LİNEER CEBİR

şafak bilici

Transpoze

$A = [a_{ij}] \in F_{m \times n}$

$A^T = [a_{ji}] \in F_{n \times m}$

$(A+B)^T = A^T + B^T$

$(A^T)^T = A$

$(AB)^T = B^T . A^T$

İz

Esas Köşegen toplamı

$iz\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

$iz\,(A \pm B) = iz\, A \pm iz\, B$

$iz\,(k.A) = k.\, iz\, A \quad , k \in \mathbb{R}$

Üçgensel Matrisler

$A = [a_{ij}]$

$i > j$ için $a_{ij} = 0 \longrightarrow$ üst üçgensel matris

$i < j$ için $a_{ij} = 0 \longrightarrow$ alt üçgensel matris

Simetrik Matris

$A = A^T$ olmalı $\qquad A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}_{n \times n}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ -3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -6 & 8 \\ 5 & 4 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

$A \pm B$, simetrik

$k.A$, $k \in \mathbb{R}$ simetrik

$(A.B)^T$, simetrik, A ve B Komütatif olmalı.

Ters Simetrik

$A^T = -A \quad , a_{ii} = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & -5 \\ -3 & 0 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & -8 \\ 5 & 4 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Hermityen Matris

$A^T = \overline{A}$ $\qquad A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}_{n \times n}$, $a_{ii} \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2-3i \\ 1-i & 2 & -4i \\ 2+3i & 4i & 3 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2+3i \\ 1+i & 2 & 4i \\ 2-3i & -4i & 3 \end{bmatrix} = \overline{A}$$

Ters Hermityen Matris

$A^T = -\overline{A}$

$$A = \begin{bmatrix} i & 1+1 & 2+3i \\ -1+i & 2i & 4i \\ -2+3i & 4i & -3i \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} i & -1+1 & -2+3i \\ 1+i & 2i & 4i \\ 2+3i & 4i & -3i \end{bmatrix} = -\overline{A}$$

Normal Matris

$A \cdot A^T = A^T \cdot A$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Ortogonal Matris

$A \cdot A^T = A^T \cdot A = I_n$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = A$$

Periyodik Matris

$A \in F_{n \times n}$, $k \in \mathbb{Z}^+$

$A^{k+1} = A$ ise A periyodik matris

k ise A'nın periyodu.

İdempotent Matris

$A^2 = A$ ise A idempotent matris.

İnvolüt Matris

$A^2 = I_n$

Nilpotent Matris

$A^k = 0$ k, indeks.

Matrisin Tersi

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ $A \cdot B = I_n$ olsun , $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ varsayalım.

$A \cdot B = \underbrace{\begin{bmatrix} x+3z & y+3w \\ 3x+8z & 3y+8w \end{bmatrix}}_{I_n}$ $B = \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

DETERMINANT

Minör ve Kofaktör

A matrisinin i. ve j. satır/sütun'u atılınca olan matris M_{ij} olsun.

det M_{ij} sayısına A matrisinin a_{ij} elemanının minörü denir.

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ sayısına işaretli minör / Kofaktör denir.

Laplace

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = ? \qquad \det M_{23} = ?$$

$$\det M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = (-1).(1) - 5.2 = -11$$

$$\det A = 0 . \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 . \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 5 . \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 78$$

Elementer İşlemler Ve İndirgemiş Eşelon

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 3 & -2 & 4 & 1\\ 2 & -1 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

$H_{21}(-3) \longrightarrow H_{31}(-2) \longrightarrow H_{12}(1) \longrightarrow H_{32}(-1) \longrightarrow H_{23}(2)$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 3 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

H_{ij}

$H_{i}k$

Determinant Ve Ters

$$\text{adj}\,A = \text{ek}\,A = [A_{ij}]^T = [A_{ji}]$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{ek}\,A$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A^{-1} ve $\text{Ek}A = ?$

$$\text{ek}\,A = [A_{ij}]^T = A_{ji} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 2 \\ -2 & -4 & 6 \\ -6 & -4 & 18 \end{bmatrix}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

$$\det A = -18 + 0 + 2 = -16$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/8 & 1/4 & -1/8 \\ 1/8 & 1/4 & -3/8 \\ 3/8 & 1/4 & -9/8 \end{bmatrix}$$

Determinant Özellikleri

- Satır yer değişirse determinant işaret değiştirir.

- $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 3 . \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

- $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} +k$

- $\det \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ kd & ke & kf \end{vmatrix} = 0$

- $\det(A.B) = \det A . \det B$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\det A^n = (\det A)^n$

- $\det A = \det A^T$

Determinant ve Rank

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & -10 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

3x3'ler için: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -10 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -10 & 2 \\ -2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$

- - - - -

2x2 için

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \quad$ rank $A = 2$

Özdeğer Ve Özvektör

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ olmak üzere $AX=\lambda X$

denklemini sağlayan λ'ya, A matrisinin özdeğeri veya karakteistik değeri denir.

$AX=\lambda X$

$AX-\lambda X=0$

$(A-\lambda I)X=0$

$$|A-\lambda.I| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$P(\lambda)=\lambda^n+a_1.\lambda^{n-1}+a_2.\lambda^{n-2}+\dots+a_n$ → Karakteistik polinom

$a_1=-\text{iz}A$ ve $a_n=(-1)^n.|A|$'dır.

X vektörüne de λ öz değerine karşılık gelen özvektör (karakteistik vektör) denir.

Cayley Hamilton Teoremi

Her matris kendisinin karakteristik denklemini sağlar.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i . \lambda^{n-i} = 0 \quad \text{ise} \quad \sum_{i=0}^{n} a_i A^{n-i} = 0\text{'dır.}$$

$a_0 = 1$

$|A| \neq 0$ ise tersinirdir.

$a_i = (-1)^i . |A| \neq 0$

$$A^n + a_1 . A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + \dots + a_n I_n = 0$$

$$a_n I_n = -A\left(A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + a_2 A^{n-3} + \dots + a_{n-1} I_n\right)$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{a_n}\left(A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + a_2 A^{n-3} + \dots + a_{n-1} I_n\right)$$

olur.

1) $B=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor

a) Cayley-Hamilton teoremiyle B^{207} bul

λ özdeğer olsun.

$(B-\lambda I)=0$, $|B-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 = (+1-\lambda).(-1-\lambda)-3=0$

$-1-\lambda+\lambda+\lambda^2-3=0$

$B^2-4I_2=0$

$B^2=4I_2$

$(B^2)^{103}.B = (4I_2)^{103}.B = 4^{103}.B$

b) B^{-1} varsa bulunuz.

$\det B \neq 0$, tersi var.

$-1-\lambda+\lambda+\lambda^2-3=0$

$B^2-4I_2=0$

$B^2=4I_2$

$B^{-1}.B^2=4.I_2.B^{-1}$

$B=4.B^{-1}$

$B^{-1}=\left(\frac{1}{4}\right).B = \begin{bmatrix} 1/4 & -3/4 \\ -1/4 & -1/4 \end{bmatrix}$

2)

a) $W = \{ P(x) \in P_2 \mid P(1) = 0 \}$ kümesinin P_2 uzayının alt uzayı old göster.

W'nun bazını bul ve boyutunu.

$ax^2+bx+c \in P_2$

$a+b=-c$ için $P(1)=0$

$0 \in P_2$

$0 \in W$ $\sqrt{}$ $W \subset P_2$

$ax^2+bx-(a+b)$

$ax^2+bx-a-b$

$a(x^2-1)+b(x-1)$, $a, b \in \mathbb{R}$

$S = \{ \underset{v_1}{x^2-1}, \underset{v_2}{x-1} \}$ bir bazıdır

$\lambda(x-1)+\theta(x-1)=0$ için $\lambda=\theta=0$ lineer bağımsız

boy $W = 2$'dir

b) $W = \{ A \in M_{n\times n} \mid A^2 = A \}$ kümesinin $M_{n\times n}$ 'in alt uzayı olup olmadığına bak.

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lineer bağımsız,

a) $\{\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}-2\vec{c},\ 3\vec{b}+\vec{c}\}$ lineer bağımsız mı?

$k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{b} + k_3 \vec{c} = 0$, $k_1 = k_2 = k_3 = 0$

$$c_1(\vec{a}+\vec{b}) + c_2(\vec{a}-2\vec{c}) + c_3(3\vec{b}+\vec{c}) = 0$$

$$c_1\vec{a} + c_1\vec{b} + c_2\vec{a} - c_2 2\vec{c} + 3c_3\vec{b} + c_3\vec{c} = 0$$

$$\vec{a}(c_1+c_2) + \vec{b}(c_1+3c_3) + \vec{c}(c_3-2c_2) = 0$$

$c_1 + c_2 = 0$
$c_1 + 3c_3 = 0$
$c_3 - 2c_2 = 0$ $\qquad c_1 = c_2 = c_3 = 0$ lineer bağımsız.

b) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ üzerine kurulan paralelyüzlünün hacmi $5\,br^3$ olsun.
$\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-2\vec{c}$, $3\vec{b}+\vec{c}$ üstüne kurulan paralel yüzlü hacmi?

$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 5$ $\qquad$ $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{d}$

$\vec{a}$

$(\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}-2\vec{c} \times 3\vec{b}+\vec{c})$

$[(\vec{a} \times 3\vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})] - 2\vec{c} \times \vec{b} - \cancel{2\vec{c} \times \vec{c}}$

5)

$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & k \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor. A'nın bir özvektörü $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ise

k=? K için A nın en küçük özdeğerine karşılık gelen özvektörü bul.

$(A-\lambda I)X$

$-2-6+10-2\lambda$

λ

$2+6+2\lambda+2k$

$$(A-\lambda I)X = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 3 & 5 \\ 1 & -3-\lambda & k \\ -1 & 3 & 5-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 = \begin{bmatrix} 2-2\lambda \\ 8+2k+2\lambda \\ 2-2\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$\lambda_1 = 1$

$\boxed{k=-5}$

$|A-\lambda I| = 0$ $\quad 3\times3 \quad 3\times1 \quad 3\times1$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & 5 \\ 1 & -3-\lambda & k \\ -1 & 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \lambda \\ 0 & -\lambda & k+5-\lambda \\ -1 & 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & k+5-\lambda \\ -1 & 3 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} 0 & -3 & \lambda-5 \\ 0 & -\lambda & k+5-\lambda \\ -1 & 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} \quad (\lambda).. -1\left[(k+5-\lambda).(-3) - (-\lambda).(\lambda-5)\right)$$

$\lambda . \left[+3k+15-3\lambda-\lambda^2+5\lambda\right]$

$= 3k\lambda + 15\lambda - 3\lambda^2 - \lambda^3 + 5\lambda^2$

$= \cancel{3k\lambda + 15\lambda} + 2\lambda^2 - \lambda^3 = 0$

$2\lambda^2 - \lambda^3 = 0$

$\lambda^2(2-\lambda$