Тема 1. Построение математических оптимизационных моделей

Задание
Построить линейную модель оптимизационной задачи.

Варианты заданий:

№1
Фармацевтическая фирма Ozark ежедневно производит не менее 800 фунтов некой пищевой добавки, которая состоит из смеси кукурузной и соевой муки. Содержание белка и клетчатки в этих ингредиентах представлены в следующей таблице.

	Белок	Клетчатка	Стоимость
Мука	*(в фунтах на фунт муки)*		*(в $ за фунт)*
Кукурузная	0.09	0.02	0.30
Соевая	0.60	0.06	0.90

Диетологи требуют, чтобы в пищевой добавке было не менее 30% белка и не более 5% клетчатки. Фирма Ozark хочет определить рецептуру смеси наименьшей стоимости с учетом требований диетологов.

№2
Для поддержания авиапарка в рабочем состоянии составлен график профилактических ремонтных работ с заменой важной детали двигателей. По графику в течение 6 месяцев планируется производить ремонт 200, 180, 300, 198, 230 и 290 двигателей (по месяцам). Если в какой-то месяц для ремонта снято запланированное количество двигателей, то для обеспечения нормальной работы в каждом из снятых двигателей можно вставить новую деталь, купив ее (это и будет ремонт, тогда двигатель сразу возвращается в эксплуатацию), или заменить этот двигатель на вернувшийся из ремонта. Ремонтировать можно в местной мастерской (и тогда двигатель готов к работе уже в следующем месяце) или в центральной мастерской (из которой двигатель вернется через 3 месяца, включая текущий). Стоимость ремонта одного двигателя в местной мастерской 120$, а в центральной – 35$. Если отремонтированный двигатель или купленная деталь будут использованы в последующие за поступлением (возвратом из ремонта или покупкой) месяцы, то за хранение придется платить 1.5$ за каждую единицу за месяц. Новую деталь можно купить в первый или второй месяц по цене 200$, в последующем цена поднимается через каждые 2 месяца на 5%. Как организовать ремонтные работы с минимальными общими затратами?

№3
Фабрика Boralis производит рюкзаки для путешественников. В течение года спрос на эту продукцию есть только в марте-июне (4 месяца в году). Спрос в эти месяцы предполагается соответственно 100, 200, 180 и 300 единиц изделий.

Фабрика работает не полный рабочий день и может выпустить 50, 180, 280 и 270 единиц изделий. Производство и спрос в разные месяцы не совпадают, спрос в текущем месяце можно удовлетворить следующими способами: в текущем месяце произведено – в этом же продано в счет заявки данного месяц (при этом себестоимость 1 изделия - 40$ за штуку), в текущем произведено – в последующем продано (при этом затраты на 1 изделие увеличиваются на 0.5$ за каждый месяц хранения), в текущем произведено и в текущем продано, но в счет недовыполненной заявки какого-то из прошлых месяцев (при этом штраф 2$ за 1 недопоставленное изделие за каждый просроченный месяц). Составить план выпуска, полностью удовлетворяющий спрос с минимальными расходами.

№4

Спрос на специализированные малые двигатели в следующие 5 кварталов составит 200, 150, 300, 250 и 400 единиц. Мощность производства двигателей в тот же период оценивается в 180, 230, 430, 300 и 300 единиц. Невыполнение заказов недопустимо. При необходимости можно организовать сверхурочные работы для выпуска дополнительной продукции. Себестоимость единицы продукции в каждый из пяти кварталов составит 100$, 96$, 116$, 102$ и 106$ соответственно. Для сверхурочно произведенной продукции себестоимость увеличивается на 50% по сравнению с базовой для соответствующего периода. Если двигатель произведен в одном квартале, а реализуется в другом, то за хранение одной единицы за 1 месяц необходимо заплатить 4$. Как удовлетворить спрос с минимальными затратами?

№5

Автомобильная компания MG AUTO имеет 3 завода в Лос-Анджелесе, Детройте и Новом Орлеане и 2 распределительных центра в Денвере и Майами. Объемы производства заводов компании в следующем квартале составят соответственно 1000, 1500 и 1200 автомобилей. Ежеквартальная потребность распределительных центров составляет 2300 и 1400 автомобилей. Расстояние (в милях) между заводами и распределительными центрами приведены в таблице.

	Денвер	Майами
Лос-Анджелес	1000	2690
Детройт	1250	1350
Новый Орлеан	1275	850

Транспортная компания оценивает свои услуги в 8 центов за перевозку одного автомобиля на расстояние в 1 милю.

Как наиболее рационально организовать поставку автомобилей?

Что изменится в модели, если в Денвере спрос уменьшится и составит 1900 автомобилей (вместо 2300)?

№6.

В условии предыдущей задачи (вариант №5) взять выпуск автомобилей 1000, 1300 (вместо 1500), 1200 и потребность центров оставить без изменения 2300 и 1400 автомобилей, но учесть, что за каждый недопоставленный автомобиль

Денвер выставит штраф 200$, а Майами 300$. Кроме того, поставки из Лос-Анджелеса в Майами не планируются изначально.

№7

В некотором машинном центре производится 2 вида изделий. Доход от единицы первого вида изделий составляет 6$, а второго -7.5$. На производство одной единицы первого вида изделий затрачивается 10 минут рабочего времени, а на единицу второго изделия – 12 минут. Рабочее время машинного центра ограничивается 2500 минут в день. Эту величину можно увеличить, но тогда за каждую дополнительную минуты работы машинного центра необходимо заплатить 50 центов. Необходимо максимизировать доход, учитывая, что первого вида изделий можно производить 150-200 единиц, а второго не более 45 единиц.

№8

Компания Birdeyes владеет 800 акрами необработанной земли с живописным озером в центре горного массива Озарк. На этой территории планируется строительство домиков для отдыха. Также необходимо предусмотреть, что не менее 15% всей имеющейся площади уйдет на прокладку дорог и строительство вспомогательных сооружений.

Чтобы предотвратить дальнейшее загрязнение озера, официальные власти округа разработали ряд строгих ограничений. Можно возводить домики только на 1, 2 или 3 семьи, причем доля домиков на одну семью должна составлять не менее 50% от всех построенных. Для каждого домика должно быть отведен участок земли 2, 3 или 4 акра соответственно для каждого из типов домиков. Необходимо подвести водопровод к домикам. Предполагаются такие затраты на подключение к водопроводу: 1000$ для 1 домика на 1 семью, 1200$ – для 1 домика на 2 семьи, 1400$ – для 1 домика на 3 семьи. Расход воды в пик сезона ожидается в этих домиках: 400 галлонов в день в 1 домике на 1 семью, 600 и 840 галлонов в день в домиках на 2 и 3 семьи соответственно. Проект подведения воды к домам можно осуществлять только в том случае, если на него будет собрано не менее 100000$ (иначе будет экономически не оправданным). При этом, исходя из рационального использования водных ресурсов, выдвинуто требование, чтобы общий расход воды не превышал 200000 галлонов в день. Рекреационная зона рассчитана исходя из нормы – не менее одного акра на 200 семей. От каждого из трех типов домиков ожидается чистая прибыль: 10000$ от домика 1-го типа, 12000$ -для 2-ого типа и 15000$ – для 3-го типа домиков.

Какое строительство может запланировать компания, чтобы максимизировать свою прибыль и не нарушить ограничений по предотвращению загрязнения озера?

№9.

Три электрогенерирующие станции мощностью 25, 40 и 35 миллионов кВт/час поставляют электроэнергию в 3 города A, B и C. Максимальная потребность в электроэнергии в этих городах оценивается в 30, 35 и 25 миллионов кВт/час. Затраты на 1 млн кВт/час в этих городах показаны в таблице.

	A	B	C
Станция1	600$	700$	400$
Станция2	320$	300$	350$
Станция3	500$	480$	450$

В августе на 20% возрастет потребность в электроэнергии в каждом их 3-х городов. Недостаток электроэнергии города могут восполнить из другой электросети по цене 1000$ за миллион кВт/час. К сожалению город С не может подключиться к альтернативной электросети. Как разработать наиболее экономический план распределения электроэнергии на август?

№10

Сахарный завод из сиропа сахарного тростника производит желтый сахар, обычный белый, сахарную пудру и мелассу (черную патоку). Компания еженедельно закупает 4000 т сиропа и планирует производить не менее 25 т каждого продукта в неделю. Процесс производства начинается с переработки сахарного сиропа в желтый сахар и мелассу. Из одной тонны сиропа получается 0.3 т желтого сахара и 0.1 т мелассы. Далее из желтого сахара вырабатывается белый: из тонны желтого сахара получается 0.8 т белого. Наконец, сахарная пудра получается из белого сахара путем размельчения на специальной мельнице. Производительность этой мельницы равна 95%, то есть из тонны белого сахара получается 0.95 т сахарной пудры. Доход от одной тонны желтого и белого сахара, сахарной пудры и мелассы составляют 150$, 200$, 230$ и 35$ соответственно.

№11

Компания производит 2 вида продукции: A и B. Объем продаж продукта A составляет не менее 80% от общего объема продаж продуктов A и B. Вместе с тем компания не может производить более 100 единиц продукта A в день. Для производства этих продуктов используется одно и то же сырье, поступление которого ограничено 240 фунтами в день. На изготовление единицы продукта A расходуется 2 фунта сырья, а единицы продукта B – 4 фунта. Цена одной единицы продуктов A и B составляет 20$ и 50$ соответственно. Определить оптимальную структуру производства компании.

№12

Швейная фабрика Burroughs производит мужские сорочки и женские блузки для магазина Walmark. Этот магазин принимает всю продукцию, вырабатываемую фабрикой Burroughs. Производство швейного изделия состоит из раскроя, пошива и пакетирования готового изделия. На участке раскроя работают 25 человек, непосредственно на пошиве изделий – 35 человек и пакетируют готовые изделия 5 человек. Швейная фабрика Burroughs работает в одну смену (8 часов) пять дней в неделю. Трудозатраты и доход показаны в таблице.

	Раскрой	Пошив	Пакетирование	Доход
	(минут на изделие)			*($ на изделие)*
Рубашка	20	70	12	2.50
Блузка	60	60	4	3.20

Определите оптимальную структуру еженедельного производства для этой швейной фабрики.

№13

Фирма ArcTee собирает персональные компьютеры для частных клиентов. На следующие четыре квартала имеются заказы на 400, 700, 500 и 200 компьютеров соответственно. Фирма может производить больше компьютеров, чем указано в заказах, но в таком случае приходится платить 100$ за хранение одного компьютера в течение квартала. Увеличение производства в следующем квартале, по сравнению с предыдущим, приводит к дополнительному набору работников, что повышает себестоимость одного компьютера на 60$. При уменьшении производства в следующем квартале, по сравнению с предыдущим, придется прибегнуть к сокращению персонала, что также увеличивает себестоимость одного компьютера на 50$. Как организовать сборку компьютеров, чтобы удовлетворить все заказы?

№14

Мебельная фабрика для сборки столов и стульев привлекает к работе на 10 дней четырех столяров. Каждый столяр затрачивает 2 часа на сборку стола и 30 минут на сборку стула. Покупатели обычно приобретают вместе со столом от 4 до 6 стульев. Доход от одного стола составляет 135$, а от одного стула – 50$. На фабрике 8-часовый рабочий день. Составить план работы на 10 дней, максимизирующий прибыль.

№15

Управление национальными парками получило 4 заявки от подрядчиков на лесозаготовки в 3 сосновых лесных массивах Арканзаса. Эти массивы имеют площади 10 000, 20 000, 30 000 акров. Каждый подрядчик может получить для разработки не более половины всех отводимых для лесозаготовки площадей. Подрядчики предлагают следующую оплату за разработку 1 акра лесного массива:

	Лесной массив 1	Лесной массив 2	Лесной массив 3
Подрядчик 1	520$	210$	570$
Подрядчик 2	-	510$	495$
Подрядчик 3	650$	-	240$
Подрядчик 4	180$	430$	710$

Максимизировать прибыль, получаемую управлением национальными парками.

№16

Джек – студент-первокурсник. Он пришел к выводу, что одна только учеба, без ежедневной игры в баскетбол, плохо влияет на его умственное, нравственное и физическое развитие. Кроме того, как человек самостоятельный, он должен ежедневно уделять какое-то время устройству быта (наведение порядка, покупки…). Ему нужно распределить свое время (10 часов) между этими тремя видами деятельности. Привлекательность игры в баскетбол он оценивает в 3 раза выше, а решение бытовых вопросов в 2 раза выше, чем привлекательность учебы. Но, имея совесть и чувство долга, Джек решил, что время игры не должно превышать время на учебу. Кроме того, занятие баскетболом более 4 часов в день не желательно. Время на бытовые вопросы не должно быть меньше 1 часа в день, но и не более 1/4 от времени на учебу. Как распределить время Джеку, чтобы получить максимальное удовольствие?

№17

3 нефтеперегонных завода с ежедневной максимальной производительностью каждого 7 млн галлонов (1 галлон=3.7854 литра) бензина снабжают 3 бензохранилища, ежедневная потребность которых составляет 4, 8 и 5 млн. галлонов бензина соответственно. Бензин транспортируется в бензохранилища по бензопроводу. Возможны потери при передачи на большие расстояния в размере 0.001% на каждую милю (1 миля=1,609 км). Стоимость транспортировки составляет 10- центов за 1000 галлонов на 1 милю длины трубопровода (расчет стоимости транспортировки производится по отправленному количеству, а не полученному). Первый завод не связан трубопроводом с третьим бензохранилищем. Известны расстояния между заводами и бензохранилищами (в милях).

	Бензохранилище 1	Бензохранилище 2	Бензохранилище 3
Завод 1	120	180	-
Завод 2	300	100	80
Завод 3	200	250	120

Минимизировать затраты на транспортировку, при условии обязательного удовлетворения потребностей бензохранилищ.

№18

В условии задачи 17 считать, что потерь нет. Возможности заводов 6, 5 и 6 млн галлонов бензина, потребности бензохранилищ 4, 8 и 7 млн галлонов бензина. Потребности первого бензохранилища должны быть покрыты в обязательном порядке, за недопоставки во второе и третье хранилища накладывается штраф в размере 5 центов за каждый недопоставленный галлон бензина (штрафы суммируются с затратами на транспортировку). Минимизировать общие затраты.

№19

Компания Ready Mikks производит краску для внутренних и наружных работ из сырья двух типов : М1 и М2.

	Расход сырья на 1 т краски (тонн)		*Максимально возможный ежедневный расход сырья*
	для наружных работ	*для внутренних работ*	
Сырье М1	6	4	24
Сырье М2	1	2	6
Доход на 1 тонну краски (тыс$)	5	4	

Отдел маркетинга компании поставил условие, чтобы ежедневное производство краски для внутренних работ не превышало более, чем на тонну аналогичный показатель производства краски для внешних работ и общий расход сырья на краску для наружных работ не более, чем на 20% превышал общий расход сырья на краску для внутренних работ. Максимизировать ежедневный доход при этих условиях. На сколько ежедневно снижается прибыль из-за дополнительных требований отдела маркетинга?

№20

Три плодовых хозяйства поставляют апельсины в ящиках четырем оптовым покупателям. Ежедневная потребность этих покупателей составляет 150, 150, 400 и 100 ящиков. Используя постоянную рабочую силу, хозяйства могут ежедневно поставлять 150, 200 и 250 ящиков апельсинов соответственно. Первые 2 хозяйства могут увеличить поставки апельсинов путем привлечения дополнительных рабочих, третье хозяйство такой возможности не имеет. Как организовать поставки и привлечение дополнительных рабочих, чтобы полностью удовлетворить потребности покупателей и при этом расходы на перевозку были минимальны. Далее приведена матрица стоимости перевозки 1 ящика:

	Покупатель 1	Покупатель 2	Покупатель 3	Покупатель 4
Хозяйство 1	1$	2$	3$	2$
Хозяйство 2	2$	4$	1$	2$
Хозяйство 3	1$	3$	5$	3$

№21

Спрос на некоторый скоропортящийся продукт (имеющий срок реализации 2 месяца) на ближайшие 4 месяца составляет 300, 380, 400 и 420 тонн. Этот же товар можно производить в те же месяцы в объемах 600, 500, 300 и 200 тонн. Затраты на производство колеблются от месяца к месяцу и составляют 100$, 120$, 100$ и 130$ за тонну. Произведенный товар можно реализовывать либо в текущем месяце, либо в следующие два, но тогда будут дополнительные затраты 3$ на хранение 1 тонны за 1 месяц. Как организовать производство и сбыт продукции, чтобы общие затраты были минимальны?

№22

Бизнесмен из Далласа должен сделать 4 поездки туда и обратно из своего головного офиса в Далласа в филиал в Атланте . График поездок известен:

Дата отправления из Даласа	*Дата вылета из Атланты*
3 июня	7 июня
10 июня	12 июня
17 июня	21 июня
25 июня	28 июня

Если брать каждый билет отдельно (без обратного), то он стоит 250$. Если брать пару билетов туда и обратно (Даллас-Атланта-Даллас), то за пару необходимо заплатить 400$, причем, если число дней между прямым и обратным рейсами 21 или более дней, то предоставляется дополнительная скидка 30% от стоимости пары билетов.
Как лучше всего брать билеты, чтобы их общая стоимость была минимальна?

№23
Трое детей Джоя Клини - Джон, Карен и Терри хотят подзаработать немного денег на школьную экскурсию в местный зоопарк (стоимость билета 15$). Мистер Клини выбрал 6 видов домашних работ. Чтобы избежать ненужных споров между детьми, он опросил каждого (конечно, по секрету), сколько они хотят получить за каждый из видов работ. Получилась таблица:

	Уборка гаража	Мойка машины	Подстрижка газона	Полив цветов	Смазка велосипедов	Разборка почты
Джон	12	9	10	4	6	4
Карен	9	12	9	4	6	5
Терри	11	8	8	5	7	7

Как распределить работы между детьми, чтобы все работы были выполнены, а потери м-ра Клини были минимальны?
№24
Городская больница планирует выделить одно из своих отделений (на 20 мест) на 4 дня под дневной стационар. Имеются заявки от больных на 1-дневный стационар – 30 человек, на 2-дневный – 25 человек, на 3-дневный – 20 человек. Как организовать прием больных, чтобы обслужить максимальное число больных, при этом из числа больных, требующих 3-дневный стационар, должно быть обслужено не менее половины претендентов?
№25
Агенство по трудоустройству имеет заявки на рабочих на следующие 5 месяцев:

Месяц	1	2	3	4	5
К-во рабочих	100	120	80	170	50

Стоимость рабочей силы зависит от того, на сколько месяцев производится трудоустройство:

Длительность периода трудоустройства (кол-во месяцев)	1	2	3	4	5
Стоимость трудоустройства 1 рабочего ($)	100	130	180	220	250

Как с минимальными затратами обеспечить потребность в рабочих?

Тема 2. Решение задач линейного программирования симплекс-методом

Для решения задач линейного программирования существует универсальный метод – симплекс-метод, позволяющий решать задачи любой размерности. Задача линейного программирования может быть решена графически, если в ней 2 неизвестные. Графический метод используется только в учебных целях для графической иллюстрации.

Пример.

$$
\begin{array}{rrrcl}
 & 6x_1 & +7x_2 & \le & 60 \\
 & 2x_1 & +4x_2 & \le & 30 \\
 & 2x_1 & +10x_2 & \ge & 50 \\
\hline
F= & 7x_1 & +7x_2 & \to & \max
\end{array}
$$

Графическое решение.

Координаты точки оптимального решения можно приближенно увидеть на рисунке, а можно найти следующим образом. Из рисунка видно, что оптимальное решение лежит на пересечении 1-го и 3-го ограничений.

Решив систему уравнений:
$6x_1+7x_2=60$
$2x_1+10x_2=50$,
находим $x_1=5{,}435$; $x_2=3{,}913$; подстановкой в функцию находим F=-65,435.

Решение симплекс-методом.

Задачу приводим к стандартному виду.
$x_3= 60 -6x_1 - 7x_2\geq0$
$x_4= 30 -2x_1 - 4x_2\geq0$
$x_5=-50+2x_1+10x_2\geq0$
$F= \quad -7x_1 - 7x_2 \rightarrow \min$

Исходное заполнение симплекс-таблицы:

		X_1	X_2
X_3	60	-6	-7
X_4	30	-2	-4
X_5	-50	2	10
F	35	-7	-7

Исходное решение недопустимо. По строке с отрицательным свободным коэффициентом (3-ей) находим любой положительный, оба положительны, берем любой, например 2-ой. Тогда столбец с X_2 –ведущий, далее по методу:

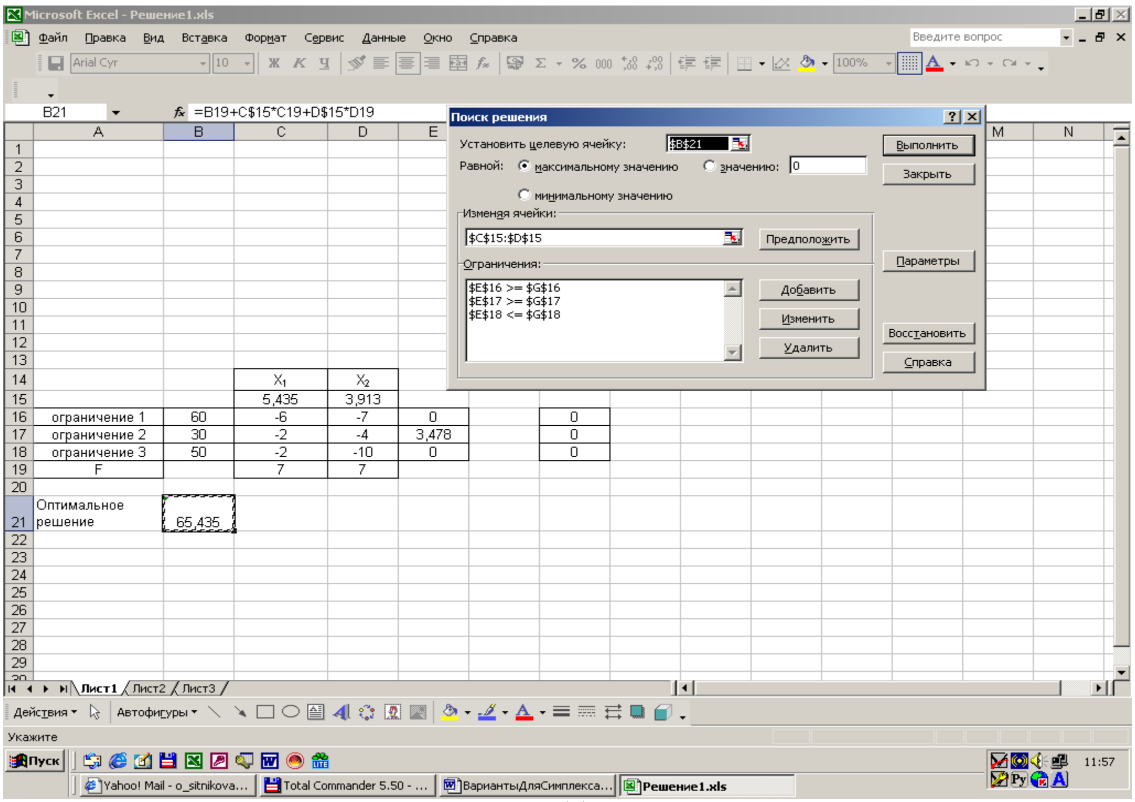
		X_1	X_2
X_3	60 35	-6 -7/5	-7 -7/10
X_4	30 20	-2 -4/5	-4 -4/10
X_5	-50 5	2 -1/5	10 1/10
F	35 35	-7 -7/5	-7 -7/10

После первой итерации решение становится допустимым. Далее ищется оптимальное решение.

		X_1	X_5
X_3	25 125/23	-23/5 -5/23	-7/10 -7/46
X_4	10 150/23	-6/5 6/23	-2/5 -21/115
X_2	5 25/23	-1/5 1/23	1/10 -7/230
F	-35 700/23	-28/5 28/23	-7/10 -98/115

		X_3	X_5
X_1	125/23	-5/23	-7/46
X_4	80/23	6/23	-5/23
X_2	90/23	1/23	3/23
F	-1505/23	28/23	7/46

Оптимальное решение совпало:
x_1=125/23=5,435; x_2=90/23=3,913; F=-1505/23=-65,435, меняем знак, так как нашли минимум, а надо максимум F=65,435.
Найденное решение проверяем в EXCEL.



Задание.

1.Решить задачу графически; убедиться, что область допустимых решений совместна; выписать оптимальное решение.
2.Решить задачу симплекс-методом; проверить правильность решения, сопоставив решения, полученные графически и симплекс-методом.
3.Решить задачу в среде EXCEL или с помощью других стандартных программных средств. Сравнить полученные результаты.

Варианты заданий:
Для всех вариантов имеются ограничения: $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

№1

$$\begin{array}{lrrrcl} & 1 & +6x_1 & -8x_2 & \le & 0 \\ & 15 & +\ x_1 & -6x_2 & \ge & 0 \\ & 4 & -8x_1 & -\ x_2 & \le & 0 \\ \hline F= & 7 & & +5x_2 & \to & \max \end{array}$$

№2

$$\begin{array}{lrrrcl} & 76 & -10x_1 & -9x_2 & \ge & 0 \\ & 63 & -7x_1 & -9x_2 & \le & 0 \\ & 48 & -8x_1 & +3x_2 & \ge & 0 \\ \hline F= & 7 & +7x_1 & +5x_2 & \to & \max \end{array}$$

№3

$$\begin{array}{lrrrcl} & 20 & -10x_1 & +5x_2 & \ge & 0 \\ & 37 & & -8x_2 & \ge & 0 \\ & 14 & +5x_1 & -9x_2 & \le & 0 \\ \hline F= & & 2x_1 & +x_2 & \to & \max \end{array}$$

№4

$$\begin{array}{lrrrcl} & 10 & -7x_1 & 7x_2 & \le & 0 \\ & 30 & -4x_1 & -2x_2 & \ge & 0 \\ & 6 & +5x_1 & -6x_2 & \le & 0 \\ \hline F= & & 7x_1 & +x_2 & \to & \max \end{array}$$

№5

$$\begin{array}{lrrrcl} & 23 & -4x_1 & -x_2 & \ge & 0 \\ & 4 & -8x_1 & +6x_2 & \le & 0 \\ & 12 & -2x_1 & & \ge & 0 \\ \hline F= & & x_1 & -5x_2 & \to & \max \end{array}$$

№6

$$\begin{array}{lrrrcl} & 22 & & -5x_2 & \ge & 0 \\ & -7 & +7x_1 & +2x_2 & \ge & 0 \\ & & 4x_1 & -4x_2 & \le & 0 \\ \hline F= & & 3x_1 & +8x_2 & \to & \max \end{array}$$

№7

$$\begin{array}{lrrrcl} & 3 & +6x_1 & -6x_2 & \ge & 0 \\ & -7 & +6x_1 & -8x_2 & \le & 0 \\ & 33 & -8x_1 & & \ge & 0 \\ \hline F= & & 8x_1 & +5x_2 & \to & \max \end{array}$$

№8

$$\begin{array}{lrrrcl} & 20 & -8x_1 & +3x_2 & \ge & 0 \\ & 18 & -4x_1 & & \ge & 0 \\ & 7 & -10x_1 & +7x_2 & \le & 0 \\ \hline F= & & 8x_1 & +x_2 & \to & \max \end{array}$$

№9

$$\begin{array}{rrrcl} 35 & -3x_1 & -5x_2 & \geq & 0 \\ 21 & & -4x_2 & \geq & 0 \\ 44 & -2x_1 & -9x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

$$F = -2x_1 -6x_2 \to \min$$

№10

$$\begin{array}{rrrcl} 28 & -x_1 & -6x_2 & \leq & 0 \\ 41 & +x_1 & -7x_2 & \geq & 0 \\ 31 & -3x_1 & -4x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$F = -5x_1 -6x_2 \to \max$$

№11

$$\begin{array}{rrrcl} 6 & -x_1 & -2x_2 & \leq & 0 \\ 6 & -5x_1 & +6x_2 & \geq & 0 \\ 58 & -2x_1 & -10x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$F = 10x_1 +5x_2 \to \max$$

№12

$$\begin{array}{rrrcl} 23 & +4x_1 & -10x_2 & \leq & 0 \\ 46 & -5x_1 & -6x_2 & \geq & 0 \\ 42 & -5x_1 & -5x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$F = 8x_1 +2x_2 \to \max$$

№13

$$\begin{array}{rrrcl} & 8x_1 & -9x_2 & \leq & 0 \\ 56 & -7x_1 & -7x_2 & \geq & 0 \\ 14 & & -3x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$F = 3x_1 +2x_2 \to \max$$

№14

$$\begin{array}{rrrcl} 19 & -x_1 & -4x_2 & \leq & 0 \\ 19 & -10x_1 & +5x_2 & \leq & 0 \\ 37 & -6x_1 & & \geq & 0 \end{array}$$

$$F = 8x_1 +6x_2 \to \max$$

№15

$$\begin{array}{rrrcl} 16 & +2x_1 & -7x_2 & \leq & 0 \\ 48 & +9x_1 & -6x_2 & \geq & 0 \\ 54 & -7x_1 & -6x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$F = 7x_1 +2x_2 \to \max$$

№16

$$\begin{array}{rrrcl} 26 & -10x_1 & +3x_2 & \leq & 0 \\ 32 & -x_1 & -6x_2 & \geq & 0 \\ 8 & -8x_1 & +7x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$F = 3x_1 +4x_2 \to \max$$

№17

$$\begin{array}{rrrcl} 49 & -9x_1 & -3x_2 & \geq & 0 \\ 12 & -6x_1 & +8x_2 & \geq & 0 \\ -4 & -6x_1 & +7x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

$$F = -8x_1 +5x_2 \to \max$$

№18

$$\begin{array}{rrrcl} 39 & -5x_1 & -4x_2 & \leq & 0 \\ 13 & -6x_1 & +6x_2 & \geq & 0 \\ 20 & +2x_1 & -6x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$F = -7x_1 -9x_2 \to \min$$

№19

$$\begin{array}{rrrcl} 14 & & -3x_2 & \geq & 0 \\ 31 & -8x_1 & +x_2 & \geq & 0 \\ & 4x_1 & -10x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

$$F = 8x_1 +8x_2 \to \max$$

№20

$$\begin{array}{rrrcl} 47 & -5x_1 & -6x_2 & \geq & 0 \\ 42 & -5x_1 & -5x_2 & \geq & 0 \\ 7 & +6x_1 & -8x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

$$F = 7x_1 +9x_2 \to \max$$

№21

$$\begin{array}{rrrcl} 16 & -3x_1 & & \geq & 0 \\ 31 & -7x_1 & -7x_2 & \leq & 0 \\ -3 & +6x_1 & -5x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$F = 6x_1 + 8x_2 \rightarrow \max$$

№22

$$\begin{array}{rrrcl} -2 & +6x_1 & -6x_2 & \leq & 0 \\ 19 & & -4x_2 & \geq & 0 \\ 57 & -7x_1 & -6x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

№23

$$\begin{array}{rrrcl} 39 & -x_1 & -8x_2 & \geq & 0 \\ 8 & +2x_1 & -5x_2 & \leq & 0 \\ 4 & +2x_1 & -2x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$F = 9x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

№24

$$\begin{array}{rrrcl} -9 & +2x_1 & -6x_2 & \leq & 0 \\ 4 & +5x_1 & +2x_2 & \geq & 0 \\ 8 & & -6x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$F = 10 + 5x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

№25

$$\begin{array}{rrrcl} 20 & -8x_1 & +3x_2 & \geq & 0 \\ 14 & -4x_1 & & \geq & 0 \\ 17 & -10x_1 & +7x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

$$F = 8x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

№26

$$\begin{array}{rrrcl} 20 & -4x_1 & -x_2 & \geq & 0 \\ 25 & -2x_1 & -8x_2 & \leq & 0 \\ 8 & -6x_1 & +5x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$F = 5x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

№27

$$\begin{array}{rrrcl} 48 & -5x_1 & -7x_2 & \leq & 0 \\ 4 & +4x_1 & -5x_2 & \geq & 0 \\ 25 & -3x_1 & -2x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$F = -9x_1 - 2x_2 \rightarrow \min$$

№28

$$\begin{array}{rrrcl} 47 & -3x_1 & -8x_2 & \geq & 0 \\ 25 & -7x_1 & & \leq & 0 \\ -3 & +9x_1 & -8x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$F = 2x_1 - 2x_2 \rightarrow \min$$

№29

$$\begin{array}{rrrcl} 26 & -9x_1 & -5x_2 & \leq & 0 \\ 2 & -6x_1 & +6x_2 & \geq & 0 \\ 19 & & -4x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$F = 2x_2 + 9x_2 \rightarrow \max$$

№30

$$\begin{array}{rrrcl} 57 & -7x_1 & -6x_2 & \geq & 0 \\ 38 & -9x_1 & -6x_2 & \leq & 0 \\ 16 & -3x_1 & -x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$F = 5x_2 + 4x_2 \rightarrow \max$$

№31

$$\begin{array}{rrrcl} 13 & -3x_1 & +x_2 & \leq & 0 \\ 17 & -3x_1 & -x_2 & \geq & 0 \\ 5 & -2x_1 & +x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$F = 7x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

№32

$$\begin{array}{rrrcl} 50 & -9x_1 & -4x_2 & \leq & 0 \\ 32 & -5x_1 & -2x_2 & \geq & 0 \\ 13 & +2x_1 & -5x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

$$F = 4x_1 + 8x_2 \rightarrow \max$$

№33

$$\begin{array}{l} 13+4x_1-6x_2\ge 0\\ 17-6x_1+2x_2\ge 0\\ 9-8x_1+3x_2\le 0\\ \hline F=5x_1+8x_2\to \max \end{array}$$

№34

$$\begin{array}{l} 27-x_1-6x_2\le 0\\ 4-8x_1+6x_2\le 0\\ 71-7x_1-2x_2\ge 0\\ \hline F=4+6x_1+3x_2\to \max \end{array}$$

№35

$$\begin{array}{l} 13-2x_2\ge 0\\ 18-3x_1-x_2\ge 0\\ 6x_1-6x_2\le 0\\ \hline F=2x_1+2x_2\to \max \end{array}$$

№36

$$\begin{array}{l} 47-7x_1-4x_2\ge 0\\ -1-2x_1+3x_2\ge 0\\ -7-2x_1+4x_2\le 0\\ \hline F=7x_1+6x_2\to \max \end{array}$$

№37

$$\begin{array}{l} 4+8x_1-6x_2\ge 0\\ -7+2x_1-x_2\le 0\\ 24-6x_1-x_2\ge 0\\ \hline F=2x_1+4x_2\to \max \end{array}$$

№38

$$\begin{array}{l} 32-5x_1-3x_2\ge 0\\ 10-3x_1-9x_2\le 0\\ -3+4x_1-2x_2\ge 0\\ \hline F=2-7x_1-8x_2\to \min \end{array}$$

№39

$$\begin{array}{l} 64-7x_1-9x_2\ge 0\\ 32-3x_1-4x_2\ge 0\\ 17-4x_1-x_2\le 0\\ \hline F=4x_2+6x_2\to \max \end{array}$$

№40

$$\begin{array}{l} 70-7x_1-8x_2\ge 0\\ 39-x_1-4x_2\ge 0\\ 53-3x_1-11x_2\le 0\\ \hline F=7x_2+7x_2\to \max \end{array}$$

Тема 3. Транспортная задача

Большинство задач транспортного типа могут быть сформулированы и решены, как задачи линейного программирования общего вида. Специфика ограничений транспортной задачи позволяет решать ее более эффективными методами, такими как, например, метод потенциалов или венгерский метод.
Метод потенциалов используется для решения транспортной задачи по критерию стоимости.

Для задачи по критерию времени также можно использовать метод потенциалов, но с небольшими дополнениями (матрица времени на каждой итерации заменяется матрицей фиктивной стоимости, которая строится на основании оптимального решения, полученного на предыдущей итерации; на каждой итерации решается задача по критерию стоимости с фиктивной матрицей до тех пор, пока время перевозки уменьшается).

Для поиска допустимых решений в транспортной задачи может быть использован метод северо-западного угла или метод минимальной стоимости. При ручном решении задачи более предпочтительным является второй метод, так как он позволяет получить оптимальное решение за меньшее число итераций.

Если транспортная задача имеет неправильный баланс (сумма запасов не равняется сумме потребностей), то добавляют фиктивного поставщика или потребителя.

Задание 1.

Решить транспортную задачу (3 поставщика, 4 потребителя) по критерию стоимости (предварительно проверив баланс запасов и потребностей), рассматривая заданную матрицу, как матрицу стоимости:

c_{ij} – стоимость перевозки 1 единицы груза от i-ого поставщика j-ому потребителю.

Для оптимального решения показать общую стоимость перевозки.

Задание 2.

Решить транспортную задачу по критерию времени (для той же матрицы), рассматривая заданную матрицу, как матрицу времени:

t_{ij} – время перевозки всего груза от i-ого поставщика j-ому потребителю.

Для оптимального решения показать общее время перевозки.

Варианты заданий (для заданий 1 и 2):

№1

		Потребности			
		20	23	44	17
Запасы	30	3	5	10	11
	20	8	4	7	3
	40	8	9	2	1

№2

		Потребности			
		20	10	15	15
Запасы	30	6	2	10	12
	20	8	14	1	13
	50	8	5	2	7

№3

		Потребности			
		20	25	35	40
Запасы	25	5	8	9	3
	25	4	6	2	1
	25	8	6	4	9

№4

		Потребности			
		10	20	25	20
Запасы	30	4	3	8	1
	35	7	4	5	3
	40	11	6	9	10

№5

		Потребности			
		35	25	15	5
Запасы	40	10	2	4	7
	30	9	7	3	4
	30	2	3	11	12

№6

		Потребности			
		28	30	25	30
Запасы	25	6	3	9	6
	30	3	5	7	8
	25	12	3	8	9

№7

		Потребности			
		24	26	28	30
Запасы	30	3	20	10	2
	30	11	2	5	8
	30	4	6	8	9

№8

		Потребности			
		20	30	50	20
Запасы	25	4	3	5	7
	35	4	5	7	8
	45	6	7	8	4

№9

		Потребности			
		12	25	25	35
Запасы	20	8	9	5	7
	30	4	5	6	7
	45	3	4	5	9

№10

		Потребности			
		25	25	25	22
Запасы	40	11	12	12	3
	40	2	3	6	8
	40	9	8	7	6

№11

		Потребности			
		33	23	34	12
Запасы	20	4	5	6	7
	25	5	8	4	6
	30	9	7	9	4

№12

		Потребности			
		80	10	20	30
Запасы	25	6	5	4	10
	35	10	11	8	9
	45	6	7	8	6

№13

		Потребности			
		15	18	19	30
Запасы	25	7	8	9	6
	25	5	7	8	5
	30	4	6	7	7

№14

		Потребности			
		23	24	25	26
Запасы	50	6	8	9	3
	40	2	11	10	9
	30	6	7	8	4

№15

		Потребности			
		15	15	30	30
Запасы	40	8	9	7	6
	20	5	6	9	1
	40	11	2	6	8

№16

		Потребности			
		35	35	35	35
Запасы	20	10	9	6	7
	35	8	6	9	4
	55	5	6	7	2

№17

		Потребности			
		10	20	30	40
Запасы	35	5	12	3	21
	55	17	7	5	8
	40	3	9	5	4

№18

		Потребности			
		55	45	15	10
Запасы	30	6	5	6	3
	20	7	8	10	5
	50	5	6	7	8

№19

		Потребности			
		15	25	25	10
Запасы	33	11	21	11	22
	44	23	22	8	9
	55	12	13	8	10

№20

		Потребности			
		30	30	30	40
Запасы	25	8	6	5	9
	25	7	6	4	12
	50	6	7	8	9

№21

		Потребности			
		16	15	27	33
Запасы	20	8	9	6	5
	30	4	5	6	8
	40	3	10	9	8

№22

		Потребности			
		44	33	55	10
Запасы	20	5	8	9	6
	60	7	8	8	5
	30	10	4	7	8

№23

		Потребности			
		35	35	35	40
Запасы	30	15	12	14	12
	30	11	9	8	7
	30	6	8	5	4

№24

		Потребности			
		15	15	20	10
Запасы	10	11	10	9	8
	20	7	6	9	5
	10	6	5	4	11

№25

		Потребности			
		41	21	33	21
Запасы	10	14	13	12	5
	20	6	7	8	9
	40	11	12	10	7

№26

		Потребности			
		23	33	43	22
Запасы	25	1	2	7	9
	25	6	7	1	6
	55	2	1	6	7

№27

		Потребности			
		25	35	40	20
Запасы	24	7	9	5	10
	44	5	9	7	4
	34	4	10	7	9

№28

		Потребности			
		22	33	44	30
Запасы	25	7	8	4	7
	25	8	7	6	5
	50	5	6	8	5

№29

		Потребности			
		30	40	50	20
Запасы	33	6	8	6	9
	33	8	9	8	6
	33	9	5	6	8

№30

		Потребности			
		35	35	35	35
Запасы	21	4	5	3	4
	32	7	3	4	5
	44	5	4	8	3

№31

		Потребности			
		25	25	45	45
Запасы	20	2	9	6	3
	60	4	3	2	6
	40	7	8	4	5

№32

		Потребности			
		10	12	30	20
Запасы	15	1	5	4	10
	18	9	2	3	7
	27	8	6	11	12

№33

		Потребности			
		15	26	17	33
Запасы	40	13	2	11	7
	30	3	9	4	8
	20	10	5	6	12

№34

		Потребности			
		20	20	20	15
Запасы	18	3	6	6	7
	16	4	5	4	8
	24	10	9	7	11

№35

		Потребности			
		27	26	25	31
Запасы	25	1	7	3	8
	25	9	6	2	5
	35	7	4	9	10

№36

		Потребности			
		27	25	26	32
Запасы	30	6	5	9	10
	30	2	1	4	3
	35	7	3	2	8

№37

		Потребности			
		32	33	24	26
Запасы	25	7	1	12	10
	45	2	8	3	9
	18	6	5	4	11

№38

		Потребности			
		34	25	26	37
Запасы	40	2	3	4	10
	30	6	1	5	8
	35	9	7	8	9

№39

		Потребности			
		34	33	23	44
Запасы	35	4	3	5	9
	45	8	10	2	1
	45	6	7	6	8

№40

		Потребности			
		33	24	15	27
Запасы	30	1	4	3	10
	25	6	7	2	9
	30	12	5	11	8

Тема 4. Задача о назначениях (о выборе)

Задача о назначениях относится к задачам транспортного типа. Можно привести множество примеров реальных задач, которые по модели являются задачами о назначениях или вариантами этой задачи. Для решения задачи о назначениях используют метод потенциалов и венгерский метод.

При решении задачи о назначениях методом потенциалов на этапе начального заполнения применяют прием, называемый ε-методом. ε -метод позволяет избежать наличия базисных нулей, тем сам предотвращает зацикливание. Также необходимо учитывать, что в транспортной задаче по критерию стоимости цель (затраты на перевозку) минимизируется, а в задаче о назначениях (эффективность) максимизируется.

Венгерский метод – высокоэффективный метод, позволяющий найти оптимальное решение за число итераций, не превышающих N-2, где N-размерность задачи.

Задание 1.
Решить задачу о назначениях (4 работника, 4 работы) методом потенциалов, рассматривая заданную матрицу, как матрицу эффективности:
c_{ij} – эффективность от выполнения i-м работником j-ой работы.
Для оптимального решения посчитать суммарную эффективность.

Задание 2.

Решить задачу о назначениях венгерским методом.
Для оптимального решения посчитать суммарную эффективность.
Сравнить решения, найденные двумя разными методами.
Обязательно ли эти решения должны совпадать?

Варианты заданий (для заданий 1 и 2):

№1

	Работники			
Работы	13	5	10	11
	18	4	7	3
	10	7	3	5
	9	9	2	1

№2

	Работники			
Работы	9	15	10	10
	8	4	7	9
	6	7	13	5
	9	9	12	11

№3

	Работники			
Работы	10	15	20	13
	9	8	3	1
	5	6	7	8
	9	8	7	12

№4

	Работники			
Работы	10	8	8	11
	19	18	20	10
	15	30	25	16
	8	9	20	15

№5

	Работники			
Работы	18	20	17	16
	14	13	11	12
	20	11	15	13
	9	8	7	20

№6

	Работники			
Работы	30	23	11	17
	15	20	10	23
	20	35	25	11
	50	40	12	35

№7

	Работники			
Работы	10	9	11	12
	4	9	9	6
	8	4	6	7
	9	6	8	10

№8

	Работники			
Работы	17	9	10	20
	20	15	9	9
	12	40	34	30
	40	23	15	30

№9

	Работники			
Работы	9	8	7	6
	3	5	6	4
	8	9	7	5
	10	8	9	7

№10

	Работники			
Работы	6	5	4	3
	5	5	6	3
	2	6	3	1
	7	9	4	6

№11

	Работники			
Работы	13	10	9	11
	9	20	15	8
	9	10	11	12
	8	7	6	5

№12

	Работники			
Работы	12	13	13	9
	6	7	7	8
	11	10	9	7
	8	9	10	8

№13

	Работники			
Работы	25	22	11	23
	12	22	35	34
	7	15	9	11
	18	19	10	23

№14

	Работники			
Работы	13	18	18	19
	11	25	22	23
	10	23	13	15
	9	8	6	7

№15

	Работники			
Работы	1	6	7	4
	3	4	5	6
	3	8	5	8
	7	8	9	6

№16

	Работники			
Работы	23	32	11	24
	25	19	16	18
	23	33	19	10
	19	13	12	11

№17

	Работники			
Работы	23	4	5	6
	21	2	4	2
	24	2	5	4
	26	1	6	8

№18

	Работники			
Работы	11	10	7	1
	12	9	4	5
	13	8	3	1
	15	5	2	6

№19

	Работники			
Работы	16	15	11	10
	12	14	15	10
	5	7	8	9
	1	3	3	2

№20

	Работники			
Работы	8	10	11	20
	4	15	14	22
	6	13	16	23
	7	12	18	25

№21

	Работники			
Работы	6	8	10	12
	12	9	7	6
	11	10	13	14
	13	15	17	19

№22

	Работники			
Работы	3	4	6	7
	5	1	1	2
	10	11	13	15
	14	16	13	12

№23

	Работники			
Работы	13	12	10	15
	11	14	18	19
	14	12	11	10
	21	19	9	20

№24

	Работники			
Работы	22	21	18	16
	15	13	11	12
	11	9	5	7
	21	11	22	19

№25

	Работники			
Работы	15	17	18	21
	23	24	15	17
	18	19	22	21
	9	8	3	2

№26

	Работники			
Работы	10	7	9	5
	4	5	6	7
	2	3	1	1
	9	9	8	5

№27

	Работники			
Работы	4	5	6	7
	3	4	5	6
	2	3	5	6
	5	2	3	7

№28

	Работники			
Работы	13	22	12	21
	17	19	18	15
	21	11	22	13
	12	15	19	18

№29

	Работники			
Работы	21	25	27	29
	8	9	10	11
	9	7	5	4
	11	12	16	13

№30

	Работники			
Работы	17	16	15	14
	14	14	9	8
	7	5	12	11
	9	11	16	17

№31

	Работники			
Работы	14	17	20	15
	11	14	10	9
	7	20	21	12
	25	22	24	15

№32

	Работники			
Работы	10	15	16	22
	14	9	7	21
	9	12	15	20
	8	13	14	18

№33

	Работники			
Работы	10	8	5	4
	11	12	9	2
	13	9	7	3
	11	6	5	1

№34

	Работники			
Работы	10	15	17	20
	8	9	2	3
	7	6	2	5
	9	4	5	7

№35

	Работники			
Работы	18	12	14	20
	14	15	22	21
	18	13	16	18
	15	11	12	20

№36

	Работники			
Работы	7	6	4	1
	16	15	11	17
	12	13	16	20
	22	23	25	29

№37

	Работники			
Работы	11	8	9	10
	5	1	2	6
	15	18	20	21
	25	18	19	17

№38

	Работники			
Работы	11	6	6	3
	15	8	7	4
	1	5	4	1
	13	17	13	18

№39

	Работники			
Работы	13	15	21	17
	11	10	7	13
	11	14	8	15
	12	11	19	20

№40

	Работники			
Работы	14	17	13	11
	10	20	22	13
	9	7	5	3
	2	2	6	7

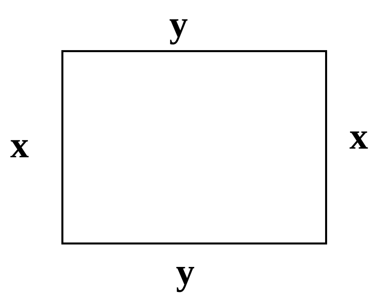
<u>Тема 5.</u> Нелинейная оптимизация. Построение моделей. Классическая теория оптимизации

Предусматривается построение простейших нелинейных моделей практических задач и решение нелинейных оптимизационных задач с использованием классической теории оптимизации, основанной на проверке необходимых и достаточных условий существования максимума или минимума. Эти методы не всегда удобны при их использовании для решения реальных задач, однако соответствующие теоретические результаты лежат в основе большинства алгоритмов решения задач нелинейного программирования.

Пример 1.

Среди прямоугольников с периметром фиксированной длины L необходимо найти прямоугольник максимальной площади. Какую длину и ширину будет иметь такой прямоугольник?

Решение.



Неизвестные:

x-ширина,

y-длина.

Ограничения:

Периметр 2*(x+y)=L.

Функция цели - площадь

$S=x*y \rightarrow \max$.

Так как ограничение задано равенством, то можно одну неизвестную выразить через другую, например y=L/2-x, тогда

$$S=x*(L/2-x)=L*x/2-x^2.$$

Экстремум функции будет в точке, где ее производная =0.

$S'=L/2-2x=0$

$x=L/4$.

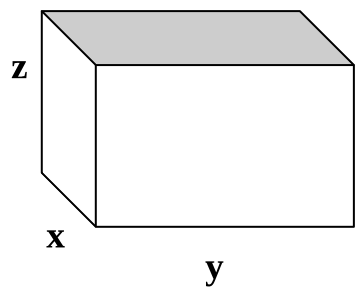
Чтобы убедиться, что найден max, а не min, проверим вторую производную.
S’’ = -2 <0, что соответствует max.
Найдем y=L/2-x=L/4.

Ответ. Среди прямоугольников с фиксированным периметром максимальную площадь имеет квадрат.

Пример 2.

Необходимо изготовить бак (без крышки) в форме параллелепипеда заданной емкости V с минимальной длиной сварочных швов.

Решение.



Неизвестные:
- x-ширина,
- y-длина,
- z-высота.

Ограничения:

Объем $V=x*y*z$

Функция цели – длина сварочных швов:

$F=2*(x+y)+4*z \rightarrow \min$.

Так как ограничение задано равенством, то можно одну неизвестную выразить через остальные, например $z=V/(x*y)$, тогда

$F=2*x+2*y+4*V/(x*y) \rightarrow \min$.

Найдем критические точки .

$F'_x=0$

$F'_y=0$

или

$F'_x=2-4*V/(y*x^2)=0$

$F'_y=2-4*V/(x*y^2)=0$.

Решая систему этих 2-х уравнений с двумя неизвестными, находим
$x=y=(2*V)^{1/3}$.

Чтобы убедиться, что это минимум, строим матрицу вторых производных:

F''_{xx}	F''_{xy}
F''_{yx}	F''_{yy}

Или

$F''_{xx}=8*V/(y*x^3)$	$F''_{xy}=4*V/(y^2*x^2)$
$F''_{yx}=4*V/(y^2*x^2)$	$F''_{yy}=8*V/(x*y^3)$

В найденной точке

$4/(2*V)^{1/3}$	$2/(2*V)^{1/3}$
$2/(2*V)^{1/3}$	$4/(2*V)^{1/3}$

Проверяем главные миноры:
$4/(2*V)^{1/3}>0$
$12/(2*V)^{1/3}>0$
Оба минора положительны, это подтверждает, что в найденной точке минимум.
Остается найти высоту бака:
$z=V/(x*y)=(V/4)^{1/3}$.

Ответ.
$x=y=(2*V)^{1/3}$
$z=(V/4)^{1/3}$
Например, бак на 1000 л $=1м^3$
будет иметь параметры $x \approx y \approx 1{,}26$м
$z \approx 0{,}63$м
длина швов $\approx 7{,}32$ м
(для сравнения при $x=y=z=1$ длина швов=8 м).

Пример 3.
Исследовать на экстремум функцию
$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$
при ограничениях:
$x_1+x_2+3x_3=2$
$5x_1+2x_2+x_3=5$.

Решение
n=3 (3 неизвестные)
m=2 (2 ограничения-равенства)

Задачу модно решать, используя метод исключения неизвестных или методом функции Лагранжа.
Остановимся на 2-м способе.

Функция Лагранжа:
$L(X,\lambda)= x_1^2+x_2^2+x_3^2-\lambda_1(x_1+x_2+3x_3-2) -\lambda_2(5x_1+2x_2+x_3-5)$.

Необходимые условия:

$\partial L/\partial x_1=2x_1-\lambda_1-5\lambda_2=0$
$\partial L/\partial x_2=2x_2-\lambda_1-2\lambda_2=0$

$\partial L/\partial x_3=2x_3-3\lambda_1-\lambda_2=0$
$\partial L/\partial \lambda_1=-(x_1+x_2+3x_{3-}2)=0$
$\partial L/\partial \lambda 2_1=-(5x_1+2x_2+x_{3-}5)=0$

Решаем эту систему уравнений, получаем “подозрительную” (стационарную) точку:
$x_1=0.81$, $x_2=0.35$, $x_3=0.28$,
$\lambda_1=0.0867$, $\lambda_2=0.3067$.

Для проверки достаточного условия строим окаймленную матрицу Гессе
(из 2-х производных функции Лагранжа):

$$H=\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

Учитывая, что n=3, m=2, n+m=3+2=5, находим 2m+1=5. Нужно проверить знак только у одного минора, а именно 5-ого. 5-й минор – это определитель всей матрицы, находим его в EXCEL (с помощью функции МОПРЕД). detH=460>0. $(-1)^m=(-1)^2=1$. Положительность минора в данном случае говорит о том, что это достаточное условие MIN.
Точка, в которой совпадают необходимые и достаточные условия, является точкой MIN.

Ответ. Задача имеет единственной решение – минимум в точке
$x_1=0.81$, $x_2=0.35$, $x_3=0.28$,
$f^{min}=0.857$.

Пример 4.

Найти максимум функции $f(x_1,x_2)=-(2x_1-5)^2-(2x_2-1)^2$
при ограничениях:
$x_1+2x_2 \le 2$
$x_1,x_2 \ge 0$.

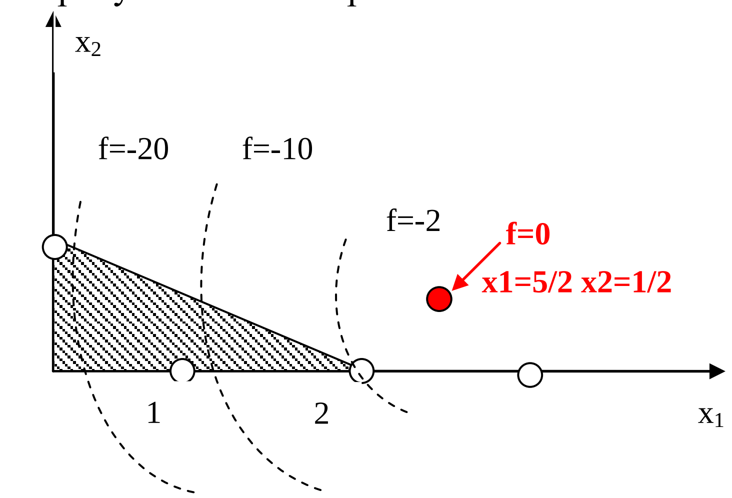
Решение
n=2, m=3.
Сначала надо найти точки максимума функции без учета ограничений.
Составляем систему для нахождения стационарных точек:
$\partial f/\partial x_1=-4(2x_1-5)=0$
$\partial f/\partial x_2=-4(2x_2-1)=0$.

Решение системы: $x_1=5/2$, $x_2=1/2$.

Если подставим эту точку в систему ограничений исходной задачи, то увидим, что точка не допустима (нарушается 1-е ограничение), надо искать решение на границах области (если бы была допустима, то надо было бы проверить по вторым производным достаточные условия, чтобы определить – это максимум или минимум).

Порядок исследования границ будет таким. Всего 3 ограничения. Надо решить 7 задач с заданной функцией цели и ограничениями следующего вида: 3 задачи, в которых будет по 1 ограничению-равенству; 3 задачи, в которых будет по 2 ограничения-равенства (количество задач такого вида определяется числом сочетаний из 3 по 2); 1 задача, в которой будет 3 ограничения-равенства (сочетания из 3 по 3) . На самом деле все окажется проще.

Нарисуем область ограничений.



Вспомогательная задача 1:

max $f(x_1,x_2)=-(2x_1-5)^2-(2x_2-1)^2$

при ограничении: x_1+2x_2 - 2=0.

Проще всего эту задачу решить подстановкой. Из уравнения находим $x_1=2-2x_2$ и подставляем в функцию. Получаем $f(x_2)=-20x_2^2-4x_2-2$.

Приравниваем производную 0: $-40x_2-4=0$, $x_2=-0.1<0$ – нарушается 3-е ограничение, точка недопустимая (поэтому даже не проверяем max или min).

Вспомогательная задача 2:

max $f(x_1,x_2)=-(2x_1-5)^2-(2x_2-1)^2$

при ограничении: $x_1=0$.

Делаем подстановку, получаем $f(x_2)=-(-5)^2-(2x_2-1)^2$.

Приравнивая производную 0, получаем: $x_2=1/2$. Точку ($x_1=0$, $x_2=1/2$) подставляем в 2 других ограничения и убеждаемся, что они не нарушаются в этой точке.

Так как $f\,''_{x_2}=-4<0$, то это означает, что в точке ($x_1=0$, $x_2=1/2$) максимум функции для этой границы. Запоминаем эту точку, как претендент на точку максимума, в ней f=-25.

Вспомогательная задача 3:

max $f(x_1,x_2)=-(2x_1-5)^2-(2x_2-1)^2$

при ограничении: $x_2=0$.

Делаем подстановку, получаем $f(x_1)=-(2x_1-5)^2-1$.

Приравнивая производную 0, получаем: $x_1=5/2$. Точку ($x_1=5/2$, $x_2=0$) подставляем в 2 других ограничения и убеждаемся, что первое нарушается в этой точке.

Вспомогательная задача 4:

max $f(x_1,x_2)=-(2x_1-5)^2-(2x_2-1)^2$

при 2-х ограничениях: x_1+2x_2□- 2=0 и $x_1=0$.

Система 2-х уравнений с 2-мя неизвестными дает 1 точку ($x_1=0$, $x_2=1$), она допустима по недостающему ограничению. В ней вычисляем функцию, получаем $f=-26<-25$, поэтому точку не запоминаем.

Вспомогательная задача 5:

max $f(x_1,x_2)=-(2x_1-5)^2-(2x_2-1)^2$

при 2-х ограничениях: x_1+2x_2□- 2=0 и $x_2=0$.

Система 2-х уравнений с 2-мя неизвестными дает 1 точку ($x_1=2$, $x_2=0$), она допустима по недостающему ограничению. В ней вычисляем функцию, получаем $f=-2>-25$, поэтому точку запоминаем, как претендент на точку максимума.

Вспомогательная задача 6:

max $f(x_1,x_2)=-(2x_1-5)^2-(2x_2-1)^2$

при 2-х ограничениях: $x_1=0$ и $x_2=0$.

Точка ($x_1=2$, $x_2=0$) допустима по недостающему ограничению. В ней вычисляем функцию, получаем $f=-26<-2$, поэтому точку не запоминаем.

Вспомогательная задача 7:

max $f(x_1,x_2)=-(2x_1-5)^2-(2x_2-1)^2$

при 3-х ограничениях: x_1+2x_2□- 2=0, $x_1=0$ и $x_2=0$.

Система 3-х уравнений с 2-мя неизвестными не имеет решения, поэтому задача 7 тоже не имеет решения.

Из всех точек осталась одна лучшая точка (из вспомогательной задачи 5), которая определяется пересечением 2-х границ, соответствующих 1-му и 3-му ограничениям.

Ответ. Max $f(x_1,x_2)$ в заданной 3-мя ограничениями-неравенствами области находится на границе в точке ($x_1=2$, $x_2=0$) $f^{max}= -2$.

Задание №1. Построение и исследование моделей.

1.Построить математическую модель оптимизационной задачи, сделать поясняющий рисунок.

2.Используя аппарат математического анализа (исследование на экстремум) найти и обосновать решение задачи.

Замечание.

1.Если при исследовании на экстремум возникают громоздкие уравнения, то рекомендуется использовать следующий прием: выражение, содержащее только константы из условия, заменить на новую одну константу, после решения задачи сделать обратную замену. *Например,* уравнение

$(a^2+b^2\sin(H+a))^3x^2+a/(b^2+H^3)*y^2=\cos(2b)$,
где a, b, H –константы из условия задачи, x,y –неизвестные,
рационально заменить на уравнение
$cx^2+dy^2=g$, где
$c=(a^2+в^2\sin(H+a))^3$, $d=x^2+a/(b^2+H^3)$, $g=\cos(2b)$.
2.Если описанный прием не упрощает принципиально задачу, то, по согласованию с преподавателем, можно заменить заданные в условии константы конкретными числовыми значениями. Это допустимо только в виде исключения в задачах со сложными для решения уравнениями.

Варианты задания №1.

1.Определить параметры консервной банки цилиндрической формы заданного объема V $см^3$, имеющей минимальную длину швов.
2.Определить параметры прямоугольного металлического бака (открытого, без крышки), заданного веса К т, с толщиной стенок Р см из металла с удельным весом С кг/м3, имеющего максимальную вместимость.
3. Определить параметры цилиндрического металлического бака (открытого, без крышки), заданного веса К т, с толщиной стенок Р см из металла с удельным весом С кг/м3, имеющего максимальную вместимость.
4. Определить параметры прямоугольного металлического бака (закрытого, с крышкой), заданного веса К т, с толщиной стенок Р см из металла с удельным весом С кг/м3, имеющего максимальную вместимость.
5.Определить параметры прямоугольного металлического бака (открытого, без крышки), заданной вместимостью К $м^3$, с толщиной стенок Р см из металла с удельным весом С кг/м3, требующего минимального расхода металла.
6.Определить параметры прямоугольного металлического бака (закрытого, с крышкой), заданной вместимостью К $м^3$, с толщиной стенок Р см из металла с удельным весом С кг/м3, требующего минимального расхода металла.
7.Определить параметры цилиндрического металлического бака (открытого, без крышки), заданной вместимостью К $м^3$, с толщиной стенок Р см из металла с удельным весом С кг/м3, требующего минимального расхода металла.
8.Определить параметры цилиндрического металлического бака (закрытого, с крышкой), заданной вместимостью К $м^3$, с толщиной стенок Р см из металла с удельным весом С кг/м3, требующего минимального расхода металла.
9.Дорога пересекает поле. Скорость движения по полю V_1, по дороге $V_{2.}$ Автомобиль находится в поле на расстоянии Н от дороги. Чтобы попасть в заданную точку на дороге ему нужно по дороге проехать еще расстояние Р (если он по перпендикуляру доедет до дороги, а потом поедет по дороге). Как ему лучше ехать, чтобы добраться до нужной точки на дороге за минимальное время?
10. Между песчаным пляжем и полем проходит граница (прямая линия). Пешеход находится в точке А на песчаном пляже на расстоянии К от границы. Ему нужно попасть в точку В, которая находится в поле на расстоянии Р от границы. Расстояние АВ равно Е. Скорость движения по пляжу V_1, по дороге $V_{2.}$ Как он должен идти, чтобы побыстрее добраться в В?

11.В состав сплава входят 2 металла стоимостью C_1 и C_2 за 1 кг. Прочность вещества прямо пропорциональна доли 1-го металла и обратно пропорциональна Ln доли 2-ого.
В каком соотношении надо брать металлы, чтобы стоимость 1 кг не превышала В, доля второго металла не была меньше Р и при этом прочность сплава была максимальна?
12.Изготавливается цилиндрический металлический бак (без крышки) заданной емкости А $м^3$. Дно имеет толщину В мм. Толщина стен зависит от высоты бака: чем выше бак, тем толще стены (толщина вычисляется, как высота, деленная на константу К). Удельный вес металла С кг/м3, 1 т металла стоит М$. Какие следует взять параметры бака, чтобы минимизировать его стоимость?
13. Какими должны быть параметры цилиндрической бочки, чтобы ее вместимость была максимальна, и при этом выполнялось условие устойчивости? Условие устойчивости: при подъеме края дна бочки на угол относительно горизонта, не превышающий Т градусов, проекция центра тяжести бочки (бочка заполнена по всему объему) на горизонт не должна выйти за пределы проекции ее основания. Высота бочки должна быть не более Н м.
14.Цилиндрическая бочка без крышки заполняется водой на К% от ее объема. Какими должны быть параметры бочки, чтобы максимизировать объем заливаемой воды и при этом выполнялось дополнительное условие по расплескиванию? Условие по расплескиванию: при подъеме края дна бочки на угол относительно горизонта, не превышающий Т градусов вода не должна выливаться через край.
15.Какие параметры должны быть у прямоугольного участка заданной площади К, чтобы длина забора по его периметру была минимальна и хотя бы одна из сторон участка не менее, чем в Р раз превышала длину проектируемого на нем бассейна (длина бассейна А)?
16.Планируется строительство 2-х этажного дома, каждый этаж высотой Н, толщина стен А. Какие размеры участка необходимо запланировать под этот дом, чтобы общая полезная площадь была К и при этом был минимальный расход кирпича на наружные стены?
17.Строится павильон прямоугольной формы высотой Н. По нормативам освещенности площадь окон не должна быть меньше А% от площади пола. На строительство выделена сумма денег S$. Стоимость за 1 $м^2$: стен-С$, окон –К$, пола –Р$. Какие размеры должен иметь павильон, чтобы его площадь была максимальна.
18.Имеется N домов (объектов на плоскости с заданными координатами Ai и Bi). Необходимо построить котельную, от которой горячая вода будет подаваться в дома. Потери тепла для одного объекта считать прямо пропорциональными квадрату расстояния от котельной до дома. Где расположить котельную, чтобы суммарные потери были минимальными и общая протяженность коммуникаций не превышала Р?
19.На прямоугольной заготовке размером А*В отмечены 2 точки (с координатами а1,в1 и а2,в2 относительно сторон заготовки). Найти третью

точку на заготовке такую, чтобы длина провода, соединяющего эти 3 точки, была максимальна.

20.На прямоугольной заготовке размером A*B отмечены 2 точки (с координатами а1,в1 и а2,в2 относительно сторон заготовки). Найти третью точку на заготовке такую, чтобы площадь образовавшегося треугольника была максимальна.

21.На круглом диске радиуса R отмечены 2 точки (с координатами а1,в1 и а2,в2 относительно центра диска). Найти третью точку такую, чтобы она лежала на крае диска (на окружности) и суммарное расстояние от нее до этих 2-х точек было минимальным.

22.На круглом диске радиуса R отмечены 2 точки (с координатами а1,в1 и а2,в2 относительно центра диска). Найти третью точку на диске такую, чтобы площадь треугольника, образовавшегося из этих 3-х точек, была максимальна.

23.На стене недалеко друг от друга имеются 3 небольших точечных дефекта, которые задаются координатами точек: а1,в1; а2,в2; а3,в3. Как нужно повесить круглое зеркало, и какого минимального диаметра оно должно быть, чтобы закрыть все дефекты?

24.На стене недалеко друг от друга имеются 2 небольшие круглые дырки: одна радиусом R1, вторая – радиусом R2, координаты центров а1,в1 и а2,в2. Как нужно повесить круглое зеркало, и какого минимального диаметра оно должно быть, чтобы закрыть обе дырки?

25.На стене недалеко друг от друга имеются 3 небольших точечных дефекта, которые задаются координатами точек: а1,в1; а2,в2; а3,в3. Планируется повесить на стену прямоугольную картину, чтобы она закрыла все дефекты. Куда ее нужно повесить и какие параметры она должна иметь, чтобы площадь картины была минимальна?

Задание №2. Исследование функций на экстремум при наличии ограничений

1.Исследовать на экстремум заданную функцию при наличии ограничений.
2.Привести, по возможности, поясняющие рисунки.

Варианты задания №2.

№ варианта	Функция цели	Ограничения
1	$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^4+x_2^2+5x_1x_2x_3$	$x_1^2-x_2^2+x_3^3 \le 10$; $x_1 \ge 0$;
2	$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^4+x_2^2+x_1x_2x_3$	$x_1^3-x_2^2+4x_3^2 \ge 20$; $x_3 \ge 0$;
3	$f(x_1,x_2)=(x_1-1)^2+(x_2-2)^2$	$x_1+x_2 \ge 2$; $x_1^2+x_2^2 \le 4$;
4	$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+(x_2-1)^2-2x_3^2$	$x_1,x_2,x_3 \ge 0$;
5	$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^3-x_2^2+x_1x_3^2$	$5x_1^2-x_2^2-x_3 \ge 0$; $x_3 \ge 0$;
6	$f(x_1,x_2)=-(2x_1-1)^2-(x_2-5)^2$	$x_1+x_2 \le 1$; $x_1,x_2 \ge 0$;
7	$f(x_1,x_2)=(2x_1+1)^2+(x_2+1)^2$	$x_1+x_2 \ge 5$; $x_2 \ge 0$;

8	$f(x_1,x_2)=x_1^4+x_2^2+5x_1x_2^2$	$x_1^2-x_2^2 \le 10$; $x_1 \ge 0$;
9	$f(x_1,x_2)=-(x_1-7)^2-(2x_2+3)^2$	$x_1+3x_2\ge 2$; $x_1,x_2 \ge 0$;
10	$f(x_1,x_2)=x_1^4+2x_2^2-x_1x_2^2$	$2x_1-x_2\ge 1$; $x_1,x_2 \ge 0$;
11	$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+10x_2^2+3x_3^2$	$x_1+x_2^2+x_2x_3=10$;
12	$f(x_1,x_2)=x_1^2+2x_2^2-3x_1x_2^2$	$2x_1-x_2 \le 4$; $x_1,x_2 \ge 0$;
13	$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$	$4x_1+x_2^2+x_3=14$
14	$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+10x_3^2$	$x_1+x_2^2+x_3=5$; $x_1+5x_2+x_3=7$;
15	$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+10x_3^2+5x_1x_2$	$x_1+x_2^2+3x_2x_3=5$;
16	$f(x_1,x_2)=3x_1^2+2x_2^2-4x_1x_2^2$	$x_1+3x_2 \le 10$; $x_1,x_2 \ge 0$;
17	$f(x_1,x_2)=(2x_1+1)(x_2+1)$	$x_1+3x_2 \le 1$; $x_1-x_2\ge 1$; $x_2 \ge 0$;
18	$f(x_1,x_2)=(2x_1-1)(x_2-1)$	$2 \le x_1^2+x_2^2 \le 4$;
19	$f(x_1,x_2)=x_1^3+2x_2^2+x_1x_2^2$	$x_1+3x_2 \le 10$; $2x_1-x_2\ge 1$; $x_2 \ge 0$;
20	$f(x_1,x_2)=(x_1-7)^2+(2x_2+3)^2$	$2x_1+3x_2 \le 12$; $x_1,x_2 \ge 0$;
21	$f(x_1,x_2)=(2x_1-1)^2-(x_2-5)^2$	$2x_1+x_2 \le 8$; $x_1,x_2 \ge 0$;
22	$f(x_1,x_2)=4x_1^4+2x_2^2+x_1x_2^2$	$2x_1-x_2\ge 1$; $x_1,x_2 \ge 0$;
23	$f(x_1,x_2,x_3)=x_1+2x_3+x_2x_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2$	$x_1+x_2+x_3\ge 3$; $x_2 \ge x_1$;
24	$f(x_1,x_2)=8x_1x_2+3x_2^2$	$x_1^2+x_2^2\ge 4$; $x_2 \ge 0$;
25	$f(x_1,x_2)=x_1^3+x_2^2-3x_1x_2^2$	$2x_1 \ge x_2$; $x_1,x_2 \ge 0$;

Тема 6. Методы одномерной оптимизации.

Нахождение экстремума функции от одной переменной с помощью некоторого вычислительного алгоритма может быть самостоятельной задачей (как правило, уточнение значения по найденному приближенно в виде интервала решению), но чаще используется, как составная часть более сложных алгоритмов поиска экстремума функции от нескольких переменных. Методы одномерной оптимизации используют, в основном, для поиска экстремума унимодальных функций (имеющих 1 экстремум в интервале поиска).

Пример

Найти максимум функции $f(x)=x*\sin(x)-x^3$ на интервале (a,b), где a=0 b=0.7 с точностью ε=0.03 методом чисел Фибоначчи. Пусть δ=0.005<<0.03 .

Решение

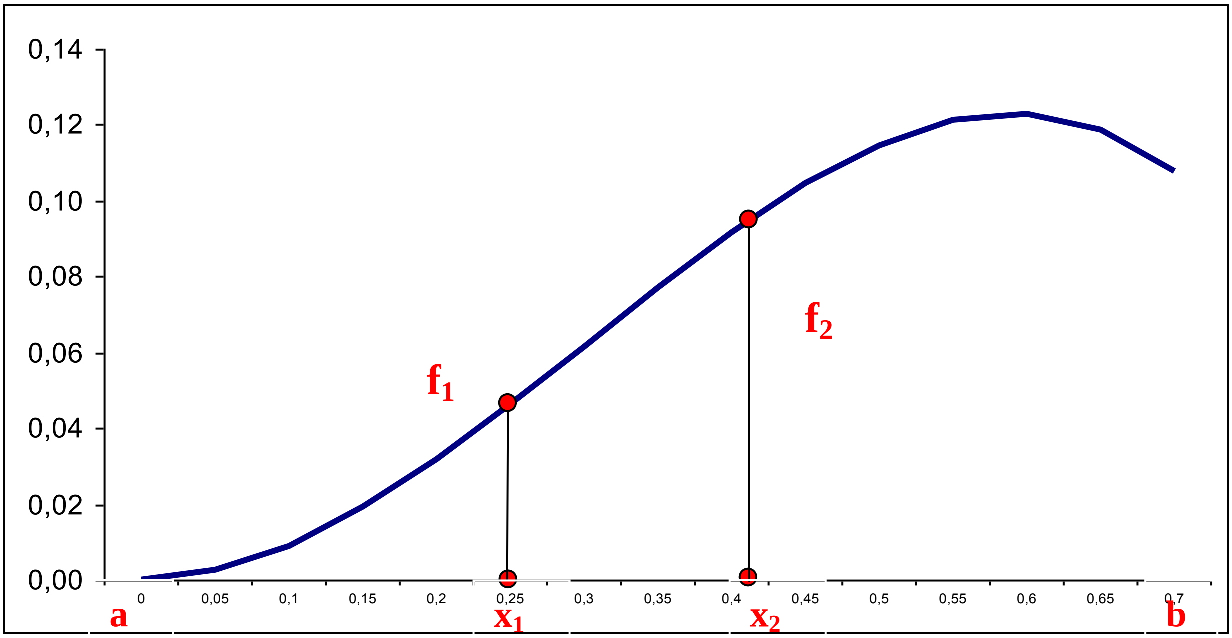
Сначала необходимо найти, на сколько интервалов надо разбить исходный интервал для достижения заданной точности.

Числа Фибоначчи: 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 …… Перебором находится наименьшее, удовлетворяющее заданной точности. Если взять 21, то h=0.7/21=0.03333>0.3, а для 34: h=0.7/34=0.0206<0.3. Исходный интервал делится на 34 равные части. Дальнейшие вычисления занесены в таблицу (с 4 цифрами после запятой). В таблице закрашены значения, перенесенные из предыдущей итерации (а не вычисляемые заново на данной итерации)

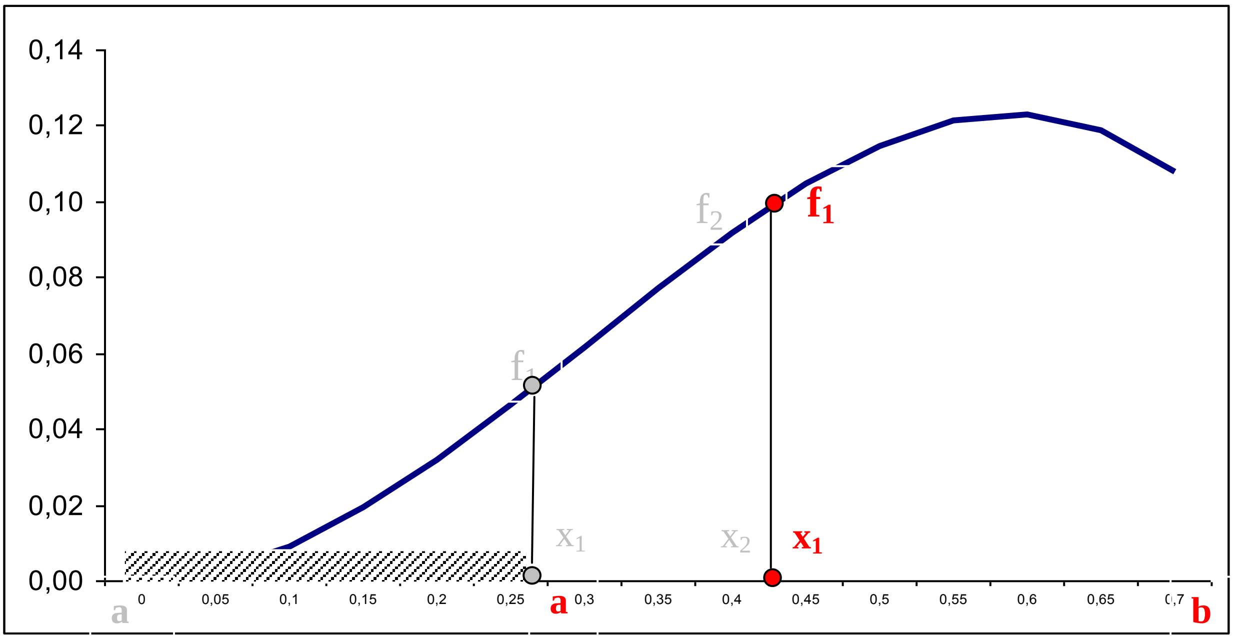
№ итерации	**a**	**b**	b-a	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_2}$	x_2-x_1	$\mathbf{f_1}$	$\mathbf{f_2}$	отбрасывается интервал
1	0.0000	0.7000	0.7000	0.2676	0.4324	0.1647	0.0516	0.1003	левый
2	0.2676	0.7000	0.4324	0.4324	0.5353	0.1029	0.1003	0.1197	левый
3	0.4324	0.7000	0.2676	0.5353	0.5971	0.0618	0.1197	0.1228	левый
4	0.5353	0.7000	0.1647	0.5971	0.6382	0.0412	0.1228	0.1203	правый
5	0.5353	0.6382	0.1029	0.5765	0.5971	0.0206	0.1226	0.1228	левый
6	0.5765	0.6382	0.0618	0.5971	0.6176	0.0206	0.1228	0.1221	правый
7	0.5765	0.6176	0.0412	Остался интервал=2h, x_1 находится как x_2-δ					
				0.5921	0.5971	0.0050	0.1229	0.1228	правый
8	0.5765	0.5971	0.0206				0.1229		
Ответ: $x^{опт}$ находится в интервале (0.5765, 0.5971) $f^{опт}$=0.1229									

Критерий окончания: на последнем шаге b-a=h<ε.

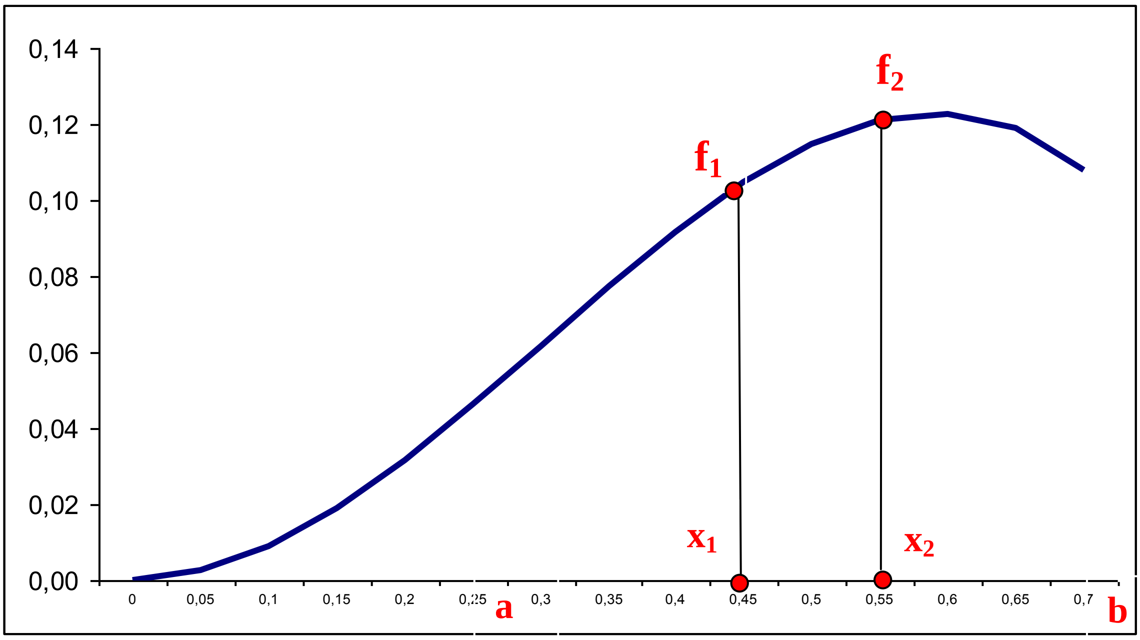
На 1-м рисунке изображена 1-ая итерация.



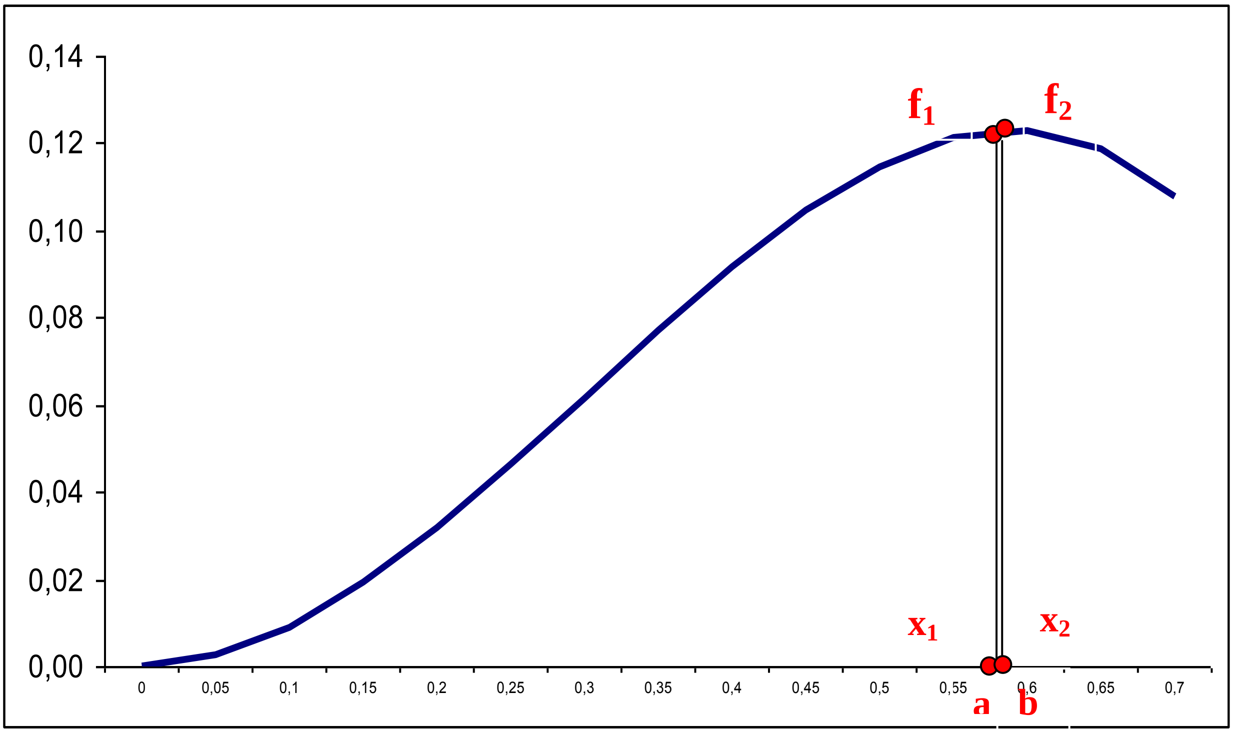
На 2-м рисунке изображен переход ко 2-й итерации.



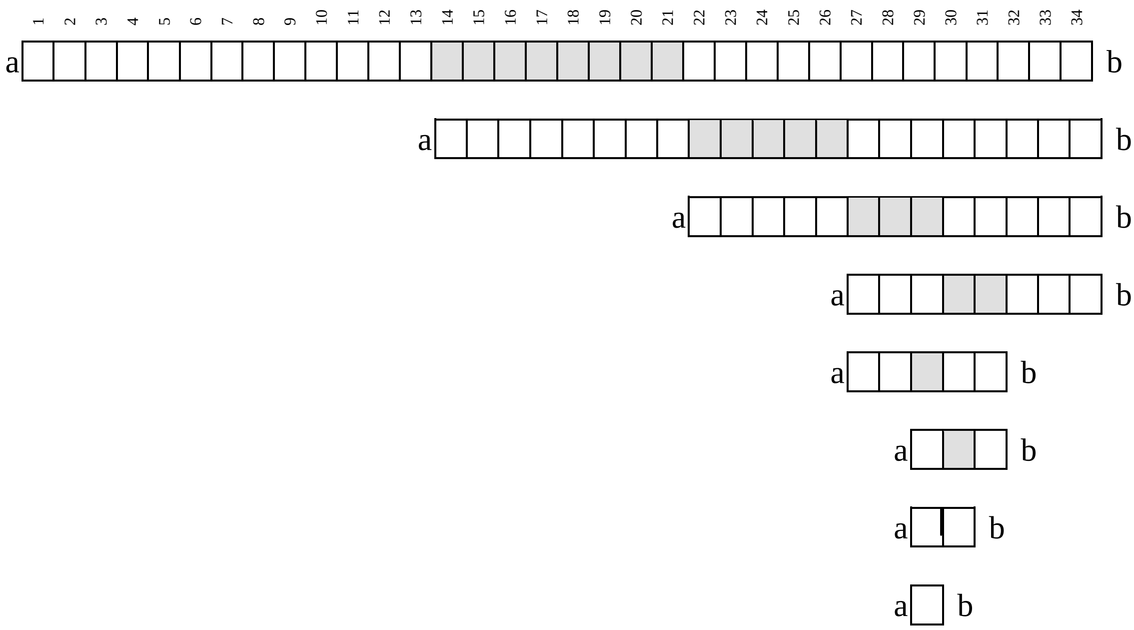
Вторая итерация:



Последняя итерация в методе Фибоначчи отличается от остальных:



Динамика изменения интервала (a,b) по итерациям изображена на следующем рисунке:



Задание.

1.Продемонстрировать метод на предложенном примере.
2.Процесс решения (функцию и все расчетные точки) изобразить графически.
3.Сформулировать критерий окончания.

Метод	Номер варианта								
Золотое сечение	1	4	7	10	13	16	19	22	25
Фибоначчи	2	5	8	11	14	17	20	23	
Дихотомии	3	6	9	12	15	18	21	24	

Вариант	Функция	Интервал поиска		Точность	Поиск
		а	в		
1	$x^2\sin(x)$	1	3	0.2	max
2	$5x^3-x^2-10x$	-2	0	0.1	max
3	x^2+10/x	1	3	0.2	min
4	x^4+x^2	-1	2	0.2	min
5	x^4+2x^2	-2	0	0.1	min
6	$x^4+2\sin(x)$	-1	1	0.1	min
7	$-x^2+2\sin(x)$	-10	-8	1	max
8	$x*\sin(x)-5x^2$	-2	1	0.15	max
9	$-x^3+x^2+x$	-0.5	0	0.03	min
10	x^3-10x^2-x	-0.2	0.2	0.02	max
11	x^3-10x^2+x	1	12	1	min
12	$x*\sin(x)+2x$	-5.5	-5	0.03	min
13	$2x*\sin(x)+x$	13	16	0.15	max
14	$2x*\cos(x)+x$	5	8	0,2	max
15	$2*\cos(2x)+x^2$	-1	0.5	0.1	max
16	$2*(x-1)*\cos(2x)$	-1	0.5	0.1	min
17	$x^3+x^2- \cos(x)$	-1	0.5	0.1	min
18	$x^4+\sin(x)$	-2	1	0.15	min
19	$x^3*\sin(x)$	6	10	0.2	max
20	$x^2+\sin(x)$	-3	1	0.2	min
21	$x^3*\sin(x)+ x^2$	-2.5	2.5	0.25	min
22	x^5-x^2	-0.5	0.5	0.05	max
23	$x^3 + x*(x-1)$	-0.8	0.8	0.1	min
24	$x^2-x/(x+1)$	0.3	0.9	0.01	min
25	$0.5x^3-10x^2-x$	-5	3	0.4	max
26	$0.5x^3-5x^2-10x$	-4	2	0.3	max
27	$-0.5x^3+5x^2-10x$	-3	3	0.3	min
28	$2x*\sin(2x+2)$	0	1.5	0.07	max
29	$2x*\cos(2x+2)$	0	2	0.1	min
30	$2x^2*\cos(2x+2)$	0	2	0.1	min

<u>Тема 7.</u> Методы поиска экстремума функции нескольких переменных без ограничений

Для поиска экстремума функции нескольких переменных существует множество вычислительных методов. Все эти методы являются итерационными, некоторые из них предполагают дифференцируемость функций. Основным недостатком всех этих методов является то, что они позволяют найти некоторый локальный оптимум, не гарантируя нахождение глобального. Для повышения эффективности методов используют такие приемы, как многократное повторение процесса решения из различных начальных точек, сочетание методов и т.д.

В данной работе предполагается решение задачи одним из методов.

Пример 1

Найти максимум функции

$f(x_1,x_2)=4x_1+6x_2-2x_1^2-2x_1x_2-2x_2^2$

методом наискорейшего подъема, взять точность по градиенту ε=0.1 и начальную точку $x^0(1,1)$.

Решение

Найдем градиент функции $\nabla f(x_1,x_2)$ в общем виде:

$\partial f/\partial x_1=4-4x_1-2x_2$

$\partial f/\partial x_2=6-2x_1-4x_2$

Первая итерация

В начальной точке $\nabla f(x_1,x_2)=(4-4*1-2*1, 6-2*1-4*1)=(-2, 0)$.

Проверяем норму градиента в точке (критерий окончания):

$//\nabla f(x_1,x_2)//=\sqrt{(-2)^2+0^2} = 2>\varepsilon$.

Следующая точка имеет вид:

$x^1=(1,1)+h*(-2,0)=(1-2h,1)$.

Находим h, при котором достигается max f(1-2h,1).

$f(1-2h,1)=4*(1-2h)+6*1-2*(1-2h)^2-2*(1-2h)*1-2*1^2=2*(1-2h)-2*(1-2h)^2+4=$

$=4h-8h^2$.

Максимум функции при h=1/4.

Тогда $x^1=(1-2h,1)=(1/2, 1)$.

Вторая итерация

Градиент в найденной точке: $\nabla f(x_1,x_2)=(4-4*1/2-2*1, 6-2*1/2-4*1)=(0, 1)$.

Проверяем норму градиента:

$//\nabla f(x_1,x_2)//=\sqrt{0^2+1^2} = 1>\varepsilon$

Следующая точка имеет вид:

$x^2=(1/2,1)+h*(0,1)=(1/2,1+h)$.

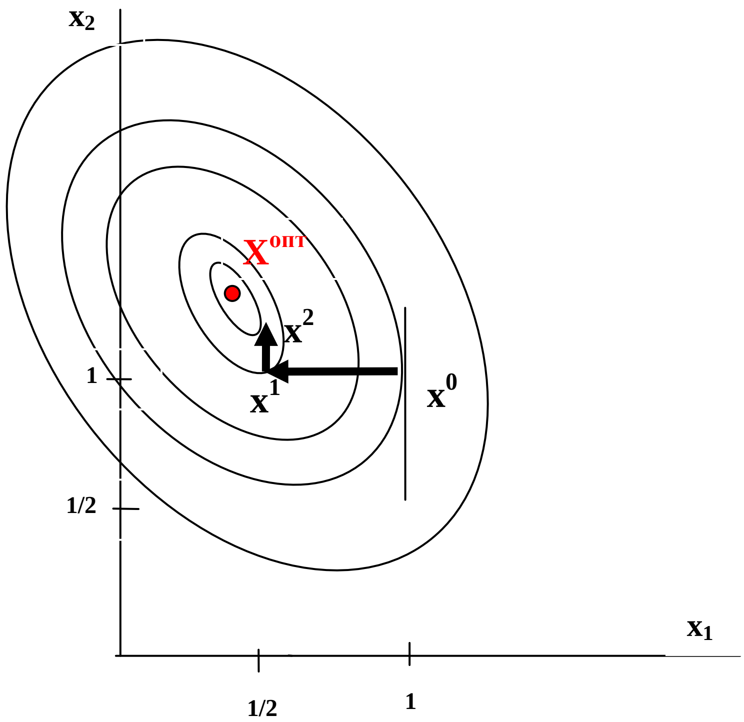
Находим h, при котором достигается max f(1/2,1+h).

$f(1/2,1+h)=....=5*(1+h)-2*(1+h)^2+3/2.$

Максимум функции при $h=1/4$.

Тогда $x^2=(1/2, 5/4)$.

Первые 2 итерации изображены на рисунке.



Третья итерация

Градиент в найденной точке: $\nabla f(x_1,x_2)=(-1/2, 0)$.

Проверяем норму градиента:

$//\nabla f(x_1,x_2)//= \sqrt{(-1/2)^2+0^2} = 1/2>\varepsilon$

Следующая точка имеет вид:

$x^3=....=((1-h)/2, 5/4)$.

Находим h, при котором достигается max f:

$f((1-h)/2, 5/4) =...=(3/4)*(1-h)-(1/2)*(1-h)^2+35/8.$

Максимум функции при $h=1/4$.

Тогда $x^3=(3/8, 5/4)$.

Четвертая итерация

Градиент в найденной точке: $\nabla f(x_1,x_2)=(0, 1/4)$.

Проверяем норму градиента:

$//\nabla f(x_1,x_2)//= \sqrt{0^2+(1/4)^2} = 1/4>\varepsilon$

Следующая точка имеет вид:

$x^4=....=(3/8, (5+h)/4)$.

Находим h, при котором достигается max f:

$f(3/8, (5+h)/4)=...=(21/16)*(5+h)-(1/8)*(5+h)^2+39/32.$

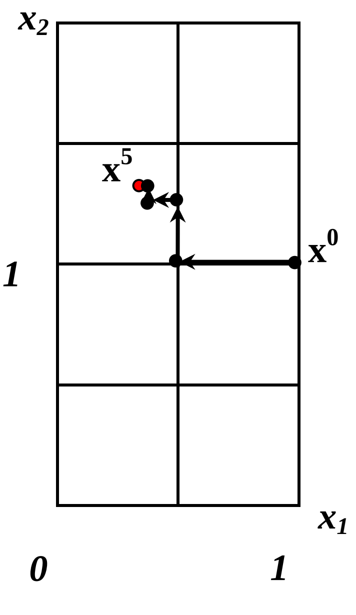
Максимум функции при $h=1/4$.

Тогда $x^4=(3/8, 21/16)$.

Пятая итерация

Градиент в найденной точке: $\nabla f(x_1,x_2)=(-1/8, 0)$.
Проверяем норму градиента:
$//\nabla f(x_1,x_2)//= \sqrt{(-1/8)^2+0^2} = 1/8=0.125>\varepsilon=0.1$
Следующая точка имеет вид:
$x^5=....=((3-h)/8, 21/16)$.
Находим h, при котором достигается max f:
$f((3-h)/8, 21/16)=...=(11/64)*(3-h)-(1/32)*(3-h)^2+567/128$.
Максимум функции при $h=1/4$.
Тогда $x^5=(11/32, 21/16)$.
Шестая итерация
Градиент в найденной точке: $\nabla f(x_1,x_2)=(0, 1/16)$.
Проверяем норму градиента:
$//\nabla f(x_1,x_2)//= \sqrt{0^2+(1/16)^2} = 1/16=0.0625<\varepsilon=0.1$
Вычисления останавливаются, сработал критерий окончания.

Ответ. $x^{опт}=(11/32, 21/16)=(0.3437, 1.3125)$, $F^{опт}=4.666$
(для сравнения: точный максимум, найденный классическим подходом
$x^{опт}=(0.3333, 1.3333)$, $F^{опт}=4.666$)



Пример 2
Найти максимум функции (та же)
$f(x_1,x_2)=4x_1+6x_2-2x_1^2-2x_1x_2-2x_2^2$
методом многогранников.

Решение
(результаты вычислений округляются до 4 цифр после запятой)

Пусть коэффициенты:
$\alpha=1$; $\beta=1.5$ (растяжение); $\gamma=0.5$ (сжатие).

Исходных точек должно быть 3, так как n=2.

Первая итерация

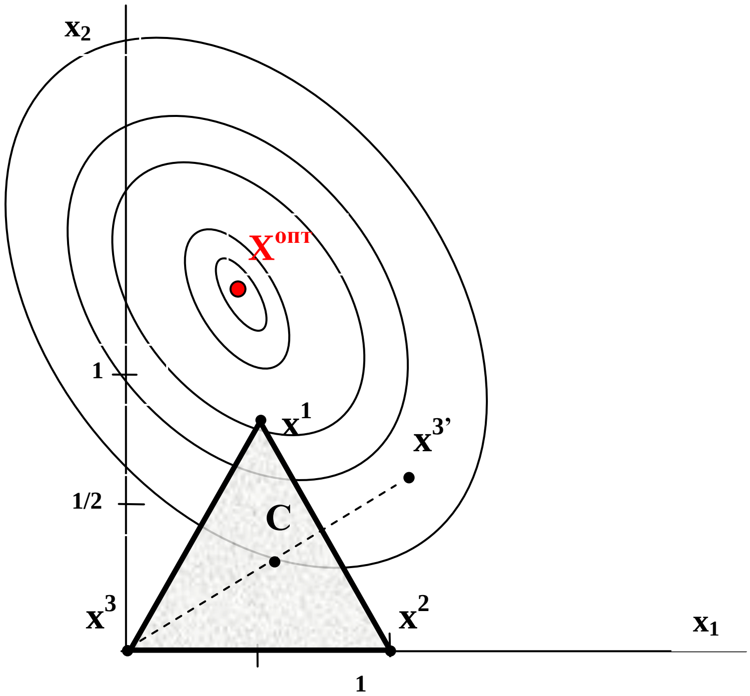
Пусть 3 исходные точки, образующие правильный треугольник:

	x_1	x_2	f
$X^{(1)}$	0.5	0.8660	4.3301
$X^{(2)}$	1	0	2
$X^{(3)}$	0	0	0
Центр тяжести	0.5	0.2887	

Точки упорядочены по убыванию функции, так как ищется максимум.. Отражением самой плохой ($X^{(3)}$)относительно центра тяжести получаем новую точку

$x^{(3)}{}_1$'=0.5+1*(0.5-0)=1; $x^{(3)}{}_2$'=0.2887+1*(0.2887-0)=0.5774;

$X^{(3)}$'=(1, 0.5774) с f=3.6427. Новое значение лучше старого, но есть и лучшая точка. Заменяем самую плохую точку на новую и упорядочиваем по функции. Результаты первой итерации изображены на рисунке.

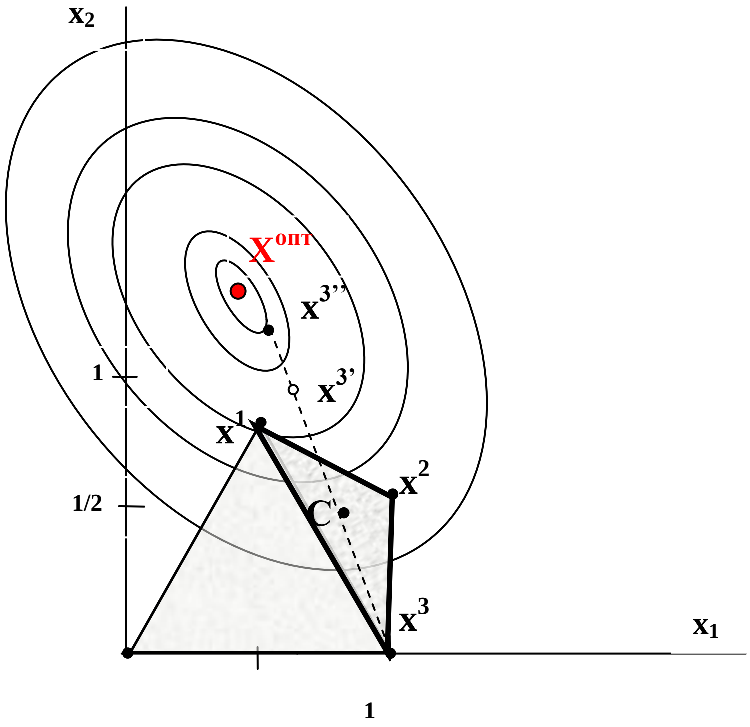


Вторая итерация

	x_1	x_2	f
$X^{(1)}$	0.5	0.8660	4.3301
$X^{(2)}$	1	0.5774	3.6427
$X^{(3)}$	1	0	2
Центр тяжести	0.8333	0.4811	

Отражением самой плохой точки ($X^{(3)}$)относительно центра тяжести получаем новую точку $x^{(3)}{}_1$'=0.8333+1*(0.8333-1)= 0.6667; $x^{(3)}{}_2$'=0.4811+1*(0.4811-0)=0.9623;

$X^{(3)}$'=(0.6667, 0.9623) с f=4.4164. Так как новая точка лучше всех по функции, то направление удачное, производится растяжение вдоль выбранного направления:
$x^{(3)}_1$''=0.8333+1.5*(0.6667-0.8333)=0.5833;
$x^{(3)}_2$''=0.4811+1.5*(0.9623-0.4811)=1.2028;
Получаем новую точку $X^{(3)}$''=(0.5833, 1.203) с f=4.5729. Растяжение успешное, точку запоминаем, получаем новую тройку точек, упорядочиваем их по функции.
Вторая итерация изображена на следующем рисунке.



Третья итерация

	x_1	x_2	f
$X^{(1)}$	0.5833	1.2028	4.5729
$X^{(2)}$	0.5	0.8660	4.3301
$X^{(3)}$	1	0.5774	3.6427
Центр тяжести	0.6944	0.8820	

Отражением самой плохой точки ($X^{(3)}$)относительно центра тяжести получаем новую точку $X^{(3)}$'=(0.3889, 1.1868) с f=4.63382. Так как новая точка лучше всех по функции, то направление удачное, производится растяжение вдоль выбранного направления. Получаем новую точку $X^{(3)}$''=(0.2361, 1.3391) с f=4.6488. Растяжение успешное, точку запоминаем, получаем новую тройку точек, упорядочиваем их по функции.

Четвертая итерация

	x_1	x_2	**f**
$X^{(1)}$	0.23611	1.3391	4.6488
$X^{(2)}$	0.5833	1.2028	4.5729
$X^{(3)}$	0.5	0.8660	4.3301
Центр тяжести	0.4398	1.1360	

Отражением самой плохой точки ($X^{(3)}$)относительно центра тяжести получаем новую точку $X^{(3)}$'=(0.3796, 1.4060) с f=4.6451. Так как новая точка лучше, но не лучше всех по функции, то точку запоминаем, получаем новую тройку точек, упорядочиваем их по функции.

Пятая итерация

	x_1	x_2	**f**
$X^{(1)}$	0.2361	1.3391	4.6488
$X^{(2)}$	0.3796	1.4060	4.6451
$X^{(3)}$	0.5833	1.2028	4.5728
Центр тяжести	0.3997	1.3159	

Отражением самой плохой точки ($X^{(3)}$)относительно центра тяжести получаем новую точку $X^{(3)}$'=(0.2160, 1.4291) с f=4.6433. Так как новая точка осталась худшей по функции, то производится сжатие вдоль выбранного направления. Получаем новую точку

$x^{(3)}_1$''=0.3997+0.5*(0.2160-0.3997)=0.3079;

$x^{(3)}_2$''=1.3159+0.5*(1.4291-1.3159)=1.3725;

$X^{(3)}$''=(0.3079, 1.3725) с f=4.6643. Сжатие успешное, точку запоминаем, получаем новую тройку точек, упорядочиваем их по функции.

Шестая итерация

	x_1	x_2	**f**
$X^{(1)}$	0.3079	1.3725	4.6643
$X^{(2)}$	0.2361	1.3391	4.6488
$X^{(3)}$	0.3796	1.4060	4.6451
Центр тяжести	0.3079	1.3725	

Отражением самой плохой точки ($X^{(3)}$)относительно центра тяжести получаем новую точку $X^{(3)}$'=(0.2361, 1.3391) с f=4.6488. Так как новая точка осталась худшей по функции, то производится сжатие вдоль выбранного направления. Получаем новую точку

$X^{(3)}$''=(0.2720, 1.3558) с f=4.6609. Сжатие успешное, точку запоминаем, получаем новую тройку точек, упорядочиваем их по функции.

Седьмая итерация

	x_1	x_2	f
$X^{(1)}$	0.3079	1.3725	4.6643
$X^{(2)}$	0.2720	1.3558	4.6609
$X^{(3)}$	0.2361	1.3391	4.6488
Центр тяжести	0.2720	1.3558	

Восьмая итерация

	x_1	x_2	f
$X^{(1)}$	0.3079	1.3725	4.6643
$X^{(2)}$	0.3079	1.3725	4.6643
$X^{(3)}$	0.2720	1.3558	4.6609
Центр тяжести	0.2720	1.3558	

Видно, что у функции определились 2 цифры после запятой. Можно остановиться.
Формально критерий окончания сработает через 1 итерацию, когда лучшая $X^{(1)}$ не изменится после 2*n=2*2=4 итераций.

Задание.

1.Найти оптимальное решение предложенным методом с точностью $\varepsilon=0.01$ (если за 5 итераций решение не будет получено, то можно прервать процесс решения).

2.Сформулировать критерий окончания вычислений по предложенному методу.

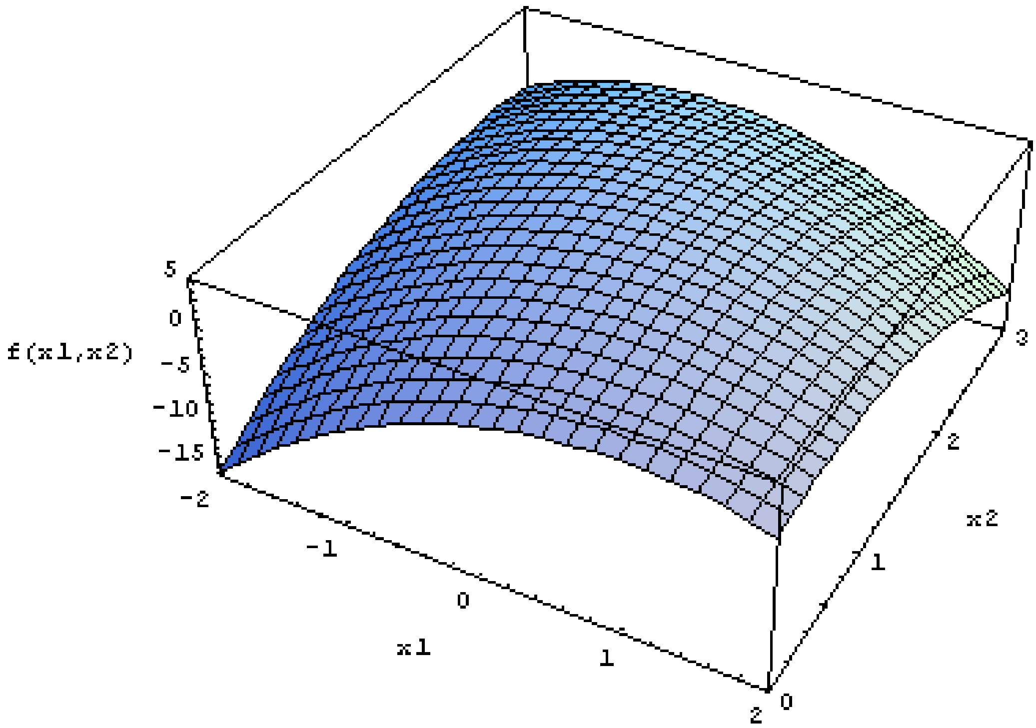
3.Изобразить графически процесс решения (если не позволит масштаб рисунка, то можно ограничиться тремя первыми итерациями).

Варианты заданий

№ варианта	Функция цели	Метод	Поиск
1	$f(x_1,x_2)=x_1^4+(x_2-5)^2$	многогранников	min
2	$f(x_1,x_2)=(x_1-3)^2+(x_2-2)^2$	случайного поиска	min
3	$f(x_1,x_2)=(x_1-3)^4+x_2^2+x_1x_2$	простейший градиентный	min
4	$f(x_1,x_2)=3x_1+2x_1x_2-x_1^2-x_2^2$	наискорейшего подъема	max
5	$f(x_1,x_2)=4x_1^4+2x_2^2+(x_1-1)x_2$	покоординатного спуска	min
6	$f(x_1,x_2)=-(2x_1-1)^2-(x_2-1)^2$	сопряженных направлений	max
7	$f(x_1,x_2)=-(x_1-7)^2-(2x_2+3)^2$	многогранников	max
8	$f(x_1,x_2)=(x_1-1)^2+10x_2^2+3x_1x_2$	простейший градиентный	min
9	$f(x_1,x_2)=x_1^2+(x_1^2+x_2-6)^2$	случайного поиска	min
10	$f(x_1,x_2)=x_1^2+2x_2^2+5x_1x_2$	наискорейшего спуска	min
11	$f(x_1,x_2)=(2x_1+1)^2(x_2+1)^2$	случайного поиска	min
12	$f(x_1,x_2)=(x_1-7)^2+(2x_2-3)^2$	сопряженных направлений	min
13	$f(x_1,x_2)=-(2x_1-1)^2-(x_2-5)^2$	многогранников	max
14	$f(x_1,x_2)=x_1^2+2x_2^2+x_1(3x_2-1)$	покоординатного спуска	min
15	$f(x_1,x_2)=(2x_1-1)(x_2-3)$	простейший градиентный	min
16	$f(x_1,x_2)=(3x_1-2)^2-2x_2^2-4x_1x_2^2$	покоординатного подъема	max
17	$f(x_1,x_2)=x_1^2+(x_2-2)^2+10x_1(x_2-2)$	наискорейшего спуска	min
18	$f(x_1,x_2)=x_1^2+2x_2^2-3x_1x_2^2$	сопряженных направлений	min
19	$f(x_1,x_2)=x_1^4+2x_2^2-(x_1+2)x_2$	наискорейшего спуска	min
20	$f(x_1,x_2)=x_1^4+x_2^2+5x_1(x_2-1)$	многогранников	min
21	$f(x_1,x_2)=-(2x_1-1)^2-(x_2-5)^2$	покоординатного подъема	max
22	$f(x_1,x_2)=x_1^2+(x_2-1)^2-2x_1$	случайного поиска	min
23	$f(x_1,x_2)=x_1^3-x_2^2+x_1x_2^2$	сопряженных направлений	min
24	$f(x_1,x_2)=-8x_1^2(x_2+3)^2-3x_2^2$	наискорейшего подъема	max
25	$f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2+(3x_1^2+1)x_2^2$	простейший градиентный	min

Приложение 1.
Приведены вид функции и линий уровня, построенные с помощью пакета "Математика".

```
Plot3D[4*x+6*y-2*x*x-2*x*y-2*y*y,
{x,-2,2},{y,0,3},AxesLabel→{"x1","x2","f(x1,x2)"}];
```




```
ContourPlot[4*x+6*y-2*x*x-2*x*y-2*y*y,{x,-2,2},
{y,0,3},FrameLabel→{"x1","x2"}]
```