高 等 数 学 公 式 手 册

二〇〇六年七月

导数公式：

$$(tgx)' = \sec^2 x$$
$$(ctgx)' = -\csc^2 x$$
$$(\sec x)' = \sec x \cdot tgx$$
$$(\csc x)' = -\csc x \cdot ctgx$$
$$(a^x)' = a^x \ln a$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

基本积分表：

$$\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$$
$$\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C$$
$$\int \sec xdx = \ln|\sec x + tgx| + C$$
$$\int \csc xdx = \ln|\csc x - ctgx| + C$$
$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$$
$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$
$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 xdx = tgx + C$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 xdx = -ctgx + C$$
$$\int \sec x \cdot tgxdx = \sec x + C$$
$$\int \csc x \cdot ctgxdx = -\csc x + C$$
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$
$$\int shxdx = chx + C$$
$$\int chxdx = shx + C$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n xdx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$
$$\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$
$$\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$
$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

三角函数的有理式积分：

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad u = tg\frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2du}{1+u^2}$$

一些初等函数：

$$\text{双曲正弦}: shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{双曲余弦}: chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{双曲正切}: thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$arshx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$archx = \pm\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$arthx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e = 2.718281828459045...$$

三角函数公式：

·诱导公式：

函数 / 角 A	sin	cos	tg	ctg
-α	-sinα	cosα	-tgα	-ctgα
90°-α	cosα	sinα	ctgα	tgα
90°+α	cosα	-sinα	-ctgα	-tgα
180°-α	sinα	-cosα	-tgα	-ctgα
180°+α	-sinα	-cosα	tgα	ctgα
270°-α	-cosα	-sinα	ctgα	tgα
270°+α	-cosα	sinα	-ctgα	-tgα
360°-α	-sinα	cosα	-tgα	-ctgα
360°+α	sinα	cosα	tgα	ctgα

·和差角公式：

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha\pm\beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha\cdot tg\beta}$$

$$ctg(\alpha\pm\beta) = \frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}$$

·和差化积公式：

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

· **倍角公式：**

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$ctg 2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$tg 3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}$$

· **半角公式：**

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad ctg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

· **正弦定理：** $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$　　· **余弦定理：** $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

· **反三角函数性质：** $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$　　$arctgx = \frac{\pi}{2} - arcctgx$

高阶导数公式——莱布尼兹（Leibniz）公式：

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

$$= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}$$

中值定理与导数应用：

拉格朗日中值定理：$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$

柯西中值定理：$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

当$\mathrm{F}(x) = x$时，柯西中值定理就是拉格朗日中值定理。

曲率：

弧微分公式：$ds=\sqrt{1+y'^2}dx$,其中$y'=tg\alpha$

平均曲率:$\overline{K}=\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$.$\Delta\alpha$:从M点到M′点，切线斜率的倾角变化量；Δs：$MM$弧长。

M点的曲率：$K=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|=\frac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$.

直线：$K=0;$

半径为a的圆：$K=\frac{1}{a}$.

定积分的近似计算：

矩形法:$\int\limits_a^b f(x)\approx\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1})$

梯形法:$\int\limits_a^b f(x)\approx\frac{b-a}{n}[\frac{1}{2}(y_0+y_n)+y_1+\cdots+y_{n-1}]$

抛物线法:$\int\limits_a^b f(x)\approx\frac{b-a}{3n}[(y_0+y_n)+2(y_2+y_4+\cdots+y_{n-2})+4(y_1+y_3+\cdots+y_{n-1})]$

定积分应用相关公式：

功：$W=F\cdot s$

水压力：$F=p\cdot A$

引力：$F=k\frac{m_1m_2}{r^2}$,k为引力系数

函数的平均值:$\overline{y}=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$

均方根:$\sqrt{\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f^2(t)dt}$

空间解析几何和向量代数：

空间2点的距离：$d=\left|M_1M_2\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

向量在轴上的投影：$\Pr j_u\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\varphi,\varphi$是$\overrightarrow{AB}$与$u$轴的夹角。

$\Pr j_u(\vec{a}_1+\vec{a}_2)=\Pr j\vec{a}_1+\Pr j\vec{a}_2$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\theta=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$,是一个数量,

两向量之间的夹角：$\cos\theta=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}\cdot\sqrt{b_x{}^2+b_y{}^2+b_z{}^2}}$

$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\theta.$例：线速度：$\vec{v}=\vec{w}\times\vec{r}.$

向量的混合积：$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cos\alpha,\alpha$为锐角时，

代表平行六面体的体积。

平面的方程：

1、点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，其中$\vec{n}=\{A,B,C\},M_0(x_0,y_0,z_0)$

2、一般方程：$Ax+By+Cz+D=0$

3、截距世方程：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

平面外任意一点到该平面的距离：$d=\dfrac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

空间直线的方程：$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$,其中$\vec{s}=\{m,n,p\}$;参数方程：$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$

二次曲面：

1、椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

2、抛物面：$\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$,（$p,q$同号）

3、双曲面：

单叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

双叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$（马鞍面）

多元函数微分法及应用

全微分：$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$

全微分的近似计算：$\Delta z\approx dz=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$

多元复合函数的求导法：

$z=f[u(t),v(t)] \qquad \frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}$

$z=f[u(x,y),v(x,y)] \qquad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$

当$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$时，

$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy$

隐函数的求导公式：

隐函数$F(x,y)=0$，$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{F_x}{F_y})+\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{F_x}{F_y})\cdot\frac{dy}{dx}$

隐函数$F(x,y,z)=0$，$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$

隐函数方程组：$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases} \qquad J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}$

$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$

微分法在几何上的应用：

空间曲线$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\\z=\omega(t)\end{cases}$在点$M(x_0,y_0,z_0)$处的切线方程：$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$

在点M处的法平面方程：$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$

若空间曲线方程为：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，则切向量$\vec{T}=\{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_z & F_x\\G_z & G_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_x & F_y\\G_x & G_y\end{vmatrix}\}$

曲面$F(x,y,z)=0$上一点$M(x_0,y_0,z_0)$，则：

1、过此点的法向量：$\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}$

2、过此点的切平面方程：$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$

3、过此点的法线方程：$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$

方向导数与梯度：

函数$z=f(x,y)$在一点$p(x,y)$沿任一方向l的方向导数为：$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$

其中φ为x轴到方向l的转角。

函数$z=f(x,y)$在一点$p(x,y)$的梯度：$\mathrm{grad}f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$

它与方向导数的关系是：$\frac{\partial f}{\partial l}=\mathrm{grad}\ f(x,y)\cdot\vec{e}$，其中$\vec{e}=\cos\varphi\cdot\vec{i}+\sin\varphi\cdot\vec{j}$，为$l$方向上的单位向量。

$\therefore\frac{\partial f}{\partial l}$是$\mathrm{grad}f(x,y)$在$l$上的投影。

多元函数的极值及其求法：

设$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$，令：$f_{xx}(x_0,y_0)=A,\quad f_{xy}(x_0,y_0)=B,\quad f_{yy}(x_0,y_0)=C$

$$\text{则：}\begin{cases}AC-B^2>0\text{时},\begin{cases}A<0,(x_0,y_0)\text{为极大值}\\A>0,(x_0,y_0)\text{为极小值}\end{cases}\\AC-B^2<0\text{时}，\qquad\text{无极值}\\AC-B^2=0\text{时},\qquad\text{不确定}\end{cases}$$

重积分及其应用：

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$$

曲面$z=f(x,y)$的面积$A=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$

平面薄片的重心：$\bar{x}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint_D x\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D\rho(x,y)d\sigma},\qquad\bar{y}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint_D y\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D\rho(x,y)d\sigma}$

平面薄片的转动惯量：对于x轴$I_x=\iint_D y^2\rho(x,y)d\sigma,\qquad$对于$y$轴$I_y=\iint_D x^2\rho(x,y)d\sigma$

平面薄片（位于xoy平面）对z轴上质点$M(0,0,a),(a>0)$的引力：$F=\{F_x,F_y,F_z\}$，其中：

$$F_x=f\iint_D\frac{\rho(x,y)xd\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad F_y=f\iint_D\frac{\rho(x,y)yd\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad F_z=-fa\iint_D\frac{\rho(x,y)xd\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

柱面坐标和球面坐标：

柱面坐标：$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta, \\ \quad z = z \end{cases}$ $\quad \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} F(r,\theta,z)rdrd\theta dz,$

其中：$F(r,\theta,z) = f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$

球面坐标：$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ \quad z = r\cos\varphi \end{cases}$ $\quad dv = rd\varphi \cdot r\sin\varphi \cdot d\theta \cdot dr = r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi,\theta)} F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi dr$$

重心：$\bar{x} = \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} x\rho dv, \quad \bar{y} = \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} y\rho dv, \quad \bar{z} = \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} z\rho dv, \quad$ 其中$M = \bar{x} = \iiint\limits_{\Omega} \rho dv$

转动惯量：$I_x = \iiint\limits_{\Omega} (y^2 + z^2)\rho dv, \quad I_y = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + z^2)\rho dv, \quad I_z = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\rho dv$

曲线积分：

第一类曲线积分（对弧长的曲线积分）：

设$f(x,y)$在L上连续，L的参数方程为：$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad (\alpha \le t \le \beta)$，则：

$\int\limits_L f(x,y)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt \quad (\alpha < \beta)$ $\quad$ 特殊情况：$\begin{cases} x = t \\ y = \varphi(t) \end{cases}$

第二类曲线积分（对坐标的曲线积分）：

设L的参数方程为$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，则：

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

两类曲线积分之间的关系：$\int_L Pdx+Qdy=\int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds$，其中$\alpha$和$\beta$分别为$L$上积分起止点处切向量的方向角。

格林公式：$\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$格林公式：$\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$

当$P=-y,Q=x$，即：$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2$时，得到$D$的面积：$A=\iint_D dxdy=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx$

·平面上曲线积分与路径无关的条件：

1、G是一个单连通区域；

2、$P(x,y)$，$Q(x,y)$在G内具有一阶连续偏导数，且$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$。注意奇点，如$(0,0)$，应减去对此奇点的积分，注意方向相反！

·二元函数的全微分求积：

在$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$时，$Pdx+Qdy$才是二元函数$u(x,y)$的全微分，其中：

$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，通常设$x_0=y_0=0$。

曲面积分：

对面积的曲面积分：$\iint_\Sigma f(x,y,z)ds=\iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy$

对坐标的曲面积分：$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$，其中：

$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy=\pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$，取曲面的上侧时取正号；

$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz=\pm\iint_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]dydz$，取曲面的前侧时取正号；

$\iint_\Sigma Q(x,y,z)dzdx=\pm\iint_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]dzdx$，取曲面的右侧时取正号。

两类曲面积分之间的关系：$\iint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_\Sigma (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$

高斯公式：

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\oiint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$$

高斯公式的物理意义 ——通量与散度：

散度：$\operatorname{div}\vec{v}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$,即：单位体积内所产生 的流体质量，若 $\operatorname{div}\vec{v}<0$,则为消失...

通量:$\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}ds=\iint_{\Sigma}A_n ds=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$，

因此，高斯公式又可写 成:$\iiint_{\Omega}\operatorname{div}\vec{A}dv=\oiint_{\Sigma}A_n ds$

斯托克斯公式——曲线积分与曲面积分的关系：

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz$$

上式左端又可写成:$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

空间曲线积分与路径无关的条件:$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

旋度：$\operatorname{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

向量场$\vec{A}$沿有向闭曲线Γ的环流量:$\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz=\oint_{\Gamma}\vec{A}\cdot\vec{t}ds$

常数项级数：

等比数列:$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}$

等差数列:$1+2+3+\cdots+n=\frac{(n+1)n}{2}$

调和级数:$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$是发散的

级数审敛法：

1、正项级数的审敛法——根植审敛法（柯西判别法）：

设：$\rho = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$，则$\begin{cases}\rho<1\text{时，级数收敛}\\ \rho>1\text{时，级数发散}\\ \rho=1\text{时，不确定}\end{cases}$

2、比值审敛法：

设：$\rho = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$，则$\begin{cases}\rho<1\text{时，级数收敛}\\ \rho>1\text{时，级数发散}\\ \rho=1\text{时，不确定}\end{cases}$

3、定义法：

$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n; \lim\limits_{n\to\infty} s_n$存在，则收敛；否则发散。

交错级数$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$(或$-u_1 + u_2 - u_3 + \cdots, u_n > 0$)的审敛法——莱布尼兹定理：

如果交错级数满足$\begin{cases}u_n \ge u_{n+1}\\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0\end{cases}$，那么级数收敛且其和$s \le u_1$,其余项$r_n$的绝对值$|r_n| \le u_{n+1}$。

绝对收敛与条件收敛：

(1)$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$，其中$u_n$为任意实数；

(2)$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots + |u_n| + \cdots$

如果(2)收敛，则(1)肯定收敛，且称为绝对收敛级数；

如果(2)发散，而(1)收敛，则称(1)为条件收敛级数。

调和级数:$\sum \dfrac{1}{n}$发散，而$\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$收敛；

级数:$\sum \dfrac{1}{n^2}$收敛；

p级数:$\sum \dfrac{1}{n^p}$ $\begin{cases}p \le 1\text{ 时发散}\\ p > 1\text{时收敛}\end{cases}$

幂级数：

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots \quad \begin{cases} |x|<1\text{时，收敛于}\dfrac{1}{1-x} \\ |x|\geq 1\text{时，发散} \end{cases}$$

对于级数(3)$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$，如果它不是仅在原点收敛，也不是在全数轴上都收敛，则必存在R，使$\begin{cases} |x|<R\text{时收敛} \\ |x|>R\text{时发散} \\ |x|=R\text{时不定} \end{cases}$，其中$R$称为收敛半径。

求收敛半径的方法：设$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，其中$a_n$，$a_{n+1}$是(3)的系数，则$\begin{cases} \rho\neq 0\text{时，}R=\dfrac{1}{\rho} \\ \rho=0\text{时，}R=+\infty \\ \rho=+\infty\text{时，}R=0 \end{cases}$

函数展开成幂级数：

函数展开成泰勒级数：$f(x)=f(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$

余项：$R_n=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$f(x)$可以展开成泰勒级数的充要条件是：$\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$

$x_0=0$时即为麦克劳林公式：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

一些函数展开成幂级数：

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots \qquad (-1<x<1)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

欧拉公式：

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \qquad \text{或}\begin{cases} \cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \\ \sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2} \end{cases}$$

三角级数：

$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

其中，$a_0=aA_0$，$a_n=A_n\sin\varphi_n$，$b_n=A_n\cos\varphi_n$，$\omega t=x$。

正交性:$1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x\cdots\sin nx,\cos nx\cdots$任意两个不同项的乘积在$[-\pi,\pi]$上的积分＝0。

傅立叶级数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\ \text{周期}=2\pi$$

$$\text{其中}\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx & (n=0,1,2\cdots)\\[2ex] b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx & (n=1,2,3\cdots)\end{cases}$$

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8} \qquad 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}\text{（相加）}$$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{24} \qquad 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}\text{（相减）}$$

正弦级数：$a_n=0$，$b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx \quad n=1,2,3\cdots \quad f(x)=\sum b_n\sin nx$是奇函数

余弦级数：$b_n=0$，$a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx \quad n=0,1,2\cdots \quad f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum a_n\cos nx$是偶函数

周期为$2l$的周期函数的傅立叶级数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),\ \text{周期}=2l$$

$$\text{其中}\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx & (n=0,1,2\cdots)\\[2ex] b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx & (n=1,2,3\cdots)\end{cases}$$

微分方程的相关概念：

一阶微分方程：$y' = f(x,y)$ 或 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

可分离变量的微分方程：一阶微分方程可以化为$g(y)dy = f(x)dx$的形式，解法：

$\int g(y)dy = \int f(x)dx$ 得：$G(y) = F(x) + C$称为隐式通解。

齐次方程：一阶微分方程可以写成$\dfrac{dy}{dx} = f(x,y) = \varphi(x,y)$，即写成$\dfrac{y}{x}$的函数，解法：

设$u = \dfrac{y}{x}$，则$\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$，$u + \dfrac{du}{dx} = \varphi(u)$，$\therefore \dfrac{dx}{x} = \dfrac{du}{\varphi(u) - u}$分离变量，积分后将$\dfrac{y}{x}$代替$u$，即得齐次方程通解。

一阶线性微分方程：

1、一阶线性微分方程：$\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

$$\begin{cases} \text{当}Q(x) = 0\text{时,为齐次方程，}y = Ce^{-\int P(x)dx} \\ \text{当}Q(x) \neq 0\text{时，为非齐次方程，}y = (\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C)e^{-\int P(x)dx} \end{cases}$$

2、贝努力方程：$\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, (n \neq 0,1)$

全微分方程：

如果$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$中左端是某函数的全微分方程，即：

$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$，其中：$\dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$

$\therefore u(x,y) = C$应该是该全微分方程的通解。

二阶微分方程：

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x), \begin{cases} f(x) \equiv 0\text{时为齐次} \\ f(x) \neq 0\text{时为非齐次} \end{cases}$$

二阶常系数齐次线性微分方程及其解法：

$(*) y'' + py' + qy = 0$，其中p, q为常数；

求解步骤：

1、写出特征方程：$(\Delta) r^2 + pr + q = 0$，其中$r^2$，$r$的系数及常数项恰好是$(*)$式中$y'', y', y$的系数；

2、求出(Δ)式的两个根r_1, r_2

3、根据r_1, r_2的不同情况，按下表写出$(*)$式的通解：

r_1，r_2的形式	(*)式的通解
两个不相等实根 $(p^2-4q>0)$	$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$
两个相等实根 $(p^2-4q=0)$	$y=(c_1+c_2x)e^{r_1x}$
一对共轭复根 $(p^2-4q<0)$ $r_1=\alpha+i\beta$，$r_2=\alpha-i\beta$ $\alpha=-\frac{p}{2}$，$\beta=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$	$y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$

二阶常系数非齐次线性微分方程

$y''+py'+qy=f(x)$，p,q为常数

$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$型，λ为常数；

$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$型