Лабораторна робота № 2

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ У ФАЗОВІЙ ПЛОЩИНІ

Теоретичні основи

Автономні системи звичайних диференційних рівнянь і їхні фазові портрети

Розглянемо систему ДР

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,y); \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x,y). \end{cases} \tag{2.1}$$

де $f(x,y)$ и $g(x,y)$ - нелінійні функції, не залежні явно від t.

Визначення 1. Система ЗДР називається автономною, якщо в неї не входить незалежна змінна (час) t. Це означає, що закон зміни невідомих функцій, описуваний системою рівнянь, що не змінюється з часом.

Визначення 2. Точками рівноваги системи ДР називаються точки, в яких:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0 \tag{2.2}$$

Таким чином, щоб знайти точки рівноваги, потрібно вирішити систему нелінійних алгебраїчних рівнянь.

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Ще одним методом аналізу є графічний метод в фазовій площині. Кожному рішенню

$$x = \varphi(t) \text{ і } y = \psi(t) \tag{2.4}$$

системи (2.1) ставиться у відповідність деяка крива (траєкторія). Сімейство всіх фазових траєкторій системи рівнянь називається її фазовим портретом. Рівняння траєкторії є рішенням ДР I-го порядку.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g\,(x,y)}{f\,(x,y)} \tag{2.5}$$

Рівняння (2.5) визначає поле напрямків, яке можна отримати, використовуючи стандартні пакети.

Лінійні системи з постійними коефіцієнтами на площині

Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = ax_1 + bx_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = cx_1 + dx_2 \end{cases} \tag{2.6}$$

У векторній формі рівняння (2.6) записується:

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = A\overline{X} \tag{2.7}$$

де $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ - діюча матриця

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Вектор $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ є становищем рівноваги системи.

Його знаходимо, вирішуючи рівняння $A{*}x = 0$.

У цьому випадку система має єдину точку рівноваги на початку координат. Класифікація точок рівноваги системи (2.6) залежить від власних значень матриці A, які можуть бути отримані при вирішенні рівняння.

$det\,(A\text{-}\lambda\, I)=0$ або

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2.8}$$

Це рівняння називається характеристичним. Обчислюючи визначник, отримуємо:

$$\lambda^2 - (a + d)\,\lambda + ad - bc = 0 \qquad (2.9)$$

де $(a + d)$ – слід матриці (track); tr (A)

$ad - bc = det\,(A)$

Характеристичне рівняння (2.9) можна записати у вигляді:

$$\lambda^2 - tr\,(A)*\lambda + det\,(A) = 0 \qquad (2.10)$$

Рівняння (2.10) має три різних типи коренів у залежності від дискримінанту:

$$[tr\,(A)]^2 - 4det\,(A) \qquad (2.11)$$

Отримана парабола ділить площі на області, які відповідають різним типам точок рівноваги. Кожна точка цій площині відповідає певній парі власних значень матриці A і тому певного типу фазового портрету.

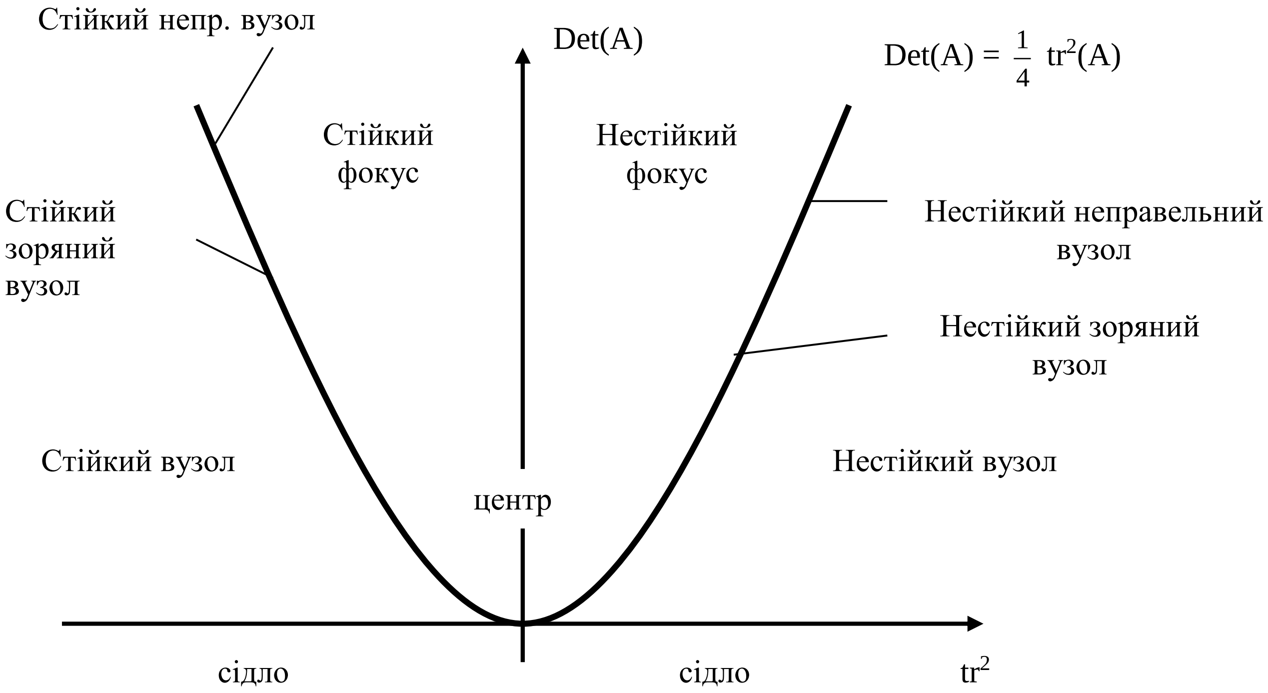

Рисунок 2.1 Фазовий портрет

На діаграмі неможливо розрізнити два типи точок рівноваги: неправильний вузол і зоряний вузол. Вони можуть бути визначені за коефіцієнтами матриці *A*. Точка рівноваги є зоряним вузлом в тому випадку, якщо матриця діагональна.

Якщо власні значення матриці A різні і відмінні від 0, то довільне рішення системи (2.7) записується у вигляді:

$$X = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot v_1 + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \qquad (2.12)$$

де v_1 и v_2 - лінійно незалежні власні вектори матриці *A*;

λ_1 и λ_2 - власні значення системи;

c_1 и c_2 – дійсні константи.

Власний вектор $A\overline{y} = \lambda\overline{y}$.

Якщо матриця A має єдине власне значення X, то рішення системи має вигляд:

$$X = \begin{pmatrix} c_{11} + c_{12}t \\ c_{21} + c_{22}t \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda \cdot t} \qquad (2.13)$$

Завдання

1. Впорядкувати точки рівноваги в наступних динамічних системах.
2. Отримати фазові портрети заданих систем.
3. Визначити тип стійкості.
4. Знайти розв'язання системи

1) $\dfrac{\partial x}{\partial t} = x - 3 \cdot y;$ $\qquad \dfrac{\partial y}{\partial t} = 2 \cdot x - 4 \cdot y;$

2) $\dfrac{\partial x}{\partial t} = 2 \cdot x;$ $\qquad \dfrac{\partial y}{\partial t} = 2 \cdot y;$

3) $\dfrac{\partial x}{\partial t} = -y;$ $\qquad \dfrac{\partial y}{\partial t} = x - 2 \cdot y;$

4) $\dfrac{\partial x}{\partial t} = 3 \cdot x - y;$ $\qquad \dfrac{\partial y}{\partial t} = x + y;$

5) $\frac{\partial x}{\partial t} = 3 \cdot x - 5 \cdot y;$ $\frac{\partial y}{\partial t} = 2 \cdot x - 3 \cdot y;$

6) $\frac{\partial x}{\partial t} = 4 \cdot x - 5 \cdot y;$ $\frac{\partial y}{\partial t} = 2 \cdot x - 2 \cdot y;$

7) $\frac{\partial x}{\partial t} = -10 \cdot x - 14 \cdot y;$ $\frac{\partial y}{\partial t} = -7 \cdot x + 11 \cdot y;$

8) $\frac{\partial x}{\partial t} = -5 \cdot x - 3 \cdot y;$ $\frac{\partial y}{\partial t} = 6 \cdot x + 4 \cdot y;$

9) $\frac{\partial x}{\partial t} = x + y;$ $\frac{\partial y}{\partial t} = -x + y;$

10) $\frac{\partial x}{\partial t} = y;$ $\frac{\partial y}{\partial t} = -x;$

11) $\frac{\partial x}{\partial t} = 3 \cdot x + y;$ $\frac{\partial y}{\partial t} = 4 \cdot x + y;$

12) $\frac{\partial x}{\partial t} = x - 3 \cdot y;$ $\frac{\partial y}{\partial t} = -3 \cdot x + y;$

13) $\frac{\partial x}{\partial t} = -2 \cdot x - 2 \cdot y;$ $\frac{\partial y}{\partial t} = -x - 3 \cdot y;$

14) $\frac{\partial x}{\partial t} = 3 \cdot x - 2 \cdot y;$ $\frac{\partial y}{\partial t} = x$

15) $\frac{\partial x}{\partial t} = -x;$ $\frac{\partial y}{\partial t} = 2 \cdot x + y;$

16) $\frac{\partial x}{\partial t} = 11 \cdot x - 3 \cdot y;$ $\frac{\partial y}{\partial t} = -3 \cdot x + 11 \cdot y;$

17) $\frac{\partial x}{\partial t} = 4 \cdot x + 10 \cdot y;$ $\frac{\partial y}{\partial t} = 5 \cdot x - y;$

18) $\frac{\partial x}{\partial t} = 4 \cdot x - 2 \cdot y;$ $\frac{\partial y}{\partial t} = -x + 5 \cdot y;$

19) $\frac{\partial x}{\partial t} = -5 \cdot x + 5 \cdot y;$ $\frac{\partial y}{\partial t} = -2 \cdot x + y;$

20) $\frac{\partial x}{\partial t} = -7 \cdot x + 10 \cdot y;$ $\frac{\partial y}{\partial t} = -5 \cdot x + 7 \cdot y;$

21) $\frac{\partial x}{\partial t} = -3 \cdot x - y;$ $\frac{\partial y}{\partial t} = x - 5 \cdot y;$

22) $\frac{\partial x}{\partial t} = x + 2 \cdot y;$ $\frac{\partial y}{\partial t} = -x + 3 \cdot y;$

23) $\frac{\partial x}{\partial t} = 3 \cdot x - y;$ $\frac{\partial y}{\partial t} = 2x + y;$

24) $\frac{\partial x}{\partial t} = 4 \cdot x - 2 \cdot y;$ $\frac{\partial y}{\partial t} = -2 \cdot x + y;$

25) $\frac{\partial x}{\partial t} = x - y + 1;$ $\frac{\partial y}{\partial t} = -x + 2 \cdot y - 3;$

26) $\frac{\partial x}{\partial t} = x + y - 1;$ $\frac{\partial y}{\partial t} = -2 \cdot x - 2 \cdot y + 3;$

27) $\frac{\partial x}{\partial t} = 2 \cdot x - 2;$ $\frac{\partial y}{\partial t} = x + y - 1;$

28) $\frac{\partial x}{\partial t} = x - 3 \cdot y + 1;$ $\frac{\partial y}{\partial t} = 2 \cdot y + 2;$

29) $\frac{\partial x}{\partial t} = x + y - 5;$ $\frac{\partial y}{\partial t} = 6 \cdot x + 4 \cdot y;$

30) $\frac{\partial x}{\partial t} = 2 \cdot x + 2 \cdot y - 2;$ $\frac{\partial y}{\partial t} = 3 \cdot x + y - 1;$