

# 浙江大学

## 硕士研究生读书报告



题目 平行水平集处理矢量图

作者姓名 许有甜

作者学号 21551071

指导教师 李启雷

学科专业 移动互联网与游戏开发技术

所在学院 软件学院

提交日期 二〇一五年十二月

# Vector-Valued Image Processing by Parallel Level Sets

A Dissertation Submitted to

Zhejiang University

in partial fulfillment of the requirements for

the degree of

Master of Engineering

Major Subject: Software Engineering

Advisor: Li Qilei

By

Xu Youtian

Zhejiang University, P.R. China

2015

## 摘要

像 RGB 彩色图像或者多模态医学图像这样的矢量图表现了一个强大的通道间的相关性，但它并没有被大多数的图像处理工具开发。我们提出一个基于通道的空间梯度夹角的新概念来处理矢量图。通过最小化一个不利于大角度的泛函，就可以获得平行水平集的图像。在正式引入这个概念和相应的泛函之后，我们讨论它们导致梯度下降的加托导数。我们通过几个去噪、去马赛克的 RGB 彩色图像的例子来说明这个泛函的属性，它们表明了平行水平集是一个适合彩色图像增强的概念。利用平行水平集去马赛克，为低噪声水平产生了视觉上完美的结果。此外，这个被提出的函数与其他方法相比产生了更清晰的图像。

**关键字：**平行水平集，矢量图，变分法，非线性扩散，去噪，去马赛克。

## Abstract

Vector-valued images such as RGB color images or multimodal medical images show a strong interchannel correlation, which is not exploited by most image processing tools. We propose a new notion of treating vector-valued images which is based on the angle between the spatial gradients of their channels. Through minimizing a cost functional that penalizes large angles, images with parallel level sets can be obtained. After formally introducing this idea and the corresponding cost functionals, we discuss their Gâteaux derivatives that lead to a diffusion-like gradient descent scheme. We illustrate the properties of this cost functional by several examples in denoising and demosaicking of RGB color images. They show that parallel level sets are a suitable concept for color image enhancement. Demosaicking with parallel level sets gives visually perfect results for low noise levels. Furthermore, the proposed functional yields sharper images than the other approaches in comparison.

**Keywords:** Parallel level sets, vector-valued images, variational methods, non-linear diffusion, denoising, demosaicking.

## 1 引言

在许多成像应用中，空间中的单点给出了多个信息。一个众所周知的例子是一个 RGB 彩色图像中任何一点都给出编码红色、绿色和蓝色的三个数字。一方面你可以认为 RGB 图像是三个标量值图像，也可以把它作为一个单独的矢量图。另一个例子给出了在医学成像中，为同一个空间中的点用不同的扫描仪测量不同的属性——例如一个计算机断层扫描 (CT) 测量身体吸收的 x 射线或核磁共振成像仪 (MR) 扫描可以测量水分子在一个磁场中的反应。在这些正电子发射断层扫描 (PET) 或单光子发射计算机断层扫描 (SPECT) 扫描仪可以获得功能性质如血流或代谢活动。现代扫描仪像 SPECT / CT 或 PET /MR，把这些设备组合成一个设备，可以获得矢量图，矢量的不同通道对应于不同性质的组织。

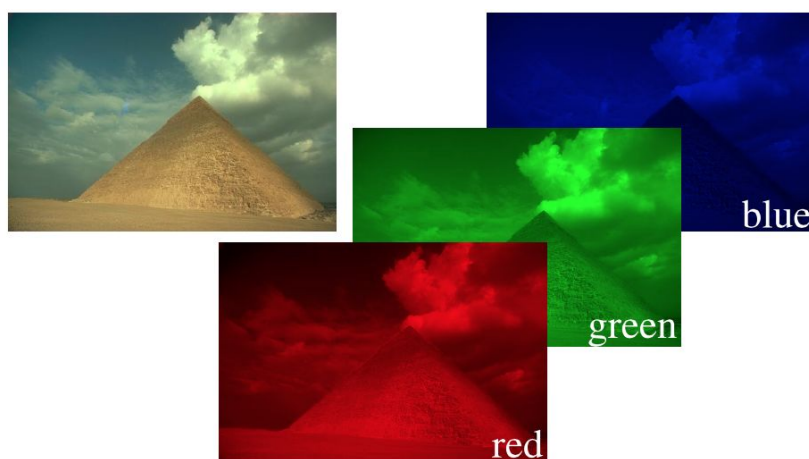


图 1 测试图像“金字塔”的颜色通道

在这种情况下，通道可以是，但不必须是相关的。图 1 显示了测试图像“金字塔”的颜色通道。这个图像中的对象用三种颜色编码是清晰可见的。颜色通道的相关性也会被观察到，尤其是对自然图像的边缘。“三个通道非常可能有相同的纹理和边缘位置”。同样，在医学成像中 PET /MR 扫描仪的通道可能随着不同的组织类型有相互依存的属性而相关。这种依赖关系就是我们在这篇文章中利用到的。

大多数图像处理工具是专为标量图或应用于独立地处理矢量图中的每个通道，这是无法利用表达通道之间的相关性的信息的。一个著名的使用通道间信息的例子是颜色总变差。这个标量值版本的扩展导致的非线性扩散计划，扩散系数取决于所有通道。这种方法是通过几个处理矢量图的变分方法来扩展的，矢量图利用 Polyakov 活动的概念联系在一起，就产生所谓的 Nambu 函数。向量值扩散方法是基于统计相关性，但仍然发展通道智慧。在这个论文我们提出一种新方法强调通道间的几何图形学的相关性，通过考虑每个通道的水平集之间的平行程度。

在我们的方法中，假设矢量图的组件并不是独立的。因此，我们尝试调整导致平行水平集和类似的结构梯度。我们将看到，这种促进共同结构的方法可用于图像处理应用程序，如彩色图像中的去噪或去马赛克。

我们区分术语“水平集”的用法和它在应用程序中的用法，推断出一个  $(N + 1)$  维函数，这样其零水平集描述了演变和在一个图像中两个或两个以上的对象之间的边界的拓扑变化，例如分割。

本文的其余部分组织如下。首先，我们对图像中的变分方法作简要概述处理，并讨论由梯度自然引起的基于泛函的扩散方程。在第二部分中，我们介绍了如何处理平行水平集的基本概念和提出一个获得这些的变分方法。在第三部分中计算它的加托导数。最后，在第四部分我们提出一个简单的例子说明了水平集的行为及其并行的趋势。此外，我们展示了彩色图像的去噪和去马赛克的结果，并将它与其他被用作图像增强的方法进行比较。在第五部分展示了结论和论述。

#### (1) 回顾

在标量图的情况下，像去噪、修补、去马赛克或为矢量图的问题，可以被铸成一个相反的问题通过寻求最低的功能的形式。

$$\Phi(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \|Az - g\|^2 + \alpha \mathcal{R}(z) \quad (1)$$

这里  $g$  是观测数据， $z = (z_k)_{k=1,\dots,K} : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^K$  向量值图像， $\mathcal{R}$  是成本功能， $\alpha$  是数据拟合的真实度和先验解决方案的信息之间的权衡参数。

第三部分中我们将展示  $\mathcal{R}$  的一些选择，方程解(1)是偏微分方程(PDE)的驻点(及时)。

$$\partial_t \Phi = -D\Phi_z = -A^*(Az - g) + \alpha \operatorname{div}[\mathcal{K}\nabla z] \quad (2)$$

一般扩散系数  $\mathcal{K}$  是一个空间变化的并依赖于图像  $z$  的  $N \times N \cdot K \cdot K$  矩阵，例如。

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_1 & \mathcal{T}_{1,2} & \dots & \mathcal{T}_{1,K} \\ \mathcal{T}_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathcal{T}_{K-1,K} \\ \mathcal{T}_{K,1} & \dots & \mathcal{T}_{K,K-1} & \mathcal{K}_K \end{pmatrix}$$

并且散度和梯度被定义特定组件。此外，我们称  $N \times N$  的子矩阵  $\mathcal{K}_i$  为通道内的扩散系数和  $\mathcal{T}_{i,j}$  称为交叉扩散系数。如果任何子矩阵是  $c \cdot I$  的形式， $c$  是一个标量， $I$  是我们表示整个矩阵  $c$  的单位矩阵。当所有子矩阵都是单位矩阵的倍数时的特殊情况下称

为各向同性，否则称为各向异性。在本文中所有的扩散方程都是各向同性的。我们需要区分两个特殊情况。如果子矩阵  $K_i$ ,  $T_{i,j}$  依赖于图像本身，例如  $K_i = K_i(z)$ ,  $T_{i,j} = T_{i,j}(z)$ ，我们将它称为非线性扩散，否则称为线性的。同样，本文中所有被考虑到的扩散方程都将是线性的。最后，如果任何交叉扩散的  $T_{i,j}$  是非零的，我们称之为交叉通道扩散，否则称为 channel-wise 扩散。稍后这将是一个关键点。需要注意的是，即使在扩散只是 channel-wise，PDEs 系统可以被耦合，如果扩散系数  $K_i$  依赖于其他通道  $j \neq i$ 。

正如前面提到的，本文的想法是考虑各向同性、非线性、交叉通道扩散的一个特定形式，惩罚因子  $R(z)$  旨在匹配  $z$  的组件，这样它们的水平集就是平行的。在第二部分我们为水平集做出精确的并行性的含义。

## 2 利用变分法为平行水平集建模

### (1) 平行水平集

考虑矢量图  $z = (z_k)_{k=1,\dots,K}$ ，不失一般性的定义单元立方体  $\Omega = [0,1]^N \subset \mathbb{R}^N$ ，有  $z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^K$  和  $z_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 。此外，我们必须假设通道  $z_k$  是连续可微的，例如  $z_k \in C^1(\Omega)$ 。众所周知每个点的梯度  $\nabla z_k$  正交水平集  $\{x \in \Omega : z_k(x) = \text{常数}\}$ 。

现在，我们限制两个通道的情况下，即  $K = 2$ 。为了简化符号，我们用  $u$  和  $v$  表示的两个渠道  $z$ 。水平集  $u$  和  $v$  是平行的，如果梯度  $\nabla u(x)$  和  $\nabla v(x)$  在每一点  $x \in \Omega$  是平行，例如  $\nabla u(x) = s(x) \nabla v(x)$  或  $\nabla v(x) = s(x) \nabla u(x)$ ，对一些标量  $s(x) \in \mathbb{R}$ 。

大家都知道  $|\langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle| = |\cos(\theta(x))| \|\nabla v(x)\| \leq \|\nabla u(x)\| \|\nabla v(x)\|$ ，当且仅当  $\nabla u(x)$  和  $\nabla v(x)$  是平行的时候是相等的。方括号  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  表示欧几里得标量， $\|\cdot\|$  表示欧几里得范数，范围在  $\mathbb{R}^N$  中。因此测量

$$\|\nabla u(x)\| \|\nabla v(x)\| - |\langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle| \quad (3)$$

是非负和局部地测量我们差多少才能平行。相同的保持正确，如果严格增加使用函数  $\varphi$  和  $\psi$ ，并且我们定义一个局部测量函数  $f(\nabla u(x), \nabla v(x))$  通过

$$\varphi(\psi[\|\nabla u(x)\| \|\nabla v(x)\|] - \psi[|\langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle|]). \quad (4)$$

$\varphi$  和  $\psi$  有效的选择如  $s \rightarrow s, s^2, \sqrt{s}, \log(s), \exp(s)$ 。

为了获得全局的测量，我们整合了整个领域，如

$$\mathcal{R}(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} f(\nabla u(x), \nabla v(x)) \, dx. \quad (5)$$

在特殊情况下  $\varphi(s) = \sqrt{s}$  和  $\psi[s] = s^2$  方程 (4)，等价于矢量  $|\nabla u(x) \times \nabla v(x)| = |\sin(\theta(x))|$  的大小。方程 (5) 对应 Nambu 函数的张量。它也用于联合重建多物理场。

当梯度为并行或零时，这个被提出的模型就达到了最小化。因此我们也含蓄地惩罚非零梯度。另一个选择是测量水平集的并行性，将通过规范梯度来规范化方程 (4)。这种方法是更自然，因为水平集不依赖于梯度的大小但是具有两个缺点。首先，我们需要假设梯度不为零或在这种情况下需要找到一个解决方案。第二，我们的数值实验表明，规范化版本会导致不稳定性，当梯度为任意大小同样需要解决方案。规范化的版本选择  $\varphi(s) = \sqrt{s}$  和  $\psi[s] = s^2$  称为规范化梯度场，在不同方式的医学图像配准中作为距离度量。

## (2) 任意矢量图

正如我们所看到的，已经阐明的方法仅仅是针对于两个通道的。一种途径是将这种方法扩展到任意维矢量图是定义成对的函数，即对任何图像  $z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^K$  我们定义

$$\mathcal{R}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k < l} \mathcal{R}(z_k, z_l). \quad (6)$$

由于对称的参数  $\mathcal{R}(z_k, z_l)$  的对称性，这里求和是只要求  $k < l$ 。

## 3 Gateaux 导数

本节致力于而加托导数的功能性  $R$ ，它是合适的最小化的方案推导的关键。它们将从一个非常普遍的命题推导而来。

如果解决  $v$ ，我们提出的函数可以写成  $\mathcal{R}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} f(\nabla u(x)) \, dx = \int_{\Omega} f(\nabla u) \, dx$ 。从这里开始我们跳过参数  $x$  来简化符号的讨论。

命题 3.1: 让  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  是一个连续的两倍可微的函数。然后加托导数  $R : C^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $R(u) = \int_{\Omega} f(\nabla u) \, dx$  在  $u \in C^1(\Omega)$  是由  $DR_u : C^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  用

$$DR_u(h) = - \int_{\Omega} h \operatorname{div}[\nabla f(\nabla u)] \, dx + \int_{\partial\Omega} h \langle \nabla f(\nabla u), n \rangle \, dx$$

其中  $n$  是  $\Omega$  的外法向量。



证明：让  $h \in C^1(\Omega)$  是任何函数，并且  $\varepsilon > 0$ 。如果我们让  $f(u + \varepsilon h)$  作为在  $\varepsilon$  的函数，我们推导

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(u + \varepsilon h) &= \int_{\Omega} f(\nabla u + \varepsilon \nabla h) dx \\ &= \int_{\Omega} f(\nabla u) + \varepsilon \langle \nabla f(\nabla u), \nabla h \rangle dx + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

在近零处利用泰勒展开式。使用加托导数和格林第一公式的定义，我们终于得到

$$\begin{aligned}D\mathcal{R}_u(h) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \{ \mathcal{R}(u + \varepsilon h) - \mathcal{R}(u) \} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \int_{\Omega} f(\nabla u) + \varepsilon \langle \nabla f(\nabla u), \nabla h \rangle \right. \\ &\quad \left. - f(\nabla u) dx + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right\} \\ &= \int_{\Omega} \langle \nabla f(\nabla u), \nabla h \rangle dx \\ &= - \int_{\Omega} h \operatorname{div}[\nabla f(\nabla u)] dx + \int_{\partial\Omega} h \langle \nabla f(\nabla u), n \rangle dx.\end{aligned}$$

我们假设  $f$  是两次连续可微的充分条件，但可能不是必要条件。

为了获得我们提出的方法的加托导数，我们必须使欧几里得范数近似光滑。对于一个参数  $\beta > 0$ ，我们定义了一个光滑的近似欧几里得范数的向量  $x$  为  $\|x\|_{\beta} = \sqrt{\|x\|^2 + \beta^2}$ 。这也使得该方法当有小的梯度时更健壮，如  $\|\nabla u\| \ll \beta$ ，被当作零梯度。然后函数  $f$  由方程(4)给出，为

$$f(\nabla u, \nabla v) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\psi[\|\nabla u\|_{\beta} \|\nabla v\|_{\beta}] - \psi[|\langle \nabla u, \nabla v \rangle|_{\beta^2}]). \quad (7)$$

引理 3.2：让  $\phi$ ， $\psi$  是连续可微的函数。固定  $\nabla_v f$  的梯度：  $R^N \rightarrow R$  定义的方程(7)在

$\nabla u$  是给定的  $\nabla f(\nabla u) = \kappa(u, v) \nabla u + \tau(u, v) \nabla v$

与系数

$$\begin{aligned}\kappa(u, v) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\psi'[\|\nabla u\|_{\beta} \|\nabla v\|_{\beta}] \|\nabla v\|_{\beta}}{\|\nabla u\|_{\beta}} \rho(u, v) \\ \tau(u, v) &\stackrel{\text{def}}{=} - \frac{\psi'[\langle \nabla u, \nabla v \rangle]_{\beta^2} \langle \nabla u, \nabla v \rangle}{|\langle \nabla u, \nabla v \rangle|_{\beta^2}} \rho(u, v) \\ \rho(u, v) &\stackrel{\text{def}}{=} \varphi'(\psi[\|\nabla u\|_{\beta} \|\nabla v\|_{\beta}] - \psi[|\langle \nabla u, \nabla v \rangle|_{\beta^2}]).\end{aligned} \quad (8)$$

证明：这些结果可以通过多维链式法则推导而得。

由函数  $R$  参数的对称性，我们可以计算出  $(u, v)$  的联合导数。从这里开始(数值实验中一样)，我们将假设图像在表示为  $C_*^1(\Omega)$  的区域边界上法向量趋近于零，例如  $u \in C_*^1(\Omega)$  当且仅当它在  $\Omega$  的边界上的法向量趋近于零时，是连续可微的。

定理 3.3:  $R$  的加托导数定义为公式(5)提供的等式，定义域为:  $C_*^1(\Omega) \times C_*^1(\Omega)$ ，值域为  $R$ ，其中在  $(u, v)$  处定义为：

$$D\mathcal{R}_{(u,v)} = -\operatorname{div} \left[ \begin{pmatrix} \kappa(u, v) & \tau(u, v) \\ \tau(u, v) & \kappa(v, u) \end{pmatrix} \nabla \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right] \quad (9)$$

公式 9 中， $\kappa$  定义为扩散系数， $\tau$  定义为交叉扩散率。

重要的是要注意，通道智慧定义为散度、梯度和矩阵向量的乘积。

证明：因为函数  $R$  的参数列表是对称的，在引理 3.2 中  $v$  也是有效的。通过使用命题 3.1 和用矢量格式书写这些方程式可以获得阐明的结果。边界是零，是因为法向量趋近于零。

在三个(或任意个)通道的情况下如 RGB 图像，可以容易的扩展定理 3.3。

推论 3.4:  $R$  的加托导数定义为公式(6)，定义域为:  $[C_*^1(\Omega)]^3 \rightarrow R$  值域为  $R$ ，其中在  $z=(z_1, z_2, z_3)$  处定义为：

$$D\mathcal{R}_z = -\operatorname{div} \left[ \begin{pmatrix} \kappa_1 & \tau_{1,2} & \tau_{1,3} \\ \tau_{1,2} & \kappa_2 & \tau_{2,3} \\ \tau_{1,3} & \tau_{2,3} & \kappa_3 \end{pmatrix} \nabla \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right] \quad (10)$$

公式 10 中， $K_i = \sum_{j \neq i} K(z_i, z_j)$  和  $\tau_{ij} = \tau(z_i, z_j)$ 。在等式 9 中可以看到  $\kappa$ ， $\tau$  的定义。

#### (1) 渐近线的扩散系数

我们现在了解一下渐近线的扩散系数。不失一般性地，我们只会讨论  $u$  的扩散系数。在限制条件下， $v$  的信息逐渐趋近于零，例如  $\nabla v \rightarrow 0$ ，我们希望这个复杂的扩散简化保边去噪方案，如总变分去噪。因此，交叉扩散系数  $\tau(u, v)$  需要收敛到零。在这种情况下，通道  $u$  和  $v$  是平的，当不保留或加强边缘时，我们想要等方性的扩散，即  $\kappa(u, v) \rightarrow 1$ 。但这是一个特例，并不得一般情况。

命题 3.5: 让  $\phi$ ， $\psi$  是连续可微的， $\phi' = 1$ ， $\psi' = 1$ 。加托导数的扩散系数公式(9)完成以下内容。如果  $\nabla v \rightarrow 0$ ，那么

$$\kappa(u, v) \rightarrow \frac{\beta}{\|\nabla u\|_\beta} \quad \tau(u, v) \rightarrow 0$$

并且  $\kappa(u, v) \rightarrow 1$ , 在  $\nabla u, \nabla v \rightarrow 0$  的条件下。

证明：假设  $\phi$  和  $\psi$  的导数的扩散系数简化为  $\kappa(u, v) = \frac{\|\nabla v\|_\beta}{\|\nabla u\|_\beta}$  和  $\tau(u, v) = -\frac{\langle \nabla u, \nabla v \rangle}{|\langle \nabla u, \nabla v \rangle|_{\beta^2}}$ , 声明的含义很明显。

由于渐近线的需要, 在我们的数值实验, 只考虑  $\phi(s) \psi[s] = s$  这种情况。很有可能还有其他的  $\phi(s)$  和  $\psi[s]$  函数, 适用于这些渐近线, 但描述他们所有的特征超出了本文的范围。

## (2) 颜色全差变与 Nambu 函数

我们将会把我们的方法与颜色全变差和 Nambu 函数相比较, 我们将声明它们及其导数。

颜色全变差, 即等式  $|z|_{CTV} = \sqrt{\sum_i |z_i|_{TV}^2}$  和  $|z_i|_{TV} = \int_{\Omega} \|\nabla z_i\|_\beta dx$ , 在命题 3.1 的框架中, 我们不能直接表达。不过公式 10 的加托导数, 及其扩散系数

$$\kappa_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|z_i|_{TV}}{|z|_{CTV}} \frac{1}{\|\nabla z_i\|}, \quad \tau_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} 0. \quad (11)$$

另外我们还想与 Nambu 函数相比较, 它可以表示为  $\int_{\Omega} \eta(z/\beta) dx$ , 其中

$$\eta(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{1 + \sum_i \|\nabla z_i\|^2 + \sum_{i < j} \|\nabla z_i\|^2 \|\nabla z_j\|^2 - \langle \nabla z_i, \nabla z_j \rangle^2}.$$

然后加托导数还需要方程 (10) 的形式, 其中扩散系数为:

$$\begin{aligned} \kappa_i &\stackrel{\text{def}}{=} \left( 1 + \sum_{j \neq i} \|\nabla z_j\| \right) \eta(z)^{-1} \\ \tau_{i,j} &\stackrel{\text{def}}{=} -\langle \nabla z_i, \nabla z_j \rangle \eta(z)^{-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

## 4 数值实验

### (1) 实现

现在的任务是减少方程 (1) 平行水平集的成本函数。由于这个函数是可微的, 我们使用优化工具来解决它。首先, 利用信息, 一个合适大规模优化的选择是大规模的 BFGS 版本, 而不是二阶导数的大规模。这是一个拟牛顿方法, 仅基于一阶导数信息的低阶

矩阵的 Hessian 近似。线性搜索算法也是由此而来。

为了完成实现的细节，我们将描述如何离散加托导数，参考方程(10)。根据定理 3.4 中的假设，我们使用一个图像扩展以满足趋于零的法向量。当等式(10)中所有的条间都是这种形式时，参考在任何一点  $(i, j)$ ， $\text{div}(\kappa \nabla u)$  的离散化是足够的。通过采用一个分格的中心差分格式，也就是  $\partial_1 u_{ij} \approx u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j}$ ，任何缺失的线性插值值，即  $u_{i+1/2,j} = 1/2[u_{i+1,j} + u_{i,j}]$ ，我们得到

$$\text{div}(\kappa \nabla u)_{i,j} \approx \frac{1}{2} \left\{ \sum_{(k,l) \in \mathcal{N}(i,j)} [\kappa_{k,l} + \kappa_{i,j}] u_{k,l} - [\bar{\kappa}_{i,j} + 4\kappa_{i,j}] u_{i,j} \right\} \quad (13)$$

在这个公式中， $(i, j)$  的邻接点定义为  $\mathcal{N}(i, j) = \{(i+1, j), (i-1, j), (i, j+1), (i, j-1)\}$  并且  $\bar{\kappa}_{i,j} = \sum_{(k,l) \in \mathcal{N}(i,j)} \kappa_{k,l}$ 。这个空间离散化是精确导数和导数的部分近似值之间的折中。将更精确的近似将导致更差的空间分辨率。

需要注意的是，我们不建议一个算法，而是一个可用于不同公式的函数。这是独立于实际的算法，用于减少相应的目标的函数。

我们知道在数值实验中参数  $\alpha$  和  $\beta$  的选择都是理想化的。我们将讨论关于选定参数的噪音的趋势，但进一步的分析将超过本文的范围。

## (2) 测量图像的相似性

我们定义了一些客观的标准评估我们的结果，衡量去噪和去马赛克的性能。我们决定使用峰值信噪比(PSNR)，这可能是最常见的测量方法对图像增强的性能进行评估。它被定义为  $PSNR(u, u_s) = 10 \log_{10}(255^2 / \|u - u_s\|_2^2)$  的图像，范围是  $[0, 255]$ 。下一个方法，我们也提到结构相似度(SSIM)的测量，其通常被认为是更接近视觉感知。它被用来扩展彩色图像的颜色通道的 SSIM 的均值。

## (3) 一个简单的例子

让我们先从一个简单的例子开始，说明我们的方法的属性如图 2 所示。前两行(a)，(b)表示的起始图像  $u$  和  $v$  的演化在左边手朝最小化所提出的平行水平集的函数，其中  $\Phi(S)$ ， $\Psi[S] = S$ 。在下面两排(c)和(d)的下面是显示相应水平集。可以清楚地看到，从最初的形状，图像逐渐变化为一个形状稍微介于两个原始形状之间共同形状。此外，我们看到，背景几乎不变，而且梯度是平行的或是零值。

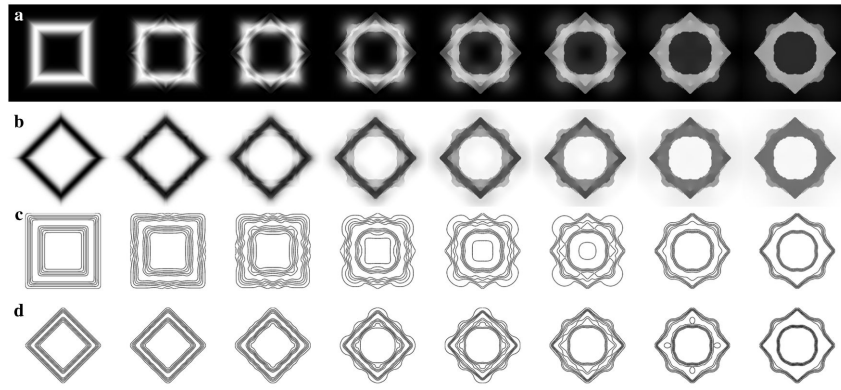


图 2 说明方法的属性

我们可以看到这些形状逐渐变化到稳定状态的详细过程。看第一行，初始形状的八个角落的形变过程中。我们可以清楚地看到自己的角落看到这种方式的传播特性（第四形象的传播性质左边）。但通常在扩散之后这些“阴影”重新锐化。乍一看可能出现了在“错误的方向”进行扩散的现象，这种现象能从奥舍和鲁丁冲击过滤理论中得到解释，但从对应的扩散系数  $\kappa$  的非负性来看这可能不是原因。另一个可能的原因是，这是跨频的扩散并且交叉扩散系数  $\tau$  是非零值。

#### （4）彩色图像的去噪

接下来，我们想说明该方法可以非常好的应用在彩色图像的降噪上。我们选择伯克利分割数据库的一些彩色图像作为测试数据。为了更好的比较我们选用的图片都是被添加剂退化的公认可用噪波的版本，其中不相关的高斯噪声的标准差分别设置 5、10、15、25 和 35。

去噪的情况下，我们将实验结果与非局部、Nambu 函数和颜色全变差进行对比。对于非局部情况我们使用的实现是可行的。为了更好的对比结果，我们其他的变分方法使用与我们提出的平行水平集方法类似的实现方式。这意味着，在梯度(10)、公式(11)和公式(12)给出的扩散系数描述的拟牛顿方法下，方程(1)是一致收敛的。



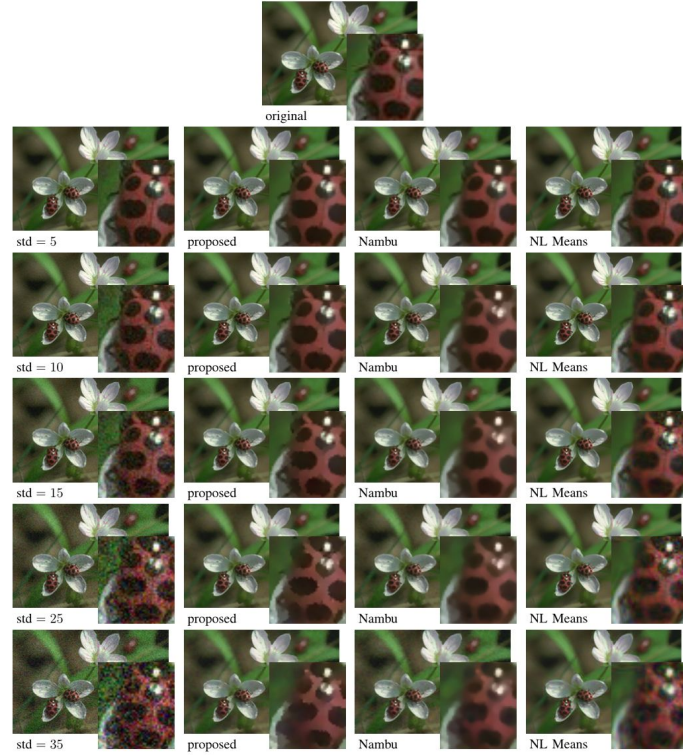


图 3 测试图像的计算结果

其中一个测试图像的计算结果如图 3 所示。所有的方法在微小噪音水平上都有良好的效果。当噪音水平增加到非局部情况时显示出不乐观的颜色波动。虽然 Nambu 函数可以抚平图片上很多噪点产生更清晰的图像。图 4 显示了 PSNR 和 SSIM 的噪音的水平下的结果。非局部情况和颜色全变差明显比 Nambu 函数和拟平行水平集的效果要差。且后两者在大部分情况下的效果都很接近在图 5 中参数的选择是和噪音水平相反的，实线表示平均值，虚线表示最小和最大的五个数据集。可以看出，不同图像之间的最佳参数有很大的差异。像预期的那样当有一个规范化参数  $\alpha$  减少到零时，会产生噪音水平降低的总体趋势。这一趋势也可以看到了平行的  $\beta$  水平集函数和非局部方法，但没有 Nambu 函数和颜色总变差。

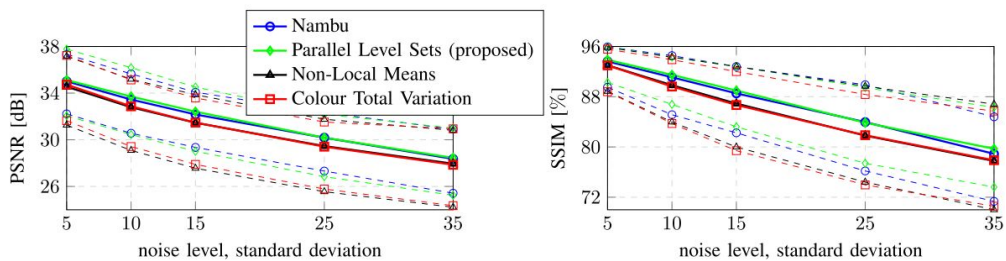


图 4 PSNR 和 SSIM 的噪音的水平下的结果

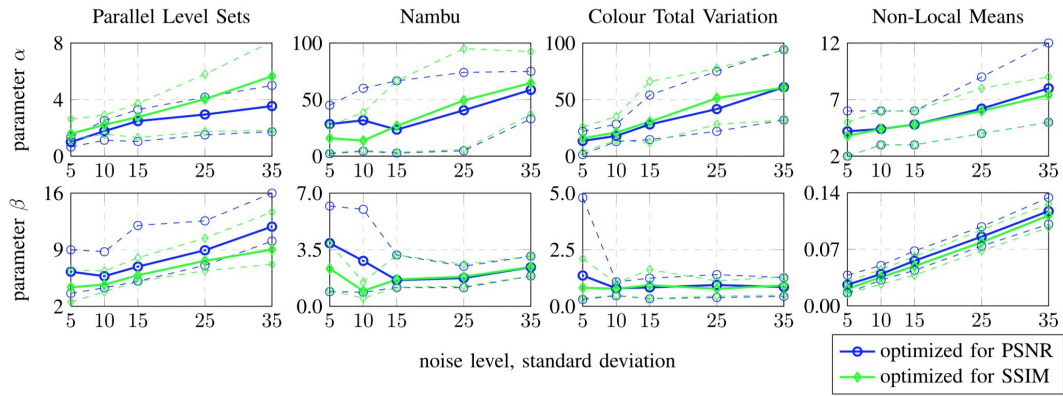


图 5 参数的选择是和噪音水平相反的

### (5) 彩色图像的去马赛克

去马赛克是彩色图像的重建，是通过获得图像数据获得，并仅仅在由拜耳过滤描述的位置如图 6 所示。这意味着在每一个位置的需要红色，绿色或蓝色的强度。这个技术可以获取数据一个给定的分辨率或增强决议通过相同数量的数据。一个典型的数据集对去马赛克在图 6 所示。

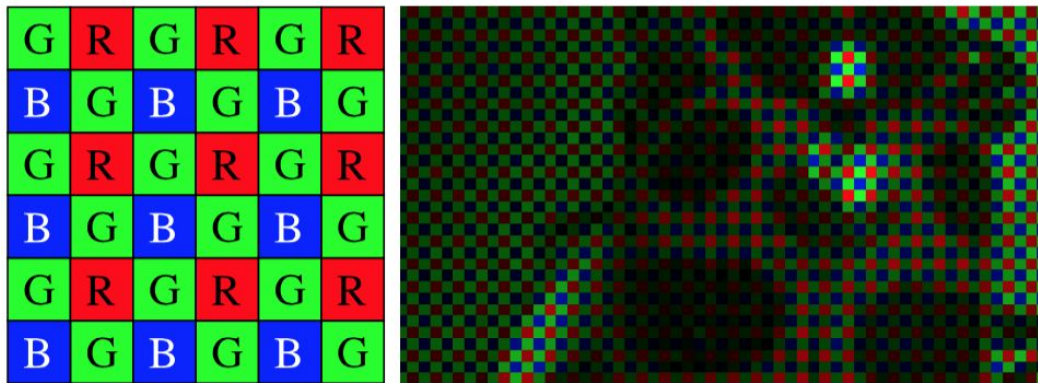


图 6 彩色图像的去马赛克

在去马赛克中使用与去噪相同的数据集。这些数据集由拜耳过滤器然后退化。为了比较我们的结果我们仅使用变分方法，它是作为一个简单说明去马赛克问题就像优化问题(1)中拜耳过滤器中的 A 操作一样。

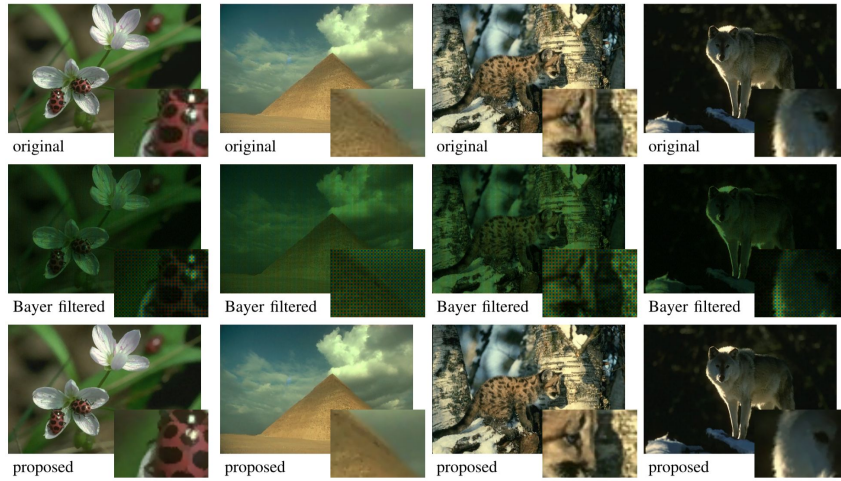


图 7 在低噪声水平下拟平行水平集成本函数可用于完全恢复拜耳过滤图像

图 7 和图 10 给出了一些结果。图 7 显示了在低噪声水平下拟平行水平集成本函数可用于完全恢复拜耳过滤图像。重建图像和原始图像之间的区别是不可见的。Nambu 函数和颜色总变差的对比结果可以在图 10 中看出。虽然颜色总变差给出许多模糊的结果但 Nambu 功能能够消除大多数差异。很明显在高噪音的水平下，该方法给出的最大图像只有几个像素。

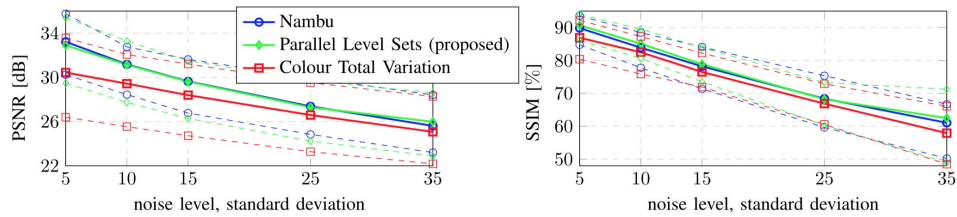


图 8 颜色全变差比提出的平行的水平集方法和 Nambu 函数效果的比较

总的来说，我们可以看到从图 8，颜色全变差比提出的平行的水平集方法和 Nambu 函数效果更差。在 PSNR 值表明，Nambu 函数与 SSIM 相反。高噪音水平显示该方法执行显然比 Nambu 函数效果要好。

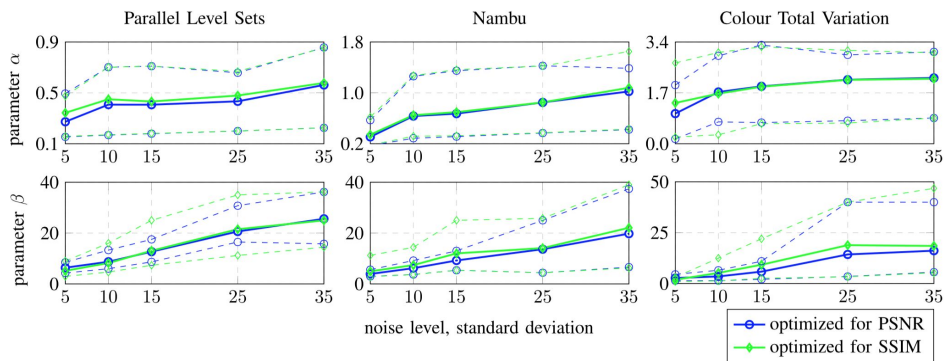


图 9 所有噪声参数情况下的结果

在图 9 中给出了所有噪声参数情况下的结果，两个参数为零的趋势降低噪音水平是



可见的。而  $\alpha$  的变化关于噪音水平似乎几乎不变， $\beta$  的增加与噪音水平的增加相关。

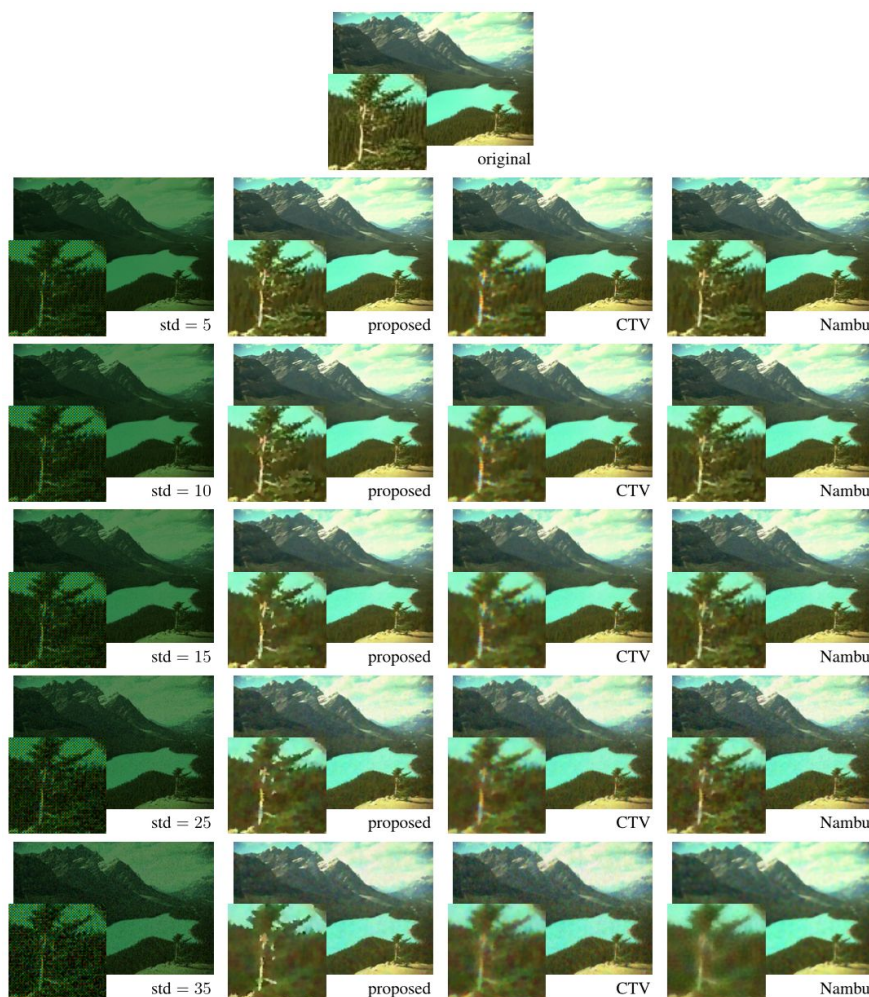


图 10 Nambu 函数和颜色总变差的对比结果

## 5 小结

我们提出一个基于平行水平集的新框架，这个框架可用于矢量图的图像增强。在这种方法中，我们利用通道间的相关性，这是许多像 RGB 彩色图像这样的矢量图中固有的。本文中所给出的例子说明了利用这种相关性会产生更好的，更清晰的重建，和更少的人工操作。结果表明，平行水平集的概念是一个对矢量图进行处理任务有发展前景的工具。

当我们展示去噪和去马赛克的用法时，它易于扩展到其他有更复杂的操作应用程序中。这包括例如对多模型的医学成像同时重构。这样的应用程序将未来的研究主题。

## 参考文献

- [1] Matthias Joachim Ehrhardt, Simon R. Arridge, Vector-Valued Image Processing by Parallel Level Sets, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2013.
- [2] D. W. Townsend, “Multimodality imaging of structure and function,” Phys. Med. Biol., vol. 53, no. 4, pp. R1 – R39, Feb. 2008.
- [3] B. K. Gunturk, J. Glotzbach, Y. Altunbasak, R. W. Schafer, and R. M. Mersereau, “Demosaicking: Color filter array interpolation,” IEEE Signal Process. Mag., vol. 22, no. 1, pp. 44 – 54, Jan. 2005.
- [4][http://baike.baidu.com/link?url=56T0sI5g-gHg7CtWJI-1LgtsqhgkV\\_IXT5wK6VgNUKyAE4J3zf1hJugKmURifYMtQ53Gr462Yj0DSpouJz9VYK](http://baike.baidu.com/link?url=56T0sI5g-gHg7CtWJI-1LgtsqhgkV_IXT5wK6VgNUKyAE4J3zf1hJugKmURifYMtQ53Gr462Yj0DSpouJz9VYK)
- [5][http://wenku.baidu.com/link?url=jHdCXYkc\\_XM3Q9v-bmed9RHcUFNoLueluV4mLhpSG4BIb6ZGn8qia4u0Y0o8A3A-fS0-VFbS\\_6McJJkAg7DK-TjvjM60cMjoEWmNfbP1-3a](http://wenku.baidu.com/link?url=jHdCXYkc_XM3Q9v-bmed9RHcUFNoLueluV4mLhpSG4BIb6ZGn8qia4u0Y0o8A3A-fS0-VFbS_6McJJkAg7DK-TjvjM60cMjoEWmNfbP1-3a)