

Laboratorium 1

Metody obliczeniowe w nauce i technice

Mateusz Ryś

13 Marca 2025

1. Treści zadań

1. Znaleźć "maszynowe epsilon", czyli najmniejszą liczbę ϵ , taką że $a + \epsilon > a$

2. Rozważamy problem ewaluacji funkcji $\sin(x)$, m.in. propagację błędów danych wejściowych, tj. błąd wartości funkcji ze względu na zakłócenie h w argumentie x : a) Ocenić błąd bezwzględny przy ewaluacji $\sin(x)$

b) Ocenić błąd względny przy ewaluacji $\sin(x)$

c) Ocenić uwarunkowanie dla tego problemu

d) Dla jakich wartości argumentu x problem jest bardzo czuły ?

3. Funkcja sinus zadana jest nieskończonym ciągiem

a) $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$

b) Jakie są błędy progresywny i wsteczny jeśli przybliżamy funkcję sinus biorąc tylko pierwszy człon rozwinięcia, tj. $\sin(x) \approx x$, dla $x = 0.1, 0.5$ i 1.0 ?

c) Jakie są błędy progresywny i wsteczny jeśli przybliżamy funkcję sinus biorąc pierwsze dwa człony rozwinięcia, tj. $\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6}$, dla $x = 0.1, 0.5$ i 1.0 ?

4. Zakładamy że mamy znormalizowany system zmiennoprzecinkowy z $\beta = 10$, $p = 3$, $L = -98$

a) Jaka jest wartość poziomu UFL (underflow) dla takiego systemu ?

b) Jeśli $x = 6.87 \times 10^{(-97)}$ i $y = 6.81 \times 10^{(-97)}$, jaki jest wynik operacji $x - y$?

2. Rozwiązania zadań

2.1 Zadanie 1

Na wstępie powiedzmy coś o standardzie IEEE 754 w którym zapisuje się liczby zmiennoprzecinkowe. Zapisuje się je na 32 bitach gdzie pierwszy bit przeznaczony jest na znak, 8 na wykładnik, a pozostałe 23 przeznacza się na mantysę

S EEEEEEEE MMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMM

Głównym celem naszego zadania jest znalezienie "maszynowego epsilon" czyli najmniejszej liczby która po jej dodaniu do jedynki daje liczbę większą od 1 to znaczy $a+1 > a$. Szukamy owej liczby dzieląc liczbę a przez 2 do momentu gdy dodanie jej do 1 nie da 1. Poniżej wklejam algorytm który szuka epsilon

```
import numpy as np

epsilon = np.float32(1.0)
epsilon_last = epsilon

while epsilon + np.float32(1.0) > 1:
    epsilon_last = epsilon
    epsilon = epsilon/np.float32(2.0)

print("Maszynowy epsilon dla float32 to:",epsilon_last)
```

Wynikiem powyższego algorytmu jest:

Maszynowy epsilon dla float32 to: 1.1920929e-07

2.2 Zadanie 2

a) Błąd bezwzględny - czyli różnica wartości przybliżonej do wartości rzeczywistej:

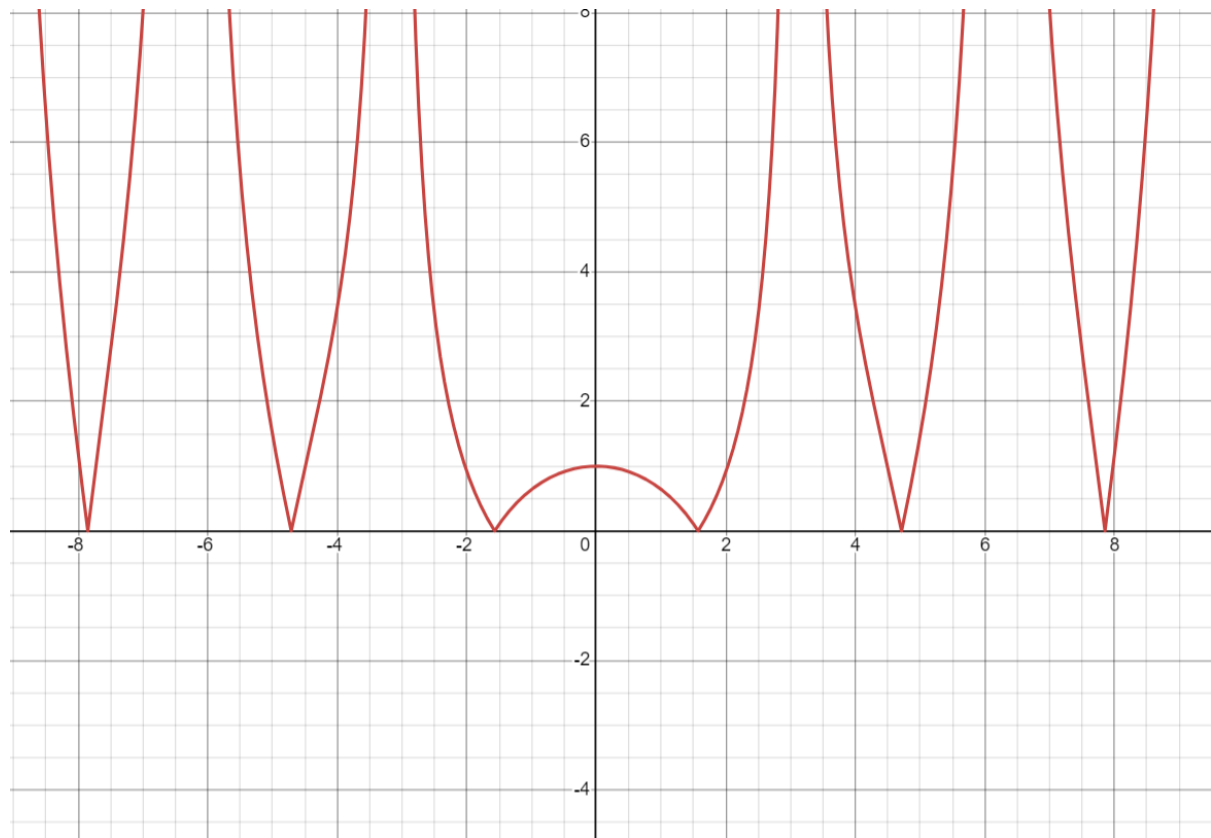
$$\Delta \sin(x) = |\sin(x + h) - \sin(x)|$$

b) Błąd względny - jest to iloraz błędu względnego z wartością rzeczywistą:

$$\frac{\Delta f(x)}{f(x)} = \frac{\Delta \sin(x)}{\sin(x)} = \frac{|\sin(x + h) - \sin(x)|}{\sin(x)}$$

c) Uwarunkowania

$$\text{cond}(f(x)) = \left| \frac{x f'(x)}{f(x)} \right|$$



Rys 1: Wykres funkcji uwarunkowania