類双対写像とフラクタルの理論

本田浩樹
2025年7月

序章　リンドン複素螺旋位相の理論（ver2）

リンドン列複素螺旋位相の理論
――F_1幾何的原理による数の階層構造

1.　はじめに

この文章は、「入門編」「応用編」「リーマンゼータの論考」へと続く論考にかかれてある理論の、さらなる入門編、あるいは用語解説集のようなものです。

僕は、まず、「リーマンゼータのゼロ点」とは、復元される非周期列が「素リンドン」であることを理解しました。

その事を考えていくうちに、リンドン複素螺旋位相、すなわち

「無限（有限）のあらゆるリンドン列」→「螺旋的に回転する複素平面」

この「埋め込み構造」対応構造、つまり、連続位相構造を発見したのでした。

ところが、思いの外に、この概念は、理解がしにくいということに気づくのに、非常に一ヶ月もかかったのです。

本当は、「ちょっと分かりにくいから一・二ページで解説を書こう」と思っていたのですが、より細かく詳しく、説明する義務を感じました。

　そこで、ここでは、少し細かめに、そして具体例を出して、説明し、また、もしかしたら「定義がひとには不明確かも？」と思った用語の説明もしてあります。
　この「入門」は、誰でも、リンドン半群の構造から、まず、整数の素因数分解から出発して、有理数・実数・複素数を越え、四元数・８元数・１６元数の非可換・非結合な破れた領域にまで一気に到達できる手法を示したものです。
　すべてがフラクタル的に進んでいきます。
　つまり、「情報をどう圧縮して、意味のある情報を取り出すか」という方法論になっているということです。

バージョン２　リンドン螺旋複素位相に関する探求も進み、最初に書いた内容には誤りや極論が含まれていることが次第に明らかになってきました。また、明示的に存在や安定性も証明されていない。バージョン２ではそこら辺を訂正し、より安定した構造を提示しつつ、同時に、入門編であるスタンスを崩さないように記述するつもりです。

2. 第一原理　リンドン語は一意的に分解される

　リンドン列は、半群と言って、順序性がある、いろんな要素の並びです。
　たとえば、

（０１）（０１）

　というリンドン列があったとします。後で説明しますが、（０１）は素リンドンと言って、これ以上縮約できない「リンドン列における「素数」」であって、あらゆるリンドン列は、「素リンドン」列に、「一意的に」分解できる、というのがリンドンの分解定理です。
　たとえば、でたらめな列を考えましょう。

０００１００１０１０１０１１０１０１００１０００１０

　これを「素リンドン」に一意的に分解できるなんて、信じられないと思うでしょう。
「素リンドン」というのは「周期性を持たない最小の数の組み合わせ」です。
　しかしそれが可能であるというのが、リンドンの分解定理です。

図 1. Duval 分解

与えられた列

```
0010010101011010100100010
```

を **Duval アルゴリズム**に基づいて一意的に **素リンドン語**へ分解

```
['00100101010110101', '001', '0001', '0']
```

そして、素リンドンの長さにはあらゆる自然数の長さが少なくとも１つ以上含まれます。

つり、任意の自然数 N≥1 に対して、長さ N のアルファベット列の中には、少なくとも１つの素リンドン語が存在します。

図 2. 素リンドン列の長さ

長さ N	素リンドン語（例）
1	`0`, `1`
2	`01`, `10`
3	`001`, `011`, `101`, `111`（ただし素なもののみ）
4	`0001`, `0011`, …

神秘的としか思えない状態です。

この一意的に分解するアルゴリズム自体のシンプルさも驚くべきほどであり、ただ、１、左から順に見ていって、最大の非周期列を取り出す。２，その次それを取り除いてから、同じように取り出す。これを繰り返すだけです。

最初に書いておきましょう。

すべての存在する素リンドンはまず、「単位元」＝１である！

単体で存在する「素リンドン」は、リンドン列の中の素数、そして単位元です。

この「素リンドン」単体では「単位元」である、「１がたくさんある」という状況には違和感を覚える人が多いでしょうが、複素構造を論じるときに、ある程度納得できるようになると思いますので、そこまで我慢してください。

ここでいきなりその定義に矛盾するかのように見える新たな規則を考えます。

素リンドンの長さ　→　自然数

こういう対応関係です。
ただし、最初に考えた、この（０１）（０１）は、

（０１）（０１）　→同じ反復のリンドン列は縮約可能、なぜなら、長さ２と、その反復数２が一致するからであり、（０１）と同値になり、これは単位元であるから値“１”の自然数

これが、「情報の縮約原理」です。
つまり、素リンドンの組み合わせは自然数ですが、素リンドン単体では「単位元」としての働きしかなく、また「長さ」=「反復数」のときには縮約されて、ふたたび単位元に戻ってしまいます。
このときに、順序が破壊されて“値”が出ることに注意です。
いわば、「順序性の縮約」が、最初の縮約です。

図 3. 縮約の順序性

```
(123)(123)(123) → (123)
```

この場合は、“長さ”３と“反復数”３が被っているために縮約可能です。
これも、「単位元」（１２３）へと返っていって、値は“１”です。
このような縮約が許される構造は、「乗法的」には問題がないが、「加法的構造」は一部壊れていて、順序性を失い、それから後で復元される必要があります。
つまりこれは、F_1的構造のようなものと関係しています。
さらに、
　素リンドン列の”長さ”と”反復数”の重複 → 情報の重なり → 圧縮
　構造の繰り返し → 縮約写像で潰れる
これは、**F_1上のモノイド代数的な振る舞いとして捉えることができます。**

3.　自然数の構成

素リンドンが組み合わさると「自然数」ができます。
注意するべきは、「自然数」には素数に順序構造がないですが、素リンドンには順序構造があるということです。「素リンドン」は無限個あって、一意的に分解できる。
しかし、「素リンドン」が並んでいるだけでは単位元が並んでいるだけであって、そもそも「自然数」が発生しません。
たとえば、（２３）（５６８）（２３）というのがあったとしたら、順序性が壊れるから、１×１×１に返っていく。つまり、１という”値”になるのですが、その順序が変わって

も、やはり、同じ「同値類」です。
　このように、あらゆる「自然数」の長さの「素リンドン」があるのですが、素リンドンは単位元へと返っていきます。
　では、自然数が発生するのはどのような場合でしょうか？
　長さが３の「素リンドン元」を３と表記しましょう。
３→単位元　３３→3/2　３３３→単位元　３３３３→3/4
　このように、長さ３の素リンドンも通常は単位元であり、さらに、反復数が３の倍数のときには、同じ様に、単位元へと返っていきます。
　しかし、３と「反復数」が互いに素であるとき、「既約分数」が生まれて、「既約分数」への縮約が生じます。
　素リンドン列の”長さ”と”反復数”の重複が、なぜ、縮約されてしまうのかと言えば、長さ３の“素リンドン”の３の反復は、自然数でもたとえば３✕３と３+３という重なりのせいで、３の「無意味な反復」は３に縮約されてしまうんです。
　では、自然数の「３」はどうやって表現されるのか？ここが重要なポイントです。
　素リンドンはすべての自然数の長さの素リンドンを含んでいますので、６の長さや９の長さの素リンドン元があります。
　６の素リンドンの二回の反復=6/2=３
　９の素リンドンの三回の反復=９/3=３
　つまり、「３」という値は、このように、別の素リンドンの反復状態として、復元されているのです。
　３+３もこのように、「既約有理リンドン」のなかで復元されます。
　もう一度いいますと、６・９の長さの「素リンドン」元の反復で「３」は、一応、それを別様に表現できる。とはいえ、後で述べますが、実は、「既約有理リンドン」のなかに、６/2 が存在しているので、「既約有理リンドン」のなかで、３（素リンドン）+３（反復）は復元されています。

4.　分数、既約分数の構成

　僕は最初、「N縮約可能」と呼んでいましたが、それは異様に分かりにくいらしく、こういうことです。
　（２３）（５６８）（２３）というリンドン語があったとしたら、これはすべて単位元なので、“１”になると言いました。
　だから、２✕３✕２というのは、それぞれ、「既約有理リンドン」としての２，３，２で表現されます。たとえば、4/2, 9/3, 8/4 などですね。
　たとえば、長さ１２の素リンドン元が五回も続く次のようなリンドン列は、

（２３５６８３４５２５６１）（２３５６８３４５２５６１）（２３５６８３４５２５６１）

（２３５６８３４５２５６１）（２３５６８３４５２５６１）

これは５が、１２の倍数でもないので、縮約できません。
いわば、「構成要素の長さの積（たとえば 12)」が、反復回数（ここでは 5）との非整合性によって既約比率として確定するというわけです。１２と５が「素」であるということによるのです。
よって、12/5 という既約有理数へと“値”を返します。
このとき、あらゆるリンドン列は、素リンドン分解によって、「既約有理リンドン」への一意的な縮約を持ちます。つまり、「反復状態は新しい値を伴って」変形される、んですね。つまり、リンドン列は、新しい「既約有理リンドン半群」への一意的な写像を持ちますし、変形可能です。

定理
リンドン列は、新しい「既約有理リンドン半群」への一意的な縮約写像を持つ

また、ここに来て、「既約反復されているリンドン列」の並びがあると、それは加法になります。

ここで、ちょっと注意したいのは、長さ１と長さ２の素リンドン元の特殊性についてです。
長さ１の素リンドン元は、同じ要素が続いたら縮約されるし、異なる要素が続いたら、「素リンドン」ではなくなるし、つまり「既約写像」を持ちえません。ずっと、単位元です。極めて特殊ですね。
長さ２の素リンドン元も変わっていて、２単体では、単位元だから“１”なのですが、２２のように二回反復しても、長さ２の２回の反復だから、単位元に戻るんですよ。だから、難しい。２は特殊元なんです。三回目の反復でようやく、2/3 という既約状態になります。
３のほうがわかりやすい。

リンドン語の加法の定理
加法とは、リンドン語が並んでいることである。

ここで、「３+３=３」というような縮約が復元されていることに注意してください。

図 4. 加法的縮約

$$3+3=\frac{6}{2}+\frac{6}{2}=\frac{12}{2}=6$$

このように「既約有理リンドンの並び」として復元されているのです。ただし、６は、長さ６の“素リンドン”元です。６を含むような反復を２は持つことができない。約数に過ぎないから。ただ、ここで注意しておきたいのは、「加法が並びによって、足し算になるのは、ずっと後のこと」なんです。

実数のときに説明するように、まず、「累乗縮約」があって、その過程を経てから、ようやく「加法」になります。つまり、「乗法」→「加法」という順番になります。

ここでは特殊な例を上げています。

つまり、「加法の順序性も壊れている」から後の復元で大丈夫になります。

このとき、「さきほどは因数分解のように「積」として考えなかったか？」と思った方もいるでしょう。だから、まず、既約性へと縮約するために、「積」をとり、その後残った「既約要素」が加法になるんです。それはあくまで、「復元過程」のときに起こるのであって、最初は、積も和もない、ただの「順序集合である半群」です。

ちゃんとリンドンの分解定理をして、「積→和」の順に復元すれば破綻しない。学校数学でもよくあることです。

元	単体	反復	含意
2	単位元	222 → 2/3	-
3	単位元	33 → 3/2，3333 → 3/4	-
4	単位元	44 → 2，444 → 4/3	4 の反復が 2 を生む

長さが２であろうと３であろうと４であろうと「素リンドン」単体では、単位元です。しかし、表にあるように、「自然数」は「合成数」の「既約縮約像」として存在しています。これに注意してください。

４も素リンドン単体では単位元です。しかし、４４は、２ですし、４４４は、4/3 です。

5. 実数

いまから扱う全記号は「既約有理リンドン」であると思っていてください。

さっき書いた定理により、「既約有理リンドン」の集まりをまた、一つの新しい「リンドン列」としてみてよいということになります。なぜなら、あらゆる与えられたリンドン列は、「素リンドン分解」→既約有理リンドン縮約写像→「新しい“既約有理リンドンによる”リンドン列」によって、変形可能であるからです。

あらゆるリンドン列は「一意的」に「既約有理リンドン列」に縮約できます。この変形

によって、既約的反復要素は、冗長さを取り除かれます。
　とすると、既約有理リンドン自体も無限個あるので、それ自体を「リンドン語の要素」としてみることができるので、リンドンの分解定理で「“素”既約有理リンドン」へと一意的に分解できます。
　とすると、既約有理リンドン自体の組み合わせを、前と同じように、縮約できますね。
　しかし、やはり同じように「素既約リンドンの組み合わせ」が、その「素既約リンドン」の長さと素でなければ、縮約できない。逆に、縮約できないときには、その素既約リンドンの反復数は、**反復数の累乗根になります**。
　だから、たとえば、黄金数は、

一のリンドン、ルート５のリンドンの並び（加法）の二回の反復

　で表現できます。
　つまり、代数方程式の解はこのやり方ですべて表現できます。
　このようにして、その操作は無限に続いていき、また縮約された「累乗根リンドン」を「素累乗根リンドン」へとリンドンの分解定理によって、一意的に分解できる…の繰り返しで、実数が構成されていきます。
　つまり、**どんどんと「累乗根」が重ねられるたびに、新しい「リンドン半群」への縮約写像が一意的に定義されます**。
　このたびに、新しい冗長さが取り除かれて、次第に、無駄のないリンドン列に変形されていきます。
　このときに注意しなければいけないのは、さきほどは、「素リンドン」の“長さ”で反復数と比較しました。
　ところが、今度は、長さの単位が変化して、「素既約有理リンドン」の“長さ”によって累乗が重ねられることになります。
　この「縮約階層ごとに縮約のスケールが変更されること」を「階層的縮約の原理」と呼びます。
　それが、「多周期フラクタル」のように、異なる要素が重なっていく反復状態になってしまうと、それは縮約できません。非可換になってきて、累乗根は簡単に解けない。
　それが実数です。

図 5. リンドン実数のイメージ

たとえばこういうものを思い浮かべる

$$x=\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{7+\cdots}}}}$$

または、もう少し数論的に：

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt[5]{3+\sqrt[7]{5+\cdots}}}$$

理論の語彙で言えば

「入れ子になった**既約有理リンドン列**の非周期列」

「縮約不可能な素構造の密な重なり」

「式として”定義できる”が、解析的には閉じない値」

このような累乗根の入れ子構造を見ますね。

このような累乗根の重なりは僕らは「実数」だと分かっているけど、実際にはどのような「実数」の“値”なのか理解していません。同じように、多周期フラクタル的に、入れ子状に累乗根し、その反復数によって、入れ子状になった数を累乗根のように見なすと、同じように、「実数」へと“値”を返していきます。

ここで、注意しておきたいのは、素リンドンの反復は縮約されるけど、既約有理リンドンや実数リンドンは繰り返されても、「既約なら意味を持つ」ということです。それは、それぞれ、有理リンドン列や実数リンドン列の「累乗」へと返っていくのであって、消えるのではないです。つまり、「累乗算」になる。そして、「既約ではない有利リンドンや実数リンドンの並び」、これは、「有理数が整数になる」「実数の累乗根が解ける」状況に相当します。並んでいて、それがどのような縮約可能な周期性にも縮減できない場合には、それが実数です。

実際「素リンドンの反復」が「単位元」へと縮約されるのも見ました。この繰り返しが続いているんですね。

ここで、注意するべきは、このような「多周期フラクタル」的な準周期的「非縮約構造」はやはり例外を除いて「**有限の**リンドン列」であることです。

つまり、「無限反復構造」を持ち得ます。

この、リンドン半群の、リンドン半群への縮約写像というものが、一意的にずっと続いている入れ子状のフラクタルとなって、「値」を細かくしていっていることに注意してください。**スケールが上がると値が細かくなる…情報論の原理**ですね。

あと、代数方程式の解が代数的閉体内にあるなら、必ず有理化可能です。このことから、つまり無理数でも有限ステップで根号を潰せるということで、代数的数は全て、この方法で表現可能です。

以上のことをまとめると、
自然数リンドンの反復→割り算
既約有理リンドンの反復→累乗
そういうもの（既約状態）が並んでいること→加法
加法的構造が反復→割り算
加法的構造が既約有理である状態の反復→累乗

ただここで注意しておきたいのは、あらゆる縮約写像をやりきったあとに、「乗法→加法」という構造が生じるのであって、このとき、やはりマクマホンの、素リンドン分解の一意定理が活躍します。

図 6. リンドン列の種類

リンドンの種類	例	繰り返しに対する振る舞い	解釈
素リンドン列	`(0101)`	繰り返しは**冗長 → 縮約される**	構造単位そのもの。情報の最小単位。F_1的縮約
既約有理リンドン列	`(01)(01)(01)`	繰り返しが**比率的 → 意味を持つ**	有理数としての「反復構造」を保つ（3回なら3/1）
無理数（実数）リンドン列	`(01)(011)(010011)…`	既約有理リンドン列が「既約」な「反復を持っている状態」=累乗	ズレが累積し、縮約不能な実数位相へ
超越的リンドン構造	混合・入れ子・自己非縮約列	無限の入れ子 → 完全に縮約不能	高次の情報構造、複素・回転・多価性を形成

すべてが「情報論」的に構造化されていることに注意してください。

6. 複素数

おそらく、この話をきいていたら、いちばん「なんでそうなるんだ？」と思う人が多いのは、複素数ではないでしょうか。

いまから、要素とするのは、自然数リンドンでも、既約有理リンドンでも、実数リンドンでも構いません。

そして、それらの要素が、「非周期的」に並んでいたら、その「非周期的な列」自体をひとつの“値”としてみることができるでしょう。

つまり、「非周期列」の入れ子構造です。

この**入れ子構造も「半群」なので**、リンドンの分解定理によって、一意的に分解されますね。つまり、それは、「入れ子的に実数構造まで持ちうる」ということを先程までの考察によって言うことができますので、この高次の入れ子構造は自然数、既約有理数、あるいは実数の“値”を持ちます。

定理
　あらゆるリンドン列は「非周期性の非周期性」という形の縮約写像を持ち、それは一意的である。つまり、「任意のリンドン列」→「非周期性の非周期性」による縮約→「新しいリンドン列」という写像が一意的にあります。

　さて、「非周期性の入れ子なんてものが存在するのか？」と思った方もいるでしょう。
　そのような入れ子構造が存在し、実際に構成できることを証明します。
　まず、リンドン列があって、それをマクマホン分解します。
　素リンドンに分解されたのですが、しかし、その素リンドンの並びには、大量の冗長さがあるので、これを、既約縮約、累乗縮約を繰り返し適用することによって、そのような冗長な反復をすべて取り除きます。
　この結果、「あらゆる反復を含まない完全非周期列」を構成することができるでしょう。
　ところが、この「完全非周期列」は必ずしも「素リンドン」ではありません！

命題　非周期性の入れ子の存在定理
　リンドン列に既約縮約・累乗縮約を行い、冗長性を完全に取り除いた、「完全非周期列」は必ずしも素リンドンではないので、一意に「素リンドン分解」して、複素構造が存在しうる。
　完全非周期列が「素リンドン」である場合、それは、実数である。

　よって、「完全非周期列」はマクマホン分解によって、一意に「素リンドン」へと分解されます。
　このとき、「完全非周期列」=「素リンドン」である場合、数字は、実数で決定されます。さらに、ここで注意して置かなければならないのは、この完全非周期列が素リンドン分解された、この下部の実数構造の中で、「乗法」部分と「加法」部分が完全に決定されて、実数値が出ることです。
　ところが、この「素リンドン」分解には、上部構造があって、それは再び、ある長さを持つ「素リンドン」で構成された新しいリンドン列です。これは実数構造は持っていない。ふたたび、「素リンドン」構造へと還元されている。
　これが複素数です。
　複素数は一度決定された実数構造へと関与しません。
　そのかわり、そこにある「素リンドン」の長さに応じた「回転」を行います。
　ここで重要なのは、ただ「素リンドンが並んでいるだけ」では、それはいかなる回転も産まないことです。なぜなら、「素リンドン」=単位元だから。
　そして、複素素リンドンは、それぞれの長さに応じて、たとえば、長さ２の「素複素リンドン」は二回繰り返されると元の実数へと戻す。そして、三回繰り返すと１８０度回転

させます。

つまり、長さｎの「素複素リンドン」は普段は単位元として何の作用も持っていませんが、反復されると、一のｎ乗根として、回転運動をそれぞれ起こします。

この回転運動もまた、既約縮約や累乗縮約によって、しだいに「細かい回転」へとスケーリングされていきます。

これを繰り返していって、冗長性が完全にない「複素完全非周期列」になると、またマクマホン分解によって、ある回転実数値へと“値”を返すでしょう。

これが、複素平面におけるリンドン螺旋回転です。

基本的には、下部の実数構造を、延々と螺旋状に回転させるスケーリングを持っています。

そして、ただ、複素構造の中に、「素リンドン」がなんの反復もなく並んでいるだけでは回転は起こりません。冗長な反復があるとすぐに回転を起こします。

これが、複素数であり、自然数リンドンでも、既約リンドンでも、実数リンドンでも、その値に応じて、その素リンドンの長さがｎであったら、ｎの累乗根の角度として、その「非周期的入れ子」の半群が示す「実数」の値で、回転させます。この「非周期列」の入れ子は、無限に続けられることに注意してください。つまり、この回転は永遠に続くし、ずっと螺旋状に、複素平面上を回転し続けます。

これが、僕が言う、「リンドン複素螺旋連続位相」です。

つまり、実数自体の上部構造が「非周期列」をなしていたら、それが複素平面上の回転になりますし、別に、自然数リンドンであっても回転します。

これが、複素螺旋平面です。

そして、この「非周期列の非周期列的入れ子」状態も、「有限リンドン」でありうるし、「無限リンドン」でもありえます。

この概念から、逆に、「負の数」というのは、なかなか在り難いものであるということが理解できるでしょう。実際、ゼータ関数に「負の値」が出るときには、螺旋状に、「発散が縮約」されていると見ることができます。

この恐ろしいほど入れ子状になった、半群の入れ子構造と、マクマホンの連続写像は、美しいほどではないでしょうか。

ここで、「複素リンドン構造が実数リンドン構造に規定されているのなら、表現の自由度がないのでは」と思った人もいるでしょう。

しかし、自由度はいくらでも挙げることができます。

というのは、「素リンドン」が無限にあれば、素リンドン自体にはなんの作用も持っていないので、実数領域でも、複素領域でもいくらでも拡張できるのです。

命題　リンドンの表現の安定性

「素リンドン」は単体では単位元として何の作用を働かないので、リンドン列の表現の

冗長性はいくらでも挙げることが可能である。

7. 発散的復元　そして、超越数

このような「複素螺旋平面上にプロットされたリンドン列」が「無限反復」していたときに、その“値”は、返っていきます。

たとえば、ループが２つあるグラフがあるとします。

すると、そのループに、０，１と数字を付けて、あらゆるグラフ上の無限のトレースを取ると、その「０，１」から作られるあらゆる「リンドン列」が生成されます。

このような、「発散的に作られた列から“非周期列”を取り出して、“値”を出すこと」を「発散的復元」と呼びます。

このとき、通常、「グラフの構造を変化させる」ことに注意してください。

「トレースを集めて束ねたトレース束」を変えない特別な「発散的復元」が存在し、これが、重要な性質を持っていることが示されます。

つまり、グラフのトレース束は、そのなかに「無限反復」を持っている場合には、その「有限リンドン」の“値”を返しますし、「無限反復」ではないものがあっても、「超越数」を返します。

超越数はいかなる有限の縮約法でも縮約できないものです。つまり、

複素リンドン→実数リンドン→既約有理リンドン→自然数リンドン

こういう「縮約」を定義できますが、このような有限の縮約でいかなる「有限の長さのリンドン列」にもならないものを、「超越数」であるとします。

図 7. 入れ子構造の反復による回転

対象	リンドン構造	幾何的意味	結果
実数 r	有限リンドン列 L_r	点の集合（直線上）	実軸上の数
非周期的な L_r の反復	入れ子・ズレのある列	螺旋構造を作る	回転 = arg = 複素数
回転構造	実数 × 方向	単位円周上の点	複素数

ただ、ここで注意してください。

超越数は、「有限の縮約によって縮約可能ではない」というだけであって、既約縮約も累乗縮約も可能です。さらに、「完全非周期列」を取り出して、高次の「非周期列の入れ子」を取り出すことも可能です。

ただ、どのような縮約をしても、それが無限列であるところは変わらない。

あらゆる冗長性を取り除いたときに、「超越数同士」の乗法や加法が成立しています。

8. 解析関数

先ほどと同じように、ごく単純に、「２つのループ」があるグラフを考えます。

そのループを０，１と名付けます。

すると、このグラフのあらゆる無限のトレース束をとると、そのなかには、０００１０１００１０１００１０１０１０１…みたいな列すべてが含まれていますね。つまり、そこには、縮約すれば、かならず、リンドン列を、ある素リンドンを元にした、”値”としての解釈によって、「複素平面上へのプロット」が生じます。

同時に、**この「トレース経路」は、そのグラフの「双対グラフ」でも同じように同期して回っていますね**。

双対操作とは、簡単に言えば、「点と線」を入れ替える操作です。

この操作でグラフの構造は変わりますので、「トレース構造」も変化します。

つまり、さきほどの、０００１０１００１０１００１０１０１０１…とは異なった数字の列が出てきて、「素リンドン」構造も変化します。

すると、そのグラフでは同じトレースでも異なった数字がプロットされる。つまり、**「ある複素数値」と「ある複素数値」が一対一で対応するわけです**。これが、解析関数です。

グラフが存在するだけで、「解析関数」が「全複素平面上」で生じます。

この事実から、あらゆるグラフ構造から、あらゆる一般的リーマン面構造を取り出すことができますが、この説明と証明は、「入門編」の論考を読んでください。

図 8. グラフ的リーマン面の仕組み

```
（グラフ構造）
　　↓ トレース列
（リンドン縮約）
　　↓ ズレ構造
（回転角度）
　　↓ 複素点
　　↓
（双対グラフからもう一つの複素点）
　　↓
（z ↦ w の対応）＝解析関数
　　↓
（関数が重なり合っていく）＝リーマン面
```

9.　発散的復元

以上、説明したとおり、たった２つのループ構造があるだけで、そのグラフからは、「発散的に復元される」連続複素らせん構造があります。

これを、「発散的復元」と読んでいるわけです。

これとは別の意味で、グラフに内在する、「素構造の発散」もあります。

たとえば、ある２つのループに重なりがある場合、そのループの「どちらか」を通るかで、また、「０，１」という分岐が生じます。グラフの内部にあるということです。

この分岐のせいで、「トレース束」には、「０１０１０１０１０１０１００１０１００…」という構造が入ってしまって、結果的に、「素構造」の数が無限大になります。

このようなものをグラフの中の「非周期的経路」と呼んでいます。

この非周期的経路が２つある場合を「種数１」のリーマン面といいます。

あとは数え方はおんなじです。３つのときには「種数２」です。

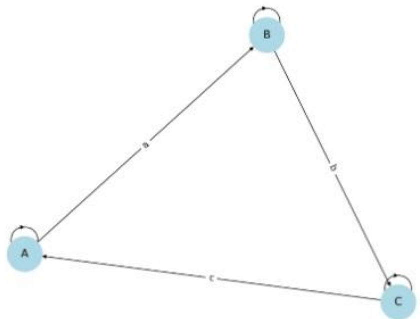
つまり、通常は、「ループ構造」には発散性はない。

しかし、「非周期的経路」があると、トレース構造には発散性が生じます。より複雑になるというわけです。だから、その複雑さの度合を「種数」という数字で表している。

このとき、通常の「発散的復元」とこのグラフ内の「種数+１」の「非周期的経路」による発散を、区別することが重要になります。

10. 双対空間の中での同期構造

図 9. 自己ループ付き三角グラフの例



こちらが、ごく簡単な**非正則グラフ**の例です。

🔍 グラフの特徴

- **ノード A, B, C**
- AとBには**自己ループ**（ラベル 0, 1）
- A→B→C→A のループ（非対称・異次数）
- C にも自己ループ（ラベル 2）

あるグラフがあるとします。

ＡとＢの自己ループは、それぞれ「0」「1」という素記号の生成元を持つとします。

A→B→C→A のルートは「a → b → c」の記号列として機能するが、Ｃにおける自己ループ（2）が非対称性と非正則性を与えます。

このグラフ全体から得られるトレース列は、たとえば、

００ａｂ１ｂｃ２２０１１ｃａｂ...

のような、周期性と非周期性が混ざった構造を生みます。

このような「自己ループ」構造を持つグラフの「トレースリンドン列」は、非常に発散性が高いことで特徴づけられ、また、「発散的拡大」のときの「不動点」の証明では重要になってきます。

発散的復元において「トレース束」の項ぞ雨を変えない不動点は、特別な解析関数の値を持っています。対称性を持っています。

一方、このグラフに対応する双対グラフを考えたとき、たとえば「0↔1」「a↔c」などの対応があるとすれば、同一トレース列が、別のプロット値を持ちます。

したがって、「一方のグラフ」と「その双対グラフ」の間で、同一トレース列に対して、異なる複素数が割り当てられます。

これはまさに、解析関数 $z \mapsto f(z)$ の定義です。

さらに、ループに含まれる素記号が複数重なって、縮約不能な非周期列が出現する場合、そのグラフは複素平面への一意的プロットを生みます。つまり、超越数まで含んで、あらゆる連続性を表現します。

11. 双対モチーフ閉包

ところで、「点と線を入れ替える」という双対操作は、実は一意的ではありません。

たくさんの点にたくさんの線がつながっているハイパーグラフになると、たくさんの入れ替え方があって、それぞれの入れ替え方をすべて書き出します。

そして、書き出したそれらの変形されたグラフをまた、「点と線を入れ替える」双対操作を取ります…という操作を続けますと、その操作は、（有限グラフの場合）有限回で終わり、完全に「双対操作」で閉じてしまいます。つまり、「モチーフ閉包」とはいわば「双対変形の「多値性」を「グラフの集合と集合との関係」に置き換える操作です。

別に、深く理解する必要はなく、たとえば、二次関数は値が一つですが、ひっくり返したら２つになるでしょう。これも双対変換（逆関数を取る）です。これはそれを入れ替えたらまたもとに戻る。けど、もっと複雑なリーマン面だと、自然に多値的になります。

つまり、同時にたくさんの複素数の“値”が対応するということです。

12. 「多重トレース」「多重トレース空間」

「多重トレース空間」とは、**モチーフ閉包全体における同一トレース列が、複数のモチーフ構造（双対も含む）で、異なる縮約・射影・素構造の解釈を持ちながら同時に進行す**

る（＝同期する）構造のことです。
たくさんの双対変形されたグラフがありましたが、その「点と線」は対応してます。
だから、「ある一つのグラフのトレースを取る」と、あらゆる双対グラフの中で、それと同期した「トレース」が走ります。
これが、「多重トレース」です。
そして、重要なことは、「トレース列」は、「複素螺旋平面上に点をプロットする」ということ。
ということは、この双対グラフの様々なグラフの形の中で、「異なる”値”」が同時に複素螺旋平面にプロットされます。
これは、「連続的」であって、というのは、「あらゆる複素螺旋平面上に、発散的復元されたトレース束」のなかのどれかのトレースは、“値”を持っています。だから、これらの変形の中でも「連続的に繋がっている」ということが分かるということです。
これが、グラフ的リーマン面、いいかえると、一般的リーマン面の解析接続の一意性です。「なぜ、複素数の領域にまで拡張すると、リーマン面上に解析接続されるのか？」という問い掛けがもはや必要ないことに気づくでしょう。
同じトレース列が、異なるモチーフ閉包（＝異なる素リンドン縮約構造）で、別々の意味構造を持つ。それぞれが異なる複素数 z_1，z_2，z_3… に写像され、それらの写像関係が、多価的写像（リーマン面）や解析関数系を生む。
この「多重トレース空間」概念が加わることで、グラフ的構造が、単なる写像生成だけでなく、「射影系」のような空間的な意味を持ち始め、関数空間が、モチーフ依存で生成される射影写像族になります。
ゼータ関数やモジュラー形式、保型性といった現象も、「多重トレース同期」のなかに異なる相貌を持って見えるようになってきます。

図 10. グラフ的リーマン面の構造レベル

構成レベル	名称	意味	主な構成要素
① ローカル	トレース列	グラフGの1つの経路	リンドン語列、非周期列など
② ミドル	モチーフ閉包	グラフGの双対グラフを考えることで、多値性を制御した閉包構造	点と線がそれぞれ対応しながら変形されたさまざまなグラフの集合体
③ グローバル	多重トレース空間	複数のモチーフ閉包（双対・派生）にわたるトレース列の **同期的構造**	同一トレース列の複数プロット、関数対応 (z ↦ w)

13. 一般的リーマン面は「貼り合わせ」ではなく「重ね合わせの必然」である
リンドン螺旋連続位相と「多重トレース空間」でのその「複素平面」間の同期構造があると、無限の非周期的リンドン列（＝構成密度のズレをもつ列）が存在します。
それらはそれぞれ、複素平面上の回転点（$e^{2\pi i\theta/n}$）（n はそのリンドン列の素リン

ドンの長さ）としてプロットされます。つまり、モチーフ閉包上の変形されたグラフのそれぞれで、”値”を持ちます。

さらに、モチーフ閉包／双対グラフが多数存在するため、同一列が複数のプロットへ写像されます（多重トレース）。

この多重構造の間に「自然な連続写像」（同期）が生じ、すると、**あらゆるズレが、自己同期的に補完され、あらゆるプロット間が、一意的に連続写像で繋がり、よって、複素平面は連結され、「隙間なく」被覆されます。**

これが「多変数関数における解析接続の一意性」です。

14. 高次代数領域へ

マクマホンの分解定理から、有理的縮約を通して、階層化し、さらに、実数をフラクタル上に、累乗根として、同じように、階層化し、「非周期項の非周期項」という高次の非自明な「リンドン半群」から、全く同じように、複素数が取り出され、螺旋形を描き、そして、その複素構造の「高次構造」からまた、四元数が取り出され、ふたたび異なる軸へと回転していき、それが十六元数へと続いて、しだいに、代数系は壊れていく…という、流れを、部分的に描きました。

詳しくは第２論文を読んでほしいのですが、ここでも、少し解説しましょう。

複素構造が存在しているとき、同じように、「非周期性の入れ子」に達すると、今度は、「複素構造を螺旋的に回転させる」という四元数的構造が始まります。

このとき重要なのは、この回転は、「実数構造を回転させるのではない」ということ。

四元数が回転させているように見える「実数構造」は、実は、「複素構造の螺旋状に復元された実数構造」なのです。

同じ様に、八元数が回転させるのは、四元数であって、複素数や実数ではない。ただ、そのように見えるのは、四元数の螺旋構造の中に、「複素数や実数構造」が、復元されている部分だけである、ということです。

このようにして、「穴」が広がっていく。

この「穴の広がり」がおそらく、非可換性やその他の代数的構造の破壊の原因だろうと想像されます。

十六元数では「ノルム性」が破壊されるといいますが、そもそも、実数構造を回転させ、そして、それが複素構造の中で復元されたものを回転させ…と続いていたものが、どのようにして、そこで途切れてしまうのか…これは、のちの研究課題でしょう。

15. 乗法も加法も順序性が壊れているが、後の復元で大丈夫になる

リンドン縮約構造において乗法や加法やその順序性がまず。存在し続けているために、一度、縮約写像によって、復元しないと取り出せなくなっています。

初期構造では加法は存在せず、縮約される反復のみが支配的です。

しかし、反復不能なリンドン構造、つまり完全非周期列がマクマホン分解されて、素リンドン列へと分解されることで、並列的に加法が“浮上”します。。

この加法は自然数の加算ではなく、階層的トレース・反復構造の再配置によって表出する。

よって、本理論における加法とは、構成的に再構成される

そういう、**非可換的順序構造である**といえます。

このなかに、「ゼロ元」があるのでしょうか？

ここで重要な示唆があるのは、複素構造を論じたときに、実数の上の複素構造に、ただ「素リンドンがなんの反復もなく並んでいるだけ」ではなんの回転も起こさず、ただの実数であったことです。このことを表現すると、

a+bi のときに、ちょうど、ｂ=０のことを示しています。

つまり、「素複素リンドン」自体は単位元です。回転を司っている単位元なのですが、これしか存在していないときには、回転が全く起こらないので、下の実数の階層では、「ゼロ」を意味するということです。

つまり、これを「単位元は下の階層ではゼロを意味する」という「階層的零元の原理」と呼ぶことができるでしょう。

おそらく、「素リンドンの無限反復状態」もゼロ元のような性質を持っています。ちゃんとしたトレース構造があるのに、それは、既約縮約も累乗縮約もできない。単位元なのか、既約存在なのか、決定できないということです。情報としてはなんの意味もない。ひとつひとつの「素リンドン」は復元されるまでは、ちゃんと単位元的な働きをしており、乗法構造を持っています。

復元されるときに「並び」が加法となります。

これは、乗法→加法と演算する順番が決まっていることに相当しています。

これが情報論的に自然で、フラクタル的です。

16. 最重要原理としてのフラクタル性　３つの原理

この体系の中で、あえて、僕が公理として挙げるなら、

１，マクマホンの一意性分解の定理

すべてのリンドン列は「素リンドン列」（長さすべての自然数の列を含む）へと分解される。

２，既約性への縮約写像の一意性

すべてのリンドン列は今ある状態よりも「既約」なリンドン列への一意的な写像を持つ。

３,「非周期列の非周期列」への縮約写像の一意性

すべてのリンドン列は高次の入れ子構造を持っていて、その入れ子構造の中に、「リンドン半群」としての縮約写像を持つ。

このみっつだけです。

複素螺旋連続位相はほとんどこの３つの原理の連続的な反復、すなわち「入れ子構造」でできており、それで完結しています。

特に、リンドン半群に内在する２つの種類の縮約写像、それを《リンドン二重らせん構造》と呼びましょう。

リンドン列が、既約的縮約系列と非周期入れ子的系列を持ち、それらが互いに同型でありつつ、非可換的順序構造を破るとき、このの構文構造をリンドン二重らせんと呼ぶことができるでしょう。

あとは、階層ごとに縮約のスケールが変化すること、階層ごとに単位元の意味が変化することなどに注意しておけば、合理的な、解釈や操作を考えることができると思います。

17. 双対リンドン列の存在証明

Duval 分解は左から行います。

しかし、右から行うこともできますね。

気になるのは、ある「素リンドン構造」の逆向きの分解の存在、いわば「双対リンドン列」の存在です。

その特徴付けをしましょう。

右側から切ると「異なる構文的最小単位」が現れる

右から切ると、例えば abcabc は左から見ると abc の 2 回反復だから abc が素リンドンです。

右から見ると、cba は abc と構文的に異なる可能性があり、しかも文字の順序が逆転しているので、違うリンドン列 として扱われます。だから「左分解」と「右分解」は双対。

左分解 = 正方向のトレース束 → 標準素リンドンへ縮約

右分解 = 逆方向のトレース束 → 双対素リンドンへ縮約

つまり、逆側のトレースを取ると、異なる素リンドン構造が出てくる ということですこのリンドン分解における、「双対リンドン列」は、自然に、「トレース列の逆」を定義していることに注目してください。

僕は最初、右からやっても左からやっても同じ結果に達すると思っていたのですが、これは、非可換で有向の場合であって、可換構造の場合には、あるトレースには、異なる２つの解釈が存在するということを意味します。ただ、トレース自体は「有向」なのであり、いわば双対トレースが存在し、異なる血を持っている構造があるということです。

つまり、“値”を返すとき、「どちらのトレース経路を基準にとるかで異なる一般的リーマン面構造へと到達する」ということです。

このことは、リンドン代数構造における、逆元の構造に関係していると考えられます。

つまり、今の議論は「**一般的リーマン面における逆関数の“値”は一意的に存在するのか？**」という問いかけが生まれます。

18. ノルムの一意性の定理

「非周期性の非周期性」として表現されるリンドン列に対して、定義される無限の「螺旋位相」は、「回転」しか意味せず、実数的構造を壊しません。つまり、「極座標表示」に似ています。

僕は以前、回転は、実数構造を多分岐的に回転させると思い込んでいた時期があり、そのときには、複素位相や四元数位相などに上がるたびに、ノルムの値は変化すると思っていましたが、複素構造が明らかになってきたことで、「実数構造」の安定性が明らかになり、それ自体がノルムであるということが理解されるようになりました。

たぶん、複素位相の構造はあまりにも自然に回転の意味を定めたので、「入れ子が回転」であることははっきりしました。そして、それは螺旋状に広がっていて、自然に log 関数のリーマン面状の形をしています。

だから、おそらく、複素数値には、ほんらい、螺旋の場所を示す「自然数の階層値」が必要であり、これがあれば、log 関数のリーマン面の考察はいらなくなります。

デカルト螺旋…

19. 読むときの注意

基本的に、いちばん、使われるのは、「素リンドン」が発散的に復元されたときには、「ゼロ点」へと返っていくという構造です。

このために、ゼータ関数は、「オイラー積（素数構造）」と「ゼロ点積（ゼロ点構造）」という２つの表現形態を持っています。

この構造的移り変わりさえ認識していけば、あとは、「既約有理リンドン」の理論が時々利用されるだけで、「実数リンドン」の領域に至ってはほとんど未開拓の領域です。「他周期的フラクタル」であり、「簡単にはほどけない」つまり、「非可換の縮約法しか存在しない」という、いわば「モジュラー性の非可換性」が問題となる領域であるということです。それは非常に難しい問題をはらんでいますので、僕にも一望できていないです。

最後に、類双対変換 $u^\wedge p \to e^\wedge{-s}\log p$は、曼荼羅核における最も純粋な螺旋の架け橋です。

べき乗構造、対数位相、そしてゼータの非可換解析接続をひとつに結びつけている。

「無限次元の代数閉体……」

黒川信重、絶対数学原論、現代数学社、2016

森田英章、組合せ論的ゼータの半群表示、2016

ベルンハルト・リーマン（鈴木治郎訳）、与えられた数より小さな素数の個数について、1859

高安秀樹、フラクタル、朝倉書店、1986

Shinjiro Kurokawa, Absolute Mathematical Theory, Gendai Suugaku Sha, 2016

Hideaki Morita, Semigroup Representation of Combinatorial Zetas, 2016

Bernhard Riemann (translated by Jiro Suzuki), On the Number of Primes Smaller Than

a Given Number, 1859
Hideki Takayasu, Fractals, Asakura Shoten, 1986

Glossary(用語集)

1, Related to the Lyndon series(リンドン列関連)

Aperiodic sequence:A sequence with an order that does not contain periodic elements throughout the sequence.
非周期列：内部に周期的な要素を含まない順序を持つ列。

Contraction: The unique decomposition and reduction of non-periodic Lyndon sequences into a minimal trace structure. .
This refers to the transformation of infinite repetitions of non-trivial aperiodic sequences within trace bundles into loop-type or tree-type structures.
縮約　非周期的リンドン列を最小のトレース構造に分解し、簡約化する独自の過程。
これは、トレース束内の非自明な非周期的列の無限反復を、ループ型またはツリー型構造に変換するプロセスを指す。

Contraction morphism: An operation that performs structural deformation on a trace sequence, trace bundle, or structure in a class-dual manner while preserving fractality.
縮約写像　あるトレース列やトレース束、または構造体を類双対的に、フラクタル性を保ちつつ、構造的変形を行う縮約の操作

Dual Lyndon words ;Corresponding to the reverse order of Lyndon sequences, Lyndon sequence decomposition structures contribute to the stability of the existence of inverses in graph-like Riemann surfaces.
双対リンドン列リ ンドン列の逆順に対応する、リンドン列分解構造、グラフ的リーマン面では逆元の存在の安定性に寄与する。あるリンドン列に対応するグラフの双対構造
→Part II, Part III

Lyndon series reduction; Trace contraction of a non-periodic Lyndon sequence. Note that there are two types of Lyndon series Contraction.
リンドン系列の縮約　非周期的なリンドン列のトレース縮約。注意：リンドン系列の縮約には 2 種類あります。

prime Lyndon word:Shorthand for the smallest unit of a non-periodic sequence. It is uniquely determined by McMahon's theorem and Duval decomposition algorithm.
素リンドン語非周期列の最小の単位。マクマホンの定理や Duval 分解アルゴリズムによって一意的に定まる

Prime Lyndon sequence: An indivisible non-periodic sequence serving as the fundamental unit of contraction.
素リンドン：収縮の基本単位として機能する、分割不能で非周期的な列。単純に、「既約」ではなく、最小単位。

2, Quasi-dual morphism and Zeta(類双対写像とゼータ)

Complex spiral integration: Terms referring to the differential and integral structures of “complex spiral phases”
Although it is not yet clear, it is gradually becoming apparent that as the number of species increases, there is a “divergence control function” corresponding to complex spiral phases, and that there are conversions to higher-order structures and lower-order structures corresponding to this.
複素位相積分　「複素螺旋位相」の微分・積分構造に言及する語
まだ明らかにはなっていないが、種数が増えていくたびに、複素螺旋位相に対応する、「発散制御機能」があり、それに対応して、高次構造への変換や低次構造への変換が存在していることが次第に明らかになっている

Critical line symmetry: Symmetry on the critical line s→←1-s, mainly seen in the Riemann zeta function.
臨界線上の対称性
主にリーマンゼータに見られる s→←１－ｓという臨界線上の対称性

Ideal class motif : The ideal concept also undergoes a process of restoring higher-order structures by first extending a single structure to infinity and then contracting it. This is structurally similar to the graph-theoretic dual motif closure and the structure of class-dual divergent restoration in my theory.
イデアル概念も一旦単一的な構成を無限性へと引き伸ばしてから、縮約するという過程を伴って、高次構造を復元する過程をとる。これは、グラフ論的双対モチーフ閉包と、あるいは、僕の理論における類双対的発散的復元の構造と構造的に類似している。このことか

ら、「一般非可換イデアル論」などの構成が示唆されている。

Infinite compression operator:This refers to the Möbius compression structure, which is an abstract description of the integral kernel that includes rotation, inversion, and spiral convergence. It has a mechanism that controls the divergence of the zeta structure of genus 0 in a spiral rotation, and arranges the structure symmetrically along the critical line of the Riemann zeta function.
無限圧縮作用素　Möbius 的圧縮構造のことで、回転・反転・スパイラル的収束を含む積分核の抽象記述。種数０のゼータ構造の発散を螺旋回転的に制御する仕組みを持っており、リーマンゼータの臨界線に沿って、左右対称に構造を鏡像的に配置する

Multiplicity of zero: When the “elementary Lyndon element” that is restored to zero is decomposed, the corresponding Euler product becomes a “multiple Euler product,” giving zero points multiple values.
多重零点 ゼロ点へと復元される「素リンドン元」が分解されるときに、それに対応するオイラー積は、「多重オイラー積」になって、ゼロ点にも多重性を与える。

The basic quasi-dual mapping: One-to-one correspondence between infinite concentric circle fractals and Cartesian spirals. Pure transitions between loop shapes and tree shapes can be seen naturally.
基本類双対写像　無限同心円フラクタルとデカルト螺旋との一対一対応。ループ形とツリー形の純粋な移行が自然に見られる

Divergent-density completion:Denotes the state where an infinite set of prime-like structural elements achieves a density such that further divergent reconstructions cause no structural deformation.
発散密度完備 無限の素数類似構造要素の集合が、さらに発散する再構成が構造的変形を引き起こさないような密度を達成した状態を指す。

Divergent restoration: The operation of recovering a potentially infinite structure from contractions by non-closed quasi-dual e morphisms.
発散的復元：非自明な非周期列を復元する類双対写像を用いて、収縮的縮約から潜在的に無限の構造を回復する操作。

Effect of imaginary number multiplication:Imaginary multiplication realized through motif-aligned rotations. In this theory, the divergent structure of Euler products is

controlled through “dual non-periodic paths.”
虚数乗法の作用　この理論では「双対非周期的経路」を通じてのオイラー積の発散的構造を制御する構造

Lyndon complex spiral continuous phase:A continuous complex phase that is uniquely determined for a Lyndon sequence, which is a semigroup. It is sometimes referred to as a “double helix” because it naturally contains spiral rotations and has a double main structure.
半群であるリンドン列に対して、一意的に定まる連続複素位相。自然に螺旋形の回転を含んでいるところ、二重の縮約的構造を持っているところなどから、「二重螺旋」と表現することもある。

Genus expansion: An expression for structural development accompanied by changes in the number of species. This is particularly important in the context of the formulation of “higher-order imaginary multiplication.”
In other words, it can be understood that the Hecke operator of higher-order zeta functions acts as an operator that changes the structure of graph-like Riemann surfaces, allowing for the interpretation that this is a comprehensive integral of Riemann surfaces.
種数の拡張　種数の変化を伴う構造展開に対する表現。とくに「高次虚数乗法」の定式化文脈で重要。
つまり、グラフ的リーマン面の構造を高次元に変化させる作用素として、高次ゼータのヘッケ作用素が作用していることが分かるために、これはリーマン面の包括的積分である、という解釈を許す

Non-regular zeta structure：An extension of the zeta function with genus and loop structure. It naturally appears when constructing the quadratic zeta function in Dedekind's zeta function. The zero points probably extend beyond the critical line, and their Euler product divergence is prevented by “dual non-periodic paths.” Higher orders are also possible.
非正則ゼータ構造　種数・ループ構造をもつゼータ関数の拡張。デデキントのゼータで、二次のゼータを構成する時に自然に出てくる。ゼロ点はおそらく臨界線上からはみ出し、「双対非周期経路」によって、そのオイラー積の発散が防がれている。より、高次化も可能。

Spiral development:Spiral expansion representing recursive quasi-dual morphism.

Used when bundling the infinite concentric circle structure of the Zeta function into a spiral shape and projecting it linearly.
螺旋的展開 再帰的類双対写像を表現する螺旋展開。ゼータ関数の無限同心円構造を螺旋形に束ねて、直線的に射影するときに使われる

Trace bundle: The structure generated by repeated contractions and expansions of Lyndon sequences.
トレース束　構造体の全経路を集約した構造。それぞれのトレースは、リンドン列と一意対応。
→全体（特に Part I, III）

Primitive p-th root of unity:Primitive p-th root of on the unit circle (associated with a prime p)
素数 p に対応する単位円状の一乗根　p は素数。「素数に対応する無限同心円の上に対応する単位乗根」という意味

Quasi-dual morphism: A mapping that transforms fractals into fractals, transforming trace bundles into either loop-type or tree-type structures.A morphism that resembles duality but inherently resists full closure.　quasi-dual　quasi-dual morphism
フラクタルをフラクタルへと変形する写像、トレース束をループ型のほうか、ツリー型のほうへと変形する
In this theory, we define quasi-dual operations as dual-like transformations that lack formal duality properties such as closure or invertibility, yet govern recursive, non-commutative constructions within trace structures.
全体（とくに Part II）

Recursive quasi-duality: A structure that repeatedly performs class dual operations. A concept connected to the category zeta structure in particular.
When repeating class dual transformations, it is necessary to determine whether the structure is invariant or not, while noting that it is non-commutative and multivalued, in order to find the restorability of a specific structure.
類双対操作を反復的に繰り返す構造。特に圏的ゼータ構造に接続する概念。類双対変形を繰り返すときそれが非可換であり、多値であることに注意しつつ、構造の不変性を変えているのか、変えていないのかを見ながら、特定の構造への復元性を見つけないといけない。

u^p→e^-slogp; One of the quasi-dual maps, often used in deformations such as the

Ihara zeta function.
u^p→e^-slogp; 類双対写像の一つで､伊原ゼータ関数などの変形においてよく用いられる。

Zeta deformation process:When fractally deforming the zeta function, there is always “multivalueness,” so it is necessary to find an appropriate deformation method that corresponds to such “diverse deformation possibilities.” For this reason, I am attempting four types of deformation methods in my essay.
Just pay attention to scaling and discrete/continuous properties.
ゼータ変形　ゼータ関数をフラクタルや類双対写像で変形するプロセス。ゼータ関数をフラクタル的に変形するときには、必ず「多値性」があるので、そのような「多様な変形可能性」に応じて、適切な変形方法を探らないといけない。そのため、僕は論考の中で４種類の変形方法を試みている。スケーリングや離散・連続性に注意すればいい。

3, Fractal restoration theory(フラクタル復元理論)

Fractal reconstruction ; Mainly by continuously applying divergent quasi-dual mappings, the internal completeness of the structure is constructed. If there are two prime structures, for example, one Euler product, then naturally all Euler products across all prime numbers can be restored.
The prime Lyndon elements contain all natural numbers,but the prime path lengths in the bouquet graph lack ordering,and this absence leads to a contraction to the prime number structure,corresponding to the Euler product.
フラクタル復元　部分構造から全体を生成する写像操作。主に発散的類双対写像の連続適用によって、構造体の内部的な完備性を構成する。素構造が 2 つあれば、たとえば、ひとつのオイラー積などは自然にすべての素数に渡るオイラー積が復元可能
「オイラー積に対応する」伊原ゼータの花束グラフを復元するときに、「素リンドン元にはすべての自然数が含まれる」けど、「素経路の長さ」には順序性がないから、「素数」へと縮約される,という「非可換」→「可換」という変換に注意。
→Part I, Part IV

4. Structures, graphs, and Riemann surfaces(構造体・グラフ・リーマン面)

“Bouquet graph”：A wedge sum of n circles, i.e., a single vertex with multiple attached loops. This structure serves as the minimal model for the trace contraction in the graphical Riemann surface.

花束グラフ　n 個の円からなるウェッジ和を指し、すなわち、複数のループが接続された単一の頂点からなる構造。この構造は、グラフ的リーマン面におけるトレース収縮の最小モデルとして機能します。

Deligne's condition:Unlike general Deligne cohomology, here we refer to the divergence control structure resulting from the combination of dual non-periodic paths and imaginary multiplication circuits as the Deligne structure. Structures that satisfy Ramanujan's inequality
ドリーニュの構造　一般のドリーニュコホモロジーの意味とは異なり、ここでは双対非周期的経路と虚数乗算回路の組み合わせから生じる発散制御構造をドリーニュ構造と呼ぶ。ラマヌジャンの不等式を満たす構造のこと。

Dual non-periodic paths :The dual structure of extremely simple non-periodic sequences arising from two non-periodic circuits of curves with genus one.
双対的非周期回路　種数一の曲線の非周期的回路が 2 つであるところから生じる、極度に単純な非周期列の双対的構造

Hodge bouquet: A collection of Riemannian surface graphs with the same number of seeds, arranged in a bouquet graph. Note that it also has a normal "bouquet structure" corresponding to the "Euler product." It is also necessary to distinguish it from the commonly referred to "Hodge structure."
ホッジの花束　種数一のリーマン面グラフを花束グラフ状に束ねたもの。「オイラー積」に対応する通常の「花束構造」をも持っていることに注意。また、通常言われている「ホッジ構造」との区別が必要。

Trace bundle : This refers to the entire set of all paths (traces) that pass through the interior of a given structure, including both finite and infinite lengths.
In particular, when the components of the path can be uniquely distinguished, this set can be one-to-one corresponding with the entire Lyndon sequence (and its infinite repetition).
トレース束　ある構造体の内部を通過するすべての経路（トレース）を、有限長・無限長のいずれの場合も含めて集めた集合全体をいう。
とくに、その経路の構成要素が一意に区別可能なとき、この集合はリンドン列全体（およびその無限反復）と一対一に対応しうる。

quasi-modular trace；　A natural quasi-dual transformation that reduces　"irreducible

rational Lyndon” in trace bundles to “prime Lyndon” or “natural number Lyndon.” Note that this can be performed even without a specific form, as long as a trace bundle is available. In that case, it can be expressed as a geometric operation as a deformation of the graph.
トレース束における「既約有理リンドン」を「素リンドン」や「自然数リンドン」へ縮約する自然な類双対変形。特に明示的形式がなくてもトレース束があれば行えることに注意。その場合、グラフの変形として、幾何学的操作の一環として、表現できるだろう。

Regularity:A function is regular when the local structure of its graph is uniform and orderly.non-regularity
正則性　関数が正則、グラフの局所構造が一様で整っていること
非正則性 グラフの局所構造が一様ではなく、正則でない構造、ゼロ点配置が乱れているなど

Non-regularity Irregularity: The local structure of the graph is not uniform but sparse. The zeros of the zeta function are scattered along the critical line.
非正則性　グラフの局所構造が一様ではなく、まばらであること。ゼータのゼロ点が臨界線からばらばらになる。

5,公理・写像・圏的表現

Collections of dual motif-closed sets；A complete state that cannot be further expanded by repeating dual operations.
双対操作を繰り返すことによってこれ以上拡大しない圏的な完備状態

Fractal-based logic; Since quasi-duality transformations transform fractals into fractals, fractal properties are normally preserved even with normal restoration or reduction, as well as with divergent restoration or reduction. Note that there are times when the structure of the “trace bundle” remains unchanged and times when it undergoes structural changes. A language is needed to describe the structural changes of the trace bundle.
類双対性変換はフラクタルをフラクタルへと変形するので、通常の復元や縮約でも、発散的復元や縮約でも、普通にフラクタル性が保たれていること。そして、そのとき、「トレース束」の構造が不変であるときと構造論的な変化をする時があることに注意。トレース束の変化構造を記述する言語が必要。

quasi-dual morphism
→ 類双対写像

Quasi-duality closure ;A noncommutative, multivalued, quasi-dual transformation that cycles through all transformations between the maximum loop structure and the maximum tree structure until it reaches a state that cannot be further expanded. This becomes a zeta structure of a categorical structure.
→ 類双対閉包
非可換で、多値的な、類双対変換が、最大ループ構造と最大ツリー構造の間の変換をすべて巡らせて、これ以上拡大し得ない状態へと達すること 圏的構造のゼータ構造体になる

📧 Email: satonaka5897*at*gmail*dot*com
🌐 Website: https://github.com/LyndonSpiralMandala/lyndon-spiral-complex-phase