1 Definition

1.1 Rappel

Dans un premier lieu, il est important de rappeler la notion de courbe (θ, δ)-CTLB.

Definition 1.1: Courbe (θ, δ)-CTLB

Une courbe de Jordan $\mathcal{C}$ est dite (θ, δ)-CTLB si pour toute paire de point a, $b \in \mathcal{C}$ tels que $\mathrm{d}(a, b) < \delta$, on a $\mathcal{K}(\mathcal{C}_a^b) \leq \theta$.

Par la suite, nous appellerons courbe δ-CTLB une courbe CTLB de paramètre $\theta = \frac{\pi}{2}$.
Nous donnons une définition d'une surface δ-CTLB comme suit :

Definition 1.2: Surface δCTLB

Une surface $\mathcal{S}$ est dite δ-CTLB si pour toute paire de points a, b de $\mathcal{S}$ tels que $\mathrm{d}(a, b) < \delta$ il existe au moins un arc $\mathcal{C}_a^b$ de courbure totale inférieure ou égale à $\frac{\pi}{2}$.

1.2 Le cube comme surface δCTLB

Soit un cube C de longueur c. Montrons que C est c-CTLB. Autrement dit, on va chercher à montrer que pour **toute paire de points** A, B **tels que** $d(A, B) < c$ **il existe au moins un arc** $\mathcal{C}_a^b$ **tel que** $\mathcal{K}(\mathcal{C}_a^b) \leq \frac{\pi}{2}$. Toute paire de points A et B à distance strictement inférieure à c sont soit sur une même face du cube, soit sur deux faces opposées. Dans le premier cas, il est possible de tracer le segment reliant A et B, ce dernier ayant une courbure totale nulle. Dans le second cas, on pose A' le projeté orthogonal de A sur l'arête a séparant les deux points. On a donc AA' orthogonal à $A'B$, et la ligne polygonale $AA'B$ est de courbure totale $\frac{\pi}{2}$. Ainsi, un cube de longueur c est c-CTLB.

1.3 Al-Kashi

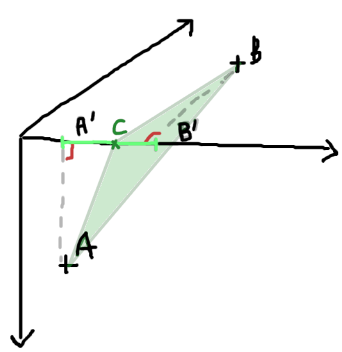

Figure 1: Illustration des points

Soient $A(0, y_A, z_A)$ et $B(x_B, 0, z_B)$ deux points situés sur deux faces adjacentes du cube. Soit $C(0, 0, z_C)$ un point de l'arête séparant ces deux faces.
Notons $\theta := \kappa([A, C, B])$ la courbure de la ligne polygonale formée par A, B et C.

Les points A B et C forment un triangle, et par Al-Kashi on a :

$$AB^2 = AC^2 - 2\cos(\pi - \theta)ACBC + BC^2$$

D'où :

$$
\begin{aligned}
\cos(\pi-\theta) &= \frac{-AB^2+AC^2+BC^2}{2ACBC} \\
&= \frac{-(z_A-z_B)^2+(z_A-z_C)^2+(z_B-z_C)^2}{2\sqrt{y_A^2+(z_A-z_C)^2}\sqrt{x_B^2+(z_B-z_C)^2}}
\end{aligned}
$$

Notons f cette fonction.
f s'annule en $z_C = z_A$ et $z_c = z_B$, où on a alors $\pi - \theta = \arccos(0)$ et donc $\theta = \frac{\pi}{2}$.
Comme la fonction cosinus est continue par définition, et que f ne s'annule pas sur $]z_A, z_B[$, on sait qu'elle est soit positive soit négative sur cet ensemble.
Le dénominateur était positif car produit de fonctions positives, on se restreint à l'étude de signe du numérateur $u(z_C) = -(z_A - z_B)^2 + (z_A - z_C)^2 + (z_B - z_C)^2$.
On a $u'(z_C) = 4z_C - 2z_A - 2z_B$ linéaire et croissante sur $\mathbb{R}$, u est donc convexe sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[z_A, z_B]$.
Ainsi, $\underline{\text{pour tout } z_C \in [z_A, z_B],\ f(z_C) \leq 0, \text{ et donc } \theta \leq \frac{\pi}{2}}$.

1.3.1 recherche de minimum

En reprenant f comme défini précédemment, on a :

$$
\begin{aligned}
f'(z_C) = &-\frac{z_A+z_B-2z_C}{\sqrt{x_B^2+(z_B-z_C)^2}\sqrt{y_A^2+(z_A-z_C)^2}} \\
&-\frac{(z_A-z_B)^2-(z_A-z_C)^2-(z_B-z_C)^2}{2\sqrt{x_B^2+(z_B-z_C)^2}\cdot(y_A^2+(z_A-z_C)^2)^{3/2}}\cdot(z_A-z_C) \\
&-\frac{(z_A-z_B)^2-(z_A-z_C)^2-(z_B-z_C)^2}{2(x_B^2+(z_B-z_C)^2)^{3/2}\cdot\sqrt{y_A^2+(z_A-z_C)^2}}\cdot(z_B-z_C)
\end{aligned}
$$

La racine réelle de f' est :

$$
z_C = \frac{1}{3}\left(\frac{3\left(x_B^2 z_A + y_A^2 z_B\right)^2}{\left(x_B^2+y_A^2\right)^2} - \frac{3y_A^2 z_B^2 + \left(2y_A^2+3z_A^2\right)x_B^2}{x_B^2+y_A^2}\right) \Bigg/ \left(\frac{1}{6}\sqrt{\frac{32}{3}x_B^4 y_A^2 + \frac{32}{3}x_B^2 y_A^4 + 9z_A^6 - 54 z_A z_B^5 + 9 z_B^6 + 18\,(x_B^2 -
$$

1.3.2 Le cube non δ-CTLB pour $\delta > c$

On veut montrer que le cube n'est pas δ-CTLB pour $\delta > c$, autrement dit que pour tout A et B situés sur des faces opposées, toute ligne polygonale les reliant est de courbure totale strictement inférieure à $\frac{\pi}{2}$.
Soient A et B situés sur des faces opposées. On sait que la ligne polygonale entre A et B est nécessairement formée par au moins quatre points A, B, avec C et D situés sur deux arêtes parallèles séparant A et B. Ainsi, l'angle entre CD et l'une ou l'autre de ces arêtes est nécessairement borné par $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

1.4 Preuve géométrique

Dans toute la suite, angle désigne l'angle externe. on suppose qu'aucun des deux point A, B n'appartient à l'arête

Soit A^r le point A déplié. Pour tout point P de l'arête, la longueur de APB est égale à celle d'A^rPB car elle est la somme de la longueur des segments A^rP et PB qui est invariante par la rotation (d'axe l'arête) transformant A en A^r. Or la longueur d'A^rCB est plus petite que celle d'$A^rC'B$ par définition : elle est minimale et il en va donc de même pour ACB.

On note $A^\perp$ est le projeté orthogonal de A sur l'arête, et de même pour B.

Lemme 1 *Les angles $AA^\perp B$ et $AB^\perp B$ sont droits.*

En effet, $A^\perp$ est le projeté orthogonal sur l'arête, le segment $AA^\perp$ est orthogonal à la face contenant B et donc à B lui-même.

Ainsi ACB est inférieur ou égal à $AA^\perp B = \pi/2$ et le cas d'égalité est pour $A^\perp = B^\perp$

Remarque 1 *On obtient*

- *Une méthode de construction de l'arc de longueur minimale*
- *La valeur des angles aux projetés orthogonaux.*

Proposition 1 *Soit S_0 la sphère correspondant au plus petit angle $A\hat{C}B$ pour C appartenant à l'arête a, alors le segment $[A^\perp\, B^\perp]$ est tangent à S_0.*

Preuve Si A et B appartiennent à a, $A\hat{C}B = 0$, sinon, $[A^\perp\, B^\perp]$ ne peut être parallèle à a. Si $[A^\perp\, B^\perp]$ est permendiculaire à a alors l'angle $A\hat{C}B = \pi/2$. Sinon, par facilité, on utilise le résultat de convexité obtenu par Lysandre : supposons que (

1.5 piste initiale

Soit un cube de côté de longueur c, et soit A, B deux points de ce cube tels que $\mathrm{d}(A,B) < \delta$ avec $\delta < c$ fixé. On distingue ainsi trois configurations possibles :

1. **A et B sont sur la même face** : ainsi, le segment reliant A et B est un arc $\mathcal{C}_A^B$ de courbure totale nulle donc inférieure à $\frac{\pi}{2}$
2. **A et B sont sur deux faces adjacentes** :
   On se place dans le repère orthonormé centré en I milieu de AB tel que l'axe y et l'axe z forment le plan médiateur de A et B et tel que l'axe x soit aligné sur la droite AB.
   On a ainsi $A(x_A, 0, 0)$ et par symétrie $B(-x_A, 0, 0)$.
   On cherche $O(0, y_O, z_O)$ le centre de la sphère passant par A, B et son projeté orthogonal C sur l'arête séparant A et B, et tel que son rayon OC soit minimal. L'arête est portée par le vecteur unitaire $u(x_u, y_u, z_u)$.
   Soit $I'(0, y'_I, 0)$ le point d'intersection entre l'arête et le plan médiateur. Comme C est la projection orthogonale de O sur l'arête contenant I', le triangle OCI est rectangle en C et on a donc l'égalité suivante :
   $$OC^2 = OI'^2 - CI^2$$
   D'une part, on a $OI'^2 = (y_O - y'_I)^2 + z_O^2$.
   D'autre part, on a $CI'^2 = \lambda^2$ avec λ une distance que l'on veut minimiser.
   Ainsi,
   $$OC^2 = OI'^2 - CI'^2 \Leftrightarrow OC^2 = (y_O - y'_I)^2 + z_O^2 - \lambda^2 \tag{1}$$
   De plus, on sait que C appartient à l'arête d'où $C = I' + \lambda u = (\lambda x_u, y'_I + \lambda y_u, \lambda z_u)$ et donc
   $$\begin{aligned} OC^2 &= (\lambda x_u)^2 + (y_O - y'_I - \lambda y_u)^2 + (z_O - \lambda z_u)^2 \\ &= \lambda^2 x_u^2 + y_O^2 - 2y_O(y_I - \lambda y_u) + (y_I - \lambda y_u)^2 + z_O^2 - 2z_O\lambda z_u + \lambda^2 z_u^2 \\ &= \lambda^2 x_u^2 + y_O^2 - 2y_O y_I + 2\lambda y_O y_u + y_I^2 - 2\lambda y_I y_u + \lambda^2 y_u^2 + z_O^2 - 2z_O\lambda z_u + \lambda^2 z_u^2 \\ &= \lambda^2(x_u^2 + y_u^2 + z_u^2) + \lambda(2y_O y_u - 2y_I y_u - 2z_O z_u) + y_O^2 - 2y_O y_I + y_I^2 + z_O^2 \\ &= \lambda^2 + 2\lambda(y_O y_u - y_I y_u - z_O z_u) + (y_O - y_I)^2 + z_O^2 \end{aligned} \tag{2}$$
   Les expressions 1 et 2 nous donnent l'équation suivante :
   $$\begin{aligned} & \lambda^2 + 2\lambda(y_O y_u - y_I y_u - z_O z_u) + (y_O - y_I)^2 + z_O^2 = (y_O - y'_I)^2 + z_O^2 - \lambda^2 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda^2 + 2\lambda(y_O y_u - y_I y_u - z_O z_u) = -\lambda^2 \\ \Leftrightarrow\ & 2\lambda^2 + 2\lambda(y_O y_u - y_I y_u - z_O z_u) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -2\lambda z_O z_u = -2\lambda^2 - 2\lambda(y_O y_u - y_I y_u) \\ \Leftrightarrow\ & z_O = \frac{2\lambda^2 + 2\lambda(y_O y_u - y_I y_u)}{2\lambda z_u} \\ \Leftrightarrow\ & z_O = \frac{\lambda + y_O y_u - y_I y_u}{z_u} \end{aligned} \tag{3}$$

Enfin, comme O est le centre de la sphère passant par A, B et C, on a :

$$\begin{aligned}
& & OC^2 &= OA^2 \\
&\Leftrightarrow & (y_O - y_I)^2 + z_O^2 - \lambda^2 &= x_A^2 + y_O^2 + z_O^2 \\
&\Leftrightarrow & (y_O - y_I)^2 - \lambda^2 &= x_A^2 + y_O^2 \\
&\Leftrightarrow & y_O^2 - 2y_O y_I + y_I^2 - \lambda^2 &= x_A^2 + y_O^2 \\
&\Leftrightarrow & -2y_O y_I + y_I^2 - \lambda^2 &= x_A^2 \\
&\Leftrightarrow & -2y_O y_I &= x_A^2 - y_I^2 + \lambda^2 \\
&\Leftrightarrow & y_O &= \frac{x_A^2 - y_I^2 + \lambda^2}{-2y_I} \\
&\Leftrightarrow & & \boxed{y_O = \frac{-x_A^2 + y_I^2 - \lambda^2}{2y_I}}
\end{aligned} \tag{4}$$

En substituant 4 à 3, on a donc :

$$\begin{aligned}
z_O &= \frac{\lambda + y_O y_u - y_I y_u}{z_u} \\
&= \frac{\lambda + \frac{-x_A^2 + y_I^2 - \lambda^2}{2y_I} y_u - y_I y_u}{z_u} \\
&= \frac{2\lambda y_I + y_u(-x_A^2 + y_I^2 - \lambda^2) - 2y_I^2 y_u}{2y_I z_u} \\
&= \frac{-\lambda^2 y_u + 2\lambda y_I + y_u(-x_A^2 + y_I^2 - 2y_I^2)}{2y_I z_u} \\
&\boxed{z_O = \frac{-\lambda^2 y_u + 2\lambda y_I - y_u(x_A^2 + y_I^2)}{2y_I z_u}}
\end{aligned} \tag{5}$$

Au final, on exprime OC^2 en fonction de λ en substituant 4 et 5 à 1 :

$$\begin{aligned}
OC^2 &= (y_O - y_I')^2 + z_O^2 - \lambda^2 \\
&= \left(\frac{-x_A^2 + y_I^2 - \lambda^2}{2y_I} - y_I'\right)^2 + \left(\frac{-\lambda^2 y_u + 2\lambda y_I - y_u(x_A^2 + y_I^2)}{2y_I z_u}\right)^2 - \lambda^2 \\
&= \left(\frac{-x_A^2 - y_I^2 - \lambda^2}{2y_I}\right)^2 + \left(\frac{-\lambda^2 y_u + 2\lambda y_I - y_u(x_A^2 + y_I^2)}{2y_I z_u}\right)^2 - \lambda^2 \\
&= f(\lambda) + g(\lambda) - h(\lambda)
\end{aligned}$$

Notons r cette fonction.

On cherche à minimiser r en fonction de λ. D'une part on a :

$$\begin{aligned}
f'(\lambda) &= 2\left(\frac{-2\lambda}{2y_I}\right)\left(\frac{-x_A^2 - y_I^2 - \lambda^2}{2y_I}\right) \\
&= \left(\frac{-\lambda}{y_I}\right)\left(\frac{-x_A^2 - y_I^2 - \lambda^2}{y_I}\right) \\
&= \frac{\lambda x_A^2 + \lambda y_I^2 + \lambda^3}{y_I^2}
\end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$
\begin{aligned}
g'(\lambda) &= 2\left(\frac{-2\lambda y_u + 2y_I}{2y_I z_u}\right)\left(\frac{-\lambda^2 y_u + 2\lambda y_I - y_u(x_A^2+y_I^2)}{2y_I z_u}\right) \\
&= \left(\frac{-\lambda y_u + y_I}{y_I z_u}\right)\left(\frac{-\lambda^2 y_u + 2\lambda y_I - y_u(x_A^2+y_I^2)}{y_I z_u}\right) \\
&= \frac{(-\lambda y_u + y_I)(-\lambda^2 y_u + 2\lambda y_I - y_u(x_A^2+y_I^2))}{y_I^2 z_u^2} \\
&= \frac{\lambda^3 y_u^2 - 2\lambda^2 y_I y_u + \lambda y_u^2(x_A^2+y_I^2) - \lambda^2 y_I y_u + 2\lambda y_I^2 - y_u y_I(x_A^2+y_I^2)}{y_I^2 z_u^2} \\
&= \frac{\lambda^3 y_u^2 - 3\lambda^2 y_I y_u + \lambda y_u^2(x_A^2+y_I^2) + 2\lambda y_I^2 - y_u y_I(x_A^2+y_I^2)}{y_I^2 z_u^2}
\end{aligned}
$$

Enfin, on a $h'(\lambda) = 2\lambda$.

D'où :

$$
\begin{aligned}
r'(x) &= \frac{\lambda x_A^2 + \lambda y_I^2 + \lambda^3}{y_I^2} + \frac{\lambda^3 y_u^2 - 3\lambda^2 y_I y_u + \lambda y_u^2(x_A^2+y_I^2) + 2\lambda y_I^2 - y_u y_I(x_A^2+y_I^2)}{y_I^2 z_u^2} - 2\lambda \\
&= \frac{\lambda x_A^2 z_u^2 + \lambda y_I^2 z_u^2 + \lambda^3 z_u^2 + \lambda^3 y_u^2 - 3\lambda^2 y_I y_u + \lambda y_u^2(x_A^2+y_I^2) + 2\lambda y_I^2 - y_u y_I(x_A^2+y_I^2) - 2\lambda y_I^2 z_u^2}{y_I^2 z_u^2} \\
&= \frac{\lambda^3(z_u^2+y_u^2) - \lambda^2(3y_I y_u) + \lambda(x_A^2 z_u^2 + y_I^2 z_u^2 + y_u^2(x_A^2+y_I^2) + 2y_I^2 - 2y_I^2 z_u^2) - y_u y_I(x_A^2+y_I^2)}{y_I^2 z_u^2} \\
&= \frac{\lambda^3(z_u^2+y_u^2) - \lambda^2(3y_I y_u) + \lambda((x_A^2+y_I^2)(z_u^2+y_u^2) + 2y_I^2(1-z_u^2)) - y_u y_I(x_A^2+y_I^2)}{y_I^2 z_u^2}
\end{aligned}
$$

3. A **et** B **sont sur deux faces opposées** : // TODO

1.5.1 Annexe : faux raisonnements

Première intuition : dans un cube, l'angle d'un arc reliant deux faces adjacentes est majoré par $\frac{\pi}{2}$.
$\rightarrow$ en fait, c'est faux ? Si les points se rapprochent de l'arête, il est possible d'obtenir un angle allant de 0 à π... (cf figure 2)...

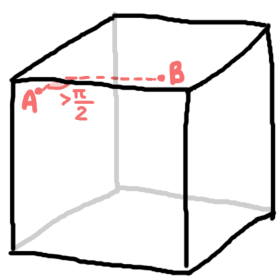

Figure 2: Contre exemple pour la majoration de tout arc par $\frac{\pi}{2}$
.

intuition : l'arc le plus court reliant deux points issues de faces adjacentes possède une courbure totale minimale. $\rightarrow$ cela semble être encore faux (cf figure 3)...

intuition : la projection orthogonale du milieu du segment sur l'arête possède la plus petite courbure.
$\rightarrow$ Faux, voir contre exemple en figure 4

intuition : la projection orthogonale du centre de la plus petite sphère passant par I et J et adjacent à l'arête forme un point K tel que l'angle IJK soit minimal (voir preuve).

idées rejetées pour la preuve :

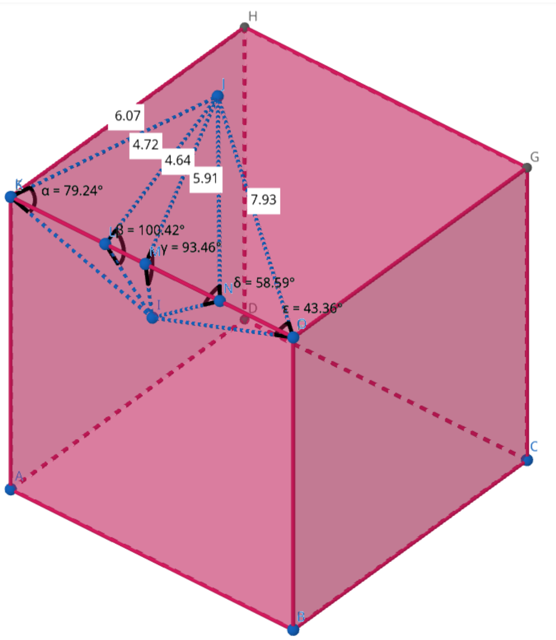

Figure 3: Contre exemple pour la correlation entre la longueur de la ligne polygonale et sa courbure : la ligne polygonale JMI (troisième ligne) reliant les points J et I possède la plus petite longueur (4.64), mais sa courbure n'est pas minimale

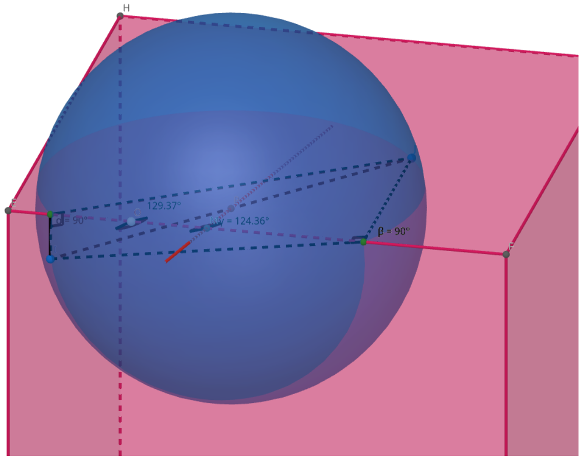

Figure 4: Contre exemple pour la projection orthogonale du milieu du segment IJ : la projection est le deuxième point est possède un angle interne de 124.36° qui n'est pas maximal puisque le point 0 à sa gauche possède un angle de 129.37°.

- En se plaçant dans un repère aligné sur le cube avec $A(0, y_A, z_A)$ et $B(x_B, 0, z_B)$, $O(x, y, z)$ et $C(0, 0, z)$, résoudre le système :

$$\begin{cases} d(O, C) = d(A, O) \\ d(O, C) = d(B, O) \end{cases} . \tag{6}$$

  Donne un OC^2 de degré 4 qu'il faut minimiser par rapport à z, ce qui est trop compliqué.

- En se plaçant dans le plan médiateur de A et B avec comme origine I le milieu de AB, il n'est pas utile d'ajouter la contrainte de l'inclusion de C dans le plan AOB : cela signifierai que la famille de vecteurs $\overrightarrow{OA} = (-x_A, y_O, z_O)$, $\overrightarrow{OB} = (x_A, y_O, z_O)$ et $\overrightarrow{OC} = (-x_C, y_O - y_C, z_O - z_C)$

est liée, d'où :

$$
\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} -x_A & x_A & -x_C \\ y_O & y_O & y_O - y_C \\ z_O & z_O & z_O - z_C \end{vmatrix} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & -x_A \begin{vmatrix} y_O & y_O - y_C \\ z_O & z_O - z_C \end{vmatrix} - x_A \begin{vmatrix} y_O & y_O - y_C \\ z_O & z_O - z_C \end{vmatrix} + x_C \begin{vmatrix} y_O & y_O \\ z_O & z_O \end{vmatrix} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & -2x_A(y_O(z_O - z_C) - z_O(y_O - y_C)) + x_C(y_O z_O - z_O y_O) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & -2x_A(y_O(z_O - z_C) - z_O(y_O - y_C)) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & -2x_A(y_O z_O - y_O z_C - z_O y_O + z_O y_C)) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & -2x_A(z_O y_C - y_O z_C)) = 0
\end{aligned}
$$

Ainsi, on a $\boxed{z_O y_C = y_O z_C}$ or cette équation n'est pas utile à notre système.

- **Cercle circonscrit 1**

  On sait que le point C donne un angle maximal lorsqu'il correspond au projeté orthogonal du centre O du cercle circonscrit à A, C et B. En posant $A = (0, y_A, z_A)$, $B = (x_B, 0, z_B)$ et $C = (0, 0, z_C)$, on cherche $O(x, y, z_C)$ tel que $d(O, A) = d(O, C) = d(O, B)$ et O est inclu dans le plan formé par A, B et C d'équation :

$$x(y_A)(z_B - z_C)) + y(x_B(z_A - z_C)) = 0$$

  Cela revient donc à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x^2 + (y - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2 \\ x^2 + y^2 = (x - x_B)^2 + y^2 + (z_C - z_B)^2 \\ x(y_A)(z_B - z_C) + y(x_B)(z_A - z_C) = 0 \end{cases} . \tag{7}$$

  Les deux premières équations nous donnent :

$$x = \frac{(z_C - z_B)^2 + x_B^2}{2x_B} \text{ et } y = \frac{(z_C - z_A)^2 + y_A^2}{2y_A}$$

  En substituant x et y dans la dernière équation, on résoud l'équation suivante pour trouver z_C :

$$
\begin{aligned}
\frac{((z_C - z_B)^2 + x_B^2)(y_A)(z_B - z_C)}{2x_B} + \frac{((z_C - z_A)^2 + y_A^2)(x_B)(z_A - z_C)}{2y_A} = 0 \\
((z_C - z_B)^2 + x_B^2)(2y_A^2)(z_B - z_C) + ((z_C - z_A)^2 + y_A^2)(2x_B^2)(z_A - z_C) = 0
\end{aligned}
$$

- **Cercle circonscrit 2**

  On cherche C tel que le cercle circonscrit à $A = (0, y_A, z_A)$, $B = (x_B, 0, z_B)$ et $C = (0, 0, z_C)$ soit de rayon minimal.

  Notons $a = d(A, B)$, $b = d(B, C)$ et $c = d(C, A)$.
  On cherche à minimiser la fonction suivante :

$$R = \frac{abc}{4A}$$

  Avec A l'aire de ABC défini par la formule de Héron comme $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ où $s = \frac{a+b+c}{2}$.
  On a $a = x_B^2 + y_A^2 + (z_A - z_B)^2$, $b = x_B^2 + (z_B - z)^2$, et $c = +y_A^2 + (z_A - z)^2$