Homework-2
Квантовая механика

Фаворов Валентин
БФЗ-18-1

Задание 1

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -i\sin\theta \\ i\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Пункт 1: собст-е значения и векторы (норм-е)

$$\begin{vmatrix} (\cos\theta-\lambda) & -i\sin\theta \\ i\sin\theta & (-\cos\theta-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$(\cos\theta-\lambda)(-\cos\theta-\lambda) - i\sin\theta(-i\sin\theta) = 0$$

$$-\cos^2\theta - \lambda\cos\theta + \lambda\cos\theta + \lambda^2 - (-i^2\sin^2\theta) = 0$$

$$-\cos^2\theta + \lambda^2 - \sin^2\theta = 0$$

$$-\cos^2\theta + \lambda^2 - (1-\cos^2\theta) = 0$$

$$-\cos^2\theta + \cos^2\theta + \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

$\underline{\lambda = 1}$: $$\begin{pmatrix} (\cos\theta-1) & -i\sin\theta \\ i\sin\theta & (-\cos\theta-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (\cos\theta-1)\psi_1 - i\sin\theta\cdot\psi_2 \\ i\sin\theta\cdot\psi_1 + \psi_2(-\cos\theta-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \psi_1(\cos\theta-1) - \psi_2 i\sin\theta = 0 \\ \psi_1 i\sin\theta - \psi_2(-\cos\theta-1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sin\theta \\ \cos\theta-1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{\sin^2\theta+(\cos\theta-1)^2}}$$

$\underline{\lambda = -1}$

$$\begin{pmatrix} (\cos\theta+1) & -i\sin\theta \\ i\sin\theta & (-\cos\theta+1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \varphi_1(\cos\theta+1) - \varphi_2 i\sin\theta = 0 \\ \varphi_1(i\sin\theta) + \varphi_2(-\cos\theta+1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = i\sin\theta \\ \varphi_2 = \cos\theta - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sin\theta \\ \cos\theta+1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\sin^2\theta + (\cos\theta+1)}}$$

Проверим на ортогональность:

$$\begin{pmatrix} -i\sin\theta \\ \cos\theta+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i\sin\theta \\ \cos\theta-1 \end{pmatrix} = -i^2\sin\theta + (\cos\theta+1)(\cos\theta-1) = (\dots)$$

$$(\dots) = +\sin^2\theta + (\cos^2\theta + \cos\theta - 1 - \cos\theta) = (\dots)$$

$$(\dots) = +\sin^2\theta + \cos^2\theta - 1 = 0 \Rightarrow \text{ортогональны.}$$

Пункт 2: Найти $e^{i\alpha A}$; $e^{\hat{S}} = E + \frac{\hat{S}}{1!} + \frac{\hat{S}^2}{2!} + \dots$

E - единичная матрица.

Рассмотрю $\underline{\text{чётные}}$ степени в ряду

$$e^{i\alpha A} = E + \frac{(i\alpha A)}{1!} + \frac{(i\alpha A)^2}{2!} + \frac{(i\alpha A)^3}{3!} + \dots$$

$$(i\alpha A)^2 = -\alpha^2\begin{pmatrix} \cos\theta & -i\sin\theta \\ i\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -i\sin\theta \\ i\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$= -\alpha^2\begin{pmatrix} \cos^2\theta - i^2\sin\theta & -i\sin\theta\cos\theta + i\sin\theta\cos\theta \\ i\cos\theta\sin\theta - i\cos\theta\sin\theta & -i^2\sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} =$$

$$= -\alpha^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\alpha^2 E$$

Рассмотрим нечётные ~~степ~~ степени в ряде

$$(i\alpha A)^3 = -i\alpha^3 A = -i\alpha^3 \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -i\sin\theta\\ i\sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix} =$$

$$= -i\alpha^3\begin{pmatrix}\cos\theta & -i\sin\theta\\ i\sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix} = -i\alpha^3 A$$

В таком случае позволю себе общественный беспорядок:

$$e^{i\alpha A} = E\left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \dots\right) + iA\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!}\right)$$

А кое-что ведь мы ещё знаем....

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \dots$$

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \dots$$

Тогда мы с ~~...~~вами имеем:

$$e^{i\alpha A} = E\cos\alpha + iA\sin\alpha$$

Тогда же мы можем посчитать:

$$e^{i\alpha A} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}(\cos\alpha) + i\begin{pmatrix}\cos\theta & -i\sin\theta\\ i\sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\sin\alpha$$

Таким образом наше безумие имеет вид:

$$e^{i\alpha A} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & 0\\ 0 & \cos\alpha\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}i\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & -i\cos\theta\end{pmatrix}\sin\alpha$$

$$\Rightarrow e^{i\alpha A} = \begin{pmatrix}\cos\alpha + i\sin\alpha\cos\theta & \sin\alpha\sin\theta\\ -\sin\alpha\sin\theta & \cos\alpha - i\sin\alpha\cos\theta\end{pmatrix}$$

Задание 2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Пункт 1: собст-е значение и векторы (норм-е)

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\lambda & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & i/\sqrt{2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\lambda \end{vmatrix} + \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$-\lambda\left(\lambda^2 + \frac{i^2}{\sqrt{2}^2}\right) + \frac{i}{\sqrt{2}}\left(-\lambda \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$-\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\lambda = 0$$

$$-\lambda^3 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\lambda = 0$$

$$\lambda = \lambda^3 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \end{cases}$$

$\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -1 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\psi_1 - \frac{i}{\sqrt{2}}\psi_2 = 0. \\ \frac{i}{\sqrt{2}}\psi_1 - \psi_2 - \frac{i}{\sqrt{2}}\psi_3 = 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}}\psi_2 - \psi_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi_1 = -i \\ \psi_2 = \sqrt{2} \\ \psi_3 = i \end{cases}$$

$$= \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i \\ \sqrt{2} \\ i \end{pmatrix}$$

$\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 1 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi_1 - \frac{i}{\sqrt{2}}\psi_2 = 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}}\psi_1 + \psi_2 - \frac{i}{\sqrt{2}}\psi_3 = 0 \\ \psi_2 \frac{1}{\sqrt{2}} + \psi_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ \sqrt{2} \\ -i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}$$

$\lambda = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\psi_2 \frac{i}{\sqrt{3}} = 0 \\ \psi_1 \frac{i}{\sqrt{2}} - \psi_3 \frac{i}{\sqrt{2}} = 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}}\psi_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi_1 = 1 \\ \psi_2 = 0 \\ \psi_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\int \frac{d\varphi^*}{dx} \varphi dx =$

$=$

Проверим ортогональность:

$\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i \\ \sqrt{2} \\ i \end{pmatrix}$$

$\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ \sqrt{2} \\ -i \end{pmatrix}.$$

$\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -i \\ \sqrt{2} \\ i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ \sqrt{2} \\ i \end{pmatrix} = -i^2 + 2 - i^2 = 2 - 2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} i \\ \sqrt{2} \\ -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = i - i = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i \\ \sqrt{2} \\ i \end{pmatrix} = -i + i = 0$$

Пункт 2: Найти $e^{i\theta A}$

$$e^{i\theta A} = E + \frac{i\theta A}{1!} + \frac{(i\theta A)^2}{2!} + \frac{(i\theta A)^3}{3!} + \dots$$

E - единичная матрица.

$$(i\theta A)^2 = -\theta^2 \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{\sqrt2} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt2} & 0 & -\frac{i}{\sqrt2} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{\sqrt2} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt2} & 0 & -\frac{i}{\sqrt2} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt2} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\theta^2 \begin{pmatrix} -\frac{i^2}{\sqrt2^2} & 0 & \frac{i^2}{\sqrt2^2} \\ 0 & \frac{-i^2}{2} + \frac{-i^2}{2} & 0 \\ \frac{i^2}{2} & 0 & -\frac{i^2}{2} \end{pmatrix} = -\theta^2 \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Обозначу $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = N \Rightarrow (i\theta A)^2 = -\theta^2 N$

$$(i\theta A)^3 = (i\theta)^3 \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{\sqrt2} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt2} & 0 & -i/\sqrt2 \\ 0 & \frac{i}{\sqrt2} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -i\theta^3 \begin{pmatrix} 0 & -i/\sqrt2 & 0 \\ i/\sqrt2 & 0 & -i/\sqrt2 \\ 0 & i/\sqrt2 & 0 \end{pmatrix} = -i\theta^3 A$$

$$e^{i\theta A} = E + \frac{i\theta A}{1!} + \frac{(i\theta A)^2}{2!} + \dots + N - N$$

$$e^{i\theta A} = N\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right) + iA\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots\right) + E - N$$

$$e^{i\theta A} = I - N + N\cos\theta + iA\sin\theta$$

В нашем случае:

$$e^{i\theta A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\cos\theta}{2} & 0 & -\frac{\cos\theta}{2} \\ 0 & \cos\theta & 0 \\ -\frac{\cos\theta}{2} & 0 & \frac{\cos\theta}{2} \end{pmatrix} +$$

$$+ i \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \sin\theta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{\cos\theta}{2} & 0 & -\frac{\cos\theta}{2} \\ 0 & \cos\theta & 0 \\ -\frac{\cos\theta}{2} & 0 & \frac{\cos\theta}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = (\dots)$$

$$(\dots) = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\theta}{2} & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{1-\cos\theta}{2} \\ -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \cos\theta & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-\cos\theta}{2} & -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{1+\cos\theta}{2} \end{pmatrix} = e^{i\theta A}$$

E – N

Пункт 3: $|\psi\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ разложить в базисе собственных векторов опер-ра A

$$|\psi\rangle = \alpha_1 \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i\\ \sqrt{2}\\ i\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}i\\ \sqrt{2}\\ -i\end{pmatrix}\frac{1}{2} + \alpha_3 \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -\alpha_1 \frac{i}{2} + \alpha_2 \frac{i}{2} + \alpha_3 \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 & (1) \\ \alpha_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + \alpha_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 & (2) \\ \alpha_1 \frac{i}{2} - \alpha_2 \frac{i}{2} + \alpha_3 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (3) = \alpha_3 \frac{2}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \alpha_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = -\alpha_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_2 \frac{i}{2} + \alpha_2 \frac{i}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i\alpha_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_2 = -\frac{1}{2i} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2i}$$

В таком случае $|\psi\rangle = \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i\\ \sqrt{2}\\ i\end{pmatrix} + \frac{(-1)}{2i}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}i\\ \sqrt{2}\\ -i\end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{4i}\begin{pmatrix}-i\\ \sqrt{2}\\ i\end{pmatrix} - \frac{1}{4i}\begin{pmatrix}i\\ \sqrt{2}\\ -i\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Задание 3

$$\hat{T}_a \psi(x) = \psi(x + a)$$

Пункт 1: является ли оператор эрмитовым

По определению если $\hat{T}_a^+ = \hat{T}_a$, то оператор Эрмитов, то есть

$$\langle \varphi | \hat{T}_a \varphi \rangle = \langle \hat{T}_a^+ \varphi | \varphi \rangle = \langle \hat{T}_a \varphi | \varphi \rangle$$

$$\langle \varphi | \hat{T}_a \varphi \rangle = \langle \varphi(x) | \varphi(x+a) \rangle = \int_{-a}^{a} \varphi^*(x) \varphi(x+a)\, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{произвожу} \\ \text{замену } x+a=y \\ \qquad x=y-a \end{array} \right| = -\int_{a}^{-a} \varphi(y-a)\varphi(y)\, dy =$$

$$= \int_{-a}^{a} \varphi(y-a)\varphi(y)\, dy = \langle \hat{T}_a^+ \varphi | \varphi \rangle \neq \langle \hat{T}_a \varphi | \varphi \rangle$$

То есть оператор <u>Не является</u> Эрмитовым.

Пункт 2: Найти $\hat{T}_a^+$

$\hat{T}_a^+$ был определён в реш-и <u>пункта 1</u>:

$$\hat{T}_a^+ \psi(x) = \psi(x-a)$$

Пункт 3: Найти $\hat{T}^+\hat{T}$

$\hat{T}^+\hat{T} = \hat{1}$, могу дать немножко доказать

$$\hat{T}^+\hat{T}\psi(x) = \hat{T}^+\psi(x+a) = \psi(x+a-a) = \psi(x)$$

$$\hat{T}^+\hat{T} = \hat{1} \text{ единичный оператор}$$

~~Пункт~~ 4: Найти ядро оператора $T(x, x')$

$$\int_a^b T(x,x')\psi(x')dx' = \psi(x+a)$$

$$\hat{T}_a \psi(x) = \psi(x+a) = \int \delta(x+a-x')\psi(x') =$$

$$= \int T_a(x,x')\psi(x')dx' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{T}_a(x,x') = \delta(x+a-x')$$

Задание 4 ~~Пункт~~ 4 ядро опер

~~1~~ ~~$\frac{1}{\ }$~~ $\frac{d}{\ }$ $\frac{d}{\ }$ x^2)

Задание 4 $\quad \hat{S} = \alpha\left(x^2\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}x^2\right)$

Пункт 1: Найти $\hat{S}^+$

$$\langle \hat{S}^+\varphi|\varphi\rangle = \langle\varphi|\hat{S}\varphi\rangle$$

$$\langle\varphi|\hat{S}\varphi\rangle = \int_a^b \varphi^*\hat{S}\varphi\, dx = \int_a^b \varphi^*\left(\alpha\left(x^2\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d(\varphi x^2)}{dx}\right)\right)dx$$

$$= \int_a^b \alpha\varphi^*\left(x^2\frac{d\varphi}{dx} - \frac{dx^2\varphi}{dx}\right)dx = \cancel{\varphi^*\varphi\Big|_a^b}^{\,0} - (\ldots)$$

$$(\ldots) = \alpha\int_a^b\left(x^2\frac{d\varphi^*}{dx} - \frac{dx^2\varphi^*}{dx}\right)\varphi\, dx =$$

$$= \int_a^b\left(-\alpha^*\left(x^2\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}x^2\right)\varphi^*\right)\varphi\, dx = \langle\hat{S}^+\varphi^*|\varphi\rangle$$

Пункт 2: Есть ли α такие, что $\hat{S}$ эрмитов?

$$\langle\hat{S}^+\varphi^*|\varphi\rangle = \langle\varphi^*|\hat{S}\varphi\rangle$$

$$\hat{S}^+ = \hat{S} \Rightarrow -\alpha^*\left(x^2\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}x^2\right) = \alpha\left(x^2\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}x^2\right)$$

$-\alpha^* = \alpha \Rightarrow$ Может при $\alpha = iC$, $C = \mathrm{const}$.

Пункт 3: ядро оператора $S(x, x')$ — ?

Задание 4 пункт 4 ядро оператора

~~$\hat S = \alpha\left(x^2\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}x^2\right)$~~

~~$\hat S$ = Обозначу $A = x^2$~~
~~$B = \psi(x)$~~

~~$\frac{d(AB)}{dx} =$~~

$$\hat S = \alpha\left(x^2\frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}x^2\right)$$

$$\hat S\psi = \alpha\left(x^2\frac{d\psi}{dx} - \frac{dx^2\psi}{dx}\right) = \left|\frac{dx^2\psi}{dx} = x^2\frac{d\psi}{dx} + \psi\frac{dx^2}{dx}\right| =$$

$$= -2\alpha x\psi = \int -2\alpha x\,\delta(x-x')\,\psi(x')\,dx' =$$

$$= \int S(x,x')\,\psi(x')\,dx' \Rightarrow S(x,x') = -2\alpha x\,\delta(x-x')$$

Задание 5 $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Пункт 1: показать, что $B^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$B^{-1}B = E \Rightarrow \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & db-db \\ -ac+ac & -bc+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ad-bc}{ad-bc} & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{ad-bc} \end{pmatrix}$

$B^{-1}B = E = \begin{pmatrix} \frac{ad-bc}{ad-bc} & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{ad-bc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Пункт 2: O^t

$O(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$O^t = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Пункт 3: O^{-1}

1. определитель
2. Союзная матрица

$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \neq 0 \Rightarrow O^{-1} \exists!$

Союзная матрица: $O^*(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Транспонированная союзная $(O^*)^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = O^{-1}$

Задание 6

$\langle \varphi | \hat{A} \psi \rangle = \langle \hat{A}^{+} \varphi | \psi \rangle$

доказать $(\hat{A}\hat{B})^{+} = \hat{B}^{+}\hat{A}^{+}$

$\langle \hat{A}^{+}\hat{B}^{+}\varphi | \psi \rangle = \langle \hat{B}^{+}\varphi | \hat{A}\psi \rangle = \langle \varphi | BA\psi \rangle = \langle (BA)^{+}\varphi | \psi \rangle$

$\langle \varphi | \hat{A}\hat{B}\psi \rangle = \langle \hat{A}^{+}\varphi | \hat{B}\psi \rangle = \langle \hat{B}^{+}\hat{A}^{+}\varphi | \psi \rangle = \langle (\hat{A}\hat{B})^{+}\varphi | \psi \rangle$

Задание 7 $\hat{A}$ полож-о опред-н, если $\langle \varphi | \hat{A} | \varphi \rangle > 0$

Доказать, что для любого линейного оператора $\hat{C}$ оператор $\hat{C}^{+}\hat{C}$ положительно определен.

Допустим имеем вектор $u \in V$ он собственный, отвечает собственному значению $\lambda \neq 0$ $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda = \frac{(\lambda u, u)}{(u, u)} = \frac{(\hat{C}^{+}\hat{C}u, u)}{\|u\|^2} = \frac{(\hat{C}u, \hat{C}u)}{\|u\|^2}$$

Тогда имеем $\dfrac{\|\hat{C}u\|^2}{\|u\|^2} > 0$.

P.S. очевидно, что при этом $\hat{C}^{+}\hat{C}$ является эрмитовым оператором

$(\hat{C}^{+}\hat{C})^{+} = \hat{C}^{+}\hat{C}^{++} = \hat{C}^{+}\hat{C}$

$$\frac{\|\hat{C}u\|^2}{\|u\|^2} > 0$$ доказано.