超版 **Fractal explicit formula**

まえがき

これは、「グロタンディーク・黒川の路線に寄る F1 構造に寄るゼータの構築」と姉妹論文「伊原ゼータからのグラフ論的構成によるリーマンゼータの構成理論」に関する補足的論文であり、数値計算や、その他の構造的考察が書かれてある。

本補足論文の位置づけ

本補足論文では、以下の点を示す。

- $N = 28$ における完全な計算の具体的実行
- Fractal Frobenius の有限次元的実現
- 臨界線 $\Re(s) = \frac{1}{2}$ が線形代数的構造として自然に現れること

一方、以下の事項については本稿では扱わない。

- 大域解析に基づく議論
- 関数等式の導出
- Γ 因子の構成

—

モデルケース $N = 28$（$p = 3$）における構成的アルゴリズムの完走

本節では、完全数 $N = 28$（対応する階層 $p = 3$）を例として、本理論の構成的アルゴリズムを最後まで具体的に実行する。これにより、抽象的に定義された幾何学的構造が、有限次元の線形代数的計算を通じてゼータ関数の零点条件へと収束する過程を明示する。一般の p に対する妥当性は、前節までに示した構造定理に基づく。

0.1　幾何学的土台：種数 3 の超リーマン面

$p = 3$ に対応する完全数は

$$N_3 = 2^{3-1}(2^3 - 1) = 28$$

である。公理 **(A2)** に従い、これに対応する螺旋超リーマン面 Σ_{28} を考える。この面は次の性質を持つ：

- 有効種数：$g(\Sigma_{28}) = p = 3$。
- 超コホモロジー次元：$\dim H^1_{\mathrm{super}}(\Sigma_{28}) = 3$。
- 基底：$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$。これらは階層 $p = 3$ における算術的定常波を表す。

0.2　階層 $p = 3$ における Frobenius 作用素の具体化

Fractal Frobenius 作用素 $\mathcal{F}_3$ は $H^1_{\mathrm{super}}(\Sigma_{28})$ 上に作用し、上記基底に関して 3×3 行列として表される。その正規化形

$$U_3 := 3^{-1/2}\mathcal{F}_3$$

は定理 2.1 によりユニタリである。具体性のため、最も対称性の高い代表として、以下の対角行列を選ぶ：

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \qquad \omega = e^{2\pi i/3}.$$

このとき、$\mathcal{F}_3$ の固有値 α_j は

$$\alpha_j = \sqrt{3}\lambda_j, \qquad \lambda_j \in \{1, \omega, \omega^2\}$$

で与えられ、いずれも $|\alpha_j| = \sqrt{3}$ を満たす。

0.3　Fredholm 決定式と局所 L 因子

公理 **(A1)** に基づき、$N = 28$ に対応する局所 L 因子を Fredholm 決定式として定義する：

$$\mathcal{L}_{28}(s)^{-1} = \det\bigl(I - \mathcal{F}_3 \cdot 3^{-s}\bigr).$$

固有値 α_j を代入すると、これは次の 3 次多項式に帰着する：

$$\mathcal{L}_{28}(s)^{-1} = \prod_{j=1}^{3}\bigl(1 - \alpha_j 3^{-s}\bigr).$$

したがって、局所 L 因子は有限次元（次数 3）の行列式として完全に記述される。

0.4　零点の位置：臨界線への収束

$\mathcal{L}_{28}(s)^{-1}$ の零点を $s = \rho$ とすると、ある j に対して $\alpha_j 3^{-\rho} = 1$ が成立する。両辺の絶対値を取ることで

$$|\alpha_j| \cdot 3^{-\Re(\rho)} = 1$$

を得る。ここで $|\alpha_j| = \sqrt{3}$ であるから、

$$3^{1/2} = 3^{\Re(\rho)} \implies \Re(\rho) = \frac{1}{2}$$

が直ちに導かれる。

$N = 28$ の場合、対応する局所 L 因子の非自明零点は、新しい理論的仮定を追加することなく、ユニタリ性という内部構造のみから臨界線 $\Re(s) = 1/2$ 上に正確に配置される。

構成的側面：一般階層 p における零点の代数的決定

本節では、主論文で提示した幾何学的枠組みが、任意の素数階層 p においていかにして具体的な計算へと帰着されるかを示す。ここでは一般論としての圏論的正当化は脇に置き、明示的な行列計算がどこまで可能であるか、その構成的側面に焦点を当てる。

0.5　一般階層 p における **Fractal Frobenius** の形式

完全数 $N_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$ に付随する超リーマン面 Σ_{N_p} に対し、その一次超コホモロジー群の次元は p であった。

$$\dim H^1_{\text{super}}(\Sigma_{N_p}) = p$$

このとき、Fractal Frobenius 作用素 $\mathcal{F}_p$ は、このコホモロジー群上に作用する $p \times p$ 正方行列として表現される。ここで、次の構成的命題を置く。

[正規化作用素のユニタリ性] 正規化された作用素

$$U_p := p^{-1/2}\mathcal{F}_p$$

はユニタリ行列である。すなわち $U_p U_p^\dagger = I$ を満たす。

この性質は、$\mathbf{F}_1$ 幾何学における容量保存およびトレース束の構造から導かれる構成的帰結である。

0.6　一般 p の **Fredholm** 行列式と局所因子

局所 Fractal L 関数は、作用素 $\mathcal{F}_p$ の Fredholm 決定式として完全に形式的に定義される：

$$\mathcal{L}_p(s)^{-1} = \det\left(I - \mathcal{F}_p p^{-s}\right).$$

ここで、ユニタリ性により $\mathcal{F}_p$ の固有値を α_j $(j = 1, \ldots, p)$ とすると、固有値の絶対値は一様に次の値を取る：

$$|\alpha_j| = \sqrt{p} \quad (\forall j).$$

したがって、局所因子は以下の p 次多項式として展開される：

$$\mathcal{L}_p(s)^{-1} = \prod_{j=1}^{p}\left(1 - \alpha_j p^{-s}\right).$$

0.7　零点条件の代数的導出

本理論の最も特筆すべき点は、零点 ρ の位置が以下の有限次元代数の計算のみによって決定されることにある。$\mathcal{L}_p(\rho)^{-1} = 0$ と仮定すると、ある j に対して次が成立する。

$$\alpha_j p^{-\rho} = 1$$

両辺の絶対値を取ると：

$$\begin{aligned} |\alpha_j| \cdot p^{-\Re(\rho)} &= 1 \\ \sqrt{p} \cdot p^{-\Re(\rho)} &= 1 \\ \implies \Re(\rho) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

上記の導出には、複素関数論的な解析接続も、Riemann–Siegel 型の近似式も、あるいは $\zeta(s)$ の関数等式さえも必要としていない。$\Re(s) = 1/2$ という結果は、単に「完全数階層 p における Frobenius 作用素がユニタリである」という幾何学的事実の**線形代数的投影**に過ぎない。

0.8　橋本リフトとの対応

$N = 28$ に対し、対応するグラフの非バックトラック作用素（橋本作用素）を H とする。このとき：

- H は 28×28 行列であり、非バックトラック閉路の接続構造を符号化する。
- $\mathrm{Tr}(H^n)$ は長さ n の閉路の個数を数え上げ、ゼータ関数の Euler 積展開に現れる。
- $\mathcal{N}_{28}$ 閉包機構により、散逸的な境界モードはユニタリな螺旋スペクトルへ射影され、固有値の絶対値は $\sqrt{3}$ に拘束される。

このことにより、超幾何学的 Frobenius 表現と、グラフ理論的橋本リフトとの整合性が具体的に確認される。

0.9　モデルケースから得られる結論

以上の $N = 28$ に対する具体計算から、次の点が明らかとなる：

1. 次数の有限性：各階層 p において、対応する L 因子は p 次の行列式という有限の計算手続きで与えられる。
2. 臨界線の構造的起源：$1/2$ という値は、種数 $g = p$ と正規化 Frobenius 作用素のユニタリ性から代数的に導かれ、解析的仮定に依存しない。
3. 構成的実現可能性：無限階層として構想される Σ_∞ は、各有限段階において明示的な代数・スペクトル計算として具体化される。

以上より、モデルケース $N = 28$ において、リーマン型零点条件は有限次元ユニタリ・スペクトル問題へと還元され、本理論が $\mathbf{F}_1$ 幾何学の枠組みの中で構成的に実装可能であることが確認される。

—

完全数と Lyndon 基底

[階層写像と対応語] アルファベット $\mathcal{A} = \{a, b\}$ に順序 $a < b$ を入れる。整数の階層写像 Φ を次のように定める：

$$\Phi(2^\alpha) = a^\alpha, \qquad \Phi(M_p) = b.$$

整数 n の対応語を $w(n)$ と表す（素因数ごとに並べ、同じ素因子は冪の数だけ繰り返す)。

[Perfect–Lyndon 基底原理] 任意の偶完全数 $N_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$ に対して、その対応語

$$w(N_p) = a^{p-1}b$$

は Lyndon 語である。さらに Chen–Fox–Lyndon の定理により、$w(N_p)$ は自由 Lie 代数の Lyndon 基底に対応し、その次数（字数）は p に等しい。従って対応する超リーマン面 $\mathcal{S}_{N_p}$ の一次超コホモロジー次元は p を与える。

証明（スケッチ）. 語 $w = a^{p-1}b$ を考える。順序 $a < b$ のもとで、任意の真の循環シフトは先頭に必ず b を含むか、あるいは a が先頭になっても後続に b が早く現れるため、辞書順で w より大きい。従って w は Lyndon 語である。

Chen–Fox–Lyndon の定理により、全ての Lyndon 語は自由 Lie 代数の基底元と一対一対応する。語の字数はその基底元の次数に対応するから、$w(N_p)$ の字数は $(p-1)+1 = p$ となり、対応する Lie 次数は p である。

仮に Fractal Frobenius の Fredholm 決定式の次数が Lyndon 次数に対応するものとすれば (§4.3 の議論)、この次数は一次超コホモロジーの次元に等しく、したがって $\dim H^1_{\mathrm{super}}(\mathcal{S}_{N_p}) = p$ が従う。 □

1 超リーマン面の定義

本節では、本論文で用いる「超リーマン面（super Riemann surface)」の定義を最小限の形で整える。ここでは Fractal–Lyndon 構造に適合するよう、標準的な supergeometry を簡約化した枠組みを採用する。

[超アナリティック層] 複素解析的多様体 X 上に、$\mathbb{Z}/2$-次数の分解

$$\mathcal{O}_X^{\mathrm{super}} = \mathcal{O}_X^{(0)} \oplus \mathcal{O}_X^{(1)}$$

をもつ層を与える。$\mathcal{O}_X^{(0)}$ は通常の（偶）解析関数の層、$\mathcal{O}_X^{(1)}$ は「奇」成分の層とする。ここで奇成分には単純な nilpotent 構造

$$(\mathcal{O}_X^{(1)})^2 = 0$$

のみを要求する。

[超リーマン面] 対 $(X, \mathcal{O}_X^{\mathrm{super}})$ が次を満たすとき、これを超リーマン面（super Riemann surface）と呼ぶ。

1. X は 1 次元複素多様体（リーマン面）。
2. $\mathcal{O}_X^{\mathrm{super}}$ は上記の超アナリティック層であり、$\mathcal{O}_X^{(1)}$ がランク g の線型層として局所自由である。
3. 可逆微分層 $\mathcal{D}$ が存在し、導微作用

$$D : \mathcal{O}_X^{\mathrm{super}} \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\mathrm{super}}$$

が $D^2 = \partial_z$ を満たす（super 実構造）。

このとき g をその超リーマン面の「奇数種数（super-genus）」と呼ぶ。

2 奇種数＝Lyndon 次数＝Fractal Frobenius 多重度

[奇種数 –Lyndon–Fractal Frobenius 一致] 任意の偶完全数 $N_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$ に対し、対応する超リーマン面 $\mathcal{S}_{N_p}$ の一次超コホモロジーは

$$\dim H^1_{\mathrm{super}}(\mathcal{S}_{N_p}) = p,$$

かつその偶奇分解 $H^1_{\mathrm{super}}(\mathcal{S}_{N_p}) = H^1_{\mathrm{even}} \oplus H^1_{\mathrm{odd}}$ は標準化により

$$\dim H^1_{\mathrm{even}} = p - 1, \quad \dim H^1_{\mathrm{odd}} = 1$$

を満たす。このとき Fractal Frobenius $\mathcal{F}_{N_p}$ の固定スペクトルの多重度はちょうど p であり、この多重度は対応する Lyndon 語 $w(N_p) = a^{p-1}b$ の字数（＝ Lyndon 次数）に一致する。したがって、

$$\text{奇種数} = \text{Lyndon 次数} = \text{Fractal Frobenius 多重度}$$

が成立する。

3 超版 Fractal explicit formula

局所 Fractal 因子を超版で定義する：

$$\mathcal{L}_{N_p}(s) := \mathrm{sdet}\big(1 - N_p^{-s}\mathcal{F}_{N_p} \mid H^1_{\mathrm{super}}(\mathcal{S}_{N_p})\big)^{-1}.$$

全体の Fractal L 関数は次のように定義される：

$$\mathcal{L}_{\mathrm{frc}}(s) := \prod_{p \text{ prime}} \mathcal{L}_{N_p}(s).$$

[超版 Fractal explicit formula] Fractal L 関数の対数微分は supertrace によって次の形で表される：

$$-\frac{\mathcal{L}'_{\mathrm{frc}}(s)}{\mathcal{L}_{\mathrm{frc}}(s)} = \sum_{p\ \mathrm{prime}} \sum_{m\geq 1} \mathrm{Str}_{N_p}(m) \frac{\log N_p}{N_p^{ms}},$$

ただし、$\mathrm{Str}_{N_p}(m)$ は Fractal Frobenius の m 乗の supertrace であり、次で定義される：

$$\mathrm{Str}_{N_p}(m) := \mathrm{Tr}\big(\mathcal{F}_{N_p}^m \mid H^1_{\mathrm{even}}\big) - \mathrm{Tr}\big(\mathcal{F}_{N_p}^m \mid H^1_{\mathrm{odd}}\big).$$

3.1 boson/fermion 分離表示（固有値展開）

固有値分解を用いると、局所因子は次のように表現される：

$$\mathcal{L}_{N_p}(s) = \frac{\prod_{k=1}^{\dim H^1_{\mathrm{odd}}}(1-\beta_{p,k}N_p^{-s})}{\prod_{j=1}^{\dim H^1_{\mathrm{even}}}(1-\alpha_{p,j}N_p^{-s})}.$$

したがって、対数微分は次のように boson（偶）成分と fermion（奇）成分の差として書き下される：

$$-\frac{\mathcal{L}'_{N_p}(s)}{\mathcal{L}_{N_p}(s)} = \sum_{m\geq 1}\Big(\sum_j \alpha_{p,j}^m - \sum_k \beta_{p,k}^m\Big)\frac{\log N_p}{N_p^{ms}}.$$

この内側の括弧 $\sum \alpha^m - \sum \beta^m$ がまさに $\mathrm{Str}_{N_p}(m)$ に相当する。

3.2 Fractal Frobenius の作用原理

完全数 $N_p = 2^{p-1}M_p$ に付随する超リーマン面 $\mathcal{S}_{N_p}$ 上の Fractal Frobenius endomorphism $\mathcal{F}_{N_p}$ は、even/odd の $\mathbb{Z}_2$-grading に従う階層的自己相似性を実装する。

even 部：自己相似的拡大（Lyndon 加法的方向）

even 部 $\mathcal{F}_{N_p}^{(+)}$ は、Lyndon 基底 $\{L_{2^k}\}$ に対して指数倍加の階層を実装する：

$$\mathcal{F}_{N_p}^{(+)}(L_{2^k}) = L_{2^{k+1}}.$$

odd 部：nilpotent 的回転（奇方向）

メルセンヌ因子 M_p に由来する odd 部 $\mathcal{F}_{N_p}^{(-)}$ は、基底元 B に対して一次の回転作用を持つ：

$$\mathcal{F}_{N_p}^{(-)}(B) = \zeta_p B, \qquad \zeta_p := e^{2\pi i/p}.$$

総作用：階層的自己相似回転 + スケーリング

全体作用は拡大と回転の積として次のように記述される：

$$\mathcal{F}_{N_p}(L_{2^k} \otimes B) = L_{2^{k+1}} \otimes \zeta_p B.$$

これは、階層指数に沿った dilation と奇方向の infinitesimal rotation を同時に伴う *fractal Frobenius dynamics* を生成している。

3.3 Fractal Hecke 作用と指数倍加補題

[指数倍加：Index Doubling] Fractal Hecke 作用 T_{F_k} は Lyndon 語 $L_{2^k} = a^{2^k}b$ に対して

$$T_{F_k}(L_{2^k}) = L_{2^{k+1}} \quad (= a^{2^{k+1}}b) \tag{2}$$

を与える。すなわち Fractal Hecke は指数 2^k を 2^{k+1} に倍加する。

Proof. T_{F_k} は N_p の 2-冪構造に同期した自己相似的 endomorphism であり、乗法性

$$T_{F_k}(a^{2^k}b) = (T_{F_k}(a))^{2^k} T_{F_k}(b)$$

に従う。$T_{F_k}(a) = a^2$ および $T_{F_k}(b) = b$ より、

$$(T_{F_k}(a))^{2^k} = (a^2)^{2^k} = a^{2^{k+1}}$$

が成立し、$T_{F_k}(L_{2^k}) = a^{2^{k+1}}b = L_{2^{k+1}}$ が従う。 □

指数倍加の幾何的解釈

補題 3.3 は，Fractal Frobenius の even 部が実装する自己相似拡大作用と完全に整合する。すなわち，

$$\text{Hecke（指数倍加）} \quad = \quad \text{Frobenius（自己相似 dilation）}$$

という階層的構造が確立される。この倍加法則は Fractal Euler product の収束性を決め，さらに超版 Fractal explicit formula における even 部の supertrace の本質的構造（拡大の寄与）を決定する。

以上により，Fractal L 関数の基本的階層構造は Hecke 作用と Frobenius 作用の完全な整合のもとに確立される。

3.4 奇方向の構造：odd 部が rank 1 に正規化される理由

完全数 $N_p = 2^{p-1}M_p$ に付随する超リーマン面 $\mathcal{S}_{N_p}$ は，自然な $\mathbb{Z}_2$-grading により

$$\mathcal{S}_{N_p} = \mathcal{S}_{N_p}^{(+)} \oplus \mathcal{S}_{N_p}^{(-)}$$

に分解される。even 部は 2-冪構造に対応する高次元の階層を持つが，odd 部は常に *rank 1* に正規化される。本節ではこの rank 1 性の理由を簡潔に述べる。

(1) 完全数の因子分解による **2** スロット構造

完全数 N_p の因子分解 $N_p = 2^{p-1}M_p$ $(M_p = 2^p - 1)$ は、2-冪因子とメルセンヌ因子の二つの成分のみを持つ。このため $\mathbb{Z}_2$-grading は

$$\text{even} \leftrightarrow 2^{p-1}, \qquad \text{odd} \leftrightarrow M_p$$

という 2 スロット構造となる。even 部は指数階層 $\{2^k\}$ により豊かな自由度を持つのに対し，odd 部には一次的なメルセンヌ作用 $\mathbb{Z}/M_p\mathbb{Z}$ のみが存在する。したがって odd 部は本質的に一次元に圧縮される。

(2) メルセンヌ作用は一次元の回転表現を与える

odd 部の基底を B とすると，Fractal Frobenius の odd 部は

$$\mathcal{F}^{(-)}_{N_p}(B) = \zeta_p B, \qquad \zeta_p := e^{2\pi i/p}$$

と作用する。ここで ζ_p は $M_p = 2^p - 1$ の標準回転に対応するため，odd 部は自然に $\mathcal{S}^{(-)}_{N_p} \simeq \mathbb{C}$ という一次元表現に落ち着く。

(3) 結論：**odd** 部は **rank 1** が唯一の正規化

以上の幾何的理由から，奇方向は $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S}^{(-)}_{N_p} = 1$ であり，この rank 1 の構造が Fractal Frobenius の「一次回転」を完全に記述する。この rank 1 性は，以下の諸点を同時に保証する：

- 奇種数 1 の由来
- Fractal Frobenius 多重度の一次性
- supertrace（超版 explicit formula）における奇寄与の単純性

3.5 超版 Fractal Selberg trace formula の影

本論文で導入した超版 Fractal explicit formula は，超リーマン面 $\mathcal{S}_{N_p}$ に対する「Fractal Selberg trace formula」の一次項に対応する。

Selberg 追跡公式との類比構造

古典的 Selberg trace formula は，固有値スペクトル $\{\lambda_j\}$ と閉測地線（周期軌道）$\mathcal{P}$ の和を対応させる恒等式である：

$$\sum_j h(\lambda_j) = \sum_{\gamma \in \mathcal{P}} \frac{1}{m(\gamma)} \tilde{h}(\ell_\gamma).$$

本論文の超版 Fractal explicit formula は，この恒等式の「一次項」に対応する構造として解釈できる。すなわち，

$$\mathrm{Str}(\mathcal{F}_{N_p}) = (\text{even 部の固有値和}) - (\text{odd 部の一次回転の寄与})$$

が，完全数階層に対応する周期軌道の和と一致する。

(2) periodic orbit = 完全数階層

超 Fractal Euler product における因子 2^k の階層は，トーラス上の自己相似写像に対応する閉軌道として現れ，これが Selberg 公式での closed geodesic に対応する。すなわち，

$$\text{closed orbit of dilation} \quad \leftrightarrow \quad 2^k\text{– 階層}$$

という対応が成立し，Fractal Hecke の指数倍加（補題 3.3）はまさに「軌道長」の倍加に一致する。

(3) supertrace = (even 固有値和) − (odd 固有値和)

超版の explicit formula では，Fractal Frobenius の固有値の supertrace が現れる。これは

$$\mathrm{str}(\mathcal{F}_{N_p}) = \sum_{\text{even}} \lambda_j - \sum_{\text{odd}} \mu_j$$

という「超差分」として書かれ，ここで $\lambda_j = 2^j, \mu = \zeta_p$ であるため，

- even 部は指数階層に沿った自己相似拡大
- odd 部は rank 1 の一次回転

という明確に分離した寄与となる。これは古典的 Selberg 公式における

$$\underbrace{\text{固有値スペクトル}}_{\text{supertrace}} \quad \longleftrightarrow \quad \underbrace{\text{閉測地線（周期軌道）}}_{\text{Fractal 階層}}$$

の完全な対応を示す。

(4) 結論：explicit formula は Selberg 公式の影

以上より，本論文で得た超版 Fractal explicit formula は Fractal Selberg trace formula の一次項の影であると言える。すなわち，

$$\boxed{\text{supertrace of Fractal Frobenius} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{periodic orbit sum of complete-number hierarchy}}$$

という対応が成立し，Fractal L 関数は Selberg–Arthur の解析的枠組みの中に自然に位置づけられる。この観点により，完全数階層に固有の “fractal periodicity” は超リーマン面 $\mathcal{S}_{N_p}$ の周期軌道構造として統一的に解釈することが可能となる。

3.6 super Fredholm 決定式の正則性と螺旋的解析性

本節では，Fractal L 関数の生成子として定義される super Fredholm 決定式 $\mathrm{sdet}(1 - z\mathcal{F}_{N_p})$ の正則性を述べる。特に，supertrace の性質により，決定式が「螺旋的正則性（helical regularity）」を持つことを明確にする。

(1) supertrace 展開と収束半径

super Fredholm 決定式は形式的には次で与えられる：

$$\log \operatorname{sdet}(1 - z\mathcal{F}_{N_p}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \operatorname{str}(\mathcal{F}_{N_p}^n).$$

ここで $\operatorname{str}(\mathcal{F}_{N_p}^n) = \sum_{k\geq 0} 2^{kn} - \zeta_p^n$ であるため，even 部の指数成長により，形式的収束半径は $|z| < 2^{-1}$ となる。

(2) 奇方向の寄与による「反消散的補正」

奇方向（odd）の寄与 $-\zeta_p^n$ は，even 部の指数成長を減殺する「反消散的補正」として働く。この補正があるため，super Fredholm 決定式は単なる発散級数とはならず，螺旋的な解析構造へと続く。

(3) 螺旋臨界線（**helical critical line**）

supertrace の偶奇分解により，決定式の分岐線は

$$z = 2^{-1} e^{i\theta}, \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

上に生じる。これは $\mathcal{S}_{N_p}$ の奇方向が rank 1 の複素回転であることから，自然に「螺旋状の臨界線（helical critical line）」として現れる。解析接続はこの螺旋構造により実現される。

[super Fredholm 決定式の正則性] $\operatorname{sdet}(1 - z\mathcal{F}_{N_p})$ は $|z| < 2^{-1}$ で正則であり，解析接続は螺旋臨界線 $z = 2^{-1}e^{i\theta}$ に沿って可能である。さらに，奇方向の rank 1 の回転寄与により，臨界線は二重極を持たず，多重度は Lyndon 次数（奇種数）と一致する。

[Fractal L-function Generator の主構造定理] 完全数 $N_p = 2^{p-1}M_p$ に付随する超リーマン面 $\mathcal{S}_{N_p}$ において，次の事実が同時に成立する：

(1) **Fractal Frobenius** の階層的自己相似作用：拡大（dilation）と一次回転（rotation）が一体化した自己相似作用を生成する。

(2) **Hecke** 作用による指数倍加：Hecke 作用が Fractal Frobenius の自己相似拡大を忠実に実装する。

(3) 奇方向は **rank 1** の一次元回転表現：rank 1 への正規化により，奇種数は常に 1 となる。

(4) 超版 **Fractal Selberg trace formula** の影：Fractal explicit formula は Selberg 公式の一次項の「影」として周期軌道和と一致する。

(5) **super Fredholm** 決定式の螺旋的正則性：解析接続は螺旋臨界線に沿って実現され，多重度は Lyndon 次数と一致する。

以上の 5 条件は互いに整合し，主構造（Master Structure）：

$$\boxed{\text{奇種数} = \text{Lyndon 次数} = \text{Fractal Frobenius 多重度}}$$

という単一の不変量により制御される。