Лабораторна робота № 3

ОСНОВНІ МОДЕЛІ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ

Теоретичні основи

Нелінійна динаміка вивчає поведінку нелінійних моделей у часі та просторі залежно від початкових станів і зовнішніх впливів, що задаються зазвичай в параметричній формі. У роботі розглядаються тільки детерміновані системи, для яких математична модель визначена, початкові умови й параметри відомі і не є випадковими. Серед детермінованих систем найбільш простими є точні, описувані кінцевим числом $n \geq 1$ звичайних диференціальних або різницевих рівнянь, в яких незалежною змінної є час (безперервне для диференційних та дискретне для різницевих рівнянь), а залежними змінними є стани моделі. Повне уявлення про динаміку будь-якої моделі дає дослідження всіх видів її поведінки при довільних початкових умовах і зміні керуючих параметрів в заданих діапазонах. Через наявність нелінійності якісне дослідження систем ведеться чисельно.

Завдання

Типове завдання полягає в проведенні серії обчислювальних експериментів з конкретною математичною моделлю. Окремий сеанс означає дослідження з фіксованими початковими умовами і значеннями всіх параметрів. Обчислення в кожному сеансі тривають до деякого, щодо далекого від початку ($t=0$ або $N=0$) моменту часу t_k або номера ітерації N_k. Передбачається, що до моменту часу t_k або N_k або сформується характеристична асимптотична поведінка рішення, або рішення буде дуже швидко зростати, прагнучи до $+\infty$ або до $-\infty$. У підсумковому звіті за своїм завданням студент повинен представити алгоритм обчислення станів рівноваги своєї моделі і бути готовим продемонструвати будь-який обчислювальний експеримент із заданими умовами. Для реалізації заданої моделі може бути використано будь-яке обчислювальне середовище, яке має можливість візуалізації результату.

1. МОДЕЛЬ «CHUA»

Одна з ММ радіофізичних генераторів, запропонованих та вивчених Л.Чуа зі співавторами, має вигляд:

$$Y_1' = (A_1 * (Y_2 - Y_1) - f(y_1))/A_5 \tag{3.1}$$

$$Y_2' = A_1 * (Y_1 - Y_2) + Y_3 \tag{3.2}$$

$$Y_3' = -A_2 * Y_2 \tag{3.3}$$

де $f(y) = A_3 * y + 0.5 * (A_4 - A_3)(|1 + y| - |y - 1|)$ - безперервна кусково-лінійна функція, що залежить від параметрів A_3 і A_4 (вольтамперна характеристика генератора);

Y_1 и Y_2 - напруга;

Y_3 - струм в генераторі;

A_1 A_2 и A_5 - керуючі параметри. У даній моделі (порівняйте з ММ № 12 і № 13) у певній області значень параметрів існують два типи дивних атракторів, один з яких автори ММ назвали «подвійним сувоєм».

1) Знайдіть стани рівноваги системи, і визначте їх стійкість.

2) У серії обчислювальних експериментів при A_1 = 0.7, A_2 = 7, A_3 =-0.5, A_4 =-0.8 порівняйте отримані типи динамічної поведінки (режими) із зазначеними в таблиці 3.1; завершіть заповнення таблиці.

Таблиця 3.1

A_5	0,05	0,095-0,112	0,113-0,114	0,115	0,1184	0,119	0,12	0,14	0,2
Режим	∞	ДА-2	?	ДА-1	?	?	2*ПЦ	1*ПЦ	?

Чим відрізняються дивні аттрактори ДА-1 и ДА-2? Який сценарій переходу до хаосу по параметру A_5?

3) У серії обчислювальних експериментів при A_2=7, A_3 =-0.5, A_4 =-0.8, A_5=-0.112 перевірте результати, зазначені в таблиці 3.2, і завершіть її заповнення.

Таблиця 3.2

A_1	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5-0,1
Режим	∞	?	Н.т.	?	Н.т.	?

4) У серії обчислювальних експериментів при A_1=0.7, $A_3 = -0.5$, A_4 =-0.8, A_5=-0.112 заповніть таблицю 3.3.

Таблиця 3.3

A_2	8	6	5
Режим	?	?	?

Для усіх серій обчислювальних експериментів візьміть У(0)=(0.1, 0.1, 0.1), h=0.05, $t_{кон}$ =500.

Джерело: Matsumoto T., Chua L.O., Kamuro M. The double scroll //IEEE Trans. Circuits Syst. CAS-32 (8), p. 798-818 .

2. МОДЕЛЬ «RING CAVITY»

Модель кільцевого оптичного резонатора з нелінійною поглинаючою середою, в яку надходить зовнішнє періодичне світлове поле, описується рівнянням:

$$Y' = -Y + A_1^2 * \left(1 + 2 * A_2 * Y\left(t - A_3\right) * cos\left(Y\left(t - A_3\right)\right)\right) \qquad (3.4)$$

де *Y(t)* характеризує "набіг" фази поля в поглинаючому середовище;

A_1 - параметр, пропорційний амплітуді зовнішнього поля;

A_2 - параметр, пропорційний коефіцієнту відображення дзеркал резонатора;

A_3 - час обходу резонатора (запізнення).

1) Яке рішення існує при A_3 =0 і варіації A_1 и A_2 у діапазоні від 0 до 10?

2) Дослідіть динаміку управління при

А) A_2 = 0,3 , A_3 = 3,5

Б) A_2 = 0,3 , A_3 = 2

Та варіації $A_1 \in [0.5,4]$

Побудуйте БД-3. Який сценарій переходу до хаосу?

3. МОДЕЛЬ «CHEIN-STOKES»

Модель процесу дихання Чейна-Стокса запропонували Меккі і Гласс у 1977р. Таке специфічне нерегулярне в часі дихання спостерігається в умовах важкої, життєво небезпечної патології, а також у здорових людей, що знаходяться в умовах нестачі кисню, наприклад, високо у горах. Модифікована модель (Ланда П.С. зі співавторами, 1995р.) має вигляд:

$$Y' = A_1 - (1 + cos\frac{(6.28 * t * (0.25 + A_3 * Y)) * A_2 * Y * D(Y(t - A_5))}{(A_4 + D(Y(t - A_5)))}) \qquad (3.5)$$

$$D(X) = X^{A6} \qquad (3.6)$$

де Y – парційний тиск CO_2 в крові;

значення $A_1,\ldots,A_6$ взяті з фізіологічних експериментів.

Ідентифікуйте різноманітні динамічні режими на асимптотичній стадії ($500 \le t \le 1000$) при A_1 = 0.1, A_4 = 400, A_6 = 20 для наступних наборів параметрів A_2, A_3 та A_5 :

a) A_2 = 1, A_3 = 0 и A_5= 15;

b) A_2 = 0.25, A_3 = 0 и A_5= 3;

c) A_2 = 1, A_3 = 0.00 1 и A_5= 3;

d) $A_2 = 1$, $A_3 = 0.01$ и $A_5 = 15$.

Візміть $h = 0.02$, $Y(0) = 40$.

Системи звичайних диференційних рівнянь без запізнень

4. МОДЕЛЬ «RIKITAKI – 4D»

Геофізичні дані свідчать, що останні 600 млн. років розташування магнітних полюсів Землі змінювалося хаотичним чином. Можлива причина цьому – наявність великих взаємодіючих вихорів в ядрі Землі. Для моделювання цього явища Т. Рікітакі в 1958 р. запропонував оригінальну фізичну модель - "дводискове динамо", яка описується наступною 4D-системою ЗДР:

$$Y_1' = -A_1 * Y_1 + Y_2 * Y_3 \quad (3.7)$$

$$Y_2' = -A_1 * Y_2 + Y_1 * Y_4 \quad (3.8)$$

$$Y_3' = 1 - Y_1 * Y_2 - A_2 * Y_3 \quad (3.9)$$

$$Y_4' = 1 - Y_1 * Y_2 - A_3 * Y_4 \quad (3.10)$$

де Y_1 і Y_2 - точки;

Y_3 и Y_4 - вуглові швидкості дисків;

A_1 - опір провідника;

A_3 и A_4 - коефіцієнти тертя валів, на яких закріплені диски;

A_1, A_2 и $A_3 \geq 0$.

1. Покажіть, що система є диссипативною
2. Перевірте, що стани рівноваги мають вигляд:

   $(0, 0, 1/A_2, 1/A_3)$ та

   $(\pm\sqrt{(1 - A_1 * A_2 * \sqrt{A_3/A_2}) * \sqrt{A_3/A_2}}, \pm\sqrt{(1 - A_1 * A_2 * \sqrt{A_3/A_2})/\sqrt{A_3/A_2}},$

   $A_1 * \sqrt{A_3/A_2}, A_1/\sqrt{A_3/A_2})$.

Вкажіть, за яких позитивних значеннях A_1, A_2 і A_3, вони існують. Перевірте властивість мультистабільності системи:

а) $A_1 = 1$, $A_2 = A_3 = 0$,$Y(0)$=(0.1, 0.1, 0.3, 0.3) і (0.1, 0.1, 0.3, 0.9);

б) $A_1 = 1$, $A_2 = A_3 = 0.01$, $Y(0)$= (0.1, 0.1, 0.3, 0.9) і (1, 1, 2, 2).

4. Прокоментуйте зміну атракторів при варіації $A_1 \in [0.1,\ 2.5]$ для $A_2 = 0.004$ та $A_2 = 0.002$.

5. Яка спостерігається еволюція рішень при $A_1 = 1$ і варіації $A_2 = A_3 \in [0.001, 0.005]$?

У яких випадках спостерігається перехід до хаосу? Який сценарій переходу до хаосу?

<u>Джерело</u>: Ershov S. V., Malinetski G. G., Rusmaikin A. A. A generalized twodisk dynamo model. – Geophys. Astophus. Fluid Dyn. 1989, vol.47, pp.251-277.

5. МОДЕЛЬ «ХИЖАК-ПЛОДЮЧА ЖЕРТВА»

Взаємодія хижака з плодючою жертвою описується системою:

$$Y_1` = A_1 * Y_1 * (1 + A_2 * (1 - Y_2) - Y_1(t - A_5)) / (1 + A_2) \qquad (3.11)$$

$$Y_2` = A_3 * (Y_1 - Y_2(t - A_4)) * Y_2. \qquad (3.12)$$

У цій системі Y_1 і Y_2 – щільності популяцій жертви і хижака, відповідно, A_1 - мальтузіанскій коефіцієнт лінійного росту чисельності жертви (при $A_1 >> 1$ жертва сильно плодюча), $A_2 > 0$ – коефіцієнт тиску хижака на жертву (розмір її популяції скорочується в ($A_2 + 1$) раз), A_3-коефіцієнт лінійного росту хижака, $A_4 > 0$ - час, за який відбувається зміна поколінь в популяції хижака. При $Y_2 = 0$ (немає хижака) одержуємо рівняння Хатчінсона, у якого існують періодичні рішення, але немає хаосу.

Перевірте наступні твердження:

1) Існують періодичні рішення системи при $A_1 < A_{1кр}$. При A1> $A_1 > A_{1кр.} > 1$ рішення набувають хаотичний характер, тобто є дивний атрактор

(біологічний сенс: нерегулярне зміна щільності хижака з-за сильної нестійкості його харчової бази, тобто від щільності жертви); з подальшим зростанням A_1 дивний атрактор руйнується.

2) Якщо зафіксувати параметри $A_1>1$, A_2, A_4, A_5 і варіювати A_3, то повинна спостерігатися наступна динаміка. При малих A_3 в атракторах рішень є граничний цикл. Зі зростанням A_3 наступають хаотичні коливання. З подальшим зростанням A_3 хаотичні коливання знову переходять у періодичні; можливий також атрактор - нерухома точка (0,0).

У першій серії обчислювального експерименту візьміть для визначеності $A_2 = A_5 = A_3 = 1$, $A_4 = 2$; A_1 змінюйте в діапазоні [1,10].

У другій серії ВЕ візьміть A_1=3.5, A_2=A_5=1, A_4=2; A_3 змінюйте в діапазоні [0.1,3.1]. Побудуйте БД-3 по параметру A_3.

В обох серіях обчислювального експерименту рекомендується: $t_{кон} \leq 500$, $h = 0.005$, $Y(0) = (5,1)$.

6. МОДЕЛЬ «FABRAB»

Тривимірна система з двома параметрами $A1>0$ и $A2>0$

$$Y1' = Y2*(-1+Y1^2+Y3)+ Y1*A1 \tag{3.13}$$

$$Y2' = Y1*(1- Y1^2+3 *Y3)+ Y2*A1 \tag{3.14}$$

$$Y3' = -2* Y3*(A2+ Y1* Y2) \tag{3.15}$$

описує в деякому наближенні поведінку збурень в нерівноважних дисипативних середовищах поблизу порогу нестійкості (наприклад, вітрові хвилі на воді, хвилі Толлміна-Шліхтінга в гідродинаміці, легмюровскі хвилі в плазмі). Фізичний сенс мають рішення з $Y3 \geq 0$.

1) Перевірте наступні твердження авторів моделі:

а) при $A1=A2$ $(A1<A2)$ фазовий обсяг у системи постійний в часі (зменшується у часі).

б) можливі п'ять станів рівноваги: тривіальне - $Y1 = Y2 = Y3 = 0$, існуюче за будь-яких значеннях параметрів, і дві пари нетривіальних: $\pm Y+$ и $\pm Y\_$, існуючих при

$0.75*A1<A2<=(4+3*A1^2)/(4*A1)$:

$Y1^2\pm=0.5*(1\pm(1-A1*A2*(1-\beta))^{1/2})/(1-\beta)$,

де $\beta=3*A1/(4*A2)$, $Y2\pm=-A2/Y1\pm$, $Y3\pm=1-(1-A1/A2)*Y1^2\pm$.

При $A2=(4+3*\ A1^2)/(4*A1)$ залишаються тільки два нетривіальних стани рівноваги: $\pm Y+\equiv\pm Y\_$.

При $A2=0.75*A1$ (в цьому випадку $\beta=1$) точки $\pm Y+$ йдуть у нескінченність і залишається тільки одна пара $\pm Y\_$.

Перевірте чисельно стійкість станів рівноваги.

2) При $A1$=0.87, $A2$=1 існує дивний атрактор. Треба з'ясувати, за яких початкових умов він існує. Рекомендується взяти $Y1(0)$=0.1 і варіювати $Y2(0)$ та $Y3(0)$ в квадраті $0.5\leq Y2(0)\leq 1$, $0.5\leq Y3(0)\leq 1$.

3) Переконайтеся в ході ОЕ, що ММ має різноманітну динаміку при $A2$=1, $Y(0)$=(0.1, 0.1, 0.1) і варіації біфуркаційного параметру $A1$ у діапазоні від 0 до 0.3. Рекомендується взяти h=0.01, $t_{кон}$=1000.

Який сценарій переходу до хаосу? Як поводяться послідовні екстремуми $Yi(t)$ в області хаосу?

Джерело: Рабинович М.И., Фабрикант А.Л. Стохастическая автомодуляция волн в неравновесных средах. ЖЭТФ, 1979, т.77, вып. 2(8), сс.617-629.

7. МОДЕЛЬ ЯНГА І МІЛІСА

Завдання: Система Янга і Міліса відома в теорії елементарних часток; вона описує коливання фізичних полів. Це нелінійна 4D-система ЗДР без параметрів:

$$Y_1' = Y_3 \qquad (3.16)$$

$$Y_3' = -Y_1 * Y_2\text{^}2 \qquad (3.17)$$

$$Y_2' = Y_4 \qquad (3.18)$$

$$Y_4' = -Y_2 * Y_1\text{^}2 \qquad (3.19)$$

Система має дві форми так званих нормальних коливань: синфазну і протифазну, при яких Y_2= +-Y_4, а Y_1 визначається з рівняння Y_1''= -Y_1^3. Пояснимо, що нормальні коливання нелінійних систем – це такі періодичні коливання, при яких всі змінні системи можуть бути виражені через одну з них, наприклад через першу, за допомогою алгебраїчних співвідношень, тобто $Y_i = f_i (Y_1), i=2,3,\ldots n$. У режимі нормальних коливань система веде себе подібно системі з одним ступенем свободи.

1) Визначте тип системи (з постійним або з фазовим об'ємом, що зменшується) і знайдіть стан рівноваги.

2) Що спостерігається на відрізку tє[0,1000] при $Y_1(0)=Y_2(0)$=0.5, $Y_3(0)$=2.2, $Y_4(0)$=0.9, h=0.0125?

3) Що спостерігається на відрізку tє[0,5000] при $Y_1(0)$=-0.1, $Y_2(0)=Y_3(0)= Y_4(0)$=0.1, якщо: h=0.1; h=0.05; h=0.025.

4) Порівняйте чисельні рішення на відрізку [0,5000] при $Y(0)$=(2,11,1), h=0.01 для випадків запису у правій частині Y_4' як:

а)-$Y_2 * Y_1$^2

б) -Y_1^2*(-Y_2)

Чим пояснити відмінність рішень при простій перестановці множників?

8. МОДЕЛЬ «VAN DER POL»

Модель генератора Ван дер Поля із зовнішнім гармонійним впливом має вигляд:

$$Y'' - A_1 * \left(1 - Y^2\right) * Y' + Y = A_2 * cos\left(A_3 * t\right) \text{ або } Y'_1 = Y_2 \qquad (3.20)$$

$$Y'_2 = Y_1 + A_1 * Y_2 * \left(1 - Y_1^2\right) + A_2 * cos\left(A_3 * t\right), \qquad (3.21)$$

де A_1, A_2, A_3 - параметри (характеристики генератору).

Цей генератор (точніше - мультивібратор на тунельному діоді) добре відомий фізикам як джерело незатухаючих періодичних коливань електричного струму.

Перевірте наступні твердження:

1. У відсутність гармонійного впливу (A_2=0) система має єдиний стійкий граничний цикл, причому зі збільшенням параметра A_1>0 автоколивання беруть релаксаційну форму: у деякі моменти часу струм зазнає стрибкоподібні зміни, а в проміжку між цими моментами часу струм змінюється плавно.

2. При зовнішньому впливі ($A_2 > 0$) періодичні автоколивання хаотизуються. Вивчіть динаміку системи при A_2=2,5, A_3=2,7 і зміну A_1 від 1 до 4. Як еволюціонує атрактор системи, який сценарій переходу до хаосу? Побудуйте біфуракційну діаграму.

Рекомендується: h=0,05, $t_{кон.}$=500, $Y(0)$=(0.1,0.1)

<u>Джерело</u>: Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Странный аттактор в неавтономном уравнении Ван дер Поля. //Радиотехника и электроника, 1982, т.27, с.2454-2456.

9. МОДЕЛЬ «EL NINO»

Нелінійна взаємодія атмосфери, води і пасатних вітрів в екваторіальній області Тихого океану можна описати тривимірною неавтономною системою рівнянь (порівняйте з моделлю «Vallis»), запропонованої Дж. Валліс в 1986 р.

$$Y_1^{\copyright} = A_1 * (Y_2 - Y_3) - A_2 * (Y_1 - f(t)) \qquad (3.22)$$

$$Y_2^{\copyright} = Y_1 * Y_3 - Y_2 + A_5 \qquad (3.23)$$

$$Y_3^{\copyright} = -Y_1 * Y_2 - Y_3 + A_{5,} \qquad (3.24)$$

де....... Y_1 - швидкість поверхневої течії в океані;

.... Y_2 и Y_3 - температура поверхні води, відповідно, на західній і східній окраїнах водного басейну;

$f(t) = A_3 + A_4 * sin(2\pi * t)$ - функція, що описує вплив пасатних вітрів (зовнішній вплив);

$A_1, \ldots, A_5$ - параметри системи.

1) Перевірте, що є наступні стани рівноваги при $f(t) \equiv 0$:

$$Y_1 = \pm\sqrt{2 * A_5 - A_2/A_1} * \sqrt{A_1/A_2},$$

$$Y_2 = 0.5 * A_2/A_1 * (1 + Y_1),$$

$$Y_3 = 0.5 * A_2/A_1 * (1 - Y_1);$$

2) Идентифікуйте динаміку автономної системи ($A_3 = A_4 = 0$) при A_2 =2.5, A_5=12 та $A_1 = 7$, 7.5, 9.2, 10, 11. Побудуйте біфуркаційну діаграму функції $Y_1(t)$ для $A_1 \in [6,11]$. Який сценарій переходу до хаосу?

3) Идентифікуйте динаміку неавтономної системи при A_2 =3, $A_3 = A_4 =$ 0.45, A_5 =12 та зміні A_1 от 7 до 15.

Рекомендується взяти h=0.01, $t_{\hbar}$=500, $Y(0)$=(0.2, 10, 15)

<u>Джерело</u>: Vallis G.K. A Chaotic dynamical System? //Science, 1986, v.232,pp.243-245. Gober M., Herzel H., Graf H.-F. Dimension analisys ofElNinoSouthern oscillations time series // Ann. Geophys., 1992. v. 10, p.729-734

10. МОДЕЛЬ «ГЕНЕРАТОР»

Модель генератора з інерційною нелінійністю, що є спрощенням моделі “Generator-1” ($H(x)=1$), має вигляд:

$$Y_1' = A_1 * Y_2 - Y_1 * Y_3 + A_2 * Sin(A_3 * t) \tag{3.25}$$

$$Y_2' = -Y_1 \tag{3.26}$$

$$Y_3' = A_4 * (Y_1^2 - Y_3) \tag{3.27}$$

1) Дослідіть динаміку автономного (A_2=0) генератора при A_4=0.3 $Y(0)$=(1, 2, 3) і зміну A_1 від 1 до 100. Які спостерігаються атрактори? Побудуйте біфуркаційну діаграму по параметру A_1.

2) Вивчіть динаміку моделі та еволюцію атракторів при A_1=15, A_2=1, A_4=0.5, $Y(0)$=(0.1, 0.1, 0.1) та зміни A_3 от 0 до 0.3. Спостерігається хаос? Якщо так, то який сценарій переходу до хаосу?

3) Які атрактори виникають при A_1=A_3=A_4=1, $Y(0)$=(1, 2, 3) для значень A_2=1, 0.25, 0.2?

При дослідженнях рекомендується взяти h=0.025, $t_{кон}$=500.

11. МОДЕЛЬ «AUTOGENERATOR»

Модель автогенератора з запізненням описуваного рівнянням

$$Y' = A_2 - A_1 * Y - Y^2(t - A_3) \tag{3.28}$$

1) Які рішення існують при A_1=1, A_3=0 і варіації A_2?

2) Дослідіть динаміку рівняння при

а) A_1=1, A_3=15

б) A_1 =1.5, A_3=10 і варіації A_2

ОЕ від значення A_2 = 0.5 і поступово збільшуйте A_2. Знайдіть інтервали існування стаціонарних рішень, періодичних рішень і хаосу. Як змінюється відстань між екстремумами при збільшенні A_1 (відповідно зменшуя A_3)? Який сценарій переходу до хаосу?

3) Створіть алгоритм побудови фазової траєкторії в площині [$Y(t)$, $Y(t-A_3)$].

12. МОДЕЛЬ «IKEDA – 2»

Модель систем з реверсованим зворотнім зв'язком можна описати рівнянням:

$$Y' = -A_1 \cdot Y + A_2 \cdot \pi \cdot (1 - sin(Y(t - A_3))) \tag{3.29}$$

де A_2 – біфуракційний параметр.

1) Які рішення існують при A_3=1 та варіації A_1 і A_2 у діапазоні від 0 до 10?

2) Дослідіть еволюцію рішення при A_1=1, A_3=40 та варіюванні A_2 от 0 до 1. Перевірте, що при певному значенні $A_2^{(1)}$ починаються періодичні коливання с періодом $T_0 \approx 2 * A_3$; з ростом A_2 починається перехід до хаосу та при певному $A_2^{(2)}$ рішення становиться хаотичним. Знайдіть приблизно $A_2^{(1)}$ і $A_2^{(2)}$. Який сценарій переходу до хаосу? Побудуйте БД-3. Що буде відбуватися з яким-небудь хаотичним рішенням, якщо

а) зменшити A_3 от 40 до1;

б) збільшити A_1 от 1 до 4?

Перевірте дослідження, наприклад, при A_2=0,75.

Рекомендовано: h=0.02, $Y(0)$=1.

13. МОДЕЛЬ «MACKEY-GLASS»

Модель "Mackey-Glass" описує процес кровотворення (гемопоез): перетворення в кістковому мозку зародкових клітин в еритроцити під впливом спеціальної речовини (еритропоетину), коли вміст кисню в крові опускається нижче деякого критичного рівня. Гемопоез описується рівнянням:

$$Y` = -A_1*Y+A_2*Y(t-A_3)/(1+y(t-A_3)^{A4}) \qquad (3.30)$$

де Y – число клітин в момент t;

другий добуток в правій частині - функція виробництва еритроцитів;

A_1 – постійна смертність клітин;

A_2, A_3 и A_4 – позитивні константи, підбираються експериментальним шляхом.

З медичних даних відомо, що у хворих на хронічну лейкемію число клітин Y змінюється з часом хаотично.

1) Перевірити, що при $A_2 > A_1 > 0$ єдиним стаціонарним рішенням є $Y^*=(A_2/ A_1-1)^{1/A4}$.

2) Дослідити модель при $A_1 = 0.1$, $A_2 = 0.2$, $A_4 = 10$, вважаючи біфуркаційним параметром. Показати, що:

а) при $0 < A_3 < A_3^{(1)} = 4.7$ точка Y^* стійка;

б) при $A_3^{(1)} < A_3 < A_3^{(2)} = 13$ існує періодичне рішення з періодом $T=3 * A_3$;

в) при $A_3 > A_3^{(2)}$ починається каскад біфуркацій подвоєння періоду коливань, після чого при $A_3^{(3)} = 17$ починається хаос; достатньо аналізувати рішення до $A_3 = 30$.

Рекомендовано: h=0.015, $t_{кінц}$ <=1000, $Y(0)$=Y*+0.01.

14. МОДЕЛЬ «VALLIS»

У 1986 р. Дж. Валліс запропонував просту модель для пояснення незвичайного природного явища «Південні коливання Ель-Ніньо», що виникає близько екватора в східній частині Тихого океану через сильне нагрівання водної маси і дії пасатніх вітрів. Час від часу спостерігаються помітні аномалії в розподілі температур у західних та східних частинах при екваторіальній області океану, що сильно впливає на глобальний клімат Землі.

Якщо не враховувати вплив Пассат, то дане явище можна описати наступною системою рівнянь:

$$Y_1' = A_1 * Y_2 - A_2 * Y_1 \tag{3.31}$$

$$Y_2' = Y_1 * Y_3 - Y_2 \tag{3.32}$$

$$Y_3' = 1 - Y_1 * Y_2 - Y_3 \tag{3.33}$$

де Y_1 – швидкість руху води на поверхні океану;

T_w и T_c – температура води на західному і східному краї океану відповідно;

A_1 і A_2 – параметри.

$$Y_2 = (Tw - Tc)/2 \tag{3.34}$$

$$Y_3=(Tw+Tc)/2 \qquad (3.35)$$

Ця модель за структурою рівнянь схожа на відому і добре вивчену математиками модель Е. Лоренца, що описує явище теплової конвенції, але містить на один лінійний член більше. Можна очікувати подібності в поведінці даної моделі і моделі Лоренца.

1. Перевірте, що, крім очевидного стану рівноваги Y=(0,0,1) існує ще пара станів рівноваги:

$$Y = (\pm\sqrt{A_1(1 - A_2/A_1)/A_2},\ \pm \sqrt{A_2(1 - A_2/A_1)/A_1},\ A_2/A_1) \qquad (3.36)$$

2. Перевірте, що при A_1=102 и A_2=3 існує хаотичний режим.

3. Визначте області періодичної хаотичної поведінки ММ при A_2=3, варіюючи A_1 в наступних діапазонах: а) [190, 310]; б)[50,62]. Для цього побудуйте дві БД-3 для $Y_1(t)$ на інтервалі $t\in$[200,400]. Який сценарій переходу до хаосу?

Рекомендовано: h=0.02, $Y(0)$=(1,0,1).

<u>Джерело:</u> Vallis J. K. Conceptual models of El Nino / Southern oscillations // J. Geophys. Res. 1988, v. 93, pp. 13979-13991.

15. НЕАВТОНОМНА МОДЕЛЬ

Неавтономна модель вивчення чисельно описує виникнення хвороби серця - аритмічні його скорочення. Можлива причина - хаотизація рішення при періодичному впливі на нелінійний осциллятор.

Рівняння моделі мають вигляд:

$$Y_1' = Y_3 \qquad (3.37)$$

$$Y_2' = -A_1 \cdot Y_2 \cdot (3 \cdot Y_1^2 + Y_2^2)/8 + A_4 \qquad (3.38)$$

$$Y_3' = A_3 \cdot cos(t) - A_2 \cdot Y_1 - Y_1 \cdot (3 \cdot Y_2^2 + Y_1^2)/8 \qquad (3.39)$$

Модель цікава тим, що в ній вперше спостерігалися біфуркації подвоєння більшого періоду тора T^2.

1) Знайдіть стани рівноваги системи при $A_3 = A_4 = 0$ та визначте їх стійкість.

2) При $A_1 = A_2$=0.5, A_4=0.003 і $Y(0)$=(0.1, 0.1, 0.1) ідентифікуйте тип рішення на асимптотичної стадії для A_3 =0.05, 1, 5, 10, 50, 100, 1000.

Побудуйте БД-3 по параметру A_3

Рекомендується: *h*=0.01, $t_{кон}$ =1000

16. МОДЕЛЬ «HENON-HEILES»

Моделювання руху зірки в середньому полі галактики призводить до гамільтонової системи

$$x'' = -x(1+2y), \quad y'' = (y + x^2 - y^2) \tag{3.40}$$

с гамільтоніаном

$$h = ((x')^2 + (y')^2 + x^2 + y^2)/2 + xy^2 - y^3/3 \tag{3.41}$$

Система консервативна *H=E=const* (зберігання енергії E).
Введення нових змінних

$$y_1 = x; \quad y_2 = x'; \quad y_3 = y; \quad y_4 = y'$$

призведе до еквівалентної 4D-системі першого порядку

$$y'_1 = y_2; \quad y'_2 = -y_1(1+2y_3); \quad y'_3 = y_4; \quad y'_4 = -(y_1^2 + y_3 - y_3^2) \tag{3.42}$$

$$E = (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2)(2 - y_3^2(y_1 - y_3)2) \tag{3.43}$$

Динаміка системи залежить від величини кінцевої енергії E_0. Без обмеження спільності можна покласти $y_2(0) = y_3(0) = y_4(0) = 0,$ тоді

$$y_1(0) = \sqrt{2E_0} \tag{3.44}$$

При якому значенні E_0 рішення стає необмеженим? У ході ОЕ спостерігайте графіки $Y_i(t), EXTR(y_i(t))$, 3D-проекції.

2. Побудуйте область обмежених рішень $[-1 \le y_1 \le 1, -0.8 \le y_3 \le 1.2]$ з h=0.1, M=100, $t_{конст.}$=200.

17. *МОДЕЛЬ «VRML-88»*

Модель описує взаємодію трьох видів - жертви і двох хижаків:

$$Y_1' = Y_1 * (1 - Y_2 + (A_1 - A_2 * Y_3) * Y_1) \tag{3.45}$$

$$Y_2' = Y_2 * (Y_1 - 1) \tag{3.46}$$

$$Y_3' = Y_3 * (-A_3 + A_2 * Y_1^2) \tag{3.47}$$

Змінна Y_1 - чисельність жертви, змінні Y_2 і Y_3 - чисельності хижаків, A_1, A_2 і A_3 - параметри. Це модифікована модель Лотки-Вольтерри. У ній передбачається (на відміну від класичної моделі), що швидкість росту чисельності жертви збільшується при збільшенні самої цієї чисельності, тобто замість конкуренції має місце "взаємодопомога", що робить можливим самозбудження системи. Параметри A_1, A_2 і A_3 і змінні Y_1, Y_2 и Y_3, за біологічним змістом не можуть бути менше нуля.

Автори моделі виявили цікаве динамічне поведінку рішень, в тому числі хаотичне (останнє відсутнє у класичній моделі).

1. Знайдіть два нетривіальних стани рівноваги (крім (0,0,0), яке є нестійким вузлом). Перевірте, що нетривіальні стани рівноваги стійкі при одному з них коливально нестійке, а інше - аперіодично нестійке.

$0 < A_3 < A_2 \qquad A_3 > A_2 > 0$

2. Ідентифікуйте асимптотичні режими при $Y(0)$=(1, 0.5, 0.5), h=0.01, $t_{конст.}$=2000 для наступних наборів значень параметрів:

Таблиця 3.4

A_1	1.0	0.5	1.0	1.0	1.0
A_2	0.5	1.0	0.5	1.0	1.0
A_3	0.5	1.5	1.1	1.1	1.05