Fizik-1 UYGULAMA-7

Katı bir cismin sabit bir eksen etrafında dönmesi

1) Bir tekerlek üzerinde bir noktanın açısal konumu $\Theta = 5 + 10t + 2t^2\ (rad)$ olarak verilmektedir.

a) t=0 ve t=3s için bu noktanın açısal konumunu, açısal hızını ve açısal ivmesini bulunuz.

b) Noktanın tekerleğin merkezine uzaklığı 0.5 m ise t=3s için çizgisel hızını, çizgisel ve radyal (merkezcil) ivmelerinin büyüklüklerini bularak toplam ivmesinin büyüklüğünü yazınız.

1-a) $\theta = 5 + 10t + 2t^2 \quad (rad)$

$t=0 \longrightarrow \theta_1 = 5 + 10(0) + 2(0)^2 = 5\ rad$

$t=3s \longrightarrow \theta_2 = 5 + 10(3) + 2(3)^2 = 53\ rad$

$\omega\Big|_{t=0} = \dfrac{d\theta}{dt}\Big|_{t=0} = 10 + 4t\Big|_{t=0} = 10\ rad/s$

$\omega\Big|_{t=3} = 22\ rad/s$

$\alpha\Big|_{t=0} = \dfrac{d\omega}{dt}\Big|_{t=0} = 4\ rad/s^2 \quad ; \quad \alpha\Big|_{t=3} = 4\ rad/s^2$

b) $t = 3s \quad , \quad r = 0,5m$

$v = r\omega = 0,5 \times 22 = 11\ m/s$

$a_r = r\omega^2 = 0,5 \times 22^2 = 242\ m/s^2$

$a_t = r\alpha = 0,5 \times 4 = 2\ m/s^2$

$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{242^2 + 2^2} \cong 242\ m/s^2$

2) Kütlesi 4 kg olan küçük bir cisim, orijin etrafında 3 m yarıçaplı bir çember üzerinde 4,5 m/s sabit hızla saatin tersi yönünde dönüyor.

a) Hareket (3 m, 0) noktasından başlıyor. Açısal yer değiştirme 9 rad olduğu zaman kartezyen birim vektörlerle konum vektörü nedir?

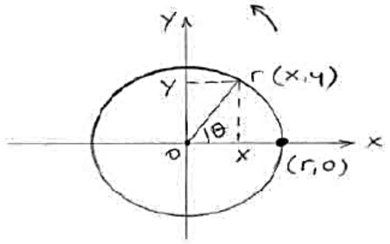
b) Parçacık hangi bölgede (çeyrekte) yer alır ve yer vektörü +x ekseni ile hangi açıyı yapar?

c) Hız vektörünü kartezyen birim vektörlerle ifade ediniz ve cismin hareket yönünün +x ekseni ile yaptığı açıyı bulunuz.

d) İvme vektörünü kartezyen birim vektörlerle ifade ediniz.

e) Cisim üzerine etki eden toplam kuvveti birim vektörler ile ifade ediniz.

2.



$V = 4,5\ m/s$

$m = 4\ kg$

$r = 3\ m$

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ (Burada θ, derece olarak alınır.)

$360^\circ \rightarrow 2\pi$ radyan $\rightarrow \theta(\text{derece}) = \frac{360}{2\pi} \cdot \theta(\text{radyan})$

$\theta = 9$ radyan $\Rightarrow \theta(\text{derece}) = \frac{360}{2\pi} \cdot 9$ radyan $\cong 516^\circ$

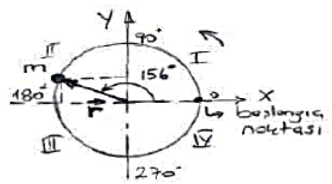
Böylece $x = r\cos\theta = 3 \cdot \cos 516 = -2,74\ m$

$y = r\sin\theta = 3 \cdot \sin 516 = 1,22\ m$

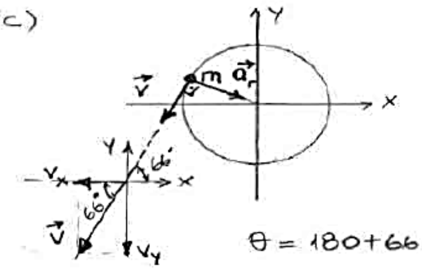
a) $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} = (-2,74\,\vec{i} + 1,22\,\vec{j})\ m$

b) m cismi ikinci turunu gerçekleştirmektedir

$\theta = (516 - 360) = 156^\circ$, II. çeyrektedir.



c)



$V_x = V \cdot \cos 66 = 4,5 \cdot \cos 66$

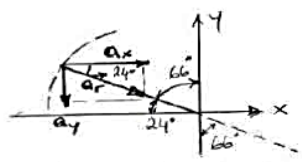
$V_x = 1,83\ m/s$

$V_y = V \cdot \sin 66 = 4,11\ m/s$

$\vec{V} = (-1,83\,\vec{i} - 4,11\,\vec{j})\ m/s$

$\theta = 180 + 66 = \underline{\underline{246^\circ}}$

d) $a = \frac{v^2}{r} = \frac{4,5^2}{3} = 6,75\ m/s^2$



$a_x = a \cdot \cos 24$

$= 6,75 \cdot \cos 24$

$a_x = 6,16\ m/s^2$

$\vec{a}_r = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} = (6,16\,\vec{i} - 2,74\,\vec{j})\ m/s^2$

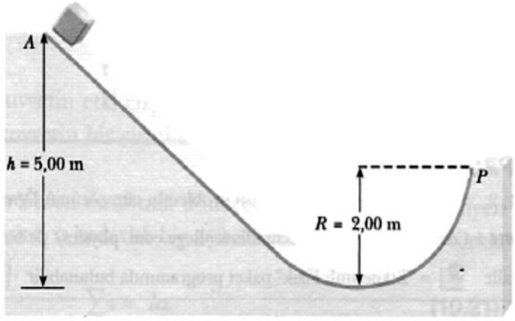
$\theta = 270 + 66$

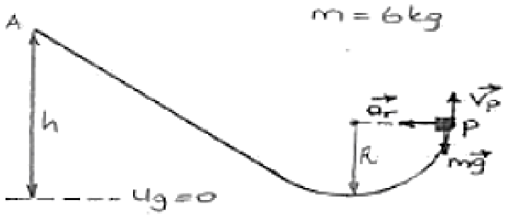
$\theta = \underline{\underline{336^\circ}}$

$a_y = a \cdot \sin 24 = 2,74\ m/s^2$

e) $\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a} = 4(6,16\,\vec{i} - 2,74\,\vec{j}) = (24,6\,\vec{i} - 11\,\vec{j})\ N$

3) 6 kg'lık bir blok, şekilde görüldüğü gibi sürtünmesiz ray üzerinde A'dan serbest bırakılıyor. Blok P noktasına geldiği zaman merkezcil ve teğetsel ivmesini bulunuz.





$h = 5\ m$

$R = 2\ m$

$m = 6\,kg$

$\mu = 0 \Rightarrow \Delta E = 0$

$E_A = E_P$

$\cancel{K_A} + U_A = K_P + U_P$

$mgh = \frac{1}{2} m v_P^2 + mgR$

$v_P^2 = 2g(h-R) = 60\ m^2/s^2$

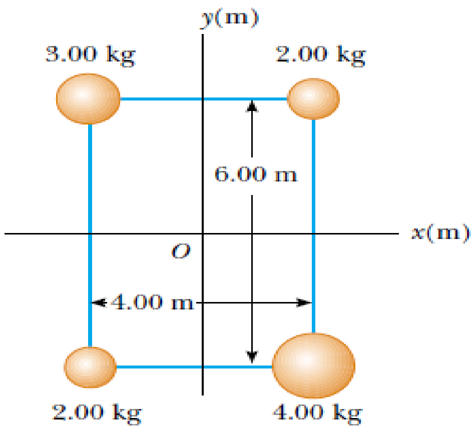
P noktasındaki merkezcil ivme, $a_r = \frac{v_P^2}{R} = \frac{60}{2} = 30\ m/s^2$

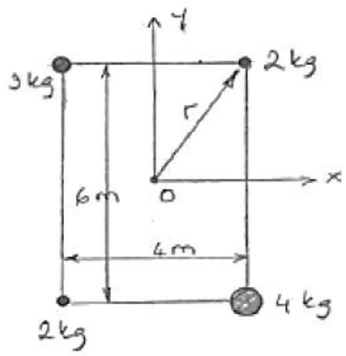
P noktasındaki teğetsel ivme, $a_t = g = 10\ m/s^2$

4) Şekildeki dört parçacık, kütlesi ihmal edilen katı çubuklarla birbirine tutturulmuştur. Orijin dikdörtgenin merkezindedir. Sistem xy düzleminde z-ekseni etrafında 6 rad/s lik açısal hızla dönüyorsa,

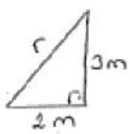
a) z-eksenine göre sistemin eylemsizlik momentini,

b) sistemin dönme kinetik enerjisini bulunuz.





a) Kütlelerin z dönme eksenine uzaklıkları birbirine eşit $\Rightarrow r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r$



$r = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}\ m$

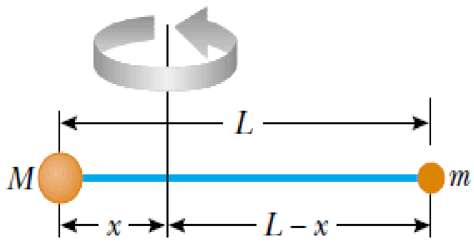
$I_{sistem} = \sum m_i \cdot r_i^2$ (bağlantı çubuklarının kütleleri ihmal ediliyor)

$= r^2 (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) = 13(2+2+3+4)$

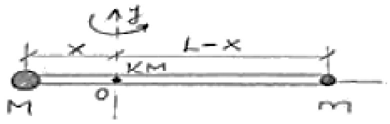
$= \underline{143}\ kgm^2$ (sistemin O noktasından geçen z eksenine göre eylemsizlik momenti)

b) $K_d = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} (143\ kgm^2)(6\ rad/s^2) = 2574$ Joule

5) M ve m kütleleri şekildeki gibi kütlesi ihmal edilebilen L uzunluğunda katı bir çubukla bağlıdır. Çubuğun, sadece kütle merkezinden geçen dik bir eksene göre eylemsizlik momentinin minimum olacağını gösterininiz. $\mu = mM/(m+M)$ olmak üzere bu eylemsizlik momentinin $I = \mu L^2$ olduğunu gösteriniz.



5.



Sistem = (M + m + çubuk)

$I_{sistem} = \sum m_i \cdot r_i^2$ (ayrık kütleler için) [Çubuğun kütlesi ihmal ediliyor.]

$I_{km} = M \cdot x^2 + m(L-x)^2$ → (sistemin kütle merkezinden geçen eksene göre eylemsizlik momenti)

minimum olma koşulu ⇒ $\frac{dI}{dx} = 0$ olmalı (Fonksiyonun birinci türevinin sıfıra eşitlendiği noktalar maksimum veya minimum noktalarını verir.)

$\Rightarrow \frac{dI}{dx} = \frac{d}{dx}\left[Mx^2 + m(L-x)^2\right] = 0$

$= M \cdot 2x + 2m(L-x)(-1) = 0$

$2Mx = 2m(L-x) \rightarrow \boxed{x = \frac{mL}{M+m}}$ olmalı.

* Sonucun sağlamasını yapmak için sistemin kütle merkezinin koordinatlarını bulabiliriz:

$y_{km} = 0$

$x_{km} = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{\sum m_i}$

$= \frac{M \cdot 0 + m \cdot L}{m+M}$

$x_{km} = \frac{mL}{m+M}$ KM $\left[\frac{mL}{m+M}, 0\right]$

Böylece $I_y = M\left(\frac{mL}{M+m}\right)^2 + m\left[L - \frac{mL}{M+m}\right]^2$

$I_y = \underbrace{\left(\frac{Mm}{M+m}\right)}_{\mu} L^2$ elde edilir.

$\underline{\underline{I_y = \mu L^2}}$

6) Kütlesi m_1, genişliği a, uzunluğu b olan ince ve düzgün bir metal levhanın;

a) Bir köşesinden geçen ve levhaya dik olan eksene göre eylemsizlik momentini bulunuz.

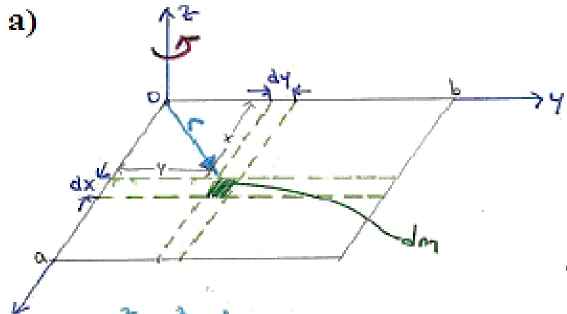
b) a şıkkında bulduğunuz sonucu kullanarak, aynı metal levhanın kütle merkezinden geçen ve levhaya dik olan eksene göre eylemsizlik momentini bulunuz.

6. $I = \int r^2 dm$

$$\sigma = \frac{M}{A} = \frac{M}{a.b}$$

$$\sigma = \frac{dm}{dA} \; ; \quad dm = \sigma dA = \sigma dx dy$$

a)



$r^2 = x^2 + y^2$

$$\boxed{I_o = \int r^2 dm = \iint (x^2+y^2)\sigma dx dy}$$

$$I_o = \sigma \int_0^a \int_0^b (x^2+y^2) dx dy$$

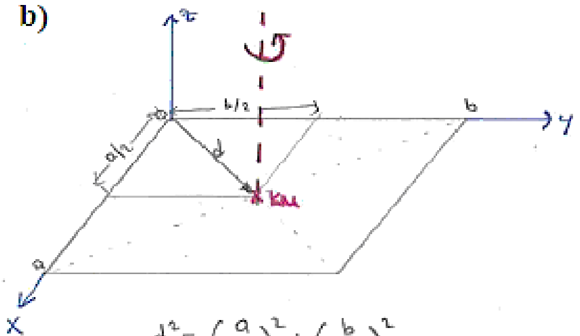
$$I_o = \sigma \int_0^a dx \int_0^b (x^2+y^2) dy$$

$$I_o = \sigma \int_0^a dx \left[\left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^b \right]$$

$$I_o = \sigma \int_0^a dx \left(x^2 b + \frac{b^3}{3} \right) = \sigma \left(\frac{x^3}{3} b + x \frac{b^3}{3} \right) \Big|_0^a$$

$$I_o = \underset{\frac{M}{a.b}}{\sigma} \left(\frac{a^3 b}{3} + \frac{a b^3}{3} \right) = \frac{M}{ab} \cdot \frac{ab}{3}(a^2+b^2) = \boxed{\frac{M}{3}(a^2+b^2)}$$

b)



$d^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$

Paralel eksenler teoremi

$$I_o = I_{KM} + Md^2$$

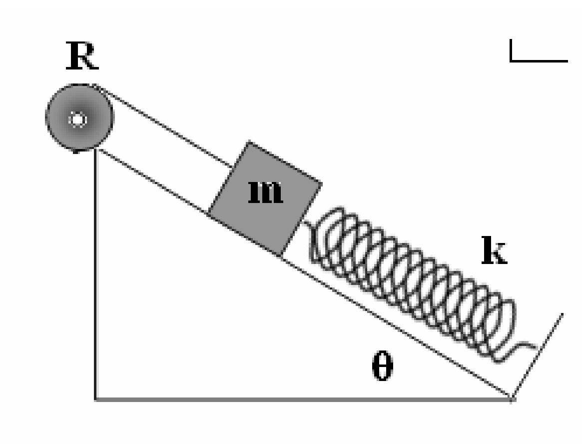
$$I_{KM} = I_o - Md^2 = \frac{M}{3}(a^2+b^2) - Md^2$$

$$I_{KM} = \frac{M}{3}(a^2+b^2) - M\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \right]$$

$$I_{KM} = \frac{M}{3}(a^2+b^2) - \frac{M}{4}(a^2+b^2)$$

$$\boxed{I_{KM} = \frac{M}{12}(a^2+b^2)}$$

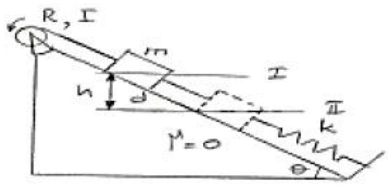
7) Şekilde gösterilen makaranın yarıçapı R ve eylemsizlik momenti I'dır. m kütlesinin bir ucu yay sabiti k olan bir yaya diğer ucu makaranın etrafında sarılı bir sicime bağlıdır. Makara mili ve eğik düzlem sürtünmesizdir. Yayı gerilmemiş halden d kadar uzatacak şekilde makara saatin tersi yönünde çevrilir ve serbest bırakılırsa,

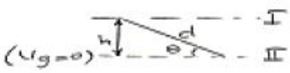


a) Yay tekrar gerilmemiş hale geldiğinde makaranın açısal hızını,

b) Bu durumda sayısal değerlerle açısal hız değerlerini bulunuz (I=1.00 kgm^2, R=0.300m, k=50.0N/m, m=0.500kg, d=0.200m, ve $\Theta=37^0$).

7.





$\sin\theta = \frac{h}{d}$

$h = d \cdot \sin\theta$

Sürtünme yok, $\mu = 0 \Rightarrow \Delta E = 0 \Rightarrow E_1 = E_2$

a)

$$E_1 = E_2$$

$$\Sigma U_1 + K_1 = \Sigma U_2 + K_2$$

$$(U_{yay} + U_g)_1 + \underbrace{\cancel{K_1}}_{0} = (\underbrace{\cancel{U_{yay}}}_{0} + \underbrace{\cancel{U_g}}_{0})_2 + (\underbrace{K_{dönme}}_{(makara)} + \underbrace{K_{öteleme}}_{(blok)})_2$$

$$\frac{1}{2}kd^2 + mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad , \quad v = \omega \cdot R$$

$$\frac{1}{2}kd^2 + mgd\sin\theta = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m\omega^2R^2$$

$$\frac{1}{2}kd^2 + mgd\sin\theta = \frac{1}{2}\omega^2(I + mR^2)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{kd^2 + 2mgd\sin\theta}{(I + mR^2)}}$$

b)

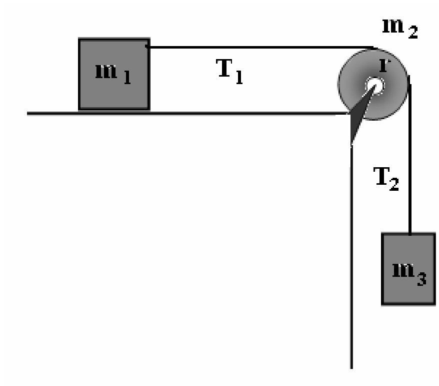
$$\omega = \sqrt{\frac{50 \cdot (0{,}2)^2 + 2(0{,}5) \cdot 10 \cdot (0{,}2) \cdot \sin 37}{(1 + 0{,}5 \cdot 0{,}3^2)}} = \sqrt{3{,}06} = 1{,}75 \text{ rad/s}$$

8) m_1 ve m_3 kütlesi, m_2 kütleli ve eylemsizlik momenti $I=\frac{1}{2}m_2r^2$ olan bir makara üzerinden geçen hafif bir iple bağlıdır. m_1 kütlesi ile masa arasındaki sürtünme ihmal edilmiştir.

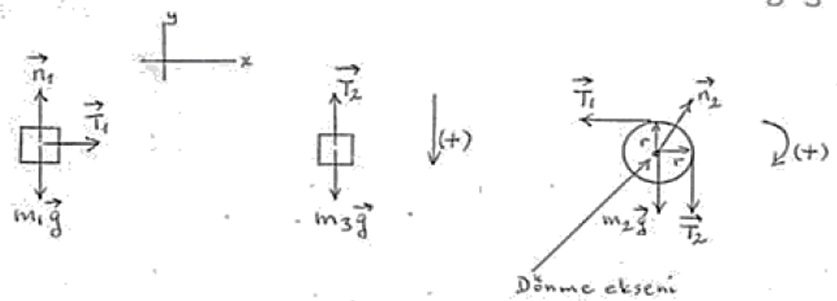
a) Sistemin ivmesini,

b) T_1 ve T_2 gerilmelerini bulunuz.

(m_1=0.15kg, m_2=0.10kg, m_3=0.10kg, r=0.10 kg, g=10m/s^2)



8. iki kütle ve makaranın serbest cisim diyagramları:



Kütlelerin ve makaranın hareket denklemleri:

$$T_1 = m_1 a \qquad (1)$$

$$m_3 g - T_2 = m_3 a \qquad (2)$$

$$T_2 \cdot r - T_1 r = I\alpha \qquad (3)$$

$$(T_2 - T_1) r = I\frac{a}{r} = \frac{1}{2} m_2 r^2 \left(\frac{a}{r}\right)$$

Net tork'un yönü sağ el kuralına göre sayfa düzleminin içine doğrudur. Dolayısıyla açısal ivme α'nın yönü de sayfa düzleminin içine doğrudur.

(1), (2) ve (3) denklemlerini taraf tarafa toplarsak

$$\cancel{T_1} + m_3 g - \cancel{T_2} + \cancel{T_2} - \cancel{T_1} = \left(m_1 + m_3 + \frac{1}{2} m_2\right) a$$

$$a = \frac{m_3 g}{m_1 + m_3 + \frac{1}{2} m_2} = \frac{0{,}10 \times 10}{0{,}15 + 0{,}10 + \frac{1}{2} \times 0{,}10} = \frac{10}{3} \ \frac{m}{s^2}$$

İpteki gerilimler (1) ve (2) bağıntılarından

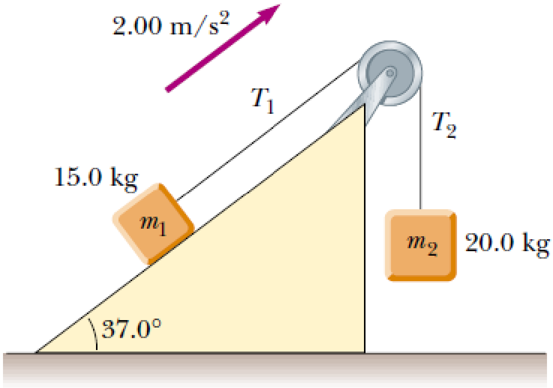
$$T_1 = m_1 a = 0{,}15 \times \frac{10}{3} = 0{,}5\ N$$

$$T_2 = m_3 (g - a) = 0{,}10 \left(10 - \frac{10}{3}\right) = \frac{2}{3}\ N.$$

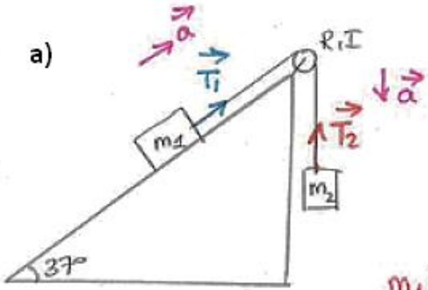
9) İki blok, Şekildeki gibi eylemsizlik momenti I ve yarıçapı 0,25 m olan bir makara üzerinden geçen, kütlesi ihmal edilebilir bir ipin uçlarına bağlıdır. Eğik düzlem üzerindeki blok, 2 m/s^{2}'lik sabit ivme ile yukarı çıkmaktadır.

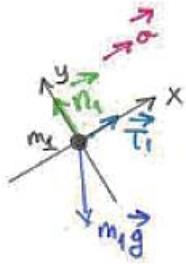
a) İpteki T_1 ve T_2 gerilimlerini,

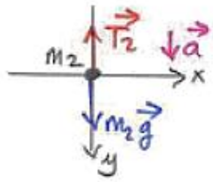
b) Makaranın eylemsizlik momentini bulunuz. (Sistemdeki sürtünmeleri önemsemeyiniz, $g=10\ m/s^2$)



9. a)







$m_1 = 15\ kg$

$m_2 = 20\ kg$

$a = 2\ m/s^2$

$R = 0,25\ m$

m_1 için: $\Sigma F_x = m_1 . a$

$T_1 - m_1 g \sin 37° = m_1 a$

$T_1 = m_1 (a + g \sin 37°)$

$T_1 = 15 [2 + 10 . \sin 37°]$

$\boxed{T_1 = 120 (N)}$

m_2 için: $\Sigma F_y = m_2 a$

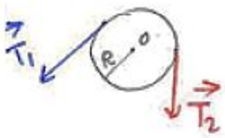
$m_2 g - T_2 = m_2 a$

$T_2 = m_2 (g - a)$

$T_2 = 20 (10 - 2)$

$\boxed{T_2 = 160 (N)}$

b)



$\Sigma \tau_o = I . \alpha$

$T_2 . R - T_1 R = I . \alpha$

$I = \dfrac{(T_2 - T_1) R}{\alpha}$

$I = \dfrac{(160 - 120) . 0,25}{8}$

$I = 1,25\ (kg . m^2)$

$a_t = \alpha R$

$\alpha = \dfrac{a_t}{R} = \dfrac{2}{0,25} = 8 (rad/s^2)$

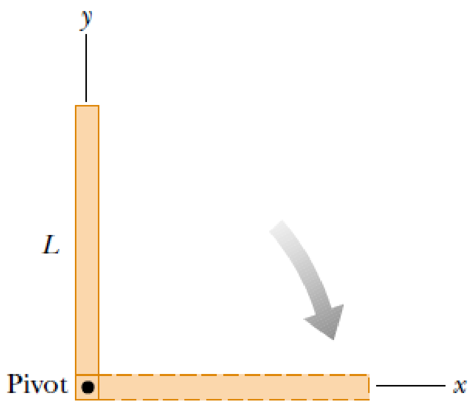
10) Kütlesi M ve boyu L olan düzgün bir çubuk Şekildeki gibi bir ucundan geçen sürtünmesiz bir mil etrafında dönebilmektedir. Çubuğun bu konumundan çok küçük bir etki (hesaplamalarda ihmal edilecek) ile dönme hareketine başladığı düşünülürse, çubuk yatay konuma geldiğinde;

a) Açısal hızını,

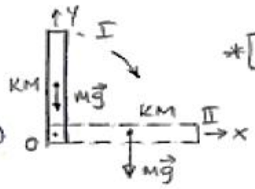
b) Açısal ivmesini,

c) Kütle merkezinin ivmesinin x-y bileşenlerini

d) Eksendeki (mil) tepki kuvvetin bileşenlerini bulunuz.



10.



$(U_g = 0)$

*[Çubuğun kütle merkezinden geçen eksene göre $I_{KM} = \frac{1}{12}ML^2$]

$I_o = I_{km} + Md^2 \rightarrow$ [O noktasından geçen eksene göre]

$= \frac{1}{12}ML^2 + M\cdot\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2$

a)

$E_I = E_{II}$

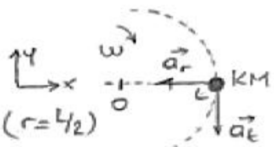
$K_I + U_I = K_{II} + U_{II}$

$mg\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{2}I_o\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$

b) $\Sigma\tau_o = I\cdot\alpha$

$(Mg)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{3}ML^2\cdot\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3g}{2L}$

c)



$(r = L/2)$

$a_t = \alpha\cdot r = \left(\frac{3g}{2L}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{3}{4}g$

$a_r = \frac{V^2}{r} = \omega^2 r = \left(\frac{3g}{L}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{3}{2}g$

$\vec{a} = \left[-\frac{3}{2}g\,\vec{i} - \frac{3}{4}g\,\vec{j}\right]$ m/s²

d) Newton'un II. yasasına göre $\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a}$

$\Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = m\cdot a_x \\ R_x = m\cdot\left(-\frac{3}{2}g\right) = -\frac{3}{2}mg \end{cases}$

$\Sigma F_y = m\cdot a_y$

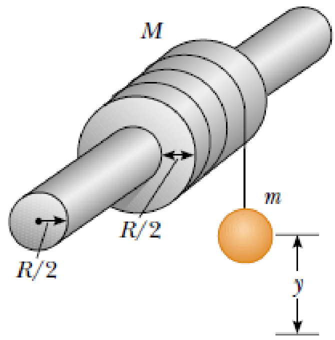
$R_y - mg = m\cdot\left(-\frac{3}{4}g\right)$

$R_y = \frac{mg}{4}$

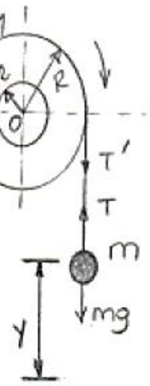
11) Şekil'de görülen içi boş, düzgün bir silindirik makaranın iç yarıçapı R/2, dış yarıçapı R ve kütlesi M dir. Makara sürtünmeli, sabit yatay bir mil etrafında dönebilecek şekilde tutturulmuştur. Makara etrafına sarılı ipin ucuna m kütlesi bağlıdır. m kütlesi serbest bırakılınca t kadar zamanda y kadar düşer. Makara ile mil arasındaki sürtünme kuvvetine ait torkun

$$\tau_f = R\left[m\left(g - \frac{2y}{t^2}\right) - M\frac{5y}{4t^2}\right]$$

olacağını gösteriniz.



11.



$T' = T$

Sürtünme kuvvetine ait tork, τ_f, harekete karşı koyar, bu nedenle

$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha$$

$$T \cdot R - \tau_f = I \cdot \alpha \Rightarrow \boxed{\tau_f = TR - I\alpha} \quad (1)$$

m kütlesi için hareket denklemini yazalım.

$$\Sigma F_y = m \cdot a \quad , \text{(hareketin yönü pozitif yön alınarak)}$$

$$mg - T = m \cdot a \Rightarrow \boxed{T = m(g-a)} \quad (2)$$

m kütlesi düşeyde y kadar aşağıya iniyor, böylece

$$y = \cancel{V_0 t}^{\,0} + \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow \boxed{a = \frac{2y}{t^2}} \quad (3) \Rightarrow \alpha = \frac{a}{R} = \boxed{\frac{2y}{Rt^2}} \quad (4)$$

İçi boş silindirin geometrik eksene göre eylemsizlik momenti,

$$I = \frac{1}{2} M \left(R_{iç}^2 + R_{dış}^2\right) = \frac{1}{2} M\left[\left(\frac{R}{2}\right)^2 + R^2\right] = \boxed{\frac{5}{8} MR^2} \quad (5)$$

2,3,4 ve 5 nolu bağıntılar (1) ifadesinde yazılarak düzenlenirse

$$\tau_f = R\left[m\left(g - \frac{2y}{t^2}\right) - \frac{5}{4} M\left(\frac{y}{t^2}\right)\right]$$