Laboratorium 1

Metody obliczeniowe w nauce i technice

Mateusz Ryś

13 Marca 2025

1.Treści zadań

1.Znaleźć "maszynowe epsilon", czyli najmniejszą liczbę a, taką że a+1>1

2.Rozważamy problem ewaluacji funkcji sin(x), m.in. propagację błędu danych wejściowych, tj. błąd wartości funkcji ze względu na zakłócenie h w argumencie x:

a) Ocenić błąd bezwzględny przy ewaluacji sin(x)

b) Ocenić błąd względny przy ewaluacji sin(x)

c) Ocenić uwarunkowanie dla tego problemu

d) Dla jakich wartości argumentu x problem jest bardzo czuły ?

3.Funkcja sinus zadana jest nieskończonym ciągiem

a) $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$

b) Jakie są błędy progresywny i wsteczny jeśli przybliżamy funkcję sinus biorąc tylko pierwszy człon rozwinięcią, tj.sin(x) ≈ x, dla x = 0.1, 0.5 i 1.0 ?

c) Jakie są błędy progresywny i wsteczny jeśli przybliżamy funkcję sinus biorąc pierwsze dwa człony rozwinięcią, tj.sin(x) ≈ x - $\frac{x^3}{6}$, dla x = 0.1, 0.5 i 1.0 ?

4.Zakładamy że mamy znormalizowany system zmiennoprzecinkowy z β = 10, p = 3, L = −98

a) Jaka jest wartość poziomu UFL (underflow) dla takiego systemu ?

b) Jeśli x = 6.87 x 10^{-97} i y = 6.81 x 10^{-97}, jaki jest wynik operacji x − y ?

2. Rozwiązania

2.1 Zadanie 1

Na wstępie powiedzmy coś o standardzie IEEE 754 w którym zapisuje się liczby zmiennoprzecinkowe. Zapisuje się je na 32 bitach gdzie pierwszy bit przeznaczony jest na znak, 8 na wykładnik, a pozostałe 23 przeznacza się na mantyse

S EEEEEEEE MMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMM

Głównym celem naszego zadania jest znalezienie "maszynowego epsilonu" czyli najmniejszej liczby która po jej dodaniu do jedynki daje liczbę większą od 1 to znaczy a+1 > a. Szukamy owej liczby dzieląc liczbę a przez 2 do momentu gdy dodanie jej do 1 nie da 1. Poniżej wklejam algorytm który szuka epsilonu.

```python
import numpy as np

epsilon = np.float32(1.0)
epsilon_last = epsilon

while epsilon + np.float32(1.0) > 1:
    epsilon_last = epsilon
    epsilon = epsilon/np.float32(2.0)

print("Maszynowy epsilon dla float32 to:",epsilon_last)
```

Wynikiem powyższego algorytmu jest:

```
Maszynowy epsilon dla float32 to: 1.1920929e-07
```

2.2 Zadanie 2

a) Błąd bezwzględny - czyli różnica wartości przybliżonej do wartości rzeczywistej:

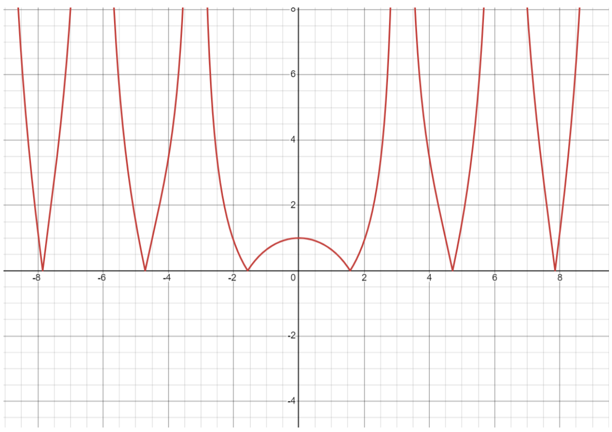
$$\Delta f(x) = \Delta \sin(x) = |\sin(x+h) - \sin(x)|$$

b) Błąd względny - jest to iloraz błędu względnego z wartością rzeczywistą:

$$\frac{\Delta f(x)}{f(x)} = \frac{\Delta \sin(x)}{\sin(x)} = \frac{|\sin(x+h) - \sin(x)|}{\sin(x)}$$

c) Uwarunkowania

$$\operatorname{cond}(f(x)) = \left|\frac{x f'(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{x\cos(x)}{\sin(x)}\right|$$



Wykres funkcji uwarunkowania

d) Problem jest czuły w sytuacji gdzie funkcja uwarunkowana zmieża do ∞, czyli dla $x = k\pi$. Za to najlepiej uwarunkowana będzie kiedy cond zmieża do 0, czyli dla $x = k\pi + \frac{1}{2}\pi$

2.3 Zadanie 3

Przyjmując $\hat{y}$ to przybliżenie dla $y = f(x)$ możemy wyznaczyć błędy takie jak:

- Błąd progresywny: $|\Delta y| = |\hat{y} - y|$
- Błąd wsteczny: $|\Delta x| = |\hat{x} - x|$, gdzie $f(\hat{x}) = \hat{y}$

a) Dla przybliżenia $\sin(x) \approx x$ błędy w ogólności wynoszą:

- Błąd progresywny: $|x - \sin(x)|$

- Błąd wsteczny: $|\arcsin(x) - x|$

Podstawmy zadane wartości.

1. dla $x = 0.1$ mamy $\sin(0.1) \approx 0.1$:

- Błąd progresywny: $|\Delta y| = |0.1 - \sin(0.1)| \approx 0.000166583$
- Błąd wsteczny: $|\Delta x| = |\arcsin(0.1) - 0.1| \approx 0.000167421$

2. dla $x = 0.5$ mamy $\sin(0.5) \approx 0.5$:

- Błąd progresywny: $|\Delta y| = |0.5 - \sin(0.5)| \approx 0.0205745$
- Błąd wsteczny: $|\Delta x| = |\arcsin(0.5) - 0.5| \approx 0.0235988$

3. dla $x = 1$ mamy $\sin(1) \approx 1$:

- Błąd progresywny: $|\Delta y| = |1 - \sin(1)| \approx 0.15852901$
- Błąd wsteczny: $|\Delta x| = |\arcsin(1) - 1| \approx 0.5707963$

b) Dla przybliżenia $\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!}$ błędy w ogólności wynoszą:

- Błąd progresywny: $|\left(x - \frac{x^3}{3!}\right) - \sin(x)|$
- Błąd wsteczny: $|\arcsin\left(x - \frac{x^3}{3!}\right) - x|$

1. dla $x = 0.1$ mamy $\sin(0.1) \approx 0.1 - \frac{(0.1)^3}{6}$:

- Błąd progresywny: $|\Delta y| = |\left(0.1 - \frac{(0.1)^3}{6}\right) - \sin(0.1)| \approx 0.0000000833135$
- Błąd wsteczny: $|\Delta x| = |\arcsin\left(0.1 - \frac{(0.1)^3}{6}\right) - 0.1| \approx 0.0000000837318$

2.dla $x = 0.5$ mamy $\sin(0.5) \approx 0.5 - \frac{(0.5)^3}{6}$:

- Błąd progresywny: $|\Delta y| = |\left(0.5 - \frac{(0.5)^3}{6}\right) - \sin(0.5)| \approx 0.000258872$
- Błąd wsteczny: $|\Delta x| = |\arcsin\left(0.5 - \frac{(0.5)^3}{6}\right) - 0.5| \approx 0.000294959$

3.dla $x = 0.5$ mamy $\sin(1) \approx 1 - \frac{1}{6}$:

- Błąd progresywny: $|\Delta y| = |\left(1 - \frac{1}{6}\right) - \sin(1)| \approx 0.00813765$
- Błąd wsteczny: $|\Delta x| = |\arcsin\left(1 - \frac{1}{6}\right) - 1| \approx 0.01488921$

Wnioski

Wzięcie dwóch członów z szeregu dało nam bardziej dokładny wynik niż w przypadku wzięcia tylko pierwszego. Wynika to z faktu, że błędy dla przypadku dokładniejszego wzoru jest mniejsze.

4. Zadanie 4

a) Wartość poziomu UFL to najmniejsza wartość dodatnia, którą można zapisać w danym systemie. Tu nasuwają się dwa wnioski. Po pierwsze mantysa musi wynosić 1, a po drugie wykładnik jest jak najmniejszy. Zatem mamy:

$$\mathrm{UFL} = \beta^L = 10^{-98}$$

b) Mamy zatem

$$x - y = 6.87 \times 10^{-97} - 6.81 \times 10^{-97}$$

$$x - y = 6 \times 10^{-99}$$

Wynik jest mniejszy niż wynosi UFL więc w danym systemie nie jest możliwe do przedstawienia. Stąd przyjmujemy, że w owym systemie zmiennoprzecinkowym:

$$x - y = 0$$

3. Bibliografia

1. Katarzyna Rycerz, wykład z przedmiotu Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice
2. Michael T. Heath, Scientific Computing: An Introductory Survey. Chapter 1 - Scientific Computing
3. https://pl.wikipedia.org/wiki/IEEE_754
4. https://en.wikipedia.org/wiki/Machine_epsilon
5. Wykres wykonany w Desmos: https://www.desmos.com/calculator?lang=pl
6. Obliczenia wykonane w Wolfram|Alpha: https://www.wolframalpha.com/