1 Definition

1.1 Rappel

Dans un premier lieu, il est important de rappeler la notion de courbe (θ, δ)-CTLB.

Definition 1.1: Courbe (θ, δ)-CTLB

Une courbe de Jordan $\mathcal{C}$ est dite (θ, δ)-CTLB si pour toute paire de point a, $b \in \mathcal{C}$ tels que $\mathrm{d}(a, b) < \delta$, on a $\mathcal{K}(\mathcal{C}_a^b) \leq \theta$.

Par la suite, nous appellerons courbe δ-CTLB une courbe CTLB de paramètre $\theta = \frac{\pi}{2}$.
Nous donnons une définition d'une surface δ-CTLB comme suit :

Definition 1.2: Surface δ-CTLB

Une surface $\mathcal{S}$ est dite δ-CTLB si pour toute paire de points a, b de $\mathcal{S}$ tels que $\mathrm{d}(a, b) < \delta$ il existe au moins un arc $\mathcal{C}_a^b$ de courbure totale inférieure ou égale à $\frac{\pi}{2}$.

1.2 Le cube comme surface δCTLB

On cherche à montrer que le cube est une surface δ-CTLB. Autrement dit, on va chercher à montrer que pour **toute paire a, b il existe au moins un arc $\mathcal{C}_a^b$ de courbure totale inférieure ou égale à $\frac{\pi}{2}$**.

1.3 Al-Kashi

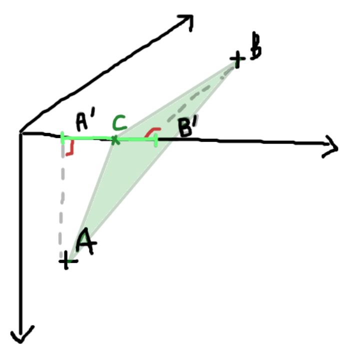

Figure 1: Illustration des points

Soient $A(0, y_A, z_A)$ et $B(x_B, 0, z_B)$ deux points situés sur deux faces adjacentes du cube. Soit $C(0, 0, z_C)$ un point de l'arête séparant ces deux faces.
Notons $\theta := \kappa([A, C, B])$ la courbure de la ligne polygonale formée par A, B et C.

Les points A B et C forment un triangle, et par Al-Kashi on a :

$$AB^2 = AC^2 - 2\cos(\pi - \theta)ACBC + BC^2$$

D'où :

$$\begin{aligned}\cos(\pi - \theta) &= \frac{-AB^2 + AC^2 + BC^2}{2ACBC} \\ &= \frac{-(z_A - z_B)^2 + (z_A - z_C)^2 + (z_B - z_C)^2}{2\sqrt{y_A^2 + (z_A - z_C)^2}\sqrt{x_B^2 + (z_B - z_C)^2}}\end{aligned}$$

Notons f cette fonction.
f s'annule en $z_C = z_A$ et $z_c = z_B$, où on a alors $\pi - \theta = \arccos(0)$ et donc $\theta = \frac{\pi}{2}$.
Comme la fonction cosinus est continue par définition, et que f ne s'annule pas sur $]z_A, z_B[$, on sait qu'elle est soit positive soit négative sur cet ensemble.
Le dénominateur était positif car produit de fonctions positives, on se restreint à l'étude de signe du numérateur $u(z_C) = -(z_A - z_B)^2 + (z_A - z_C)^2 + (z_B - z_C)^2$.
On a $u'(z_C) = 4z_C - 2z_A - 2z_B$ linéaire et croissante sur $\mathbb{R}$, u est donc convexe sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[z_A, z_B]$.
Ainsi, $\underline{\text{pour tout } z_C \in [z_A, z_B],\ f(z_C) \leq 0, \text{ et donc } \theta \leq \frac{\pi}{2}}$.

1.3.1 recherche de minimum

En reprenant f comme défini précédemment, on a :

$$\begin{aligned} f'(z_C) = &- \frac{z_A + z_B - 2z_C}{\sqrt{x_B^2 + (z_B - z_C)^2}\sqrt{y_A^2 + (z_A - z_C)^2}} \\ &- \frac{(z_A - z_B)^2 - (z_A - z_C)^2 - (z_B - z_C)^2}{2\sqrt{x_B^2 + (z_B - z_C)^2} \cdot (y_A^2 + (z_A - z_C)^2)^{3/2}} \cdot (z_A - z_C) \\ &- \frac{(z_A - z_B)^2 - (z_A - z_C)^2 - (z_B - z_C)^2}{2(x_B^2 + (z_B - z_C)^2)^{3/2} \cdot \sqrt{y_A^2 + (z_A - z_C)^2}} \cdot (z_B - z_C) \end{aligned}$$

La racine réelle de f' est :

$$z_C = \frac{1}{3}\left(\frac{3\left(x_B^2 z_A + y_A^2 z_B\right)^2}{\left(x_B^2 + y_A^2\right)^2} - \frac{3y_A^2 z_B^2 + \left(2y_A^2 + 3z_A^2\right)x_B^2}{x_B^2 + y_A^2}\right) \Bigg/ \Bigg(\frac{1}{6}\sqrt{\frac{32}{3}x_B^4 y_A^2 + \frac{32}{3}x_B^2 y_A^4 + 9z_A^6 - 54z_A z_B^5 + 9z_B^6 + 18\,(x_B^2}$$

1.4 Preuve géométrique

Dans toute la suite, angle désigne l'angle externe. on suppose qu'aucun des deux point A, B n'appartient à l'arête

Proposition 1 *si on déplie les deux faces de sorte à ce qu'elles soient dans le même plan, alors le segment de droite qui relie les deux points croise l'arête en un point qui donne un angle minimal sur le cube.*

Preuve : Soit A^r le point A déplié. Pour tout point P de l'arête, la longueur de APB est égale à celle d'$A^r PB$ car elle est la somme de la longueur des segments $A^r P$ et PB qui est invariante par la rotation (d'axe l'arête) transformant A en A^r. Or la longueur d'$A^r CB$ est plus petite que celle d'$A^r C'B$ par définition : elle est minimale et il en va donc de même pour ACB.

Lemme 1 *Soit A et B deux points de $\mathbb{R}^3$ et deux points P et P' distincts de A et B tels que $|AP| < |AP'|$ et $|BP| < |BP'|$ alors les angles $APB < AP'B$.*

Preuve : on peut, en appliquant un rotation d'axe (AB) ramener point P' dans le plan APB de sorte à ce que le triangle APB soit contenu dans le triangle AP'B. C'est une transformation rigide qui ne modifie pas les angles du triangle AP'B. De cette inclusion, on déduit que l'angle APB est strictement inférieur à l'angle AP'B.

Les point C et C' respectent les hypothèses du lemme par rapport à A et B. Ainsi l'angle ACB est minimal.

On note $A^\perp$ est le projeté orthogonal de A sur l'arête, et de même pour B.

Lemme 2 *Les angles $AA^\perp B$ et $AB^\perp B$ sont droits.*

En effet, $A^\perp$ est le projeté orthogonal sur l'arête, le segment $AA^\perp$ est orthogonal à la face contenant B et donc à B lui-même.

Ainsi ACB est inférieur ou égal à $AA^\perp B = \pi/2$ et le cas d'égalité est pour $A^\perp = B^\perp$

Remarque 1 *Ddans cette preuve, on obtient*

- *uUne méthode de construction de l'arc de courbure minimal (et c'est valable pour deux faces avec des angles quelconques). C'est bien celui de longueur minimale,*
- *lLa valeur des angles aux projetés orthogonaux.*

ELQ : pourquoi le point C qui minimise la courbure totale de ACB est le point C qui minimise la longueur de ACB ?
Lysandre : la longeur de ACB et la courbure ne sont pas corrélées, voir figure 3 ou encore la modélisation des courbes respectives : https://www.geogebra.org/calculator/xrwvnuv3.

1.5 piste initiale

Soit un cube de côté de longueur c, et soit A, B deux points de ce cube tels que $\mathrm{d}(A, B) < \delta$ avec $\delta < c$ fixé. On distingue ainsi trois configurations possibles :

1. **A et B sont sur la même face** : ainsi, le segment reliant A et B est un arc $\mathcal{C}_A^B$ de courbure totale nulle donc inférieure à $\frac{\pi}{2}$
2. **A et B sont sur deux faces adjacentes** :
On se place dans le repère orthonormé centré en I milieu de AB tel que l'axe y et l'axe z forment le plan médiateur de A et B et tel que l'axe x soit aligné sur la droite AB.
On a ainsi $A(x_A, 0, 0)$ et par symétrie $B(-x_A, 0, 0)$.
On cherche $O(0, y_O, z_O)$ le centre de la sphère passant par A, B et son projeté orthogonal C sur l'arête séparant A et B, et tel que son rayon OC soit minimal. L'arête est portée par le vecteur unitaire $u(x_u, y_u, z_u)$.
Soit $I'(0, y_I', 0)$ le point d'intersection entre l'arête et le plan médiateur. Comme C est la projection orthogonale de O sur l'arête contenant I', le triangle OCI est rectangle en C et on a donc l'égalité suivante :
$$OC^2 = OI'^2 - CI^2$$
D'une part, on a $OI'^2 = (y_O - y_I')^2 + z_O^2$.
D'autre part, on a $CI'^2 = \lambda^2$ avec λ une distance que l'on veut minimiser.
Ainsi,
$$OC^2 = OI'^2 - CI'^2 \Leftrightarrow OC^2 = (y_O - y_I')^2 + z_O^2 - \lambda^2 \tag{1}$$
De plus, on sait que C appartient à l'arête d'où $C = I' + \lambda u = (\lambda x_u, y_I' + \lambda y_u, \lambda z_u)$ et donc
$$\begin{aligned} OC^2 &= (\lambda x_u)^2 + (y_O - y_I' - \lambda y_u)^2 + (z_O - \lambda z_u)^2 \\ &= \lambda^2 x_u^2 + y_O^2 - 2y_O(y_I - \lambda y_u) + (y_I - \lambda y_u)^2 + z_O^2 - 2z_O\lambda z_u + \lambda^2 z_u^2 \\ &= \lambda^2 x_u^2 + y_O^2 - 2y_O y_I + 2\lambda y_O y_u + y_I^2 - 2\lambda y_I y_u + \lambda^2 y_u^2 + z_O^2 - 2z_O\lambda z_u + \lambda^2 z_u^2 \\ &= \lambda^2(x_u^2 + y_u^2 + z_u^2) + \lambda(2y_O y_u - 2y_I y_u - 2z_O z_u) + y_O^2 - 2y_O y_I + y_I^2 + z_O^2 \\ &= \lambda^2 + 2\lambda(y_O y_u - y_I y_u - z_O z_u) + (y_O - y_I)^2 + z_O^2 \end{aligned} \tag{2}$$
Les expressions 1 et 2 nous donnent l'équation suivante :
$$\begin{aligned} & \lambda^2 + 2\lambda(y_O y_u - y_I y_u - z_O z_u) + (y_O - y_I)^2 + z_O^2 = (y_O - y_I')^2 + z_O^2 - \lambda^2 \\ \Leftrightarrow\ & \lambda^2 + 2\lambda(y_O y_u - y_I y_u - z_O z_u) = -\lambda^2 \\ \Leftrightarrow\ & 2\lambda^2 + 2\lambda(y_O y_u - y_I y_u - z_O z_u) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -2\lambda z_O z_u = -2\lambda^2 - 2\lambda(y_O y_u - y_I y_u) \\ \Leftrightarrow\ & z_O = \frac{2\lambda^2 + 2\lambda(y_O y_u - y_I y_u)}{2\lambda z_u} \\ \Leftrightarrow\ & z_O = \frac{\lambda + y_O y_u - y_I y_u}{z_u} \end{aligned} \tag{3}$$

Enfin, comme O est le centre de la sphère passant par A, B et C, on a :

$$\begin{aligned}
& & OC^2 &= OA^2 \\
&\Leftrightarrow & (y_O - y_I)^2 + z_O^2 - \lambda^2 &= x_A^2 + y_O^2 + z_O^2 \\
&\Leftrightarrow & (y_O - y_I)^2 - \lambda^2 &= x_A^2 + y_O^2 \\
&\Leftrightarrow & y_O^2 - 2y_O y_I + y_I^2 - \lambda^2 &= x_A^2 + y_O^2 \\
&\Leftrightarrow & -2y_O y_I + y_I^2 - \lambda^2 &= x_A^2 \\
&\Leftrightarrow & -2y_O y_I &= x_A^2 - y_I^2 + \lambda^2 \\
&\Leftrightarrow & y_O &= \frac{x_A^2 - y_I^2 + \lambda^2}{-2y_I} \\
&\Leftrightarrow & & \boxed{y_O = \frac{-x_A^2 + y_I^2 - \lambda^2}{2y_I}} \qquad (4)
\end{aligned}$$

En substituant 4 à 3, on a donc :

$$\begin{aligned}
z_O &= \frac{\lambda + y_O y_u - y_I y_u}{z_u} \\
&= \frac{\lambda + \frac{-x_A^2 + y_I^2 - \lambda^2}{2y_I} y_u - y_I y_u}{z_u} \\
&= \frac{2\lambda y_I + y_u(-x_A^2 + y_I^2 - \lambda^2) - 2y_I^2 y_u}{2y_I z_u} \\
&= \frac{-\lambda^2 y_u + 2\lambda y_I + y_u(-x_A^2 + y_I^2 - 2y_I^2)}{2y_I z_u} \\
& \boxed{z_O = \frac{-\lambda^2 y_u + 2\lambda y_I - y_u(x_A^2 + y_I^2)}{2y_I z_u}} \qquad (5)
\end{aligned}$$

Au final, on exprime OC^2 en fonction de λ en substituant 4 et 5 à 1 :

$$\begin{aligned}
OC^2 &= (y_O - y_I')^2 + z_O^2 - \lambda^2 \\
&= \left(\frac{-x_A^2 + y_I^2 - \lambda^2}{2y_I} - y_I'\right)^2 + \left(\frac{-\lambda^2 y_u + 2\lambda y_I - y_u(x_A^2 + y_I^2)}{2y_I z_u}\right)^2 - \lambda^2 \\
&= \left(\frac{-x_A^2 - y_I^2 - \lambda^2}{2y_I}\right)^2 + \left(\frac{-\lambda^2 y_u + 2\lambda y_I - y_u(x_A^2 + y_I^2)}{2y_I z_u}\right)^2 - \lambda^2 \\
&= f(\lambda) + g(\lambda) - h(\lambda)
\end{aligned}$$

Notons r cette fonction.

On cherche à minimiser r en fonction de λ. D'une part on a :

$$\begin{aligned}
f'(\lambda) &= 2\left(\frac{-2\lambda}{2y_I}\right)\left(\frac{-x_A^2 - y_I^2 - \lambda^2}{2y_I}\right) \\
&= \left(\frac{-\lambda}{y_I}\right)\left(\frac{-x_A^2 - y_I^2 - \lambda^2}{y_I}\right) \\
&= \frac{\lambda x_A^2 + \lambda y_I^2 + \lambda^3}{y_I^2}
\end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
g'(\lambda) &= 2\left(\frac{-2\lambda y_u + 2y_I}{2y_I z_u}\right)\left(\frac{-\lambda^2 y_u + 2\lambda y_I - y_u(x_A^2+y_I^2)}{2y_I z_u}\right)\\
&= \left(\frac{-\lambda y_u + y_I}{y_I z_u}\right)\left(\frac{-\lambda^2 y_u + 2\lambda y_I - y_u(x_A^2+y_I^2)}{y_I z_u}\right)\\
&= \frac{(-\lambda y_u + y_I)(-\lambda^2 y_u + 2\lambda y_I - y_u(x_A^2+y_I^2))}{y_I^2 z_u^2}\\
&= \frac{\lambda^3 y_u^2 - 2\lambda^2 y_I y_u + \lambda y_u^2(x_A^2+y_I^2) - \lambda^2 y_I y_u + 2\lambda y_I^2 - y_u y_I(x_A^2+y_I^2)}{y_I^2 z_u^2}\\
&= \frac{\lambda^3 y_u^2 - 3\lambda^2 y_I y_u + \lambda y_u^2(x_A^2+y_I^2) + 2\lambda y_I^2 - y_u y_I(x_A^2+y_I^2)}{y_I^2 z_u^2}
\end{aligned}$$

Enfin, on a $h'(\lambda) = 2\lambda$.

D'où :

$$\begin{aligned}
r'(x) &= \frac{\lambda x_A^2 + \lambda y_I^2 + \lambda^3}{y_I^2} + \frac{\lambda^3 y_u^2 - 3\lambda^2 y_I y_u + \lambda y_u^2(x_A^2+y_I^2) + 2\lambda y_I^2 - y_u y_I(x_A^2+y_I^2)}{y_I^2 z_u^2} - 2\lambda\\
&= \frac{\lambda x_A^2 z_u^2 + \lambda y_I^2 z_u^2 + \lambda^3 z_u^2 + \lambda^3 y_u^2 - 3\lambda^2 y_I y_u + \lambda y_u^2(x_A^2+y_I^2) + 2\lambda y_I^2 - y_u y_I(x_A^2+y_I^2) - 2\lambda y_I^2 z_u^2}{y_I^2 z_u^2}\\
&= \frac{\lambda^3(z_u^2+y_u^2) - \lambda^2(3y_I y_u) + \lambda(x_A^2 z_u^2 + y_I^2 z_u^2 + y_u^2(x_A^2+y_I^2) + 2y_I^2 - 2y_I^2 z_u^2) - y_u y_I(x_A^2+y_I^2)}{y_I^2 z_u^2}\\
&= \frac{\lambda^3(z_u^2+y_u^2) - \lambda^2(3y_I y_u) + \lambda((x_A^2+y_I^2)(z_u^2+y_u^2) + 2y_I^2(1-z_u^2)) - y_u y_I(x_A^2+y_I^2)}{y_I^2 z_u^2}
\end{aligned}$$

3. A **et** B **sont sur deux faces opposées** : // TODO

1.5.1 Annexe : faux raisonnements

Première intuition : dans un cube, l'angle d'un arc reliant deux faces adjacentes est majoré par $\frac{\pi}{2}$. $\rightarrow$ en fait, c'est faux ? Si les points se rapprochent de l'arête, il est possible d'obtenir un angle allant de 0 à π... (cf figure 2)...

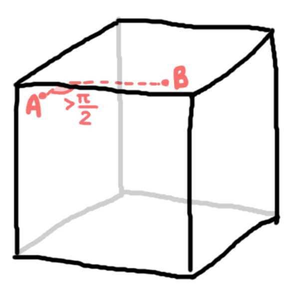

Figure 2: Contre exemple pour la majoration de tout arc par $\frac{\pi}{2}$

.

intuition : l'arc le plus court reliant deux points issues de faces adjacentes possède une courbure totale minimale. $\rightarrow$ cela semble être encore faux (cf figure 3)...

intuition : la projection orthogonale du milieu du segment sur l'arête possède la plus petite courbure.

$\rightarrow$ Faux, voir contre exemple en figure 4

intuition : la projection orthogonale du centre de la plus petite sphère passant par I et J et adjacent à l'arête forme un point K tel que l'angle IJK soit minimal (voir preuve).

idées rejetées pour la preuve :

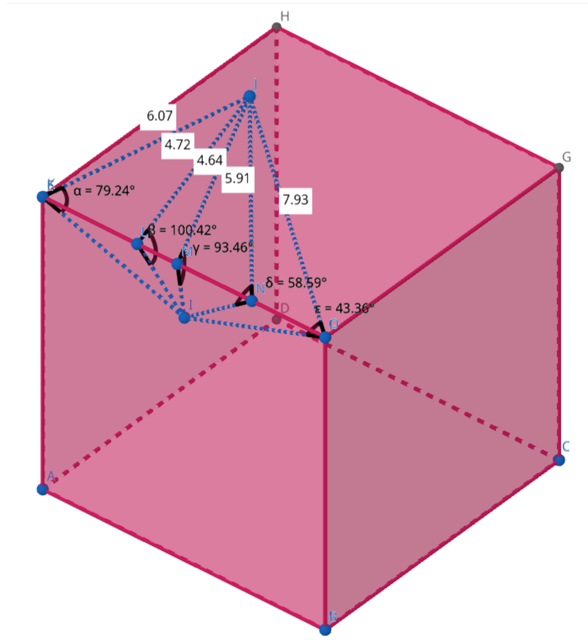

Figure 3: Contre exemple pour la correlation entre la longueur de la ligne polygonale et sa courbure : la ligne polygonale JMI (troisième ligne) reliant les points J et I possède la plus petite longueur (4.64), mais sa courbure n'est pas minimale

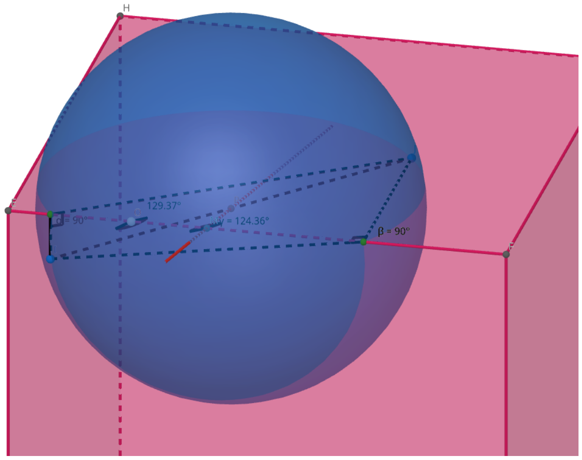

Figure 4: Contre exemple pour la projection orthogonale du milieu du segment IJ : la projection est le deuxième point est possède un angle interne de 124.36° qui n'est pas maximal puisque le point 0 à sa gauche possède un angle de 129.37°.

- En se plaçant dans un repère aligné sur le cube avec $A(0, y_A, z_A)$ et $B(x_B, 0, z_B)$, $O(x, y, z)$ et $C(0, 0, z)$, résoudre le système :

$$\begin{cases} d(O,C) = d(A,O) \\ d(O,C) = d(B,O) \end{cases} . \tag{6}$$

  Donne un OC^2 de degré 4 qu'il faut minimiser par rapport à z, ce qui est trop compliqué.

- En se plaçant dans le plan médiateur de A et B avec comme origine I le milieu de AB, il n'est pas utile d'ajouter la contrainte de l'inclusion de C dans le plan AOB : cela signifierai que la famille de vecteurs $\overrightarrow{OA} = (-x_A, y_O, z_O)$, $\overrightarrow{OB} = (x_A, y_O, z_O)$ et $\overrightarrow{OC} = (-x_C, y_O - y_C, z_O - z_C)$

est liée, d'où :

$$
\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} -x_A & x_A & -x_C \\ y_O & y_O & y_O - y_C \\ z_O & z_O & z_O - z_C \end{vmatrix} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & -x_A \begin{vmatrix} y_O & y_O - y_C \\ z_O & z_O - z_C \end{vmatrix} - x_A \begin{vmatrix} y_O & y_O - y_C \\ z_O & z_O - z_C \end{vmatrix} + x_C \begin{vmatrix} y_O & y_O \\ z_O & z_O \end{vmatrix} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & -2x_A(y_O(z_O - z_C) - z_O(y_O - y_C)) + x_C(y_O z_O - z_O y_O) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & -2x_A(y_O(z_O - z_C) - z_O(y_O - y_C)) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & -2x_A(y_O z_O - y_O z_C - z_O y_O + z_O y_C)) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & -2x_A(z_O y_C - y_O z_C)) = 0
\end{aligned}
$$

Ainsi, on a $\boxed{z_O y_C = y_O z_C}$ or cette équation n'est pas utile à notre système.

- **Cercle circonscrit 1**

  On sait que le point C donne un angle maximal lorsqu'il correspond au projeté orthogonal du centre O du cercle circonscrit à A, C et B. En posant $A = (0, y_A, z_A)$, $B = (x_B, 0, z_B)$ et $C = (0, 0, z_C)$, on cherche $O(x, y, z_C)$ tel que $d(O, A) = d(O, C) = d(O, B)$ et O est inclu dans le plan formé par A, B et C d'équation :

$$x(y_A)(z_B - z_C)) + y(x_B(z_A - z_C)) = 0$$

  Cela revient donc à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x^2 + (y - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2 \\ x^2 + y^2 = (x - x_B)^2 + y^2 + (z_C - z_B)^2 \\ x(y_A)(z_B - z_C) + y(x_B)(z_A - z_C) = 0 \end{cases} . \tag{7}$$

  Les deux premières équations nous donnent :

$$x = \frac{(z_C - z_B)^2 + x_B^2}{2x_B} \text{ et } y = \frac{(z_C - z_A)^2 + y_A^2}{2y_A}$$

  En substituant x et y dans la dernière équation, on résoud l'équation suivante pour trouver z_C :

$$
\begin{aligned}
\frac{((z_C - z_B)^2 + x_B^2)(y_A)(z_B - z_C)}{2x_B} + \frac{((z_C - z_A)^2 + y_A^2)(x_B)(z_A - z_C)}{2y_A} &= 0 \\
((z_C - z_B)^2 + x_B^2)(2y_A^2)(z_B - z_C) + ((z_C - z_A)^2 + y_A^2)(2x_B^2)(z_A - z_C) &= 0
\end{aligned}
$$

- **Cercle circonscrit 2**

  On cherche C tel que le cercle circonscrit à $A = (0, y_A, z_A)$, $B = (x_B, 0, z_B)$ et $C = (0, 0, z_C)$ soit de rayon minimal.

  Notons $a = d(A, B)$, $b = d(B, C)$ et $c = d(C, A)$.
  On cherche à minimiser la fonction suivante :

$$R = \frac{abc}{4A}$$

  Avec A l'aire de ABC défini par la formule de Héron comme $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ où $s = \frac{a+b+c}{2}$.
  On a $a = x_B^2 + y_A^2 + (z_A - z_B)^2$, $b = x_B^2 + (z_B - z)^2$, et $c = +y_A^2 + (z_A - z)^2$