

BÖLÜM-8

Potansiyel Enerji ve Enerjinin Korunumu

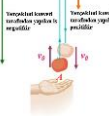
- Potansiyel enerji
- Korunumlu ve korunumsuz kuvvetler
- Mekanik enerji
- Mekanik enerjinin korunumu



İş ve Potansiyel Enerji

Yerçekimi potansiyel enerjisi:

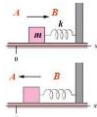
- Kütleli m olan bir cisim v_0 ilk hızıyla A noktasından yukarı doğru fırlatılıyor.
- Cisim ve yer bir sistemdir.
- Yerçekimi kuvvetinin etkisiyle cisim yavaşlayarak B noktasında tamamen duracaktır.
- Sonra da, aşağı doğru hareket ederek orijinal v_0 hızıyla A noktasına ulaşacaktır.



Cisim A noktasından B noktasına giderken F_g kuvvetinin yaptığı iş $W_1 = -mgh$ ' dir. Bunun anlamı, F_g kuvveti cismin kinetik enerjisini yerçekimi potansiyel enerjisine (U) dönüştürmüştür.

Cisim B noktasından A noktasına düşerken ise, F_g kuvvetinin yaptığı iş $W_2 = mgh$ ' dir. Bunun anlamı da, F_g kuvveti cismin yerçekimi potansiyel enerjisini kinetik enerjiye dönüştürmüştür.

Sistemin potansiyel enerjisindeki değişim şu ifadeyle verilir: $\Delta U = -W$



Yay potansiyel enerjisi:

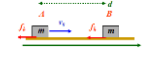
- Kütleli m olan blok, yay sabiti k olan bir yaya bağlıdır.
- Yay ve kütle bir sistemdir.
- Herhangi bir anda A noktasından geçerken ki hızı v_0 olan blok, yay kuvvetinin etkisiyle yavaşlayacak ve yayı x kadar sıkıştırarak B noktasında tamamen duracaktır.
- Sonrada, yay kuvvetinin etkisiyle ters yönde harekete başlayacak ve A noktasından v_0 hızıyla geçecektir.

Blok A noktasından B noktasına hareket ederken yay kuvveti F_{yay} tarafından yapılan iş $W_1 = -kx^2/2$ ' dir. Bunun anlamı, yay kuvveti F_{yay} cismin kinetik enerjisini potansiyel enerjiye (U) dönüştürmüştür.

Blok B noktasından A noktasına hareket ederken ise, yay kuvveti F_{yay} tarafından yapılan iş $W_2 = kx^2/2$ ' dir. Bunun anlamı da, yay kuvveti F_{yay} cismin potansiyel enerjisini kinetik enerjiye dönüştürmüştür.

Sistemin potansiyel enerjideki değişimi yine $\Delta U = -W$ ifadesine sahiptir.

Korunumlu ve Korunumsuz Kuvvetler

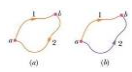


Cismin sadece kinetik ve potansiyel enerjileri arasında bir dönüşüme neden oldukları için, **yerçekimi kuvveti** ve **yay kuvveti** "**korunumlu**" kuvvetlerdir.

Buna karşın, **sürtünme kuvveti** "**korunumlu olmayan**" bir kuvvettir.

Sürtünnmeli bir yüzey üzerinde A noktasından v_0 ilk hızıyla hareket başlayan bir blok düşünelim. Blok ile zemin arasındaki kinetik sürtünme katsayısı μ_k olsun. Blok, kinetik sürtünme kuvveti f_k etkisiyle d kadar yol aldıktan sonra B noktasında duracaktır.

A ve B noktaları arasında sürtünme kuvvetinin yaptığı iş $W_f = -\mu_k mgd$ olacaktır. Sürtünme kuvveti, bloğun tüm kinetik enerjisini "**ısı enerjisi**"ne dönüştürmüştür. Bu enerji tekrar kinetik enerjiye dönüştürülemez ve bu nedenle **sürtünme kuvveti korunumlu bir kuvvet değildir**.



1. Kapalı bir yol boyunca, korunumlu bir kuvvetin bir cisim üzerinde yaptığı net iş sıfırdır (Şekil-a).

$$W_{net} = 0$$

Yerden yukarı doğru fırlatılan taş ve kütle-yay sistemi buna birer örnektir. $W_{net} = W_{ab,1} + W_{ba,2} = 0$

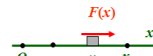
2. a' 'den b' 'ye giden bir cismin üzerine etki eden korunumlu bir kuvvetin yaptığı iş gidilen yoldan bağımsızdır.

Şekil - a' 'dan : $W_{net} = W_{ab,1} + W_{ba,2} = 0 \rightarrow W_{ab,1} = -W_{ba,2}$

Şekil - b' 'den : $W_{ab,2} = -W_{ba,2}$

$$W_{ab,1} = W_{ab,2}$$

Potansiyel Enerjinin bulunması



Bir cisme etkiyen korunumlu kuvveti biliyorsak, x_i ve x_f gibi iki nokta arasında cismin potansiyel enerjisindeki değişimi (ΔU) hesaplayabiliriz.

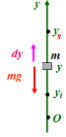
Korunumlu bir F kuvvetinin etkisindeki bir cisim x -ekseni boyunca x_i noktasından x_f noktasına hareket ediyor olsun.

F kuvveti tarafından cisim üzerinde yapılan iş

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx \text{ eşitliği ile verilir.}$$

Böylece, potansiyel enerjideki değişim

$$\Delta U = -W = -\int_{x_i}^{x_f} F(x) dx \text{ bulunur.}$$



Yerçekimi Potansiyel Enerjisi

Düsey doğrultuda (y-ekseni boyunca) yukarı doğru y_i noktasından y_f noktasına hareket eden m kütleli bir cisim düşünelim.

Cisme etki eden yerçekimi kuvveti nedeniyle cisim-yer sisteminin potansiyel enerjisinde değişim olacaktır. Az önce bulduğumuz sonucu kullanarak, cismin potansiyel enerjisindeki değişimi hesaplayacağız.

$$\Delta U = - \int_{y_i}^{y_f} F(y) dy = - \int_{y_i}^{y_f} (-mg) dy = mg \int_{y_i}^{y_f} dy = mg [y]_{y_i}^{y_f} = mg (y_f - y_i) = mg \Delta y$$

Cismin bulunduğu son noktayı geliştirirsek $U(y) - U_i = mg (y - y_i)$ bulunur.

Genellikle, hareketin başladığı konum $y_i = 0$ ve bu noktadaki potansiyel $U_i = 0$ olarak seçilir. Bu durumda,

★ $U(y) = mgy$ bulunur.

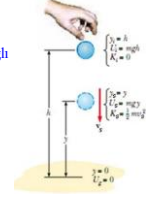
Örnek : Yerden h kadar yükseklikten m kütleli bir cisim serbest bırakılıyor. Cismin herhangi bir andaki hızını, yerden olan yüksekliğine bağlı olarak bulunuz.

$$\Delta K = -\Delta U \rightarrow K_f - K_i = -(U_f - U_i)$$

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgy$$

$$v_f = \sqrt{2g(h-y)}$$

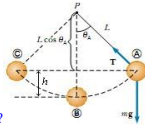


Örnek : Şekilde L uzunluğundaki bir ipin ucuna bağlı m kütesinden oluşan bir basit sarkaç verilmiştir.

Cisim θ_A açılma konumundan serbest bırakılmıştır ve dönme ekseninin geçtiği P noktası sürtünmesizdir.

a-) Cisim en alt noktadan (B noktası) geçerken hızı nedir?

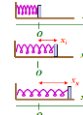
b-) Cisim en alt noktada iken ipteki gerileme kuvveti nedir?



$$a-) K_f + U_f = K_i + U_i \rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 \rightarrow v_B = \sqrt{2gL(1 - \cos \theta_A)}$$

$$b-) \sum F_r = T_B - mg = \frac{mv_B^2}{L} \rightarrow T_B = mg + 2mg(1 - \cos \theta_A)$$

$$T_B = mg(3 - 2\cos \theta_A)$$



Yaydaki Potansiyel Enerji

Bir kütle-yay sisteminde, blok x_i noktasından x_f noktasına hareket etsin. Yay kuvveti bir iş (W) yapacaktır ve kütle-yay sisteminin potansiyel enerjisinde bir değişim meydana gelecektir.

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx = \int_{x_i}^{x_f} -kx dx = -\left(\frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2\right)$$

$$\Delta U = -W \rightarrow U(x_f) - U_i = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$$

Genellikle hareketin başladığı konum $x_i = 0$ ve bu noktadaki potansiyel $U_i = 0$ olarak seçilir.

Denge noktasından herhangi bir x uzaklığında,

yaydaki potansiyel enerji: $U = \frac{1}{2}kx^2$ ★

Mekanik Enerjinin Korunumu

Bir sistemin mekanik enerjisi, o sistemin kinetik ve potansiyel enerjilerinin toplamı olarak tarif edilir

(Mekanik enerji = $E_{mek} = K + U$) ★

Sistemin çevresinden izole olduğunu, dış kuvvetlerin olmadığını ve sistemdeki kuvvetlerin ise korunumlu olduğunu kabul ediyoruz.

Sistemdeki iç kuvvetin yaptığı iş sistemin kinetik enerjisinde bir değişim meydana getirecektir.

$$\Delta K = W \quad (1)$$

Bu, aynı zamanda sistemin potansiyel enerjisinde de bir değişim meydana getirecektir

$$\Delta U = -W \quad (2)$$

Bu iki eşitlik birleştirilirse,

$$\Delta K = -\Delta U$$

$$K_f - K_i = -(U_f - U_i)$$

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$E_i = E_f$$

Bu, "mekanik enerjinin korunumu" yasasıdır ve şu şekilde özetlenebilir.

$$\Delta E_{mek.} = \Delta K + \Delta U = 0$$

Korunumlu ve korunumsuz kuvvetlerin olduğu izole bir sistemde bu yasa

$$\Delta E_{mek.} = W_{korunumsuz}$$

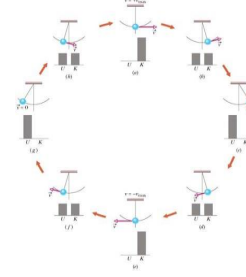
formundadır.

Burada $W_{korunumsuz}$, sistemdeki tüm korunumsuz kuvvetler tarafından yapılan iştir.

$$W_{ksuz} = \Delta E = E_s - E_i$$



$$W_{ksuz} = \Delta E = -f_k \cdot d$$

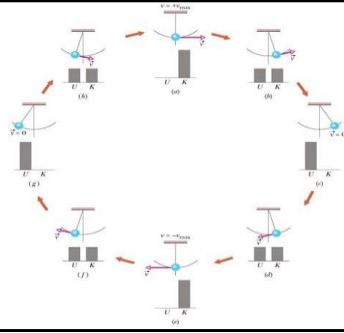


Şekilde m kütleli bir cisim ve asılı olduğu ipten oluşan basit sarkaç verilmiştir.

Cisim-yer sisteminin mekanik enerjisi sabittir. Sarkaç salındıkça, sistemin kinetik ve potansiyel enerjileri arasında sürekli bir dönüşüm olacaktır.

Cisim en alt noktadayken potansiyel enerjisi "sıfır" seçersek, bu noktalarda kinetik enerji maksimum olacaktır (a ve e durumu).

c ve g durumlarında ise potansiyel enerji maksimum, kinetik enerji sıfır olacaktır.



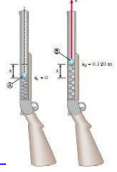
Örnek : Yaylı bir oyuncak tabancanın yay sabiti bilinmemektedir.

Yay 12 cm sıkıştırılıp düşey yönde ateşlendiğinde, 35 g'lık bilye atıldığı noktadan 20 m yukarıya yükseliyor. Tüm sürtünmeleri gözardı ederek,

a-) Tabancanın yay sabitini bulunuz.

b-) Bilye tabancayı hangi hızla terkeder?

c-) Bilye atıldığı noktadan 10 m yukarıdayken hızı nedir?

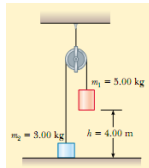


$$a-) E_A = E_C \rightarrow \frac{1}{2} kx^2 = mgh \rightarrow k = \frac{2mgh}{x^2} = 953 \text{ N/m}$$

$$b-) E_A = E_B \rightarrow \frac{1}{2} kx^2 = mgx + \frac{1}{2} mv_B^2 \rightarrow v_B = \sqrt{\frac{k}{m} x^2 - 2gx} = 19,7 \text{ m/s}$$

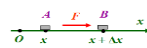
$$c-) \frac{1}{2} kx^2 = mgh' + \frac{1}{2} mv_{h'}^2 \rightarrow v_{h'} = \sqrt{\frac{k}{m} x^2 - 2gh'} = 14 \text{ m/s}$$

Örnek : İki blok hafif bir iple, ağırlıksız ve sürtünmesiz bir makara üzerinden şekildeki gibi birbirine bağlanmıştır. Sistem durgun halden serbest bırakılıyor. 5,00 kg'lık blok yere çarptığında, 3,00 kg'lık bloğun hızı ne olur?



$$E_i = E_s \rightarrow m_1 gh = m_2 gh + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} m_1 v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2(m_1 - m_2)gh}{(m_1 + m_2)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (2) \cdot (9.8) \cdot 4}{8}} = \sqrt{19,6} = 4,43 \text{ m/s}$$



Potansiyel Enerjiden Kuvvetin Bulunması

Bilinmeyen bir F kuvvetinin etkisi altında x -ekseni boyunca hareket eden bir cismin potansiyel enerjisinin konuma bağlılığı $U(x)$ biliniyor olsun.

Cisim koordinatı x olan bir A noktasından koordinatı $x + \Delta x$ olan çok yakındaki bir B noktasına hareket etsin. Kuvvetin cisim üzerinde yaptığı iş

$$W = F \Delta x \quad (\text{Eş-1})$$

ile verilir.

Kuvvetin yaptığı bu iş, sistemin potansiyel enerjisinde bir değişim meydana getirir.

$$\Delta U = -W \quad (\text{Eş-2})$$

Bu iki eşitlik birleştirilirse,

$$F = -\frac{\Delta U}{\Delta x} \text{ bulunur. } \Delta x \rightarrow 0 \text{ durumundaki limit değeri ise } F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \text{ olur.}$$



Örnek : İki boyutlu uzayda bir kuvvetle bağlantılı potansiyel enerji fonksiyonu,

$$U(x, y) = 3x^3y - 7x$$

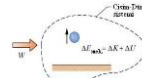
ile veriliyor. Cisme etkiyen kuvveti bulunuz.

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}[3x^3y - 7x] = -[9x^2y - 7]$$

$$F_y = -\frac{dU}{dy} = -\frac{d}{dy}[3x^3y - 7x] = -[3x^3]$$

$$F = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} = (7 - 9x^2y) \hat{i} - (3x^3) \hat{j}$$

Dış Kuvvetin Bir Sistem üzerinde Yaptığı İş



Şu ana kadar, dış kuvvetlerin olmadığı izole sistemleri ele aldık. Şimdi de, dış kuvvetlerin etkiği bir sistemi ele alalım.

Bir oyuncu tarafından fırlatılan bowling topunu göz önüne alalım. Bowling topu ve dünya bir sistem oluşturur.

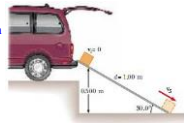
Oyuncu tarafından topa uygulanan kuvvet dış kuvvettir. Bu durumda sistemin mekanik enerjisi sabit değildir, dış kuvvetin yaptığı iş kadar değişir.

$$W = \Delta E_{mek.} = \Delta K + \Delta U$$

Örnek : Uzunluğu 1 m olan 30°'lik eğik düzlemin en üst noktasından, kütlesi 3 kg olan bir kutu durgun halden aşağıya doğru kaymaya başlıyor. Kutuya 5 N'lık sabit bir sürtünme kuvveti etmektedir.

a-) Eğik düzlemin tabanında kutunun hızı ne olur?

b-) Kutunun ivmesi nedir?



$$a-) E_i = K_i + U_i = mgh = 3(9.8)(0.5) = 14.7 \text{ J} ; E_s = K_s + U_s = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Delta E = -f_k d = -5(1) = -5 \text{ J}$$

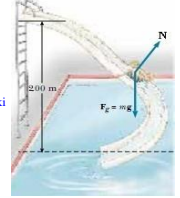
$$E_s - E_i = \frac{1}{2}mv^2 - 14.7 = -5 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2(9.7)}{3}} = 2.54 \text{ m/s}$$

$$b-) \sum F_x = mg \sin(30) - f_k = ma \rightarrow a = \frac{3(9.8)(0.5) - 5}{3} = 3.23 \text{ m/s}^2$$

Örnek : Kütlesi 20 kg olan bir çocuk, 2 m yüksekliğinde düzgün olmayan bir kaydıraktan tepesinden ilk hızsız kaymaya başlıyor.

a-) Sürtünme olmadığını varsayarak, kaydıraktan en alt noktasında çocuğun hızı nedir?

b-) Sürtünme olması durumunda, çocuğun en alt noktadaki hızı 3 m/s olduğuna göre sistemin mekanik enerjisindeki kayıp ne kadardır?



$$a-) K_i + U_i = K_s + U_s \rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_s^2$$

$$v_s = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.8)(2)} = 6.26 \text{ m/s}$$

$$b-) \Delta E = E_s - E_i = \frac{1}{2}mv_s^2 - mgh = \frac{1}{2}(20)(3)^2 - 20(9.8)(2) = -302 \text{ J}$$

Örnek : Bir kayakçı 20 m yükseklikteki rampadan ilk hızsız kaymaya başlıyor. Rampanın alt ucundan sonra, düz olan bölgede kayakçı ile zemin arasındaki sürtünme katsayısı 0.21'dir.

a-) Kayakçı, rampanın alt ucundan duruncaya kadar ne kadar yol alır?

b-) Eğik düzlemin kendisi de aynı sürtünme katsayısına sahip olsaydı, (a) şıkkının cevabı ne olurdu?



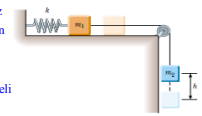
$$a-) K_i + U_i = K_s + U_s \rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_s^2 \rightarrow v_s = \sqrt{2gh} = 19.8 \text{ m/s}$$

$$\Delta E = E_c - E_s = 0 - \frac{1}{2}mv_s^2 = -\mu_k m g d \rightarrow d = \frac{v_s^2}{2\mu_k g} = 95.2 \text{ m}$$

$$b-) mgh - \mu_k mg \cos \theta L = \frac{1}{2}mv_s^2 \rightarrow v_s = \sqrt{2gh[1 - \mu_k \cot(20)]} = 12.9 \text{ m/s}$$

$$d = \frac{v_s^2}{2\mu_k g} = 40.3 \text{ m}$$

Örnek : İki blok hafif bir iple, sürtünmesiz ve ağırlıksız bir makara üzerinden birbirine bağlıdır. Yatayda bulunan m_1 kütleli blok, yay sabiti k olan bir yaya bağlıdır. Yay uzamasız durumda iken sistem serbest bırakılıyor ve m_2 kütleli blok h kadar düşene bir an için duruyor. m_1 kütleli blok ile zemin arasındaki sürtünme katsayısı nedir?

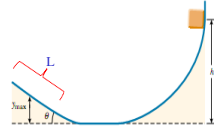


$$\Delta K = 0 \quad \text{ve} \quad \Delta E = \Delta U_g + \Delta U_{yay} = -\mu_k m_1 g h$$

$$\Delta U_g = U_s - U_i = 0 - m_2 g h \quad \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow -\mu_k m_1 g h = \frac{1}{2} k h^2 - m_2 g h \\ \Delta U_{yay} = \frac{1}{2} k h^2 \end{array} \right.$$

$$\mu_k = \left(\frac{m_2 g - \frac{1}{2} k h}{m_1 g} \right)$$

Örnek : Bir blok, h yüksekliğindeki sürtünmesiz bir rampadan ilk hızlı kaymaya başlıyor ve karşıda bulunan ve eğim açısı θ olan bir eğik düzlemi tırmanıyor. Blok ile eğik düzlemin arasındaki kinetik sürtünme katsayısı μ_k olduğuna göre, blok bu düzlemde ne kadar yükselir?

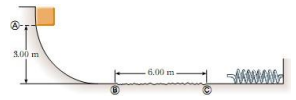


$$\Delta K = 0 ; \Delta E = \Delta U_g = -\mu_k mg \cos \theta (L) \quad ; \quad L = \frac{y_{\max}}{\sin \theta}$$

$$\Delta U_g = U_s - U_i = mgy_{\max} - mgh$$

$$-\mu_k mg \cos \theta \left(\frac{y_{\max}}{\sin \theta} \right) = mgy_{\max} - mgh \rightarrow y_{\max} = \frac{h}{(1 + \mu_k \cot \theta)}$$

Örnek : Kütlesi 10 kg olan blok, ilk hızlı olarak A noktasından bırakılıyor. Uzunluğu 6 m olan sürtünmeli bir bölgeyi (BC arası) geçtikten sonra, yay sabiti $k = 2250 \text{ N/m}$ yaya çarparak 30 cm sıkıştırıyor.



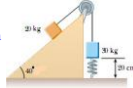
BC arası bölgenin sürtünme katsayısını bulunuz.

$$\Delta K = 0 ; \Delta E = \Delta U_g + \Delta U_{\text{spr}} = -\mu_k mgL$$

$$\Delta U_g = U_s - U_i = 0 - mgh \quad ; \quad \Delta U_{\text{spr}} = \frac{1}{2} kx_m^2 - 0$$

$$-\mu_k mgL = \frac{1}{2} kx_m^2 - mgh \rightarrow \mu_k = \frac{mgh - \frac{1}{2} kx_m^2}{mgL} = 0,328$$

Örnek : Eğik düzlem üzerindeki $m_1 = 20 \text{ kg}$ 'lık blok, hafif bir ip ile, $m_2 = 30 \text{ kg}$ 'lık başka bir bloğa bağlıdır. m_2 bloğu da, şekildeki gibi yay sabiti 250 N/m olan bir yaya bağlıdır. Bu haliyle yay uzamasızdır ve eğik düzlem sürtünmesizdir. m_1 bloğu eğik düzlemde aşağı doğru 20 cm çekilip (m_2 bloğu yerden 40 cm yüksek) ilk hızlı bırakılıyor. Yay uzamasız hale geldiğinde blokların hızı ne olur?



$$\Delta E = \Delta K + \Delta U_g + \Delta U_{\text{spr}} = 0 \quad (\text{Tüm kuvvetler korunumlu olduğu için})$$

$$\Delta K = \left(\frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 \right) ; \Delta U_g = (m_1 g L \sin \theta - m_2 g L) \quad ; \quad \Delta U_{\text{spr}} = -\frac{1}{2} kL^2$$

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + (m_1 \sin \theta - m_2) g L - \frac{1}{2} kL^2 = 0$$

$$v = \sqrt{\frac{kL^2 + 2(m_2 - m_1 \sin \theta)gL}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{10 + 67,2}{50}} = 1,24 \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned} L &= 20 \text{ cm} \\ k &= 250 \text{ N/m} \\ m_1 &= 20 \text{ kg} \\ m_2 &= 30 \text{ kg} \end{aligned}$$

