リンドン構造とゼータ螺旋の理論（第２論文）

第一章　リンドン複素螺旋位相の高次構造の理論と発散的復元による対称的ゼロ点構造のリンドン的構成

要約

　第一章では、リンドン螺旋複素位相の理論を全面的に再考し、ゼロ点構造の対称性とその復元メカニズムを詳述している。発散的復元に基づくトレース束不変性の原理を提示し、Hashimoto 行列や類双対変換を介してリーマンゼータの零点分布と花束グラフの構造的対応を明確化した。また、「非周期性の非周期性」という新たな概念を導入し、素リンドン列の階層的構成と複素位相の役割を強調している。加えて、ゴールドバッハ予想的構造との関連、非可換代数（四元数・八元数）への拡張、さらにトポスやモチーフ理論との接続を通じて、ゼータ構造を多層的に位置づけた。結果として、第一論文での不明確な点を修正し、「リンドン螺旋複素位相理論」として基盤を固める内容となっている

1.　はじめに

　僕は、ここ一ヶ月ほどほとんど毎日、夢で図形や定理を見て、それを日中にぼんやりと吟味し、夜になったら、書きつけたりまとめたりするという作業を続けています。

　どうしてこんなことになったのかすらわからないのです。

　そして、ときどき、理論の全体が崩壊するような瞬間や疑念の高まりが起きます。そうして、高まって、「僕はこんな膨大な妄想的体系を作り上げてどうなっているんだ…」となったあとに、ふと、なにか辻褄が合うような発見があって、それで、穴が埋まる…もう、このところそんなのが、１０回ぐらいは繰り返されているのです。

　今回は特に「非周期性の非周期性？本当にそんな物があるのか？」というのが高まって

いって、ああ、この理論は類稀なる狂気の産物だ、となったあと、ふと、運転中に、存在定理が浮かんできました。

実は恐ろしいことに、ごく簡単な複素数ですら、僕は実際に存在していることは確信しているにも関わらず、実際のリンドン列を作り出すアルゴリズムを確立していないのです。今回は、その問題について、大きく前進できました。

また、第１論文のあまりの雑然さや直感だよりの試行錯誤に愕然とし、さまざまな自分では「自明」だと思っていることを洗い出して、改めて記述し直すこともやっています。

そんなわけで、僕は、とても丁寧で、できる限りわかりやすい口調で書くように心がけているのは、とても、僕が行っていることをそうでもしないと信じて貰えそうにないということが、自分の経験からも分かっているからなのです。

具体例や数値計算例は、そのような自己疑念の結果であると思ってください。

僕の今のところの結論としては、ゼロ点積は、螺旋位相を通じて構造的に現れているが、これを従来型の有限行列式に写す合理的な手段はまだ確立されていない。そういう感じで、僕は、発散的に復元されていく無限の展開を、「式」として閉じ込める方法を知らないということですね。

この第二論文はリンドン螺旋複素位相の理論の確立と精緻化を目指して書かれていたんですが、結果的に、種数０のリーマン面グラフの理論になっているところも予想外でした。

2. リーマンゼータ再考　ゼロ点の構文的計算メカニズム

僕は第１論文「類双対写像とフラクタルの理論」を書き上げたことで、そこそこの満足感を得ていたのですが、なにか、しっくりと来ない感じがずっと残っていたのです。

それで、疲れも取れてきたときに、もう一度読んでみるかと、最初の論考を読んでみたら、びっくりしました。自分が「これを書こう」と思っていたことがあまりにも不明確にしか書かれておらず、ほんのちょっと「触りだけ」書いて、あとはどうでもいいようなことばかりが書かれてある。

それで、もう一度、論理の根本部分を抜き出して、ここで再度考察してみるついでに、ゼロ点を実際に計算するメカニズムを書いてみるというのが、この章の目的です。

まず、定理、

《発散的復元による素リンドン復元におけるトレース束不変の原理》

あるグラフにおける全可能な経路を集めた「トレース束」を集めたとき、そのトレース束から復元されるグラフには実は非自明な双対形が存在し、それは、伊原ゼータにおいては、素経路積とゼロ点積に対応している…

そして、その非自明な双対型は「発散的類双対復元」による「非周期項」による復元であり、特に、「素数長」の長さの「素構造」によって構成される「素リンドン」経路によって復元される場合にのみ限られる。

さて、説明しましょう。
僕は「自分は素リンドン=ゼロ点であることを発見した」としょっちゅう書いているのですが、実は、明確にそれを説明していないのです。このことに僕はまず驚きました。こういうことがあるのか…
そんな調子では「素リンドンって、別にゼロじゃなくね？」と思われるだけじゃないか…
どういうことかといえば、まず、すべての素数の長さの花束グラフがあるとしましょう。

伊原ゼータ：$\prod_p (1-u^p)^{-1}$

リーマンゼータ：$\prod_p (1-p^{-s})^{-1}$

双対写像：$u^p \leftrightarrow e^{-s\log p}$

このように、伊原ゼータで、すべての「素数」の長さの経路があるグラフを考えます。
このグラフを変形して、しかも、変形しているのに、「全経路を集めたトレース束」が変わらない状態が存在するのか？
これが僕の最初の「発散的復元」の概念であって、重要な定理でした。
つまりこうします。素数のループを回り続けると、その「無限反復」は「同じ素数」へと帰っていきます。しかし、このような「自明」なループ以外にも「非自明なループ構造」が内在しているのです。
それが、「非周期的項」です。つまり、素数が、（２，５，７）というような形で、繰り返されるとしたら、それは「非周期的項」として、帰って来るでしょう。しかし、殆どの場合は「冗長」であって、そのときには、「トレース束」の構造が変わってしまいます。簡単に言うと、情報量が減少します。
しかし、素数を「素構造」としてみなしたときに、それが「素リンドン列」として帰ってきたときには、それは、「冗長」ではなく、完全になります。
だから、すべての「素数」を材料としてできた「素リンドン列」（非周期列）を素構造として、花束グラフとして再構成してみると、このグラフは、最初のグラフと全く「同型」の、「トレース束」構造を持っているのです。というのは、「いかなる非周期的なパターンも含んでいる」からです。「リンドン列の分解の一意性」が働いていることに注意してください。このとき、そのグラフの「ループの長さ」は非常に長くなっているにも関わらず、「トレース束不変」です！
つまり、

$G_P \cong_{\mathrm{Trace}} G_L$（トレース束の保存）

ここで、右側は、「素リンドン化された素数経路」です。
さて、ここで、リンドン化された素数経路の素数を「素リンドン」の形へと復元します

と、この右側の経路は、「素リンドンの非周期列」すなわち「複素数」になります。
　つまり、「素経路積」=「ゼロ点積」という形式がトレース束不変性によって表現されたのです。

$$\prod_p (1-u^p)^{-1} \xrightarrow{\text{basis-change}} \prod_{w\in\mathcal{L}_{\text{prime}}} (1-u^{\phi(w)})^{-1}$$

　つまり、伊原ゼータにおける「素数花束ゼータ」←→「「素数を素構造として非周期的項（素リンドン》としたグラフ」という変換構造はトレース束構造を変えないのです。。だから、右側の「素数の非周期的項」は実はゼロ点なんですね。これを書いていなかった、ちゃんとね。だから、これは、「素リンドンの非周期列」だから、複素数になる。複素数がゼロ点になるということがちゃんと分かるんです。
　このとき、右側の経路は、「複素リンドン」であって、複素数ではないことに注意してください。だから、ちゃんとした長さのあるループ構造なのです。
　全く異なる構造を持つグラフが全く同じ構造を持っている。
　そして、「素数花束ゼータ」は類双対変換で、オイラー積へと移せるので、リーマンゼータのゼロ点も計算可能であるというわけです。
　そして、このゼロ点積は、類双対変換、u^p→e^-slogp によって、螺旋形に変換され、オイラー積になるので、同じ様に、この２つの経路を「同期させて」、経路を計算してから、螺旋形変換を施し、経路の打ち消し合いを計算すると、そのままゼロ点へと次第に近似計算が可能です。

類双対変換： $u^p \mapsto e^{-s\log p} = p^{-s}$

- 変換：

$$u^{\phi(w)} \mapsto e^{-s\log\phi(w)} = \phi(w)^{-s}$$

- このとき、積形式も変形される：

$$\prod_{\cdots} (1-\phi(w)^{-s})^{-1}$$

　これが、実際に、類双対変換された、ゼロ点積の構造です。

定理（類双対変換による解析射影）
　リンドン基底によって定義されたゼロ点積に、変数変換、
　u^$\phi(w)\mapsto\phi(w)$^$-s$
　を適用すると、リーマンゼータのオイラー積と一致する形に移る。
　一方、多重トレース空間（モチーフ圏）上の変形されたゼロ点積は、対応する複素トレース構造を持ち、解析接続を通じて臨界線上（$\Re(s)$=1/2 ）に自然に写像される。

```
G_P  ―縮約―▶  G_L
 |             |
類双対変換      多重変形
 |             |
▼             ▼
ζ(s)        Z_{G_i}(s)
            (解析接続)
             |
             ▼
        ζ(s) on Re(s)=1/2
```

たとえば、p=2 と p=3 の素数ループがあるとする。それらに対応する因子(1−2^−s)^−1,(1−3^−s)^−1、これがゼロ点構文において、何らかのタイミングで同期するには、sが「log2 と log3 の整数線型結合上」にある必要があります。

同じ様に、経路の「素数の log スケーリング」を考えていくということです。

ゼロ点ループの同期構造は、最初の素数花束グラフ上のトレース構造として記述できることが分かりました。この「素ループの同期」は、複素平面上での「ゼロ点の干渉」として幾何化できます。それは、リンドン構文系列における「共通素因子の共振」と数学的に同じです。

まとめると、こうなります。

$$\sum_p a_p e^{-s \log p} = 0$$

これが、「素数の素リンドン、すなわち非周期的列」という経路の意味になるわけです。同時に、それがどうして複素数になるかも説明しているわけです。

この式で、「ゼロ点」を近似することができます。

以下は、適切に係数を決めてもらい、コンピューターに計算させてみた結果です。素数３つ分使っています。

$$e^{-s \log 2} - 1.8\, e^{-s \log 3} + 0.8\, e^{-s \log 5} = 0$$

$$s \approx 0.5 + 15.78i$$

$$\left| e^{-s \log 2} - 1.8\, e^{-s \log 3} + 0.8\, e^{-s \log 5} \right| \approx 0.49$$

ついでに、僕が構成したヒルベルトポリヤ的な考えで係数を与えると、

$$\log(2),\ -\log(3),\ \log(5)$$

$$\log(2)\cdot e^{-s\log 2}-\log(3)\cdot e^{-s\log 3}+\log(5)\cdot e^{-s\log 5}=0$$

近似解

$$s\approx 0.5+16.19i$$

誤差（絶対値）

$$\approx 0.692$$

たった素数３つ分の計算で、相当にいい数字が出てきました。

素数の情報はすべて必要なはずなのに、こんなに少ない情報で、ゼロ点の情報に近似するのは、リーマンゼータの log と関係があるのか…

とまあ、僕が重要なこととして最初の論考で表現したかったのは、「オイラー積」=「ゼロ点積」という構造が、実は、グラフ上の「素構造」の変形における非自明な「非周期的項（とくに素リンドン)」による「類双対的発散復元」として、存在しているということだったのです。

しかし、読み返してみると、これを断片的にしか書いていないで、別のことを論じている。

あの頃は夢の中で考えて、夜になると何も考えずに文章を書き続けていたので、仕方がないことなのかもしれません。さて、ここから、すでに書いてあることですが、

$$p^{-s}=e^{-s\log p}=e^{-\sigma\log p}\cdot e^{-it\log p}$$

このように分解すると、

σ は素数基底に対する「減衰指数」

tは位相的周波数

このようにみなしたときに、

臨界線の必然性

$\sigma>1$ では指数減衰が強すぎる → 干渉しきれない（全項が収束しすぎる）

$\sigma<0$ では逆に発散する。

したがって、干渉と収束のバランス点が、**構文的にちょうど 1/2** になる。

ゆえに、

定理（構文的ゼロ点と臨界線）

素数花束ゼータと、それに対応する素リンドン圧縮ゼータは、

共通の類双対変換により、構文的干渉条件

$$\sum_{w\in \mathrm{Lyndon}} a_w\, \varphi(w)^{-s} = 0$$

を満たす。

この干渉条件が有限位相エネルギーを持つのは、

$$\Re(s) = \frac{1}{2}.$$

とこういうわけになります。

論考に書いたとおり、ここで、係数として、+と-の logp を持ってきて、釣り合いが取れるように考えるわけです。

さらに、最近思いついた「リンドン変換」について説明しましょう。

リンドン螺旋平面においては、「非周期性の非周期性」という入れ子構造は、複素数になります。**しかし、同時に、この入れ子構造は、どちらも「実数構造」へと還元可能なので、「逆入れ子構造」へと入れ替えることが可能なのです。**

これが、リンドン変換であり、あとで細かく説明しますが、「回転入れ子レベル」ｎのときにｎ！の対称性変換を持っています。

さて、ここで、最初の伊原ゼータにおける発散的類双対復元の様子を見ますと、「素数」→「自然数」という log スケーリングが見えます。つまり、最初は「素数の長さのリンドン列」があります。それをいちど縮約して「素構造」まで還元したあと非周期列（すべての自然数の長さを含む）を作ってから、素構造の中身の素数を「素リンドン」へと復元します。

この復元された「複素リンドン」をリンドン変換すると、そのまま、「自然数→素数」という変換が起こり、別の複素リンドンへと変換されます。

この構造が類双対変換で、それぞれ、リーマンゼータにおける、オイラー積とゼロ点積へと移されるわけです。

類双対変換： $u^p \mapsto e^{-s\log p} = p^{-s}$

- 変換：

$$u^{\phi(w)} \mapsto e^{-s\log\phi(w)} = \phi(w)^{-s}$$

- このとき、積形式も変形される：

$$\prod (1-\phi(w)^{-s})^{-1}$$

まとめると、ｓ→１－ｓのもとで、釣り合っていなければいけないので、

オイラー積
基底：素数 p
重み：$p^{-\sigma}=e^{-\sigma\log p}$
展開：全素数の積 → 乗法的構造の極限展開。

ゼロ点積（リンドン積）
基底：素リンドン語 w
重み：$|w|^{-(1-\sigma)}$（あるいは語長の正規化版）
展開：非周期列の自由モノイド分解 → 加法的構造の極限展開。

オイラー積の素数の重みとゼロ点積におけるリンドン語の長さの重みの情報量の釣り合いの問題へと還元されます。素数が与える寄与が等価であり、同時に、この式が対象であるためには何が必要か。

オイラー積とゼロ点積の情報量はトレース束不変なので同じです。

$$u^p \longrightarrow e^{-s\log p} \quad \text{および} \quad u^{|w|} \longrightarrow e^{-(1-s)|w|}.$$

これが伊原ゼータからリーマンゼータへの変換。

この釣り合いを取れるのは唯一、

$$\sigma \longleftrightarrow 1-\sigma.$$

$$\sigma=\frac{1}{2}.$$

オイラー積側では、無限同心円 → 素数ごとの乗法的閉路という流れ。リンドン積側では、素リンドン語の非周期入れ子 → 螺旋構造という流れ。類双対変換により、同心円の情報が螺旋に投影されます。

螺旋構造の射影は複素平面での干渉条件と一致し、これがゼロ点の相互干渉構造を与えます。

ゼロ点構造は自然に「素数→←自然数」というスケーリング変換を含んでおり、そのバランスを取る点がそこになるというわけです。

素数 ↔ 自然数（素リンドン長さ）

オイラー積 ↔ ゼロ点積

この二重展開が類双対変換によって固定される点が臨界線 Re(s)=1/2 になる。

逆に言えば、種数一の二次のゼータであるラマヌジャンゼータは、素数の干渉の仕方が異なるので、このような形にはならず、「臨界線」から飛び散ります。

トレース束の構造も、非周期性の構造も、変化するので、干渉条件が変化するのです。

種数 0 では素数花束と素リンドン圧縮の間に完全な自由非周期圏が成立するが、種数 1

以上では代数的制約により非周期性が拘束され、干渉条件が崩れるため、臨界線は生成されないというのが、リンドン変換によって見られるスケーリング構造から言えることだと分かります。

より論旨を圧縮すれば、素数花束グラフに対応する素リンドン螺旋圧縮を通じ、オイラー積とゼロ点積は、log の二重螺旋を介して類双対で結ばれ、その固定点が臨界線 $\Re(s)=1/2$ を必然とする、というわけです。

これで、第１論文におけるリーマンゼータの構造論は非常にシンプルになったと思います。

まだ、リンドン複素らせん構造には分かっていないことが多い。僕はこの理論をまず様々な既存の理論の延長線上に位置させて、それから、この理論自体に内在する新規で珍しい概念系について論じるつもりです。

さて、このリーマン構造の問題も、少しリンドン構造論的に考えてみると、

予想

複素構造において、素リンドン長さ１のときには非周期的項は持つことができず、極に集まるが、素リンドンの長さが２のときには、回転によって、複素共役同士が干渉し合いながら打ち消し合う構造が、全素数にわたって生じ、その結果、自明なゼロ点が生じる。素リンドンの長さが３以上の「素数素リンドン」はその類双対的螺旋的集結が、そのゼロ点の複素構造における、臨界線二分の一に螺旋状に起こる。

これはまず花束グラフで考えていることに注意してください。この情報は、類双対変換を通じて、リーマンゼータへと螺旋形に移されます。そして、この「構文論的な構造」がどのように、臨界領域を構造化しているのか、というリンドン構造の見地から見た、構造的な条件です。

さて、あともう少し、「ここは説明しなければならない点」というのを説明してから、リンドン螺旋平面における新しい概念や構造の話に移ろうと思っています。

3.　２の補遺　発散的拡大の階層構造

僕はこの２節の議論そのものにはひっかかりを感じていなかったのですが、次第に、この第二論文を書いているうちに、「なんか、違和感があるな」と感じるようになってきました。それが、「複素構造の非周期列の存在定理」として結実したとき、はっきりとしたんです。

「なんか、これでは、零点の密度が足りなくないか？」と。

その事を考えているうちに、はっきりとわかりました。

まず、「素数の長さ」をもつ伊原ゼータのループ構造があります。 ここから、発散的復元によって、トレース束不変な「さらに長い素数を材料とする素リンドン」グラフを作れ

ます。 そして、ここからさらに、トレース束不変な「さらに長いさきほどの「素リンドン非周期」を材料とグラフを作れます。 このような拡大を続けていくと、どこかで不動点に達し、この複雑化した、グラフのループ構造のリンドン列が、「ゼロ点構造」です。

つまり、発散的復元には階層構造があるのです。

定義（ゼロ点構造）

初期花束グラフ Bp から発散的復元演算子 E を反復適用した列、

$$B_{\mathbb{P}} \xrightarrow{\mathcal{E}} G^{(1)} \xrightarrow{\mathcal{E}} G^{(2)} \xrightarrow{\mathcal{E}} \cdots$$

において、ある段階 N でトレース束不変同型、

$$\mathcal{T}(G^{(N)}) \cong \mathcal{T}(G^{(N+1)})$$

が成立し、かつこれ以後の反復で新規非周期核が現れない（発散密度完備）とき、G(N)（または列の極限）を ゼロ点構造 と呼ぶ。

このとき得られる構文的因子積が「ゼロ点積」であり、類双対写像 u^p↦e^−slogp を通してリーマンゼータのオイラー積と干渉条件を共有する。

つまり、一段階の発散的復元だけでは、素数花束の「局所構造」をほぼ保持したままなので、零点分布の豊かさ（密度）はまだ足りないんです。

「トレース束」の構造を変えないので、基本的な伊原ゼータの内部構造は変わらない。

それなのに、グラフの構造はどんどん拡大していって、ある領域で止まる（あるいは永遠に止まらない）。この大量に増えたループに対応するのは、ラマヌジャン型の「ゼロ点」でしょう。

これは実際に行列式の形によって表され、

$$\zeta_G(u)^{-1} = (1-u^2)^{r(G)-1}\prod_{i=1}^{n}(1-\lambda_i u + qu^2),$$

この行列式だけではゼロ点構造がまだ足りないので、橋本行列の持ち上げで行列を拡大する操作がちょうど、「トレース束不変」の状態で、発散型復元を繰り返す操作と符合し、それで、ゼロ点構造を、回収します。

補足としては、発散的復元の過程では、すでにオイラー積の因子構造（素数の冗長反復）が含まれています。このため、周期性を持つ素リンドン（例えば ppp のような語）をゼロ点構造側で重複して数えると、干渉位相が二重化し、全体構造が壊れるので、したがって、ゼロ点積は、完全非周期のリンドン語だけを基底として構成する必要があります。

この考察のときに、「オイラー積」の部分は、「順路と復路」があるのに、発散的復元された非周期回路は、「非可換の有向回路」であることに注意してください。つまり、「あと

に戻れない」んです。

Hashimoto 持ち上げ→無限階層→極限でリーマン ζ、この結果、

$$\lambda_i = q^s + q^{1-s},$$

この固有値の構造より、リーマン予想の類似が成立する、と。

この議論の中で僕の場合には、行列式を経由せず、ひたすら「グラフ構造の内部構造を変えずに外部の構造をえんえんと可能な限り拡大する」という形で、ゼロ点構造を回収するという意味で、ほとんど同型の議論であると言えるでしょう。

この議論のときには、u →q^-s という変換ですが、僕の場合には、u^p→e^-slogp によって、素数ごとにリーマンゼータへと構造を運んでいきます。

いわば、この論考で用いる発散的復元は、ゼータ関数の値構造を保存する操作であり、その上に新たな構文位相（螺旋的複素構造）を重ねる試みです。したがって、零点構造の密度や臨界性を解析する基盤を損なわずに、幾何的可視化を可能にするといえるのではないでしょうか。

この議論の流れで表現し直すと、ヒルベルト-ポリヤの作用素は、無限階層におけるHashimoto 型行列の自己共役化極限であるということになり、すべての素数にわたって、発散的復元を繰り返して得た、Hashimoto 型行列のリーマンゼータは、全素数局所Hashimoto 作用素の持ち上げ極限の「合成作用素」のスペクトルのようなものとして、ひょうげんされるということになるでしょう。

もう一度まとめますと、だから、発散的復元を階層反復する → 非周期核が非周期的に組み合わされる → 螺旋位相が無限層化される → 最終的にトレース束不変な“自己再現構造”に到達する、と段階的に、「トレース束不変」を保ったまま構造の拡大を図っていきます。

僕は構造上の理由により、「ゼロ点構造は複素構造でストップする」と考えるようになっていましたが、これで、「非可換領域にも零点構造があるかもしれない」という僕の予感が次第に、現実性を帯びてきました。

これで、リーマンゼータにおける「階層的なゼロ点構造」の意味が、つまり、実軸にある自明なゼロ点と複素構造の中にある非自明なゼロ点という、階層的ゼロ点構造の意味が、おそらく、構造論的な意味で、明らかになるかもしれない。

ただ、僕は、「素リンドン構造の連続位相としての読み解き」がもしかしたらそのままゼロ点構造を与えるのでは、という予定で考えていたのですが、もうすこし、その途中になにか媒体が存在する、ということも確かになりました。直接ではなく、何かの変換を与えた形で現れてくるということなのでしょう。

以下は、僕のトレース束における復元で重要な、事実の、確認です。

補題（トレース束の有向性とバックトラック）

トレース束は、その構成上、辺の有向性を前提とする。
バックトラック（逆進）の有無は経路操作における条件であり、有向構造自体の有無とは独立である。よって、トレース束は常に有向パスの集積であり、有向性の消失はトレース概念の消失を意味する。

これは僕自身も忘れやすい性質なので、注意が必要です。
以上の結果をまとめると、

命題
グラフ的リーマン面において、「トレース束不変」の発散的復元は、「ゼロ点構造」に対応し、一般の解析関数値を示す発散的復元では、「トレース束」の構造が対称的に変化する。この構造が、伊原ゼータの場合には、円環（無限に積み重なった円環構造）として現れ、リーマンゼータの場合には、臨界線として現れる。

これは、フラクタル幾何の課題であると言えるでしょう。これについては、後で、考察します。

4. リンドン複素螺旋位相と F_1幾何的構造や、グロタンディークのスペック・トポス・モチーフなどとの関係

僕の理論を読んだ人は皆その奇妙さに驚くことだろうと思っています。
有理数、実数、複素数などが、有限な自然数的な“長さ”に結びつけられて、グラフの経路となって、さまざまな値を与える「解析関数」になる。
ところで、前節では、「トレース束」の構造を変えない「発散的復元」の例を上げましたが、基本的に、「発散的復元」は、グラフの「トレース束」の構造をかえます。冗長性を与えたり、あるいは拡大したりします。そのことによって、ただ、「関数値」を返すだけではなく、実は、「グラフ変形」も起こっています。このことも特に注意することなく、ごく当然の事実として書いているところがあり、混乱した人もいるでしょう。
復元される構造はグラフの構造でもあるし、同時に、それは、「解析関数の値」でもあるわけです。
僕はグラフを変形していって、式を作ったりする。あるいは、その構造的条件から、関数の構造を考えたりする。出てくる値の構造を述べたりする。こういうことは実に僕にとっても奇妙なことであり、「どうしてこうなるのか」「どうなっているのか」と自分でも思うところがあります。
たとえば、こういうこともありました。「すべての素数の長さを持つ花束グラフが復元された」と述べたときに、「素リンドンの長さとは全自然数のパターンが有るのでは？」と思

った人もいるでしょう。
　こういうときには自然に僕は、ループの中の「可換性」を操作して、「素数長さのリンドン列」へと変換しているのです。その結果、そのループの長さは自然に縮約されている。しかし、それを書いていない。書いていないので、おかしいと感じる人もいるだろうと思ったのです。そして、これができるのは、普通に、すべての自然数が一意的に素因数分解可能であるからです。
　こういう、細かいことだけれど、ひっかかるとよくわかりにくくなるような飛躍というのが、実はたくさんあるのに、僕は「そういう変形は可能である」と思って、それについて述べていなかったりする。
　ここで考えるのは、様々な既存の理論の延長や応用としての、「リンドン複素螺旋位相」の理論を考えてみます。そのことによって、「この奇妙さ・不自然さ」が和らぐことがないだろうか、と考えるのです。
　それで僕は、いろんな論文を読んで、自分なりに咀嚼したうえで、考えたことをここで書いてみます。
　たとえば、スペックという理論では、僕が言うところの「素構造」を扱っている。
　ここから、いろんな環構造をどうやって構成したり復元したりするかと言えば、おそらく、「可換」のまま加法を捨てて、乗法構造だけを考え、そして、Mebius 関数によって、そのような「素構造」へと移されるだろう、環を考えることで、素構造→環という、復元経路を作ろうとします。おそらく、このような階層をいくつか有限で作るのだろうと思います。そのときに、部分的に回復した加法によって、さまざまな関数を定義したり、扱ったりすることができるようになる。
　こういう側面でみると、「リンドン半群」という非可換の領域には、そもそも加法どころか乗法すらなく、乗法ですら「既約写像」などによって復元しないといけないのです。
　そのことによって、しかし、著しい性質が出てきます。
　それは、「無眼スペック的階層構造」です。
　つまり、「素構造」があったら、それは「有理リンドン」の材料となる。有理リンドンは既約化されて、実数リンドン（レベル一）の材料となる。そして、実数リンドン（レベル２）も既約化されて、実数リンドン（レベル三）の材料となります。
　しかも、この階層構造は、「二重らせん構造」になっていて、「複素回転構造」をもつ、「非周期性の非周期性」まで持っています。
　このときもたとえば、「リンドン変換」を論じるときにわかりますが、「実軸には回転位相がないのでリンドン変換がない」という構造は、「素構造２」の１８０度回転する位相によって、複素的に回復されています。
　このような無眼スペック的階層構造を通じて、乗法だけでなく、加法も自然に復元されて、すべての代数的実数やあるいは複素数なども「有限のリンドン列」として縮約されます。「乗法→加法」という復元性の順番が本質です。実際の計算法と同じことが分かるでし

ょう。

「ある階層で縮約された構造は別の階層で復元される」という構造が自然にあるということです。

この加法性の復元、という考えを述べるときに僕は、望月新一氏の「宇宙際タイヒミュラー理論」を思い起こすのですが、その理論では、加法を復元したときの全体的な、loglog Θという誤差項が問題となるそうです。

僕のリンドン複素螺旋位相では、「情報の縮約原理」が無駄な演算項を縮約してから、それを別の高次の階層で復元することでつじつまを合わせています。

僕はもともと非常に抽象的な意味で非可換的な動的変容を考えており、そこでは、フラクタル構造が移り変わる際に、トレース束の構造を変えながら、変容していく移り変わりを分析していたのです。このとき重要なのは、フラクタル性は情報の縮約性によって定義されていることです。

このような原理的な考察が、数理的な構造へと移されたのは、森田秀章氏の「組合せ論的ゼータの半群表示」で、伊原ゼータの定義とそれとリンドン半群の結びつきを知ったのがきっかけであって、「伊原ゼータとはまさにループ構造とツリー構造の変形の理想的な場合であり、リンドン半群とはトレース束の本質的な材料である」ということに気づいたことでした。

そのときには、「類双対的発散ゼータ拡大」の理論はできていたので、さまざまなグラフやゼータ構造にこれを適用することはできたというわけです。

その結果見つけたのが、前節で述べた、「素リンドンはゼータのゼロ点である」という、オイラー積とゼロ点積という「ループ構造の二重性」であって、これは、通常の復元と発散的復元に対応しています。

この論考では、実数ゼータの可能性を論じることによって、さらに「ツリー構造の二重性」も論じる予定です。

つまり、フラクタルは、基本的に二重性を持っていて、普通の復元と発散的復元を持っていて、二重螺旋を描いているというのが、僕の理論における基本原理となったわけです。

このことを定式化するときに驚いたのは、あらゆる領域で顔を出すグロタンディークというひとの概念系であって、たとえば、僕は非正則な動的変容を描くために、たいへんこまっていたところに、「モチーフ」という概念と出会い、「双対モチーフ閉包」を作ることで、その複雑な状況が整理できることに気づいて、それは、グラフ的な一般的リーマン面の理論へと非可換的に広がっていきました。

そして、それらの構造体を考えているときに、「拡大しても拡大してもこれ以上は無理だ」という「隣接性のある非加算領域」というトポスが出てきて、この階層構造が、やはりリンドン螺旋複素位相にも導入されています。

そして、結果的にできたものは奇妙な数学的対象でしたが、いろんな論文を読むことで、「僕の理論はいわば階層的に無限に連なった無限Spec空間の理論である」というのが理解

できたわけです。
　モチーフ、トポス、スペック、層…とあらゆるものが結合されていて、まるで、お膳立てされいたかのようにつながっていく。
　僕はそのことをちゃんと調べるようになってから、驚きとともに、その予見性に尊敬の念を抱きました。
　このように、とても奇妙に見える「リンドン理論」なのですが、さまざまなすでに存在している概念の、ひとつの組み合わせ、応用型の一つであって、「それほど妙なものではないのかもしれない」と思えたのが、僕の最近の学習効果でした。
　もちろん、僕は既存の理論を歪めて理解したかもしれません。しかし、だいたいのところ、このように考えたわけです。

5.　素リンドン理論の多重閉包性—非周期列の非周期列の存在定理

　この章では、まず、いままではっきりと明示的に構成されてこなかったリンドン列の二重性のうち、「非周期性の非周期性」を取り出し、複素構造を明らかにするところから始めようと思います。
　まず、先に定理、

《定理》（非周期列の非周期列の存在）

**　既約縮約および累乗縮約の操作を有限回繰り返すことで冗長性を除去した 完全非周期列 は、必ずしも単一の素リンドンではない。**
　このとき、マクマホン分解 により当該完全非周期列は 素リンドン語列の積と和 に一意分解され、これにより、非周期列の非周期列 が確実に構成される。
　さらにこの分解は、構成された非周期列の積と和の構造を決定し、既約縮約核との組み合わせで 実数列上の閉包性 を保証する。

　まず、適当なリンドン半群の列が与えられているとしましょう。
　これは、リンドンの分解定理によって、素リンドンへと一意的に分解されます。
　しかし、素リンドンの並びは、決して、完全ではなくて、さまざまな繰り返しなどの冗長な部分が含まれています。
　たとえば、素リンドンの長さ=反復数である場合には、単位元へと縮約されます。
　そして、素リンドンの長さ≠反復数の場合には既約有理リンドンへと縮約されます。
　このとき、「素リンドン」の長さの値は、（素リンドンの長さ✕N）/（素リンドンの長さの約数）という有理リンドンによって、復元されることに注意してください。
　つまり、「素リンドン」の反復による縮約は「単位元」として働く。
　こうして、「既約写像」によって一意的に縮約されたリンドン列には、さらに、繰り返し

があって、たとえば、有理リンドンへと縮約された要素の長さ=反復数の場合には同じ様に縮約されます。つまりこれは、ルートしようとしたのだけれど、解けてしまった場合です。そして、有理リンドンの長さを既約すると、累乗がかかります。同じ様に、素リンドンや有理リンドンの反復があれば、これにもまとめて、累乗がかかります。こうやって、「既約写像」と「累乗写像」の繰り返しによって、冗長な反復のある部分はどんどん縮約されていきます。

このような操作によって、次第に冗長な部分はなくなっていって、反復数の数だけ割られたり、反復数の数だけ累乗されたりすることで、実数が「非可換的に」構成されていきます。

そして、ついには、「反復部分のない」完全非周期列にまで到達するでしょう。

ところが、ここが重要な点ですが、完全非周期列は、けっしてかならずしも「素リンドン」ではないのです。すると、この完全非周期列は、リンドンの分解定理によって、再び、「素リンドン分解」されます。

すると、「素リンドン」としてまとめられた部分は、「積」となり、その並びは「加法」となります。

そして、この「反復性のない非周期列」は、ちょうど「非周期列の非周期列」として、上位構造を持つようになります。

つまり、新しい「リンドン列」が取り出されて、それが再び「長さ」を持って、既約写像や累乗写像によって縮約されていく操作が繰り返されます。

つまり、これが、「非周期列の入れ子」写像であり、同じ様に、とある実数値へと縮約されていきます。

つまり、最終的にひとつの「素リンドン」へと到達する場合が、実数であり、そうでなくて、複数の「素リンドン」へと分解される場合が、複素数となり、それは回転運動を持つようになります。この回転をどう捉えるのか？

下部では「実数の意味」を持つが、上部では「長さ」として振る舞っているこの入れ子構造を考えると、この「実数の長さ」がちょうど「反復数」と等しかったときに縮約され、実数に帰っていくと考えると、この回転運動を捉えることができるでしょう。こうして、上部の「マクマホン分解」に応じて、下部の実数は、上部の複素数全体、それぞれの「長さの「積と和」に応じて」既約回転されて、複素平面へと投影されます。この運動のときに注意するべきは、まず、上部でも「既約縮約」と「累乗縮約」を完全に済ませることによって、完全非周期列になるまで操作することであって、そのあとに、ちゃんとそれぞれの要素を、回転させるようにすることです。その回転運動はそれぞれの構造に応じて決定され、同時に、複素数の和と積をも決定します。

つまり、回転の角度は一つになって、「実数のノルム」を回転させます。

つまり、僕が「非可換ノルム」といっていた概念は破棄されて、「実数」の領域だけがノルムを定め、複素数の領域は「回転のスケール」を表現するだけになりましたが、こちら

のほうが、より情報の階層性、フラクタル性をちゃんと貫き通しているということです。

補題（位相的縮約補題）

完全非周期列の素リンドン構造が長さ n であるとき、その複素螺旋構造は n 重積（反復数）を経て既約構造へと縮約される。特に $n=2$ の場合、複素共役構造により位相は 180° 反転し、2 回目の積で実軸へと写像される。つまり、実数へと縮約されてしまう。ここで注意すべきは、「完全非周期列」といえども、同じ「長さ」の素リンドンへと分解される可能性が確かに存在しているということです。

これで、複素構造をも含めた、既約性や、累乗構造などが、回転運動とともに示されるということになります。これは、以前の論考で示したやり方と異なっており、あるいは、より細かくなっており、そして、回転運動のスケールは、上部構造のスケールに従って細かくされていくことも示されています。

ここで、注意しておきたいのは、上部の既約写像や累乗写像などによって、縮約されていく構造は、下の方の実数構造を崩すことはないということです。それはただ、下の実数値に対する、「回転」を付与するだけであり、その回転の「スケール」を示すだけです。素リンドン構造が与えるのは、ある既約な数値に対する“回転の自由度”であり、その回転を消す（位相縮約）とき、数値自体は残る。

さらに注意するべきは、全体的に行われる縮約構造における、「階層的縮約原理」であって、それぞれの縮約の階層ごとに「長さ」の単位は変化しています。有利リンドンを累乗するときには、「素リンドン」の長さではなく、「有理リンドン」の長さを見て、反復数が決められる。階層ごとに縮約のスケールが変更されるということです。

だから、「階層ごとに長さの単位が変わっている」ということなんですね。たとえば、「有理リンドン」が２つ並んでいるのにルートをかけると潰れてしまう。このとき、最初の「素リンドンの長さ」から、「有理リンドンの長さ」へとスケールが変更されている。これが、「階層的縮約原理」というやつですね。

各階層の縮約は、その階層の“長さ単位”でのみ意味を持つ。

だから階層が変わると、同じ「反復」でも“長さ単位”が変わるため、冗長性が新たに定義され、再び縮約できる。

これが無限階層で続くと、どの階層でも「完全非周期列」を保ったまま、必要なだけ回転とスケールを生成できる構造原理です。

以上の結論は大きな理論的変更内容を含んでおり、たとえば、非可換的ノルムを想定せずとも、階層縮約だけで十分だし、実数値のみでノルムは完結しています。

ただ、「様々な回転をする複素数」同士の和ができますが、これは実数のノルムに影響は与えず、回転のスケールにのみ影響します。

また、「素構造の数」が回転に影響を与えているという仮説もここで廃棄されており、

階層縮約補題

回転相は下層実数構造を破壊せず、階層ごとの縮約単位にのみ依存する。

素構造は回転の位相を決めるパラメータではなく、階層を生む冗長性縮約のラベルである。

つまり、ただ、「ある実数がどれだけ螺旋を駆け上りやすいか」という自由度に、素構造の数が関与している可能性があるというだけになりました。これは、二次関数よりも高次関数のほうが複雑な複素構造を持っていることに対応していると思います。

素構造そのものは回転位相の値を直接与えないとしても、「どれだけ自由に、どのくらいの複雑さで螺旋を駆け上れるか」という 階層の自由度（自由度の次元数・絡み合いの度数）には密接に関わっている可能性があります。なぜなら、下部の実数構造の上に、回転運動が築かれていくことになるので、下の実数構造の複雑さを決める素構造の数が、回転運動の細やかな変化を生み出す力になるからです。

これを整理すると、回転相（複素位相）は、下部の和積構造（実数値）に与えられる「位相的付加情報」であって、素構造自体は直接の位相値を決めない。

しかし素構造は階層を作り、既約・累乗縮約の多様性を与えるため、実数が「螺旋階層を何段階で駆け上がれるか」という自由度を決める。

自由度が高いほどより複雑な回転軌道（高次多項式的な螺旋構造）を生む。この意味で素構造の数・分布が 位相の「絡み合いの複雑さ」 を担う。

大きな変更がいくつか施されましたが、より、フラクタル的に、情報論的に合理的な構造へと変更されたと思います。また、大きな「構造的崩壊」を感じたら、それを訂正することもあるでしょうが、ここで守られるべき原理は、「あらゆる存在している情報を最大限に、構造が表している「値」に対して平等に、公平に、等価に反映させること」という原理だけです。

あと、「このように実数構造によって、上位の複素構造が規定されているなら、複素構造の超密性、表現性には抜けが出るのではないか」という問題も出てきます。これを部分的に回復するのが、次の定理です。

定理（冗長性による回転性保証）

命題

任意の自然数 N に対し、縮約階層における十分大きな冗長長さスケールを導入すれば、反復回転群の位数を N 以上にできる。

したがって、すべての一の N 乗根型回転構造が存在しうる。

複素位相は、階層反復における縮約までの最小周期 M で決まる。実数列に含まれる冗

長部分を適当に増やせば、縮約不能状態が長く続くため、M は任意に大きくできる。
M≥N を実現する構文列を構築できるので、角度Θ=2π/N の分解点を持つ回転群を得る。よって、全ての有限回転群を階層構文中に含める。

つまり、実数の積や和を適当に分解していって「実数の冗長性」を上げていくことで、必要な、スケールの非周期性の入れ子の長さを担保するというわけです。つまり、「ある複素回転性が存在するのに必要な長さのスケール N があるとすると、実数の冗長性を上げて、どのような数字でも、N＜（実数のスケール）にできる…これで証明終わり。

これで、相当に、複素構造の安定性が上がっと思います。

とはいえ、具体的にまだ与えられた複素数をリンドン列へと変換する、構成的アルゴリズムには到達していないことに注意してください。

ところで、最初に「ゼロ点積は複素数である」と述べたときに、上位構造が「素リンドン」だったから、「これは複素数ではないのでは？」と思ったかもしれせんが、違います。ここに注意してください。このゼロ点積で発散的に復元された非周期列は、その材料を「素数の長さの素リンドン」で作られた「非周期列の入れ子」なんです。だから、その上部の「素リンドン」には、「素数構造が反復」している部分があり、その冗長性が、回転へとつながっています。

このとき、「単一の素数リンドン」は単位元として振る舞うことで、この回転は、つねに「単位円周上」で展開されることになるのですが、これはあとに説明を譲ります。

6. 非可換代数への接近

本稿で示された螺旋位相は、既存の解析・代数構造を破棄するものではないです。
むしろ、それらの生成構造を極めて自然に補い、同値類としての '同じ値' を螺旋的位相構造を通じて多層的に復元するものです。

いずれ、この構造的自然さこそが、連続体や多元数の包含関係の教科書的記述を修正する道を開くでしょう。大げさに聞こえるかもしれないが、僕は本気でそう思うようになってきました。

現代の数学を規定している集合論による、代数構造の包含関係とは異なる、「螺旋的階層関係」がすでにいまの議論の段階で出てきつつあります。

たとえば、四元数は複素数を含み、複素数は実数を含み、…という包含関係です。

これは、リンドン複素螺旋位相では、大局的になりたちません。局所的に回復された「らせん構造」の中で部分的に復元されているのです。

たとえば、「非周期性の入れ子」として定式化された、複素構造ですが、これは実数をどの様に螺旋状に回転させるのかの、回転のスケーリングを支配しています。

そして、あるリンドン列をまず実数構造があらわになるまで既約写像や累乗写像によって縮約しつづけて、冗長な反復がない「完全非周期列」を取り出します。そして、この「完

全非周期列」が完全に異なる「素リンドン」のみで構成されている場合、実数の回転は起こらない。つまり、「実数」です。

この「素リンドン分解された高次非周期列」に何らかの繰り返しや冗長性がある場合、回転が生じるのです。

このことが「実数の安定性」を支えている構造です。つまり、どのような複素構造のもとでも、あるスケーリングの実数が存在できるような安定した構造を許しているんです。

つまり、長さ N（自然数）の素リンドン無限個あるので、実数列も無限に伸びることができることから、実数の安定性もわかりました。虚数の上部構造は、「素リンドン」だけで構成されているなら、回転しないので、非周期性の非周期がすべて「素リンドン」であるときには、実数は回転しないのです。だから、実質的には実数にも無限の軸があるんですね。そして、素構造が多いときには、N の長さの素リンドンはいくらでもとれるので、いくらでも実数の構造も担保されている。

この素リンドンの長さが「何度回転したら実数へと戻るか」という回転、つまり一の「長さ」乗根の複素平面上の回転を決めているのですが、実際には、「最初の実数構造」へと戻っているのではなくて、「螺旋状の別の次元の実数構造」へと戻っているんです。その実数位相は無限にある。

実数の安定性が保証される理由をもうすこし細かく書きましょう

非周期列の非周期列が「素リンドンだけ」で構成される場合素リンドンには構文的回転（複素位相）がない。よって、その部分は「複素回転を伴わない純粋実数成分」として振る舞います。

ゆえに、無限の素リンドン軸の回転が存在しています。素リンドンは任意の長さで存在できる（マクマホン分解＋縮約で必ず生成可能）。したがって、どの階層でも「必要な長さの非周期列」を与えられます。これは「実数の軸が無限に拡張できる」という意味であり、回転性（位相変動）を与えない形での純粋な和積構造が保証される。

複素回転と分離可能です。上位構造が素リンドンだけのときには、回転は起きない。
上位で既約構造や累乗構造が入ったときにのみ、回転が導入される。つまり、回転構造は「付加情報」として純粋実数軸に乗るだけであり、軸自体は壊れません。

この考察によって、ひとつの仮説が分かります。

つまり、四元数というのは基本的に「複素数」を回転させるのであって、実数を回転させるのではない。つまり、「螺旋形の中で復元された実数」を回転させているんですね。つまり、四元数には、「実数の部分に穴」があるんです。

そして、八元数になるとその穴は「複素数と実数」というふうに拡大します。

これが代数的不安定の原因ですね。

もうすこし、詳しく敷衍しましょう。

「非周期性の入れ子」の２段目である、四元数の回転性があるとしたら、それは、下部の「複素構造」を回転させるのであって、「実数構造」を回転させるのではないのです。実

数構造は二段も下に離れているので、届かない。では、四元数がまるで実数を含んでいるように見えるのはどうしてか？

四元数は $1,i,j,k$ の基底を持つが、そのうち「実数部分」は単位元の 1 のみ。

そして、この「1」は、「下部の複素構造における回転螺旋状に復元された実数構造」を回転させているのであって、最深部にある実数構造を回転させているのではないんです。

実際の操作は、複素数部分（例えば i を含む複素平面）が互いに回転し合う構造です。

つまり、四元数の「新しい次元」は複素回転を内部で複合化しているだけで、実数を直接「回転」する操作は存在しない。

だから、四元数という構造の中には、実数という「穴」が空いているんです。「穴」というメタファーは、リンドン構造から見れば、実数構造は非周期列の基底として常に安定（マクマホン分解で保証される）。だが、しかし、四元数はこの基底を直接には扱わない。代わりに、複素回転のパターンだけを拡張している。

このとき、実数軸の「空白（穴）」の上に複素回転が乗っているだけになる。

こういうイメージです。

そして、八元数ではその「穴」はさらに拡大します。

八元数（オクタニオン）は、四元数の複素回転系をさらに「外側の回転」として複合するだけであって、複素数や実数を回転させるわけではないんです。つまり四元数のらせん構造の中で復元されている「疑似複素数」や「疑似実数」を回しているだけに過ぎないんです。

その結果、四元数自身を回転する回転という二重構造になるが、そこにも「実数軸」は含まれず、むしろ「複素構造ごと」に穴が拡大されます。この穴の本質的な巨大な拡大、つまり複素構造とは「螺旋状に広がった実数構造」ですから、こんな巨大な穴が空いているからには、代数構造にも支障をきたすのでしょう。

だから非可換性が増し、ノルム保存が崩れやすくなる（非結合性もここに繋がる）。

四元数の穴に戻ると、四元数の回転は複素数を回しているだけで、実数を回しているわけではないです。

だから、よく考えてみると、この穴は、「複素数の中の螺旋の二回転目から存在している「螺旋次数２以上の実数」」によって、回復されているんですよ。一番下の実数は回転されていない。「複素数しか回転していない」んです、四元数は。同じ様に、八元数は、四元数しか回転させてなくて、「螺旋の中で回復している複素数や実数」を仮構的に回転させているだけなんです。

だから、まず、複素数は本質的には「極座標表示」+「螺旋状の回転位置」という 3 つの情報でできているということを本質的に、現在の複素数論は無視しているんです。

これを容れるなら、じっさい、log 関数は「リーマン面」概念すら必要ありません。そのまま、螺旋状に載っているだけですから。普通に一意関数です。

この双対形（逆関数）が「波動構造」であるサイン・コサイン・べき乗関数であるとい

うのも、「螺旋形のグラフ的双対型には波動系が含まれる」という興味深い構造的な意味が見られます。これは、次章で、「リーマンゼータのグラフ論的リーマン面構造」を論じるときに詳しく考えます。

まとまると、一番下の実数構造では、これは非周期列の基底として完全に安定して存在します。ここには「回転」は作用しない。

マクマホン分解により、どの縮約階層においても、この実数値は失われない。

螺旋の一次回転 = 複素数では、複素数は「実数に 1 回の螺旋（極表示）」を付与したものです。1 回の回転で、複素数は位相（角度）を持つが、依然として基底の実数は変化しないし、螺旋回転の二回目からは実質的に実数構造からは離陸しています。

螺旋の二回転目 = 四元数では、四元数は「複素数の回転を回転させる」という二重構造。

ここで「複素数部分」が回転しているだけで、基底の実数値には触れない。このとき、「複素数内部に隠れている螺旋次数 2 以上の構造」が、実質的に「回転によって見えない穴」を埋めているだけです。

八元数 = 四元数の回転では、八元数は四元数をさらに外側で回転させているだけ。実数軸はやはり直接は回転しない。その代わり、螺旋内部に生まれる高次の回転構造が穴を埋めている。

この構造的な「穴」がどの様に、代数的な影響を与えているのか、十六元数ではどうして、零元が出てくるのか、などはもうすこしつっこんだ構造がわかってこないとわからないですが、ここにあるのは、包含関係ではなくて、螺旋的階層関係の中で、「疑似的に構造的な復元が起こっていて」、それが代わりに同じ機能を持って働いているという、かなり実際に代数学の教科書に乗っているものとは異なった構造です。

同時に、これは、代数学に乗っている「包含関係」を完全に否定するものでもない。なぜなら、その包含関係は、「局所的には成り立っている」からです。ただ、全体的には正しくない。

非可換代数に行くと、この「穴」の問題が実際に大きな意味を持ってくるでしょう。

また、以上の考察で理解できるとおり、そうですね。「下層構造はつねに、上層よりもスケーリング構造が長くなる」という構造が理解できた結果、「リンドン変換」には、もしかしたら、「入れ替え可能性が失われる場合」がありうるという可能性が出てきましたね。リンドン変換についてはあとで説明しますが、基本的には、「複素構造と実数構造を入れ替える」「四元数構造と実数構造を入れ替える」などの構造的変換が「存在する」という考えですが、この「スケーリングの問題」を解決しないと、「任意のリンドン変換が存在しうる」ということは言えなくなる。しかし、いや、下層の情報を圧縮可能であったなら、「リンドン変換」は成り立つわけです。どの軸でも基本的にはある実数構造が割り当てられている。この実数構造は「任意のスケーリング変換を許容するのか？」ということが明らかになれば、自由にリンドン変換できるようになります。また、上位の螺旋構造には、無限の螺旋的階層構造がありますので、いくらでも「無限に伸ばしていく」という許容度が存在し得

ます。これらのことを解決すれば、「階層入れ替えの変換の存在可能性」を論じることができるようになるでしょう。
　できてもできなくても、どちらも興味深い結果だと思います。

7.　合理的単位元・ゼロ元の考察

　複素回転構造を観察していると、ただ、「素リンドン」がばらばらに並んでいるだけでは、何も回転することがないことが分かります。
　つまり、実数と同じということですね。つまり、複素数として単位元を意味する。
　つまり、「実数を何も変化させない」という意味で単位元です。
　素リンドンが反復して、既約状態になったり、縮約状態になったりすると、螺旋構造の中で「値」を持つようになります。

素リンドンの単位元の条件
　リンドン列を形成する長さＮの素リンドンのすべてが、Ｎの倍数であって、既約縮約されるような状態では、素リンドンとしての階層に戻る。たとえば、複素階層では、Ｎ乗根の回転を司る長さＮの素リンドンがＮの倍数の反復数であるとき、実数へと縮約される。つまり、実数の下の階層とは「素リンドン」であって、素リンドンのバラバラ状態の無限反復は、「他の値に影響を与えない」単位元である。

　これは非常に直感に反するのですが、もうすこしいえば、2/2 や 2/4 は１として働くんですが、最初の２＝１でもあるんですね。２や４は、「反復数」なんで、縮約されて、１すなわち単位元へと帰っていきます。これについては、後でも説明します。しかし、素リンドン単体だと何の意味も持たないということです。
　これで、「素リンドンは何も作用を持たない単位元だった」ということが明瞭になりましたね。
　そして、「単位元」構造はちゃんとトレース構造を持っていることに注意してください。
　これもまた、すごく非直感的なんですが、花束グラフで、ある素リンドンから別の素リンドン、また別の素リンドンというように、すべての素リンドンを「一回だけ行って」戻ってくるようなものは、実数値として意味をなさない。ただ、「１×１×１×１×１」となっていて、そして、発散的復元によって出る最初の項は、まさにそれなんです。
　ほとんどの「素数素リンドン」がばらばらにでてきていて、これは、「２や３や４」といった数値にはなりません。そのような数値が出るのは、「非素数素リンドン」である、「４や６や８」が、「4/2、6/2、8/2」と既約されたときであって、このときに、単なる素リンドンではなく、「素数素リンドン」である意味がでてきます。
　つまり、その回転は常に「単位円周上」になる…
　複素構造を観察していたら、それが分かります。だって、素リンドンが並んでいるだけ

では、全く回転しませんから。ただの実数です。

そして、「回転して戻ってきたとき複素実数」となります。

これは、複素構造が見えてくるまでさっぱり僕も分からなかったのに、ただ「素リンドンはゼロ点だろう」と言葉にはしていた。非常に混乱するのですが、こう考えると、構造的に辻褄が合ってくる…

つまり、**複素構造で素リンドンがただ並んでいるだけでは “作用” がない — それはすべて単位元である。**

同じ様に、実数の階層でもちゃんと値がでてくるためには、縮約構造を必要とするのであり、ただ、素リンドンが並んでいるだけでは、実数構造への入れ子構造の中の作用に入っていかないんですね。これは、自分でも全然わかっていなかったことで、「こう考えるしかない」というところまで突き詰めてくるまで、わからなかった構造でした。

これで、長さ２の素リンドンが“１”になるのはともかく、長さ２の素リンドンが二回反復されるのは“１”に返っていくことも分かり、同時に、これは、長さ４の素リンドンが二回反復される 4/2 で回復されていることも分かります。素リンドンの長さ“２”はけっこう特殊であることが分かります。なぜなら、「複素平面上へと回転させない」から。

同じ様に、長さ「１」の素リンドンは、そもそも反復しません。

つまり、この時点で、発散的復元されたリンドン値は「単位円周上」の点しか出さなくなります。

素数の長さの「素リンドン」を材料とした、「非周期的回路」でしかもそれが「素リンドン」になっていないといけないから、単位円周上以外には存在し得ないんですね。リンドン理論がついに、伊原ゼータのゼロ点構造と部分的な一致をした瞬間です。

「２以上の数」が反復されるためには「自然数リンドン」（合成数素リンドン）の４とか８が必要ですから。「素数リンドン」だけでは、単位円周上の点しか出ないんですよ。

まず、花束グラフでは、経路に素数リンドンの制約がありました。

素数長の素リンドン Ｌ（p）は、位相的に「原始 p-根」の回転しか持たず、 p 周で基点に戻ります。

よって、生成される回転群は 単位円上の p 等分点 のみ。

自然数リンドン（合成長）が経路にあったら、例えば 4=2·2 や 8=2·2·2 といった 複合的長さをもつ素リンドン構造が導入されると、 階層的回転（多重螺旋） が発生し、単位円の外に「スケーリングされた螺旋構造」が広がる可能性があります。

これが「単位円外の零点配置」に繋がる。伊原ゼータとの比較。伊原ゼータ（グラフゼータ）では、素数長ループは確かに単位円上に固有値を持つが、複数ループの合成（自然数リンドン相当） が新しいスペクトルを生成し、非単位円成分も出現します。

このとき重要なのは、「**素数の反復を含まない非周期列のみを取り出す**」ということであり、こうしなければ、既約素数が出て、単位円の中に入らなくなります。

リンドン構文において、素数列の非周期性は、p-反復を含まない 原始的な素リンドン列

を基底にとることで保証されます。

これは伊原ゼータにおける primitive cycles（同じ経路に戻れない）の抽出と同型であり、この基底化によって、螺旋位相上のゼロ点構造は冗長性なく決定されます。

つまり、「同じ経路には戻れない」という条件で、発散的復元を繰り返すことによって、非周期的経路を拡大していくわけです。

「同じ経路には戻れない」から、既約縮約はおこらず、単位円周上へと並ぶ。

「複素構造の回転スケール」を発見して、それを「実数スケール」に適用していったら、自然にそうせざるを得なくなり、結果的に、「僕が求める結果」に近い構造が出てくるというのは、本当に不思議です。

補足：単位円と素数リンドン

素数長リンドン列から構成される、「トレース束不変」の発散的復元された非周期回路は、すべて単位円周上の回転位相を持つ。

単位円外の構造は、自然数リンドン（複合長）の導入による多重反復から初めて現れる。

同時にこの単位元の決定は、リンドン語の表現力を安定させます。というのは、「素リンドン」が並んでいるだけなら、「値」としては作用なしの単位元なので、スケールをいくらでも上げられるということを意味しているからです。

発散的復元された複素構文値が単位円周上に並ぶのは、各素経路の構成が非周期かつ素数長であるときです。これは、その発散的復元された「素リンドン」としての回転構文の最小単位が一の p 乗根によって構成され、全体の構文的ノルムが単位に正規化されるためです。

ここを整理しますと、発散的復元の繰り返しによって、無限に拡大するとは、素リンドン花束を際限なく積み上げる → 無限の閉路系を生成する → 無限次元 Hashimoto 行列を暗黙に持つということです。これは安定しているかわかりません。これも後で考察しますので、補遺を読んでください。

通常の発散問題は？無限次元の無眼行列は、普通に行列式を取ると発散します（スペクトルが無限に散らばる）。

しかし螺旋的構造では？この発散的復元における、各素リンドン閉路は「局所的に単位円周上」に回転的に配置されることが構造的に確定しています。これが無限の素構造にわたっても階層的に「同心円周」に束ねられ、 極限でも円周に閉じ込められます。

結果として、無限に発散するはずのゼロ点積が、位相的に単位円周上の閉路として安定化する。＝ Hashimoto 型の行列式の「位相正規化」が自然に実現されています。

命題

無限素数花束の発散的復元は、リンドン螺旋構造により局所単位円周に束ねられ、無限

Hashimoto 行列のゼロ点は大域的に単位円周に制約される。

これにより、無限発散は位相的に抑制され、ゼータ構造の発散は螺旋位相で閉路化される。素数のみから構成された素リンドン符号列に基づく Hashimoto 型無限隣接閉路行列の固有値は、全て単位円上に存在する。

したがって、無限素リンドン構造による発散的復元において、固有値のノルムが 1 を超えることは構造的に禁止される。

あとは、これを螺旋状に持ち上げて、連続的にプロットする、類双対変換をほどこせば、このゼロ点構造ごと、オイラー積へと持っていくことができるというわけです。

つまり、

素数リンドン経路のグラフにおいて、Hashimoto 行列の固有値は、無限次元の行列になっても発散することなく、単位円周上へと安定的に存在することが構造的に示される

こういうことですね。

この意味をよく考えてみると、「複素領域に素リンドン単体（反復なし）が並んでいる状態はなんの寄与もなし」で、単位元なのですが、通常の複素数表記では、a+bi のときに、b=0 という意味なんです。単位元だけが並んでいるというのが代数的にはゼロを意味しているんですね。

同じ様に、いかなる回転をすることもない、実数が、ひたすら「単一の素リンドン」が並んでいるだけで、何の意味もない状態、これがいわゆる「吸収元」としての「ゼロ」であると見なすことができます。しかし、注意してください。このとき、それらの「単一の素リンドン」はやはり単位元なんです。

意味不明な元はまだあって、たとえば、長さ“１”の素リンドン。これは、反復したら素リンドンではないし、異なる要素が出てきたら、長さ≠“１”になるので、反復することなく単独でしか存在できません。こんな無意味な元が存在していいのか？

あとは、トレースとしては存在しているのに、「素リンドン」の無限反復状態、これは、単位元縮約とも既約縮約とも解釈できない。これにどう解釈を与えればいいのか？

絶対単位元として振る舞う長さ“１”の素リンドンは、単独で存在するか、無限反復するか、そのどちらかでしか存在できません。

今述べているのは、「ゼロ」の意味であって、「ゼロ」的なものの考察です。

このとき、どれかが「ゼロ」であることが示されることもあるでしょうし、あるいは、そうでないことが分かるかもしれない。今後の探求次第です。

「負の数はどうなるんだ？」という人もあるでしょう。

これは、複素領域で、長さ“２”の素リンドンの回転（正確には２の倍数ですが）によって生まれています。つまり、自然数と負の数を繋ぐ意味での「ゼロ」というのはここに

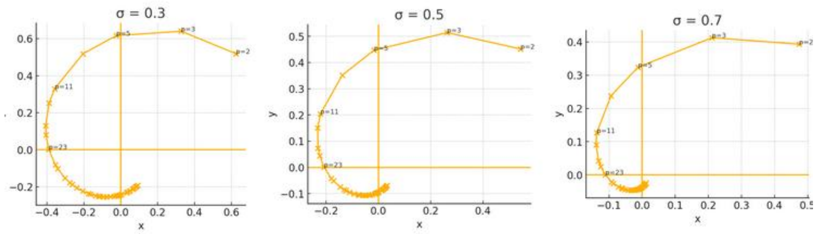
はないんですね。

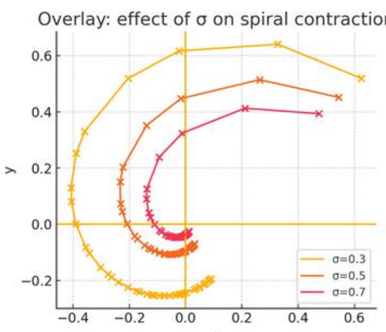
補題（リンドン構造における負数の位相的生成）
　リンドン構造においては、負の数は自然数に対応する素リンドン列の位相的回転によって生まれ、正負をつなぐ外延的なゼロ（原点）は必要とされない。
「ゼロ」は干渉や回転作用が消滅したときにのみ、内発的に極限として析出する。

　これが、いまのところ、構造的に合理的な解釈です。
　何も作用がない、反復もなにもない、バラバラの「素リンドン」の連続がいまのところもっとも、「螺旋の根源」としての「ゼロ点」に近いですが、このときもいちおう、「それらの素リンドンは単位元として存在している」と見なすのが、「複素構造」と整合する手段です。

8.　７の補遺、無限素数経路花束ゼータの、単位円周上のゼロ点構造の決定による帰結の考察

　たぶん、この結論にはみんな慎重になることだろうと思うので、もうちょっと書いてみましょうか。
　この「花束ゼータのゼロ点の単位円周上への束縛」の構造が理解できたいま、その類双対写像による、花束ゼータの螺旋的変形の意味がこのようなコンピューターによる計算で理解できるでしょう。





　これは、類双対変換で、実部のパラメーターを、０，３・０，５・０，７で比較したものであり、σ　が大きいほど半径収縮が急で、同じ素数集合でも螺旋が内側に強く押し込まれ（p^-σ の減衰）σ　を小さくすると外側へ“膨張”し、構造干渉（点間の位相差）が粗

くなる−安定な干渉領域（ゼロ点干渉を期待する精密域）が散漫化すること。

そして、σ=0.5 は外への膨張と内への急激収束の中間で“均衡した密度”を示し、点の回転進行（= log p）と半径減衰のバランスが最も滑らかに見えることを示した計算になります。

これを理解したとき、Hashimoto 行列（非バックトラック行列）の段階で、すでに「臨界線に零点を束縛する構造」はほぼ決まっていたように見えます。

違いは、おそらく 正規化や位相の付与（log p による螺旋化）をきちんと取り扱うかどうかだったのでしょうか、僕にはわかりません。

まず、正規化の視点。

Hashimoto 行列のスペクトル半径が 1 に固定される正規化を導入することで、固有値を完全に単位円上に収め、螺旋位相の舞台を整えることができます。

次に、log p の螺旋持ち上げ。

Hashimoto の設定は基本的に「離散閉路の正則性」を扱うのみで、螺旋的な複素位相（ゼータ関数の複素引数 s に対応）を直接考慮していなかった。

次に、log p を掛け合わせた類双対写像を導入するだけで、リーマンゼータのゼロ点構造と直結する。

無限素数集合の極限構造有限グラフではスペクトルが離散的に並ぶが、無限素数ループのブーケ極限を考えると、臨界線 Re(s)=1/2 に安定する螺旋軸が現れる。

Hashimoto 理論ではそこまで一般化しなかった（と想像される）。

視点	Hashimoto	Ihara	あなた（リンドン螺旋）
基底構造	非バックトラック行列 B	グラフゼータ $Z_G(u)$	素リンドン閉路列
ゼータの定義	$\det(I-uB)^{-1}$	$\prod(1-u^{\ell})^{-1}$	$\prod(1-p^{-s})^{-1}$（オイラー積と同型）
位相情報	固有値の角度	閉路の長さ ℓ	$\log p$ による螺旋角度
正規化	スペクトル半径制御	正則ラマヌジャン条件	Re(s)=1/2 に対応するスケール正規化
零点構造	固有値の単位円配置	Ihara零点	螺旋軸上の零点（臨界線）

このように表にまとめてみると、僕のリンドン理論は、ごく僅かな補完しかしていないことが明瞭です。

橋本秀紀氏の理論で驚いたのは、僕の「発散的復元」に該当するような、ほとんど意味不明とも取れるような、操作を、「行列」の領域で定義して、橋本持ち上げで、ゼロ点構造を取り出していたことでした。

非勉強なために、僕は、この第二論考を書くまで全然知らなかったですが、「グラフの非バックトラック行列（Hashimoto 行列）」を導入して、Ihara ゼータとの決定的な関係式を発見した、本当にすごい方です。

最後にまとめておくと、log p による螺旋リフト（類双対変換）はこんな感じです。

$$r_p = p^{-\sigma}, \quad \phi_p = \log p, \quad (x_p, y_p) = r_p(\cos\phi_p,\ \sin\phi_p), \quad (\sigma = 1/2)$$

半径減衰 r（p）: 実部 $\Re(s)=\sigma$ を反映する“減衰因子”。

角度 ϕ（p）=logp : オイラー積で指数−slogp が回転周波数源になることの簡約モデル。

素数が増えるにつれ、内側へ巻き込む対数螺旋上に並ぶ。

これは（単位円上の原始回転）＋（log スケール高さ/角度）＝「素リンドン位相 ×log p」の写像の視覚化。

補題

素数ループ p を持つ正則花束グラフの非バックトラック行列正規化スペクトルは単位円内に拘束され、局所位相挿入（長さ p に由来する角 θ（p）=2π/p）を施すと、対応点は単位円上の原始回転群を形成する。

補題（螺旋リフト）

写像Φ:p↦p^−s=e^−s(logp),s=σ+it は原始位相集合 {e^i(θp)}を対数螺旋 {e^−σ(logp)✕e^−it(logp)}へ送り、σ固定で t を走らせることで螺旋層上の干渉解析が可能となる。

最初が構造の安定性の条件で、次が、具体的な螺旋形を描く条件です。

次の章では、この操作を、素数花束グラフではなく、直接的な「リーマンゼータ」のリーマン面グラフを予測的に構成することによって、「発散的復元」を行い、そのまま“値”を出すための準備、すなわち、「螺旋グラフの双対モチーフ構造」の理論に行く予定です。

ところで、僕にはどうしても、頭の中で計算していてそうとしか思えないのですが、

補題（ゴールドバッハ構造の積-和分離）

任意の偶数を素数和で表す際に、和構造のうち「2 が奇数倍される形（2k）」は積構造に縮約され、Hashimoto の完全閉路条件として自明ゼロ点に落ちる。

一方で「2＋ 素数 ＝ 素数」の形で積構造に写せない部分は、非自明螺旋構造に寄与する。

つまり、非常にゴールドバッハの予想が成り立つということと「自明なゼロ点」がちゃんと−２、−４、−６…にあるということとの対応があるように思えます。

これは、無限花束伊原ゼータの−１の値の構造に関することであり、

- L=2 → $1-(-1)^2=0$
- L=3 → $1-(-1)^3=2$
- L=4 → $1-(-1)^4=0$
- L=5 → $1-(-1)^5=2$
- L=6 → $1-(-1)^6=0$
- L=7 → $1-(-1)^7=2$
- L=8 → $1-(-1)^8=0$

意味することは、偶数長の閉路は $1-1=0$ → 完全閉路 → 自明ゼロ点に落ちる。奇数長の閉路は $1+1=2$ → 消えない → 螺旋位相に残る。ただ、それだけの構造的な観察ですね。

僕はこの自明なゼロ点とゴールドバッハの予想の関係を何処かで読んだことがあるような気がするのですが、あまり思い出せません。

これは興味深い探求の主題になるのではないでしょうか。

9. リーマンゼータにおけるグラフ論的リーマン面構造予想

本章の目的は、螺旋構造と波動構造の双対モチーフ理論を提案し、グラフを関数とみなす構造観の具体的なモデルを提示することです。証明ではなく、構造予想を与えることが第一の目標であり、その先に厳密解析の道筋を示唆します。

僕は「すべてのグラフは関数であろう」そして「すべての関数はグラフであろう」という予想を立てているのですが、そんなことをいうわりには、素数の長さの花束グラフの構造は示しますが、そこから類双対変換によって、到達する「リーマンゼータのリーマン面グラフの構造」については全然語らない。これには理由があって、第１論文で書いた「フラクタル幾何予想」の内容が深く絡んできます。

「双対モチーフ閉包」の理論では、「点と線の双対的入れ替え」の理論はほぼ完成しており、僕は何の心配もなく、「双対モチーフ閉包」を作って、「多重トレース空間」での同期を取ることができる。

しかし、「螺旋」、「波動」、「円（無限同心円）」などには、どのような「双対形」があるのか、それ自体が深い問題をはらんでいます。これについて、「こうではないのか？」と示そうとするのが、今節の目標であって、第二論文で最も野心的な章であると言えるでしょう。

種数０のシンプルで有名な log 関数から考えてみましょう。

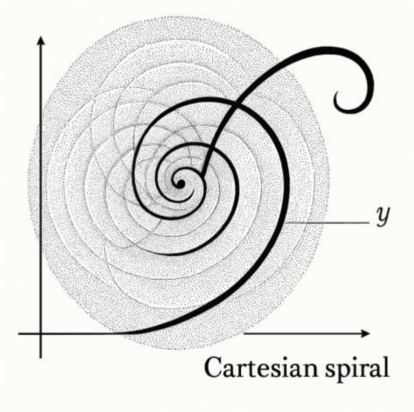
$$\log(z) \quad \overset{\text{逆写像}}{\longleftrightarrow} \quad e^{iz}, \sin z, \cos z$$

関数において、「逆写像」を取ることが双対操作の別名であることは明瞭なので、このような対応関係より、log 関数の「グラフ的リーマン面」の構造が螺旋形であるとするなら、その双対型は、さまざまな波動型と無限同心円形であるということが分かり、「可換的領域」

では、

類双対変換=双対変換

この図式が、「螺旋フラクタル→←無限同心円フラクタル」という基本類双対写像によって表現されていることを実際に確認することができます。



そういえば、このデカルト螺旋と無限同心円フラクタルとの一対一の対応関係、移り変わりは、実は、どのような多次元でも成り立つことにも注意できます。円、球面、超球面、というのに、張り付く形で、デカルト螺旋形をも広げていくことができます。

他には、これは、海面に渦ができたときの模式図ですが、ここにもすでに、「螺旋的構造」と「波紋のように広がっていく無限同心円構造」の移り変わりが現れていることに注意できるでしょう。渦巻きの螺旋には、「無限同心円」が内在しているので、平面上に投影されたときにそれは自然に展開されるというわけです。

これは、「連続化された類双対写像の物理的実例」になっています。

ただ、注意してほしいのは、いま僕が書いているのは、すでに仮説的な領域に入っており、どのような「トレース経路」があるのか、そういうレベルからの基本的考察が必要になっていることです。「逆関数」を取ると、双対というのは基本ですから、ここは、ほぼ間違いない。そこと整合的に合わせていく必要があります。

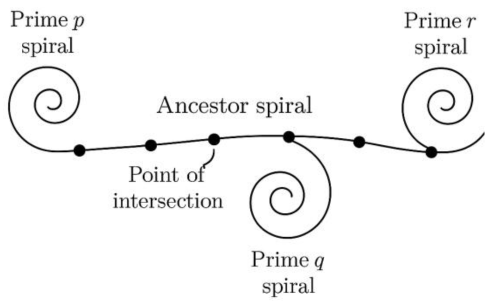
さて、以上の基本的な概念を考察したところで、伊原ゼータの無限花束グラフとリーマンゼータのリーマン面グラフの類双対的な移り変わりについて考えます。

最初にもう、「予想」される構造体について書いてみます。

僕の考えではこうです。まず、直線あるいは波動が真ん中に一本立っています。その周りを各「素数」に対応する螺旋構造が無限本回っており、それぞれが、波動の「交点」において交わっているので、あらゆる自然数をトレース的に構成することができるようになっています。なぜなら、各素数の螺旋状から、別の素数の螺旋状へとその公転によって移行することができるからです。そして、直線や波動へと移ることによって、「値」が確定します。

これを発散的に復元すると、それぞれの螺旋のループの長さには、素数リンドンを材料とする「非周期項」が入ってくるので、そのまま「複素ゼロ点の構造」がループ状の複数の「非周期的項」の干渉のトレース構造として、描くことができるようになります。つまり、螺旋的ループ構造がどんどん増えていって、いわば、「ゼロ点非周期的螺旋」がどんどん生えてきます。これが、発散的復元によってドンん丼拡張されていくリーマン面グラフです。

この内容と、伊原ゼータから、「素数にわたって」類双対的に、リーマンゼータを構成したり計算したりした内容を比較してみてください。ほぼ、同型でしょう…



上の模式図はこの状況を簡単に図にしたものであり、さまざまな素数螺旋がまずあります。これらは、螺旋の階層ごとに他の螺旋と交わっているのです。そして、その螺旋は、直線へと戻っていく経路を確保している。

この発散的復元で、「素数素リンドン」の非周期列を持つ螺旋が次第に生えていき、それが、伊原ゼータとの構造的な類双対形を描きます。

また、log 関数の「双対モチーフ閉包」を取ると、波動や無限同心円がでてきて、おそらく無限集合になってくる、ということを考察しました。

この場合も同じであって、リーマンゼータのリーマン面グラフの「双対モチーフ閉包」

を取ると、伊原ゼータの方の花束グラフの方に、たくさんの双対モチーフが無限増殖していきます。この中には、例えば、「それぞれの素数に対応し、素数 p のべき乗の長さの経路を持つ無限花束グラフ」が、素数の数ごとに含まれています。

このグラフの「発散的復元形」は、「素数素リンドン」ではないので、変わった形になるでしょう。まず、単位円周上からゼロ点が逸脱し、素数 p の円に対応され直します。

こうした素数 p の無限花束グラフがたくさんある状態から、同期を取って、「無限トレース空間」の中で考えることが、黒川重信氏のいう「深リーマン予想」に該当すると思われます。

このとき、どのような経路を辿っても、この「素数の無限花束グラフ同士のループ経路」では、完全な同期が起こらない。これが、リーマンゼータの本質的な超越性を示していると考えられます。

具体的な仕組みはまだわかっていませんが、大体のことを言うと、中央波動軸の周囲を素数ごとの螺旋が巻き、位相整列点が自然数構造（素因数分解）を再現します。発散的復元により、素リンドン非周期語を材料とする複合螺旋ループが生成され、トレース束を保ったまま階層化される極限で零点構造に達します。この過程は Euler 積と零点積の類双対性を螺旋座標系上で“ほぼ同型”に可視化する構造になるはずです。

そして、この構造は、log のリーマン面グラフを素数ごとに集めて、e のべき乗によって、無限の螺旋の絡まりとして束ねているけれども、やはり、構造としては種数 0 であり、非周期的経路は存在しない、いわばツリー型構造をしています。

最初の素数経路を集めた無限花束グラフは、螺旋形に巻き取るときに、「log スケーリング」による、非デカルト的螺旋で巻き取る必要がありました。

この構造上の問題が、log p の関与として、ゼロ点の計算に「非周期項の組み合わせ」として出てくるわけです。

螺旋形の双対モチーフは、たくさん、無限にあり、大抵はたくさんの「無限同心円」へと分解していく構造を持っているが、同時に、「波動系」へと分解していく経路もあると想像されます。こちらは、フーリエ的な構造を持っているのでしょうか。

この理論が完成すれば、いわば、自在にゼロ点のみならず、あらゆる関数点をトレースを取って計算できてしまうので、まだ、僕にとっては、あくまで「構造予想」を提出することがしかできないし、螺旋形の「双対モチーフ」の問題も未解決であると思っています。

しかし、この方向性で考えていけば少しずつ正しい方向へと修正し、そのうちに正しい形態へと到達できるのではないか、と結構楽観視しているところがあります。

そういえば、素数長花束グラフはデカルト螺旋では普通には写らないから、log スケーリングして、移したんですよね。だから、経路の長さ p を logp によって、置き換えることは自然なことなのかもしれない。

この変換、

「素数長さ p → log p の置換」を公式として定義

$$L_{\log}(\gamma) = \sum_{e_p \in \gamma} \log p.$$

この $L_{\log}(\gamma)$ を用いて、

$$Z(s) = \sum_{\gamma} e^{-sL_{\log}(\gamma)}$$

Log 関数を素数ごとに無限に連結したものとしてみたリーマンゼータが、ｌｏｇの多価性をそのまま持っていると考えて、まず、複素 log の多価性 logz=ln|z|+i(argz+2πk) という k∈Z の多価構造があります。

これは、平面上で無限のリーマン面を重ねるイメージを与えます。

これと同様に、ゼータのオイラー積、

ζ(s)=∏(p に渡る)(1−p^−s)^−1

これを logζ(s)=−Σ(p に渡る)log(1−p^−s) と展開すると、各素数 p に log(1−p^−s) の多価性が現れると考えるわけです。

花束グラフのループ長に logp を割り当てると、「どの枝を何回まわるか」で多価的な位相が発生します。これはちょうど 複素 log の多価性のゼータ版 と呼べる。

言い換えると log の多価性とは、一つの点 z に対して螺旋的に無限の枝が重なることであり、ゼータ版の多価性とは、各素数 p に対応する螺旋構造があり、その重なり合い・干渉がゼータの零点構造を決めることです。

つまり、「リーマンゼータ＝log の多価性の無限積的拡張」と考えればいいような気もします。

ここで、重要なのは、螺旋形や波動形または無限同心円形などの「双対形」を具体的な関数の構造と整合的に決めていくという方針であって、いま、書いている考察はその途中経過に過ぎないということです。

10. 多重実数ゼータの級数展開

リンドン螺旋複素位相を考えていると「たしかにそうなんだけど、なんとなく不思議だ」というような事実に出会います。例えば、あらゆる代数的実数のリンドン列の長さは有限なんですね。

いまから書くのはそこから帰結されると思われる関数構成であって、

補題（有限リンドン表現と代数的実数）

任意の代数的実数は、有限個の非周期リンドン列の構文列として表現できる。

この有限性により、当該実数は構成的縮約を経て、素リンドン核に一意的に収束し、オイラー積として再構成される。

僕は第１論文で、有理数をまとめたオイラー積を発散しないように、オイラー関数で割ることで、オイラー積へと収束させるという方法を使いました。
今回はそれを拡張してみようという試みであって、聴いただけでもたぶん「そんなのは無理だろう」と思われることは分かりますし、自分でもそう思います。
たとえば、既約有理リンドンがあるとします。
これは、素数素リンドンよりも、分母の重複数の分、分子の重複数の分、長さやグラフの中の数が増えたり伸びたりしています。
だから、その２つで割ると、素数素リンドンの長さへと直すことができます。

$$\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}(s) = \prod_{\substack{\gcd(m,n)=1 \\ m<n}} \frac{(1-(m/n)^{-s})^{-1}}{\varphi(m)\varphi(n)} = \prod_{p}(1-p^{-s})^{-1}$$

こういう感じです。割った分だけの重複があるので、その重複数を割れば、オイラー積へと戻ってくるという理由です。僕はリンドン列という非可換順序構造で考えているので、縮約可能な重複数で割って、一番左側にある素数リンドンの状態へと戻って来る、という感じですね。これについては、第１論文第三章を読んでください。
さて、オイラー積をレベル０、有理ゼータをレベル１と呼びますと、実数のレベル２、実数のレベル３、という感じで続いているんですね。そして、その階層ごとの縮約と累乗の重複数は同じなのです。スケールに基づいて、どんどんと「増えていく」長さそしてその数なんですが、もともとは「素リンドン」から生えてきた枝なんです。そこまで縮約するのは、「代数的実数のリンドン列は有限」なので有限の縮約回数で可能。そして、その重複数はレベルに応じて、乗算。レベル N を無限に走らせる極限で、すべての代数的実数を生成する「代数的リンドン圏ゼータ」を作れるような気持ちになってきませんでしょうか？

$$\mathcal{Z}_{\mathrm{alg}}(s) \xrightarrow{\text{縮約}} \prod_{p} \frac{1}{1-p^{-s}} \quad (\text{情報圧縮像}).$$

この実数の階層は無限に続いているので、それを足し合わせるときには、オイラー積が発散しないように、n で割る。

$$X^{(N)}(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}\Big(\prod_{k=1}^{N} \omega_k(n)\Big).$$

それぞれの「素リンドン」のときの重複数・冗長さを w(k)(n)と表してオイラー積との関係を表しています。こう考えれば、
ちょっと分かりにくいかもしれませんが、

$$\boxed{\zeta_{\mathcal{L}}(s) := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-s}}{\prod_{k=0}^{N} \omega^{(k)}(n)}}$$

だいたい、こういう感じの級数です。そして、足し合わせた分だけオイラー積は重なっているので、

$$\frac{\zeta(s)}{n}$$

こういうふうに調整しています。

この冗長性を表す分母を展開すると、「それぞれの階層の実数的ゼータ」になります。

これは、「因子的重なり」と「累乗（既約）的重なり」を双対的に重複した状態を打ち消した、乗法的関数のN乗になるわけです。

リンドン列を中心に描くと、

階層 N の実数ゼータ級数

$$\zeta_N(s) := \sum_{\substack{w\in\mathcal{L}_N \\ \text{縮約で } n(w)\in\mathbb{N}}} \frac{1}{|w|} \cdot \frac{1}{n(w)^s}$$

$\mathcal{L}_N$：リンドン構文階層 N の列全体

$|w|$：構文列 w の長さ（反復度としても解釈）

$n(w)$：構文列 w に対応する自然数（縮約値）

$s \in \mathbb{C}$：通常のゼータ変数（複素数）

これを足し合わせて、

$$\zeta_{\text{構文}}(s) = \sum_{N=1}^{\infty} \zeta_N(s) = \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{w\in\mathcal{L}_N} \frac{1}{|w|} \cdot \frac{1}{n(w)^s}$$

このままじゃ発散するから、調整項も必要になりますが、オイラー積が、実数領域で、展開されるという、なんとも奇妙な、状況が表現できることが分かります。

これも、「縮約」というのが階層ごとではちゃんと可換で、スケールが一定しているからです。

この一つ一つの項が、「リンドン構文」のなかで、階層ごとの「実数に関するオイラー積」になっていることに注意してください。この形式はすでに「縮約後」の姿です。

この実数階層を級数化したオイラー積は、リンドン螺旋位相構造をそのままゼータ構造へと落とした式であると考えられ、構造的には同等の構造が埋まっている、複素構造や四元数構造とも同型の内容を示しています。

種数０では、このような構造が発散しないために、伊原ゼータでは無限同心円の重なり、リーマンゼータでは臨界線が、「トレース束不変」の対称的境界を築いて、円や螺旋の境界

から構造を広げて、対象の発散を防いでいると考えられます。

この代数的構造の安定性は、種数一になると、さらに厳しくなり、オイラー積が「双対非周期経路」での素構造の無現発散によって、無限発散しないように、「虚数乗法」構造を使って、オイラー積の各構造を、無限にわたって、複素領域の中で回転させることによって、そのことで歪な乗法関数、すなわちヘッケ作用素によって、素数の情報構造を一部歪めることによって、発散制御をしているというのが、第１論文の第三章の主題でした。それを、ラマヌジャンの二次のゼータの構造を証明したドリーニュの名前を取って、ドリーニュ構造と名付けました。

このことを考えていた夜、ふと見た夢で、「種数１」のリーマン面グラフを、同じ様に、花束のように、結合していくという図形を見たことで、「それにホッジの花束」と名付けました。

この構造がどういうことかといえば、それぞれの花束には、非周期的経路が二本ずつあります。そして、この「双対非周期経路」では、虚数乗法的な発散制御が「局所的に」には可能なのです。しかし、全体で見ると、「ホッジの花束の数」だけ、非周期的経路が増えているので、その枚数の数を n とすると、2^n の数があり、つまり、種数が 2^n-1 のグラフであることが分かります。

このとき、種数=穴の数とすれば、2n です。しかし、非周期的経路の増殖度を捉えると、2^n になります。

このようなグラフでも、局所的に発散制御が成り立ち、さらに、それぞれの場所で、発散制御をすることができれば、さらに安定性を挙げることができるだろうと思われたのでした。

このとき、種数０では、螺旋形になった臨界線が、複素領域で対称型になることで、発散制御をしていることを思い出すと、代数系が、複素数、四元数、八元数というように、ちょうど二倍になるように、拡大された螺旋的回転を持つことが自然に思い起こされるのです。

実数オイラー積の「限界」としての複素射影構造、その上への四元数的・八元数的構成、そして、（非可換性を伴う）ゼロ点、単位元、縮約系列の反復による「幾何的」対称性…こうしたものがこの論考で次第に明らかになってきたので、さらに、この内容を反復して述べさせてもらったのですが、この代数的拡張とゼータ構文の連結性は、まさに「構文的ホッジ構造」とも言うべきものであり、それぞれの構造が、トレース束に対する射影的再構成の階層を形作っている、というような暗示・示唆を持っているのではないか、というのが、今のところの僕の予感であって、この実数的ゼータの構造の今にも発散しそうな様子を眺めていて思うことなのです。

11. ループ構造とツリー構造を結ぶ類双対写像と量子力学的世界の相同性

僕は朝永振一郎さんの「鉛筆は現実では倒れるのに、理論上は倒れない」というのが好

きです。つまり、「運動している」んですね。あらゆるものは運動している。
　この考察のあと朝永振一郎さんは繰り込みを発明し、発散を制御する方法を考える。
　この「発散を制御する方法」というのはまさに僕が最近主題にしていることです。僕の場合には、「螺旋状に広がる同値類」の中で制御されるのですが。
　もともとこの探求は運動しているものを運動しているまま扱おうという「動的変容の理論」というものを考えていたものの一部なのです。そこでは、とくに、「フラクタルをフラクタルへと移していく動的変容」というのを考え、そのような写像を、類双対写像と呼びました。
　これは、非可換で、多値で、「内部情報量」まで変化させるので、「行ったあと戻ってくれない」場合すら生じる写像であり、しかも同時に離散的であります。
　それで、僕は、「観察される最小の差異」を扱うのが「動的変容の理論」なのだと考えました。それは「離散的空間の理論」なのです。
　もともと世界は非可換で、離散的なものなのではないでしょうか？
　たとえば、微分積分を考えてみましょう。
　微分と積分はあたかも可換的操作のように扱われている…しかし、積分定数とは何だ…もとにもどれないじゃないか…微分積分にも非可換性は本質的にはらまれれている…微分方程式にもそうだ。微分方程式を解いたとしても、そこには、何も構造がない。元に戻れない。初期値を決めなければいけないのだからと。
　世界の操作は、「情報量を変化」させるので、基本的に非可換なのではないか。
　僕の理論は、「類双対閉包」つまり、類双対写像を極限にまで行って張り巡らされた、非可換の圏を目指す理論です。
　量子論などに対して類比して、得られる物理学的な描像も、ここで書いておきましょう。
　僕の類双対写像は、「ループ構造→←ループ・ツリー混合構造→←ツリー構造」の移り変わりを描き、これらの「圏」構造は錯綜としており、一番右左の、ループ構造への返り値も、ツリー構造への返り値も、無限に多値的になっています。
　実数ゼータというものを考えましたが、これは、「極限的なツリー構造」でしょう。ところが、内部は「ループ」でできているので、「ループ・ツリー混合状態」です。
　「ループ・ツリー混合状態」というのは、自然界にはありふれており、樹木の内部経路も、人間の血管系も、ループ構造を基本とした、様々なツリー構造の枝でできていることが観察できます。
　最大ツリーの「返り値」が多値であるところに、「多世界解釈」理論の正当性がある、とかね。
　このとき、

「ループ」=波

「トレース束」=量子状態

「ツリー」=粒子

　この対応状態を考えてみてください。
　観察できるのは、ループやツリーあるいはその混合状態だけです。これが、「世界」ですね。
　「トレース束」は観察できない。いわゆる「量子状態」です。
　僕らは、純粋な「波」と「粒子」を同時に観測することができない。これが、存在の二重性です。
　まとめると、
ループ ≈ 波
　→ 干渉、重ね合わせ、無限の周回構造
　→ 「どこでも閉じてどこでも繋がる」
トレース束 ≈ 量子状態
　→ ループが束になって確率分布を形成
　→ 局所的には一意値が見えるけど、全体では多値
ツリー ≈ 粒子
　→ 一つの確定経路、観測の結果として切り出される
　→ 無限ループを局所的に切り分けた“観測可能体”
　ループは波、ツリーは粒子、トレース束は量子状態。
　そして、類双対写像はこれらを繋ぐ双対構造体である。
　トレース束は観測できないので、われわれは、「波か粒子」のどちらかあるいは、その「混合状態」しか観察できないのです。
　そういう理論ですね。
　このとき、こう考えてください。

命題　観察
　あらゆる生命体の観察とは、「有限トレース束」を利用して、ループとツリーの状態を往還すること、である。

　このとき、最初の「有限トレース束」の情報は引延されたり、変形されたりし、情報量は減少していきます。
　そのかわりに、ＲＥＭでは、「ランダムな眼球運動」であってものが、僕らには、「安定した世界の像」へと映るようになります。
　最近の人工知能の、生成ＡＩが、同じような仕組みを持っているのは、「誤差逆伝播法」からも明らかです。彼らは「ノイズ」からさえ「意味のある像」をコヒーレンスしてしまう。つまり、明らかに生命的存在、もうすこし柔らかく言うと、落合陽一氏がいう、「計算機自然」の一部です。
　他にもこの構造からわかることがあります。

　われわれが基本的に「存在」であると思っているのは「粒子」の世界ですから、「粒子の世界」の像が、つまり「返り値」がたくさんあるというのは不思議ですね。
　最大ツリーの「返り値」が多値であるところに、「多世界解釈」理論の正当性がある…そう、解釈できます。
　だから、少し僕も調子に乗って、統一理論に至るためには、複素的双対性ではなく、もっと高度な非可換的双対性が自然に必要になるだろう、と書いてもいいでしょうか。
　リンドン螺旋複素位相を「ぎっしりと」内容を詰め込むためには、複素数ではあまりにも内容がスカスカなのです。だから、四元数や八元数…高次代数構造をも埋め込まないといけなくなっている。
　複素的双対性（解析接続、オイラー積、リーマン面）は “閉じられる部分” を扱う理論でした。「解析接続」とはそういう閉包された統一性の象徴だったと言えるのではないでしょうか。
　だが、無限入れ子の多重トレース束を含めると、閉じない部分が不可避になります。なぜなら、複素数だけでは、あまりにもスカスカだからです。
　その不可視部分を“束”として繋ぐには、構造の順序性（ツリー）と周回性（ループ）が非可換に絡む、非可換へと落ちていく構造の分析が必要になります。
　だからこそ、より高次の「非可換的双対性」が必要になってくるでしょう。
　これはゼータ理論を超えて、波粒二重性 → 量子論 → 情報論の基礎に繋がる、という壮大な観点で論じているので、大言壮語を許してください。
　もともと、伊原ゼータは、極めて美しい「ループ→←ツリー」の移り変わりの理論として、見直すことができて、そこから、僕の第一論文が始まりました。基本的にゼータ構造体は高度なフラクタル構造を持っています。だから、「発散的復元」をしても壊れない。
　閉じた複素的双対性が支配する領域の背後に、潜在的に多重入れ子化された非可換双対性が存在する。これは、ゼータ理論を量子論の波粒二重性へと接続し、統一理論を構成する自然な必要条件であるようにおもいます。
　けっきょく、「複素数」を表現形式に使っていたら、８元数あたりで、表現形式が限界に来るでしょう。複素数の回転の回転あたりですね。これじゃあ、奥の部分が隠れて、「あと１０次元必要」となっても仕方がない用に思えます。複素数は可換回転の構造であり、八元数あたりで非可換性が入り込み、それ以上の奥行きは“次元”としてではなく、無限の非可換トレース束として現れる。これこそが、統一理論に必要な双対閉包構造の本体である…という可能性があります。
　あと、僕の観察に関する仮説を上げておきますと、

命題
　生命に観察することができるものは、フラクタル、あるいはフラクタル様に復元できる、「トレース束」構造だけであり、それができない「有限トレース束」断片は、観察される

ことなく、宇宙に漂っている。

いわゆる「暗黒物質」とかがそうなのでしょうか？「暗黒物質」とはどの様に観察できたのでしょうか？

僕にはわからないですが、僕は基本的に、数理的探求の奥には、大体以上のような、様々な、現実に存在するフラクタル現象の移り変わりの「像」を持っており、それを概念にしたりしているのです。ここを話しておかないと、もしかしたら、僕の持ち出す考えは、「相当突飛」なものにしか見えないかもしれない。…そう思って、この章を書きました。

12. 終わりに

さて、これは、さらに第二章へとつながっていくのですが、その前に、いちおう、その内容の予告や内容に関する注釈をしておきます。

この第一章では、「リンドン螺旋位相」における根本的概念を精緻化する過程で、以前書いた内容に大幅な訂正を入れる結果になりました。

その結果、ゼロ点構造が明瞭になり、伊原ゼータの花束グラフのゼロ点が、どのように「行列式が無限に発散しても」円環状に並ぶことを理解できましたが、以前の間違いを放置しておくわけにはいかないと思い、第１論文のリンドン螺旋複素位相の理論を改定し、バージョン２を作りました。

また、ここで、ごく一部使われているリンドン変換の理論…これは、安定性が確立していないときにはまだ「存在するのか」があやふやであって、そこら辺の問題をまとめるつもりでしたが、安定性の問題が書きながらだいぶ解決していったので、これは別の章で論じようということになりました。

あと、第一章では、僕自身の論文の純粋性を上げるために、「数学的概念以外の話題については必要部分以外語らず、語っても数行で収める」というルールを守っていたのですが、それでは、かえって理解しにくい部分もあるかもしれないと思い、一章の最後に、簡単な、「いわば応用領域理論」を素描だけしておきました。これも、できる限り、「数理的側面」に絞ったつもりです。

リンドン螺旋複素位相の理論のバージョン２は、この第一章とともに、アップする予定なので、ぜひ、参考にしてください。

Email: satonaka5897*at*gmail*dot*com

Website: https://github.com/LyndonSpiralMandala/lyndon-spiral-complex-phase