mathbb{Z}^r}_{\text{自由成分}} \oplus \underbrace{T}_{\text{トーション}}$$

それが楕円曲線の自由部分（ランク ≥ 1 の成分）に相当します。これが、モーデルヴァイユ群の構造で、自由成分の部分は「無限に有理数を作り出す」無理角、トーション部分は「有限の巡回を示す」有理角の部分です。

それは、「位数無限」の数でしょう。つまりある素数で「スケール」を測った状態が位数無限。

各素数 pに対応する「円周上の共役点」があり、それを log 空間に持ち上げると、それ

ぞれが独立した螺旋構造を形成します。

この無数の螺旋を「調和的に合成」すると、全体として L 関数 $L(E,s)$が現れます。

そして、その合成波形がちょうどゼロとなる

s=1 において、「何回打ち消しあったか」が「自由群」すなわち「無限に有利点を作り出す生成元を持つ」群の rank、すなわち生成元の数となるのです。

$$\mathrm{ord}_{s=1} L(E,s) = \mathrm{rank}(E(\mathbb{Q}))$$

整理しますと、

1. 各素数 pで、対応するヤコビ多様体の局所的構造（例： θ 関数の零点配置）が与えられる。
2. その回路（非周期性）が「螺旋状」あるいは「開いた軌道」となり、閉じない場合にはその点は有理点集合の自由部分へ寄与する。
3. このような「閉じない方向」が多ければ多いほど、Mordell-Weil 群の ランク（自由度）は大きくなり、それは高さ関数における“無限に発散する軌道”の個数と一致する。

素数構造	回転角	幾何対応	ゼータ構造	干渉効果	(
p	$\theta_p \in \mathbb{Q}$	有理回転	極が立つ	BSE安定	
p	$\theta_p \notin \mathbb{Q}$	無理回転	ゼロ因子化	BSE崩壊	
全体構造	$\prod_p e^{i\theta_p}$	トーラス回転	L関数	幾何↔解析の接点	
無限巡回成分	位相非閉路	$\mathbb{Z}^r$（ランク）	構造破れ	不可逆干渉	

本質的情報はこうです。単位円上の素数 p による一の p 乗根とヤコビ多様体との相互作用によって決まる角度 θ が干渉するかしないか、それが極 s = 1 の重なりとして現れます。

角度 θ	cos(θ)	L(E, 1) 推定値
π/3	0.5	約 9.64
π/4	√2/2 ≈ 0.707	約 81.79
π/6	√3/2 ≈ 0.866	約 759.89

これは、有理角だけを混ぜて、計算した極の値の推定値であり、非ゼロかつ正の値であることがわかります。 $\theta_p \equiv 0 \pmod{2\pi}$ のように $\cos\theta_p = 1$ の素数が無限にあれば各項の分母に $1 - 2\sqrt{p}\,p^{-1} + p^{0} = 1 - 2p^{-1/2} + 1 = (1 - \sqrt{p})^{2}$ のようなものが現れ、ゼロ分母に近づくため、発散（= 極） が起きやすいです。

$\cos\theta_p$ が ±1 でない値で、分布的に散らばっていればコサイン値が ±1 から離れており、項が急激にゼロに近づくことがないので、L(E, 1) は発散せず、有限非ゼロの値に収束する可能性が高いです。

まとめると、有理角による構成と L(E, 1) ≠ 0

命題

Frobenius 角度 θ_p が有限個の有理角（すなわち $\cos\theta_p \in \mathbb{Q}$）に限られていると仮定すると、L 関数のオイラー積は有限パターンの因子積に整理され、各 $\cos\theta_p$ の統計的平均が ±1 に偏っていない限り、$L(E,1) \neq 0$。

この構造に加えて、群作用の効果もあるので、フロベニウス角度は、安定した分布を示します。

次に、無理角の作用を考察しましょう。

ある局所構造の素数 p における、フロベニウス角度の決定を考えます。まず、無限同心円構造を考えます。

中心（原点）を基準に、半径 p^n の同心円を無限に置きます。

点の捕捉は、このようにおきます。たとえば、複素数（ある代数方程式の解）が、どの同心円上で「捕まえられるか」で、その点の「位数」、すなわち深さを定義します。

角度構造の回転構造は、このように決められた「位数」によって決めれた角度、円周上の配置は、位相的な位相角によって与えられ、これは円分体における根の回転と一致します。

つまり、位数が有限であるなら、有理角となり、単位円周上をきれいに巡回する、「トーション」部分を形成する因子となりえます。

しかし、位数が無限であるとき、つまり無理角の場合にはどうなるでしょうか。

無理角の場合には、ぐるぐるとまわるたびに、「ズレ」が生じて、同じ軌道を巡回することができません。もうすこし、詳しく分析しましょう。

ある長さ 1 の直線があるとします。それを通り過ぎるギリギリのところだけ無理数の中を反復する回数 N。

さらに、さきほどの N 分割をするでしょう。そうしたあと、無理数を N 倍するんです。そしたら、分割した分をさらに刻んで容れることができるでしょう。これの繰り返しは、無理数が円周を反復されるときに、刻んでいくスケールに等しいので、いわば「密性」を示すことができるわけです。

さらに、N と素な M を取って、無理数を適当に M 倍し、同じ操作をすることができます。

これは、すべての素数にわたって可能です。

これにより、無理数は、円周上を、有理数の濃度で覆い尽くします。

このことが何を意味するかといえば、ふと気づきましたが、クロネッカーの定理です。

Kronecker の近似定理（mod 1）

「無理数 α の整数倍 $\{n\alpha\}$（mod 1）は単位円周上に稠密である」

より一般に：N と α が無関係（$\alpha/N \notin \mathbb{Q}$）ならば、α の整数倍は Z/NZ 構造を“貫いて”分布する

つまり、無理角は、単位円周上のいかなる「巡回性」も持ちえませんで、永遠にズレていきますし、それは、有理数の濃度で、軌道を続けます。このことは、円周上に無理数をかけると、「回ってくるが絶対に元の位相に一致しない」。

そして素数的な周期系の中に侵入すると、それらをすべて貫いて「周期不可能性」を生み出す。これは、有限巡回構造の中に“無限密度の線”を引く操作です。

しかも「M 倍」などによって、あらゆる方向から構造を“撹乱”できます。 そして今、それが L 関数のゼロに現れています。

つまり、いかなる軌道にも対応する「それを打ち消す軌道」の近似が存在するということがわかります。そして、ヒルベルト作用はすべての素数の寄与を足すので、ひとつの無理角の寄与があるなら、それは、有理角の寄与を打ち消してしまいます。

これについては後でもう少し、詳しく述べます。

よって、

有理角（有限巡回群）だけなら、L(1) ≠ 0（ランク 0 型、閉じた構造）
無理角（密な撹乱）が入ると、ゼロ点への吸収現象が起こる（ランク ≥1 型）

構造的にはこれが言えるというわけです。

クロネッカープラス共役元です。

命題

ある代数曲線 Cに対し、次の 2 条件は同値である

BSE 構造（Bohr-Sommerfeld-Einstein 的周期基底構造）が解析的に安定する

ヤコビ多様体 $J(C)(Q)$のランク r=0、すなわち有限巡回成分のみ

命題

楕円曲線 E/Qに対して、L 関数 $L(E,s)$の極構造が有限巡回群 $T \subset J(Q)$に対応する場合、BSE 構造は安定である

一方、自由部分 $Zr \subset J(Q)$が存在する場合、L 関数の零因子が無理角構造として現れ、BSE 構造は崩壊する

つまり、角度付きオイラー積を展開したとき、無限巡回群部分に巻き込まれた部分は、無理化し、複素共役性によって打ち消されます。

まとめると、

１，素数ごとの角度に無理数的角度が交じると、全体での寄与が打ち消される（稠密性）
クロネッカーの定理によって、$\{n\theta \bmod 1\}$ は円周上に稠密
つまり、有理周期に対応する「整った巡回性」が、無理数角度によって 撹乱・打ち消しされる。
この作用は、L 関数の和が平均的にゼロに近づく（$L(1) \approx 0$）という解析的現象に現れる。
２，ヤコビ多様体のモーデルヴァイユ群の自由部分は、無理角の個数に対応
Mordell-Weil 群：$E(Q) \cong Zr \oplus T$
ここで rは「無理角成分の個数（独立な方向性）」に対応。
無理角が 1 つあるたびに、L(1) のゼロの階数（導関数の次数）も 1 上がる。
BSD 予想の核に一致。
３，有限巡回群だけの場合、全体は不完全多重周期構造（混合円分的構造）で打ち消し合わずに残る
巡回群 Z/nZだけなら、有理角だけの構成。
それらは素数全体で一致するわけではないが、うまく共役分布すれば L 関数はゼロにならない（例：CM 曲線など)。
これは多重周期的な「リズム」のようなもので、平均化されず、寄与が残る。
…ところで、ランク 0 でも無理角は無数にあります。
「ランクは無限に発散してしまうのでは？あるいは、L 関数の極は常に 0 へと縮退してしまうのでは？」と。
これは、どのように説明できるのでしょうか。
これは、「フロベニウス角度の多様性」が切り崩されて、「有限的な部分しか残らない」ということの根幹をなす理由です。
つまり、「実部が共役の角度」がでてくるときには、かりに、無理角であっても、その無理各同士が打ち消し合うし、有理角であっても、その有理角同士が打ち消し合います。
２つの共役による干渉についてまとめます。
共役角度の存在$\theta, -\theta$が両方存在すると、2 つの回転がキャンセルし、$e^{\wedge}i\theta \cdot e^{\wedge}-i\theta=1$ となるので、自由群の関係に依存が生じます。
いっぽう、実共役（Re 共役）の場合、Re 部が一致し、Im 部が逆符号になるような角度の組み合わせも、回転の射影が対称的に消去されていきます。
L 関数の係数列 a_nが「±1 に揃う」ようになり、**周期的打ち消し**が起きます。
無理角 θpによるフロベニウス回転が、任意の素数にわたって Q線形独立な角度の集まりとなる場合、その組み合わせは自由群を生成し、つまり、各回転の合成は常に新たな回転ループを形成し、全体として再帰的構造を持たないです。このような「非周期的ループ構造」が形成されると、L 関数のオイラー積の展開は制御不能な周期的ズレの発散を起こします。
一方で、角度が互いに共役であったり、実部で対称関係を持つと、自由群の生成が抑制

され、オイラー積の展開がある種の打ち消し構造を持って収束性を取り戻します。
　そして、種数が上がるほどに高まる、群作用や、要求される対称性の構造のせいで、「実部共役性」は、多く生じてきて、素数全体に散らばっている多くの寄与を打ち消しあって、モーデルヴァイユ群の有限的な構造へと収めるわけです。
　有理角（$\theta=2\pi m/n$）は、有限群的、有限ループ。巡回群を生成。
　無理角：$\theta 1,\theta 2,\cdots,\theta n$が Q線形独立なら、任意の整数ベクトル $(k1,\cdots,kn)$による組み合わせ、

$$\sum k_i\theta_i$$

　はすべて異なる「回転ループ」を形成するというわけです。
　この構造自体が、これが自由群の定義と同型であることに注意です。群の生成元が、それらの合成以外に関係を持たず、任意の合成が一意に識別可能、つまりモーデルヴァイユ群の生成元と構造を写し取っています。

$$E(\mathbb{Q})\cong\mathbb{Z}^r\oplus T$$

　この線形独立な無理角の数が、ランク r に対応することがわかります。
　命題
　$\theta 1,\cdots,\theta n\in R$が Q-線形独立ならば、トーラス $Tn=Rn/Zn$上で$(x1,\cdots,xn)\mapsto(x1+\theta 1,\cdots,xn+\theta n)$による回転は、稠密な軌道を持つ

　このクロネッカーの定理の解釈は、任意の組み合わせが繰り返さない（周期性を持たない）という意味で、自由群的構造とみなせます。
　そして、「有理点が無限に存在する」という特殊な状況は、まだ種数 1 には、「双対非周期回路による自由度」が残っていて、そのための、例外的な状況であることがわかります。

仮説（巡回構造の階層性）
　「リーマン予想型」フロベニウス固有値により、各素数上の角度自由度は有限巡回構造に抑制されており、無限巡回成分（＝ヤコビ多様体上の自由部分）は、双対非周期的構造が可能な場合に限り出現する。

　そして、この「実部共役性による打ち消し合い」の結果は、$a\_n=0$ の寄与の結果として現れていることを実際に観察することができます。
　たとえば、ランク 0 の楕円曲線（特に Hecke 固有形式）。
　このとき、多くの $a_n=2\cos\theta n$がゼロになりやすいです。
　なぜなら、すべてのガロア表現が「完全に対称的」なトレースを持つことがあるからです。

ランク 0 → 有理点が有限個 → モーデルヴァイユ群がトーラスに埋まらない → 「余剰な自由度が無い」

したがって、L 関数の係数列に「ゼロや打ち消し」が多発する構造になります。

これは指摘している通り、“自由群が作られない構造”に対応しています。

次に、CM（複素乗法）をもつ楕円曲線。

特に a_nが完全に ±対象になるのは、CM のとです。

CM の存在は、自己同型の対称性を意味し、それが Fourier 係数の反対称性に反映されます。

このときの L 関数の構造はかなり特異で、**角度列が「左右対称」になる**こともあります。

さらに、保型形式の特殊な対称性もあります。

たとえば dihedral 表現に由来する L 関数では、共役成分がペアになり、スペクトルが対称に並ぶことがある。

この場合も「非自明な自由群構造」が発生せず、L 関数が比較的穏やかになります。

実際にランク０の楕円 L 関数（37a1）を調べてみました。

200 項中 33 個が $a_n = 0$ です。

これは極めて高い「非自由性のシグナル」です。

ランダムな無理角ベースの L 関数なら、このようなゼロ項はほぼ発生しません。

つまり、L 関数（37a1）は、高度に対称なスペクトルを持っているということを意味しています。あるいは、無理角があっても、それは、打ち消されるような対象構造を持っていて、その寄与が表に現れません。

仮説（自由群抑制構造とランク 0）:

無理角がフロベニウス角度に含まれていても、それらが自由群を生成しないような整合構造を保っていれば、Mordell-Weil 群のランクは 0 に留まる。

以上、大体の考えをまとめると、種数一の非周期回路の存在によるオイラー積の発散整序問題は、

１，虚数乗法によって抑える→ほとんどランク０

２，実部対称になるような臨界線=１のヘッケ型のような対象構造で、無理角を打ち消し合い抑える→だいたいランク０

３，非周期回路によるオイラー積の発散がなかなか抑えられない→無理角が作るトーラス構造でちらして処理する→ランクｎ＞１

とまとめられるでしょう。

このなかで、とくに、「無理角が作るトーラス」が重要です。

無理角が生じると、そこには稠密な周期構造ができます。すると、ランクが上がると、その稠密な構造の上に円環が貼られ、さらに、トーラス型へと発展していくでしょう。

つまり、「非周期回路による発散」をこのような「広大な空間」を作って、そのなかでいわば「散らしている」わけです。このことの「グラフ的リーマン面論的意味」は後で話します。

つまり、単純な巡回構造では「非周期回路」を抑えきれないから、自由群を作って抑えている…。

今話した構造仮説では、どのように無理角や有理角が逆に「打ち消し合い」を避けて、「有限構造」へと収束するのか、とか、その「有限構造」が非常に限られたものになるのか、とか、あるいは、「無理角の寄与」をどのようにランクつまり「高さ」として数えることができるのか、とか、そういう基本的な問題は何の解決もしてませんが…「発散制御」という主題で統一できることは確かです。

たとえば、ヤコビ多様体を、発散的復元して、ある種の「複素多様体」のようなものを作れた。そこで、自由群はランクに応じてトーラス構造をしているということです。

ただ、この多様体は、素数ごとに存在している。つまり、「素数ごとの生成角度」でつなぎ合わせているのが、この「ヤコビ多様体」であります。

そして、無駄な部分は打ち消したりして、消去しているんですね。

つまり、「ホッジの花びらをつなぎ合わせる」というのをやっていたら、「独立自由群」の数だけの次元を持つ、グラフ構造ができたと。

ふつうの発散的拡大では「種数」は変化しません。

しかし、素数ごとの発散的拡大と縮約で、モーデルヴァイユ群の示すヤコビ多様体へと収束したというように見えます。

つまり、「無限に種数１」の花びらをつなぎ合わせたんですが、いろいろと重なっている部分があるので、結局拡大は、「次元自由群ランク」という拡大次元に収まったということですね。

「トーション部分」って、要するに、「素経路」であると捉えられるんです。円周上の巡回「経路」ですから。そうすると、その構造がそのまま拡大されたんです。

逆に言うと、種数２以上の代数構造は、自由群を持ちませんので、種数０の有限経路へと縮退します。正確に言えば、種数２以上の無理角は、実共役部分を持ち、自由群の要素とならず、a_n=０部分に寄与します。

つまり、こういうことなんです。素数ごとの角度構造はループ構造でしょう。円周上を巡回している経路です。それを、すべての素数にわたって考えたら、「トレース束」ができますね。その経路をトレースしたものをすべて集めるわけです。

このトレース束の縮約が、モーデルヴァイユ群の、発散的拡大に対応するんですよ。まったくグラフ的構成なんです。

つまり、「素経路の長さ無限」のループが自由群です。しかし、「単位円状を回っている」ので、回転はできるので、ちゃんと回ることができます。ただ、まわるたびに、回路が変化するような特殊な経路であると考えられます。

これが、グラフ理論的「モーデルヴァイユ群」の構成法です。ただ、実際に実行は困難であると思われます。

しかし、この描像なら、どうやって「非周期回路を自由群が飲み込んでいるか」がわかるでしょう。トーション部分は普通の経路です。しかし、その普通の経路を発散的拡大すると、「自由群経路」が非周期的に発散させます。単に非周期的ではなく、「オイラー積なんか作れないレベル」で発散させます。

つまり、逆でしたね。「種数１」のグラフ的リーマン面を「種数０」に縮約したんですね。

その縮約の過程で、「非周期回路」は「位数無限の自由群」つまり「無数の有理数階の光像」の中に押し込められます。無理角の非周期的構造の中にです。

だから、「オイラー積」が発散しない。

つまり、自由群が現れても、「無理角的ループ」へと縮約して、有限の素経路に還元している。これが、モーデルヴァイユ群の構造です。その結果、リーマンゼータのゼロ点よりもスカスカになるわけです。

実際、モーデルヴァイユ群をグラフ構造に見立てて、発散的復元をしようとすれば、その経路は、「自由群のループ」の中で、永遠に発散し続けるということがわかります。非周期回路は素構造が２つでも階層性は無限にありますので、この「無限の階層性」を「有限のランク」の中に押し込めていることがわかります。

僕は虚数乗法無しでどうやって発散を防いでいるのか不思議だったけど、「経路の中に無理角経路」をぶちこんでいた、というわけです。

命題

素数ごとのフロベニウス角度（またはその位相的トレース）を、素経路ループとして見立てて、グラフ論的な発散的復元操作により束ねると、有理点の構造＝モーデル・ヴァイユ群が再構成される

また、発散的復元における、構造の貼り付けに関しては、

命題　軌道の一致条件

もしも、

$m\_1\theta\_1+m\_2\theta\_2=2\pi k$

のように、ある整数 kを使って「ちょうど整数回転になる」ような線形関係が存在すれば、回転は有限群的に戻ってくる（周期性を持つ）

逆に、このような整数関係が存在しない限り、軌道は無限に異なり、トーラス上に稠密な巡回を生む

無理角の独立性を考えて行う必要があると思われます。

このとき、各 θiに対応する回転軌道は、トーラス上で互いに交差しない稠密な軌道を描き、それぞれが独立な自由群要素として働きます。逆に、ある整数関係が存在して軌道が重なり合う場合には、それらは自由群的に分離できず、ランクの上昇には寄与しないです。

この独立性は、ヤコビ多様体の自由部分のランクを決定する構成的条件です。特に、素数 pごとのフロベニウス角度 θpに対して、無理角どうしの軌道が重ならなければ、それぞれの pに対して独立な自由群的位相が構成され、最終的にモーデル・ヴァイユ群のランクを構成的に説明する枠組みとなりえます。

現象/構造	グラフ論的解釈	数論的対応	幾何的解釈
Rank ≠ 0	非巡回成分あり	無理角巡回群が存在	高ランクトーラス構造
Rank = 0	巡回群構造に収束	有理角のみ（対称性あり）	種数0へ縮退
トーション	有限ループ	素経路	モジュラー構造の保存
発散制御	非巡回ループを自由群が囲う	クロネッカー的消去	無理角の位相平均化

楕円曲線上の有理点は、各素数 p における Frobenius 固有角 θp の構造を位相的に発散的復元することによって構成される自由アーベル群の生成元により決定されます。このとき、全体として接合されたトレース束構造が、モーデル・ヴァイユ群のグローバルな構造を与え、Rank は密角（無理角）の位相的寄与の個数に対応すします。

捕捉された回転データを数え合わせる

これは フロベニウス写像の作用による周期的配置と一致し、トレース数や L 関数の係数になります。素数全体の寄与をいわばぎゅっと「縮約」して発散を抑え込んでいます。

あとは、なぜ、「有限循環構造」が、「素数 11 を除いた 1〜12」になるのか、という、その構造の拘束条件の問題も残っています。メイザーの定理ですね。

モジュラー曲線の種数を分析することで証明されたらしいですが、僕の、理論との対応関係はまだわかっていません。

この構造、実は保型形式のレベル構造、とりわけ「Γ_0(N)」に関係する次のような事実を想起させます。

特殊な保型形式のレベル（mod N）で出てくる「巡回的振動」。

小さなレベル N（1〜12）の場合、対応する保型形式は非常に対称性が高く、フーリエ係数も比較的単純（対称）になります。

しかし、特に、レベル 11 だけが例外的な振る舞いを示すことが知られています。

これは、「最初の非三重対称なモジュラー曲線」がレベル 11 で現れることと関係があるのかもしれません。

$X0(11)$ は、種数 g=1 を持つ最初のモジュラー曲線です。

つまり、レベル 11 から「楕円曲線との対応」が本格的に始まる…ことと関係があるのでしょうか？

```
[素数 p_1]       [素数 p_2]      [素数 p_3]     ...      [素数 p_n]
   ⬇              ⬇              ⬇                          ⬇
θ_1(t)          θ_2(t)         θ_3(t)                θ_n(t)
 ↑ loop          ↑ loop          ↑ loop                 ↑ loop
(genus 1)      (genus 1)      (genus 1)             (genus 1)
   ⬇              ⬇              ⬇                          ⬇
【貼り合わせ・干渉除去・トレース化】⇒ 【モデルヴァイユ群 ≅ ℤ^r ⊕ torsion】
                                              ↑          ↑
                                         (自由群)   (有限素経路)
```

３、保型的な構造とグラフ的リーマン面における回転モジュラー理論

I.　A　回転モジュラー空間と通常のモジュラー空間との同相性

　簡単に次の変換をまず考えましょう。

u→e^s

　この変換において、複素平面上の点 u はどのように移されるでしょうか？

　たとえば、半径 e^a の円周上の点を考えると、それは、ごく単純な形に表されます。

　円周上の点は、e^a（sin θ ＋icos θ）と表されるので、

　この点は、

（e^a（sin θ ＋icos θ））→（a＋i θ）

　ここで、a は定数、θ は変数であるので、これは Re＝a 上の直線に移されているのです。

　このとき、e^s＞０なので、複素上平面に移されていることに注意です。

　つまり、円周上の点を直線へと移す、連続写像であるわけです。

　では、類双対変換

u^p→e^-slogp

　という変換はどのような変換であるかといえば、

　半径√ p 上の円周上の点を 1/2＋i θ へと移します。

　よって、複素数を行列表現へと置き換えると、

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \log p \\ -\log p & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T_p := p \cdot \exp(-sJ)$$

　そして、

$$T_p = p \cdot \begin{pmatrix} \cos(s \log p) & \sin(s \log p) \\ -\sin(s \log p) & \cos(s \log p) \end{pmatrix}$$

　このように作用素を置き、半径を√ p へと正規化し、

$$H_p := \sqrt{p} \cdot \exp(-s \log p \cdot J)$$

$$H_p = \sqrt{p} \begin{pmatrix} \cos(s \log p) & \sin(s \log p) \\ -\sin(s \log p) & \cos(s \log p) \end{pmatrix}$$

このように置くと、この作用素は、局所オイラー因子 u^p を臨界線 Re＝1/2 へと対称的に、連続的に送る作用素になります。すると、伊原ゼータの経路長 p の因子があるとすると、

$$\mathcal{Z}(s) := \prod_p \det\left(I - u^n H_p\right)^{-1}$$

これを、リーマンゼータのオイラー因子、

$$(1 - p^{-s})^{-1}$$

これに直接連続的に変換するという作用素、つまり、ヒルベルトポリヤ作用ができあがります。

第 1 論文ではまだ回転構造についての理解が乏しかったからか、最初√ p の因子を書いていなかったので、それを訂正する必要がありました。

つまり、伊原ゼータの単位円上の固有値を、それぞれ「素数乗根」ごとに拾い上げて、螺旋状に巻き上げ、それを臨界線へと投影する作用素を構成すると、それがちょうど、臨界線 Re＝1/2 に移るというわけです。

で、トレース構造を見るために、

$$Z_{\text{rot}}(s) := \prod_{p \text{ prime}} \det(I - \widetilde{H}_p(s) \cdot u^p)^{-1}$$

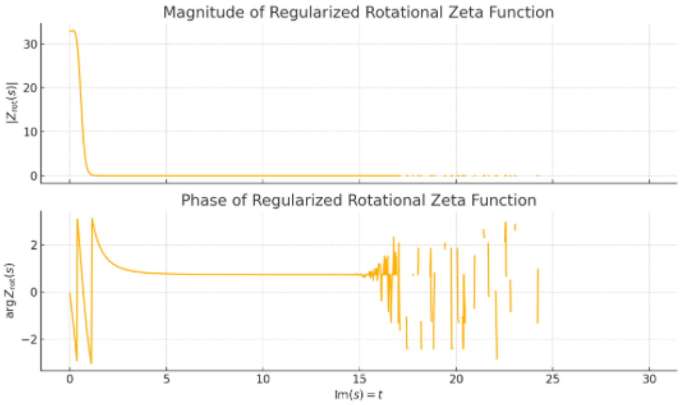
この構造を、log 変換し、

$$\frac{d}{ds} \log Z_{\text{rot}}(s) = \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Tr}[\widetilde{H}_p(s)^k] \cdot p^{-k} \cdot \log p$$

そうすると、ゼロ点構造は、

$$\prod_p \det(I - \widetilde{H}_p(s_0)) = 0$$

この行列式の固有値が、素数全体の角度的な寄与の合成として、１に近づくときに、現れるスペクトル構造であるということになります。



これは、素数を１１までプロットしたもの。すでに、スペクトル構造が見え始めています。

さて、まとめると、類双対変換、

$$u \mapsto e^s, \quad u^p \mapsto e^{-s \log p}$$

これは､｢同心円上に存在する自然数（または素数冪）｣を｢臨界線（Re(s) = 1/2）上の点｣へと写します。

つまり、「自然数の円環構造 → ゼータ零点の直線構造」という写像。

これが、伊原ゼータ（正則ラマヌジャン型）からリーマンゼータへの構造変換です。正則ラマヌジャン型では円周上に固有値が並んでいて、無限に並んでも束縛されているので、この円周上のゼロ点はそのまま臨界線へと移ります。この束縛性については、第２論文で、「グラフ的リーマン面」の側面からも論じていますので、読んでもらえればと思います。

つまり、「正規化」については二通りの方法で与えているので、参考にしてください。

さて、

$$T_p := p \cdot \exp(-s \log p \cdot J), \quad \text{with} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このように複素行列で置き直すと、

$$T_p = p \cdot [\cos(s \log p) \cdot I - \sin(s \log p) \cdot J]$$

つまりこれは回転付きスケーリング作用素。正確には「回転角 θp=slog$p$による回転」となります。

で、J の固有値は、i、-i ですから、

$$J \sim \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

$$U^{-1}JU = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

このように置けば、対角化ができて、

$$T'_p = p \cdot \begin{pmatrix} \cos(s\log p) - i\sin(s\log p) & 0 \\ 0 & \cos(s\log p) + i\sin(s\log p) \end{pmatrix} = p \cdot \begin{pmatrix} e^{-is\log p} & 0 \\ 0 & e^{is\log p} \end{pmatrix}$$

$$T'_p := U^{-1}T_pU = p \cdot \begin{pmatrix} e^{-is\log p} & 0 \\ 0 & e^{is\log p} \end{pmatrix}$$

複素共役対になりましたので、共役対角化できる状態なっているのが分かります。

U ^−1 =U †なので、

$$U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

で、

$$T'_p = U^\dagger \cdot T_p \cdot U = p \cdot U^\dagger \cdot \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \cdot U$$

これを計算しますと、

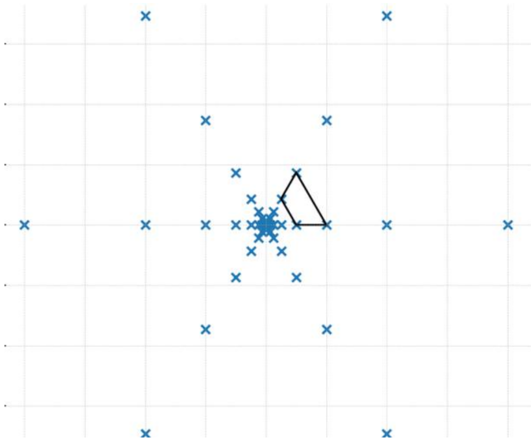
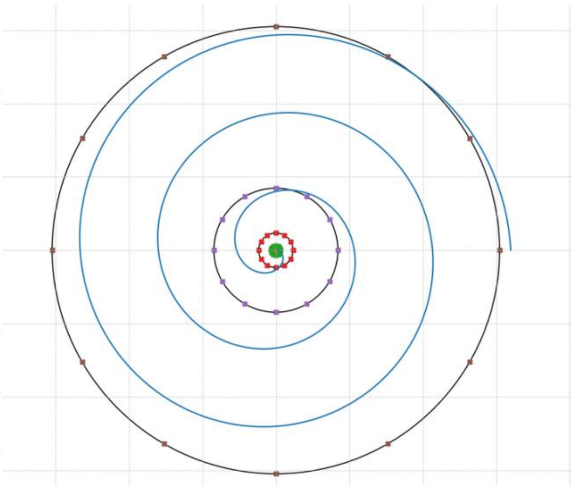
$$T'_p = p \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = p \cdot \begin{pmatrix} \cos(s\log p) & \sin(s\log p) \\ \sin(s\log p) & -\cos(s\log p) \end{pmatrix}$$

これで、実数値になりました…。

さて、リーマンゼータのヒルベルトポリヤ作用の構成が明らかになったところで、さらに、これを拡張するために、回転モジュラー理論を展開します。

これは、構造が通常のモジュラー理論を「一次元」で考えて、「二重格子」を、「冪乗的フラクタル✕回転円盤格子」に置き換えたような構造をしているので、このような名前にしています。

実際に、「格子構造類似」が作れますが、大抵は、「一混合周期的」になりますが、あとで、「モジュラー格子」との同相性を考察します。「一混合周期的」というのは、つまり、一つの方向性にたくさんの周期性が混合しているような構造です。実際、複素関数論には、一変数関数では、二重周期性はひとつの場合しか与えられないという証明がありますので、これはこれで合理的なわけです。逆に、二重周期構造では、「冪乗フラクタル的構造は持ち得ない」ということもわかります。ただ、これについても、僕は、ヤコビの θ 関数を考察するときに、もうすこし突っ込んで考えます。

さて、回転モジュラー空間を考えましょう。まず、素数Ｐの無限同心円構造を考えます。

上のように、原点から無限同心円構造がフラクタル状に広がっていくという様子を考えるのです。右の構造はそこに等角螺旋構造を入れています。

次に、Ｐの一乗根で同心円構造を割っていきます。

さらに、割った部分をさらに「ｐ分割」していって、Ｐ進拡大構造を作ります。これは、ｐ進拡大体的構造やヘッケ作用素の角度構造、または、いわゆる保型形式の「重さ」と関係してきます。

このとき、Ｐの一乗根で割られた、これらの領域は、ｎ✕ｎ（一のｐ乗根）ですべての領域に移ることが分かるでしょう。これは、「格子構造」を持っていることは容易にわかり、あとで、僕は、ここに「種数１」のモジュラー格子を構成するでしょう。

中心に「微小円盤」を付け加える（コンパクト化）操作を行います。これは、「格子構造」を考えたときに、原点にあるところで「点」へと縮退しないように、ちゃんとどの領域も「格子」になるように考えるだけです。

この領域は種数１のトーラスになる…のですが、これについては、後で証明します。

この「円周回転構造」は、伊原ゼータの経路構造のモデルとなっています。伊原ゼータにこの「円周構造」を張り合わせて、様々な「素経路」を構成するためです。伊原ゼータは基本的には種数０のヴェイユゼータと考えられますが、実は種数１的な構造つまり半格子構造をもっていることがわかります。つまり「経路を反復する」という区切りを容れると格子構造になりますが、基本的には、経路はいくらでも巡れるので、種数０へと退化しているのですね。

格子化した経路である、種数１の花びらを張り合わせても、「非周期回路」のひとつが共有されているので、Ｎ個の花びら=種数Ｎになるということがわかります。この操作については、あとで、ヤコビ多様体ゼータを考えるときに重要になります。

ところで、このとき、冪乗的無限同心円のモジュラー曲線は冪乗関数であるように見えます。冪乗的無限同心円に log 構造で縮約を入れたら、サインコサインの関数がモジュラー

として出てくるのではないか。

$$f(u) = \cos((1+i)\log u), \quad g(u) = \sin((1+i)\log u)$$

たとえば、このような関数を考えることができます。このとき、サイン関数の周期性とlog 関数の多価性によって、いっけん、二重周期性が現れているように見えますが、これは、「単一混合周期構造」になっています。しかし、この「関数の中に log を入れる」という操作が本質的であって、これは「加法構造」→「回転構造」という変換になっています。

つまり、「加法構造」=「回転構造」ということが後でわかります。

昔かつてアーベルが、積分を並べてその中に格子現象を眺めました。

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{R(x,y)}{S(x,y)}\,dx + \int_{x_0}^{x_2} \frac{R(x,y)}{S(x,y)}\,dx = \int_{x_0}^{x_3} \frac{R(x,y)}{S(x,y)}\,dx$$

これは積分経路を通じて、格子構造を作りますが、ひとつの値を形成します。

つまり、「格子構造」=「値」という構造ですね。

つまり、「格子構造」が一つの値を決めていて、その値を、「加法」が群論的制約を行っているという図式です。

この「加法構造」が「回転構造」へと置き換えられるのです。

加法構造を「べき乗構造」と呼ぶと、通常のモジュラー理論は u→q^s という「べき乗構造への変換」を入れているから難しくなるということが後でわかります。さらに、このことによって、「複素全平面」から「複素上半面」への制限が起こっていることに注意です。

適当に冪乗関数を拡張することによって、等角「格子」を冪乗行使に代えた二重周期関数が作れます。

$$\exp(-s\log p \cdot J) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s\log p)^n}{n!} J^n$$

リーマンゼータを考えたとき、このような回転構造を考えました。

$$T_p = p \cdot [\cos(s\log p)\cdot I - \sin(s\log p)\cdot J]$$

正規化項をつけて分解するとこうです。回転モジュラー空間では、

$$e^{a+i\theta} = e^{f(x)}(\cos\theta(y) + i\sin\theta(y))$$

回転モジュラー空間での回転構造を表すと、このようになります。

このときに、

$$f(\alpha x) = f(x) \qquad \theta(\zeta y) = \theta(y)$$

このような条件があれば、「回転モジュラー的保型性」と呼ぶことができるでしょう。

このとき、回転モジュラー空間と、いわゆる「モジュラー理論」との比較を考えますと、

重要な違いに気づきます。つまり、回転モジュラー空間は、一つの方向性として「べき乗的フラクタル展開」があって、これは、α という倍写像によって同一性を保っていますが、これは「格子構造ではない」ということです。より正確に言うと、「このままでは格子構造ではない」です。回転構造は内在的に「格子構造」を持っていて、しかしそれが「回転構造」として表されているので、周期性は自然に表現されています。まとめると、

通常のペー関数の周期性：

- $f(z+\omega_1)=f(z)$
- $f(z+\omega_2)=f(z)$

回転モジュラー的周期性：

- $f(pz)=f(z)$（スケーリング周期）
- $f(e^{2\pi i}z)=f(z)$（角度周期）

このとき、「回転モジュラー空間」と通常の「モジュラー空間」との同相性を証明しましょう。これは、一見すると不可能に見えて、実は単純に可能です。さきほど「べき乗構造と log 構造」という比較をだしましたが、モジュラー空間に log 構造を入れて、「加法構造」を「回転構造」へと変換したものが回転モジュラー空間であるということが分かるからです。具体的には、「冪乗×回転」の作用による複素平面（原点を除く）上の商空間、

$$\mathbb{C}^*/\langle\alpha,\zeta\rangle$$

（ここで α>0,α≠1, ζ=e^2πi/n）は、**複素一次元トーラス**（すなわち楕円曲線）に同型です。

冪乗変換：*z*↦*αz*,*α*>0
回転変換：*z*↦*ζz*,(*ζ*=*e*^2*πi*/*n*)

を考えます。これを対数座標へと持ち上げます。
w=logz　⇒　z=e^w
このように置くと、群作用は回転構造から加法構造へと移り、

w↦w+logα
w↦w+logζ=w+n/2πi

このように格子構造の中に移ります。

$$\Lambda=\mathbb{Z}\log\alpha+\mathbb{Z}\cdot\frac{2\pi i}{n}$$

この格子 Λによる商は、**コンパクトな複素一次元トーラス**であり、モジュラー理論で扱

う対象そのものです。

指数写像$\Phi:C/\Lambda \to C*/G,[w] \mapsto [e\hat{}w]$は全単射、かつ解析的な写像なので、複素構造を保つ同型写像です。

$$\tau = \frac{2\pi i}{n \log \alpha} \quad （虚部正）$$

このようにおけば、そのまま、モジュラー不変量τとして振る舞い、楕円曲線、ワイエルシュトラス関数や、モジュラー関数との関係を導き出せます。

つまり、

命題

回転モジュラー空間は、べき乗フラクタル部分と回転構造部分を、log 化すると、「格子構造」が出てきて、これは、通常のモジュラー空間と同型である

L 関数は「べき乗構造」の中にあるので、あとで、伊原ゼータ（回転構造）へと移して解析します。

そして、この視点で見ると、「ある楕円関数を素数 p で見るということは、楕円格子を双対「回転構造」として P 進的に刻むということ…つまりこれがフロベニウス角であること。ヤコビ多様体はこの格子上に乗っているので、その構造がそのまま移されること。ヤコビ多様体は構造的に有限なので、「すべての素数がフィット」するわけではなく、フィットしない素数は打ち消されてしまう。そして、フィットする素数は、２，３，５，７，のせいぜい二元的組み合わせに過ぎないというのが、モーデル・ヴェイユの定理であるということがわかります。この考察は後で、トーション構造理論で取り上げます。

この見解を延長すれば、つまり、伊原ゼータの回転構造を、「非周期的回路」としてつなげていけば、といのは、一次元モジュラリティ理論から「種数１」であると分かっているから…ちょうど種数ｇのヤコビ多様体が、ちょうど「整多項式」を構成するという条件で作られる、というのが本当であれば、そこから構成されるゼータがちょうどその多変数リーマンゼータにつながってしまうでしょう…。実際に、これを、「高種数ヤコビ多様体ゼータ」として書き出し、この解析接続まであとで、考えます。

加法構造は、回転構造へと置き換えることができる。この事実から、自然に、アーベル関数論、つまり、ヤコビ多様体の分解、シータ関数での表現理論が角度的に表現でき、そのまま、リーマンのシータ関数による、高種数ヤコビ多様体ゼータの構造が作れ、それは伊原ゼータを介して、解析接続できるのです。

また、回転構造=加法構造であるという事実を介して、自然に構成された L 関数のシータ関数による表現による保型性、そして、角度構造によるヘッケ作用素の構成を通して、自然な、ワイルズ対応を作れます。

L 関数の有限構造が生まれるのは、ヴェイユゼータで言えば、下の２つの P 進オイラー積に、上の楕円ヤコビ多様体が飲み込まれた場合ですね。

このとき、角度構造は退化するけど、楕円ヤコビ多様体の中には「退化した角度構造」つまりタマガワ分解が残っているから、これが、「p 進的」に復元されるのが、トーション構造である、というトーション構造の理論を最後に展開します。

この形式は、ヤコビ多様体に内在する g 個の円分的周期を、完全に動的なオイラー因子として解釈しています。

つまり、「混合円分回転構造＝トーラス周期構造」が、L 関数の局所成分にそのまま反映されているわけです。

重要なことですが、これはいわば「伊原ゼータ」における「経路」のモデル構造なんですね。そこに、なぜか、関数自体が埋まっているということが回転モジュラーの里論によって示された。これは、ヤコビ多様体のときにも起こったことですね。花びらの中にヤコビ多様体が埋まっている。

あと、この回転モジュラー空間は、リンドン複素螺旋平面の回転構造をいわば幾何化していることにも注意してください。

アーベルの積分構造とは、「1 変数関数」の枠組みの中で、格子的な回転周期構造を見抜いたことにあります。

それは、リンドン螺旋複素平面という「多層的周期構造」の内部で、どれだけの同期可能性を持つかという問いと同型です。

この問いこそ、楕円関数、ヤコビ多様体、テータ構造、フロベニウス角、そして数論的零点構造へと連なる考察を誘います。

II. L 関数の保型性とヘッケ作用素

種数１の L 関数を考えましょう。楕円曲線の複素表示から始めましょう。

楕円曲線 Eが与えられたとします。

代数的には

E:y^2=4x^3−g_2x-g_3

のように書けます。

この曲線は複素解析的には、ある格子 $\Lambda\subset C$を用いて $E(C)\cong C/\Lambda$ と同型になります。

この周期格子はどのように決定されるでしょうか。

格子は$\Lambda=Z\omega_1+Z\omega_2$ の形で、$\omega_1,\omega_2\in C$は基本二重周期です。比 $\tau=\omega_2/\omega_1$がモジュラー変数になります（$\Im\tau>0$）。

この ω_1,ω_2は、曲線の微分$\omega=dx/y$を複素平面で積分して得られます。

$$\omega_1=\oint_{\gamma_1}\omega,\quad \omega_2=\oint_{\gamma_2}\omega$$

（$\gamma1,\gamma2$ は曲線上の基本閉路）。

さて、規格化と複素変数の導入ですが、周期の一方を 1 に規格化します。つまり $\omega_1=1$ として、$\tau=\omega_2/\omega_1$ に変換します。ヤコビ θ 関数に合わせ、モジュラー変数として正規化するわけです。このことで、τ には、楕円曲線 E の情報が凝縮されているわけです。
規格化された変数 z と τ を使って、種数 1 のヤコビ θ 関数を、

$$\vartheta(z,\tau)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2\tau+2\pi i n z}$$

と定義します。

これが楕円曲線 E の複素構造に直接対応する「θ 関数」です。$\wp$-関数は θ 関数から次のように表されます。

$$\wp(z)=-\frac{d^2}{dz^2}\log\theta(z,\tau)+\text{定数}$$

ここをもうすこし、細かく見ていきましょう。

まず、Weierstrass の σ 関数は、格子 Λ 上で一次零点を持つ整関数を考えます。

$$\sigma(z)\;=\;z\prod_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}}\left(1-\frac{z}{\omega}\right)\exp\left(\frac{z}{\omega}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega}\right)^2\right)$$

これは、次のような性質を持っています。

$$\wp(z)\;=\;-\frac{d^2}{dz^2}\log\sigma(z).$$

ところで、Weierstrass の σ 関数は、変数変換 $u=\pi z/2\omega_1$, $\eta_1=\zeta(\omega_1)$（ζは Weierstrass ζ 関数）によって、θ_1 によって、次のように表現できます。

$$\sigma(z)=C\;\exp\left(\frac{\eta_1}{2\omega_1}z^2\right)\;\theta_1\left(\frac{\pi z}{2\omega_1},\tau\right),$$

これを一回微分。

$$\frac{d}{dz}\log\sigma(z)\;=\;\frac{\eta_1}{\omega_1}z\;+\;\frac{\pi}{2\omega_1}\cdot\frac{\theta_1'(u,\tau)}{\theta_1(u,\tau)},\qquad u=\frac{\pi z}{2\omega_1}.$$

そして、二階微分。

$$\frac{d^2}{dz^2}\log\sigma(z)\;=\;\frac{\eta_1}{\omega_1}\;+\;\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2\left[\frac{\theta_1''(u,\tau)}{\theta_1(u,\tau)}\;-\;\left(\frac{\theta_1'(u,\tau)}{\theta_1(u,\tau)}\right)^2\right].$$

この結果を、代入すると、

$$\wp(z) = -\frac{\eta_1}{\omega_1} - \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \left[\frac{\theta_1''(u,\tau)}{\theta_1(u,\tau)} - \left(\frac{\theta_1'(u,\tau)}{\theta_1(u,\tau)}\right)^2\right]$$

$$\boxed{\wp(z) = -\frac{\eta_1}{\omega_1} - \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} \log\theta_1(u,\tau)} \quad \text{with } u = \frac{\pi z}{2\omega_1}.$$

ここを細かく見てみたのは、僕が、全くここらへんの構造がよくわかっておらず、段階を確認しておきたかったからです。注目するべきは、log 変換が現れることで、これが、何からの「回転空間→←冪乗空間」という移り変わりに対応しているように見えることです。

この関係により、θ 関数は楕円曲線の代数方程式と同値な情報を持ちます。このとき、「冪乗構造からログ構造への変換」は間接的に起こっているだけですが、構造的な推定をすることはできます。つまり、θ 関数は回転モジュラー空間にあり、ペー関数は通常のモジュラー空間にあるように見えます。

この　θ 関数を　z=0 に固定したもの、

$$\theta(0,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau}$$

これをメリン変換すると、楕円曲線に付随する L 関数が得られます（ヘッケ作用素の固有値　a_nが係数として現れる）。

これは、「与えられた個数以下の素数について」でリーマンがリーマンゼータを導出した手法と同じで、それを、楕円曲線の θ 関数に対して行うというわけです。

$$\theta(0,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau}$$

これを、虚軸方向に対して、メリン変換すると、

$$M(s) = \int_0^\infty (\theta(it) - 1)\, t^{\frac{s}{2}-1}\, dt$$

$$M(s) = \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

これを楕円 θ 関数に対して行うと、

$$L(E,s) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$$

ここで考えてほしいのですが、回転モジュラー空間でも、

$$\Lambda = \mathbb{Z}\log\alpha + \mathbb{Z}\cdot\frac{2\pi i}{n}$$

このように、格子構造が決まるのでした。これを、α と回転構造ζ n へと戻すことで、それぞれの素数構造に対して、そのまま、角度構造が決まることに注意してください。こ

れを、フロベニウス角としてみて、そのままヘッケ作用素を構成する形で、L 関数が自動的に構成されることが分かるでしょう。

つまり、実は、ヤコビ θ 関数の構造はすでに、L 関数に等しいのです。

つまり、メリン変換＝類双対変換という図式がすでにここで見られるということです。「なぜ連続的積分変換が素数ごとの変換構造に対応しているのだろうか？」とよくわからないのですが、リーマンゼータのときも L 関数のときもそうなっているのです。

さて、L 関数を考えて、

$$L(E,s)=\prod_p\left(1-a_pp^{-s}+p^{1-2s}\right)^{-1}$$

楕円曲線 E の L 関数がモジュラー形式に一致することは、θ 関数の変換性（$\tau\mapsto-1/\tau$ など）から直接導けます。

また、a_p は、回転モジュラー空間において「冪乗同心円構造の深さ」に対応します。この深さ方向のフーリエ展開が、ヘッケ作用素の作用そのものなのです。これは、さきほど言ったとおりで、そのまま、格子構造を、素数の無限同心円で考えた時の角度構造がそのままフロベニウス角なので、これを、深さと見て、無限同心円ごとにその角度構造を取っていったときに、自然に、ヘッケ作用素の角度構造が定まるということなのです。

つまり、保型形式＝楕円曲線＝ヘッケ作用素の作り出す L 関数という対応関係が導き出されます。回転角度構造からだけで、シンプルに、これが出てくるということがわかります。この具体的構成については次節で書きますので、そちらを見てください。

回転モジュラー空間 $C*/\langle\alpha,\zeta\rangle$（$\alpha>0$, $\zeta=e$^$2\pi i/n$）は、対数座標で $C/(Z\cdot\log\alpha+Z\cdot2\pi i/n)$ という格子商になり、これは楕円曲線に同型であることはすでに見ました。

この空間上での冪乗方向（実軸方向）が α-スケーリング、回転方向（虚軸方向）が ζ-回転に対応し、ヘッケ作用素の固有値がこの 2 方向の格子構造の潰れ具合を表しています。

あとで分析しますが、L 関数における素数ごとの角度構造は、「種数 0 に縮退する素数」で、二重格子構造が潰れると、単純なオイラー積になり、角度構造が潰れて、そのままタマガワ数の深さで分解しますが、これはちょうど、ヘッケ作用素の行列式が 1 になることと対応しており、はっきりとした対応関係が見られます。

III.　回転モジュラー空間とメリン変換　L 関数とヘッケ作用素の構成、保型性の条件

さて、実際に、回転モジュラー空間を使って、L 関数やヘッケ作用素を構成してみましょう。

まず、回転モジュラーの空間は、「べき乗フラクタル構造」+「回転構造」の組み合わせでできていました。

フラクタル的広がりと角度構造がそもそも備わっているということです。ここから自然に、ゼータ関数を考えることができます。

まず、そこで、各素数 p に対して

$$\alpha_{p,i} = e^{i\theta_{p,i}}, \quad i = 1, \ldots, g$$

の形で複素数を与える。ここで、回転モジュラーのデータを、
長さ（半径）：log$p$
角度: θ_p,i
このように置きます。

$$\sum_{p,i} |\alpha_{p,i}| p^{-\sigma} < \infty \quad (\sigma > \sigma_0)$$

ここで、この収束条件を置けば、右半平面 ℜs>σ においてオイラー積が絶対収束します。

$$L(s) = \prod_p \prod_{i=1}^{g} \left(1 - \alpha_{p,i} p^{-s}\right)^{-1}.$$

ここでオイラー積を作ります。これは素数ごとの**「角度付き半径データ」の積**。

定義　回転モジュラー・データからの L 関数の直接構成
各素数 pに対し、角度データ　θ p,i（i=1,⋯,gi=1,⋯,g）を与え、

$$\alpha_{p,i} = e^{i\theta_{p,i}}, \qquad L(s) = \prod_p \prod_{i=1}^{g} \left(1 - \alpha_{p,i} p^{-s}\right)^{-1}$$

とする。収束条件 Σp,i|α_p,i| p^−σ<∞（σ>σ_0）の下で ℜs>σ_0 に絶対収束し、完全乗法的係数をもつ
「半径」＝log$p$の加法化（リンドン実位相）。
「角度」＝θ_p,iの回転構造（リンドン複素位相）。

したがって、素数冪同心円＋角度分布が揃えば L 関数は決まります。
α_p,i =e^iθ_p,i と置けば、log$n$の加法性と角度の加法性が噛み合い、a_mn=a_m×a_n、(m,n)=1）が自然に出ます。
また、さらに適当な核級の遷移作用素 T(u)（u=e^−s）が構成できれば L(s)=det(I−T(e^−s))^−1 が成り、フレドホルム理論から解析接続が従います。
モジュラー空間や θ 関数に依存しないため、非正則領域や非保型状況にも適用可能ですが、同時にそれが限界でもあり、種数 g>1 では、角度構造の「ゆらぎ」や非正則性が現れ、単純な保型性は失われます。メリン変換構造から考えた、多重回転理論で、その「保型性の復元理論」を後で考えます。
各素数で与えた複素数データ α_p,iが「局所ゼータ因子」となり、それを掛け合わせると

L 関数ができあがります。その結果、完全乗法的な係数 a_nをもつディリクレ級数に展開可能です。ここで重要なのは、この構成には、回転モジュラーから与えれられるデータしか用いていないということです。これがどんなゼータであるかも分からない。

いわば、代数的構造が反映しているのかどうか、それがどんな代数的構造なのか、それがわかりません。で、あとで、ヘッケ作用素を考えますが、それは、楕円関数や一般のヤコビ多様体に対する L 関数への「制限」とみなすことができます。第一章の最初で、ヤコビ多様体が、p 進拡大体の構造を制限したようにです。

僕は、最初たくさんのτ格子があって、あるいはアーベル多様体があって、ここから自然に、この一般的 L 関数の係数体の角度構造が計算されると思い込んでいました。変換公式を介してとかです。そうじゃなくて、ヘッケ作用素は、この一般的関数の係数体を「制限」するんだ、そしてようやくτとつなげるんだ、というところまで、ようやく理解しました。 リンドン螺旋位相に関して言えば、これは、「構造体のトレース」ですから、構造体の何らかの性質を移した、そういうゼータ構造になると解釈できます。

通常の L 関数は「素数ごとの位相的データ（角度 ＋ 半径）」の積で決まるわけで、

角度 θ_p,i→ 位相情報半径 log$p$→ 射影的スケール（加法化）

これで「局所 ↔ 大域」の構造が繋がります。

これをリンドン位相で読み替えますと、

角度構造 ＝ リンドン複素位相

→ 螺旋的・回転的な「複素方向の展開」

半径構造 ＝ リンドン実数位相

→ 対数的伸張を自然に受け取る基底

つまり、素数データは「リンドン位相の二層構造」に収まっていて、その積み上げが L 関数に一致すると解釈することができます。実際、これは、メリン変換による「直線化」（= スカラー化）のときにそのまま幾何的にでてきます。

ここで、後で詳しく書きますが、多段ツイスト（多軸回転系）の位置づけをしておきますと、多段ツイストを導入すると、単なる $\alpha_p,i=e\^i\theta_p,i$ではなく、複数の軸に沿った回転（四元数やその拡張）に収まることがわかります。今考えたのは、「複素格子による回転」しか考えていませんが、これを拡張できるということです。

これが「多軸回転系」として、リンドン位相の高次階層（無限階層）に自然に埋め込まれるとみなすことができる。リンドン螺旋複素位相は、「無限に連なる螺旋回転位相」を持っていました。

つまり「素数ごとの冪同心円（log p の伸び）」＋「角度方向の分布」で局所データが一意に定まるという見方を、「回転モジュラーの L 関数は、無限階層のリンドン位相に埋め込まれた代数的構造の L 関数である」という見方へと広げます。このような味方の定式化を試みることも後でしてみる予定です。

次には、この一般的 L 関数への制限として、ヘッケ作用素を考えます。

まず、種数１の状況で定式化することに注意してください。

まず、q=e^2πiτ として、q の位相成分（角度）を θ≔argq=2π$\Re$τ と見ます。

「θを p で割る／p 倍する操作」は、q^1/p を取る／q^p を取る操作に対応します（角度を p で分割／拡大)。ヘッケ作用素はまさに「ある意味でこの分割と合成（平均化)」の組合せとして実装されます。

重み k のモジュラー形式 f(τ)に対して、素数 p のヘッケ作用素は、

$$(T_pf)(\tau) = p^{k-1}f(p\tau) \ + \ \sum_{a=0}^{p-1} f\left(\frac{\tau+a}{p}\right).$$

と表され、これは、

$\Gamma\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Gamma$、$\bigsqcup_a \Gamma\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & p \end{pmatrix}\Gamma$

この２つの行列の和に対応します。

こうすると、

$f(\tau) = \sum_{n\geq 0} a_n q^n$ とすると

$$T_pf(\tau) = \sum \left(a_{pn} \ + \ p^{k-1}a_{n/p}\right) q^n$$

自然数係数まで拡張できて、ここで a_n/p=0 ならば p∤n の場合は 0 とします。

ここで、角度関数、

$\varphi(\theta) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m e^{im\theta}$

を考えると、２つの作用素、A_p,B_p が考えられます。

$$(A_p\varphi)(\theta) \ := \ \frac{1}{p}\sum_{a=0}^{p-1} \varphi\Big(\frac{\theta+2\pi a}{p}\Big)$$

$$A_p\big(e^{im\theta}\big) = \begin{cases} e^{i(m/p)\theta}, & p \mid m, \\ 0, & p \nmid m, \end{cases}$$

$$(B_p\varphi)(\theta) := \varphi(p\theta), \qquad B_p\big(e^{in\theta}\big) = e^{ipn\theta}.$$

圧縮作用子 A_p は、係数 c_{pn}を取り出して e^{inθ}に移します。拡張作用子 B_p は、単純に角度を p 倍します。

これらを重み k を入れて合成すると、古典的ヘッケ作用素と完全に対応する角度作用子が得られます。

$$\boxed{H_p := A_p + p^{k-1}B_p}$$

すると、さきほとの作用素 T_p と同じような結果が得られます。

$$H_p(\sum c_m e^{im\theta}) = \sum \left(c_{pm} + p^{k-1}c_{n/p}\right)e^{in\theta}$$

ここで必要なのは、これらの式の回転モジュラー空間における幾何学的意味でしょう。

まず、「回転構造=加法構造」つまり、回転モジュラー空間における「回転構造」は通常のモジュラー空間における「加法構造」へと移されていることに注意してください。僕は「log 空間」(=伊原ゼータやヴェイユゼータの空間）と「べき乗空間」(=リーマンゼータや L 関数の空間）と呼び分けています。楕円曲線の「加法定理」は回転モジュラーの中では「円周上の巡回構造」です。

回転構造＝加法構造 という同一視の下では各p_nの回転が 加法的に折り重なって L 関数の項になります。

その加法の集約が、Hecke 作用そのものです。

「ヘッケ作用素」は、単に“素数ごとの回転構造をフラクタル階層として加算する操作”になります。

このヘッケ作用素の中に、モジュラー作用の、「並進」と「回転」が、ヘッケ作用の固有値すなわちフロベニウス角を通して、叩き込まれています。

同じようにｐのべき乗へと拡張し、A_p^n は p^n 分割の平均、

$$(A_{p^n}\varphi)(\theta) = \frac{1}{p^n}\sum_{a=0}^{p^n-1}\varphi\Big(\frac{\theta+2\pi a}{p^n}\Big)$$

B_p^n= 角度を p^n 倍する作用子です。

$$T_{p^n} = T_p T_{p^{n-1}} - p^{k-1}T_{p^{n-2}}$$

すると、古典的なヘッケ演算子の乗法則と再帰関係が成り立ちます。

素数ごとの「同心円フラクタル」像は、回転モジュラーの視点では、素数 pは

半径スケール：$\tau \mapsto p\tau$（半径 p倍、対数半径 $+\log p$）

角度/位相の分割：$\tau \mapsto (\tau+r)/p$（$r=0,\cdots,p-1$ の p分岐）

からなる 「同心円＋角度分割」のフラクタルとして現れます。

回転モジュラーと通常のモジュラーの二つの絵の比較と一致性を見ると、

代数側：Tpは指数 pの部分格子 $p+1$ 個を走査する

回転モジュラー側：半径 p倍の同心円 1 本と、角度方向の p分岐

となります。

この全体的な動きを考えるために、回転モジュラー空間を再度考えましょう。拡大フェーズでは、基準ベクトルを $(p\omega 1,\omega 2)$にして、格子を一方向に p倍に引き伸ばします。これ

により、大きな基本平行四辺形の中に p個の元のセルが並びます。分割フェーズでは、上記の拡大格子に対して、別の形の基準ベクトル（$\omega1,\omega2/p$)を持つ部分格子も考えます。全部で $p+1$ 種類の部分格子（原点に同じ位置を持つが方向や傾きが異なる）ができます。

重ね合わせフェーズでは、これら $p+1$ 種類の部分格子をすべて同じ複素平面上に重ねます。結果として、「局所的には密度が高まり、方向がバラけた格子網」ができます。このフラクタルスペクトル状の構造が後に保型性を考えるときに重要になります。

横に凝縮された、部分格子の情報（位相ズレや回転量）を「一方向に並べ直す」ことで、角度パターンが抽出されます。これが L 関数側のフロベニウス角や位相情報です。

その働きは、再配列され、得られた角度情報を基底変換で新しい格子や保型形式に再構成が生じます。

これで「もとの格子構造」とは異なる、でも同じ保型性を持った新しい空間ができます。

さて、ここで、局所構造がオイラー積になるときに、メリン変換が起こっているのですが、このとき重要なことが２つあります。

まず、「すべての素数の寄与ごと集めて変換した」ということと「連続的積分変換した」ということが一致しているということです。つまり、これは、「連続的解析接続」の姿と「離散的素構造ごとの結合」という２つの姿を持っているということです。離散的な結合の姿を描くと、

$$\sum_p f(\log p, \theta_p) p^{-s}$$

となります。

この変換が連続的になると、円周上の関数 f(e^iθ)に対し

$$(Mf)(s) = \int_0^\infty f(x) x^{s-1} dx$$

角度関数（円周上の固有値関数）をメリン変換すると、L 関数が出てきます。このどちらでも、円周上の点は直線上のディィリクレ級数へと移り、つまり、固有値構造が円周上から直線上の、フラクタルスペクトル構造の中に移ります。

ヘッケ作用素と保型固有値構造の関係として、メリン変換とヘッケ作用素は可換です。

$$M(H_n f) = T_n(Mf).$$

ここで Tnは標準的なヘッケ作用素です。したがって、メリン変換像 Mf（=L 関数）はヘッケ作用素の固有値をもつ関数（すなわち保型形式の候補）となります。

命題 固有値構造と L関数

もし f がヘッケ作用素の固有関数であれば、対応する L-関数

$$L(s,f) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \quad (a_n \text{は } H_n \text{ の固有値})$$

は Euler 積を持ち、保型性を備える

「log 的世界のゼータ」と「べき乗的世界のゼータ」の二種類があると言いましたが、これは、「円周上の回転」と「複素上半面上の格子」に対応して、それぞれ「回転」と「螺旋」の形をしています。

そこが「メリン変換の２面性」として出てきます。「すべての素数におけるメリン変換」と「連続的変形としてのメリン変換」が等価であるところから、この２つの種類のゼータ構造が移り変わるという論理になっているのがわかります。

同時にその移り変わりの幾何的構造は、「円周上の点」→「直線（臨界線）」という形になっており、これは、「回転構造」→「スカラー構造」つまり「格子的周期構造」→「周期的保型構造」という変換になっているのです。

格子状であっても、回転モジュラーのように「べき乗フラクタル構造+回転構造」であっても、疑似周期的な「保型性」を持つ構造は生まれません。ところが、これを、いわば「直線状」に押しつぶして、スカラー化し、まるでひとつの軸の中で動くように考えるときに、「疑似周期的な保型性」が出てきます。とはいえ、このとき、「重要な固有値は円周上に束縛されていること」、「ちゃんと整列されたフラクタル状の構造として移されること」という２つの条件が必要になります。

これは、アーベル多様体の持つ円周角度に移されたとき、それぞれの「格子角度」に「絡み合い」があるときには一般的に成立しません。そして、その絡み合いは一般的に存在し、それがなくなるのは、アーベル多様体がすべて「楕円ヤコビ体」だったときのみです。

逆に言えば、楕円曲線に対応するヤコビ多様体のときには、格子が一つしかなく、絡み合いが起こりようもないので、モジュラリティ定理により、保型性は常に成立し、重さ２の保型形式として現れます。

補足：

本稿で述べる「格子状の絡み合いがないなら固有関数で作用素構造が表される」という記述は、あくまで「構成の枠組み」の説明です。実際にフロベニウス角度が τ から抽出されるためには、保型性（谷山–志村予想やその一般化）といった深い仮定が必要となります。本論文ではそれを証明するのではなく、仮にその条件が満たされる場合に、作用素モデルがどのように構成されるかを示しているのに注意です。

非零関数 $\varphi \in C\infty(T$（トーラス）$)$が存在し、すべての素数において、

$$H_p \varphi = \lambda_p \varphi$$

だから、種数１の L 関数 F(s)=Sφ はこのときオイラー積を持ち、T_pF=λ_p F を満たします。これは保型性そのものです。

ちなみに、種数０のリーマンゼータでは格子がないのでフラクタル的構成がなく、反転公式しかないというのもわかりますね。

種数による違いを考えるとき、このときに重要なことはフロベニウス角度の構造にも現れます。

フロベニウス角度はそれぞれの素数ｐの構造の中で、種数１の場合には、あたかも「そこに極限的収束構造」があるかのようにして、素数ｐ^n のべき乗構造の深さの中で振動していきます。ところが、種数２以上になるとあたかもそのような「極限構造」が複数あるかのように、振動構造が分散する現象が見られます。ここにも、「この振動構造を抑えるためには複数の回転軸が必要だろう」という根拠があります。

このフロベニウス角度は、**もともとの複素的な角度（τ由来）を、複素格子をｐ分割することによって、ｐ進的な角度に測り直した**ものですから、この複数の振動構造は、ひとつの角度構造では処理できないような非正則的構造から由来するゆらぎであることがわかります。

「L 関数 → 角度版ヘッケ → スカラー化写像 → 保型性の判定」

円周の角度構造から、拡大＋分割によるヘッケ作用素を作り、メリン変換で直線上の保型固有値関数ができる、その条件が、「臨界線構造への固有値のスカラー化」（リーマン予想的構造）と「フラクタルスペクトル的構造に残渣がないこと」（フラクタルべき乗作用がきれいに働くこと）という２つの条件であるということがわかります。

この流れで、メリン変換の直線化写像を通し、フラクタル的べき乗構造の中の「スカラー直線構造」のなかに、固有値の分散構造が叩き込まれて、保型性が生まれる、あるいは逸脱した場合には、保型性が成立しないという、単純な図式が成立します。

この論理の流れで、「ガロア表現理論」が一切出てこなかったことにも注意してください。「べき乗フラクタル構造+回転構造」の分析とそこから、自然に現れる構成法だけで、この論理展開は進んできました。以下、この流れを、種数ｇの領域にまで拡張します。

角度-ヘッケ対応構造理論です。

まず、整数 g≥1 を固定します。各素数 p に対して、複素数の g 組 α_p,1,…,α_p,g を与えます。特別な場合として、種数ｇ＝１のとき、τは素数 p ごとに「角度関数」 θ_p(τ)を対応させます。この対応は τ を回転モジュラー空間の元として扱うことにより自然に定まります。

T^g=(R/2πZ)^g を g 次元トーラスとし、フーリエ基底を

$$e_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta}) = e^{i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\theta}}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^g$$

とします。

同じようにヘッケ作用素のための角度作用素を考えます。

各素数 p に対し、滑らかな関数 ϕ:T^g→C に作用する 2 種類の作用素を定義。

$$(A_p^{(g)}\phi)(\boldsymbol{\theta}) := \frac{1}{p^g}\sum_{\mathbf{a}\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^g}\phi\left(\frac{\boldsymbol{\theta}+2\pi\mathbf{a}}{p}\right),$$

$$(B_p^{(g)}\phi)(\boldsymbol{\theta}) := \phi(p\boldsymbol{\theta}).$$

フーリエ基底 e_n に作用させると、Ap^(g)は多重インデックスを p で割り、Bp^(g)は p 倍する操作に対応します。

重みベクトル k=(k_1,...,k_g)に対し |k|=Σj k_j とおき、角度版ヘッケ作用素を

$$H_p^{(g)} := A_p^{(g)} + p^{|\mathbf{k}|-g}B_p^{(g)}$$

と定義します。

p_n への拡張は標準の再帰、

$$H_{p^n}^{(g)} = H_p^{(g)}H_{p^{n-1}}^{(g)} - p^{|\mathbf{k}|-g}H_{p^{n-2}}^{(g)}$$

で与える。

スカラー化（メリン変換）写像

純テンソルに対して写像 S を定義し、角度データ θ_p,i により

$$L(s) := \mathcal{S}\{\theta_{p,i}\} = \prod_p\prod_{i=1}^{g}(1-\alpha_{p,i}p^{-s})^{-1}, \quad \alpha_{p,i} = e^{i\theta_{p,i}}, \quad \Re s > \sigma_0$$

が得られる。

L(s)=Σn≥1 a_n n^−s と書けば、係数 a_n は完全乗法的であり、局所的には α_p,i の対称和で与えられる。

絡み合い関係式（ヘッケとメリン）として、各素数 p に対して、次の可換関係が成り立ちます。

$$\mathcal{S}\circ H_p^{(g)} = T_p\circ\mathcal{S},$$

ここで T_p はディリクレ級数の古典的ヘッケ作用素で

$$(T_p a)_n = a_{pn} + p^{|\mathbf{k}|-g}a_{n/p}, \quad a_{n/p} = 0 \text{ if } p\nmid n$$

です。

q 展開 Σa_n q^n においても、この式は古典的な T_p の形を再現します。 p _n に対する再帰も Hp_n^(g)の再帰と一致します。

フーリエ基底 e_n 上で A_p^(g)と B_p^(g)は多重インデックスをそれぞれ割る／掛ける操作に対応し、S 適用後に a_n のインデックス操作として再現されます。重み因子 p^|k|−g はヤコビアン補正に相当します。

保型性としてのスカラー化として、角度データ {α_p,i}が型 (g,k)の保型的であるとは、ある非零関数 ϕ∈C∞(T^g)が存在し、全ての素数 p に対して

$$H_p^{(g)}\phi = \lambda_p \phi$$

を満たし、かつ |λp|≤C p^(|k|−g)/2+ε（ラマヌジャン型評価）を満たすことをいいます。このとき F(s):=Sϕ はオイラー積

$$\prod_{i=1}^{g}(1-\beta_{p,i}p^{-s})^{-1}$$

を持ち、T_pF=λ_pF を満たします。

保型性の失敗は、角度データが素数間で非自明な絡み合い（エンタングルメント）を持つ場合、角度トーラス上での固有関係式は成立せず、対応するディリクレ級数はヘッケ固有性を失うときに起こります。これは局所的には位相干渉、大局的には臨界線からの零点のずれとして現れます。

以上をまとめると、具体的に、g=1 のとき、H_p(1)=A_p+p^(k−1)B_p により古典的重み k モジュラー形式の T_p を再現。

一般種数 g のとき、多角度の集約によりランク g の局所因子を生成。ヘッケ再帰は p_n に対しても成立。

|αp,i|=1（イハラ／ヴェイユ正則型）の場合、メリン変換の像は適切な核作用素 T(u)を用いることで臨界線に零点が整列します。

命題

上記の総和条件の下で、メリン・スカラー化 S は角度データをオイラー積

$$\prod_{p}\prod_{i=1}^{g}(1-\alpha_{p,i}p^{-s})^{-1}$$

を持つディリクレ級数 L(s)に写す。このとき各素数 p と重みベクトル k に対し

$$\mathcal{S}\circ H_p^{(g)} = T_p \circ \mathcal{S}$$

が成立するので、角度トーラス上のヘッケ固有関数はヘッケ固有ディリクレ級数（保型性のスカラー化）に対応する

p_n への拡張も標準の再帰で成り立つ

系 高次 L データの計算可能性

ディリクレ係数は α_p,i の局所的対称和による完全乗法性で与えられます。ヘッケ再帰はすべての素数べきに伝播し、高種数の L データに対する明示的な計算法を与える

以上、一般的な種数における、一般的 L 関数の構成、ヘッケ作用素の構成、保型性の判

定やその成立・失敗の構造について述べました。この失敗の構造となる「非正則性」を部分的に処理しようとするのが、次の「絡み合い余剰を処理する回転塔の理論」です。

IV. 補遺　τとフロベニウス角度の対応

ここでは、念のため、格子角度τからヘッケ作用素を導き出す手順について簡単に触れておきます。この部分は回転モジュラー理論とおそらく深く関係づけられますがそれについてはあとの節にまわし、いまは、いわば、さきほどの節の、角度関数と、楕円τやヤコビ多様体の角度構造との対応関係をいちおう補充的に書いておくもので、自分の参考のためです。

この Gτ 極分解は、リー群のカルタン分解の具体例であり、特に種数 1 の場合にはSL(2,R)の行列として表されます。この行列分解はあとでも説明しますが、リーマンゼータの機能方程式と同型の構造を持ち、零点配置の対称性を群的に記述する雛形となっています。したがって Gτ 極分解は、回転モジュラー空間の特徴づけにとどまらず、ゼロ点構造そのものを捉えるための橋渡しを与えてもいます。

Gτ 極分解を通じて現れる τ の作用は、リーマンゼータの機能方程式に対応し、さらに各素数におけるフロベニウス作用の角度として具体化されます。すなわち、全体の零点配置は、各素数ごとに定まるフロベニウス角度の集合が「回転モジュラー空間」上で稠密化することにより形作られます。この意味で、τの分解は単なる形式的操作ではなく、ゼロ点構造とフロベニウス理論を直接につなぐ「角度対応」としても理解できます。

もう一つ言っておきたいのは、**この計算の前提として、「適切なスカラー化が成立し、同時にフラクタル的スペクトルが生成されるとしたら」という仮定**があることです。つまり、「回転構造が十分に打ち消されてべき乗構造の中のフラクタルスペクトルが成り立っているとしたら」ということです。

$$\Lambda_\tau = \mathbb{Z}\langle 1, \tau\rangle, \qquad B_\tau = \begin{pmatrix} 1 & \Re\tau \\ 0 & \Im\tau \end{pmatrix}, \qquad G_\tau := \tfrac{1}{(\Im\tau)^2} B_\tau^{\mathsf{T}} B_\tau$$

このように置きます。

ヘッケ作用素 T_p の標準的な右剰余代表を、

$$M_p^{(0)} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_p^{(r)} = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & p \end{pmatrix}\ (r = 0, \ldots, p-1)$$

としますと、各代表に対し指数 p の部分格子Λ′ =ΛτMp(·)が得られます（これが “拡大＋分割”）。各 M について、Gτ 極分解、

$$M \;=\; R_\tau(M)\, S_\tau(M), \qquad R_\tau(M)^{\mathsf{T}} G_\tau R_\tau(M) = G_\tau, \quad S_\tau(M)^{\mathsf{T}} G_\tau = S_\tau(M)\, G_\tau$$

を一意にとると、Rτ(M)∈SO(Gτ)が回転モジュラーに該当すると、純粋な回転、Sτ(M)がスケーリングです。

種数１は二次元なので、Rτ(M) は角度 θτ(M)を１つだけ持ち、

$$\cos\theta_\tau(M) = \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\big(R_\tau(M)\big), \qquad \alpha_\tau(M) := e^{i\theta_\tau(M)} \in U(1).$$

これが**格子変換測＝回転の抽出**です。

ヘッケ平均の固有値に対応づける規格化として、

$$\boxed{\alpha_p(\tau) \ := \ \frac{1}{\sqrt{p}}\Big(\alpha_\tau(M_p^{(0)}) + \sum_{r=0}^{p-1}\alpha_\tau(M_p^{(r)})\Big) \in \mathbb{C}, \quad |\alpha_p(\tau)| \le p^{1/2}.}$$

まず p 倍で“同心円（スケール）”を動かし、次に p 本へ角度方向に分割して回転成分だけを足し合わせる。

これが「拡大（スケール）」と「分割（回転）」の和という、ヘッケ像と一致します。

この α_p(τ)から角度関数を、

$$\alpha_{p,1}(\tau) := \alpha_p(\tau), \qquad \alpha_{p,2}(\tau) := \alpha_p(\tau)^{-1}$$

と置くと、

$$L(s;\tau) \ = \ \prod_p \big(1-\alpha_{p,1}(\tau)\,p^{-s}\big)^{-1}\big(1-\alpha_{p,2}(\tau)\,p^{-s}\big)^{-1}$$

この分解構造に、メリン構造つまり「円周」→「直線」という変換の痕跡が見られることにも注意です。

一般の種数 g>1 では、τ を Siegel 上半空間 Z∈Hg に置き換え、格子ΛZ=Z^g+Z^gZ、計量 G_Z を同様に定めます。

ヘッケの p 近傍は GSp2g(Z)の右剰余代表 M で走査でき、各 M に対し G_Z 極分解、M=RZ(M) SZ(M),RZ(M)∈SO(G_Z)

の 回転部分 R_Z(M)を取り、これを U(g)のユニタリとして同一視して固有角{θp,1(M;Z),…,θp,g(M;Z)}を抽出します。

ヘッケ平均でユニタリ平均 R_p(Z) を作って対角化し、

$$\alpha_{p,i}(Z) := \exp\big(i\,\Theta_{p,i}(Z)\big) \qquad (i=1,\dots,g)$$

を **Satake パラメータ**として読みます。

すると、

$$L(s;Z) = \prod_p \Big(1-p^{-s}\Big)^{-1} \prod_{i=1}^{g}\Big(1-\alpha_{p,i}(Z)\,p^{-s}\Big)^{-1}\Big(1-\alpha_{p,i}(Z)^{-1}\,p^{-s}\Big)^{-1}$$

が **種数 g** の標準 L の局所因子の未分岐型と項別一致します。

もうすこし簡単な対応を考えるなら、最初から、

$$\tau = \frac{2\pi i}{\log p}$$

こういうふうに、回転モジュラー座標に合わせておき、Λ=Z+Zτ を固定（τは一般の上半平面点でよい)。

「回転モジュラー空間」で、p 倍拡大 + 角度 p 分割の作用、

$$(H_p f)(\theta) \;=\; p^{-w}\sum_{j=0}^{p-1} f\left(\frac{\theta + 2\pi j}{p}\right)$$

格子 Λに付随するシード fΛ（たとえば格子トレース／θ型分布）をとります。

ここで τ=2πi/logp を使うのは、p 倍写像と角度分割が“1 ステップ”で綺麗に噛み合うように座標を合わせるためです。もし fΛ が（あるいはその生成する閉包が）同時固有関数になれば

$$H_p f_\Lambda \;=\; \left(\sum_{i=1}^{g} e^{i\theta_{p,i}}\right) f_\Lambda,$$

このときの固有相 {e^iθ_p,i}を**角度データ α_p,i=e^iθ_p,i** として採用します。

$$L_p(s) \;=\; \prod^{g}(1 - \alpha_{p,i}\, p^{-s})^{-1}.$$

という形になりますが、このとき、条件が満たされている必要があります。

条件を整理しますと、まず、スカラー化条件は、 本来は複数ある Satake パラメータ{α_p,i}を、一つの角度や単一の位相で代表させられる状況を要求しています。

このとき「局所因子がシンプルな形（1 種類の角度)」になり、自然にフロベニウス角度と対応づけられます。回転モジュラーで、メリン変換したときに、ひとつの直線上に、きちんと固有値スペクトルが集まることです。

もうひとつが、整列条件で、これも後で説明しますが、この固有値スペクトルの集まり方が、フラクタル的構造をなしていて、「倍写像」（つまり関数的な保型性）を成立させているということです。僕はもう少し、「多周期フラクタルスペクトル構造」を念頭に置いているので、保型性というより、こちら（**フラクタルスペクトル**）の構造について話すと思います。

簡単に書くと、未分岐、核級、同時対角化、純性などの条件において、

原理　回転モジュラーの位置づけ

適切な条件下で、

$$\sum_i (-1)^i \operatorname{tr}\big(\mathrm{Frob}^n \mid H^i\big) \;=\; \mathrm{Str}(U^n) \;=\; \sum_j \varepsilon_j\, \alpha_{\tau,j}^n \quad (n \ge 1).$$

したがって、ヘッケ固有値 α_τ,j は（規格化後）フロベニウス固有値に一致し、その**偏角**が**フロベニウス角**を与える。

さらに、

$$\det(1 - zU)^{-1} = \prod_{\text{素回路 } c} (1 - z^{\ell(c)})^{-1}$$

素閉軌道公式によるメビウス反転）により、フレドホルム行列式は**オイラー積**へ因数分解する。

以上により、「回転モジュラー」は、

Satake 偏角＝Frobenius 角、

Gτ 分解 ⇒ ヘッケ構造 ⇒ Grothendieck–Lefschetz 跡公式

という鎖の上に自然に位置づく

これは最後の節で説明するつもりです。

V. 回転モジュラーの「多軸回転」による絡み合い余剰を処理する回転塔の理論　ジーゲル保型形式を包み込む

今回の論文はいわば「ゼータ構造論」に踏み込んでいますが、特に、「べき乗的世界」と「log 的世界」に分けて、そのなかでゼータ構造がどう変形されるかを主題にしているとわかると思います。 最初にヴェイユゼータを扱いましたが、これは典型的な「log 的世界のゼータ」です。そして、そこから「P 進構造」を取り除き、メリン変換したものが、L 関数であり、これが「べき乗的世界のゼータ」です。

ちなみに、ここでは主題にしませんが、リンドン螺旋複素位相では、さまざまな構造体に対するトレース構造として現れるリンドン半群に“解析値”を与えますが、実は、これには大体三種類あることが分かってきました。

ひとつは、「べき乗的展開」で、これはあまり使いません。もうひとつは「log 的展開」で通常の解釈であり、これは代数的構造や複素回転構造などを与えます。もうひとつが今回の論文の最初で扱った「P 進的展開」であり、これは素構造が極端に少ないときに扱われます。このときに重要なのは、この 3 つの内部構造は全く同一なのです。与える“解析値”は異なっても、内部構造は全く同一であり、区別がつきません。この双対性は、たとえば、べき乗関数と log 関数などの逆関数関係の中にもあります。

どのような内部構造かといえば、「無限階層」です。

実数的領域は“代数的数”すなわち実数を表しているのですが、この構造は、「複素回転構造」と全く同一の形態です。つまり、実数領域も「スケールを刻まれた回転構造」をしています。そして、多くの理論では、「複素解析」をいわば「閉包構造」のようにして扱いますが、リンドン半群に定義される、リンドン螺旋複素位相では、複素構造だけではスカスカで、穴だらけで、全然閉じていません。これについての詳しい説明は、「リンドン螺旋複素位相の理論」を参照してください。第二論文にも簡単に触れています。

さて、L 関数を作って、その角度構造に絡み合いがあるとき、単一の格子フロベニウス角

度だけでは、円周上から逸脱したり、スペクトル構造に乱れが出たりすることで、保型性が成り立ちません。では、ここで、どうするかといえば、「単一の」という回転レベルを、「多軸回転」へと変える、ツイストという発想をします。このとき問題になるのが、四元数、八元数、と回転構造を付け加えていくと、代数構造に穴が空き、壊れていくことです。

基底層：複素階層 $U(1)$回転

一次拡張層：四元数的回転 $SU(2)$（回転＋ツイスト）

二次拡張層：さらに多元的構造（八元数やクリフォード代数）

乗法的関数は整数論的べき乗関数と捉えられることから、回転性を持っています。

いままでは、格子構造を持っている複素回転構造で考えてきましたが、これを拡張しようというわけです。

以下、絡み合い余剰の階層消去と保型性の回復の手順です。

定義　絡み合い余剰と持上げ塔

角度トーラス τ上の関数空間 Hとメリン写像 S:H→（Dirichlet 級数空間）を固定。

各素数 pの「一次回転」（複素位相）を $U(1)$で与え、対応するヘッケ $H_p(0)$を定める。

このときの**絡み合い余剰**を

$$\mathcal{R}_p^{(0)} \;:=\; S \circ H_p^{(0)} \;-\; T_p \circ S$$

と定義（右辺がゼロなら“スカラ保型”）。

余剰が消えない場合、群を、

$$G_0 = U(1) \;\longrightarrow\; G_1 = SU(2)\;(\simeq \text{単位四元数}) \;\longrightarrow\; G_2 = G_2(\mathbb{O})\;(\text{オクタニオン自己同型群})$$

と**持ち上げ**、各段で素数 p に元 gp(k)∈Gk を割り当て、線形表現 ϱk:Gk→GL(Vk)を通して、

$$H_p^{(k)} \;:=\; A_p \;+\; p^{w_k}\,\varrho_k(g_p^{(k)})\,B_p$$

を定義（A_p,B_pは従来の分岐平均／引き戻し、重み w_kは正規化）。

そのときの余剰、

$$\mathcal{R}_p^{(k)} \;:=\; S \circ H_p^{(k)} \;-\; T_p \circ S.$$

停止規準：ある最小 k で R_p^(k)=0（全ての p について、または密度 1 の集合で）となれば、**その段で保型性が回復**したという。

以下は、それによる、保型性の回復についての定式化です。

命題　オイラー因子と収束

命題. $\forall p,\ \ g_p^{(k)} \in G_k,\ \ \varrho_k : G_k \to GL(V_k).$

ある σ₀に対し、

$$\sum_p \|\varrho_k(g_p^{(k)})\|\, p^{-\sigma} \ <\ \infty \quad (\sigma > \sigma_0)$$

が成り立つとき、局所因子、

$$L_p^{(k)}(s) \ :=\ \det\bigl(I - \varrho_k(g_p^{(k)})\, p^{-s}\bigr)^{-1}$$

の積、

$$L^{(k)}(s) \ :=\ \prod_p L_p^{(k)}(s)$$

は ℜs>σ0 で絶対収束し、完全乗法係数をもつディリクレ級数に展開できる。

命題　絡み合い消失 ⇒ 保型性・フレドホルム

命題. $\mathcal{R}_p^{(k)} = 0\ \ (\forall p)$

が成り立ち、さらに T(u)=∑n≥1u^n∑p^n 型の遷移作用素が核級となるよう定義できれば、

$$S \circ H_p^{(k)} \ =\ T_p \circ S \quad \Longrightarrow \quad L^{(k)}(s) \ =\ \det\bigl(I - T(e^{-s})\bigr)^{-1}$$

したがってフレドホルム理論から解析接続が従う

このとき、次のことに注意する。

四元数段（*k*=1）：各 *p*に単位四元数 *u_p*=exp(*iθ_p*+*jψ_p*+*kϕ_p*/2)。

2×2 複素表示 *ρ*:*H*→*SU*(2)で *L_p*(*s*)=det(*I*−*ρ*(*u_p*)*p*^−*s*)^−1。深度 *p*^*n*は *ρ*(*u_p*)^*n*。

オクタニオン段（*k*=2）：単位オクタニオン *q_p*の左乗法 *L_q_p*∈*SO*(8)または 随伴 Ad_*q_p* ∈G_2をとり、

$$L_p(s) = \det(I - \varrho_2(L_{q_p})p^{-s})^{-1}, \qquad 深度\ p^n:\ \varrho_2(L_{q_p})^n.$$

これで“累乗”は常に線形世界で成り立つ。

$k=0$ 複素数角	$U(1)$	$\mathrm{Sp}_2(\mathbb{Q}_p) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$	種数1の固有値ペア $p^{1/2}e^{\pm i\theta_p}$
$k=1$ 四元数回転	SU(2)	$\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Q}_p)$	種数2の標準 L 関数の4つの固有値
$k=2$ 八元数回転	G_2（例）	$\mathrm{Sp}_6(\mathbb{Q}_p)$ または GSp_6	種数3の標準 L 関数の6つの固有値
$k\to\infty$ 無限階層	拡大リー群の直極限	$\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Q}_p),\ g\to\infty$	無限次元表現の局所因子

代数世界が壊れすぎないように注意しつつ、回転塔を考えます。

各素数 pに与えた回転子 $g_p^(k)∈G_k$から Satake パラメータを

$$s_p \;:=\; \Pi_k\big(g_p^{(k)}\big) \;\in\; \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{C})$$

と定義。標準（種数 2g+1）表現:GSp2g(C)→GL2g+1(C)の固有値系を、

$$\Sigma_p \;=\; \{1\} \,\cup\, \{\beta_{p,1},\dots,\beta_{p,g},\ \beta_{p,1}^{-1},\dots,\beta_{p,g}^{-1}\}$$

と書き、これを**ジーゲルの Satake パラメータ**と見なします。

ここで、L 関数の係数を、

$$\boxed{\beta_{p,i} \;:=\; \alpha_{p,i}^{(k)}} \qquad (1 \le i \le g)$$

ここで、局所オイラー積（標準 L関数）の構成は、

$$\boxed{L_p(s) \;=\; \prod_{\lambda\in\Sigma_p}\big(1-\lambda\,p^{-s}\big)^{-1} \;=\; (1-p^{-s})^{-1}\prod_{i=1}^{g}\big(1-\beta_{p,i}p^{-s}\big)^{-1}\big(1-\beta_{p,i}^{-1}p^{-s}\big)^{-1}.}$$

全体は、

$$\boxed{L^{(k)}(s) \;:=\; \prod_p L_p(s)}$$

深度 p^n の寄与は ß_p,i^±n がそのまま係数に現れます。

ほとんどの素数 pで $|\beta p,i|$=1（Ramanujan 型の正規化）かつΠkの像 spが GSp2$g(C)$の最大トーラスの共役類に入る。また、Satake 対応、$\beta p,1,\cdots,\beta p,g$が、対象の Siegel 形式の Satake パラメータと一致（順序は任意）が成り立てば、未分岐では次が成り立ちます。

$$\boxed{L^{(k)}(s) \;=\; L_{\mathrm{std}}\big(s,\ F\big) \qquad (F:\ \text{種数 } g \text{ の Siegel 保型形式})}$$

このとき、局所因子は、

$$L_p(s,F) \;=\; (1-p^{-s})^{-1}\prod_{i=1}^{g}\big(1-\beta_{p,i}p^{-s}\big)^{-1}\big(1-\beta_{p,i}^{-1}p^{-s}\big)^{-1},$$

となり、一致します。

つまり、局所の乱れがない未分岐の場合、

$$L_p(s) = (1-p^{-s})^{-1}\prod_{i=1}^{g}(1-\beta_{p,i}p^{-s})^{-1}(1-\beta_{p,i}^{-1}p^{-s})^{-1}$$

$$\beta_{p,i} = e^{i\theta_{p,i}}, \quad |\beta_{p,i}| = 1$$

こういう形ですが、分岐がある場合、係数が、

$$\beta_{p,i} = e^{i\theta_{p,i}} \cdot p^{-m_{p,i}} \cdot \zeta_{p,i}$$

ツイストやP進的減衰項がついています。整理すると、

m_p,i≥0 は p 進スケール補正（導手の寄与）

ζ_p,i は 有限位数の根（有限群的ツイスト）

θ_p,i は回転角度

m_p,i>0 なら「深さ付きツイスト」

局所因子の形をまとめると、

$$L_p(s) = \prod_{i=1}^{g} \left(1 - e^{i\theta_{p,i}} \zeta_{p,i}\, p^{-(s+m_{p,i})}\right)^{-1} \left(1 - e^{-i\theta_{p,i}} \zeta_{p,i}^{-1}\, p^{-(s+m_{p,i})}\right)^{-1}$$

となります。

ジーゲル保型形式（標準 L 関数）は、見かけ上は「未分岐（純回転）」だけで成り立っているように見えますが、実際には必ず分岐素での一段階ツイスト補正が組み込まれています。

未分岐素：Satake パラメータは純粋に単位円上（回転のみ）。

分岐素：そこだけ位相・スケール・有限巡回のツイストが入って、円周から押し出される。

回転構造（未分岐）＋ツイスト構造（分岐）として無限多軸回転階層構造の中に含まれている事がわかります。

よって、

リンドン階層　⊃　ジーゲル標準形（一次ツイスト）

ということがわかります。

リンドン螺旋複素位相で、直接的に L 関数を考える部分的な試みは簡単に別のところで行います。

ここでは、回転モジュラー空間での一般的 L 関数を多軸回転にすることで、形式上、ジーゲル保型形式を包含できる可能性について書いてみました。

VI. 補助節　保型形式へのまとめ　夢のイメージ

回転モジュラー空間から、一般的 L 関数、ヘッケ作用素、そして保型性の条件や構造、そして保型性の回復の理論などを、既存の理論との整合性を見ながら、確認していきました。

ここでは、回転モジュラー理論とは関係がないですが、τ や θ 関数から保型形式への流れを、流れの確認のためにも一度種数 1 のときだけ、まとめておきます。純粋にモジュラー理論で見たときにどのように保型性が現れてくるかを確認するためです。参考にしてください。

さて、まず、種数一の楕円曲線のヤコビ多様体は、複素トーラス

$$E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}), \quad \Im\tau > 0$$

でした。
この格子に付随する基本的保型関数リーマン θ 関数は、

$$\theta(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z\right).$$

この関数の変換則は、

$$\theta(z+1,\tau) = \theta(z,\tau), \quad \theta(z+\tau,\tau) = e^{-\pi i\tau - 2\pi i z}\theta(z,\tau)$$

$$\theta\left(\frac{z}{c\tau+d}, \frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \kappa(c\tau+d)^{1/2} e^{\pi i c z^2/(c\tau+d)}\,\theta(z,\tau),$$

κ は位相因子です。
さてここで、 η 関数、

$$\eta(\tau) = e^{\pi i\tau/12}\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2\pi i n\tau}),$$

これを考えますと、これは、 θ 関数の特殊値を使って、

$$\eta(\tau) = e^{\pi i\tau/12}\,\theta'(0,\tau)^{1/3}$$

このように表現できる。そして、 η 関数自体は変換則、

$$\eta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \varepsilon(a,b,c,d)\,(c\tau+d)^{1/2}\eta(\tau),$$

これを満たす。ついている項は、２４乗根の位相因子です。
Δ 関数は、 η 関数を使って、表せて、変換則を満たす。

$$\Delta(\tau) = \eta(\tau)^{24} \qquad \Delta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^{12}\Delta(\tau).$$

さて、アイゼンシュタイン級数

$$E_2(\tau) = 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)e^{2\pi i n\tau}$$

は、重さ２の準保型形式であり、次の変換則を満たします。

$$E_2\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=(c\tau+d)^2E_2(\tau)-\frac{6ic}{\pi}(c\tau+d).$$

ここから、たとえば、保型形式

$$f(\tau)=E_4(\tau)^{1/2}$$

これが得られる、と。

VII. ヤコビ多様体ゼータ

以上見たとおり、種数 1 の場合、回転モジュラー空間と通常モジュラー空間は同型であり、その保型性はワイルズの定理（いわゆるモジュラリティ定理）の結果に反していないことを確認できました。

この構造は､楕円曲線のＬ関数がモジュラー形式のＬ関数に一致することを意味します。

以下では、この構造を種数 gの曲線のヤコビ多様体に拡張し、その L 関数がジーゲル保型形式に対応するのかという問題をできる限り考えてみたいと思います。

つまり、この節で考えるのは、別の登山項、そしてその難しさです。

また、L 関数の、「log 的世界」への還元も考えます。

この節での目標は、次のようなＬ関数の一般的ヤコビ多様体への拡張、

$$L(s)=\prod_{i=1}^{g}\left(1-\zeta_{n_i}^{k_i}\cdot\alpha_{p,i}\cdot p^{-s+m_i}\right)^{-1}$$

これについて説明し、この解析接続的安定性を示すことです。

まず、ヤコビの θ 関数を考えましょう。

$$\vartheta(z,\tau)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{\pi in^2\tau+2\pi inz}$$

僕は、通常の意味では回転モジュラー空間に適合するべき乗構造をもっているような二重周期関数は存在しないと書きましたが、この関数は、

$$\theta(z+1,\tau)=\theta(z,\tau),\quad \theta(z+\tau,\tau)=e^{-\pi i\tau-2\pi iz}\theta(z,\tau)$$

このような周期性を満たし、まさに、「二重周期性+冪乗構造」という性質を備えていることがわかります。

実際、

$$\theta_1(z,\tau)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{\pi i(n+\frac{1}{2})^2\tau}\sin((2n+1)\pi z)$$

このように置いたあと、ワイエルシュトラスのペー関数が、

$$\wp(z)=-\frac{d^2}{dz^2}\log\theta_1(z,\tau)+C$$

つまり、「log 化」を通して、表現できます。

この一般化をしようとすると、リーマンの θ 関数というものが出てきますが、これは「多変数化」しています。

けっきょく、リーマンの θ 関数のように、行列的な非可換性が種数２以上で出てくるということは、回転構造が多層化しなければもはや周期構造が作れない。だから、「多変数化」ということですね。

$$\theta(z,\tau)=\sum_{n\in\mathbb{Z}^g}\exp\left(\pi i\langle n,\tau n\rangle+2\pi i\langle n,z\rangle\right)$$

$z\in Cg$：g 変数

$\tau\in Hg$

τ ∈H ：対称な g×g 複素行列（シーゲル上半空間）

つまり、周期性＝格子構造は、すでに g 変数で構成される「内部空間」に展開されるしかなくなります。これは、種数 g のリーマン面に対応しますが、「一体どのようなリーマン面の内部構造なのか」は後で考えます。

そしてこのとき、周期行列 τ の性質が、共鳴可能な周期構造か、フロベニウス的な回転と一致するか、双対的変換（モジュラー性）に安定か、といった形で、数学的対象の性質そのものを左右するということです。

まとめると、リーマン球面すなわち種数０の回転空間には、冪乗関数、サイン、コサイン（種数０）という周期関数があります。

これが格子化すると、シータ関数、ペー関数（種数１）が現れてきます。

しかし、１変数では周期性を与えるのに限界が来て、アーベル関数（リーマンの θ 関数）（種数 g、ただし多変数）では、多変数の、種数 g に応じた行列作用素の中で周期性が現れます。

ある種数 g の代数的構造に対応する、ヤコビ多様体は、種数２以上になると、単一の格子構造のなかには存在できなくなり、多変数化します。つまり、アーベル多様体（円分回転構造を持っている）に種数 g 分解されます。ヴェイユの有限性定理です。

これらの格子構造の中で周期の重なりはないので、「独立した混合円分構造」を持っているということがわかります。

このとき、種数 g といってもリーマン面上の構造的な制約があって、後で話しますが、

このときには、「種数１」の花びらが連結してつながっているような、正則構造をまだ保っていますが、そのため、「一般的種数ｇのリーマン面」を表現するには、もはやリーマンの θ 関数単体では足りなくなってきます。これが非正則領域であって、「多変数関数論」の扱う領域であるとわかります。この「グラフ的リーマン面構造」の意味は後で書きます。

このアーベル関数では「足りない」ところをアーベル関数を拡張して考えることで解決しようとしたのが、岡潔だと思われます。

さて、回転モジュラー空間を考えます。

ここで、「回転周期構造」をｇ個考えると、ひとつひとつは、「種数１」の格子状の中に存在するリーマン面構造を与えられますので、「種数１」の構造の、「ホッジの花束」構造を描きます。

このグラフ的リーマン面の構造は、種数１のループ構造が、多重連結して、同時に縮退することなく、種数ｇの構造を築いている状態です。

だから、このリーマン面上で考えられる「格子構造」は、そのまま、ヤコビ多様体に対応する代数的構造と対応する、多重格子構造になります。すなわち、リーマンの定理、

$$\mathrm{Jac}(C) \;\cong\; \mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g + \Omega\mathbb{Z}^g)$$

この意味を考えてみると、回転モジュラー空間をちょうどｇ個準備してきて、「二重周期構造」をｇ個貼り付けた構造と同じであることがわかります。これが、ヤコビ多様体の、アーベル多様体への有限円分的分解、そして同時に、その構造自体の正則性を示しています。

つまり、**θ関数の格子構造そのもの**がヤコビ多様体を与えます。

この格子構造は、

$$\Omega = \left(\int_{b_j} \omega_i \right)_{1 \le i,j \le g}$$

つまり、種数 gのリーマン面 Σg（例えば種数 gの曲線 C）には、基本閉路 {a_i,b_i}i=1～gと正則 1-形式 ω_1,⋯,ω_gを取ることで、周期行列が定まりますが、これが楕円曲線の時の τ 定数に対応する構造であって、それぞれ分解されたアーベル多様体の構造を、それぞれの花びらにおいて、素数無限同心円構造で図るなら、そこで自然に角度構造を生成することがわかります。これが、ちょうど、ｇ個になるということですね。

この構造が、ある素数におけるヤコビ多様体に対応するヴェイユゼータの構造です。ちょうど角度がｇ個定まり、その共役角度と合わせて２ｇ個の角度が組み合わされて、ヴェイユゼータの構造が定まります。つまり、ここに、いわば「種数構造ごとの角度構造は分離されて円分構造をなしている」というヴェイユの有限性定理の構造が出てきているということです。

この行列 Ω がジーゲル上半空間、

$$\mathfrak{H}_g = \{ Z \in M_g(\mathbb{C}) \mid Z^\top = Z,\ \Im Z > 0 \}$$

に対応し、多重格子構造の中の周期性を持つ、

$$\theta(z, \Omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp\left(\pi i\, n^\top \Omega\, n + 2\pi i\, n^\top z \right)$$

これがリーマンの θ 関数になります。
これを同じように z=0 のときのメリン変換、

$$\int_0^\infty \left(\theta(0, \Omega_t) - 1 \right) t^{s/2} \frac{dt}{t}$$

これで求める高種数ヤコビ多様体に対応する L 関数が出てくるというわけです。
シータ関数の変数は、Ω なので、保型形式の変数も Ω になるでしょう。

このとき、回転のスケーリングを考えますと、自然に、

$$L(s) = p \cdot \prod_{i=1}^{g} \left(1 - \alpha_{p,i} \cdot p^{-s} \right)^{-1}$$

$\zeta_{n_i}^{k_i}$ のようなルート系（ガロア的対称性）
p^{m_i} のような「回転のスケール」

$$L(s) = p \cdot \prod_{i=1}^{g} \left(1 - \frac{\zeta_{n_i}^{k_i} \cdot \alpha_{p,i}}{p^{m_i + s}} \right)^{-1}$$

このような、回転構造とスケーリング構造の組み合わせによるオイラー積が考えれることがわかります。

p^{-s}	ゼータ関数の主変数	スケーリング、臨界線構造
$\zeta_{n_i}^{k_i}$	n次の原始単位根（回転）	トレース上の回転構造（同期角）
p^{m_i}	局所的な重み（次元、次数）	p進的展開のフロベニウス次数
$\frac{1}{g+1}$	正規化項（幾何の次元）	種数による構造制限（ヤコビの層数）
総乗 $\prod$	各回転構造の合成	多層的トレースの積層構造

成分の意味をまとめた表がこのようになります。ある素数に対応する無限同心円構造の中の局所的な「深さ」も念頭に入れてあります。ひとつひとつの花びらは非周期的回路を持っていますので、この構造が、どのように発散を制御しているかという問題をも考えられるのですが、まだその問題は考えません。

ヤコビ多様体における「多層回転トレース」構造に、ゼータ関数の生成原理を置き換えたものになるというわけです。

楕円関数は「１つのフロベニウス角」ですが、種数ｇの代数多様体は「ｇ個の回転要素」です。

そして、ここには不思議なことですが、「自由群」のような実数構造は、すべて打ち消されてしまいます。同時に、「非正則構造の周期関数」では、リーマン面はすでに、一般的に言うと「ドーナツ構造」ではないです。シンプルな感じのね。しかし、たとえば、「ヤコビ多様体がアーベル多様体に分解する」ということの意味は、「種数一の花びらｇ個をつなげた形をしている」という意味なんです。つまり、ぎりぎりな正則的構造的制約がかかっている。単なるドーナツではこうは行きません。

アーベルの積分構造における二重格子の観察がありましたが、この構造がｇ個つながりあっているということです。だから、周期構造は２ｇになって、偶数性があることに注意が向きます。

このことは「奇数ゼータ」構造の奇妙さを暗黙していますが、これについては、ここでは主題化しません。

逆類双対変換で伊原ゼータ形に変換します。

つまり、　(重み・回転)　u^p　←　(重み・回転)　p^-s という変換ですね。

$$Z(u) = \prod_p \prod_i \left(1 - \alpha_{p,i} u^{\ln p}\right)^{-1}$$

ここでは、すぐにオイラー積に戻せるように、経路を調整してあります。

さて、ここで、より形式的に考えると、ヤコビ多様体のヴェイユゼータ構造と、この構造は、細部を除いて同じであることが分かるので、円分共役構造を取ると、

$$Z(C,T) = \frac{P(T)}{(1-T)(1-qT)} \quad \text{with} \quad P(T) = \prod_{i=1}^{2g} (1 - \alpha_i T)$$

このとき、

$$P(T) = q^g T^{2g} P\left(\frac{1}{qT}\right)$$

つまり、固有値の共役性が、

$$\alpha_i \cdot \bar{\alpha}_i = q \quad \Rightarrow \quad |\alpha_i| = \sqrt{q}$$

このことは、

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

このリーマンゼータの機能方程式をよく見ると、この「加法的構造」が、

$$\theta(it)=\frac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\frac{i}{t}\right)$$

このヤコビの θ 関数の「回転構造」の対応であるということがわかります。√ｔは、リーマンゼータでいうと、臨界線、回転対称軸を意味していますね。

これが、種数が上がると、周期構造の回転反転（s↔g+1−s）になるというわけです。もう少し見ると、このθ関数は、

$$\vartheta(z,\tau)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{\pi in^2\tau+2\pi inz}$$

保型変換すると、

$$\theta(z,-1/\tau)=\sqrt{-i\tau}\cdot e^{\pi iz^2/\tau}\cdot\theta(z\tau,\tau)$$

このように、冪乗型の構造でもやはり√τが出てきて、リーマンゼータのヒルベルトポリヤ作用に、√ｐが出てくる必然性というものが見えています。

ところで、僕自身ここまで考えを進めて、全然気づいていなかったことですが、というか、忘れていたことですが、なんとなくの気分で高種数ｇへとそのまま進むことができるように勘違いしていて、すでに種数１のときにも起こっていた「非正則的現象」、そして種数２のときには当然大局的に起こってくるだろう非正則的構造の影響を度外視していたことでした。

途中で完全に行き詰まってしまって、堂々巡りながら、夢を見ました。

一般種数の場合には、ｇ個のフロベニウス角度構造とｇ個の共役フロベニウス角度構造の行列的掛け合わせになって、角度付き多重ゼータ構造になる…というのが、僕の夢の内容でしたね。これは回転モジュラーの空間内で多重に起こっていて、ばらばらになって組み合わさって多重オイラー積を構成していますが、それぞれの共役部分だけはちゃんと成立しているから、きれいに固有値がまとまる。式にするとこんな感じでしょうか。

$$\prod_{i=1}^{g}(1-2\sqrt{p}\cos\theta_{p,i}\,p^{-s}+p^{1-2s})$$

角度構造がばらばらになって行列になるけど、種数ｇの場合は、実数的にまとまる、これがヴェイユゼータの構造、有限性の定理ですね。これが、共役構造と積み重なっているわけだから、この夢の内容をもう少しまとめてみるとこの様になるでしょうか。

命題

種数 g のヤコビ多様体の L 関数は、各素 p に対して g 個のフロベニウス角とその共役（正確には $2g$ 個のフロベニウス固有値）を持ち、局所因子は行列式的に組み合わされる。

種数増加で角度が“行列化”されるが、ある種の代数的制約（ヴェイユの性質や還元の制約）により有限性／整合性が生じる

つまり、ヤコビ多様体は種数の数の g のアーベル多様体への分解を持ちますが、僕は、これを「楕円構造」と勘違いしていて、しかし、非正則の領域ではごく特殊な場合以外ではそんな事はありえない。だから、この g 枚の「花びら」構造は、癒着していて、一つ一つ剥がすことができない。

A をアーベル多様体としましょう。すると、局所因子の構造は、

$$L_p(A,s) = \det\left(1 - \mathrm{Frob}_p\, p^{-s} \mid H^1_{\text{ét}}(A_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Q}_\ell)\right)^{-1}.$$

次元は $2g$で、フロベニウスの固有値は複素数 α_p,1,⋯,α_p,2g。で、ワイルの定理より、

$$|\alpha_{p,i}| = p^{1/2},$$

これを利用して、角度成分を抽出し、

$$L_p(A,s) = \prod_{i=1}^{2g} \left(1 - p^{1/2} e^{i\theta_{p,i}} p^{-s}\right)^{-1} = \prod_{i=1}^{2g} \left(1 - e^{i\theta_{p,i}} p^{1/2-s}\right)^{-1}.$$

おおよそこういう感じにまとめられるという感じなのでしょうか。

問題を整理しますと、

１，楕円の場合に分解できない場合は非正則の領域になっているから、角度を分離できないし、すでに、種数１の場合にすら、さまざまなリーマン面の退化・縮約構造が起こっていた。種数２以上の場合には、ほぼ、非正則の海の中にいて、正則であることのほうが異常である。

２，保型性は消え去るかもしれないという予感すらする…単純な θ 関数からの突破はまず無理だろう。岡潔さん的な領域だろう。

この、「素数構造の中での非正則現象」については、あとで、トーション構造を分析するところで、考察します。僕は自分で考えを温めていた内容すら忘れて、夢の中でそれを思い出したというわけです。

少し、「非正則領域」や「癒着構造」という言葉の意味を補足しましょう。

「花びらが癒着している」という場合、それは、数学的に言えばヴェイユゼータの分子の多項式部分が「既約多項式で分解できない」とかなんでしょうが、単純に僕の場合には、「花びらの角度構造を分離して考えることができない」という意味です。

「楕円部分に分解できる」とは、角度構造（フロベニウス角）が相互に独立し、種数 1 の部分構造として表現できることを意味し、もしそれが可能であれば、保型性と L 関数との対応によって、高種数領域についての結論を出すことができるでしょうが、実際には保型性の確立自体がまだなわけです。これは、殆どの場合、アーベル多様体は「楕円部分に分解できない」ということを意味していますし、 θ 関数による制御がうまくいかなくなる

現象や種数１のときにすら起こっていた非正則現象との整合性もあります。
　僕が非正則領域と呼んでいるは、ふたとおりです。
　つまり、タマガワ数のような、「素数の場所で構造が潰れる」現象、素構造で種数１が種数０に退化する現象があります。これは、「種数構造が一様ではない」=非正則という意味ですね。
　つまり、楕円ヤコビ多様体のフロベニウス角を見たときに「悪い素数」では「二重周期性」が潰れて、種数０へと退化・分裂する現象があります。これは、「局所を見たときに実はリーマン面は一様ではない」ということを意味しています。これについては後で分析します。
　同様に、グラフ的リーマン面の見地から言うと、非周期的回路の数が３本以上になると、非自明なグラフ的構造が生じます。つまり、一般的なドーナツ構造ではありえなくなります。しかしこれは僕がちゃんと考え込んでいないので、具体的に表現するのは難しいですが、ざっくりといえば、「枝の構造が一様ではなくなる」という感じです。
　つまり、種数１までは、円とか、花びらとか、そういう基本単位のようなものを貼り付けたりしながら構造を構築することができました。しかし、グラフの構造の自由度が上がると、そういう組み立てでは作れないような「非自明」な構造が生まれます。この構造的影響はが大局的に現れないはずがないということです。
　つまり、ざっくりいえば、局所でも大局でも非自明な、「非一様構造」が現れるということです。

VIII. カルタン分解的構造と回転モジュラー空間

　この論考は、フラクタルを分析するための発散的復元理論による、グラフ論的リーマン面やリンドン螺旋複素位相理論などのために、さまざまな具体的な数学構造をじっさいに分析してみようという動機で書かれています。ゼータ構造の分析が多いのは、まさに、この理論に最もフィットしているのが、「伊原ゼータ」というグラフ論的ゼータであるからで、ここからさまざまな変換を通じて、他のゼータ構造を分析している、というのが論考の流れです。この論考では、ヴェイユゼータのグラフ論的分析から、L 関数の分析、そしてグラフ論的構成、そして最後には、リンドン螺旋位相的 L 関数について書くつもりでした。
　ところが、途中で、回転モジュラー空間について書き始めたときに、行き詰まりが来ました。行き詰まりというより、頭の中で考えていたよりもたくさんの内容がそこにあったために、書き進めていくことができなくなったのです。抜けがあった、というべきでしょう。
　回転モジュラー空間というのは、もともと伊原ゼータの経路構造とフラクタル構造の描画空間として考えたものでしたが、この論考で記述している最中に気づくまでは、「モジュラー空間とにているよなあ」と思っていただけでまさか同相性が明らかになるとは思わず、最初の予定よりも、結果として、論文が長くなりました。

とはいえ、いろんな問題が積み残しになっており、たとえば、回転モジュラー空間に適当な角度構造を与えることによって、L関数のようなものが作れるとしたところで、それに代数的構造を与えることも、けっきょくそれが何になるのか分析することも、できない。それで、τ格子との関連性について補遺を書いておこうと思って、リー群の理論の Gτ分解というものを調べて、τからヘッケ的フロベニウス角度を、**様々な理想的な仮定条件のもとで**、求めるという補遺を付け加えたのですが、翌々考えてみるとこの節はあまりにも不思議で、「これでは、代数的構造との対応が（方法さえわかれば）そこそこ分かってしまうのでは？」とあとあとで思ったのでした。

けっきょく、書きながら、「回転モジュラーの理論」のところと、「Gτ分解」のところで大きくなにかが飛躍したような気がして、途中で書けなくなって、本を読んだり、ネットで論文を調べて読んだりして、その意味を考える時間が必要になりました。

この意味がぼんやりと明らかになったのは、グロタンディーク・レフィシェッツの公式をぼんやりと眺めていたときでした。

$$N_n = \sum_{i=0} (-1)^i \operatorname{tr}\Big(\mathrm{Frob}^n \mid H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Q}_\ell)\Big)$$

この公式はいわば、離散的空間に、空間的な構造を与えて、そのなかで、「不動点」を数え上げるという形をしています。この公式を眺めていたときに、Gτ分解によって、τからフロベニウス角度を求めるという「計算手法」のつもりで書いていた節が、この公式の構造と同じことを行っているということにふと気づきました。（補遺Ⅳτとフロベニウス角度の対応）

Gτ分解（カルタン分解）は、次のような形をしています。

$$G = K\,A^{+}\,K$$

カルタン分解G=K A+ Kは、次のような部分に分けられていて、

K：回転部分（角度）

***A*+：スケール拡大（半径）**

これは、回転モジュラー空間の「べき乗的フラクタル部分」と「回転部分」にまさに対応している！「同心円×角度分割」は、まさに *A*+（半径拡大）＋*K*（回転） の合成そのものです。あとで、もう少し説明しますが、しかもこのとき、問題になっていた、「角度の絡まり合い」やスカラー化によるフロベニウス角度の成立などの構造が、きれいに、包含されていることに気づきます。

さらに、局所（p 進）でも同じ構造で、G(Q_p)=K_pA_p+K_p と表され、これが“素数ごとの拡大＋角度分割”の正体で、サタケパラメータ（= フロベニウス角度の多軸版）は *Ap*+の固有値に相当。幾何像はカルタン分解に整合。「半径」は *A*、「角度」は *K*、その合成がヘッケの素因子になります。

群 G=Sp(2g,R)は、複数の角度構造で商を取ることで、一般でも局所でも、自然なトーラ

ス構造を導き出し、種数 g のヤコビ多様体に自然に対応しています。

いまからの議論においては、不分岐の場合、すなわち分岐、純性の乱れや退化の現象などは置きないという前提で話を進めていきます。

最初に種数 1 のときを復習しましょう。

命題　種数 1 の場合のカルタン分解と回転モジュラーの対応

種数 1 の場合、回転モジュラー群は SL(2,R)の部分群として扱える。そのときカルタン分解（あるいは Gτ 極分解）は、行列を「回転」「拡大」「並進」に分けて書くことができます。すなわち、

$$g = k(\theta)\, a(t)\, n(u),$$

このとき、

$$k(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad a(t) = \begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, \quad n(u) = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

こで k(θ)は回転、a(t)は拡大縮小、n(u)は並進を表す。

このようにして、抽象的に導入した「回転と並進による分解」が、行列表現においても自然に現れる。特に k(θ)が「回転作用素」の役割を担い、ゼータ零点構造の位相的対称性との対応を与える

カルタン分解の回転部分 $k(\theta)$は、「回転作用素」そのもの。ゼータの非自明零点の配置（臨界線上の周期性・対称性）と対応します。拡大部分 $a(t)$は、メリン変換におけるスケーリング作用と同型。非自明零点の「高さ」（虚部の分布）をスケーリング対称性として捉えられます。並進部分 $n(u)$は、これは「自明な零点」が関わります。というのも、通常のメリン変換では「自明な零点の寄与」が消えているけれど、この並進を入れることで、群作用の枠内に「写らなかった構造」を再配置できます。。

つまり、この分解の 3 要素を「零点構造の群作用」に重ねて書くと

零点構造$\leftrightarrow k(\theta)\times a(t)\times n(u)$

つまり、この構造は、機能方程式、

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\tfrac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\tfrac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

$k(\theta)$: s↦1−s の「反転対称性」を表す部分。虚数方向の周期性（臨界線上の非自明ゼロ点）
$a(t)$: Γ 因子に現れる指数的な伸縮 e^±t。これは「高さ（虚部方向）」の対称性を保持
$n(u)$: ζ(s) と ζ(1−s)の間に補正的に現れる部分で、自明な零点がこの並進方向に対応（通常のメリン変換で抜け落ちた部分）

つまり、この種数 1 におけるカルタン分解の形は、リーマンゼータの機能方程式の構造とも一致します。すなわち、回転 k(θ)は反転対称性 s↦1−s に対応し、拡大 a(t)はガンマ

因子に現れる指数的伸縮に対応し、並進 n(u)は自明な零点の寄与を補います。この意味で、カルタン分解はゼータ関数の零点構造を群的に再現するものであり、岩澤型の分岐的分解と直結しています。岩澤型は数論的カルタン分解の形として捉えています。

まず、２つの「フラクタルスペクトル」の成立条件を整理しましょう。

スカラー化 は、本来は複数ある Satake パラメータ {α_p,i}を、一つの角度や単一の位相で代表させられる状況で、このとき「局所因子がシンプルな形（1 種類の角度)」になり、自然にフロベニウス角度と対応づけられるようになります。

整列条件は、そのときの、それぞれの α_p,i が「バラバラではなく」正しい絶対値条件（Weil の条件）を満たし、全体が保型表現の構造に沿って並んでいる状況です。

この「絶対値条件」は回転モジュラーでは、「円周構造の半径の大きさ、あるいは半径の一様性、非一様性に対応していることに注意してください。半径をスケーリングを合わせてメリン変換（類双対変換）したとき、直線構造が綺麗に一本にまとまります。保型性の「重み」やゼータ構造の「臨界線」と関係した部分です。

この一様性があって、このとき初めて「グローバルに一貫した L 関数」を貼り合わせられます。さて、

命題　$G\tau$分解と Lefschetz 型トレースの整合

$G_\tau=K\tau A\tau+K\tau$が成り立ち、τ球面部分 $H_\tau_$sph 上に核級の“ヘッケ様”作用素 $U(a)$（$a\in A\tau+$）を持つとする。

$U=\int\phi(a)\,U(a)\,da$を（有限和でも可）とり、Uのスーパー・トレースを

$$\mathrm{Str}(\bar{U}^n)=\sum_j(-1)^{\deg j}\,\mathrm{tr}(U^n\mid\mathcal{H}^{\mathrm{sph}}_{\tau,j})$$

と定める。

さらにτ球面$H_\tau_$sph が Uで同時対角化され、固有値を {α_τ,i}と書くと，

$$\mathrm{Str}(U^n)=\sum_i\varepsilon_i\,\alpha^n_{\tau,i}\qquad(\varepsilon_i=\pm1)$$

が成り立つ。よって

$$\log\det(1-zU)^{-1}=\sum_{n\geq1}\frac{\mathrm{Str}(U^n)}{n}z^n$$

は素（原始）回路のメビウス反転によりオイラー積化し，

$$\det(1-zU)^{-1}=\prod_{\text{素回路}\ c}\left(1-z^{\ell(c)}\right)^{-1}$$

を与える。特に ε_iがコホモロジー次数の符号に一致する場合、Str はグロタンディーク-ルフェシェッツの Σi(−1)^i tr(Frob^n|H^i)に対応する。

さて、カルタン分解で Uは $A\tau$+上の関数の畳み込みに還元（サタケ型）。非分岐（球的）点、サタケパラメータは（z_p,1,...,z_p,g）（単位円上）を **Weyl 群（型 C_g）**で割ったものであって、角度構造を複数持つトーラス構造になります。

Gτ=KτAτ+Kτ とする。H_τ_sph を τ 球面部分とし、各 a∈Aτ+に対し核級作用素 U(a):H_τ_sph→H_τ_sph を与えます。可積分 φ について核級作用素、

$$U = \int_{A_\tau^+} \varphi(a)\, U(a)\, da$$

このとき、τ 球面$H_\tau_$sph で作用素が同時対角化されるなら、その固有値冪和がトレース公式にそのまま乗ります。τ 球面$H_\tau_$sph は作用 U と可換な分解であるのは、

$$H_\tau^{\mathrm{sph}} = \bigoplus_j H_{\tau,j}^{\mathrm{sph}}$$

H_τ_sph はこのような有限次元の直和分解をもち、Uと可換な分解である（同時対角化可能）。

Uは同時対角化され、固有値系を {α_τ,i}、対応する Lefschetz 符号を ε_i∈{±1}（ε_i=(−1)^deg$i$）とする。このとき、

$$\mathrm{Str}(U^n) := \sum_j (-1)^{\deg j}\, \mathrm{tr}\Big(U^n \mid H_{\tau,j}^{\mathrm{sph}}\Big) = \sum_i \varepsilon_i\, \alpha_{\tau,i}^n \quad (n \geq 1)$$

となります。これが、条件により、ヘッケ作用素の固有値構造になります。

$$\log \det(1 - zU)^{-1} = \sum\nolimits_{n\geq 1} \frac{\mathrm{Str}(U^n)}{n} z^n$$

をフレドホルム行列式として定義でき、Str(U^n)は**閉軌道和**に分解します（素閉軌道公式）。するとメビウス反転により

$$\det(1 - zU)^{-1} = \prod_{\text{素回路 } c} (1 - z^{\ell(c)})^{-1}$$

交互和は“偶・奇のブロック分解”（Z/2 次数）で実現。フレドホルム展開とメビウス反転で素回路へ縮約されます。

未分岐局所について、幾何側{H^i}のフロベニウス作用と上記分解が整合し、

$$\sum_i (-1)^i\, \mathrm{tr}\big(\mathrm{Frob}^n \mid H^i\big) = \mathrm{Str}(U^n) \quad (n \geq 1).$$

したがって固有値の冪和比較により {ατ,i}i はフロベニウス固有値（規格化後）に一致し、特に偏角がフロベニウス角を与えます。

重み（純性）を仮定すれば |α_τ,i|=q^w/2 となり、偏角は一意に定義されます（スカラー化＋整列条件)。

局所パラメータ z=q^−sにより大域 L関数へ接続できます。

もう一度この議論の条件を検討しますと、核級つまり有限性については、回転構造の縮約可能性は、核級 → リンドントレースはほとんど有限。「核級作用素ならばトレースが有

限に収束する＝有限性の保証。ただし通常は超越数的に発散するリスクがあるが、回転作用によって縮約できる（＝フラクタル構造がリサイクルされて有限化）と考えます。ただし、リンドントレース理論との結びつきは、まだ厳密ではないので、ここは注意です。

この対応関係はリンドン複素位相における、L 関数の考察を必要としますが、これはまだ完成していません。

とはいえ、この仮定で、トレース公式（Grothendieck-Lefschetz 型）が有効に働く。

同時対角化の条件に関しては、同時対角化 → スカラー化の条件、と考えますと、複数の角度（サタケパラメータの集合）がある場合、そのままでは固有値構造はバラバラ。しかし「スカラー化が成り立つなら」、つまり「角度集合が単一の固有角に代表される」なら、そのまま同時対角化が可能になり、固有値展開・トレース公式が通るということになります。

結果、調整をすれば、フロベニウス角度として一貫解釈が可能になります。

もう一度、回転モジュラーの観点から書き直すと、

命題　回転モジュラー → $G\tau$分解 → 局所オイラー因子

$G\tau=K\tau A\tau+K\tau$が成り立ち、τ球面部分 H_τ_sph 上で核級の遷移作用素族 $U(a)$ $(a\in A\tau+)$をもつとする。

回転モジュラー構造から与えられる“回転 Satake パラメータ” $\{\alpha\tau,i\}i=1\sim g$に対し、

$$L_\tau(s)=\det\bigl(I-U(p^{-s})\bigr)^{-1}=\prod_{i=1}^{g}\bigl(1-\alpha_{\tau,i}\,p^{-s}\bigr)^{-1}$$

が定まる。ここで

$$\log\det(I-zU)=\sum\nolimits_{n\geq 1}\frac{\mathrm{Str}(U^n)}{n}z^n$$

は回路トレースの交互和

$$\mathrm{Str}(U^n)=\sum\nolimits_i(-1)^i\mathrm{tr}(U^n\,|\,\mathcal{H}_{\tau,i}^{\mathrm{sph}})$$

に一致し、メビウス反転により素回路のオイラー積に縮約される。

よって $L\tau(s)$はヴェイユ型の局所因子として振る舞い、フレドホルム理論により解析接続が従う

仮定、核級性・同時対角化・素閉軌道公式・純性/規格化のうちで、見通しも立っていないのは、純性、という条件ですが、これは、種数が上昇した時の、半径構造の変化が定式化されていないためで、この論考でも、殆ど触れられていません。

この定式化で、興味深いのは、回転モジュラー→←モジュラー空間という、移行の仕方はすでに論じましたが、それをまるで包含するような形で、リー群の、

カルタン分解（Gτ分解）　→←　岩澤分解

というような、分解形式が**あるように見える**ことです。

そして、これらの形式をつなげているのは、素閉軌道公式型のゼータ構造であって、レフシェッツのトレース公式構造です。グラフ構造や点構造を連続的なトーラス型の位相構造として組み直し、そのなかで、経路表現として作用素の動きを、トレース公式として捉えると、**あくまで形式的に構造的な同型性が見えてくる**という図式です。

さらに、これは未分岐という仮定もあります。

分岐型の場合には、「**分岐素では補正（ε因子・導手）が要る**」ので、「**純性の仮定に依存**」いますが、それ以外は極めて自然な見方が成立しているように見えます。

純性の乱れというのは、角度構造の絡み合いから来るのか、回転モジュラーの構造から見ると、単なる「異なる円周構造の変換」でしょう。それをちゃんと合わせて「一本」にまとめる類双対変換があるからまとまっているけど、そのときにズレが出るとしたら、円周構造の深さや、あるいは構造の退化などが影響してずれるんだろう、というぐらいのイメージです。

このように見ただけで、いままでは、回転モジュラーで多数の角度構造を扱おうとしたときに、結合の仕方などに工夫を必要としたところ、自然に、行列代数的構造の中に「絡み合い」が表現され、多変数構造の中の「スカラー化」「整列構造」への見方が整理されたように感じます。

と同時に、角度構造が増えれば、その整列構造には「多周期フラクタル的構造」が入り込み、「フラクタルスペクトル」が非常に複雑になること。また、単純な「フロベニウス角度」だったものが、いわば、「極限収束的なふるまい」をしていたはずなのに、「分岐的発散的動き・多周期的な複数要素への収束的な振る舞い」をするようになる、ということの意味を垣間見させてくれます。僕はフロベニウスというのは「ある極限値へとスケールを変えながら近づいていく」というイメージを持っていたんですが、この P 進スケーリング的なイメージは全然異なっていて、種数１のときにちょっとありそうというぐらいだということがわかった…ということは種数２以上では、なんか「分解していく」「分散していく」みたいな感じになるんだろうと。これらのことは、厳密な定義というより多分現象として重要だと思われ、この論考とは別に、簡単な、データか、コードをどこかで用意するつもりです。

ところで、本論考においては「保型性」という語を用いず、**多周期フラクタルスペクトル構造**という表現を採用しているのは、僕は保型理論の特定の方向性へとあまり踏み込みたくないという意味合いともともとフラクタル性の理論の展開をしているという二重の意味合いを持っています。リンドン構造理論にとって、保型形式理論は、あたかもそれがべき乗関数の一般的構造を持っているように見えるところにあります。**べき乗構造はフラクタル構造へとすぐに読み替えることができます**。その一般的構造をこの論考ではフラクタルスペクトルと言語化しました。これは従来のサタケパラメータ的な有限整列構造ではなく、稠密な角度スペクトルがフラクタル的に自己整合する様相を指します。

さて、いままでは、回転モジュラーの空間で、正則領域の中から少し変形を含みながら、

いろんな既知の構造を考えるということを考えてきました。
　この節では、具体的に、種数２のときに、非正則的構造が出てくることや、いままででてきた「局所的非正則現象」などの分析を通して、非正則現象について考えることをしたいと思います。
　あとは、回転モジュラー理論による種数２の領域の外観、種数の退化や異常性を含むトーション構造論、アーベル関数論、回転モジュラーから見た構成などを非正則性に絡めて論じて終わろうと思います。
　僕の理論において、「非正則性」の見方は、ごく単純で、「異なる正則領域がバラバラに結合されている」ということですね。これは僕がグラフ論的リーマン面で見ているからです。グラフだと点と線の繋がり方だけで正則と非正則が見分けられます。とどうじに、「素構造」の観点で見ると、構造体によっては、「悪い素数」の部分が構造変化を起こして、「非正則」になったりします。これは、「素因数分解の絡み合いで壊れる回転構造」ですね。ざっくりいえば、大局的非正則性と局所的非正則性がある。これが、第３論文の第一章最後の主題でいま書こうとしているところのもので、トーション構造や種数退化の現象などを論じようと思っています。
　局所的な非正則領域については、行列持ち上げや種数の素構造の中での退化の現象が重要だと思います。
　たとえば、L 関数で、フロベニウス角度が「悪い素数」で潰れてしまうときに、そのオイラー積は、種数１から種数０へと退化して分裂したような様相を帯びます。

　　局所因子の分母 $(1-T)^m$

　この「タマガワ」的現象は、角度構造があったのに、それを素数で図り直したときに、その角度構造が潰れて、行列式でいうと１になり、ヴェイユゼータでいうと、因子が割り切れてしまう場合に該当します。これについては後で分析するでしょう。
　また、第二論文では、L 関数のヘッケ作用素の行列を持ち上げる、ヘッケ持ち上げで、三次の次数のゼータを構成するということをしました。しかし、三次に上がったゼータ構造から角度構造がどう出てくるのか、どう作用しているのか、まったくわかりませんでした。
　いいかえると、種数の退化や次数の持ち上げが起こったときに、なんらかの角度構造の異常、または余剰が出てきている、そしてそれは構造の本質を映し出しているだろうことが想像できるということです。
　タマガワ的退化現象を考えますと、これは、「トーション構造の種」になります。
　しかし、角度構造が消えたのに、どのように種になるのだろうと考えて、僕は次のような推論を行いました。
　ヴェイユゼータでは、退化的な、分子の構造は、「P 進拡大」的な構造を生み出し、分子の代数的構造を埋め込む仕組みを持っています。これについては、この第３論文の最初で論じました。とすると、あたかも、この退化したタマガワ的項は、「仮想的ヤコビ多様体」

の構造を、全体的寄与から引き出して、それで、「トーション的巡回構造」へと発展しているのではないでしょうか。

　これは、リーマンゼータでも見られて、リーマンゼータは、伊原ゼータ型へと変換したときには、素数２の回転的寄与があるのですが、これは、「メリン変換」で直線の中に入り込みません。メリン変換は、「実軸上」には作用を運ばないからです。結果的に、「自明なゼロ点」が、－２、－４、－６…と周期的に並ぶ、補正項によって表現されています。

　カルタン分解と回転モジュラーの関係性に結びつけるなら、なお、岩澤型分解において現れる並進部分は、アデール加法群の寄与としてタマガワ測度の構造に自然に結びつくように思います。したがって、この分解はカルタン分解の回転・拡大構造をさらに拡張し、ヴェイユ群的な対称性を準備するものと見なすことができるでしょう。

　並進 $n(u)$→ 自明な零点の寄与

　拡大 $a(t)$→ ガンマ因子・指数因子

　回転 $k(\theta)$→ 非自明零点（臨界線上の対称性）

　に対応させられます。

　したがって、岩澤分解を通せば「自明な零点」と「非自明な零点」を構造的に切り分けられることがわかります。

　これは、ヒルベルトポリヤ型の作用素のスペクトル解釈において「どの部分が虚軸上の非自明スペクトルを生むのか」を明確にする意義があるでしょう。

　トーション構造についてもう一度描くと、さまざまな素数において、「巡回性」や「自由群」を生み出す角度が生まれても、大抵の場合は、対称性を持っています。そのため、無理角などがあっても、それが「実部共役」の対称性によって打ち消される構造になっているため、トレースが消えて $\mathrm{a_n}=0$ になる。

　これはすなわち $\mathrm{a_n} \neq 0$ となるには、実部共役の打ち消しが起きないような「非対称構造」が必要ということです。

　非対称性が保たれれば、ループ角度がトレースに残り、自由群的な成分として蓄積される。

　逆に、実部共役的対称性を持つ角度構成では、すべての寄与が打ち消し合ってトレースゼロ＝$\mathrm{a_n}=0$ となる。

　これにより、自由群の生成元が蓄積されず、自由部分の rank が 0 になる。

命題

　モジュラー曲線 $X0(11)$に対応する保型形式の保型性が強すぎて、楕円曲線上のトーション点が（保型的な対称性のもとで）打ち消し合う。そのため、トーション部分が制限される（あるいは消える）。

N	$g = \text{genus of } X_0(N)$
1〜10	$g = 0$（球面）
11	$g = 1$（トーラス）← これが「最初の genus 1」曲線
12〜	$g \geq 2$（高種数）

$X0$(N)の構造はいわばフルモジュラーから、最初に mod で制限をし、その後、素数が大きくなるほどにその「対称性・保型性」を緩めていくという仕組みをしています。小さな素数の場合には、要求される対称性が強く、「打ち消し」の力が働きますが、次第にゆるくなっていきますが、再び、種数１の曲線が許されるレベルにまで緩みますとその$X0(11)$には強い「対称性・保型性」が要求されるようになります。これが、１１のときに、トーション構造が「打ち消されて」存在することができなくなる理由であると考えられます。

非周期的リンドン的トレース束（自由群構造）が活性化するには、無理角による非周期ループが必要になります。

しかし 実共役（Re 対称性） が $a_n=0$ を頻出させ、自由群構造が形成されない。

11 の場合、保型性が強く、Re 共役も強く働くため、トーション点はことごとく打ち消される（もしくは自動的に制限される)。

いままでの考察をまとめるとこうなります。

ヤコビ多様体を素数 p で図るとひとつのフロベニウス角度を得ます。

しかし、多くのフロベニウス角度は保型性に対応していて、素数全体の寄与で、打ち消されます。

しかし、特定の素数のフロベニウス角度は「半保型性」しか持っておらず、それが、自由群やトーション群の構造を作ります。

これが、モーデルヴァイユ群の再構成の手順ですね。

最後のトーション構造の仕組みはまだ理解していないです。

最初の考えでは種数０に退化しても「角度構造は残っている」と思っていたんですが、角度構造自体が消えるということが分かった。

じゃあ、どこでトーション構造が復元されているのか。

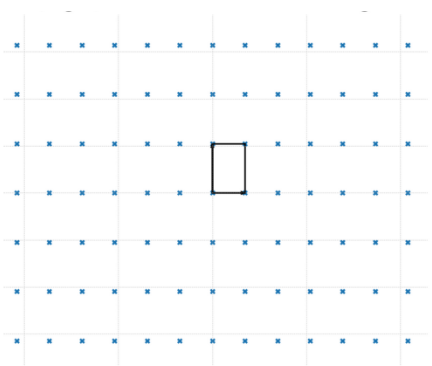
具体的に言うと、L 関数で、トーション構造を作ると思われる部分では、二重格子が潰れて、発散するかゼロに行くかして、二重周期性が潰れて、種数０構造へと退化しているということがわかります。これはメイザーの定理ですね。

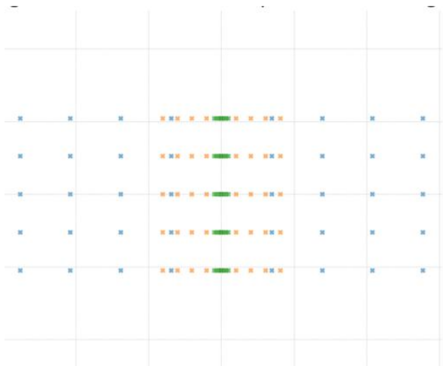
他のモーデルヴァイユ群を構成しない部分は、「互いに打ち消されて」全体的には消えていく。

そして、トーションや自由群を構成する素数部分は、種数０になっているために打ち消されない。

しかし、僕がここにあると思っていた角度構造は、つまりフロベニウス角は、つぶれて

一次のオイラー積になってしまっている。
　これは、二重格子が潰れて固有値が潰れていることと対応しているのだから、そもそも角度構造はなかったということになりますが、であるなら、トーション的周期や自由群構造は、この「潰れた種数０」構造からどのように発生するのか？
　僕自身はまずヴェイユゼータであるフロベニウス角が潰れるときにも、左辺のオイラー積展開は存在することに注目したんです。
　そうすれば、奇妙なことですが、「角度は潰れている」けど、「角度は残っていていつものオイラー積ではない」ということになる。
　つまり、全体的に見ると、この「ヴェイユゼータの左辺構造」は、いろんな素数の、表現でいうと、「痕跡」との和で、トーション部分へと復元されるのかな、と思ったんです。
　「消えている角度が復元されるときに痕跡と掛け合わされてフロベニウス角を復元した」階数ですよね。
　例を見てみましょう。楕円曲線 78a1 です。
　結果（素数 $p \le 200$, 曲線 78a1）
　全対象素数数：46（2 以上の素数で 200 以下）
「|a_p| = 0」の素数： $p=23, 127, 167$p=23,127,167（3 個）
「|a_p| = 1」の素数： $p=2, 3, 13$p=2,3,13 − 全て bad primes（導体の素因数）。
「|a_p| = 2」の素数： $p=5, 17, 37, 61, 73, 101, 109$p=5,17,37,61,73,101,109.
　フロベニウス角はつぶれているけど、ｐ進周期構造は、タマガワ分解されて残っているんでしょう。プラスマイナス１というのは、いわば「回りきっている」ということだから、やはり、痕跡としてトーション構造を作り出しているという感じになっていることが想像できますね。
　ヴェイユゼータでいうと、素構造「１」と素構造「ｐ」で割り切れる兼ね合いで、
１，両方とも割り切れて、一になってしまう
２，固有値の一つがゼロに近づく。フロベニウスの共役格子は１周期に潰れるが、P 進的には埋め込まれている。このとき、固有値は、無限✕ゼロ＝ｐで、種数ゼロへの縮退。
　種数０だけの構造で作られているわけはないのだから、それ以外の「花束」との全体的な寄与で、トーション構造が生まれているのは間違いないでしょう。





これは、格子が潰れて、循環構造が現れる模式図です。

不思議なもんで、１が、ヴェイユゼータでいうと、ある素数 p とヤコビ多様体で、展開されてしまうというのが、「種数１」のときのみ起こる…というね。

種数２以上のときにも割り切りは起こるだろうし、より複雑な形になるでしょう。

第１論文の頃、よくζ（２ｓ）/ζ（ｓ）とか考えていたですが、ちょっと構造が似ているのが面白い。このときも、ゼータの因子が割り切れてしまいます。

一般的に考えて、種数 $g\geq 2$ におけるトレース束の振る舞いは、種数 1 に見られる単純な冪同心円・角度配列とは本質的に異なります。ヘッケ作用素やフロベニウス作用が作る軌道は、入れ子化した遷移を示し、これを自然に記述する数学的枠組みとして 非正則で非一様なグラフ（以下「トレース図」）が浮かび上がる。トレース図の段数と構造は、ゼータ局所因子の角度分布に深さとして刻印され、ツイストの「階層的非周期性」はこの深さに対応すると考えられます。これを解析する道具としてリンドン的入れ子表現を導入したいというのが、次の目的になるでしょうか。

実際のヘッケ作用素は許容される角度列の集合を強く制限し、その制限像こそが τ 側（格子・ヤコビ多様体）と整合するでしょう。したがって、L 関数の「局所→大域」構成は、単に各素数に角度を割り当てる操作ではなく、作用素による可許化＝選別の過程を含みます。

自由群もトーションもすべての素数の寄与を集めた、螺旋的ヒルベルトポリヤ的に決まらないといけない。このとき、オイラー積は潰れているけど、オイラー積展開は存在しているところが不思議ですね。

種数 g=2 の「ねじれ（φ _p)」補正の具体例を考えてみましょう。

$$\alpha_{p,1} = e^{i(\theta_p+\varphi_p)}, \qquad \alpha_{p,2} = e^{-i(\theta_p-\varphi_p)}.$$

このようにねじれが出てきたとします。

$$a_p = \alpha_{p,1} + \alpha_{p,2} = 2\cos\theta_p \cdot \cos\varphi_p \ + \ 2i\sin\theta_p \cdot \sin\varphi_p,$$

となり、**実数の単一パラメータ λp** に落とすことができません（虚部が一般に消えない）。さらに、素数冪回帰は敗れていて、

$$H_p^{(2)} = A_p^{(2)} + p^{k-2}B_p^{(2)} \qquad \mathcal{S}\circ H_p^{(2)} = T_p \circ \mathcal{S}$$

ですが、

$$T_p a = （単一の実数）\times a$$

を満たす **λp が存在しない。**

$$\chi(p) := e^{i\varphi_p}$$

こういうツイストを、乗法的関数になるように取って、

$$\alpha'_{p,j} := \chi(p)^{-1}\alpha_{p,j}$$

このように置くと、

$$\alpha'_{p,1} = e^{i\theta_p}, \qquad \alpha'_{p,2} = e^{-i\theta_p}$$

対角化（共役ペア）に戻ります。こうなると種数 2 の成功例と同じくヘッケ固有になり保型性が回復します。

こういうときに、理論的には、崩れたままである状態で考えたほうがいいのか、それとも補正が可能であるということ、補正が可能であるなら補正した状態を自然であるとみなすことが必要なのか…それもわかりません。

角度の絡み合いや純性の異常がどのように生じてくるのか、あるいは非正則的な構造をそのまま考えることができるのか、など、難しいところが出てくるでしょうが、まずは、第二章では、局所的異常を、「類双対的変形」として捉えて、イデアル構造などを考えるというような方向で考えていくでしょう。