# Laboratorium 1

# Metody obliczeniowe w nauce i technice

**Mateusz Ryś**

**25 marca 2025**

## 1. Treści zadań oraz zadania domowe

### Zadania

**1.** Dane są trzy węzły interpolacji (-1,2.4), (1,1.8), (2,4.5), proszę obliczyć wielomian interpolacyjny 2-go stopnia, wykorzystując:

**a)** jednomiany

**b)** wielomiany Lagrange'a

**c)** wielomiany wg wzoru Newton'a

Pokazać że trzy reprezentacje dają ten sam wielomian

**2.** Wyrazić następujący wielomian metodą Hornera: $p(t) = 3t^3 - 7t^2 + 5t - 4$

**3.** Ile mnożeń trzeba wykonać do ewaluacji wielomianu p(t) stopnia n-1 w danym punkcie t jeżeli wybieramy jako reprezentacje:

**a)** jednomiany

**b)** wielomiany Lagrange'a

**c)** wielomiany Newtona

### Zadania domowe

**1.** Znaleźć kompromis między granicą błędu a zachowaniem wielomianu interpolacyjnego dla funkcji Rungego f(t) = 1/(1 + 25t^2), dla równoodległych węzłów na przedziale [−1,1]

**2.** (a) sprawdzić czy pierwsze siedem wielomianów Legendre'a są wzajemnie ortogonalne

(b) sprawdzić czy one spełniają wzór na rekurencję

(c) wyrazić każdy z sześciu pierwszych jednomianów 1, t, …, t^6 jako liniową kombinację pierwszych siedmiu wielomianów Legendre'a, p0, …, p6

**3.** Dana jest funkcja określona w trzech punktach x0, x1, x2,

rozmieszczonych w jednakowych odstępach (x1=x0+h, x2=x1+h):

f(x0) = y0, f(x1) = y1, f(x2) = y2

Proszę wykonać interpolację danej funkcji sklejanymi funkcjami sześciennymi.

## 2. Rozwiązania zadań z labolatorium

### 2.1 Zadanie 1

W zadaniu mamy obliczyć wielomian interpolacyjny 2-go stopnia na 3 sposoby.

**a)** W tym podpunkcie mamy go uzyskać za pomocą jednomianów. Wielomian ten będzie miał postać $P(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie w każdym punkcie $(x, y)$ zachodzi $P(x) = y$. Układamy układ równań, który wygląda następująco

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 1.8 \\ 4.5 \end{bmatrix}$$

Rozwiązaniem naszego równania jest

$$(a, b, c) = (1, -0.3, 1.1)$$

Więc nasz wielomian ma postać:

$$P(x) = x^2 - 0.3x + 1.1$$

**b)** Funkcja interpolująca wielomianami Lagrange'a wygląda następująco:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x)$$

W tym wzorze $f(x)$ to współczynniki, a $L_i(x)$ to baza Lagrange'a, która wyraża się wzorem:

$$L_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Nadajmy więzłom interpolacji indexy, by łatwiej było rozpoznać, który gdzie został wykorzystany:

$$(x_0, y_0) = (-1, 2.4)$$
$$(x_1, y_1) = (1, 1.8)$$
$$(x_2, y_2) = (2, 4.5)$$

Wyliczmy teraz odpowiednie bazy Lagrange'a:

$$L_0 = \Pi_{i=1,2}^{2} \frac{x - x_i}{x_0 - x_i} = \left(\frac{x-1}{-1-1}\right)\left(\frac{x-2}{-1-2}\right) = \frac{x^2}{6} - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$$
$$L_1 = \Pi_{i=0,2}^{2} \frac{x - x_i}{x_1 - x_i} = \left(\frac{x+1}{1+1}\right)\left(\frac{x-2}{1-2}\right) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 1$$
$$L_2 = \Pi_{i=0,1}^{2} \frac{x - x_i}{x_2 - x_i} = \left(\frac{x+1}{2+1}\right)\left(\frac{x-1}{2-1}\right) = \frac{x^2}{3} - \frac{1}{3}$$

Mając wartości baz nie pozostaje nam nic innego jak podstawienie ich oraz wartości y do wzoru na $P_2(x)$

$$P_2(x) = 2.4\left(\frac{x^2}{6} - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right) + 1.8\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + 1\right) + 4.5\left(\frac{x^2}{3} - \frac{1}{3}\right)$$
$$P_2(x) = x^2 - 0.3x + 1.1$$

**c)** Teraz chcemy wyznaczyć ów wielomian za pomocą wzoru Newtona. Ma on następującą postać:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$
$$a_k = f[x_0, x_1, ..., x_k]$$

$a_k$ to iloraz różnicowy rzędu k dla funkcji f. Obliczamy go w sposób następujący:

$$f[x_0] = f(x_0)$$
$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$
$$f\left[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+j}\right] = \frac{f\left[x_{i+1}, x_{i+2}, ..., x_{i+j}\right] - f\left[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+j-1}\right]}{x_{i+j} - x_i}$$

Nasz wielomian więc ma postać:

$$P_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

Indexowanie punktów tu jest takie same jak w podpunkcie b. Teraz obliczmy interesujące nas współczynniki a:

$$f[x_0] = f(x_0) = 2.4$$
$$f[x_1] = f(x_1) = 1.8$$
$$f[x_2] = f(x_2) = 4.5$$
$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{1.8 - 2.4}{1 + 1} = -0.3$$
$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{4.5 - 1.8}{2 - 1} = 2.7$$
$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{2.7 + 0.3}{2 + 1} = 1$$

Obliczywszy potrzebne współczynniki możemy podstawić do wzoru:

$$P_2(x) = 2.4 + (-0.3)(x + 1) + (x + 1)(x - 1)$$
$$P_2(x) = x^2 - 0.3x + 1.1$$

## Wnioski

Jak można zauważyć, dostaliśmy za każdym razem ten sam wielomian. Nie ważne z którego sposobu się skorzystało to za każdym razem wynikiem był wielomian

$$x^2 - 0.3x + 1.1$$

## 2.2 Zadanie 2

Podany wielomian przedstawiony metodą Hornera prezentuje się następująco:

$$p(t) = 3t^3 - 7t^2 + 5t - 4$$
$$p(t) = t(3t^2 - 7t + 5) - 4$$
$$p(t) = t(t(3t - 7) + 5) - 4$$

### Wnioski

Aby uzyskać postać Hornera, wyłączamy t przed nawias, aż dopóki będą istniały chociaż dwa składniki, które mają t różnego stopnia. Wyrazy wolne są po prostu dodawane poza nawiasem.

## 2.3 Zadanie 3

To zadanie polega na tym, że mamy określić ile mnożeń trzeba wykonać do ewaluacji wielomianu p(t) dla podanej reprezentacji.

**a)** W tym podpunkcie rozpatrujemy reprezentacje jednomienną. Wielomian jest postaci:

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_{n-1} t^{n-1}$$

Więc żeby obliczyć wartość owego wielomianu, trzeba wykonać n-1 mnożeń.

**b)** Najpierw przypomnijmy sobie wzór na bazę Lagrange'a dla wielomianu stopnia $n - 1$:

$$L_k(t) = \prod_{i=0, i \neq k}^{n-1} \frac{t - t_i}{t_k - t_i}$$

oraz sam wielomian:

$$P_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k) L_k(x)$$

Jak przeanalizujemy wzór na bazę, to widać, że wykonuejmy operację mnożenia n-1 czynników (bo nie bierzemy sytuacji gdzie $i = k$), więc tu mamy $n - 2$ operacji mnożenia. Bazy wyznaczamy dla indexów $0, ..., n - 1$, czyli dla samych baz mamy $n(n - 2)$ operacji mnożenia. Oczywiście każda baza jest przemnożona jeszcze przez wartość $f(t_k)$, więc musimy dodać jeszcze n do naszej liczby operacji. Zatem odpowiedź dla tego podpunktu to $n(n - 2) + n$.

**c)** Wzór na wielomian według wzoru Newtona można zapisać w taki sposób:

$$P_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k q_{k(x)}$$

gdzie $q_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$. W przypadku $q_k(x)$ mamy $k - 1$ operacje mnożenia. Jak liczymy naszą sumę, każdy składnik $q_k$ przemnażamy przez $a_k$. Daje nam to dla każdego składniku $(k - 1) + 1 = k$ operacji mnożenia. Suma składa się z n składników, dla których wykonujemy tyle operacji mnożeń, ile wynosi jego index. Do wyliczenia ilości mnożeń można finalnie skorzystać z sumy początkowych wartości ciągu arytmetycznego, czyli:

$$S_n = \frac{0 + n - 1}{2} n = \frac{n - 1}{2} n$$

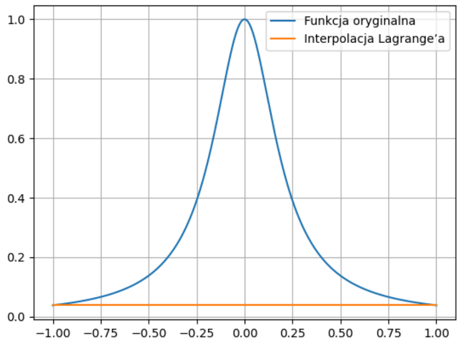
# 3. Zadania domowe

## 3.1 Zadanie 1

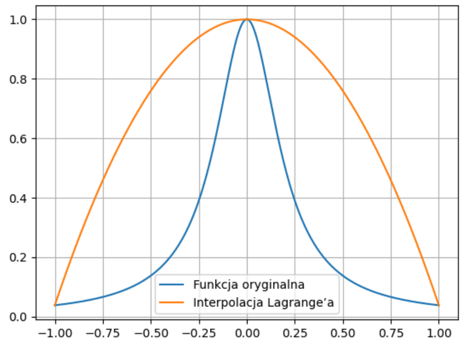
W implementacji tego zadania skorzystałem z biblioteki scipy by móc skorzystać z interpolacji metodą Lagrange'a. Poniższy kod rysuje wykresy wielomianów, powstałych w wyniku interpolacji funkcji Rungego dla $n \in \{2, ..., 10\}$.

```
from scipy.interpolate import lagrange
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return 1/(1 + 25*x**2)

def create_nodes(node):
    arr = []
    step = 2.0/(node-1)
    current_val = -1.0

    for i in range(node-1):
        arr.append(current_val)
        current_val += step

    arr.append(1.0)
    return arr

if __name__ == "__main__":
    n = [i for i in range(2,11)]

    for node in n:
        x = create_nodes(node)
        val_nodes = [f(element) for element in x]
        y = lagrange(x,val_nodes)

        x_plot = np.linspace(-1, 1, 500)
        plt.plot(x_plot, f(x_plot), label="Funkcja oryginalna")
        plt.plot(x_plot, y(x_plot), label="Interpolacja Lagrange'a")
        plt.legend()
        plt.grid()
        plt.show()
```

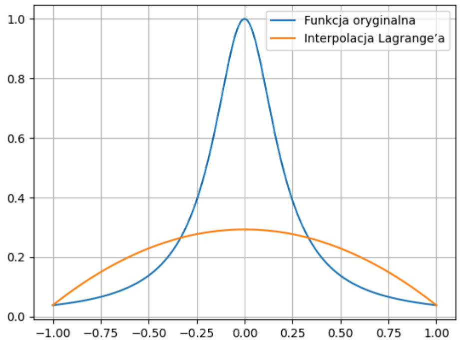
Wynikiem programu są następujące wykresy:



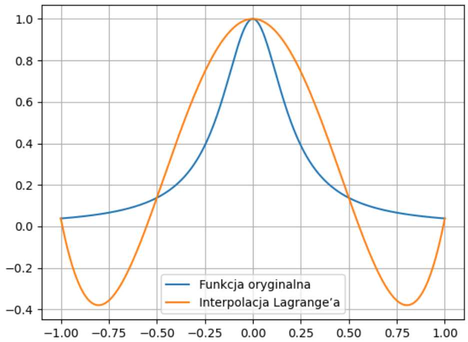

Funkcja dla n=2



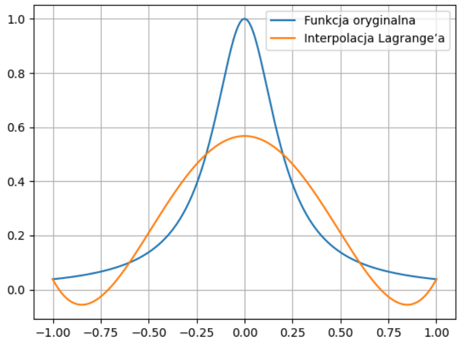

Funkcja dla n=3



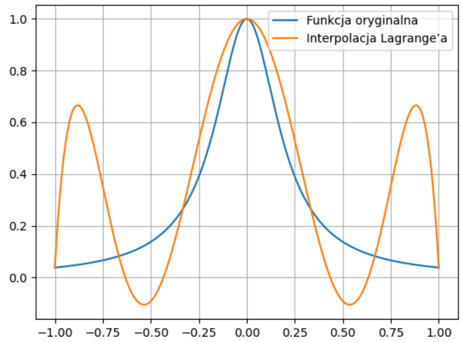

Funkcja dla n=4



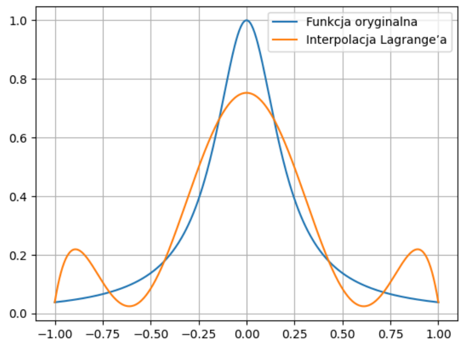

Funkcja dla n=5



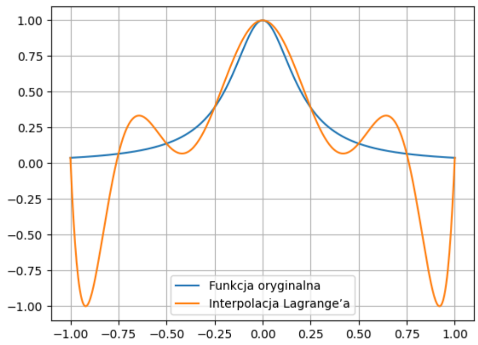

Funkcja dla n=6



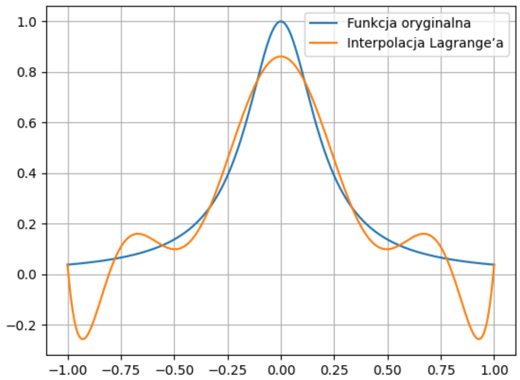

Funkcja dla n=7




Funkcja dla n=8




Funkcja dla n=9




Funkcja dla n=10

Z powyższych wykresów, można wywnioskować, że dla n nieparzystych mamy większą rozbierzność niż dla parzystych. Najbliższe są wykres 8 i 10, ale w przypadku tego ostatniego na krańcach mamy większą rozbierzność, dlatego za kompromis można uważać n = 8.

## 3.2 Zadanie 2

W tym zadaniu będziemy zajmować się wielomianami Legendre'a. Wyrażają się następującym wzorem

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, n \in \mathbb{N}$$

**a)** Sprawdźmy czy pierwsze 7 wielomianów jest ortogonalnych. Więc najpierw wypiszmy wzory na te wielomiany

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$
$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$
$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$
$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$
$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$$

Aby te wielomiany były ortogonalne, musi zachodzić:

$$\forall_{n,m\in\{0,\ldots,6\},n\neq m} \int_{-1}^{1} P_n P_m dx = 0$$

Przyjmujemy, że $m < n$. Zatem:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \int_{-1}^{1} P_m(x)\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n dx$$

Teraz trzeba będzie pomnożyć obustronnie przez $2^n n!$ by uprościć wyrażenie

$$2^n n! \int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \int_{-1}^{1} P_m(x)\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n dx =$$
$$= \int_{-1}^{1} P_m(x)\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n dx$$

Teraz całkujemy przez części ($u = P_m(x), v' = \frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n$ i otrzymujemy:

$$\underbrace{\left[P_m(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^2 - 1\right)^n\right]_{-1}^{1}}_{\text{Zawsze 0, przez to, że dla 1 i -1 drugi człon jest 0}} - \int_{-1}^{1} P_m'(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^2 - 1\right)^n dx =$$

$$= -\int_{-1}^{1} P_m'(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^2 - 1\right)^n dx$$

Dostajemy rekurencyjny wzór, który można zastosować n-krotnie, więc:

$$2^n n! \int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = (-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{d^n P_m(x)}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n dx$$
$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^{1} \frac{d^n P_m(x)}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n dx$$

Skorzystajmy teraz z naszego założenia. Tzn. $m < n$, więc $\frac{d^n P_m(x)}{dx^n} = 0$, więc prawa strona równania zawsze jest równa 0, stąd:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0$$

Oznacza to, że kolejne wielomiany Legendre'a są ortogonalne zawsze, niezależnie ile weźmiemy pod uwagę. Tzn. że pierwsze 7 wielomianów również są wzajemnie ortogonalne.

**b)** Weźmy teraz pod lupę wzór rekurencyjny. Wygląda on tak:

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x), n \in \mathbb{N} \quad \text{i}$$

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$

Oczywiście pierwsze dwa się zgadzają z wielomnianami $P_0, P_1$. Wyznaczmy resztę. Rozpiszę dla P_2 dokładnie jak obliczenia przebiegały, a resztę zrobię analogicznie i przedstawię tylko wynik.

$$P_2(x) = \frac{2+1}{2} x P_1(x) - \frac{1}{2} P_0(x) =$$
$$\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3x^3 - 1)$$

Powyżej pod n podstawiam liczbę o 1 mniejszą niż mamy w indexie. Przejdźmy do pozostałych wartości.

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$$

Wszystkie powyższe wielomiany są zgodne z pierwszymi siedmioma wielomianami Legendre'a.

**c)** Teraz trzeba podane jednomiany przedstawić za pomocą kombinacji liniowej wielomianów Legendre'a, które analizowaliśmy w poprzednich podpunktach.

- Dla $t^0 = 1$:

$$1 = P_0$$

- Dla $t$:

$$t = P_1$$

- Dla $t^2$:

$$P_2 = \frac{1}{2}(3t^2 - 1) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{3}{2}t^2 = P_2 + \frac{1}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t^2 = \frac{2}{3}P_2 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_0$$

- Dla $t^3$:

$$P_3 = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t) = \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{5}{2}t^3 = P_3 + \frac{3}{2}t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t^3 = \frac{2}{5}P_3 + \frac{3}{5}t = \frac{2}{5}P_3 + \frac{3}{5}P_1$$

- Dla $t^4$:

$$P_4 = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3) = \frac{35}{8}t^4 - \frac{30}{8}t^2 + \frac{3}{8} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{35}{8}t^4 = P_4 + \frac{30}{8}t^2 - \frac{3}{8} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t^4 = \frac{8}{35}P_4 + \frac{30}{35}\left(\frac{2}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_0\right) - \frac{3}{35}P_0 =$$
$$= \frac{8}{35}P_4 + \frac{20}{35}P_2 + \frac{7}{35}P_0$$

- Dla $t^5$:

$$P_5 = \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15t) = \frac{63}{8}t^5 - \frac{70}{8}t^3 + \frac{15}{8}t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{63}{8}t^5 = P_5 + \frac{70}{8}t^3 - \frac{15}{8}t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t^5 = \frac{8}{63}P_5 + \frac{70}{63}t^3 - \frac{15}{63}t = \frac{8}{65}P_5 + \frac{28}{63}P_3 + \frac{27}{63}P_1$$

- Dla $t^6$:

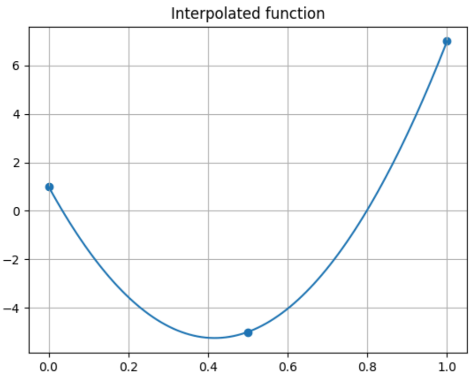
$$P_6 = \frac{1}{16}(231t^6 - 315t^4 + 105t^2 - 5) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t^6 = \frac{16}{231}P_6 + \frac{315}{231}t^4 - \frac{105}{231}t^2 + \frac{5}{231} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t^6 = \frac{1}{231}(16P_6 + 72P_4 + 110P_2 + 33P_0)$$

### 3.3 Zadanie 3

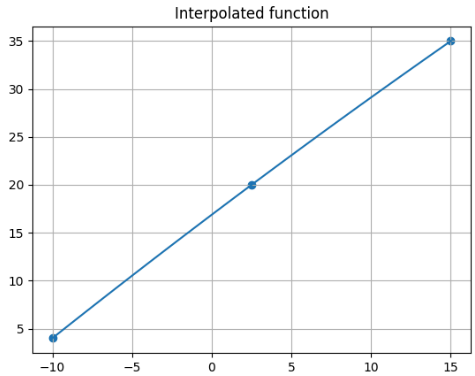
Rozważamy 3 punkty równo rozmieszczone z podanymi wartościami. Naszym zadaniem było wykonać interpolację danej funkcji sklejanymi funkcjami sześciennymi. Zadanie zostało wykonane za pomocą poniższego kodu napisanego w języku Python. Tutaj również korzystam z biblioteki scipy, ale używam innej funkcji. Mianowicie CubicSpline.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.interpolate import CubicSpline



if __name__ == "__main__":
    #data
    x = input("Enter two edges for interval (with spaces): ").split()
    y = input("Enter three values of your function (with spaces): ").split()
    x = list(map(float,x))
    y = list(map(float,y))
    x1 = (x[1] + x[0]) / 2
    x.insert(1, x1)

    #interpolate
    cub_sp = CubicSpline(x,y)
    x_inter = np.linspace(min(x),max(x),100)
    y_inter = cub_sp(x_inter)

    #plot
    plt.plot(x_inter,y_inter)
    plt.title("Interpolated function")
    plt.scatter(x,y)
    plt.grid()
    plt.show()
```

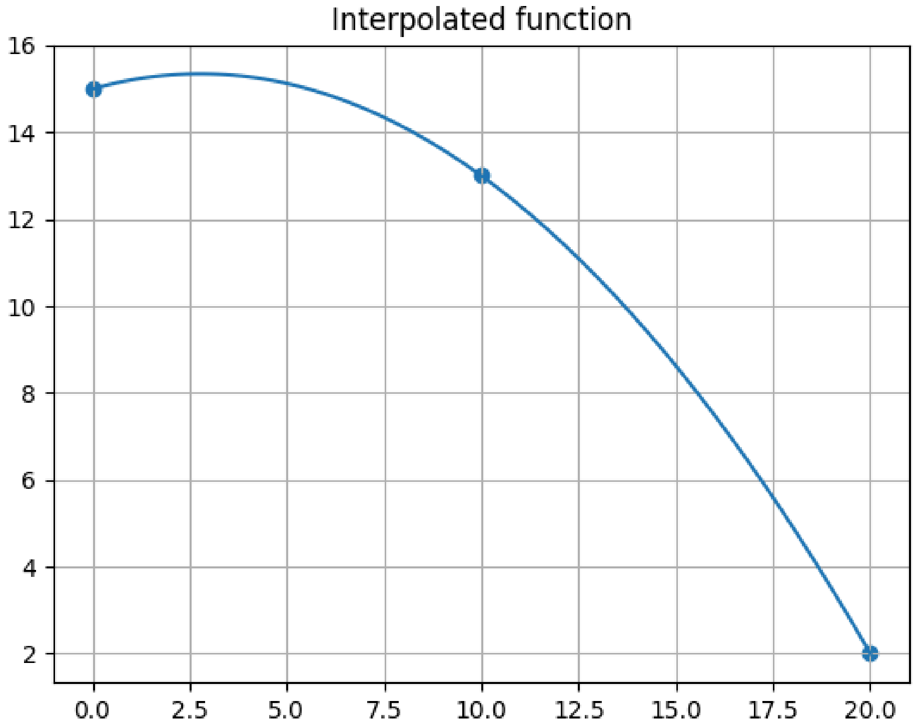
Następnie są zaprezentowane przykładowe wyniki dla konkretnych danych




Funkcja powstała po interpolacji dla punktów $(0, 1), (0.5, -5), (1, 7)$




Funkcja powstała po interpolacji dla punktów $(-10, 4), (2.5, 20), (15, 35)$




Funkcja powstała po interpolacji dla punktów $(0, 15), (10, 13), (20, 2)$

# 4. Bibliografia


1. Marian Bubka, Katarzyna Rycerz, *Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice. Interpolacja*
2. Marian Bubka, Katarzyna Rycerz, *Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice. Funkcje sklejane - spline functions*
3. Stanisław Babrzycki, Koło Mechaniki Budowli, WILiŚ PG *Interpolacja funkcji*
4. https://pl.wikipedia.org/wiki/Wielomiany_Legendre%E2%80%99a
5. https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/interpolate.html#module-scipy.interpolate
6. Wyliczenia wykonane za pomocą Wolfram|Alpha: https://www.wolframalpha.com/