

1 Définition

1.1 Rappel

Dans un premier lieu, il est important de rappeler la notion de courbe (θ, δ) -CTLB.

Definition 1.1: Courbe (θ, δ) -CTLB

Une courbe de Jordan \mathcal{C} est dite (θ, δ) -CTLB si pour toute paire de point $a, b \in \mathcal{C}$ tels que $d(a, b) < \delta$, on a $\mathcal{K}(\mathcal{C}_a^b) \leq \theta$.

Par la suite, nous appellerons courbe δ -CTLB une courbe CTLB de paramètre $\theta = \frac{\pi}{2}$.
Nous donnons une définition d'une surface δ -CTLB comme suit :

Definition 1.2: Surface δ -CTLB

Une surface \mathcal{S} est dite δ -CTLB si pour toute paire de points a, b de \mathcal{S} tels que $d(a, b) < \delta$ il existe au moins un arc \mathcal{C}_a^b de courbure totale inférieure ou égale à $\frac{\pi}{2}$.

1.2 Le cube comme surface δ CTLB

On cherche à montrer que le cube est une surface δ -CTLB. Autrement dit, on va chercher à montrer que pour toute paire a, b il existe au moins un arc \mathcal{C}_a^b de courbure totale inférieure ou égale à $\frac{\pi}{2}$.

1.3 Al-Kashi

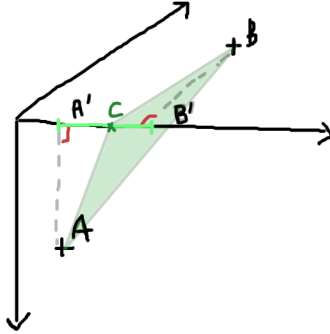


Figure 1: Illustration des points

Soient $A(0, y_A, z_A)$ et $B(x_B, 0, z_B)$ deux points situés sur deux faces adjacentes du cube. Soit $C(0, 0, z_C)$ un point de l'arête séparant ces deux faces.

Notons $\theta := \kappa([A, C, B])$ la courbure de la ligne polygonale formée par A, B et C .

Les points A, B et C forment un triangle, et par Al-Kashi on a :

$$AB^2 = AC^2 - 2 \cos(\pi - \theta) AC BC + BC^2$$

D'où :

$$\begin{aligned} \cos(\pi - \theta) &= \frac{-AB^2 + AC^2 + BC^2}{2ACBC} \\ &= \frac{-(z_A - z_B)^2 + (z_A - z_C)^2 + (z_B - z_C)^2}{2\sqrt{y_A^2 + (z_A - z_C)^2}\sqrt{x_B^2 + (z_B - z_C)^2}} \end{aligned}$$

Notons f cette fonction.

f s'annule en $z_C = z_A$ et $z_C = z_B$, où on a alors $\pi - \theta = \arccos(0)$ et donc $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Comme la fonction cosinus est continue par définition, et que f ne s'annule pas sur $]z_A, z_B[$, on sait qu'elle est soit positive soit négative sur cet ensemble.

Le dénominateur était positif car produit de fonctions positives, on se restreint à l'étude de signe du numérateur $u(z_C) = -(z_A - z_B)^2 + (z_A - z_C)^2 + (z_B - z_C)^2$.

On a $u'(z_C) = 4z_C - z_A - z_B$ linéaire et croissante sur \mathbb{R} , u est donc convexe sur \mathbb{R} et donc sur $[z_A, z_B]$. Ainsi, pour tout $z_C \in [z_A, z_B]$, on a $f(z_C) \leq 0$, et donc $\theta \leq \frac{\pi}{2}$.

1.3.1 Preuve géométrique

Dans toute la suite, angle désigne l'angle externe. on suppose qu'aucun des deux point A, B n'appartient à l'arête

Proposition 1 *si on déplie les deux faces de sorte à ce qu'elles soient dans le même plan, alors le segment de droite qui relie les deux points croise l'arête en un point qui donne un angle minimal sur le cube.*

Preuve : Soit A' le point A déplié. Pour tout point P de l'arête, la longueur de APB est égale à celle d' $A'PB$ car elle est la somme de la longueur des segments $A'P$ et PB qui est invariante par la rotation (d'axe l'arête) transformant A en A' . Or la longueur d' $A'CB$ est plus petite que celle d' $A'C'B$ par définition : elle est minimale et il en va donc de même pour ACB .

Lemme 1 *Soit A et B deux points de \mathbb{R}^3 et deux points P et P' distincts de A et B tels que $|AP| < |AP'|$ et $|BP| < |BP'|$ alors les angles $APB < AP'B$.*

Preuve : on peut, en appliquant une rotation d'axe (AB) ramener point P' dans le plan APB de sorte à ce que le triangle APB soit contenu dans le triangle $AP'B$. C'est une transformation rigide qui ne modifie pas les angles du triangle $AP'B$. De cette inclusion, on déduit que l'angle APB est strictement inférieur à l'angle $AP'B$.

Les point C et C' respectent les hypothèses du lemme par rapport à A et B . Ainsi l'angle ACB est minimal.

On note A^\perp est le projeté orthogonal de A sur l'arête, et de même pour B .

Lemme 2 *Les angles $AA^\perp B$ et $AB^\perp B$ sont droits.*

En effet, A^\perp est le projeté orthogonal sur l'arête, le segment AA^\perp est orthogonal à la face contenant B et donc à B lui-même.

Ainsi ACB est inférieur ou égal à $AA^\perp B = \pi/2$ et le cas d'égalité est pour $A^\perp = B^\perp$

Remarque 1 *Dans cette preuve, on obtient*

- *Une méthode de construction de l'arc de courbure minimal (et c'est valable pour deux faces avec des angles quelconques). C'est bien celui de longueur minimale,*
- *La valeur des angles aux projetés orthogonaux.*

1.3.2 preuve finale

Soit un cube de côté de longueur c , et soit A, B deux points de ce cube tels que $d(A, B) < \delta$ avec $\delta < c$ fixé. On distingue ainsi trois configurations possibles :

1. **A et B sont sur la même face** : ainsi, le segment reliant A et B est un arc C_A^B de courbure totale nulle donc inférieure à $\frac{\pi}{2}$
2. **A et B sont sur deux faces adjacentes** :
On se place dans le repère orthonormé centré en I milieu de AB tel que l'axe y et l'axe z forment le plan médiateur de A et B et tel que l'axe x soit aligné sur la droite AB .
On a ainsi $A(x_A, 0, 0)$ et par symétrie $B(-x_A, 0, 0)$.
On cherche $O(0, y_O, z_O)$ le centre de la sphère passant par A, B et son projeté orthogonal C sur

l'arête séparant A et B , et tel que son rayon OC soit minimal. L'arête est portée par le vecteur unitaire $u(x_u, y_u, z_u)$.

Soit $I'(0, y'_I, 0)$ le point d'intersection entre l'arête et le plan médiateur. Comme C est la projection orthogonale de O sur l'arête contenant I' , le triangle OCI est rectangle en C et on a donc l'égalité suivante :

$$OC^2 = OI'^2 - CI'^2$$

D'une part, on a $OI'^2 = (y_O - y'_I)^2 + z_O^2$.

D'autre part, on a $CI'^2 = \lambda^2$ avec λ une distance que l'on veut minimiser.

Ainsi,

$$OC^2 = OI'^2 - CI'^2 \Leftrightarrow OC^2 = (y_O - y'_I)^2 + z_O^2 - \lambda^2 \quad (1)$$

De plus, on sait que C appartient à l'arête d'où $C = I' + \lambda u = (\lambda x_u, y'_I + \lambda y_u, \lambda z_u)$ et donc

$$\begin{aligned} OC^2 &= (\lambda x_u)^2 + (y_O - y'_I - \lambda y_u)^2 + (z_O - \lambda z_u)^2 \\ &= \lambda^2 x_u^2 + y_O^2 - 2y_O(y_I - \lambda y_u) + (y_I - \lambda y_u)^2 + z_O^2 - 2z_O \lambda z_u + \lambda^2 z_u^2 \\ &= \lambda^2 x_u^2 + y_O^2 - 2y_O y_I + 2\lambda y_O y_u + y_I^2 - 2\lambda y_I y_u + \lambda^2 y_u^2 + z_O^2 - 2z_O \lambda z_u + \lambda^2 z_u^2 \\ &= \lambda^2 (x_u^2 + y_u^2 + z_u^2) + \lambda (2y_O y_u - 2y_I y_u - 2z_O z_u) + y_O^2 - 2y_O y_I + y_I^2 + z_O^2 \\ &= \lambda^2 + 2\lambda (y_O y_u - y_I y_u - z_O z_u) + (y_O - y_I)^2 + z_O^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Les expressions 1 et 2 nous donnent l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 2\lambda (y_O y_u - y_I y_u - z_O z_u) + (y_O - y_I)^2 + z_O^2 &= (y_O - y'_I)^2 + z_O^2 - \lambda^2 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda (y_O y_u - y_I y_u - z_O z_u) &= -\lambda^2 \\ \Leftrightarrow 2\lambda^2 + 2\lambda (y_O y_u - y_I y_u - z_O z_u) &= 0 \\ \Leftrightarrow -2\lambda z_O z_u &= -2\lambda^2 - 2\lambda (y_O y_u - y_I y_u) \\ \Leftrightarrow z_O &= \frac{2\lambda^2 + 2\lambda (y_O y_u - y_I y_u)}{2\lambda z_u} \\ \Leftrightarrow z_O &= \frac{\lambda + y_O y_u - y_I y_u}{z_u} \end{aligned} \quad (3)$$

Enfin, comme O est le centre de la sphère passant par A , B et C , on a :

$$\begin{aligned} OC^2 &= OA^2 \\ \Leftrightarrow (y_O - y_I)^2 + z_O^2 - \lambda^2 &= x_A^2 + y_O^2 + z_O^2 \\ \Leftrightarrow (y_O - y_I)^2 - \lambda^2 &= x_A^2 + y_O^2 \\ \Leftrightarrow y_O^2 - 2y_O y_I + y_I^2 - \lambda^2 &= x_A^2 + y_O^2 \\ \Leftrightarrow -2y_O y_I + y_I^2 - \lambda^2 &= x_A^2 \\ \Leftrightarrow -2y_O y_I &= x_A^2 - y_I^2 + \lambda^2 \\ \Leftrightarrow y_O &= \frac{x_A^2 - y_I^2 + \lambda^2}{-2y_I} \\ \Leftrightarrow y_O &= \frac{-x_A^2 + y_I^2 - \lambda^2}{2y_I} \end{aligned} \quad (4)$$

En substituant 4 à 3, on a donc :

$$\begin{aligned}
z_O &= \frac{\lambda + y_O y_u - y_I y_u}{z_u} \\
&= \frac{\lambda + \frac{-x_A^2 + y_I^2 - \lambda^2}{2y_I} y_u - y_I y_u}{z_u} \\
&= \frac{2\lambda y_I + y_u(-x_A^2 + y_I^2 - \lambda^2) - 2y_I^2 y_u}{2y_I z_u} \\
&= \frac{-\lambda^2 y_u + 2\lambda y_I + y_u(-x_A^2 + y_I^2 - 2y_I^2)}{2y_I z_u} \\
\boxed{z_O &= \frac{-\lambda^2 y_u + 2\lambda y_I - y_u(x_A^2 + y_I^2)}{2y_I z_u}}
\end{aligned} \tag{5}$$

Au final, on exprime OC^2 en fonction de λ en substituant 4 et 5 à 1 :

$$\begin{aligned}
OC^2 &= (y_O - y'_I)^2 + z_O^2 - \lambda^2 \\
&= \left(\frac{-x_A^2 + y_I^2 - \lambda^2}{2y_I} - y'_I \right)^2 + \left(\frac{-\lambda^2 y_u + 2\lambda y_I - y_u(x_A^2 + y_I^2)}{2y_I z_u} \right)^2 - \lambda^2 \\
&= \left(\frac{-x_A^2 - y_I^2 - \lambda^2}{2y_I} \right)^2 + \left(\frac{-\lambda^2 y_u + 2\lambda y_I - y_u(x_A^2 + y_I^2)}{2y_I z_u} \right)^2 - \lambda^2 \\
&= f(\lambda) + g(\lambda) - h(\lambda)
\end{aligned}$$

Notons r cette fonction.

On cherche à minimiser r en fonction de λ . D'une part on a :

$$\begin{aligned}
f'(\lambda) &= 2 \left(\frac{-2\lambda}{2y_I} \right) \left(\frac{-x_A^2 - y_I^2 - \lambda^2}{2y_I} \right) \\
&= \left(\frac{-\lambda}{y_I} \right) \left(\frac{-x_A^2 - y_I^2 - \lambda^2}{y_I} \right) \\
&= \frac{\lambda x_A^2 + \lambda y_I^2 + \lambda^3}{y_I^2}
\end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
g'(\lambda) &= 2 \left(\frac{-2\lambda y_u + 2y_I}{2y_I z_u} \right) \left(\frac{-\lambda^2 y_u + 2\lambda y_I - y_u(x_A^2 + y_I^2)}{2y_I z_u} \right) \\
&= \left(\frac{-\lambda y_u + y_I}{y_I z_u} \right) \left(\frac{-\lambda^2 y_u + 2\lambda y_I - y_u(x_A^2 + y_I^2)}{y_I z_u} \right) \\
&= \frac{(-\lambda y_u + y_I)(-\lambda^2 y_u + 2\lambda y_I - y_u(x_A^2 + y_I^2))}{y_I^2 z_u^2} \\
&= \frac{\lambda^3 y_u^2 - 2\lambda^2 y_I y_u + \lambda y_u^2(x_A^2 + y_I^2) - \lambda^2 y_I y_u + 2\lambda y_I^2 - y_u y_I(x_A^2 + y_I^2)}{y_I^2 z_u^2} \\
&= \frac{\lambda^3 y_u^2 - 3\lambda^2 y_I y_u + \lambda y_u^2(x_A^2 + y_I^2) + 2\lambda y_I^2 - y_u y_I(x_A^2 + y_I^2)}{y_I^2 z_u^2}
\end{aligned}$$

Enfin, on a $h'(\lambda) = 2\lambda$.

D'où :

$$\begin{aligned}
r'(x) &= \frac{\lambda x_A^2 + \lambda y_I^2 + \lambda^3}{y_I^2} + \frac{\lambda^3 y_u^2 - 3\lambda^2 y_I y_u + \lambda y_u^2 (x_A^2 + y_I^2) + 2\lambda y_I^2 - y_u y_I (x_A^2 + y_I^2) - 2\lambda}{y_I^2 z_u^2} - 2\lambda \\
&= \frac{\lambda x_A^2 z_u^2 + \lambda y_I^2 z_u^2 + \lambda^3 z_u^2 + \lambda^3 y_u^2 - 3\lambda^2 y_I y_u + \lambda y_u^2 (x_A^2 + y_I^2) + 2\lambda y_I^2 - y_u y_I (x_A^2 + y_I^2) - 2\lambda y_I^2 z_u^2}{y_I^2 z_u^2} \\
&= \frac{\lambda^3 (z_u^2 + y_u^2) - \lambda^2 (3y_I y_u) + \lambda (x_A^2 z_u^2 + y_I^2 z_u^2 + y_u^2 (x_A^2 + y_I^2) + 2y_I^2 - 2y_I^2 z_u^2) - y_u y_I (x_A^2 + y_I^2)}{y_I^2 z_u^2} \\
&= \frac{\lambda^3 (z_u^2 + y_u^2) - \lambda^2 (3y_I y_u) + \lambda ((x_A^2 + y_I^2)(z_u^2 + y_u^2) + 2y_I^2(1 - z_u^2)) - y_u y_I (x_A^2 + y_I^2)}{y_I^2 z_u^2}
\end{aligned}$$

3. *A* et *B* sont sur deux faces opposées : // TODO

1.3.3 Annexe : faux raisonnements

Première intuition : dans un cube, l'angle d'un arc reliant deux faces adjacentes est majoré par $\frac{\pi}{2}$.
→ en fait, c'est faux ? Si les points se rapprochent de l'arête, il est possible d'obtenir un angle allant de 0 à π ... (cf figure 2)...

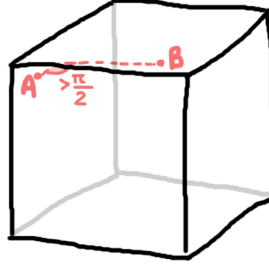


Figure 2: Contre exemple pour la majoration de tout arc par $\frac{\pi}{2}$

intuition : l'arc le plus court reliant deux points issues de faces adjacentes possède une courbure totale minimale. → cela semble être encore faux (cf figure 3)...

intuition : la projection orthogonale du milieu du segment sur l'arête possède la plus petite courbure.

→ Faux, voir contre exemple en figure 4

intuition : la projection orthogonale du centre de la plus petite sphère passant par I et J et adjacent à l'arête forme un point K tel que l'angle IJK soit minimal (voir preuve).

idées rejetées pour la preuve :

- En se plaçant dans un repère aligné sur le cube avec $A(0, y_A, z_A)$ et $B(x_B, 0, z_B)$, $O(x, y, z)$ et $C(0, 0, z)$, résoudre le système :

$$\begin{cases} d(O, C) = d(A, O) \\ d(O, C) = d(B, O) \end{cases} \quad (6)$$

Donne un OC^2 de degré 4 qu'il faut minimiser par rapport à z , ce qui est trop compliqué.

- En se plaçant dans le plan médiateur de *A* et *B* avec comme origine *I* le milieu de *AB*, il n'est pas utile d'ajouter la contrainte de l'inclusion de *C* dans le plan *AOB* : cela signifierai que la famille de vecteurs $\vec{OA} = (-x_A, y_O, z_O)$, $\vec{OB} = (x_A, y_O, z_O)$ et $\vec{OC} = (-x_C, y_O - y_C, z_O - z_C)$

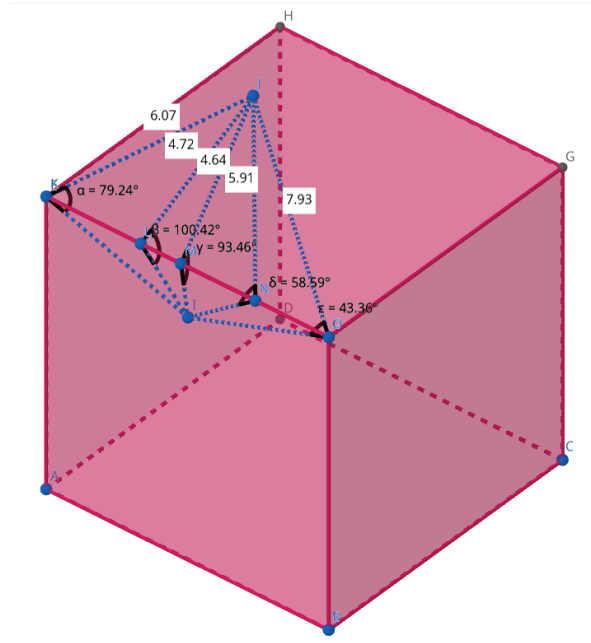


Figure 3: Contre exemple pour la corrélation entre la longueur de la ligne polygonale et sa courbure : la ligne polygonale JMI (troisième ligne) reliant les points J et I possède la plus petite longueur (4.64), mais sa courbure n'est pas minimale

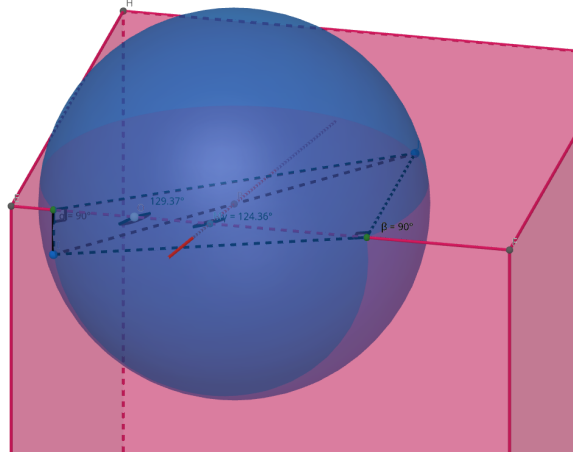


Figure 4: Contre exemple pour la projection orthogonale du milieu du segment IJ : la projection est le deuxième point est possède un angle interne de 124.36° qui n'est pas maximal puisque le point 0 à sa gauche possède un angle de 129.37°.

est liée, d'où :

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} -x_A & x_A & -x_C \\ y_O & y_O & y_O - y_C \\ z_O & z_O & z_O - z_C \end{vmatrix} = 0 \\
 \Leftrightarrow & -x_A \begin{vmatrix} y_O & y_O - y_C \\ z_O & z_O - z_C \end{vmatrix} - x_A \begin{vmatrix} y_O & y_O - y_C \\ z_O & z_O - z_C \end{vmatrix} + x_C \begin{vmatrix} y_O & y_O \\ z_O & z_O \end{vmatrix} = 0 \\
 \Leftrightarrow & -2x_A(y_O(z_O - z_C) - z_O(y_O - y_C)) + x_C(y_O z_O - z_O y_O) = 0 \\
 \Leftrightarrow & -2x_A(y_O(z_O - z_C) - z_O(y_O - y_C)) = 0 \\
 \Leftrightarrow & -2x_A(y_O z_O - y_O z_C - z_O y_O + z_O y_C) = 0 \\
 \Leftrightarrow & -2x_A(z_O y_C - y_O z_C) = 0
 \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\boxed{z_O y_C = y_O z_C}$ or cette équation n'est pas utile à notre système.

• **Cercle circonscrit 1**

On sait que le point C donne un angle maximal lorsqu'il correspond au projeté orthogonal du centre O du cercle circonscrit à A , C et B . En posant $A = (0, y_A, z_A)$, $B = (x_B, 0, z_B)$ et $C = (0, 0, z_C)$, on cherche $O(x, y, z_C)$ tel que $d(O, A) = d(O, C) = d(O, B)$ et O est inclu dans le plan formé par A , B et C d'équation :

$$x(y_A)(z_B - z_C) + y(x_B)(z_A - z_C) = 0$$

Cela revient donc à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x^2 + (y - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2 \\ x^2 + y^2 = (x - x_B)^2 + y^2 + (z_C - z_B)^2 \\ x(y_A)(z_B - z_C) + y(x_B)(z_A - z_C) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Les deux premières équations nous donnent :

$$x = \frac{(z_C - z_B)^2 + x_B^2}{2x_B} \text{ et } y = \frac{(z_C - z_A)^2 + y_A^2}{2y_A}$$

En substituant x et y dans la dernière équation, on résoud l'équation suivante pour trouver z_C :

$$\begin{aligned} & \frac{((z_C - z_B)^2 + x_B^2)(y_A)(z_B - z_C)}{2x_B} + \frac{((z_C - z_A)^2 + y_A^2)(x_B)(z_A - z_C)}{2y_A} = 0 \\ & ((z_C - z_B)^2 + x_B^2)(2y_A^2)(z_B - z_C) + ((z_C - z_A)^2 + y_A^2)(2x_B^2)(z_A - z_C) = 0 \end{aligned}$$

• **Cercle circonscrit 2**

On cherche C tel que le cercle circonscrit à $A = (0, y_A, z_A)$, $B = (x_B, 0, z_B)$ et $C = (0, 0, z_C)$ soit de rayon minimal.

Notons $a = d(A, B)$, $b = d(B, C)$ et $c = d(C, A)$.

On cherche à minimiser la fonction suivante :

$$R = \frac{abc}{4A}$$

Avec A l'aire de ABC défini par la formule de Héron comme $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ où $s = \frac{a+b+c}{2}$.

On a $a = x_B^2 + y_A^2 + (z_A - z_B)^2$, $b = x_B^2 + (z_B - z)^2$, et $c = y_A^2 + (z_A - z)^2$