BÖLÜM:13

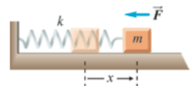
TİTREŞİM HAREKETİ

BASİT HARMONİK HAREKET

Belirli zaman aralığında kendini tekrarlayan hareket.

(Salıncak, sarkaç, saz telinin titreşimi, kalp atışı, med-cezir olayı ...)

- Bir yaya bağlı kütlenin titreşim hareketi:



Yay x kadar uzamış iken, yay kuvveti $F = -kx$ için Newton yasası:

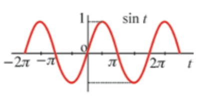
$$\begin{aligned} F &= ma \\ -kx &= m\frac{d^2x}{dt^2} = m\,x'' \\ x'' &+ \frac{k}{m}x = 0 \end{aligned}$$

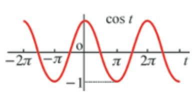
Bu ifadeye **titreşim hareketinin diferansiyel denklemi** denir.

Bunun çözümü olan $x = x(t)$ fonksiyonu hareketi belirlemiş olur.

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \text{veya} \qquad x'' = -\frac{k}{m}x$$

Çözüm: Hangi fonksiyonun 2. türevi kendisinin negatifiyle orantılıdır?





Cevap :

Sinüs ve kosinüs fonksiyonları:

$$x = A\sin\omega t$$

veya

$$x = A\cos\omega t$$

(A ve ω birer sabit)

Bu çözümlerden birini deneyelim:

$$\begin{aligned} x &= A\cos\omega t \\ x' &= -\omega A\sin\omega t \\ x'' &= -\omega^2 A\cos\omega t \end{aligned}$$

Bu x ve x'' ifadeleri denklemde yerine konulur:

$$\begin{aligned} -\omega^2 A\cos\omega t + \frac{k}{m}A\cos\omega t &= 0 \\ \left[-\omega^2 + \frac{k}{m}\right]A\cos\omega t &= 0 \end{aligned}$$

Bu eşitliğin her t anında doğru olabilmesi için parantez içindeki ifade sıfır olmalıdır.

$$\left[-\omega^2 + \frac{k}{m}\right] = 0$$

Buradan ω sabiti, kütle ve yay sabiti cinsinden bulunmuş olur:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{(açısal frekans)}}$$

Genlik (A):

Kosinüs/sinüs fonksiyonu $[-1, +1]$ aralığında değişir.
x konumu da $[-A, +A]$ aralığında değişecektir.

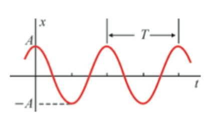
Maksimum uzamanın mutlak değeri olan bu A niceliğine **genlik** denir.

$$\boxed{x = A\cos\omega t \qquad \text{(basit harmonik hareket)}}$$

Zamana göre kosinüs/sinüs fonksiyonu olan bu harekete **basit harmonik hareket** (veya, sinüsel hareket) denir.

Periyot (T):
Titreşim hareketinin kendini tekrar ettiği zaman aralığı.

$$x = A\cos\omega t$$



Öyle bir T zamanı geçmelidir ki cisim tekrar aynı x konumundan geçsin:

$$\begin{aligned} x(t+T) &= x(t) \\ A\cos\omega(t+T) &= A\cos\omega t \\ \cos\omega(t+T) &= \cos\omega t \end{aligned}$$

Kosinüs fonksiyonu 2π kadar sonra kendini tekrar eder:

$$\omega(t+T) - \omega t = 2\pi$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{(periyot)}}$$

Frekans (f):

Birim zaman aralığındaki tam salınım sayısı.

Buna göre, frekans periyodun tersidir:

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \text{(frekans)}}$$ ★

Yay-kütle sistemi için $\omega = \sqrt{k/m}$ olduğundan:

★ $$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \text{ve} \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}$$ ★

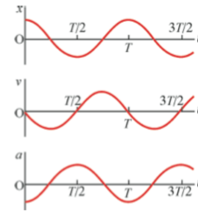
Basit Harmonik Harekette Hız ve İvme

Hız ve ivme, $x(t)$ konumunun 1. ve 2. türevleri olurlar:

$$x = A\cos\omega t$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin\omega t \qquad v_{max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}}\,A$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos\omega t$$



- Harmonik hareketin hız ve ivmesi de harmoniktir.
- Konum ile hızın değişimi birbirine tamamen zıt olur. Konum maksimum iken hız sıfır, konum sıfırken hız maksimum olur.
- Hız ve ivme de birbirine zıt olur

- **Hız ile ivme arasındaki ilişki:**

  $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ özdeşliği kullanılır:

$$\cos^2\omega t = \frac{x^2}{A^2} \qquad \text{ve} \qquad \sin^2\omega t = \frac{v^2}{\omega^2 A^2}$$

$$\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1$$

$$v^2 = \omega^2\left(A^2 - x^2\right)$$

Hız veya ivmeden biri biliniyorsa, diğeri buradan hesaplanır.

- **Konum ile ivme arasındaki ilişki:**

$$a = -\omega^2 A\cos\omega t$$

$$a = -\omega^2 x$$

Harmonik Hareketin Enerjisi

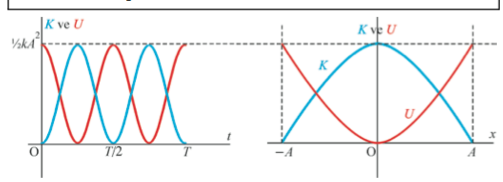
Kinetik enerji için hız ifadesi: $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2\omega t$

Esneklik potansiyel enerjisi: $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t$

Toplam mekanik enerji:

$$E = K + U = \frac{1}{2}\underbrace{m\omega^2}_{k} A^2\sin^2\omega t + \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t = \frac{1}{2}kA^2\underbrace{(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)}_{1}$$

$$\boxed{E = K + U = \frac{1}{2}kA^2 = \text{sabit} \quad \text{(harmonik hareketin toplam enerjisi)}}$$

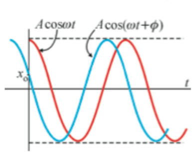


Faz Açısı

Harmonik hareket için ne zaman kosinüs, ne zaman sinüs kullanılır?

Cevap: Cisim $t = 0$ anında orijinden başlıyorsa: $x = A\sin\omega t$,
Maksimum uzaklıktan bırakılıyorsa: $x = A\cos\omega t$.

Hareket bu iki nokta dışında herhangi bir yerden başlıyorsa?



Kosinüsteki (ωt) nin yanına bir terim daha ekleyerek, fonksiyonu istediğimiz noktadan başlatabiliriz.

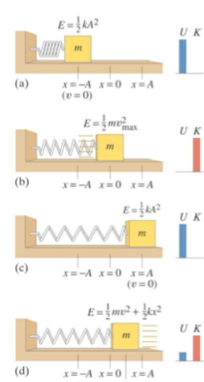
$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

ϕ : **faz açısı** (veya, faz farkı)

Cisim $t = 0$ anında x_0 konumlu yerden başlıyorsa,

$$x_0 = A\cos\phi \quad \Longrightarrow \quad \cos\phi = \frac{x_0}{A}$$

Basit harmonik salıcının enerjisi



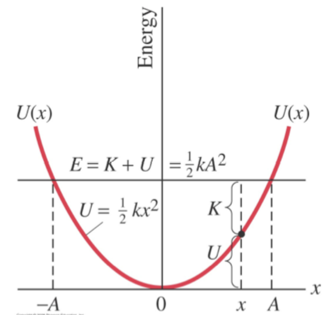
$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mw^2A^2Sin^2(wt+\phi)$$

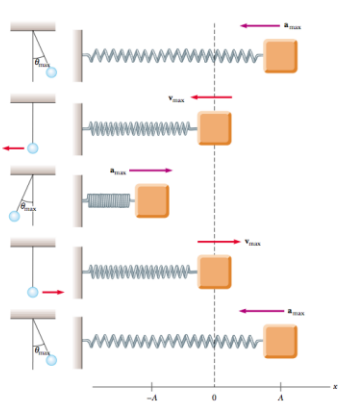
$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2Cos^2(wt+\phi)$$

$w^2 = k/m$ olduğundan;

$$\boxed{E = \frac{1}{2}kA^2}$$

Basit harmonik salınıcının toplam enerjisi hareketin bir sabitidir ve genliğin karesiyle doğru orantılıdır!

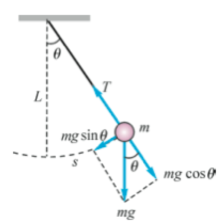




t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$T/4$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$T/2$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$3T/4$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$

SARKAÇ

Tavana asılı L uzunlukta ipin ucuna bağlı m kütlesi.



İp düşeyle θ açısı yaparken:

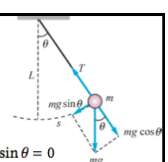
T gerilmesi ip doğrultusunda olup harekete katkıda bulunmaz.

Hareket ettiren kuvvet:
mg nin teğet bileşeni $mg\ \sin\theta$

Teğet doğrultuda Newton yasası:
(θ nın artış yönü pozitif)

$$F_t = ma_t$$

$$-mg\ \sin\theta = m\frac{dv}{dt}$$



v hızı θ açısı cinsinden yazılır:

$$v = L\omega = L\frac{d\theta}{dt}$$

$$-mg\ \sin\theta = mL\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \Longrightarrow \quad \theta'' + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

Bu denklemin çözümü yoktur. Fakat, küçük açılı salınımlar için $\sin\theta \approx \theta$ alınırsa:

$$\theta'' + \underbrace{\frac{g}{L}}_{\omega^2}\theta = 0$$

Bu, θ açısının harmonik hareket yaptığını gösterir.

$$\theta = \theta_{\max}\ \cos\omega t$$

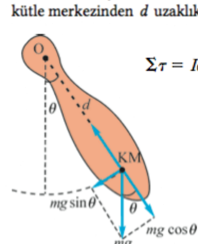
Hareketin açısal frekansından periyot formülü elde edilir ($T = 2\pi/\omega$):

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{(Basit sarkacın periyodu)}}$$

Fiziksel Sarkaç

Her katı cisim sarkaç hareketi yapabilir.

Kütlesi m ve eylemsizlik momenti I_{KM} olan katı bir cisim, kütle merkezinden d uzaklıkta bir eksene asılmış olsun.



$$\Sigma\tau = I\alpha$$

O dönme merkezine göre moment alınır:

$$F_t\, d = I_0\,\alpha \quad \longrightarrow \quad -mg\ \sin\theta\ d = I_0\,\alpha$$

α açısal ivmesi θ nın 2. türevidir:

$$\theta'' + \frac{mgd}{I_0}\ \sin\theta = 0$$

Küçük açılı salınımlar için $\sin\theta \approx \theta$,

$$\theta'' + \underbrace{\frac{mgd}{I_0}}_{\omega^2}\ \theta = 0$$

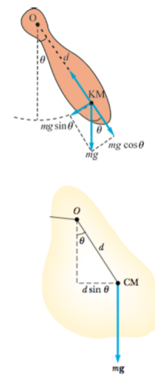
Yine, basit harmonik hareket denklemi yapısı.

Buradan ω açısal frekansı ve $T = 2\pi/\omega$ periyodu bulunur:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mgd}} \qquad \text{(Fiziksel sarkacın periyodu)}$$

Kütle merkezine göre eylemsizlik momenti için paralel eksenler teoremi kullanılır:

$$I_0 = I_{KM} + m\,d^2$$



$$\Sigma\tau = I\alpha$$

$$-mgd\sin\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \sin\theta \approx \theta$$

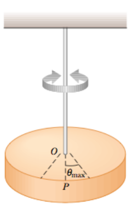
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{mgd}{I}\right)\theta = -\omega^2\theta$$

$v_{max} = \omega A$ $\quad \theta = \theta_{max}\cos(\omega t + \phi)$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}}$$

Burulmalı Sarkaç



$$\tau = -\kappa\theta$$

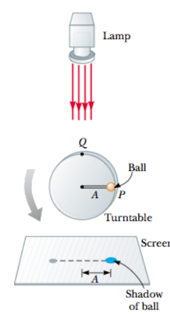
$$\tau = -\kappa\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta$$

$$\omega = \sqrt{\kappa/I}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}}$$

Basit Harmonik Hareketin Düzgün Dairesel Hareketle Karşılaştırılması



Basit Harmonik Hareketin Düzgün Dairesel Hareketle Karşılaştırılması