1 Definition

1.1 Rappel

Dans un premier lieu, il est important de rappeler la notion de courbe (θ, δ)-CTLB.

Definition 1.1: Courbe (θ, δ)-CTLB

Une courbe de Jordan $\mathcal{C}$ est dite (θ, δ)-CTLB si pour toute paire de point a, $b \in \mathcal{C}$ tels que $\mathrm{d}(a, b) < \delta$, on a $\mathcal{K}(\mathcal{C}_a^b) \leq \theta$.

Par la suite, nous appellerons courbe δ-CTLB une courbe CTLB de paramètre $\theta = \frac{\pi}{2}$.
Nous donnons une définition d'une surface δ-CTLB comme suit :

Definition 1.2: Surface δ-CTLB

Une surface $\mathcal{S}$ est dite δ-CTLB si pour toute paire de points a, b de $\mathcal{S}$ tels que $\mathrm{d}(a, b) < \delta$ il existe au moins un arc $\mathcal{C}_a^b$ de courbure totale inférieure ou égale à $\frac{\pi}{2}$.

1.2 Le cube comme surface δCTLB

On cherche à montrer que le cube est une surface δ-CTLB. Autrement dit, on va chercher à montrer que pour **toute paire** a, b **il existe au moins un arc** $\mathcal{C}_a^b$ **de courbure totale inférieure ou égale à** $\frac{\pi}{2}$.

1.3 Al-Kashi

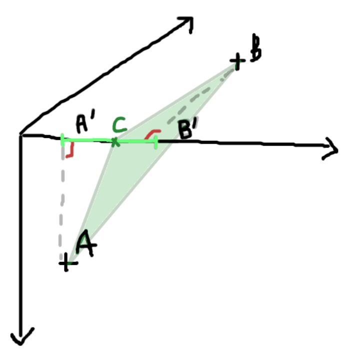

Figure 1: Illustration des points

Notons A' et B' les projetés orthogonaux respectifs de A et B sur l'arête. Soit $C \in [A', B']$. Notons $\theta := \kappa([A, C, B])$. Les points A B et C forment un triangle, et par Al-Kashi on a :

$$AB^2 = AC^2 - 2\cos(\pi - \theta)ACBC + BC^2$$

De plus, par pythagore on a :

$$BC^2 = BB'^2 + B'C^2 \quad \text{et} \quad AC^2 = AA'^2 + A'C^2$$

En se servant de $A'B' = A'C + B'C$, on a donc,

$$BC^2 = BB'^2 + (A'B' - A'C)^2 = BB'^2 + A'B'^2 - 2A'B'A'C + A'C^2$$

D'où :

$$
\begin{aligned}
cos(\pi-\theta) &= \frac{-AB^2+AC^2+BC^2}{2ACBC} \\
cos^2(\pi-\theta) &= \frac{(-AB^2+AC^2+BC^2)^2}{4AC^2BC^2} \\
&= \frac{(-AB^2+AA'^2+A'C^2+BB'^2+A'B'^2-2A'B'A'C+A'C^2)^2}{4(AA'^2+A'C^2)(BB'^2+A'B'^2-2A'B'A'C+A'C^2)} \\
&= \frac{(-d^2+H^2+x^2+l^2-2lx+x^2)^2}{4(AA'^2+x^2)(BB'^2+l^2-2lx+x^2)} \\
&= \frac{(-d^2+H^2+2x^2+l^2-2lx)^2}{4(AA'^2+x^2)(BB'^2+l^2-2lx+x^2)} \\
&= \frac{(-d^2+H^2+l^2+2x(-l+x))^2}{4(AA'^2+x^2)(BB'^2+l^2-2lx+x^2)}
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
d &= AB, \\
l &= A'B', \\
H^2 &= AA'^2+BB'^2, \\
x &= A'C \in [0,l]
\end{aligned}
$$

En notant $z := 2x(l-x)-H^2-l^2 \in [?,?]$ (TO DO: déterminer les bornes)

$$cos^2\theta = -\frac{(d^2-z)^2}{z}$$

que l'on cherche à maximiser (pour minimiser θ si $cos\theta \geq 0$) et à minimiser (pour minimiser θ si $cos\theta \leq 0$). 2 possibilités: soit l'extremum $z_{extremum}$ trouvé en z est atteignable par $z(x)$, on fait le changement de variable inverse pour retrouver x, sinon on essaie le x qui minimise $z(x)-z_{extremum}$.

1.3.1 preuve finale

Soit un cube de côté de longueur c, et soit A, B deux points de ce cube tels que $\mathrm{d}(A,B) < \delta$ avec $\delta < c$ fixé. On distingue ainsi trois configurations possibles :

1. **A et B sont sur la même face** : ainsi, le segment reliant A et B est un arc $\mathcal{C}_A^B$ de courbure totale nulle donc inférieure à $\frac{\pi}{2}$

2. **A et B sont sur deux faces adjacentes** :
   On se place dans le repère orthonormé centré en I milieu de AB tel que l'axe y et l'axe z forment le plan médiateur de A et B et tel que l'axe x soit aligné sur la droite AB.
   On a ainsi $A(x_A,0,0)$ et par symétrie $B(-x_A,0,0)$.
   On cherche $O(0,y_O,z_O)$ le centre de la sphère passant par A, B et son projeté orthogonal C sur l'arête séparant A et B, et tel que son rayon OC soit minimal. L'arête est portée par le vecteur unitaire $u(x_u,y_u,z_u)$.
   Soit $I'(0,y'_I,0)$ le point d'intersection entre l'arête et le plan médiateur. Comme C est la projection orthogonale de O sur l'arête contenant I', le triangle OCI est rectangle en C et on a donc l'égalité suivante :

   $$OC^2 = OI'^2 - CI^2$$

   D'une part, on a $OI'^2 = (y_O-y'_I)^2+z_O^2$.
   D'autre part, on a $CI'^2 = \lambda^2$ avec λ une distance que l'on veut minimiser.
   Ainsi,

   $$OC^2 = OI'^2 - CI'^2 \Leftrightarrow OC^2 = (y_O-y'_I)^2+z_O^2-\lambda^2 \tag{1}$$

De plus, on sait que C appartient à l'arête d'où $C = I' + \lambda u = (\lambda x_u, y'_I + \lambda y_u, \lambda z_u)$ et donc

$$\begin{aligned}
OC^2 &= (\lambda x_u)^2 + (y_O - y'_I - \lambda y_u)^2 + (z_O - \lambda z_u)^2 \\
&= \lambda^2 x_u^2 + y_O^2 - 2y_O(y_I - \lambda y_u) + (y_I - \lambda y_u)^2 + z_O^2 - 2z_O\lambda z_u + \lambda^2 z_u^2 \\
&= \lambda^2 x_u^2 + y_O^2 - 2y_O y_I + 2\lambda y_O y_u + y_I^2 - 2\lambda y_I y_u + \lambda^2 y_u^2 + z_O^2 - 2z_O\lambda z_u + \lambda^2 z_u^2 \\
&= \lambda^2(x_u^2 + y_u^2 + z_u^2) + \lambda(2y_O y_u - 2y_I y_u - 2z_O z_u) + y_O^2 - 2y_O y_I + y_I^2 + z_O^2 \\
&= \lambda^2 + 2\lambda(y_O y_u - y_I y_u - z_O z_u) + (y_O - y_I)^2 + z_O^2 \qquad (2)
\end{aligned}$$

Les expressions 1 et 2 nous donnent l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
& \lambda^2 + 2\lambda(y_O y_u - y_I y_u - z_O z_u) + (y_O - y_I)^2 + z_O^2 = (y_O - y'_I)^2 + z_O^2 - \lambda^2 \\
\Leftrightarrow\ & \lambda^2 + 2\lambda(y_O y_u - y_I y_u - z_O z_u) = -\lambda^2 \\
\Leftrightarrow\ & 2\lambda^2 + 2\lambda(y_O y_u - y_I y_u - z_O z_u) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & -2\lambda z_O z_u = -2\lambda^2 - 2\lambda(y_O y_u - y_I y_u) \\
\Leftrightarrow\ & z_O = \frac{2\lambda^2 + 2\lambda(y_O y_u - y_I y_u)}{2\lambda z_u} \\
\Leftrightarrow\ & z_O = \frac{\lambda + y_O y_u - y_I y_u}{z_u} \qquad (3)
\end{aligned}$$

Enfin, comme O est le centre de la sphère passant par A, B et C, on a :

$$\begin{aligned}
& OC^2 = OA^2 \\
\Leftrightarrow\ & (y_O - y_I)^2 + z_O^2 - \lambda^2 = x_A^2 + y_O^2 + z_O^2 \\
\Leftrightarrow\ & (y_O - y_I)^2 - \lambda^2 = x_A^2 + y_O^2 \\
\Leftrightarrow\ & y_O^2 - 2y_O y_I + y_I^2 - \lambda^2 = x_A^2 + y_O^2 \\
\Leftrightarrow\ & -2y_O y_I + y_I^2 - \lambda^2 = x_A^2 \\
\Leftrightarrow\ & -2y_O y_I = x_A^2 - y_I^2 + \lambda^2 \\
\Leftrightarrow\ & y_O = \frac{x_A^2 - y_I^2 + \lambda^2}{-2y_I} \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{y_O = \frac{-x_A^2 + y_I^2 - \lambda^2}{2y_I}} \qquad (4)
\end{aligned}$$

En substituant 4 à 3, on a donc :

$$\begin{aligned}
z_O &= \frac{\lambda + y_O y_u - y_I y_u}{z_u} \\
&= \frac{\lambda + \frac{-x_A^2 + y_I^2 - \lambda^2}{2y_I} y_u - y_I y_u}{z_u} \\
&= \frac{2\lambda y_I + y_u(-x_A^2 + y_I^2 - \lambda^2) - 2y_I^2 y_u}{2y_I z_u} \\
&= \frac{-\lambda^2 y_u + 2\lambda y_I + y_u(-x_A^2 + y_I^2 - 2y_I^2)}{2y_I z_u} \\
& \boxed{z_O = \frac{-\lambda^2 y_u + 2\lambda y_I - y_u(x_A^2 + y_I^2)}{2y_I z_u}} \qquad (5)
\end{aligned}$$

Au final, on exprime OC^2 en fonction de λ en substituant 4 et 5 à 1 :

$$\begin{aligned}
OC^2 &= (y_O - y'_I)^2 + z_O^2 - \lambda^2 \\
&= \left(\frac{-x_A^2 + y_I^2 - \lambda^2}{2y_I} - y'_I\right)^2 + \left(\frac{-\lambda^2 y_u + 2\lambda y_I - y_u(x_A^2 + y_I^2)}{2y_I z_u}\right)^2 - \lambda^2 \\
&= \left(\frac{-x_A^2 - y_I^2 - \lambda^2}{2y_I}\right)^2 + \left(\frac{-\lambda^2 y_u + 2\lambda y_I - y_u(x_A^2 + y_I^2)}{2y_I z_u}\right)^2 - \lambda^2 \\
&= f(\lambda) + g(\lambda) - h(\lambda)
\end{aligned}$$

Notons r cette fonction.

On cherche à minimiser r en fonction de λ. D'une part on a :

$$\begin{aligned}
f'(\lambda) &= 2\left(\frac{-2\lambda}{2y_I}\right)\left(\frac{-x_A^2 - y_I^2 - \lambda^2}{2y_I}\right) \\
&= \left(\frac{-\lambda}{y_I}\right)\left(\frac{-x_A^2 - y_I^2 - \lambda^2}{y_I}\right) \\
&= \frac{\lambda x_A^2 + \lambda y_I^2 + \lambda^3}{y_I^2}
\end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
g'(\lambda) &= 2\left(\frac{-2\lambda y_u + 2y_I}{2y_I z_u}\right)\left(\frac{-\lambda^2 y_u + 2\lambda y_I - y_u(x_A^2 + y_I^2)}{2y_I z_u}\right) \\
&= \left(\frac{-\lambda y_u + y_I}{y_I z_u}\right)\left(\frac{-\lambda^2 y_u + 2\lambda y_I - y_u(x_A^2 + y_I^2)}{y_I z_u}\right) \\
&= \frac{(-\lambda y_u + y_I)(-\lambda^2 y_u + 2\lambda y_I - y_u(x_A^2 + y_I^2))}{y_I^2 z_u^2} \\
&= \frac{\lambda^3 y_u^2 - 2\lambda^2 y_I y_u + \lambda y_u^2(x_A^2 + y_I^2) - \lambda^2 y_I y_u + 2\lambda y_I^2 - y_u y_I(x_A^2 + y_I^2)}{y_I^2 z_u^2} \\
&= \frac{\lambda^3 y_u^2 - 3\lambda^2 y_I y_u + \lambda y_u^2(x_A^2 + y_I^2) + 2\lambda y_I^2 - y_u y_I(x_A^2 + y_I^2)}{y_I^2 z_u^2}
\end{aligned}$$

Enfin, on a $h'(\lambda) = 2\lambda$.

D'où :

$$\begin{aligned}
r'(x) &= \frac{\lambda x_A^2 + \lambda y_I^2 + \lambda^3}{y_I^2} + \frac{\lambda^3 y_u^2 - 3\lambda^2 y_I y_u + \lambda y_u^2(x_A^2 + y_I^2) + 2\lambda y_I^2 - y_u y_I(x_A^2 + y_I^2)}{y_I^2 z_u^2} - 2\lambda \\
&= \frac{\lambda x_A^2 z_u^2 + \lambda y_I^2 z_u^2 + \lambda^3 z_u^2 + \lambda^3 y_u^2 - 3\lambda^2 y_I y_u + \lambda y_u^2(x_A^2 + y_I^2) + 2\lambda y_I^2 - y_u y_I(x_A^2 + y_I^2) - 2\lambda y_I^2 z_u^2}{y_I^2 z_u^2} \\
&= \frac{\lambda^3(z_u^2 + y_u^2) - \lambda^2(3y_I y_u) + \lambda(x_A^2 z_u^2 + y_I^2 z_u^2 + y_u^2(x_A^2 + y_I^2) + 2y_I^2 - 2y_I^2 z_u^2) - y_u y_I(x_A^2 + y_I^2)}{y_I^2 z_u^2} \\
&= \frac{\lambda^3(z_u^2 + y_u^2) - \lambda^2(3y_I y_u) + \lambda((x_A^2 + y_I^2)(z_u^2 + y_u^2) + 2y_I^2(1 - z_u^2)) - y_u y_I(x_A^2 + y_I^2)}{y_I^2 z_u^2}
\end{aligned}$$

3. **A et B sont sur deux faces opposées** : // TODO

1.3.2 Annexe : faux raisonnements

Première intuition : dans un cube, l'angle d'un arc reliant deux faces adjacentes est majoré par $\frac{\pi}{2}$.
→ en fait, c'est faux ? Si les points se rapprochent de l'arête, il est possible d'obtenir un angle allant de 0 à π... (cf figure 2)...

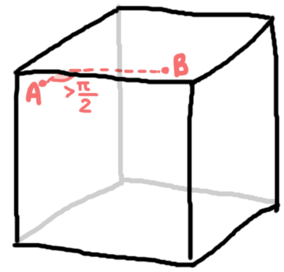

Figure 2: Contre exemple pour la majoration de tout arc par $\frac{\pi}{2}$

.

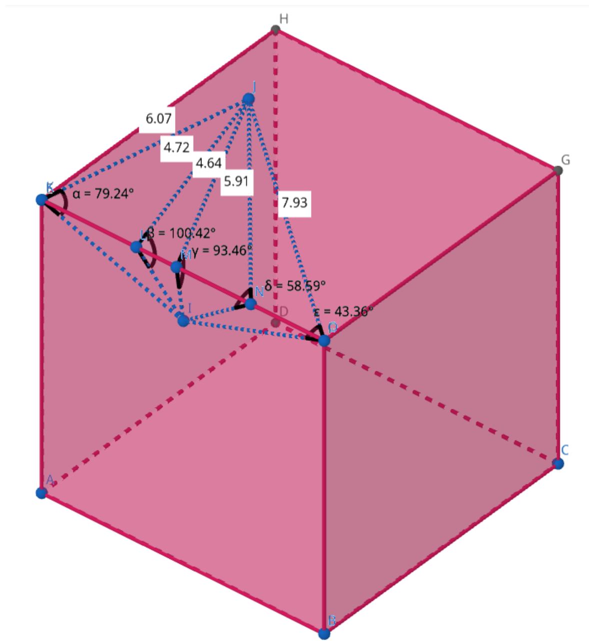

Figure 3: Contre exemple pour la correlation entre la longueur de la ligne polygonale et sa courbure : la ligne polygonale JMI (troisième ligne) reliant les points J et I possède la plus petite longueur (4.64), mais sa courbure n'est pas minimale

intuition : l'arc le plus court reliant deux points issues de faces adjacentes possède une courbure totale minimale. $\rightarrow$ cela semble être encore faux (cf figure 3)...

intuition : la projection orthogonale du milieu du segment sur l'arête possède la plus petite courbure.
$\rightarrow$ Faux, voir contre exemple en figure 4

intuition : la projection orthogonale du centre de la plus petite sphère passant par I et J et adjacent à l'arête forme un point K tel que l'angle IJK soit minimal (voir preuve).

idées rejetées pour la preuve :

- En se plaçant dans un repère aligné sur le cube avec $A(0, y_A, z_A)$ et $B(x_B, 0, z_B)$, $O(x, y, z)$ et $C(0, 0, z)$, résoudre le système :

$$\begin{cases} d(O,C) = d(A,O) \\ d(O,C) = d(B,O) \end{cases} . \quad (6)$$

  Donne un OC^2 de degré 4 qu'il faut minimiser par rapport à z, ce qui est trop compliqué.

- En se plaçant dans le plan médiateur de A et B avec comme origine I le milieu de AB, il n'est pas utile d'ajouter la contrainte de l'inclusion de C dans le plan AOB : cela signifierai que la

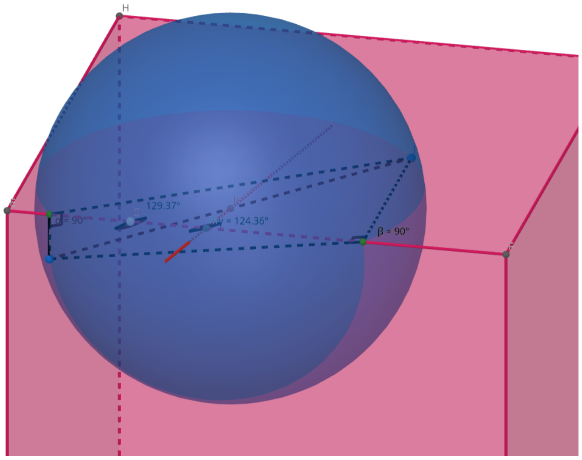

Figure 4: Contre exemple pour la projection orthogonale du milieu du segment IJ : la projection est le deuxième point est possède un angle interne de 124.36° qui n'est pas maximal puisque le point 0 à sa gauche possède un angle de 129.37°.

famille de vecteurs $\overrightarrow{OA} = (-x_A, y_O, z_O)$, $\overrightarrow{OB} = (x_A, y_O, z_O)$ et $\overrightarrow{OC} = (-x_C, y_O - y_C, z_O - z_C)$ est liée, d'où :

$$
\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} -x_A & x_A & -x_C \\ y_O & y_O & y_O - y_C \\ z_O & z_O & z_O - z_C \end{vmatrix} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & -x_A \begin{vmatrix} y_O & y_O - y_C \\ z_O & z_O - z_C \end{vmatrix} - x_A \begin{vmatrix} y_O & y_O - y_C \\ z_O & z_O - z_C \end{vmatrix} + x_C \begin{vmatrix} y_O & y_O \\ z_O & z_O \end{vmatrix} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & -2x_A(y_O(z_O - z_C) - z_O(y_O - y_C)) + x_C(y_O z_O - z_O y_O) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & -2x_A(y_O(z_O - z_C) - z_O(y_O - y_C)) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & -2x_A(y_O z_O - y_O z_C - z_O y_O + z_O y_C)) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & -2x_A(z_O y_C - y_O z_C)) = 0
\end{aligned}
$$

Ainsi, on a $\boxed{z_O y_C = y_O z_C}$ or cette équation n'est pas utile à notre système.

- **Cercle circonscrit 1**

  On sait que le point C donne un angle maximal lorsqu'il correspond au projeté orthogonal du centre O du cercle circonscrit à A, C et B. En posant $A = (0, y_A, z_A)$, $B = (x_B, 0, z_B)$ et $C = (0, 0, z_C)$, on cherche $O(x, y, z_C)$ tel que $d(O, A) = d(O, C) = d(O, B)$ et O est inclu dans le plan formé par A, B et C d'équation :

  $$x(y_A)(z_B - z_C)) + y(x_B(z_A - z_C)) = 0$$

  Cela revient donc à résoudre le système suivant :

  $$\begin{cases} x^2 + y^2 = x^2 + (y - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2 \\ x^2 + y^2 = (x - x_B)^2 + y^2 + (z_C - z_B)^2 \\ x(y_A)(z_B - z_C) + y(x_B)(z_A - z_C) = 0 \end{cases} . \tag{7}$$

  Les deux premières équations nous donnent :

  $$x = \frac{(z_C - z_B)^2 + x_B^2}{2x_B} \text{ et } y = \frac{(z_C - z_A)^2 + y_A^2}{2y_A}$$

  En substituant x et y dans la dernière équation, on résoud l'équation suivante pour trouver z_C :

$$\frac{((z_C - z_B)^2 + x_B^2)(y_A)(z_B - z_C)}{2x_B} + \frac{((z_C - z_A)^2 + y_A^2)(x_B)(z_A - z_C)}{2y_A} = 0$$
$$((z_C - z_B)^2 + x_B^2)(2y_A^2)(z_B - z_C) + ((z_C - z_A)^2 + y_A^2)(2x_B^2)(z_A - z_C) = 0$$

- **Cercle circonscrit 2**

  On cherche C tel que le cercle circonscrit à $A = (0, y_A, z_A)$, $B = (x_B, 0, z_B)$ et $C = (0, 0, z_C)$ soit de rayon minimal.

  Notons $a = d(A, B)$, $b = d(B, C)$ et $c = d(C, A)$.
  On cherche à minimiser la fonction suivante :

  $$R = \frac{abc}{4A}$$

  Avec A l'aire de ABC défini par la formule de Héron comme $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ où $s = \frac{a+b+c}{2}$.

  On a $a = x_B^2 + y_A^2 + (z_A - z_B)^2$, $b = x_B^2 + (z_B - z)^2$, et $c = +y_A^2 + (z_A - z)^2$