В качестве примера рассмотрим т.н. уравнение Бюргерса

$$\dot{u} = \frac{1}{R} u'' - uu', \quad ()' = \partial() / \partial x, \quad \dot{()} = \partial() / \partial t \tag{1.1}$$

Известно, что т.н. подстановкой Коула-Хопфа

$(\ln w)' = -\frac{R}{2} u$, т.е. $\frac{w'}{w} = -\frac{R}{2} u$, т.е. $w(x,t) = \exp\left[-\frac{R}{2} \int_0^x u(\xi,t) d\xi\right]$

уравнение Бюргерса сводится к уравнению теплопроводности:

$$\dot{w} = \frac{1}{R} w'' \tag{1.2}$$

Одно из точных частных решений уравнения Бюргерса (1.1) имеет вид

$$u = \Phi(x,t) = \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{x-t}{2}\sqrt{\frac{R}{t}}\right)}{\operatorname{erfc}\left(\frac{x-t}{2}\sqrt{\frac{R}{t}}\right) + e^{\frac{R}{4}(2x-t)}\left[1 - \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{R}{t}}\right)\right]} \tag{1.3}$$

где

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-\xi^2} d\xi \tag{1.4}$$

причем

$$\Phi(0,t) = 1;\ \Phi(x,t) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0;\ \Phi(x,t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 1;\ \Phi(x,t) \underset{t\to+0}{\longrightarrow} 0 \text{ при } x > 0 \tag{1.5}$$

Т.к. (1.1) не содержит явно x и t, то $u = \Phi(x + Const_1, t + Const_2)$ – также решение (1.1).

<u>Пример</u>. Используя стандартную функцию MATLAB `pdepe`, при $0 \le x \le 1$, $0 \le t \le 5$ численно проинтегрировать нелинейную начально-краевую задачу для уравнения Бюргерса

$$\dot{u} = \frac{1}{R} u'' - uu' \tag{1.6}$$

$$u(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 1 \tag{1.7}$$

$$u(0,t) = \Phi(a,t);\ \ u(1,t) = \Phi(1+a,t) \tag{1.8}$$

Принять $R = 10$, $a = 0.5$. В качестве пространственной «сетки» для переменной x принять множество значений $\{0, 0.05, 0.1, ..., 1\}$. Для значений времени t 0.1, 0.2,…, 1, 1.2, 1.4,…, 3, 3.5, 4, 4.5, 5 выполнить сравнение в узлах пространственной сетки найденного приближенного решения и точного решения $u = \Phi(x+a,t)$. Отобразить графически найденное приближенное решение при $0 \le x \le 1$, $0 \le t \le 5$.

<u>Решение</u>. Запустить на исполнение в командной строке MATLAB файл PDETest.m