Bölüm: 3

VEKTÖRLER

- Koordinat Sistemleri
- Vektör ve skaler Nicelikler
- Vektörlerin Bazı Özellikleri
- Bir Vektörün Bileşenleri ve Birim vektörler
- Skaler Çarpım, Vektörel Çarpım

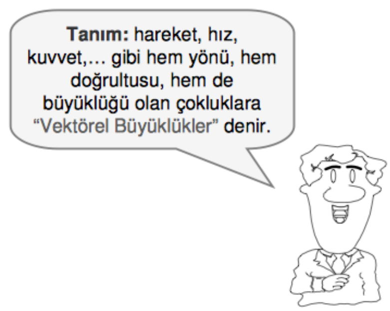
1

- Vektör Kavramını ve vektörlerle matematiksel işlemlerin nasıl yapılacağını bilmek önemlidir.
- Bu bölümün kapsamında vektörlerle toplama ve çıkartma işlemlerinin nasıl yapılacağını ve bunun için hangi araçların kullanılacağını öğreneceksiniz.
- Bu konuya gereken önem verilir ve hakkıyla vektörler kavramı öğrenilirse ders kapsamında işlenecek fizik konularının anlaşılması daha kolaylaşacaktır.

2

Tanım: Matematik, istatistik, mekanik,… gibi çeşitli bilim dallarında uzunluk, alan, hacim, yoğunluk, kütle, elektriksel yük,… gibi büyüklükler, cebirsel kurallara göre ifade edilirler.

3



4

KOORDİNAT SİSTEMLERİ

Bir niceliğin tanımlanmasında başlangıç ve bitiş noktası ile doğrultusu, yönü ve büyüklüğüne ihtiyaç duyuluyorsa nicelik ***VEKTÖRELDİR*** deriz. Bu özellikleri taşımayan ve yalnız büyüklükleri ile tanımlanan nicelikler *SKALER* olarak adlandırılırlar.

Hız, ivme, kuvvet, momentum, tork, elektrik alanı, manyetik alan gibi büyüklükler vektöreldir ve bu niceliklerle en basit dört işlem yapılırken bile dikkatli olunmalı ve vektörel işlem kurallarına uyulmalıdır.

Kütle, hacim, alan, zaman, sıcaklık, enerji, iş gibi nicelikler ise skaler olarak tanımlanır ve matematikteki dört temel işlem herhangi bir ilave bir kural olmaksızın gerçekleştirilir.

5

Vektör tanımına bakıldığında görünen odur ki, vektörel bir niceliği tanımlamak için öncelikle bir referans noktası ve koordinat sistemi belirlenmelidir.

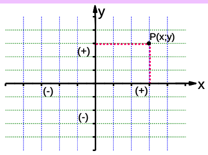
KOORDİNAT SİSTEMLERİ

Dik (Kartezyen) Koordinat sistemi ***
Kutupsal (polaar) Koordinat sistemi ***

Silindirik Koordinat Sistemi
Küresel Koordinat sistemi

6

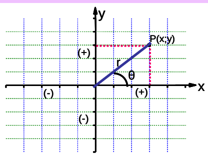
DİK KOORDİNAT SİSTEMİ



İki boyutlu dik koordinat sisteminde herhangi bir P noktası,sırasıyla noktadan x eksenine ve y eksenine inilen dikmenin eksenleri kestiği nokta olarak belirlenir bu noktalara P nin koordinatları denir.

şekildeki P(3;3) koordinatı ile verilir

KUTUPSAL KOORDİNAT SİSTEMİ



kutupsal koordinat sisteminde herhangi bir P noktasının koordinatları θ ve r cinsinden verilir.

şekildeki P(θ;r) koordinatı ile verilir.

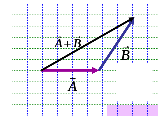
Burada

x=rcos θ
y=rsin θ
tan θ=y/x

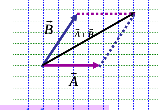
VEKTÖRLERİN TOPLANMASI

İki veya daha fazla vektör toplanırken birimlerinin ve aynı zamanda boyutlarının aynı olduğuna dikkat edilmelidir.

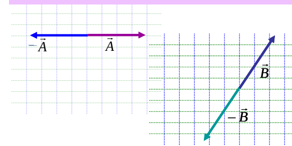
uc uca ekleme yöntemi



paralel kenar yöntemi



VEKTÖRÜN NEGATİFİ



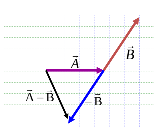
bir vektörün negatifi vektörün yönünün değişmesi demektir.

VEKTÖRLERDE ÇIKARMA İŞLEMİ

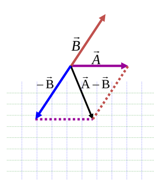
Bir vektörü diğer bir vektörden çıkarmak için önce vektörün negatifi alınır ve vektörel toplama işlemi yapılır.

$$\vec{A}+(-\vec{B})=\vec{A}-\vec{B}$$

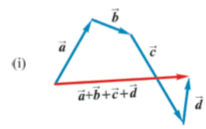
uc uca ekleme yöntemi



paralel kenar yöntemi

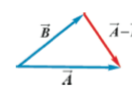


- Üçgen kuralı daha kullanışlıdır.



- İki vektörün farkı:

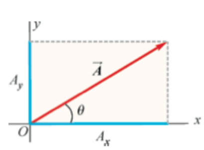
$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B}) \Longrightarrow$



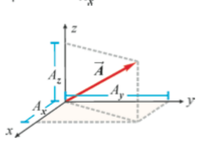
BİR VEKTÖRÜN BİLEŞENLERİ VE BİRİM VEKTÖRLER

- **2-boyutta**: $\vec{A}$ vektörünün uç noktasından x- ve y-eksenlerine çizilen paralellerin eksenleri kestiği uzunluklar $\vec{A}$ vektörünün A_x ve A_y bileşenleri olurlar.

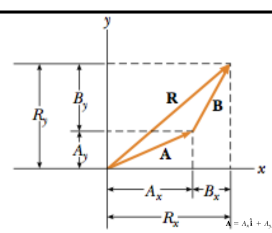
$\vec{A}:(A_x, A_y)$



- **3-boyutta**:
  $\vec{A}:(A_x, A_y, A_z)$



- Bileşenler birer cebirsel sayıdırlar.



$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$

$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$

$\mathbf{R} = (A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}) + (B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}})$

$\mathbf{R} = (A_x + B_x)\hat{\mathbf{i}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{j}}$

$\mathbf{R} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}}$

$R_x = A_x + B_x$
$R_y = A_y + B_y$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2}$$

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{A_y + B_y}{A_x + B_x}$$

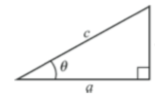
$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$$
$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{R} = (A_x + B_x)\hat{\mathbf{i}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{j}} + (A_z + B_z)\hat{\mathbf{k}}$$

13

Dik üçgende trigonometrik bağıntılar:

$\sin\theta = \frac{b}{c}$, $\cos\theta = \frac{a}{c}$, $\tan\theta = \frac{b}{a}$



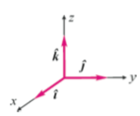
$$A_x = A\cos\theta \qquad A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$
$$A_y = A\sin\theta \qquad \tan\theta = \frac{A_y}{A_x}$$

14

BİRİM VEKTÖRLER

Eksenler boyunca birim (1) uzunlukta vektörler:

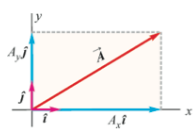
$\hat{\imath}$: (1, 0, 0) , $\hat{\jmath}$: (0, 1, 0) , $\hat{k}$: (0, 0, 1)



Her vektör, bileşenleri ve birim vektörler cinsinden daima şöyle yazılabilir:

2-boyutta : $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}$

3-boyutta : $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_y\hat{k}$



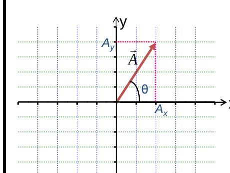
15

BİRİM VEKTÖRLER

Bir vektörün dik koordinat sisteminin eksenlerine olan iz düşümlerine o vektörün bileşenleri denir. vektörünün negatifini alınır ve iki vektörün toplamı elde edilirse çıkartma işlemi yapılmış olur.

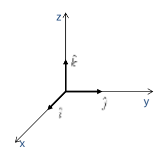
Büyüklüğü 1 birim olan vektörlere birim vektörler denir. Dik koordinat sisteminde birim vektörler

î, ĵ ve k̂ ile gösterilir.



$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$

$$A_x = A\cos\theta$$
$$A_y = A\sin\theta$$



16

- Örnek:

$$\vec{D} = 3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 6\hat{k}$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$D_x \quad D_y \quad D_z$$

- Vektör Bileşenleriyle Toplama:

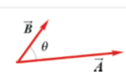
$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$$

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$
$$\vec{C} = (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath} + (A_z + B_z)\hat{k}$$
$$\vec{C} = C_x\hat{\imath} + C_y\hat{\jmath} + C_z\hat{k}$$

17

SKALER ÇARPIM

$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$ (Skaler çarpım)



Özellikleri:

- Sonuç cebirsel bir sayıdır. İki vektör arasındaki açı 90° den küçükse çarpım pozitif, büyükse çarpım negatif olur.
- Sıra değiştirme: $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$
- Dağılma: $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$
- $\theta = 90°$ ($\cos 90° = 0$) ise, birbirine dik iki vektörün skaler çarpımı sıfır olur (diklik koşulu).
- $\vec{A}\cdot\vec{A} = AA\cos 0° = A^2$ veya, bir vektörün kendisiyle skaler çarpımı şiddetinin karesini verir.

18

- Birim vektörlerin skaler çarpımı:

$$\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = 1.1.\ \cos 0 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$$

$$\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = 1.1.\ \cos 90^\circ = 0 \qquad\qquad \hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{\imath} = 0$$

- Skaler çarpımın bileşenler cinsinden ifadesi:

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} = {} & A_xB_x(\hat{\imath}\cdot\hat{\imath}) + A_xB_y(\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath}) + A_xB_z(\hat{\imath}\cdot\hat{k}) + \\ & +A_yB_x(\hat{\jmath}\cdot\hat{\imath}) + A_yB_y(\hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath}) + A_yB_z(\hat{\jmath}\cdot\hat{k}) + \\ & +A_zB_x(\hat{k}\cdot\hat{\imath}) + A_zB_y(\hat{k}\cdot\hat{\jmath}) + A_zB_z(\hat{k}\cdot\hat{k})\end{aligned}$$

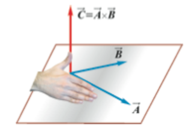
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

- Özet:

$$\text{Skaler Çarpım:} \qquad \vec{A}\cdot\vec{B} = \begin{cases} AB\cos\theta \\ \text{veya} \\ A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \end{cases}$$

VEKTÖREL ÇARPIM

$$\vec{A}\times\vec{B} = \vec{C}$$



- Sonuç bir vektördür.
- **Şiddeti:** $C = AB\sin\theta$
- **Yönü:** $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ nin oluşturduğu düzleme dik doğrultuda ve **sağ-el kuralı** yönünde.

Özellikleri:

- Sıra değiştirmez! $\vec{B}\times\vec{A} = -\vec{A}\times\vec{B}$
- Dağılma : $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B} + \vec{A}\times\vec{C}$
- İki vektör paralel ($\theta = 0$) veya anti-paralel ($\theta = 180^\circ$) ise, sinüsler sıfır olacağından, vektörel çarpımın sonucu sıfır olur. Özel olarak, bir vektörün kendisiyle vektörel çarpımı sıfırdır: $\vec{A}\times\vec{A} = 0$

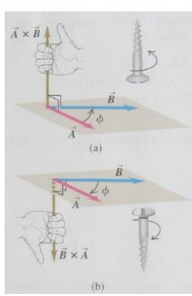
➤Vektör çarpımının yönü sağ el kuralı ile bulunur

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}$$

Vektör çarpımının büyüklüğü

$$C = ABSin\,\phi$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$$



Ref. H. D. Young ve R. A. Freedman,University Physics, 11. Baskı

- Birim vektörlerin vektörel çarpımı:

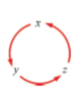
$$\hat{\imath}\times\hat{\imath} = \hat{\jmath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$$
$$\hat{\imath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}, \quad \hat{\jmath}\times\hat{k} = \hat{\imath}, \quad \hat{k}\times\hat{\imath} = \hat{\jmath}$$
$$\hat{\jmath}\times\hat{\imath} = -\hat{k}, \ldots$$

- Vektörel çarpımın bileşenler cinsinden ifadesi:

$$\begin{aligned}\vec{C} &= \vec{A}\times\vec{B} = (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k})\times(B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}) \\ &= A_xB_x(\hat{\imath}\times\hat{\imath}) + A_xB_y(\hat{\imath}\times\hat{\jmath}) + A_xB_z(\hat{\imath}\times\hat{k}) + \\ &\quad +A_yB_x(\hat{\jmath}\times\hat{\imath}) + A_yB_y(\hat{\jmath}\times\hat{\jmath}) + A_yB_z(\hat{\jmath}\times\hat{k}) + \\ &\quad +A_zB_x\underbrace{(\hat{k}\times\hat{\imath})}_{\hat{\jmath}} + A_zB_y\underbrace{(\hat{k}\times\hat{\jmath})}_{-\hat{\imath}} + A_zB_z\underbrace{(\hat{k}\times\hat{k})}_{0} \\ \vec{C} &= \underbrace{(A_yB_z - A_zB_y)}_{C_x}\hat{\imath} + \underbrace{(A_zB_x - A_xB_z)}_{C_y}\hat{\jmath} + \underbrace{(A_xB_y - A_yB_x)}_{C_z}\hat{\imath}\end{aligned}$$

Bu formülü akılda tutmak için:

- Döner permütasyon tekniği



$$x\to y\to z, \qquad y\to z\to x, \qquad z\to x\to y$$

$$\underbrace{C_x = A_yB_z - A_zB_y}_{x\to y\to z}, \qquad \underbrace{C_y = A_zB_x - A_xB_z}_{y\to z\to x}, \qquad \underbrace{C_z = A_xB_y - A_yB_x}_{z\to x\to y}$$

- Determinant şeklinde yazım:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \det\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$