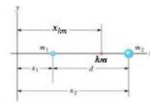
Bölüm: 9

DOĞRUSAL MOMENTUM VE ÇARPIŞMALAR

Kütle Merkezi:



x-ekseni üzerinde x_1 ve x_2 noktalarında bulunan, sırasıyla, m_1 ve m_2 kütlelerine sahip iki noktasal cismin kütle merkezi,

$$x_{km} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

bağıntısı ile verilir.

x-ekseni üzerine yerleştirilmiş n tane parçacık durumunda bu bağıntı:

$$x_{km} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \ldots + m_nx_n}{M} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_ix_i$$

olur. Burada M sistemdeki parçacıkların toplam kütlesidir.

Üç-boyutlu uzayda (xyz-koordinat sistemi) parçacık sisteminin kütle merkezi de, kütlesi m_i olan parçacığın konum vektörü $\vec{r}_i$ olmak üzere, daha genel bir ifade olan

$$\vec{r}_{km} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i$$

bağıntısına sahiptir.

Konum vektörü $\vec{r}_{km} = x_{km}\hat{i} + y_{km}\hat{j} + z_{km}\hat{k}$ biçiminde de yazılabileceğinden, kütle merkezinin koordinatları

$$x_{km} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_ix_i \qquad y_{km} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_iy_i \qquad z_{km} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_iz_i$$

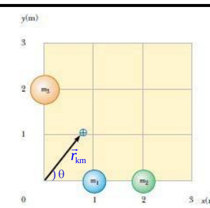
ile verilebilir.

Bir parçacık sisteminin kütle merkezi, sistemdeki tüm parçacıkların toplandığı bir nokta ve sistem üzerine etki eden tüm dış kuvvetler o noktaya etkiyormuş gibi düşünülebilir.

Bir beyzbol sopasının şekildeki gibi havaya fırlatıldığını ve yer-çekimi kuvvetinin etkisi altındaki hareketini düşünelim. Sopanın kütle merkezi siyah bir nokta ile işaretlenmiştir. Kütle merkezinin hareketine bakıldığında, bunun bir eğik atış hareketi olduğu kolayca görülür.

Ancak, kütle merkezi dışındaki noktaların hareketleri oldukça karmaşıktır.

Örnek : Konumları şekilde verilen $m_1 = m_2 = 1.0$ kg ve $m_3 = 2$ kg kütleli üç parçacıktan oluşan sistemin kütle merkezini bulunuz.



$$x_{km} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{M} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(1)(1) + (1)(2) + (2)(0)}{1+1+2} = 0{,}75\ \text{m}$$

$$y_{km} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_iy_i}{M} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(1)(0) + (1)(0) + (2)(2)}{1+1+2} = 1\ \text{m}$$

$$\vec{r}_{km} = 0.75\hat{i} + \hat{j}\ \text{m}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{0.75}\right) = 53.1^\circ$$

Örnek : xy-düzlemindeki konumları $\vec{r}_1 = 12\hat{j}$ (cm), $\vec{r}_2 = -12\hat{i}$ (cm) ve $\vec{r}_3 = 12\hat{i} - 12\hat{j}$ (cm) olan cisimlerin kütleleri de sırasıyla, $m_1 = 0.4$ kg ve $m_2 = m_3 = 0.8$ kg ile veriliyor. Sistemin kütle merkezini bulunuz.

$$x_{km} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{M} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(0.4)(0) + (0.8)(-12) + (0.8)(12)}{0.4 + 0.8 + 0.8} = 0$$

$$y_{km} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_iy_i}{M} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(0.4)(12) + (0.8)(0) + (0.8)(-12)}{0.4 + 0.8 + 0.8} = -2{,}4\ \text{cm}$$

$$\vec{r}_{km} = x_{km}\hat{i} + y_{km}\hat{j} = -2{,}4\hat{j}\ \text{cm}$$

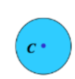
Katı Cisimlerin Kütle Merkezi :

Maddenin, içinde homojen bir şekilde dağıldığı sistemlere katı cisimler diyebiliriz. Böyle cisimlerin kütle merkezlerini bulmak için, kesikli toplama işlemi yerine sürekli toplama işlemi olan integrali kullanacağız:

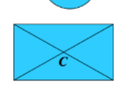
$$x_{km} = \frac{1}{M}\int x\,dm \qquad y_{km} = \frac{1}{M}\int y\,dm \qquad z_{km} = \frac{1}{M}\int z\,dm$$

Cisimlerin simetrisi (simetri noktası, simetri ekseni, simetri düzlemi) uygun ise integral alma işlemine gerek kalmayabilir. Kütle merkezi simetri elemanı üzerinde olacaktır.

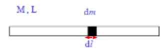
Örneğin bir kürenin kütle merkezi, kürenin merkezidir.



Bir dikdörtgenin kütle merkezi, karşılıklı köşegenleri birleştiren doğruların kesişim noktasıdır.

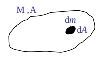


Katı cisim L uzunluğuna ve M kütlesine sahip bir çubuk ise, kütle yoğunluğu çizgiseldir:



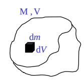
$$\boxed{\lambda = \frac{dm}{dl} = \frac{M}{L}} \rightarrow x_{km} = \frac{1}{M}\int x\lambda dx$$

Katı cisim A yüzey alanına ve M kütlesine sahip ince bir plaka ise, kütle yoğunluğu yüzeyseldir:



$$\boxed{\sigma = \frac{dm}{dA} = \frac{M}{A}} \rightarrow x_{km} = \frac{1}{M}\int x\sigma dA \ ; \ y_{km} = \frac{1}{M}\int y\sigma dA$$

Katı cisim V hacmine ve M kütlesine sahip ise, kütle yoğunluğu hacimseldir:

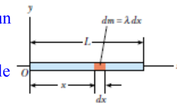


$$\boxed{\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V}} \rightarrow x_{km} = \frac{1}{M}\int x\rho dV \ ; \ y_{km} = \frac{1}{M}\int y\rho dV \ ; \ z_{km} = \frac{1}{M}\int z\rho dV$$

Örnek :

$a-$) Kütlesi M ve uzunluğu L olan homojen bir çubuğun kütle merkezini bulunuz.

$b-$) Çubuğun çizgisel kütle yoğunluğu $\lambda = \alpha x$ ise, kütle merkezini bulunuz. (x çubuğun sol ucundan olan uzaklık, α da bir sabittir).



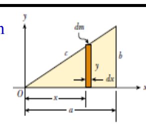
$$a-)\ x_{km} = \frac{1}{M}\int xdm = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda dx = \frac{\lambda}{2M}\left[x^2\right]_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M} = \frac{L^2}{2M}\left(\frac{M}{L}\right) = \frac{L}{2}$$

$$b-)\ x_{km} = \frac{1}{M}\int xdm = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda dx = \frac{1}{M}\int_0^L x(\alpha x)dx = \frac{\alpha}{3M}\left[x^3\right]_0^L = \frac{\alpha L^3}{3M}$$

$$M = \int_0^L \lambda dx = \int_0^L (\alpha x)dx = \frac{\alpha}{2}\left[x^2\right]_0^L = \frac{\alpha L^2}{2}$$

$$x_{km} = \frac{\alpha L^3}{3M} = \frac{L^3}{3M}\left(\frac{2M}{L^2}\right) = \frac{2}{3}L$$

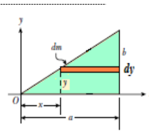
Örnek : Kütlesi M ve boyutları şekilde verilen dik üçgen biçimindeki plakanın kütle merkezini bulunuz.



$$dm = \frac{M}{\left(\frac{1}{2}ab\right)}.(ydx) = \frac{2M}{ab}.(ydx) \quad \text{ve} \quad \frac{y}{x} = \frac{b}{a}$$

$$x_{km} = \frac{1}{M}\int xdm = \frac{2}{ab}\int_0^a xydx = \frac{2}{ab}\int_0^a x\left(\frac{b}{a}x\right)dx = \frac{2}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{2}{3}a$$

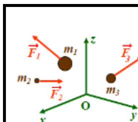
$$dm = \frac{M}{\left(\frac{1}{2}ab\right)}.(a-x)dy = \frac{2M}{ab}.(a-x)dy \quad \text{ve} \quad \frac{b-y}{a-x} = \frac{b}{a}$$



$$y_{km} = \frac{1}{M}\int ydm = \frac{2}{ab}\int_0^b y(a-x)dy = \frac{2}{ab}\int_0^b y\frac{a}{b}(b-y)dy$$

$$y_{km} = \frac{2}{b^2}\left[b\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^b = \frac{1}{3}b$$

Parçacık Sistemlerinde Newton'un İkinci Yasası:



Kütleleri $m_1, m_2, m_3, ..., m_n$ ve konum vektörleri $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, ..., \vec{r}_n$ olan n parçacıklı bir sistem düşünelim. Kütle merkezinin konum vektörü şu ifadeyle verilir:

$$\vec{r}_{km} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + ... + m_n\vec{r}_n}{M}$$

Her iki tarafın zamana göre türevi alınırsa,

$$\frac{d}{dt}\vec{r}_{km} = \frac{1}{M}\left(m_1\frac{d}{dt}\vec{r}_1 + m_2\frac{d}{dt}\vec{r}_2 + m_3\frac{d}{dt}\vec{r}_3 + ... + m_n\frac{d}{dt}\vec{r}_n\right)$$

$$M\vec{v}_{km} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + ... + m_n\vec{v}_n$$

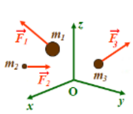
bulunur. Burada $\vec{v}_{km}$ kütle merkezinin hızı, $\vec{v}_i$ de i. parçacığın hızıdır.

Her iki tarafın bir kez daha zamana göre türevi alınırsa,

$$\frac{d}{dt}\vec{v}_{km} = \frac{1}{M}\left(m_1\frac{d}{dt}\vec{v}_1 + m_2\frac{d}{dt}\vec{v}_2 + m_3\frac{d}{dt}\vec{v}_3 + ... + m_n\frac{d}{dt}\vec{v}_n\right)$$

$$M\vec{a}_{km} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + ... + m_n\vec{a}_n$$

bulunur. Burada $\vec{a}_{km}$ kütle merkezinin ivmesi, $\vec{a}_i$ de i. parçacığın ivmesidir.



i. parçacığa etkiyen kuvvet $\vec{F}_i$ dir ve Newton'un ikinci yasası gereği,

$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i \rightarrow M\vec{a}_{km} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ... + \vec{F}_n$$

yazılabilir.

F_i kuvveti dış ve iç olmak üzere iki bileşene ayrılabilir: $F_i = F_i^{dış} + F_i^{iç}$

Bu durumda yukarıdaki eşitlik şöyle bir forma dönüşür:

$$M\vec{a}_{km} = \left(\vec{F}_1^{dış} + \vec{F}_1^{iç}\right) + \left(\vec{F}_2^{dış} + \vec{F}_2^{iç}\right) + \left(\vec{F}_3^{dış} + \vec{F}_3^{iç}\right) + ... + \left(\vec{F}_n^{dış} + \vec{F}_n^{iç}\right)$$

$$M\vec{a}_{km} = \left(\vec{F}_1^{dış} + \vec{F}_2^{dış} + \vec{F}_3^{dış} + ... + \vec{F}_n^{dış}\right) + \left(\vec{F}_1^{iç} + \vec{F}_2^{iç} + \vec{F}_3^{iç} + ... + \vec{F}_n^{iç}\right)$$

Eşitliğin sağındaki ilk parantez, sistem üzerine etki eden net kuvvettir (F_{net}). İkinci parantez ise, Newton'un üçüncü yasası gereği sıfırdır. Bu durumda, kütle merkezinin hareket denklemi $M\vec{a}_{km} = \vec{F}_{net}$' dir ve bileşenler cinsinden

$$F_{net,x} = Ma_{km,x} \qquad F_{net,y} = Ma_{km,y} \qquad F_{net,z} = Ma_{km,z}$$

bağıntıları ile verilir.

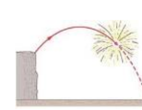
Yandaki eşitlikler, bir parçacık sisteminin kütle merkezinin, sistemdeki tüm parçacıkların toplandığı ve tüm dış kuvvetlerin etkidiği bir noktasal kütle gibi hareket edeceğini göstermektedir.

$$\boxed{M\vec{a}_{km} = \vec{F}_{net}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} F_{net,x} &= Ma_{km,x} \\ F_{net,y} &= Ma_{km,y} \\ F_{net,z} &= Ma_{km,z} \end{aligned}}$$

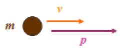
Şekildeki örneği ele alalım.

- Yerden ateşlenen bir roket yerçekimi kuvvetinin etkisi altında parabolik bir yol izler.
- Belli bir anda roket patlar ve birçok parçaya ayrılır.
- Patlama olmasaydı, roketin izleyeceği yol kesikli çizgiyle gösterilen yörünge olacaktı.
- Patlamada ortaya çıkan kuvvetler iç kuvvetler olduğundan vektörel toplamı sıfır olacaktır.



- Roket üzerinde etkin olan kuvvet hala yerçekimi kuvvetidir.
- Bunun anlamı, patlamada ortaya çıkan parçalar da yerçekimi kuvveti etkisiyle parabolik bir yörüngede hareket ederler.
- Dolayısıyla kütle merkezinin yörüngesi, patlamadan önceki yörüngesiyle aynı olacaktır.

Çizgisel Momentum:



Kütlesi m ve hızı $\vec{v}$ olan bir cismin çizgisel momentumu

$\vec{p} = m\vec{v}$

$\boxed{p = mv}$

ile tanımlanır. SI sistemindeki birimi kg.m/s' dir.

Momentum ifadesinin her iki tarafının zamana göre türevi alınırsa,

$$\vec{p} = m\vec{v} \rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}_{net}$$

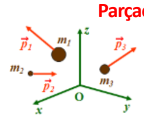
$\vec{F}_{net} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ bulunur.

Bu ifade Newton' un ikinci yasasının bir başka ifade şeklidir.

Sözlü olarak: "Bir cismin çizgisel momentumunun değişim hızı, o cisme etkiyen net kuvvetin büyüklüğüne eşittir ve onunla (net kuvvetle) aynı yöndedir.

Bu eşitlik, bir cismin çizgisel momentumunun ancak bir dış kuvvetle değişebileceğini göstermektedir. Dış kuvvet sıfır ise, cismin çizgisel momentumu değişmez.

Parçacık Sistemlerinin Çizgisel Momentumu:



i. parçacığın kütlesi m_i, hızı $\vec{v}_i$ ve çizgisel momentumu $\vec{p}_i$ olsun. n tane parçacıktan oluşan bir sistemin çizgisel momentumu şu şekilde verilir:

$$P = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + ... + \vec{p}_n = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + ... + m_n\vec{v}_n = M\vec{v}_{km}$$

Bir parçacık sisteminin çizgisel momentumu, sistemdeki parçacıkların toplam kütlesi (M) ile kütle merkezinin hızının ($\vec{v}_{km}$) çarpımına eşittir.

Her iki tarafın zamana göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(M\vec{v}_{km}) = M\vec{a}_{km} = \vec{F}_{net}$$

bulunur. Bu eşitlik, parçacık sisteminin çizgisel momentumunun ancak bir dış kuvvetle değişecebileceğini göstermektedir.

Dış kuvvet sıfır ise, parçacık sisteminin çizgisel momentumu değişmez.

Örnek : Kütlesi 2 kg olan bir cismin hızı $(2\hat{i} - 3\hat{j})$m/s ve kütlesi 3 kg olan bir cismin hızı da $(\hat{i} + 6\hat{j})$m/s' dir. İki parçacıktan oluşan bu sistemin kütle merkezinin hızını ve momentumunu bulunuz.

$$\vec{v}_{km} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i}{M} = \frac{2(2\hat{i} - 3\hat{j}) + 3(\hat{i} + 6\hat{j})}{2+3} = 1{,}4\hat{i} + 2{,}4\hat{j} \text{ m/s}$$

$$\vec{P}_{km} = M\vec{v}_{km} = 5(1.4\hat{i} + 2.4\hat{j}) = 7\hat{i} + 12\hat{j} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Örnek : Yerden yukarı doğru ateşlenen bir roket 1000 m yükseklikte 300 m/s hıza sahipken patlayarak üç eşit parçaya bölünüyor. Birinci parça 450 m/s hızla aynı yönde, ikincisi 240 m/s hızla doğuya gidiyor. Üçüncü parçanın hızı nedir?

$$m_1 = m_2 = m_3 = \frac{M}{3}$$

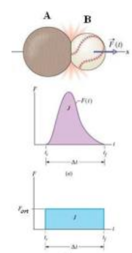
$$M\vec{v}_i = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 \rightarrow \vec{v}_3 = 3\vec{v}_i - \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_3 = (900 - 450)\,\hat{K} - 240\hat{D} = 450\hat{K} - 240\hat{D} \text{ m/s}$$

Çarpışma ve İtme:

Bir cisme sıfırdan farklı bir dış kuvvet etkidiğinde cismin çizgisel momentumunun değişebileceğini öğrendik.

- İki cismin çarpışması sürecinde böyle kuvvetler ortaya çıkar.
- Bu kuvvetlerin şiddetleri çok büyük ancak, etkime süreleri çok kısadır.
- Çarpışan cisimlerin çizgisel momentumlarındaki değişimin kaynağıdırlar.



İki cisim arasındaki çarpışmayı düşünelim. Çarpışma, cisimlerin temas ettiği t_i anında başlar ve temasın kesildiği t_s anında biter. Cisimler çarpışma süresince birbirlerine $\vec{F}(t)$ ile verilen değişken bir kuvvet uygularlar. Bu kuvvetin değişimi Şekil-a' da verilmiştir.

$\vec{F}(t) = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ ile verilir. Burada $\vec{p}$ cisimlerden birisinin çizgisel momentumudur.

$$d\vec{p} = \vec{F}(t)dt \rightarrow \int_{t_i}^{t_s} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_s} \vec{F}(t)dt$$

$\int_{t_i}^{t_s} d\vec{p} = \vec{p}_s - \vec{p}_i = \Delta\vec{p} =$ momentumdaki değişim

$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_s} \vec{F}(t)dt =$ "itme" veya "impuls" olarak tanımlanır.

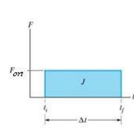
İtme, çarpışan bir cismin çizgisel momentumundaki değişime eşittir: $\boxed{\vec{J} = \Delta\vec{p}}$ ★

Genellikle, çarpışma süresince cisimler arasındaki etkileşme kuvvetinin zamanla nasıl değiştiğini bilemeyiz. Ancak, itmenin büyüklüğü kuvvet-zaman grafiğinde eğri altında kalan alana eşittir.

Aynı alanı verecek şekilde ortalama bir kuvvet (F_{ort}) bulursak, cisimlerin birbirlerine uyguladığı itmeyi,

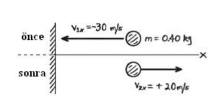
$J = F_{ort}\Delta t = F_{ort}(t_s - t_i)$

şeklinde yazabiliriz.



Geometrik olarak, $F(t)$-t grafiği altında kalan alan ile F_{ort}-t grafiği altında kalan alan aynıdır (Şekil-b)

Örnek : Kütlesi 400 g olan bir top 30 m/s hızla, şekildeki gibi bir duvara doğru fırlatılıyor. Top duvara çarptıktan sonra geliş doğrultusunun tersi yönünde 20 m/s hıza sahiptir.



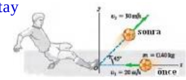
a–) Duvarın topa uyguladığı itme nedir?

b–) Topun duvarla temas süresi 10 ms ise, duvarın topa uyguladığı ortalama kuvvet nedir?

$$a\text{–)}\ \vec{J} = \Delta\vec{p} = m\vec{v}_s - m\vec{v}_i = 0.4\left[20\hat{i} - (-30\hat{i})\right] = 20\hat{i} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

$$b\text{–)}\ \vec{J} = \vec{F}_{ort}\Delta t \rightarrow \vec{F}_{ort} = \frac{\vec{J}}{\Delta t} = \frac{20\hat{i}}{0.01} = 2000\hat{i} \text{ N}$$

Örnek : Kütlesi 400 g olan bir top 20 m/s hızla yatay doğrultuda sola doğru geliyor. Oyuncu topa geliş doğrultusunun tersi yönünde yatayla 45°' lik bir açıyla vuruyor ve topa 30 m/s' lik bir hız kazandırıyor. Top ile oyuncu arasındaki temas süresi 10 ms olduğuna göre,



a–) Oyuncunun topa uyguladığı itme nedir?

b–) Oyuncunun topa uyguladığı ortalama kuvvet nedir?

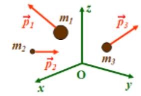
$$a-)\ \vec{J}=\Delta\vec{p}=m\vec{v}_s-m\vec{v}_i=0.4\left[30\cos 45\,\hat{i}+30\sin 45\,\hat{j}-(-20\,\hat{i})\right]$$

$$\vec{J}=\ 16{,}5\hat{i}+8{,}5\hat{j}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

$$b-)\ \vec{J}=\vec{F}_{ort}\Delta t\quad\rightarrow\quad \vec{F}_{ort}=\frac{\vec{J}}{\Delta t}=\frac{16.5\hat{i}+8.5\hat{j}}{0.01}=1650\,\hat{i}+850\,\hat{j}\ \text{N}$$

$$F_{ort}=\sqrt{(1650)^2+(850)^2}=1856\ \text{N}\ ;\ \theta=\tan^{-1}\left(\frac{850}{1650}\right)=27{,}25^{\circ}$$

Çizgisel Momentumun Korunumu :



Bir parçacık sistemi üzerine etkiyen net kuvvet

$$\vec{F}_{net}=0\rightarrow\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{F}_{net}=0\rightarrow\vec{P}=\ \text{sabit}$$

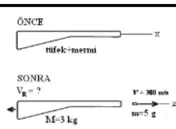
Bir parçacık sistemi üzerine dış kuvvet etkimiyorsa, toplam çizgisel momentum $\vec{P}$ değişmez.

$$\left[\begin{array}{l}\textbf{Herhangi bir } t_i \textbf{ anındaki}\\ \textbf{çizgisel momentum}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{l}\textbf{Herhangi bir } t_s \textbf{ anındaki}\\ \textbf{çizgisel momentum}\end{array}\right]$$

Çizgisel momentumun korunumu önemli bir ilkedir ve çarpışma problemlerinin çözümünde büyük kolaylık sağlar.

Not : Bir sistem üzerine etkiyen dış kuvvet $F_{net}=0$ ise, iç kuvvetler ne kadar büyük olursa olsun, çizgisel momentum her zaman korunur.

Örnek : Bir nişancı 3 kg' lık bir tüfeği geri tepmesine izin verecek şekilde tutuyor. Yatay doğrultuda nişan alarak 5 g' lık mermiyi 300 m/s hızla ateşliyor.



a–) Tüfeğin geri tepme hızını,

b–) Merminin ve tüfeğin momentumunu,

c–) Merminin ve tüfeğin kinetik enerjisini bulunuz.

$$a-)\ \vec{P}=m\vec{v}+M\vec{V}_R=0\rightarrow\vec{V}_R=-\frac{m\vec{v}}{M}=-\left(\frac{0.005}{3}\right)300\hat{i}=-0.5\hat{i}\ \text{m/s}$$

$$b-)\ \vec{P}_m=m\vec{v}=(0.005)300\,\hat{i}=1.5\,\hat{i}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

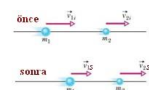
$$\vec{P}_R=M\vec{V}_R=(3)\left(-0.5\hat{i}\right)=-1{,}5\hat{i}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

$$c-)\ K_m=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}(0.005)(300)^2=226\ \text{J}$$

$$K_R=\frac{1}{2}MV_R^2=\frac{1}{2}(3)(0.5)^2=0{,}375\ \text{J}$$

Çarpışmalarda Momentum ve Kinetik Enerji:

Kütleleri m_1 ve m_2, ilk hızları $\vec{v}_{1i}$ ve $\vec{v}_{2i}$, çarpışmadan sonraki hızları da $\vec{v}_{1s}$ ve $\vec{v}_{2s}$ olan iki cisim düşünelim.



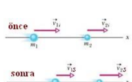
Sistem izole ve $F_{net}=0$ ise, çizgisel momentum korunur. Bu kural, çarpışmanın türüne bakılmaksızın doğrudur.

Çarpışmaları iki sınıfta toplamak mümkündür.
"Esnek (elastik)" ve "Esnek olmayan" olmayan çarpışmalar.

Kinetik enerjide bir kayıp yoksa ($K_i=K_s$), çarpışma esnek çarpışmadır.
Kinetik enerjide bir kayıp varsa ($K_s<K_i$), çarpışma esnek olmayan çarpışmadır.
Bu kayıp başka bir enerji formuna dönüşmüştür deriz.

İki cisim çarpıştıktan sonra birbirine yapışıp birlikte hareket ediyorsa, cisimler "tamamen esnek olmayan" veya "esnek olmayan tam çarpışma" yapmıştır deriz. Bu tür çarpışmalar esnek olmayan çarpışma türüdür ve kinetik enerjideki kaybın en fazla olduğu çarpışma türüdür.

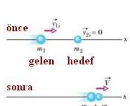
Bir-Boyutta Esnek Olmayan Çarpışma:



Bu tür çarpışmalarda, çarpışan cisimlerin çizgisel momentumları korunur:

$$\vec{p}_{1i}+\vec{p}_{2i}=\vec{p}_{1s}+\vec{p}_{2s}\rightarrow m_1\vec{v}_{1i}+m_2\vec{v}_{2i}=m_1\vec{v}_{1s}+m_2\vec{v}_{2s}$$

Bir-Boyutta Tamamen Esnek Olmayan Çarpışma :

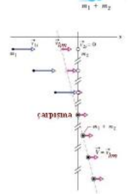


Bu tür çarpışmalarda, çarpışan cisimler yapışır ve çarpışmadan sonra birlikte hareket ederler. Soldaki resimde,

$\vec{v}_{2i}=0$ özel durumu için:

$$m_1v_{1i}=mV_1+m_2V\rightarrow V=\frac{m_1}{m_1+m_2}v_{1i}$$

bulunur.



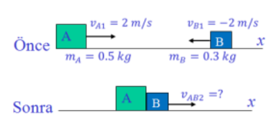
Bu tür çarpışmalarda kütle merkezinin hızı

$$\vec{v}_{km}=\frac{\vec{P}}{m_1+m_2}=\frac{\vec{p}_{1i}+\vec{p}_{2i}}{m_1+m_2}=\frac{m_1\vec{v}_{1i}}{m_1+m_2}$$

ile verilir.

Örnek : Kütleleri 0.5 kg ve 0.3 kg olan iki blok şekildeki gibi birbirine doğru 2 m/s' lik hızlarla hareket ediyorlar. Çarpışmadan sonra iki blok birleşip birlikte hareket ettiklerine göre, çarpışmadan sonra blokların ortak hızı nedir?

Sistemin çarpışmadan önceki ve sonraki kinetik enerjisini kıyaslayınız.



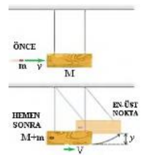
$$m_A\vec{v}_{A1}+m_B\vec{v}_{B1}=(m_A+m_B)\vec{v}_{AB2}$$

$$\vec{v}_{AB2}=\frac{(0.5)\left(2\hat{i}\right)+(0.3)(-2\,\hat{i})}{0.5+0.3}=0{,}5\hat{i}\ \text{m/s}$$

$$K_1=\frac{1}{2}m_Av_{A1}^2+\frac{1}{2}m_Bv_{B1}^2=1{,}6\ \text{J}\ ;\qquad K_2=\frac{1}{2}(m_A+m_B)v_{AB2}^2=0{,}1\ \text{J}$$

$\Delta K=K_2-K_1=-1{,}5$ J' lük enerji kaybı vardır.

Örnek : Kütlesi m olan bir mermi, kütlesi M olan tahta bloğa doğru ateşleniyor ve tamamen esnek olmayan çarpışma yapıyorlar. Blok+mermi sistemi maksimum y yüksekliğine çıkıyor. Merminin geliş hızını, bilinenler cinsinden bulunuz.



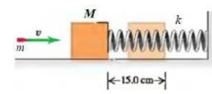
$$mv = (m+M)V \rightarrow V = \frac{mv}{m+M}$$

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gy \rightarrow V^2 = 2gy$$

$$\left(\frac{m}{m+M}\right)^2 v^2 = 2gy \rightarrow v = \left(\frac{m+M}{m}\right)\sqrt{2gy}$$

25

Örnek : Bir tüfekten ateşlenen 8 g kütleli mermi yatay, sürtünmesiz bir yüzeyde bulunan ve bir yaya bağlanmış 0.992 kg kütleli tahta bloğa saplanıyor. Blok+mermi sistemi yayı 15.0 cm sıkıştırıyor. Yayı 0.25 cm uzatmak için gerekli kuvvet 0.75 N olduğuna göre, çarpışmadan hemen sonra blok+mermi sisteminin hızı nedir?
Merminin çarpışmadan önceki hızı nedir?



$$k = \frac{0.75}{0.25\times10^{-2}} = 300\ \text{N/m}$$

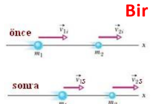
$$mv = (m+M)V \rightarrow V = \frac{mv}{m+M}$$ Blok+merminin çarpışmadan sonraki hızı

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2}kx^2 \rightarrow V = \sqrt{\frac{k}{m+M}}x = 2{,}6\ \text{m/s}$$

Merminin çarpmadan önceki hızı: $v = \dfrac{m+M}{m}V = 325$ m/s

26

Bir-Boyutta Esnek Çarpışma :



Kütleleri m_1 ve m_2, ilk hızları $\vec{v}_{1i}$ ve $\vec{v}_{2i}$, çarpışmadan sonraki hızları da $\vec{v}_{1s}$ ve $\vec{v}_{2s}$ olan iki cisim düşünelim.

Bu tür çarpışmalarda hem çizgisel momentum, hem de kinetik enerji korunur.

Çizgisel momentumun korunumu: $m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1s} + m_2\vec{v}_{2s}$ (Eş-1)

Kinetik enerjinin korunumu : $\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1s}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2s}^2$ (Eş-2)

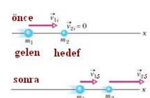
İki bilinmeyenli ($\vec{v}_{1s}$ ve $\vec{v}_{2s}$) bu iki denklem çözülürse, cisimlerin çarpışmadan sonraki hızları için şu ifadeler elde edilir:

$$\vec{v}_{1s} = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{1i} + \frac{2m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{2i}$$

$$\vec{v}_{2s} = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_{1i} + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_{2i}$$

27

Esnek Çarpışmada Özel Durum $(\vec{v}_{2i} = 0)$:



Az önce elde edilen eşitliklerde $\vec{v}_{2i} = 0$ yazarsak, $\vec{v}_{1s}$ ve $\vec{v}_{2s}$:

$$\vec{v}_{1s} = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{1i} + \frac{2m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{2i} \rightarrow \vec{v}_{1s} = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{1i}$$

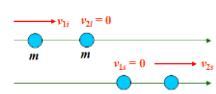
$$\vec{v}_{2s} = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_{1i} + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_{2i} \rightarrow \vec{v}_{2s} = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_{1i}$$

bulunur. Aşağıdaki özel durumlara göz atalım:

1. $m_1 = m_2 = m$

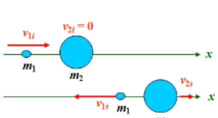
$$\vec{v}_{1s} = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{1i} = \frac{m-m}{m+m}\vec{v}_{1i} = 0$$

$$\vec{v}_{2s} = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_{1i} = \frac{2m}{m+m}\vec{v}_{1i} = \vec{v}_{1i}$$



Çarpışan cisimler hızlarını değiştirirler.

28



2. $m_2 \gg m_1 \rightarrow \dfrac{m_1}{m_2} \ll 1$

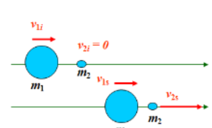
$$\vec{v}_{1s} = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{1i} = \frac{\frac{m_1}{m_2}-1}{\frac{m_1}{m_2}+1}\vec{v}_{1i} \approx -\vec{v}_{1i}$$

$$\vec{v}_{2s} = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_{1i} = \frac{2\left(\frac{m_1}{m_2}\right)}{\frac{m_1}{m_2}+1}\vec{v}_{1i} \approx 2\left(\frac{m_1}{m_2}\right)\vec{v}_{1i}$$

m_1 cismi (küçük cisim) aynı hızla geliş yönünün tersi yönünde hareket eder.

m_2 cismi (büyük cisim) ileri yönde çok küçük bir hızla hareket eder ($\frac{m_1}{m_2} \ll 1$).

29



3. $m_1 \gg m_2 \rightarrow \dfrac{m_2}{m_1} \ll 1$

$$\vec{v}_{1s} = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{1i} = \frac{1-\frac{m_2}{m_1}}{1+\frac{m_2}{m_1}}\vec{v}_{1i} \approx \vec{v}_{1i}$$

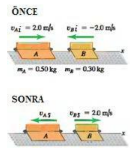
$$\vec{v}_{2s} = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_{1i} = \frac{2}{1+\frac{m_2}{m_1}}\vec{v}_{1i} \approx 2\vec{v}_{1i}$$

m_1 cismi (büyük cisim) neredeyse aynı hızla yoluna devam eder.

m_2 cismi (küçük cisim) gelen cismin yaklaşık iki katı bir hızla hareket eder.

30

Örnek : Kütleleri 0.50 kg ve 0.30 kg olan A ve B blokları birbirine doğru 2.0 m/s hızlarla yaklaşıp çarpışıyorlar. Çarpışmadan sonra B bloğu aynı hızla ters yönde giderken A bloğunun hızı ne olur? Çarpışmanın türü ne olabilir?



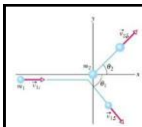
$$m_A\vec{v}_{Ai} + m_B\vec{v}_{Bi} = m_A\vec{v}_{As} + m_B\vec{v}_{Bs} \rightarrow 0.50(2.0\,\hat{i}) + 0.30(-2.0\,\hat{i}) = 0.50\vec{v}_{As} + 0.30(2.0\,\hat{i})$$

$$\vec{v}_{As} = -\frac{0.20\,\hat{i}}{0.50} = -0{,}40\hat{i} \text{ m/s}$$

$$K_i = \frac{1}{2}m_A v_{Ai}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{Bi}^2 = \frac{1}{2}(0.50)(2.0)^2 + \frac{1}{2}(0.30)(-2.0)^2 = 1{,}6 \text{ J}$$

$$K_s = \frac{1}{2}m_A v_{As}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{Bs}^2 = \frac{1}{2}(0.50)(-0.40)^2 + \frac{1}{2}(0.30)(2.0)^2 = 0{,}64 \text{ J}$$

Kinetik enerji korunmuyor $\rightarrow$ "esnek olmayan çarpışma"



İki-Boyutta Çarpışma :

Kütleleri m_1 and m_2 olan iki cismin xy-düzleminde çarpıştıklarını gözönüne alalım.

Sistemin çizgisel momentumu korunur: $\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1s} + \vec{p}_{2s}$

Çarpışma esnek ise kinetik enerji de korunur: $K_{1i} + K_{2i} = K_{1s} + K_{2s}$

Çarpışmadan önce m_2 parçacığının durgun olduğunu, çarpışmadan sonra da m_1 cisminin geliş doğrultusuyla θ_1, m_2 cisminin de θ_2 açısı yaptığını varsayalım. Bu durumda, momentumun ve kinetik enerjinin korunum ifadeleri:

$x-$ekseni: $m_1v_{1i} = m_1v_{1s}\cos\theta_1 + m_2v_{2s}\cos\theta_2$ (1)

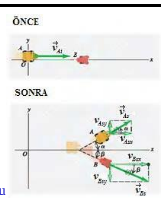
$y-$ekseni: $0 = -m_1v_{1s}\sin\theta_1 + m_2v_{2s}\sin\theta_2$ (2)

$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{2s}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2s}^2$ (3)

olur.

Yedi bilinmeyenli $(m_1, m_2, v_{1i}, v_{1s}, v_{2s}, \theta_1, \theta_2)$ üç tane denklemimiz var. Bunlardan herhangi dört tanesinin verilmesi halinde, diğer üçü kolaylıkla bulunabilir.

Örnek : Kütlesi 20 kg bir oyuncak robot (A) +x yönünde 2 m/s hızla giderken, yolu üzerinde durgun halde bulunan ve kütlesi 12 kg olan başka bir robota (B) şekildeki gibi çarpıyor. Çarpışmadan sonra A robotu geliş doğrultusu ile 30° açı yapacak şekilde yukarı yönde 1 m/s hızla hareket ediyorsa, B robotunun hızı ne olur?



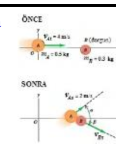
$m_A\vec{v}_{Ai} + m_B\vec{v}_{Bi} = m_A\vec{v}_{As} + m_B\vec{v}_{Bs}$ Momentumun korunumu

$P_{xi} = P_{xs} \rightarrow 20(2\,\hat{i}) = (20\cos 30)\,\hat{i} + (12v_B\cos\beta)\,\hat{i} \rightarrow v_B\cos\beta = 1{,}89$

$P_{yi} = P_{ys} \rightarrow 0 = (20\sin 30)\,\hat{j} + (-12v_B\sin\beta)\,\hat{j} \rightarrow v_B\sin\beta = 0{,}833$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{0.833}{1.89}\right) = 23{,}8^\circ \rightarrow v_B = \frac{0.833}{\sin\beta} = 2{,}06 \text{ m/s}$$

Örnek : Kütlesi 0.5 kg olan bir bilye (A) +x yönünde 4 m/s hızla giderken, yolu üzerinde durgun halde bulunan ve kütlesi 0.3 olan başka bir bilyeye (B) esnek olarak çarpıyor. Çarpışmadan sonra A bilyesi geliş doğrultusu ile bilinmeyen bir α açısı yapacak şekilde 2 m/s hızla hareket etmektedir. B bilyesinin hızını, α ve β açılarını hesaplayınız.



$$\frac{1}{2}m_Av_{Ai}^2 + \frac{1}{2}m_Bv_{Bi}^2 = \frac{1}{2}m_Av_{As}^2 + \frac{1}{2}m_Bv_{Bs}^2 \quad \text{Kinetik enerjinin korunumu}$$

$$v_{Bs} = \sqrt{\frac{m_A}{m_B}(v_{Ai}^2 - v_{As}^2)} = \sqrt{\frac{0.5}{0.3}(16-4)} = 4{,}47 \text{ m/s}$$

$m_Av_{Ai} + m_Bv_{Bi} = m_Av_{As} + m_Bv_{Bs}$ Momentumun korunumu

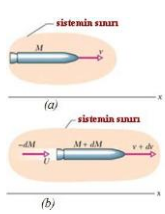
$P_{xi} = P_{xs} \rightarrow 0.5(4\,\hat{i}) = 0.5(2\cos\alpha)\,\hat{i} + 0.3(4.47\cos\beta)\,\hat{i} \rightarrow \cos\alpha + 1.341\cos\beta = 2$

$P_{yi} = P_{ys} \rightarrow 0 = 0.5(2\sin\alpha)\,\hat{j} + 0.3(-4.47\sin\beta)\,\hat{j} \rightarrow \sin\alpha - 1.341\sin\beta = 0$

$\alpha = 36{,}8^\circ$ ve $\beta = 26{,}5^\circ$

Değişken Kütleli Sistemler (Roketler):

- Hızı v kütlesi M olan bir roket, $\frac{dM}{dt}$' lik bir hızla kütle kaybeder.
- Kaybolan bu kütle, rokete göre ters yönde $v_{\text{bağıl}}$ hızına sahiptir.
- Böylece roket kütle kaybeder ve ivmelenir.
- Çizgisel momentumun korunumunu kullanarak roketin v hızını bulabiliriz.



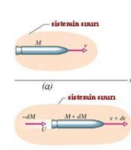
Şekil (a) ve (b), roketin t ve $t + dt$ anlarındaki durumunu göstermektedir. Rokete herhangi bir dış kuvvet etkimiyorsa çizgisel momentum korunur.

$p(t) = p(t + dt) \rightarrow Mv = -UdM + (M + dM)(v + dv)$ (1)

Roket zamanla kütle kaybettiği için, dM negatiftir. U , atılan gazın yere göre hızıdır ve $U = v + dv - v_{\text{bağıl}}$ ifadesine sahiptir. Bunu yukarıdaki ifadede yerine koyarsak,

$Mdv = -dMv_{\text{bağıl}}$ (2)

bulunur.



Yakıtın $\frac{dM}{dt} = -R$ (Eş-3) sabit hızıyla roketten atıldığını varsayalım. Burada, R sabit bir sayıdır.

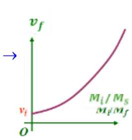
Eş-2' nin her iki tarafını dt ile bölersek $\rightarrow M\frac{dv}{dt} = -\frac{dM}{dt}v_{\text{bağıl}} = Rv_{\text{bağıl}} \rightarrow$

$Ma = Rv_{\text{bağıl}}$ (birinci roket denklemi) elde edilir. Burada a, roketin ivmesidir.

Eş-2' den roketin hızını zamanın fonksiyonu olarak bulabiliriz:

$$dv = -v_{\text{bağıl}}\frac{dM}{M} \rightarrow \int_{v_i}^{v_s} dv = -v_{\text{bağıl}}\int_{M_i}^{M_s}\frac{dM}{M} \rightarrow v_s - v_i = -v_{\text{bağıl}}\left[\ln M\right]_{M_i}^{M_s} \rightarrow$$

$$v_s - v_i = v_{\text{bağıl}}\ln\left(\frac{M_i}{M_s}\right) \quad \text{(ikinci roket denklemi)}$$




TEŞEKKÜRLER
MCR