

Л. Б. Ряшко

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА
В ПРИЛОЖЕНИИ
К БИОЛОГИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ.
БИФУРКАЦИИ И ХАОС

Екатеринбург

2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
-----------------------	----------

Глава 1. ДИСКРЕТНЫЕ

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Простая модель — сложная динамика	15
---	-----------

§ 2. Анализ одномерной системы	19
---	-----------

2.1. Основные понятия (19).

2.2. Отыскание точек покоя и циклов (20).

2.3. Устойчивость инвариантных подмножеств (21).

Упражнения (25).

§ 3. Модели динамики популяции	26
---	-----------

3.1. Линейная модель (27).

3.2. Линейная модель с притоком (30).

3.3. Линейная модель с оттоком (32).

3.4. Модель с регулируемым оттоком (33).

3.5. Нелинейная модель (37).

Упражнения (39).

§ 4. Поведение нелинейной системы	
--	--

$x_{t+1} = \mu x_t(1 - x_t)$ 40

4.1. Случай $0 < \mu \leq 1$ (40).

4.2. Случай $1 < \mu \leq 3$ (41).

4.3. Случай $3 < \mu$. Бифуркация рождения цикла (41).

4.4. Каскады бифуркаций, удвоения периода и переход к хаосу (47).

Упражнения (54).

§ 5. Хаотическое поведение системы	55
5.1. Поведение критических значений параметра (55).	
5.2. Показатель Ляпунова (58).	
Упражнения (61).	
§ 6. Универсальность в поведении систем	62
6.1. Определение константы α (62).	
6.2. Универсальность констант (63).	
6.3. Класс функций, порождающий бифуркацию удвоения (66).	
Упражнения (68).	

Глава 2. НЕПРЕРЫВНЫЕ

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

§ 7. Модели динамических процессов	69
7.1. Одномерная модель динамики популяции (69).	
7.2. Модель «хищник – жертва» (72).	
7.3. Линейный осциллятор (75).	
7.4. Электронный осциллятор. Уравнение Ван-дер-Поля (77).	
7.5. Химический осциллятор (брюсселятор) (78).	
7.6. Гликолитический осциллятор (модель Хиггинса) (80).	
7.7. Модель осцилляторной активности нейрона (82).	
7.8. Хаотический осциллятор. Модель Лоренца (83).	
7.9. Модель Ресслера (84).	
§ 8. Фазовый портрет системы дифференциальных уравнений и его свойства	87
8.1. Основные понятия (87).	
8.2. Фазовые портреты линейных систем (91).	
8.3. Численные методы решения дифференциальных уравнений (95).	
Упражнения (99).	

§ 9. Анализ нелинейной системы в окрестности точки покоя	102
9.1. Система первого приближения (102).	
9.2. Устойчивость точки покоя (104).	
9.3. Примеры (106).	
Упражнения (110).	
§ 10. Анализ системы в окрестности цикла	111
10.1. Основные понятия. Система первого приближения (111).	
10.2. Линейные системы с периодическими коэффициентами. Элементы теории Флоке (114).	
10.3. Экспоненциальная устойчивость цикла (117).	
Упражнения (119).	
§ 11. Бифуркации	120
11.1. Структурная устойчивость и бифуркации (120).	
11.2. Бифуркация рождения цикла (123).	
11.3. Порядок и хаос в модели Лоренца (138).	
Упражнения (147).	
Список литературы	148

ВВЕДЕНИЕ

Современное состояние биологии характеризуется огромными объемами материалов наблюдений и экспериментов, осмысление которых и выявление соответствующих закономерностей невозможно без привлечения современных информационных технологий, использующих эффективные математические методы обработки данных и моделирования биологических систем и процессов. Прогресс человечества в 21-м веке будет неразрывно связан с биологией и информатикой. Ответы на многие глобальные вопросы, стоящие перед современной цивилизацией, требуют не столько продвижения этих наук, как самостоятельных дисциплин, сколько развития их взаимодействия и последующего использования их достижений в новых междисциплинарных областях. В ответ на эту острую потребность наряду с уже существующими объединенными научными направлениями такими, как биофизика, биохимия, экология, возникает новое научное направление - математическая биология и биоинформатика.

Научное направление ориентировано на решение задачи изучения биологических объектов методами математики и информатики. Особенно стремительный прогресс информационных технологий наблюдается в последние десятилетия 20-го века, хронологически совпадая с революцией в биологии. К числу наиболее важных достижений информатики относятся:

- персональные компьютеры высокой производительности, обеспечившие массовое распространение информационных технологий во всех областях знаний, в том числе в биологии;

- сверхмощные вычислительные системы (суперкомпьютеры и сверхбольшие вычислительные кластеры);

- сверхъемкие носители информации, обеспечивающие накопление и сохранение огромных объемов данных;

мировая сеть Интернет, обеспечившая доступ к глобальным распределенным информационным и программным ресурсам;

огромное разнообразие универсальных и специализированных языков программирования;

технологии моделирования динамики сложных систем, демонстрирующих большое разнообразие режимов функционирования.

В связи с этим появилась возможность решения новых задач, которые возникают при описании сложных биологических объектов. К числу таких относятся разработка и анализ математических моделей, задаваемых системами нелинейных уравнений больших размерностей, компьютерное моделирование динамических процессов, моделирование регулярных и стохастических процессов, компьютерная визуализация сложных пространственных объектов, имеющих сложную фрактальную структуру. Особенности решаемых задач являются необходимостью работы с большими объемами данных, большие времена компьютерных расчетов и особые требования к используемым численным методам.

Для реализации нового научного направления необходимо объединение усилий биологов, математиков и специалистов в области компьютерных технологий.

В списке основных тем математического моделирования биологических систем можно выделить следующие направления:

- 1) Создание моделей.
- 2) Иерархии моделей от субмолекулярного до надпопуляционного уровня.
- 3) Качественное и количественное исследование моделей.

Здесь можно отметить ряд актуальных задач.

Структурно-функциональная организация биологических макромолекул

Классическая и квантовая динамика процессов внутримолекулярных и межмолекулярных взаимодействий макромолекул и их комплексов.

Процессы переноса заряда, вещества и энергии в молекулярно-биологических системах

Химическая и биологическая кинетика. Модели кинетики стационарных и нестационарных процессов. Моделирование кинетики цепей ферментативных реакций. Математические модели кинетики роста популяций. Периодические процессы в биологии. Качественная теория систем биохимических реакций.

Биологические мембраны

Моделирование структуры и основных мембранных процессов. Моделирование проницаемости и возбудимости клеточных мембран. Биология клетки. Создание математических моделей функционирования органелл и клетки в целом. Модели внутриклеточной и межклеточной передачи сигналов. Математическое моделирование регуляции функционирования клетки.

Математическая физиология

Моделирование тканей, органов, и систем организма в норме и патологии. Моделирование иммунной, эндокринной системы, сердечно-сосудистой системы, мышечной системы, системы свертывания крови и других систем тканей и органов. Моделирование патофизиологических процессов: повреждения, регенерации и старения тканей, органов и систем. Моделирование инфекционных заболеваний. Нейросетевые модели обработки информации в структурах мозга.

Биология развития и старения

Моделирование систем контроля онтогенеза. Моделирование процессов деления и роста клеток, дифференциации тканей и морфогенеза особи. Моделирование процессов физиологической адаптации и

старения организма.

Математическая генетика

Моделирование пространственной, временной и функциональной организации генетических систем. Теория внутрипопуляционной селекции. Моделирование генетического полиморфизма.

Эволюция

Математические модели эволюционной генетики. Исследования общих закономерностей макроэволюционного процесса. Эволюционные модели биоразнообразия. Популяционная биология. Моделирование динамики численности и структуры популяций с учетом различных биологических механизмов взаимодействия популяций (отношения типа хищник-жертва, конкуренция, действие лимитирующих факторов, стимуляторов и др.). Модели взаимодействия популяций через сигнальные системы.

Моделирование экосистем

Модели региональных и локальных экосистем. Геоинформационные системы. Модели глобального развития. Модели массопереноса в природных средах. Математические модели экосистем как основа экологического прогноза. Эколого-экономические модели. Математическое моделирование процессов в различных компонентах экосистем. Математическое моделирование искусственных экосистем. Модели взаимодействия экосистем. Модели круговорота веществ. Модели замкнутых экосистем. Теория подобия экосистем.

Вычислительная экология

Проблемы окружающей среды и природных ресурсов. Интегрированные оценки взаимосвязи биосферы и климата. Экология вирусов: моделирование межпопуляционных взаимодействий в системе вирусы-переносчики-потенциальные хозяева в различных экологических нишах. Математические модели эпидемического процесса. Задачи про-

гноза и управления эпидемическим процессом.

Системная биология

Общие проблемы моделирования сложных систем. Качественная теория поведения биологических систем во времени. Теория редукции сложности математических моделей. Общесистемные проблемы математического моделирования популяций, сообществ, биоценозов. Модели пространственной синхронизации. Автоколебания. Диссипативные структуры. Самоорганизация и саморегуляция живых систем.

Функционирование целостной биологической системы есть результат взаимодействия во времени и пространстве составляющих ее элементов. Выяснение механизмов регуляции такой системы представляет собой задачу, которая может быть решена лишь с применением правильно выбранных математических моделей и методов.

Кинетика биологических процессов изучает поведение во времени процессов самой разной природы, присущих различным уровням организации живой материи: биохимические превращения в клетке, генерацию электрического потенциала на биологических мембранах, биологические ритмы, процессы накопления биомассы или размножения вида, взаимодействия популяций живых организмов в биоценозах.

Базовыми математическими моделями кинетики биологических процессов являются динамические системы, задаваемые дискретными (разностными) или дифференциальными уравнениями. Связи между элементами биологических систем, как правило, существенно нелинейны, что приводит к появлению разного рода нелинейностей в соответствующих математических моделях.

Анализ нелинейных динамических моделей связан с преодолением следующих проблем.

Во-первых, нелинейные системы отличаются от линейных наличием несравненно большего разнообразия возможных режимов функциони-

рования.

Во-вторых, аналитические методы анализа, широко используемые при исследовании линейных систем, имеют для нелинейных задач весьма ограниченную область применимости. Основным инструментом изучения нелинейных динамических систем являются численные методы и компьютерное моделирование.

Исследования последних лет показали, что разнообразие динамики, наблюдаемое в нелинейных системах можно свести к достаточно простым режимам, связанным с некоторыми повторяющимися для самых различных систем характерными типами решений. Эти характерные решения обладают важным свойством инвариантности. Более того, к ним притягиваются многие другие решения исследуемой системы. Знание таких решений – аттракторов – позволяет получить представление об общей качественной картине динамики исследуемой нелинейной системы.

Изменение параметров системы меняет расположение аттракторов. В ряде случаев форма аттрактора изменяется качественным образом. В этом случае говорят, что в системе произошла бифуркация.

Каждая бифуркация – это радикальное изменение в динамике системы, сопровождающаяся исчезновением одних и появлением других, принципиально новых, режимов функционирования. Одним из классических сценариев подобных преобразований служит цепочка бифуркаций: равновесие (точка покоя) – периодический режим (предельный цикл) – хаотический режим (странный аттрактор).

Каждый переход в этой цепи сопровождается потерей устойчивости простого аттрактора и появлением нового более сложного. Таким образом, решение задачи отыскания у исследуемой системы аттракторов и последующий анализ их устойчивости является важнейшим шагом в понимании тонких механизмов ее динамики.

В бесконечном многообразии явлений окружающего мира человек всегда выделял простое и сложное, упорядоченное и непредсказуемое, однозначно определенное и случайное. Явления первого типа составляют мир порядка, а все остальное относилось к зоне хаоса. Развитие наук, выявляя неизвестные ранее закономерности явлений, относящихся к зоне хаоса, позволяло переводить эти закономерности в зону порядка.

Классическими математическими моделями для процессов, наблюдаемых в природе, стали дифференциальные и разностные уравнения. Закон, выраженный таким уравнением, позволял по известному начальному состоянию исследуемой системы однозначно определять ее состояние в любой последующий момент времени. Успехи механики и электродинамики, опирающиеся на уравнения Ньютона – Максвелла, в решении задач описания движения материальных тел и электромагнитных процессов позволяли надеяться сделать предсказуемыми явления не только в этих классических разделах естествознания, но и в таких важных областях, как экономика, химия и биология.

Казалось, дело за немногим: выявить закономерности, лежащие в основе этих, еще мало изученных процессов, записать найденные законы в виде дифференциальных или разностных уравнений и «... будущее предстанет перед нами с полной определенностью». Эти слова Лапласа, основоположника идеи детерминизма, рисовали счастливое будущее, когда наконец воцарится желанный порядок, а хаос останется лишь как воспоминание о далеком прошлом, когда цивилизация делала свои первые шаги.

Лапласовские мечты о детерминизме столкнулись с новой реальностью. В 60-х годах прошлого века были обнаружены весьма простые по форме записи динамические модели, имеющие чрезвычайно сложное поведение. Хаос появлялся там, где его никак не ждали. Оказалось,

что дифференциальные (модель Лоренца конвективных потоков) и разностные (модель Ферхюльста изолированной популяции) уравнения, задаваемые простейшими квадратичными функциями, при сколь угодно малых изменениях их параметров, могут резко менять характер своих решений и от упорядоченных регулярных движений (положение равновесия или периодические колебания) переходить к хаотическим с непредсказуемой динамикой.

Таким образом, было установлено, что существуют динамические системы, поведение которых фактически нельзя проследить на достаточно широком промежутке времени ввиду чрезвычайно сильной неустойчивости основных характеристик системы.

К концу прошлого века возникла теория динамического хаоса, которая позволяет в некоторых ситуациях описать универсальные сценарии перехода от упорядоченного поведения системы к хаосу и наоборот. Было установлено, что хаотическое поведение присуще многим развивающимся системам с нелинейной динамикой и что хаос — достаточно глубокая характеристика природных явлений. Характерным примером проявления этого феномена является упомянутый выше переход от регулярных режимов (устойчивые равновесия или циклы) к нерегулярным -хаотическим.

Значительный всплеск интереса исследователей к хаотическим динамическим системам возник после выхода работ М. Фейгенбаума в конце 70-х годов прошлого столетия, который, исследуя простейший итерационный процесс с квадратичной нелинейностью, обнаружил хаотическое поведение итераций и нашел две универсальные константы, характеризующие поведение целого класса динамических систем, включая систему Лоренца. Было обнаружено, что аттракторы (предельные точки квадратичного итерационного процесса, моделирующего изменение численности отдельной популяции) в бесконечной цепи

бифуркаций (удвоение периода) образуют самоподобные (фрактальные), структуры с величиной скейлинга, равной 2-й универсальной константе Фейгенбаума.

Знакомство с отмеченным кругом явлений нелинейной динамики, освоение методов их математического моделирования и компьютерного анализа представляется важной обязательной компонентой современного университетского образования студентов естественно научных направлений – математиков, физиков, химиков и биологов.

В пособии на примерах классических моделей биологических объектов излагаются основные явления и элементы анализа нелинейных динамических систем, качественная теория решений, бифуркации и хаос.

Учебное пособие состоит из двух глав, разделенных на параграфы, и организовано следующим образом.

Глава 1 целиком посвящена дискретным динамическим системам. На фоне возможных типов динамики линейных систем рассматриваются основные особенности нелинейных итерационных процессов. В центре внимания переход к хаосу через цепочку бифуркаций удвоения периода. Вводятся базовые понятия равновесия, циклов, приводятся методы анализа их устойчивости, детально исследуется механизмы удвоения периода, определяются универсальные константы, устанавливается связь этих констант с типом нелинейности итерируемой функции.

Глава 2 посвящена непрерывным динамическим системам. Рассматриваются классические модели, задаваемые дифференциальными уравнениями: одно- и двумерные модели популяционной динамики, динамическая модель гликолиза, модель осцилляторной активности нейрона, механическая, электронная (уравнение Ван-дер-Поля) и химическая (брюсселятор) колебательные системы, хаотические осцилля-

торы (модель Лоренца и Ресслера). Дается способ описания динамики систем при помощи фазовых портретов. Излагаются методы анализа динамической системы вблизи точки покоя и цикла. Детально рассматривается бифуркация рождения цикла. На примере циклов модели Лоренца представлен каскад бифуркаций удвоения периода, приводящий к хаосу.

Содержание пособия основано на материале, который читался автором в течение ряда лет в Уральском государственном университете. Оно может быть рекомендовано студентам естественно-научных факультетов университета для первоначального знакомства с регулярной и хаотической динамикой биологических систем.

Глава 1. Дискретные динамические системы

§ 1. Простая модель – сложная динамика

Многие считают, что сложное поведение динамической системы определяется большим количеством переменных, связанных громоздкими формулами. Однако существуют примеры очень простых систем, демонстрирующих достаточно сложную динамику. Одним из таких примеров является рассматриваемая ниже система, в поведении которой присутствуют основные черты таких важных явлений нелинейной динамики, как циклы различной кратности, перемешивание, хаос.

Рассмотрим динамику системы, заданной итерационным процессом

$$x_{t+1} = \{10x_t\}, \quad t = 0, 1, \dots \quad (1.1)$$

Функция шага $\varphi(x) = \{10x\}$, где $\{y\}$ означает дробную часть числа y , по заданному начальному значению x_0 однозначно определяет последовательность $x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), \dots$. Отображение $\varphi(x)$ переводит полуинтервал $[0, 1)$ в себя. Это означает, что начиная с произвольной точки $x_0 \in [0, 1)$, все последующие элементы x_1, x_2, \dots будут также лежать в полуинтервале $[0, 1)$.

Примеры последовательностей

$$x_0 = 0.27, \quad x_1 = 0.7, \quad x_2 = 0, \quad \dots \quad x_n = 0, \dots$$

$$x_0 = 0.51(3), \quad x_1 = 0.1(3), \quad x_2 = 0.(3), \quad \dots \quad x_n = 0.(3), \dots$$

показывают, что для некоторых начальных значений состояние системы уже через несколько шагов перестает изменяться, т. е. последовательность $\{x_t\}$ становится стационарной. При этом

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = 0.(1), \quad \dots, \quad \xi_8 = 0.(8)$$

являются неподвижными точками отображения $\varphi(x)$ или точками покоя системы (1.1).

Взяв другие начальные значения, можно получить последовательности

$$x_0 = 0.27(35), \quad x_1 = 0.7(35), \quad x_2 = 0.(35), \quad (1.2)$$

$$x_3 = 0.(53), \quad x_4 = 0.(35), \quad x_5 = 0.(53), \quad \dots$$

$$x_0 = 0.8(307), \quad x_1 = 0.(307), \quad x_2 = 0.(073), \quad (1.3)$$

$$x_3 = 0.(730), \quad x_4 = 0.(307), \quad x_5 = 0.(073), \quad \dots,$$

элементы которых через некоторое число шагов начинают повторяться, образуя цикл. Для последовательности (1.2) цикл состоит из двух элементов (2-цикл) $\xi_1 = 0.(35), \xi_2 = 0.(53)$. Для последовательности (1.3) наблюдается 3-цикл $\xi_1 = 0.(307), \xi_2 = 0.(073), \xi_3 = 0.(730)$. С какого бы рационального числа $x_0 = 0.a_1 \dots a_n(b_1 \dots b_m)$ мы ни стартовали, итерационный процесс (1.1) через конечное число шагов становится периодическим:

$$x_1 = 0.a_2 \dots a_n(b_1 \dots b_m), \quad \dots, \quad x_n = 0.(b_1 \dots b_m),$$

$$x_{n+1} = 0.(b_2 \dots b_m b_1), \quad \dots, \quad x_{n+m} = 0.(b_1 \dots b_m), \quad \dots$$

При этом длина переходного процесса равна n , а длина цикла определяется количеством знаков m в повторяющейся части десятичного позиционного представления начального состояния x_0 . Как видим, поведение системы является вполне упорядоченным и предсказуемым. В этом случае говорят, что в системе наблюдается порядок.

Последовательность, стартующая с иррационального числа, ведет себя гораздо сложнее. Например, взяв $x_0 = \{\pi\} = 0.14159265\dots$, получим последовательность, которая бесконечное число раз попадает в сколь угодно малую окрестность каждой точки полуинтервала $[0, 1)$. Поведение последовательности выглядит как случайное или хаотическое. Тогда говорят, что в системе наблюдается хаос.

Рассмотрим задачу приближенного описания динамики системы (1.1), выходящей из точки $x_0 = \{\pi\}$. Десятичная дробь, представляющая x_0 , содержит бесконечную последовательности цифр после запятой. В качестве приближения для x_0 возьмем $x_0^* = 0.14159265$. Тогда найденные по формуле $x_{t+1}^* = \varphi\{x_t^*\}$ последующие элементы x_1^*, x_2^*, \dots являются соответствующими приближениями для x_1, x_2, \dots .

При этом ошибка $\Delta_t = x_t - x_t^*$ меняется следующим образом: $10^{-7} < \Delta_0 < 10^{-8}$, $10^{-6} < \Delta_1 < 10^{-7}, \dots, 10^{-1} < \Delta_8 < 1$. Десятикратный рост ошибки на каждом шаге приводит к тому, что уже через восемь шагов мы ничего не можем сказать о поведении полученного решения. Действительно, элементы приближения $x_8^* = 0 = x_9^* = x_{10}^* \dots$ уже не несут никакой информации об истинных значениях x_8, x_9, x_{10}, \dots .

Отображение промежутка $[0, 1)$ в себя, задаваемое функцией $\varphi(x) = \{10x\}$, можно разделить на этапы. Разобьем весь промежуток $[0, 1)$ на 10 частей:

$$I_1 = [0, 0.1), I_2 = [0.1, 0.2), \dots, I_{10} = [0.9, 1.0).$$

Сначала функция $\varphi_1(x) = 10x$ растягивает каждый из полуинтервалов I_n в десять раз:

$$I_1' = \varphi_1[I_1] = [0, 1.0), I_2' = \varphi_1[I_2] = [1, 2), I_{10}' = \varphi_1[I_{10}] = [9, 10).$$

Затем функция $\varphi_2(x) = \{x\}$ переводит каждый из этих растянутых полуинтервалов в один исходный полуинтервал $[0, 1)$, отождествляя (склеивая) соответствующие точки. В результате функция

$$\varphi(x) = \varphi_2[\varphi_1(x)]$$

есть суперпозиция двух функций — растяжения $\varphi_1(x)$ и склеивания $\varphi_2(x)$. Последовательные итерации растяжения и склеивания, удаляя друг от друга близкие точки и сближая далекие, хорошо перемешивают точки полуинтервала $[0, 1)$.

З а м е ч а н и е. Если считать x_0 случайной величиной, распределенной на интервале $[0, 1)$ с плотностью $p_0(x)$, то $p_1(x)$ – плотность распределения $x_1 = \varphi(x_0)$ – получается из $P_0(x)$ усреднением

$$p_1(x) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} p_0(10(x - \frac{i}{10})).$$

2.1. Основные понятия

Рассмотрим одномерную систему, определяемую итерационным процессом

$$x_{t+1} = \varphi(x_t), \quad (2.1)$$

где x — скалярная переменная, X — область определения, а $Y = \varphi(X)$ — область значений функции $\varphi(x)$. Предполагается, что $Y \subseteq X$. Тогда для любого $x_0 \in X$ процесс (2.1) задает последовательность x_t ($t = 0, 1, \dots$), которая называется **орбитой** точки x_0 .

О п р е д е л е н и е 2.1. Множество $M \subset X$ называется **инвариантом** системы (2.1), если $\varphi(M) \subset M$.

Если $x_0 \in M$, то и все последующие элементы $x_t \in M$. Простейшим примером инвариантного множества является точка покоя, т. е. неподвижная точка отображения φ .

О п р е д е л е н и е 2.2. Точка $\xi \in X$ называется **точкой покоя** системы (2.1), если $\xi = \varphi(\xi)$.

Если $x_0 = \xi$, то $x_0 = x_1 = x_2 = \dots = x_t = x_{t+1} = \dots$, все последующие элементы не меняются. Важным примером инвариантного множества является цикл.

О п р е д е л е н и е 2.3. Множество $M = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\}$ называется **k -циклом** системы (2.1), если между его элементами имеется следующая связь:

$$\xi_2 = \varphi(\xi_1), \xi_3 = \varphi(\xi_2), \dots, \xi_k = \varphi(\xi_{k-1}), \xi_1 = \varphi(\xi_k).$$

О п р е д е л е н и е 2.4. Точка ξ называется **k -периодической**, если $\xi = \varphi^k(\xi) = \varphi(\varphi(\dots(\varphi(\xi))))$. Здесь функция φ применяется k раз.

Пусть у системы (2.1) имеется 2-цикл $M = \{\xi_1, \xi_2\}$. Тогда для $x_0 = \xi_1$ получим последовательность $x_1 = \xi_2, x_2 = \xi_1, \dots, x_{2t} = \xi_1, x_{2t+1} = \xi_2, \dots$, а для $x_0 = \xi_2$ — последовательность $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, \dots, x_{2t} = \xi_2, x_{2t+1} = \xi_1, \dots$. Оба эти решения являются 2-периодическими: $x_{t+2} = x_t$.

В общем случае каждая последовательность, стартующая из произвольного элемента k -цикла $x_0 = \xi_i$, является k -периодической:

$$x_{t+k} = x_t.$$

2.2. Отыскание точек покоя и циклов

Точка покоя ξ системы (2.1) удовлетворяет равенству $\xi = \varphi(\xi)$. Таким образом, для отыскания всех точек покоя системы (2.1) требуется найти все решения уравнения $x = \varphi(x)$.

Поиск цикла также сводится к решению некоторого уравнения. Действительно, рассмотрим k -кратную суперпозицию функций $\varphi(x)$

$$\varphi^k(x) = \varphi(\varphi(\dots\varphi(x)))$$

и связанную с $\varphi^k(x)$ динамическую систему

$$y_{t+1} = \varphi^k(y_t). \quad (2.2)$$

При одинаковых начальных значениях $y_0 = x_0$ элементы орбит для систем (2.1) и (2.2) связаны соотношением $y_t = x_{kt}$. Как видим, $\{y_t\}$ является подпоследовательностью для последовательности x_t . При этом элементы y_t получаются выделением (сечением) в последовательности $\{x_t\}$ элементов, отстоящих друг от друга на k шагов.

Каждый элемент ξ_i k -цикла $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$, удовлетворяя соотношению $\xi_i = \varphi^k(\xi_i)$, является точкой покоя системы (2.2). При этом все элемен-

ты ξ_1, \dots, ξ_k являются корнями уравнения $x = \varphi^k(x)$. Среди корней этого уравнения могут быть не только элементы k -цикла. Действительно, очевидным корнем этого уравнения является точка покоя ξ системы (2.1). Если система (2.1) имеет более короткий l -цикл, где l кратно k и $l < k$, то все элементы этого l -цикла также являются корнями уравнения $x = \varphi^k(x)$.

2.3. Устойчивость инвариантных подмножеств

Пусть $\rho(x_0, M) = \inf_{x \in M} |x_0 - x|$ – расстояние от точки x_0 до подмножества M .

О п р е д е л е н и е 2.5. Инвариантное подмножество M в системе (2.1) называется **у с т о й ч и в ы м п о Л я п у н о в у**, если в некоторой его окрестности U ($M \subseteq U$) справедливо следующее:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x_0 \in U \quad \forall t \quad \rho(x_0, M) < \delta \Rightarrow \rho(x_t, M) < \varepsilon.$$

В противном случае подмножество M называется **н е у с т о й ч и в ы м**.

О п р е д е л е н и е 2.6. Устойчивое по Ляпунову подмножество M называется **а с и м п т о т и ч е с к и у с т о й ч и в ы м**, если $\forall x_0 \in U \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(x_t, M) = 0$, где U – некоторая окрестность множества M .

Для простейшего инвариантного множества, состоящего из одной точки покоя ξ , достаточное условие асимптотической устойчивости дается следующей теоремой.

Т е о р е м а 2.1. Пусть в некоторой окрестности $U_\varepsilon = (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ точки покоя ξ системы (2.1) существует непрерывная производная $\varphi'(x)$ и выполняется неравенство $|\varphi'(\xi)| < 1$. Тогда точка покоя ξ является асимптотически устойчивой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Благодаря непрерывности $\varphi'(x)$, в некоторой окрестности $U_\delta = (\xi - \delta, \xi + \delta)$ выполняется неравенство $|\varphi'(x)| \leq q < 1$. При этом, используя формулу Лагранжа, получим $|\varphi(x) - \xi| = |\varphi'(\theta)||x - \xi| \leq q|x - \xi|$. Данное неравенство означает, что при любом $x_0 \in U_\delta$ справедлива оценка $|x_t - \xi| \leq q^t|x_0 - \xi| < \delta$, гарантирующая асимптотическую устойчивость точки покоя ξ .

Т е о р е м а 2.2. Пусть $|\varphi'(\xi)| > 1$. Тогда ξ — неустойчивая точка покоя.

Отметим, что величина $q = |\varphi'(\xi)|$ является количественной характеристикой степени устойчивости точки покоя ξ . Действительно, вблизи ξ справедливо приближенное равенство

$$|x_{t+1} - \xi| \approx |\varphi'(\xi)||x_t - \xi|.$$

Величина q показывает, во сколько раз решение системы (2.1) приближается к точке покоя ξ за один шаг. При $q = 1$ (критический случай) точка может быть как устойчивой, так и неустойчивой.

Исследование устойчивости цикла $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ системы (2.1), как следует из приведенных выше рассуждений, сводится к анализу устойчивости его элементов ξ_1, \dots, ξ_k как точек покоя системы (2.2). В соответствии с теоремами 2.1, 2.2 все решает производная $(\varphi^k(x))'$ в этих точках.

Т е о р е м а 2.3. Пусть x_0, x_1, \dots, x_{k-1} — последовательные итерационные точки в процессе (2.1). Тогда справедлива формула

$$(\varphi^k(x_0))' = \prod_{t=0}^{k-1} \varphi'(x_t). \quad (2.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим индукцию по k . Для $k = 0$ формула очевидна. Предположим, что она справедлива для $k - 1$, и

докажем, что она имеет место для k . Действительно, имеем

$$\begin{aligned} (\varphi^k(x_0))' &= [\varphi(\varphi^{k-1}(x_0))]' = \varphi'(\varphi^{k-1}(x_0)) \cdot (\varphi^{k-1}(x_0))' = \\ &= \varphi'(x_{k-1}) \cdot \prod_{t=0}^{k-2} \varphi'(x_t) = \prod_{t=0}^{k-1} \varphi'(x_t). \end{aligned}$$

С л е д с т в и е 2.1. Пусть $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ – k -цикл. Тогда производная $(\varphi^k(x))'$ во всех точках ξ_i ($i = 1, 2, \dots, k$) имеет одно и то же значение

$$q = (\varphi^k(\xi_i))' = \prod_{t=0}^k \varphi'(\xi_t).$$

Т е о р е м а 2.4. Пусть в некоторой окрестности k -цикла системы (2.1) существует непрерывная производная $\varphi'(x)$ и выполняется неравенство

$$\left| \prod_{i=1}^k \varphi'(\xi_k) \right| < 1. \quad (2.4)$$

Тогда k -цикл является асимптотически устойчивым.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из выражений (2.3), (2.4) вытекают неравенства $|(\varphi^k(\xi_i))'| < 1$ ($i = 1, \dots, k$), из которых по теореме 2.1 следует асимптотическая устойчивость всех точек покоя ξ_i для системы (2.2). Рассмотрим точку ξ_1 . Ее асимптотическая устойчивость означает существование окрестности $U = (\xi_1 - \delta, \xi_1 + \delta)$, для которой соответствующие решения y_t системы (2.2) обладают следующими свойствами:

$$\forall y_0 \forall t \quad y_0 \in U \Rightarrow y_t \in U,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_t = \xi_1.$$

Свяжем с последовательностью y_t последовательность x_j , порождаемую системой (2.1) с начальным условием $x_0 = y_0$. Отметим, что $y_t = x_{kt}$. Теперь для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ в последовательности x_j выделим подпоследовательность $y_t^i = x_{kt+i-1}$. Отметим, что последовательность y_t^i есть решение системы (2.2) с начальным условием

$y_0^i = x_{i-1}$, при этом

$$y_t^i - \xi_i = \varphi^{i-1}(y_t) - \varphi^{i-1}(\xi_1). \quad (2.5)$$

Из непрерывности $\varphi'(x)$ следует существование константы $K > 0$, для которой справедлива оценка

$$\forall i \in \{1, \dots, k\} \forall y \in U \quad |\varphi^{i-1}(y) - \varphi^{i-1}(\xi_1)| \leq K|y - \xi_1|. \quad (2.6)$$

Из (2.5), (2.6) следует неравенство

$$|y_t^i - \xi_i| \leq K|y_t - \xi_1|.$$

Теперь сходимость y_t к ξ_1 влечет для каждого i сходимость y_t^i к ξ_i , при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, последовательность x_j сходится к циклу $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$. Асимптотическая устойчивость цикла доказана.

Упражнения

2.1. Для системы $x_{t+1} = x_t^3 + 0.1$

а) доказать существование трех точек покоя

$$\xi_1 < \xi_2 < \xi_3;$$

б) найти непересекающиеся интервалы, содержащие эти точки покоя;

в) доказать, что из этих трех точек только ξ_2 является устойчивой;

г) найти максимальный инвариантный интервал, содержащий ξ_2 ;

д) доказать, что, начиная с любой точки этого интервала, последовательность x_t стремится к ξ_2 .

2.2. Доказать теорему 2.2.

2.3. Для критического случая, когда в точке покоя ξ выполняется равенство $|\varphi'(\xi)| = 1$, привести примеры устойчивости и неустойчивости.

2.4. Указать условия, при которых последовательность x_t системы (2.1) стремится к устойчивой точке покоя ξ монотонно.

2.5. Для системы $x_{t+1} = \mu x_t + \gamma$ указать значения параметров, при которых система имеет 2-цикл. Будет ли этот цикл устойчивым (асимптотически устойчивым)?

§ 3. Модели динамики популяции

Сообщество животных одного вида, населяющих определенную территорию, биологи называют популяцией. Это может быть и колония птиц на каком-то далеком острове, и зайцы, обитающие в вашем регионе, и бактерии, живущие в небольшой пробирке.

Изучать жизнь отдельной популяции можно с самых различных точек зрения – разнообразие природы бесконечно. Здесь нас будет интересовать лишь численность популяции и ее динамика – закон изменения численности с течением времени.

Чтобы избежать излишних подробностей, будем считать, что учет численности вида производится в дискретные моменты времени (один раз в год для зайцев или один раз в день для бактерий – не принципиально). Пусть N_t – численность популяций в момент времени t . Тогда серия из n наблюдений дает последовательность N_1, N_2, \dots, N_n , которую удобно представить в виде таблицы.

i	1	2	...	n
N	N_1	N_2	...	N_n

Данная таблица, по сути дела, является в рассматриваемой задаче первичной математической моделью. Эта модель – скупой отпечаток истории реальной жизни популяции. Лишенная каких-либо подробностей поведения отдельных особей, она представляет собою математическую абстракцию.

С увеличением количества данных n таблица разрастается: хранение и поиск нужных данных затрудняется, модель становится громоздкой. Главным ее недостатком, заложенным в само устройство, является неспособность предсказывать будущее. Таблица позволяет отвечать на вопросы, касающиеся прошлого, да и то лишь относящиеся к опре-

деленному историческому интервалу, заключенному между первым и последним моментами наблюдений. В рамках данной модели недоступна как предыстория популяции, так и ее грядущее поведение.

3.1. Линейная модель

Для построения новой модели нам требуется учесть основные факторы, влияющие на изменение численности популяции. Таковыми являются рождаемость и смертность. Будем предполагать, что за время, прошедшее между соседними моментами наблюдений t и $t + 1$, появилось на свет αN_t и умерло βN_t особей. Данное предположение кажется достаточно естественным: количество родившихся как и количество умерших особей должно быть пропорционально общему числу N_t особей в популяции. Соответствующие пропорции задаются параметрами: α – коэффициент рождаемости и β – коэффициент смертности. Отметим, что $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$.

В результате учета этих факторов получаем уравнение

$$N_{t+1} = N_t + \alpha N_t - \beta N_t$$

или

$$N_{t+1} = \mu N_t \tag{3.1}$$

- линейную модель динамики популяции. Эта модель, в действительности, зависит только от одного параметра $\mu = 1 + \alpha - \beta$ – коэффициента естественного прироста ($\mu \geq 0$).

Используя уравнение (3.1), легко продолжить таблицу, предсказывая тем самым значения N_{t+1}, N_{t+2}, \dots . Действительно, уравнение (3.1) означает, что последовательность N_0, N_1, N_2, \dots есть геометрическая прогрессия со знаменателем μ , каждый элемент которой N_t может

быть выражен через начальный N_0 соотношением

$$N_t = \mu^t N_0$$

Что же ждет популяцию в будущем?

В рамках модели (3.1) в зависимости от величины μ для данной популяции возможны три варианта изменения численности:

а) при $0 < \mu < 1$ численность популяции монотонно убывает к нулю. В условиях превышения смертности над рождаемостью ($\alpha < \beta$) популяция вымирает.

б) при $\mu = 1$ численность популяции не изменяется

$$N_t \equiv N_0$$

Популяция, благодаря балансу между рождаемостью и смертностью ($\alpha = \beta$) находится в состоянии равновесия.

в) при $\mu > 1$ численность популяции монотонно возрастает к бесконечности. Превышение рождаемости над смертностью ($\alpha > \beta$) ведет к демографическому взрыву.

Наглядное сравнение динамики численности популяции для этих трех случаев дано на рис. 3.1.

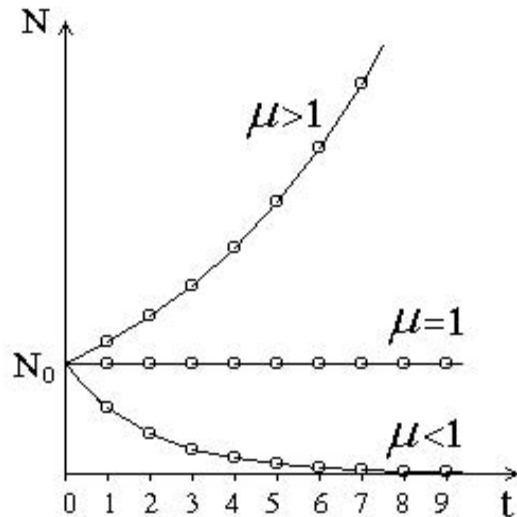


Рис. 3.1. Линейная модель. Три варианта динамики

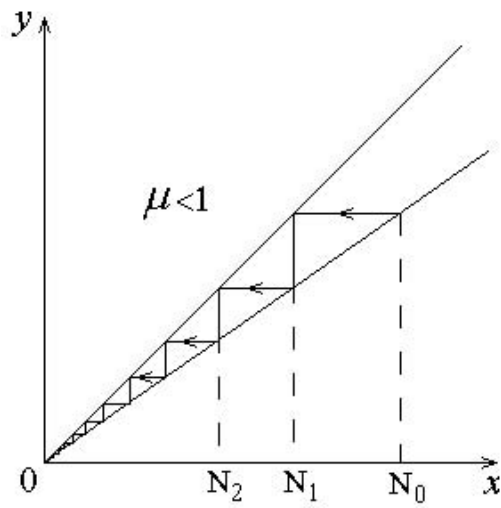


Рис. 3.2. Динамика при $0 < \mu < 1$

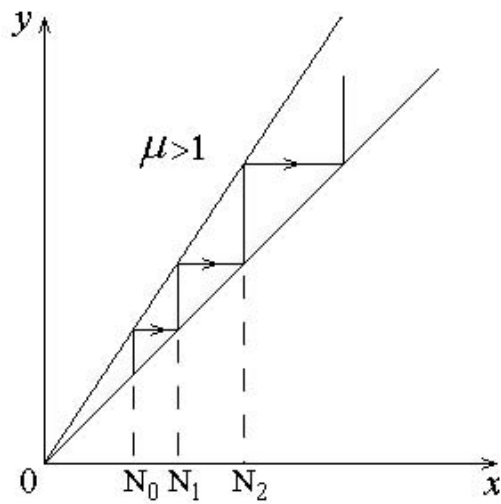


Рис. 3.3. Динамика при $\mu > 1$

Для первого и третьего случаев на рис. 3.2 и рис. 3.3 с помощью графиков функции $y = \varphi(x) = \mu x$ иллюстрируется геометрический метод получения по начальному значению N_0 последующих элементов N_1, N_2, \dots . Для этого следует из точки N_0 на оси Ox сначала провести вертикаль до графика $\varphi(x)$, а затем – горизонталь до графика $y = x$. Абсцисса найденной точки и есть N_1 . Далее вертикаль проводим уже из точки N_1 и т.д. В результате проделанных построений последова-

тельность N_t изображается в виде «лестницы Ламерея». Направленное перемещение по этой «лестнице» дает возможность наглядно судить о характере поведения последовательности N_t .

Как видим, величина N_0 численности популяции в начальный момент времени влияет лишь на количественную сторону дела. Качественная картина динамики определяется исключительно параметром μ .

Значение параметра $\mu = \mu_*$ называют критическим, или бифуркационным (от лат. *bifurcus* — раздвоенный), если при переходе μ через μ_* характер динамики системы качественно изменяется.

В данной модели критическим значением, отделяющим один вариант от другого, является $\mu_* = 1$.

3.2. Линейная модель с притоком

Желание сохранить от вымирания (случай $\mu < 1$) популяцию какого-то редкого вида, обитающего, например, в заказнике или национальном парке, потребует регулярного пополнения численности из вне, например, из зоопарков или других территорий. Соответствующая математическая модель (модель с притоком) будет выглядеть следующим образом:

$$N_{t+1} = \mu N_t + \gamma, \quad 0 < \mu < 1, \quad \gamma > 0 \quad (3.2)$$

где γ — количество особей, добавляемых в систему в каждый момент времени t .

Решая уравнение $N = \mu N + \gamma$ находим стационарное значение

$$\bar{N} = \frac{\gamma}{1 - \mu},$$

к которому будет стремиться численность данной биологической системы независимо от ее исходной численности N_0 .

Можно доказать, что

$$N_t = \mu^t \cdot N_0 + \frac{1 - \mu^t}{1 - \mu} \cdot \gamma$$

и $\lim_{t \rightarrow \infty} N_t = \bar{N}$. Состояние \bar{N} есть устойчивое положение равновесия системы (3.2). Даже, если под воздействием случайных обстоятельств произойдет внезапное разовое уменьшение (голодный год, болезнь) или увеличение (миграция) численности, то в системе через определенное время снова установится равновесие с численностью \bar{N} .

Этот факт доказывается следующим образом. Для величины $Z_t = N_t - \bar{N}$ – отклонения численности N_t от равновесного значения \bar{N} – справедливо уравнение $Z_{t+1} = \mu Z_t$, откуда $Z_t = \mu^t Z_0$.

Условие $0 < \mu < 1$ гарантирует стремление Z_t к нулю.

Как видим, наличие математической модели позволяет получать путем формального анализа ответы на различные вопросы, касающиеся данной популяции. При этом удастся обойтись без дорогостоящих и, возможно, опасных экспериментов на живой природе. Так например, для достижения устойчивого уровня численности популяции, равного \bar{N} , при известном коэффициенте естественного прироста μ , требуется обеспечить регулярный приток $\gamma = (1 - \mu)\bar{N}$.

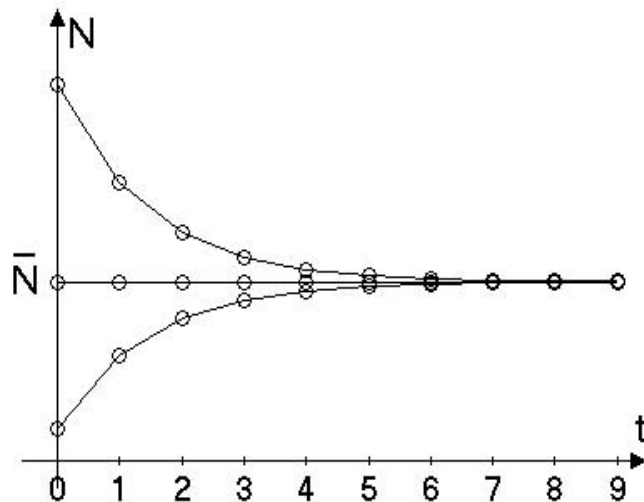


Рис. 3.4. Линейная модель с притоком.

3.3. Линейная модель с оттоком

Попытаемся теперь в случае демографического взрыва ($\mu > 1$) избежать перенаселения за счет регулярного уменьшения численности (например, отлова). Соответствующая математическая модель (модель с постоянным оттоком) будет выглядеть следующим образом

$$N_{t+1} = \mu N_t - \gamma \quad (3.3)$$

где γ – количество отлавливаемых особей.

Для этой модели так же, как и в предыдущей, существует стационарное значение численности

$$\bar{N} = \frac{\gamma}{\mu - 1},$$

отклонение от которого

$$Z_{t+1} = N_{t+1} - \bar{N} = \mu^t Z_0.$$

Однако условие $\mu > 1$ означает здесь, что сколь угодно малое отклонение $Z_0 \neq 0$, допущенное в начальный момент времени, неизбежно приведет к увеличению отклонения состояния N_t от \bar{N} в дальнейшем. Состояние \bar{N} есть неустойчивое положение равновесия. Всякое отклонение в область $N < \bar{N}$ ведет к вымиранию, а отклонение в область $N > \bar{N}$ – к неограниченному росту численности.

Такая неудача в попытке регулирования численности популяции связана с очень грубым способом управления. Заложенный в системе (3.3) жесткий "командно-административный" закон – отлавливать, невзирая на реальное состояние системы, строго фиксированное количество особей γ – не позволяет решить задачу стабилизации.

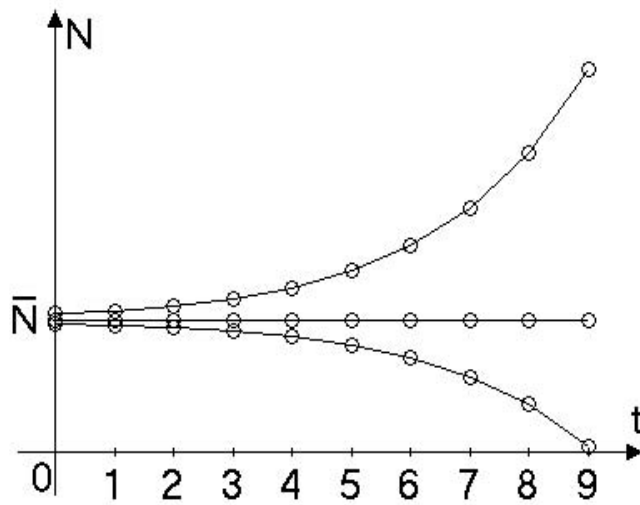


Рис. 3.5. Линейная модель с оттоком.

3.4. Модель с регулируемым оттоком

Рассмотрим более тонкий механизм управления – управление с обратной связью, когда γ есть функция от N :

$$\gamma(N) = \gamma_0 + k(N - \tilde{N})$$

Здесь наряду с γ_0 – постоянной составляющей отлова – присутствует $k(N - \tilde{N})$ – переменная составляющая, позволяющая изменять уровень отлова γ в зависимости от отклонения реальной численности N от желаемого (экологически обоснованного) уровня \tilde{N} . При этом k есть коэффициент обратной связи.

Соответствующая математическая модель (модель с регулируемым оттоком) имеет вид

$$N_{t+1} = \mu N_t - \gamma_0 - k(N_t - \tilde{N}) \quad (3.4)$$

Стационарным здесь является значение

$$\bar{N} = \frac{\gamma_0 - k\tilde{N}}{\mu - 1 - k}.$$

Для того, чтобы желаемый уровень \tilde{N} стал для данной системы положением равновесия ($\tilde{N} = \bar{N}$), следует выбрать

$$\gamma_0 = (\mu - 1)\tilde{N}.$$

При этом уравнение (3.4) приобретает вид

$$N_{t+1} = (\mu - k)(N_t - \bar{N}) + \bar{N} = (\mu - k)N_t + (1 - \mu + k)\bar{N}, \quad (3.5)$$

откуда для отклонений Z_t получаем

$$Z_{t+1} = (\mu - k)Z_t$$

или $Z_t = (\mu - k)^t Z_0$.

Неравенство

$$|\mu - k| < 1 \quad (3.6)$$

является необходимым и достаточным условием устойчивости положения равновесия \bar{N} .

Как видим, достижение желаемого порядка требует однозначного выбора параметра γ_0 . При этом требование (3.6) на k сохраняет некоторую свободу.

При выборе $k : 0 < \mu - k < 1$ модель (3.5) имеет вид (3.2). Последовательность N_t монотонно сходится к устойчивому равновесию \bar{N} .

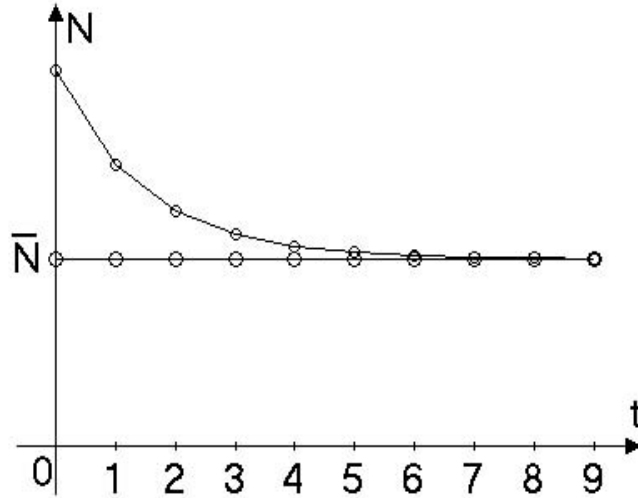


Рис. 3.6. Модель с регулируемым оттоком при $0 < \mu - k < 1$.

При выборе $k : -1 < \mu - k < 0$ знаки отклонений Z_t чередуются, последовательность N_t стремится к \bar{N} , поочередно оказываясь то слева, то справа от \bar{N} .

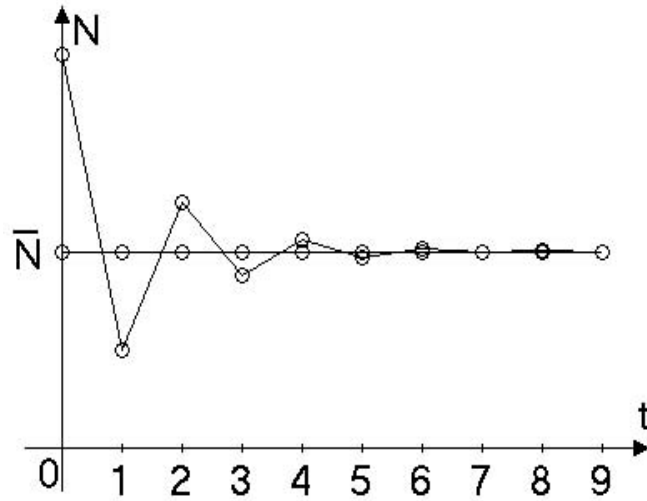


Рис. 3.7. Модель с регулируемым оттоком при $-1 < \mu - k < 0$.

При $\mu - k = -1$ модель (3.5) имеет вид $N_{t+1} = -N_t + 2\bar{N}$ и дает периодическую последовательность $N_{2t} = N_0, N_{2t+1} = 2\bar{N} - N_0$, принимающую лишь два значения.

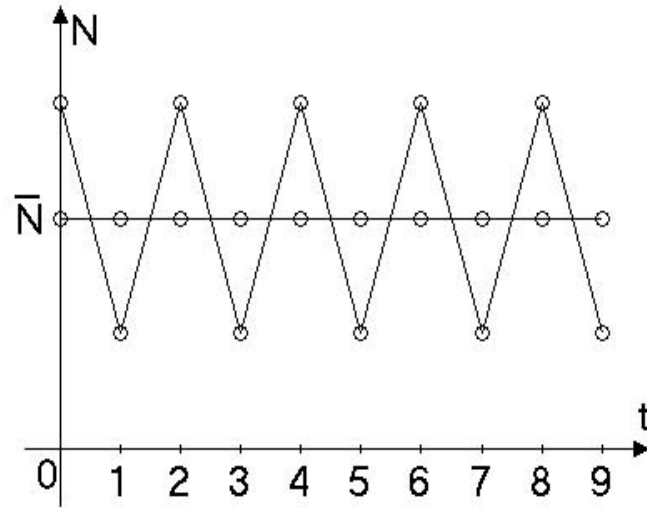


Рис. 3.8. Модель с регулируемым оттоком при $\mu - k = -1$.

При $\mu - k < -1$ неустойчивость проявляется в том, что элемен-

ты N_t , как бы ни было близко N_0 к \bar{N} , удаляются от \bar{N} , отклоняясь поочередно в разные стороны.

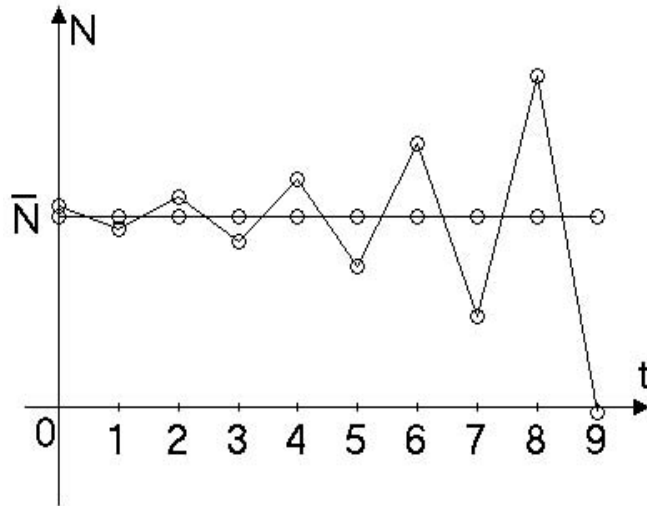


Рис. 3.9. Модель с регулируемым оттоком при $\mu - k < -1$.

Подводя итог анализа рассмотренных линейных динамических моделей, можно отметить следующие общие черты. Важную роль в описании динамики играют точки покоя (положения равновесия). Система, оказавшись в такой точке, остается в ней все дальнейшее время. Точка покоя есть инвариант динамической системы. Оказавшись вне точки покоя система приходит в движение. Движение может происходить различным образом.

Среди возможного разнообразия можно выделить два качественно различных варианта. Один, когда с течением времени система стремится к точке покоя, другой – когда удаляется от этой точки. В первом случае точка покоя называется устойчивой, во втором – неустойчивой. Между этими двумя вариантами есть пограничные, когда отклонение системы от точки покоя не изменяется. Примеры таких систем даются уравнениями $N_{t+1} = N_t$ (все значения N есть точки покоя) и $N_{t+1} = -N_t + 2\gamma$ (одно решение есть точка покоя $\bar{N} = \gamma$, другие – периодические последовательности $N_{2t} = N_0, N_{2t+1} = 2\bar{N} - N_0$).

Изменение параметров системы всегда ведет к изменению в ее динамике. В модели (3.1) бифуркационным значением является $\mu_* = 1$, в модели (3.4) – все сочетания параметров μ и k , при которых $\mu - k = \pm 1$.

3.5. Нелинейная модель

Неограниченный рост численности популяции, следуемый из модели (3.1) при $\mu > 1$ (см. вариант 3), в реальности не наблюдается. Ограниченность жизненного пространства и, прежде всего, недостаток продуктов питания приведут к неизбежному замедлению роста численности. Территория, на которой обитает данная популяция, в состоянии прокормить лишь определенное количество особей. По мере заполнения экологической ниши внутри популяции нарастает напряженность: жизненных ресурсов на всех не хватает. На динамику численности все сильнее начинает воздействовать новый фактор – голод.

Для учета этого фактора П. Ф. Ферхюльст еще в 1845 году предложил добавить в уравнение (3.1) нелинейный член. Новая модель, называемая в биологии логистическим уравнением, имеет вид

$$N_{t+1} = \mu N_t - \gamma N_t^2. \quad (3.7)$$

Здесь γ – коэффициент смертности, связанной с ограниченностью ресурса. Выбор квадратичной зависимости в (3.7) можно пояснить следующим образом.

Недостаток ресурсов порождает внутривидовую борьбу, интенсивность которой пропорциональна количеству возможных контактов между отдельными особями. В популяции из N особей количество возможных парных (другие учитывать не будем) контактов пропорционально N^2 . Не все контакты заканчиваются летальным исходом. Соответству-

ющий процент и задается коэффициентом γ .

Займемся анализом этой нелинейной модели. Сначала упростим ее заменой $x_t = \frac{\gamma}{\mu} N_t$, перейдя от (3.7) к системе, зависящей уже только от одного параметра:

$$x_{t+1} = \varphi(x_t), \quad \varphi(x) = \mu x(1 - x). \quad (3.8)$$

Как видим, именно μ – коэффициент естественного прироста – является тем параметром, который определяет качественную картину динамики данной модели. При этом параметр γ играет роль масштабирующего множителя.

Модель (3.8) сохраняет биологический смысл (численность популяции не может быть отрицательным числом) лишь при $\mu > 0$ и $x_t \in [0, 1]$. Причем условие $x_t \in [0, 1]$ гарантируется лишь при $\mu \leq 4$, поскольку максимум функции $\varphi(x)$ на этом отрезке равен $\mu/4$. В строгой математической формулировке это выглядит так: при любом $\mu \in [0, 4]$ функция $\varphi(x)$ задает отображение отрезка $[0, 1]$ в себя. Таким образом, при $0 \leq \mu \leq 4$, стартуя из любой точки x_0 , лежащей на отрезке $[0, 1]$, все последующие элементы $x_1, x_2, \dots, x_t, \dots$, формируемые системой (3.8), будут принадлежать этому же отрезку. Отрезок $[0, 1]$ есть инвариантное множество отображения $\varphi(x)$.

Упражнения

3.1. Для модели Риккера

$$N_{t+1} = \mu N_t \exp(-N_t)$$

найти точки покоя и исследовать их устойчивость в зависимости от параметра $\mu > 0$.

3.2. Для модели

$$N_{t+1} = \mu \frac{N_t}{1 + N_t^2}$$

найти точки покоя и исследовать их устойчивость в зависимости от параметра $\mu > 0$.

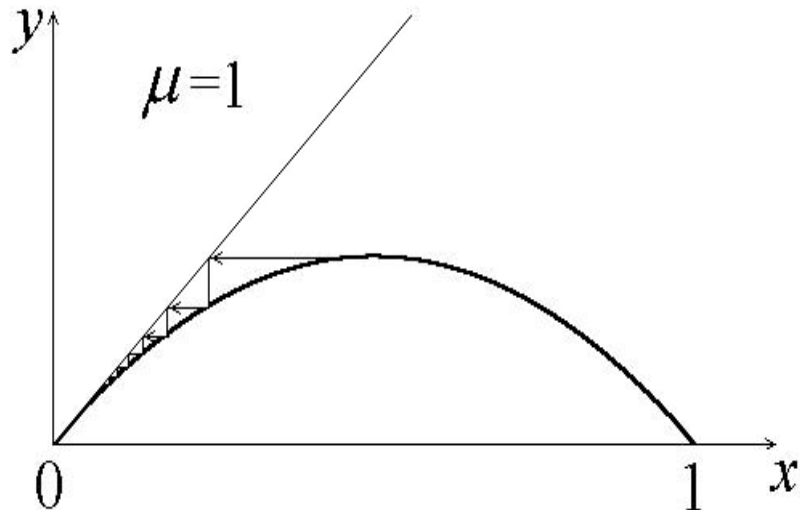
§ 4. Поведение нелинейной системы $\mathbf{x}_{t+1} = \mu \mathbf{x}_t(1 - \mathbf{x}_t)$

Рассмотрим динамику системы (3.8) при различных значениях параметра μ , двигаясь по отрезку $[0, 4]$ от левого конца к правому.

Найдем сначала точки покоя. Корнями уравнения $x = \varphi(x)$ являются $\xi_1 = 0, \xi_2 = 1 - \frac{1}{\mu}$. Отметим, что в интересующий нас отрезок $[0, 1]$ точка ξ_2 попадает лишь при $\mu \geq 1$.

4.1. Случай $0 < \mu \leq 1$

В данном диапазоне изменения параметра μ система имеет единственную точку покоя $\xi_1 = 0$. Анализ устойчивости ξ_1 связан (см. теорему 1) с величиной $q = |\varphi'(\xi_1)| = \mu$. При $0 < \mu \leq 1$ точка покоя является асимптотически устойчивой. Для любого x_0 из $[0, 1]$ последовательность x_t , монотонно убывая, сходится к ξ_1 как геометрическая прогрессия со знаменателем, близким к μ . Для μ , близких к нулю, скорость сходимости высокая. При приближении μ к единице скорость сходимости падает. Случай $\mu = 1$ не охватывается теоремой 1 и является критическим. Однако и здесь последовательность x_t монотонно сходится к точке $\xi_1 = 0$ (см. рис. 4.1).



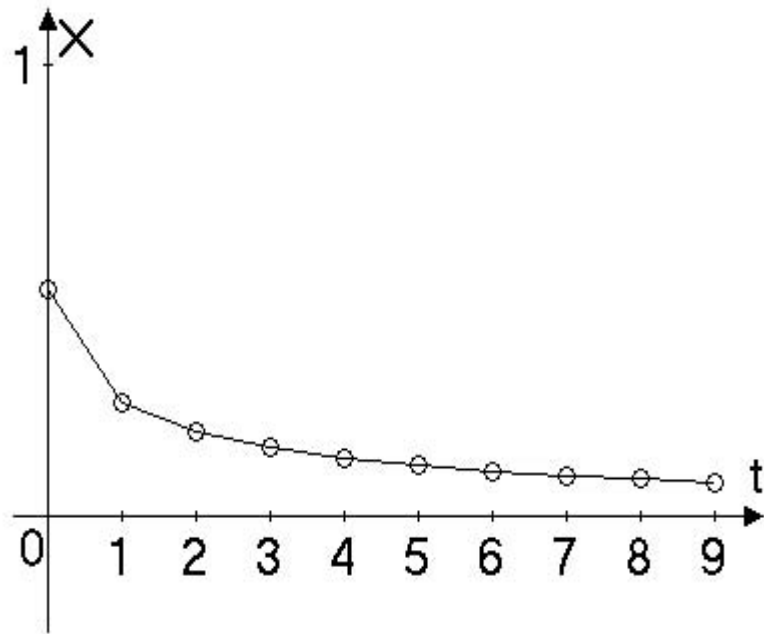


Рис. 4.1. Динамика системы при $\mu = 1$

При $\mu > 1$ точка покоя $\xi_1 = 0$ становится (см. теорему 2) неустойчивой. Для исследования устойчивости точки покоя $\xi_2 = 1 - \frac{1}{\mu}$ рассмотрим производную $\varphi'(\xi_2) = 2 - \mu$. Неравенство $q = |2 - \mu| < 1$ имеет решение $1 < \mu < 3$, что приводит к следующему случаю.

4.2. Случай $1 < \mu \leq 3$

В этом случае у системы (3.8) имеется две точки покоя: ξ_1 – неустойчивая, ξ_2 – устойчивая. Для любого x_0 из $(0, 1)$ последовательность x_t сходится к ξ_2 . Скорость сходимости определяется величиной $q = |2 - \mu| < 1$.

В окрестности точки ξ_2 , при $1 < \mu \leq 2$ последовательность сходится монотонно (рис. 4.2), а при $2 < \mu \leq 3$ монотонность нарушается (рис. 4.3).

При переходе μ через значение $\mu_1 = 3$ точка покоя ξ_2 становится неустойчивой.

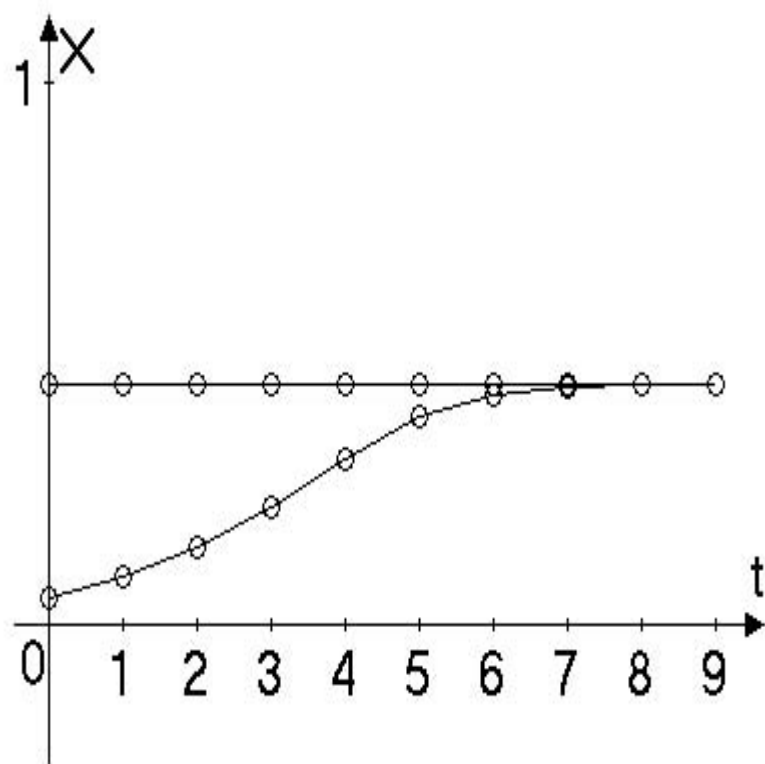
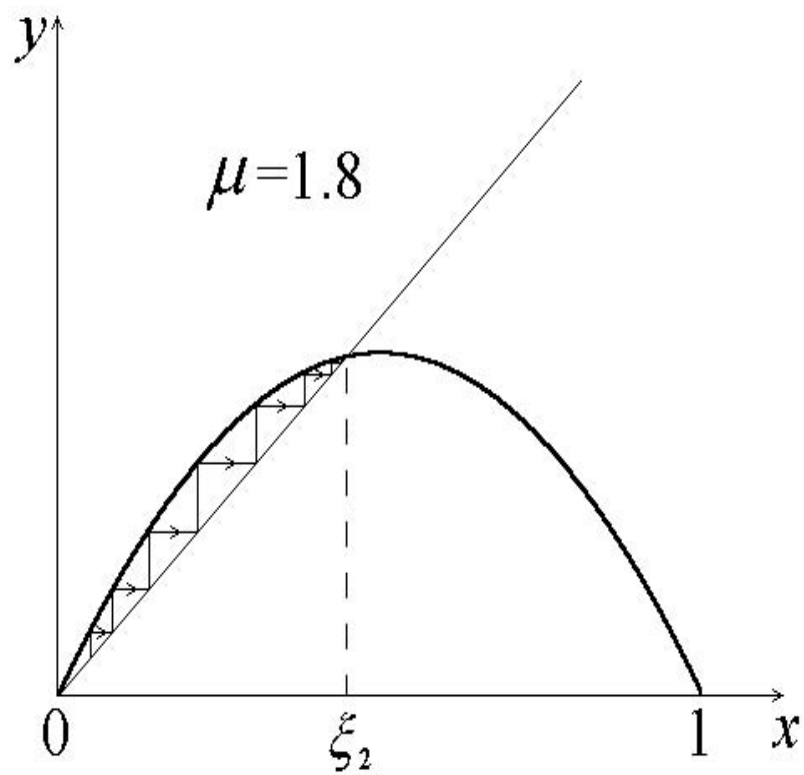


Рис. 4.2. Динамика системы при $1 < \mu \leq 2$

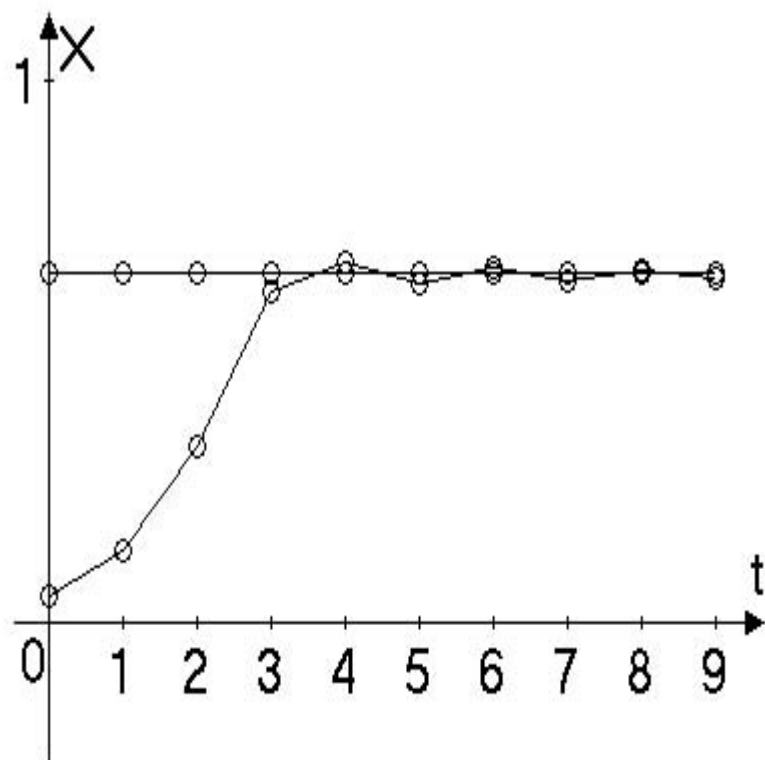
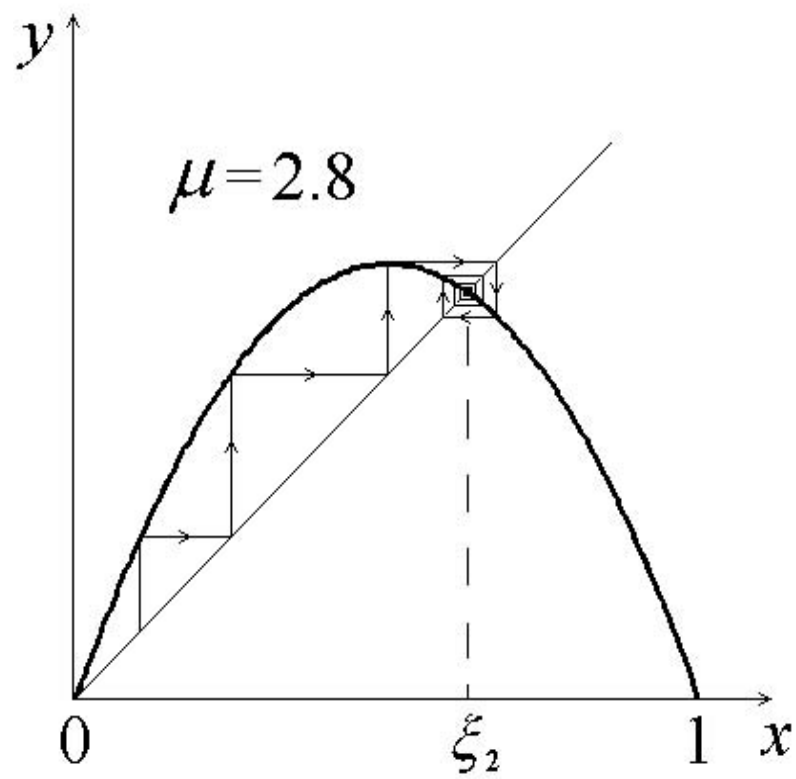


Рис. 4.3. Динамика системы при $2 < \mu \leq 3$

Что же происходит в системе, при $\mu > \mu_1$, когда обе точки покоя являются неустойчивыми?

4.3. Случай $\mu > 3$. Бифуркация рождения цикла

Рассмотрим отображение $x_t \rightarrow x_{t+2}$ за два шага, задаваемое функцией $\varphi^2(x) = \varphi(\varphi(x)) = \mu^2 x(1-x)(1-\mu x(1-x))$,

$$x_{t+2} = \varphi^2(x_t). \quad (4.1)$$

Анализ системы (4.1) начнем, как обычно, с отыскания точек покоя. Уравнение $x = \varphi^2(x)$ – алгебраическое уравнение четвертой степени – имеет своими корнями ранее найденные ξ_1 и ξ_2 . Это и понятно: точки покоя ξ_1, ξ_2 системы (3.3) остаются точками покоя также и системы (4.1). Понижая степень на две единицы, получим квадратное уравнение

$$\mu x^2 - (\mu + 1)x + \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) = 0$$

с корнями

$$\xi_{3,4} = \frac{\mu + 1 \pm \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu}.$$

В интересующем нас здесь случае $\mu > 3$ корни ξ_3, ξ_4 – вещественны и различны. Каков же смысл у этой пары с точки зрения исходной модели (3.8)?

Пусть $x_o = \xi_3$. Найдем далее $x_1 = \varphi(\xi_3)$. Из равенств

$$\varphi^2(x_1) = \varphi(\varphi(x_1)) = \varphi(\varphi(\varphi(\xi_3))) = \varphi(\xi_3) = x_1$$

следует, что x_1 является точкой покоя системы (4.1).

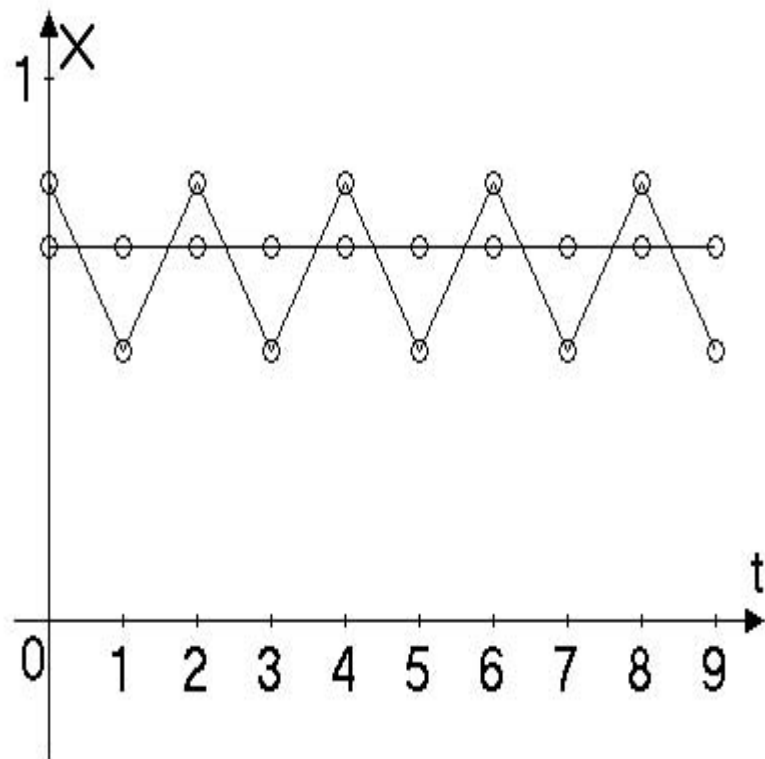
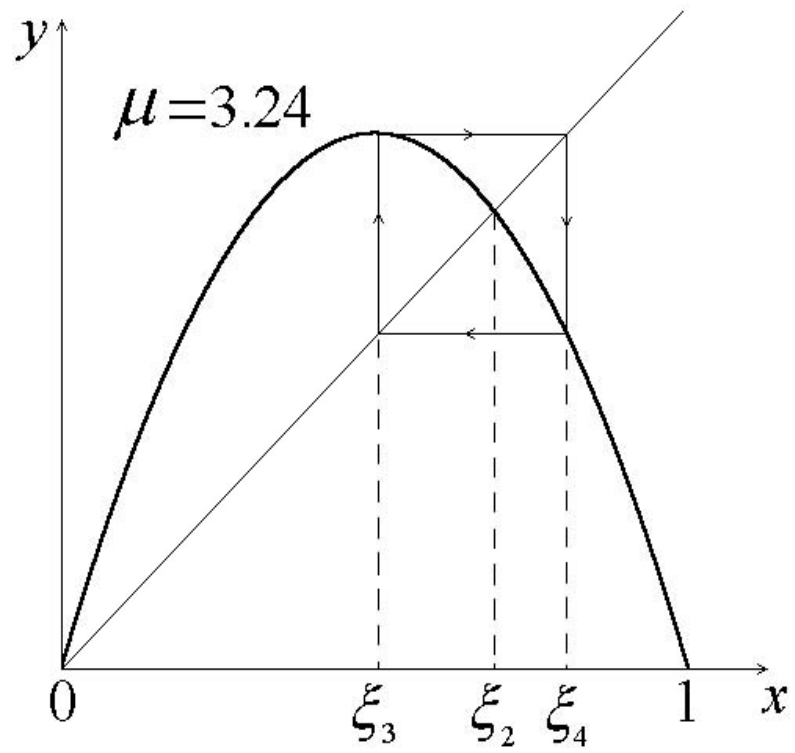


Рис. 4.4. Цикл S^2

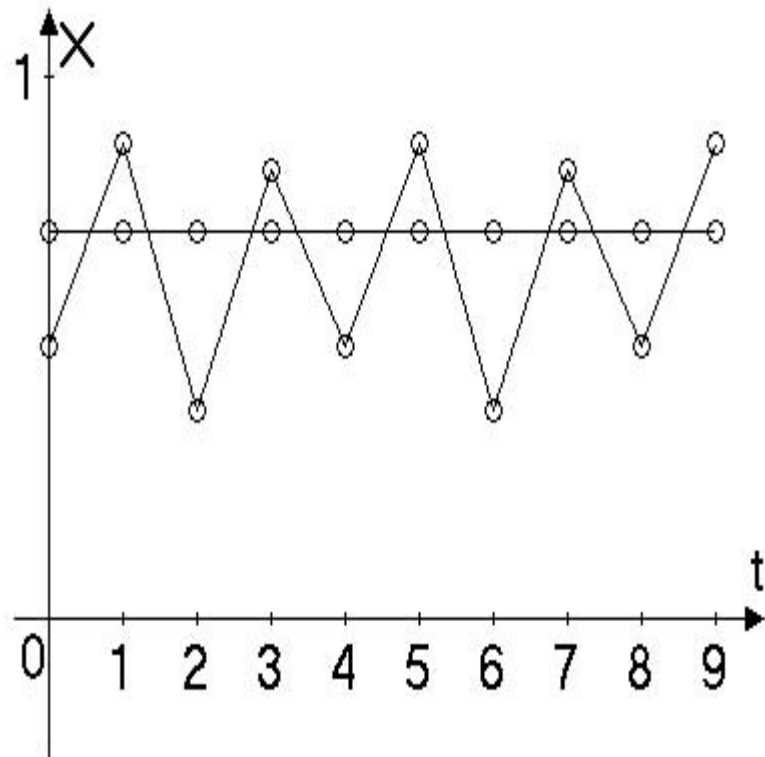
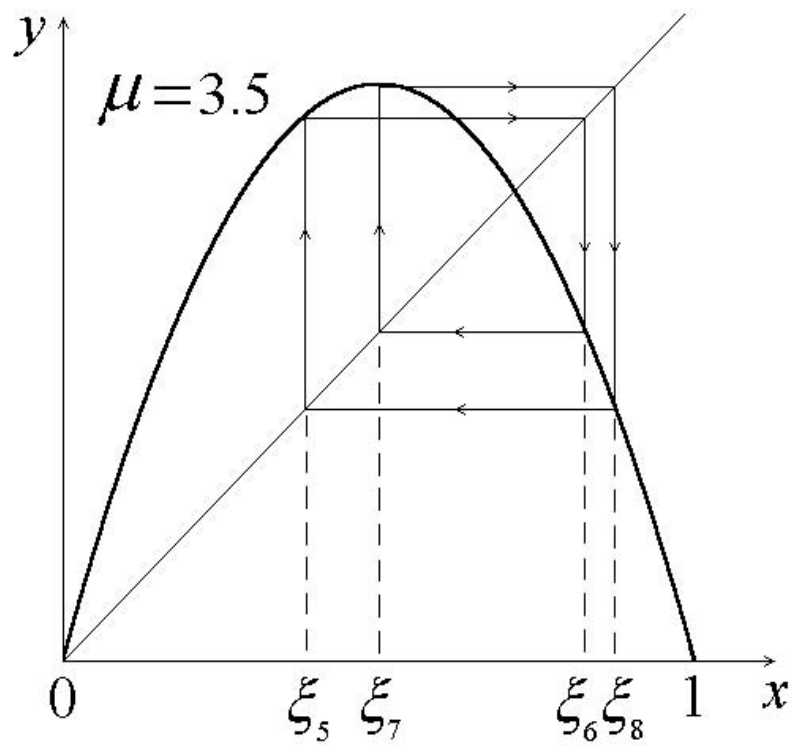


Рис. 4.5. Цикл S^4

Поскольку x_1 не совпадает ни с одной из точек ξ_1, ξ_2, ξ_3 , то $x_1 = \xi_4$. Далее находим $x_2 = \varphi(x_1) = \varphi^2(\xi_3) = \xi_3, x_3 = \xi_4$. Формируемая здесь

последовательность получается периодической: $x_{2t} = \xi_3, x_{2t+1} = \xi_4$. Ее элементы составляют цикл $S^2 = \{\xi_3, \xi_4\}$ (рис. 4.4).

Таким образом, при переходе параметра μ через критическое значение $\mu_1 = 3$ в системе (3.8) происходит бифуркация: одновременно с потерей устойчивости точкой покоя ξ_2 рождается цикл S^2 периода 2. Эта бифуркация сопровождается рождением двух новых точек покоя ξ_3, ξ_4 системы (4.1). При этом устойчивость этих точек покоя в системе (4.1) эквивалентна устойчивости цикла S^2 в системе (3.8).

4.4. Каскады бифуркаций, удвоение периода и переход к хаосу

При дальнейшем увеличении μ точки покоя ξ_3 и ξ_4 сохраняют устойчивость лишь до некоторого следующего бифуркационного значения μ_2 . Переход μ через μ_2 ведет к одновременной потере устойчивости у точек ξ_3 и ξ_4 . При этом у отображения

$$\varphi^4(x) = \varphi^2(\varphi^2(x)) = \varphi(\varphi(\varphi(\varphi(x))))$$

многочлена 8-й степени – рождаются четыре новые устойчивые точки покоя $\xi_5, \xi_6, \xi_7, \xi_8$.

Данная бифуркация с точки зрения исходной системы означает рождение устойчивого цикла

$$S^4 = \{\xi_5, \xi_6, \xi_7, \xi_8\} : \xi_6 = \varphi(\xi_5), \xi_7 = \varphi(\xi_6), \xi_8 = \varphi(\xi_7), \xi_5 = \varphi(\xi_8)$$

. Численность популяции повторяется через четыре шага (см. рис. 4.5).

Дальнейшее увеличение μ обнаруживает аналогичные бифуркационные значения $\mu_3, \mu_4, \mu_5, \dots$, связанные с рождением циклов $S^8, S^{16}, S^{32}, \dots$. При этом каждый раз, проходя очередное бифуркационное значение, соответствующий цикл S^{2^k} теряет устойчивость, происходит бифуркация удвоения периода, и рождается устойчивый цикл S^{4^k} .

Как видим, появление достаточно разнообразных циклов (ритмов) [8] в жизни популяции можно объяснить сугубо внутренними факторами, не изобретая в качестве первопричины каких-то периодических внешних воздействий.

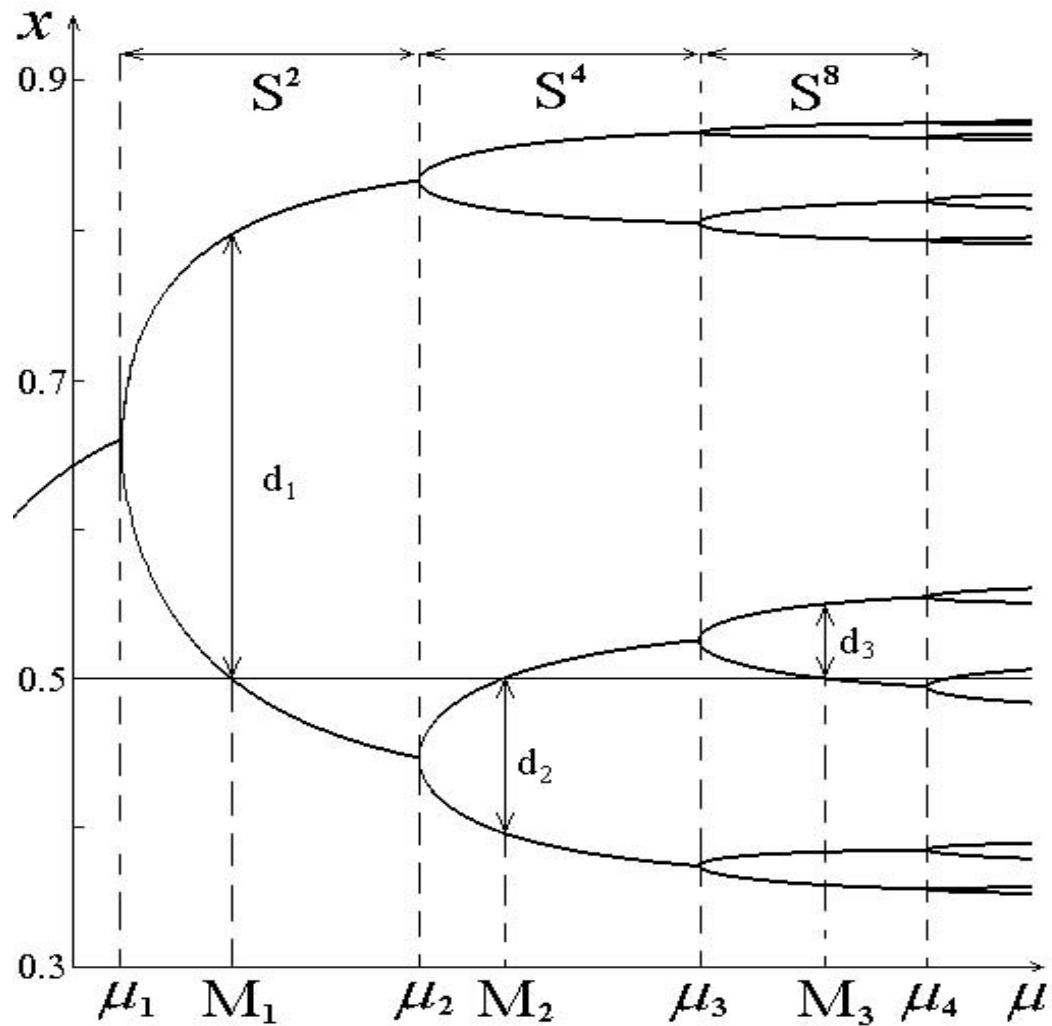


Рис. 4.6. Бифуркационная диаграмма

Общая картина усложнения циклов, происходящих в результате бифуркаций удвоения периода, представлена на рис. 4.6. Здесь при каждом μ указано устойчивое инвариантное предельное множество (множество предельных точек) — а т т р а к т о р (*attract* — притягивать) системы (3.8).

По мере прохождения бифуркационных значений

μ_0, μ_1, \dots картина усложняется. На интервале $[0, \mu_0]$ аттрактором является устойчивая точка покоя $\xi_1(\mu) \equiv 0$. На интервале $(\mu_0, \mu_1]$, где ξ_1 теряет устойчивость и далее не изображается, расположен график $\xi_2(\mu)$. На следующем интервале $(\mu_1, \mu_2]$, где ξ_2 теряет устойчивость, появляются графики $\xi_3(\mu)$ и $\xi_4(\mu)$ – точки аттрактора S^2 . Далее, на $(\mu_3, \mu_4]$ представлены графики $\xi_i(\mu)$ для $i = 5, 6, 7, 8$ – точки аттрактора S^4 и т. д.

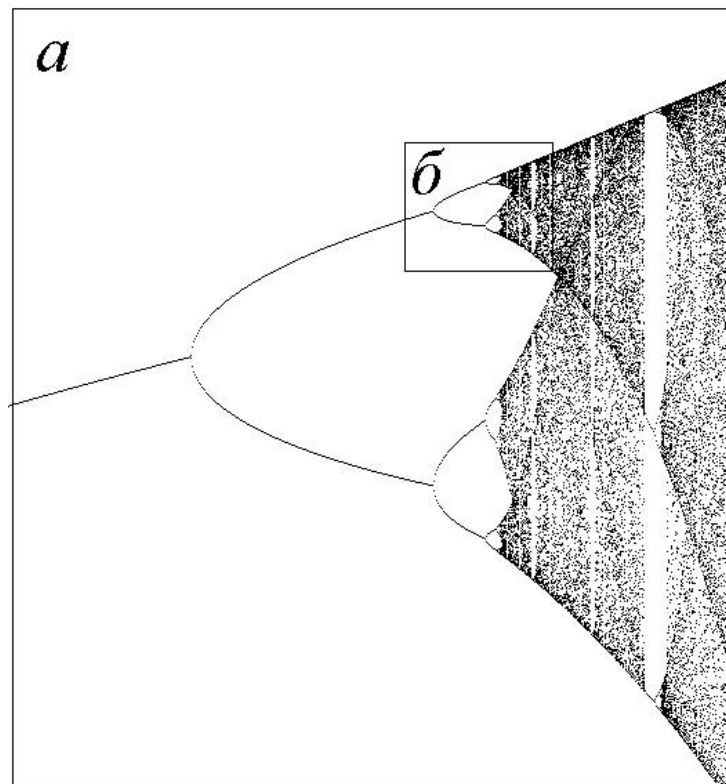
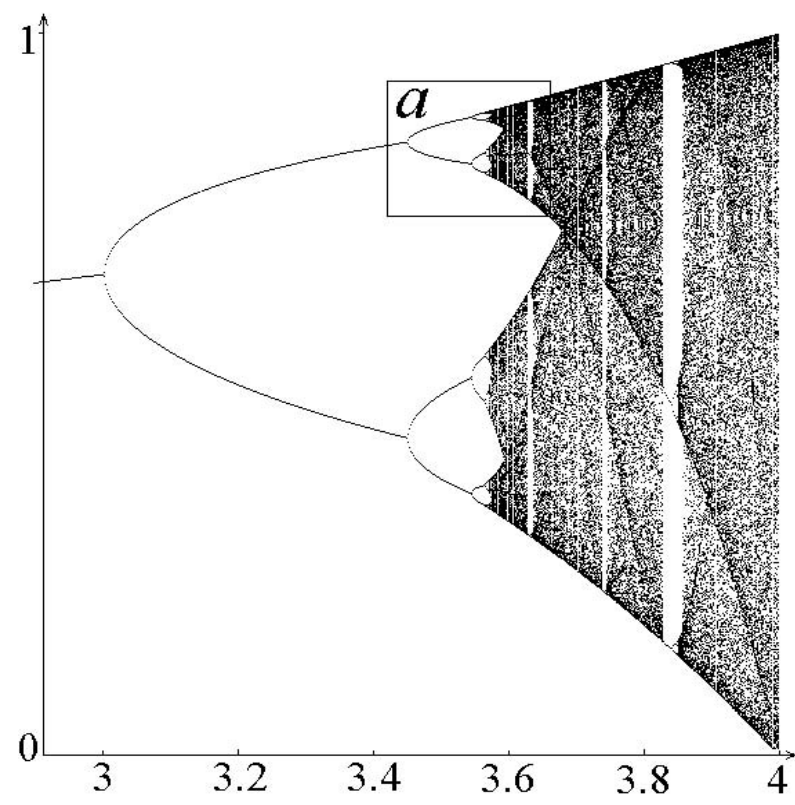
Отметим своеобразие нелинейных систем. В линейном случае появление неустойчивой точки всегда сопровождается уходом решений в бесконечность (система разрушается).

В нелинейном – потеря устойчивости ведет к появлению новых качественных особенностей в ее поведении, рождению новых аттракторов.

Последовательность μ_n при $n \rightarrow \infty$ имеет предел (обозначим его μ_∞). Система (3.8) при $\mu = \mu_\infty = 3.5699456\dots$ формирует сложную непериодическую последовательность – хаос. Соответствующие предельные множества получили название **с т р а н н ы х а т т р а к – т о р о в**.

Некоторое представление о характере поведения системы (3.8) в зоне $(\mu_\infty, 4]$ можно получить из рис. 4.7. Его левая часть повторяет бифуркационную схему рис. 4.6 и отражает зону параметров, для которых система ведет себя периодически ($(0, \mu_\infty)$ – зона «порядка»). Здесь аттракторы состоят из конечного набора точек.

При переходе параметра μ через μ_∞ «порядок» сменяется «хаосом». Аттракторы начинают выглядеть как множества, состоящие из сплошных (зачерненных) интервалов. В этой зоне выделяются и просветы – окна, в которых снова виден «порядок». В этих окнах расположены аттракторы, отвечающие периодическим циклам вида $S^{P \cdot 2^k}$, $P = 3, 5, 7, \dots$. Наиболее отчетливо в самом широком окне виден цикл S^3 .



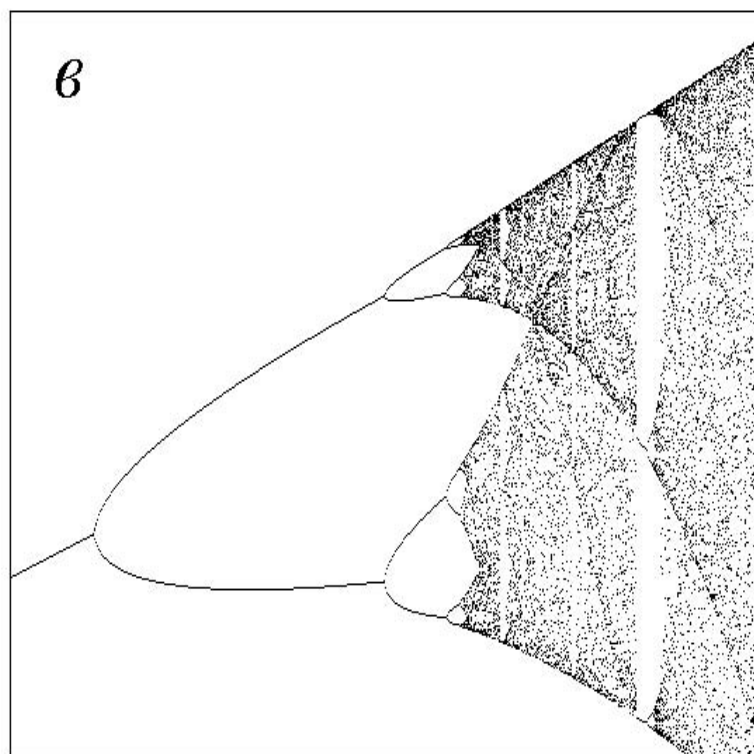
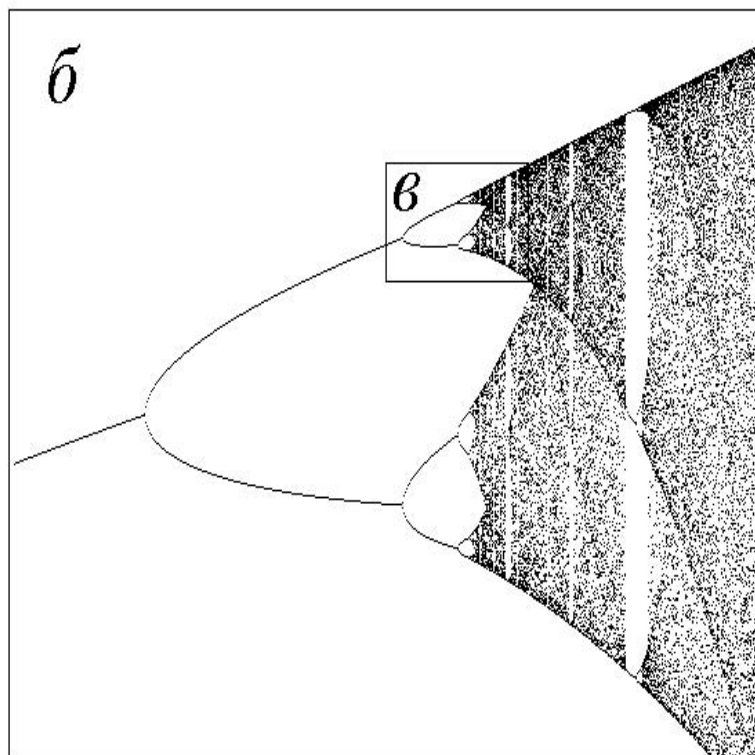


Рис. 4.7. Самоподобие

В зоне $(\mu_\infty, 4]$ содержится бесконечное количество бифуркаций «хаос» \rightarrow «порядок» и «порядок» \rightarrow «хаос». Следует подчеркнуть, что в режиме «хаоса» при больших n практически невозможно предсказать значение x_n .

Как же так, может спросить читатель, ведь состояние x_t однозначно определяется из (3.8) по t и x_0 ? Дело в том, что неизбежные, пусть даже очень малые, ошибки в определении начального значения x_0 приведут к тому, что вместо последовательности $x_0, x_1, x_2, \dots, x_t, \dots$ вы будете получать другую последовательность — $x_0^*, x_1^*, x_2^*, \dots, x_t^*, \dots$.

В режиме «хаоса», стартуя с практически неотличимых значений x_0 и x_0^* , уже через несколько итераций элементы x_t^* потеряют всякую связь с истинными значениями x_t .

В «хаотическом» режиме элементы последовательности x_n начинают вести себя как случайные величины. Для описания таких последовательностей используют приемы, принятые в теории вероятности и математической статистике.

В бифуркационной картине на рис. 4.7 *a, б, в* выделена последовательность кадров *a, б, в*, вложенных один в другой. При этом каждый последующий кадр представляет собой увеличенный фрагмент предыдущего. Как видим, все эти кадры удивительным образом воспроизводят практически одну и ту же картину. Здесь повторяются не только бифуркации удвоения периода, но и цепочки «хаос» \rightarrow «порядок», «порядок» \rightarrow «хаос». Отмеченная регулярность и повторяемость этих структур (с а м о п о д о б и е) позволяет надеяться на получение простого описания форм хаотического поведения, обнаруженных при исследовании различных нелинейных моделей.

Подводя итог приведенного анализа разнообразных явлений, порожденных нелинейной моделью динамики популяции, можно сказать следующее. Одна группа явлений связана с существованием регуляр-

ных и весьма упорядоченных процессов типа предельных точек покоя или циклов. В таких системах царит порядок, позволяющий по данным о прошлом и настоящем предсказывать будущее. Другую группу составляют хаотические процессы, возможности предсказания которых являются весьма ограниченными. Как правило, в анализе таких систем используется статистический подход (см., например: [14]), позволяющий получить лишь некоторые усредненные характеристики.

При этом между хаосом и порядком существует глубокая внутренняя связь. Хаотическое поведение возникает как предел усложняющейся последовательности периодических движений. Рассмотренная нами простейшая одномерная модель с квадратичной нелинейностью наглядно это демонстрирует.

Дополнительный материал по обсуждаемым здесь вопросам, включая другие сценарии перехода к хаосу, можно найти, например, в работах [6], [12], [13], [15], [21], [23].

Упражнения

4.1. Из условия $|(\varphi^2(\xi_{3,4}))'| = 1$ найти бифуркационное значение μ_2 , при котором теряет устойчивость 2-цикл.

4.2. Из условия $|(\varphi^2(\xi_{3,4}))'| = 0$ найти значение μ , соответствующее наиболее устойчивому 2-циклу.

4.3. Для системы

$$x_{t+1} = \mu g(x_t), \quad g(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

а) указать интервал значений μ , при которых элементы последовательности x_t не выходят из отрезка $[0, 1]$;

б) найти точки покоя и исследовать их устойчивость в зависимости от μ ;

в) построить бифуркационную диаграмму.

4.4. Для системы $\varphi(x) = \mu x(1 - x^2)$ найти точки покоя и исследовать их устойчивость.

5.1. Поведение критических значений параметра

В предыдущем параграфе был подробно описан сценарий поведения динамической системы, порождаемый итерационным процессом

$$x_{t+1} = \mu x_t(1 - x_t). \quad (5.1)$$

Этот сценарий таков: при определенных значениях параметра μ , $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ происходит бифуркация системы, сопровождаемая удвоением числа предельных точек – аттракторов итерационного процесса (5.1), а именно: при $\mu = \mu_n$ точки цикла порядка 2^{n-1} становятся неустойчивыми и рождается цикл порядка 2^n . Приведем приближенные численные значения для нескольких критических значений параметра μ :

$$\mu_1 < \mu < 3.449499\dots = \mu_2 \text{ — цикл порядка } 2$$

$$\mu_2 < \mu < 3.544090\dots = \mu_3 \text{ — цикл порядка } 2^2$$

$$\mu_3 < \mu < 3.564407\dots = \mu_4 \text{ — цикл порядка } 2^3$$

$$\mu_4 < \mu < 3.568759\dots = \mu_5 \text{ — цикл порядка } 2^4$$

$$\mu_5 < \mu < 3.569692\dots = \mu_6 \text{ — цикл порядка } 2^5$$

$$\mu_6 < \mu < 3.569891\dots = \mu_7 \text{ — цикл порядка } 2^6$$

$$\mu_7 < \mu < 3.569934\dots = \mu_8 \text{ — цикл порядка } 2^7.$$

Американский физик М. Фейгенбаум, экспериментируя на калькуляторе с процессом (5.1), обнаружил, что последовательность μ_n критических значений параметра сходится к некоторому предельному зна-

чению μ_∞ с геометрической скоростью, которая характеризуется величиной

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} = \delta, \quad (5.2)$$

и вычислил приближенно ее значение [19], которое составило

$$\delta = 4.6692016 \dots$$

Величина $\delta = 4.6692016 \dots$ получила название **п е р в о й у н и в е р с а л ь н о й к о н с т а н т ы Ф е й г е н б а у м а**.

Можно приближенно вычислить предельное значение μ_∞ последовательности критических значений параметра μ , используя формулу (5.2) и найденные значения $\mu_n (n = 1, 2, \dots)$. Для этого перепишем (5.2) в виде приближенного соотношения

$$\mu_n - \mu_{n-1} \approx \delta(\mu_{n+1} - \mu_n)$$

и положим в левой части $\mu_n \approx \mu_\infty$, а в правой $\mu_{n+1} \approx \mu_\infty$. Подставляя найденные значения $\mu_n = \mu_8$, $\mu_{n-1} = \mu_7$, имеем

$$\begin{aligned} \mu_\infty &\approx \frac{\delta \mu_8 - \mu_7}{\delta - 1} \approx \frac{4.669202 \cdot 3.569934 - 3.569891}{3.669202} \approx \\ &\approx 3.569946. \end{aligned}$$

Дальнейшие эксперименты показали, что при $\mu > \mu_\infty$ поведение итераций (5.1) становится абсолютно неупорядоченным, или, как принято говорить, **х а о т и ч е с к и м**.

Чтобы пояснить хаотический характер итераций при $\mu > \mu_\infty$, примем в процессе (5.1) $\mu = 4$ и возьмем в качестве начальной точки $x_0 = \sin^2 \pi \beta$, где β — иррациональное число.

Тогда, подставляя x_0 в формулу (5.1), последовательно находим

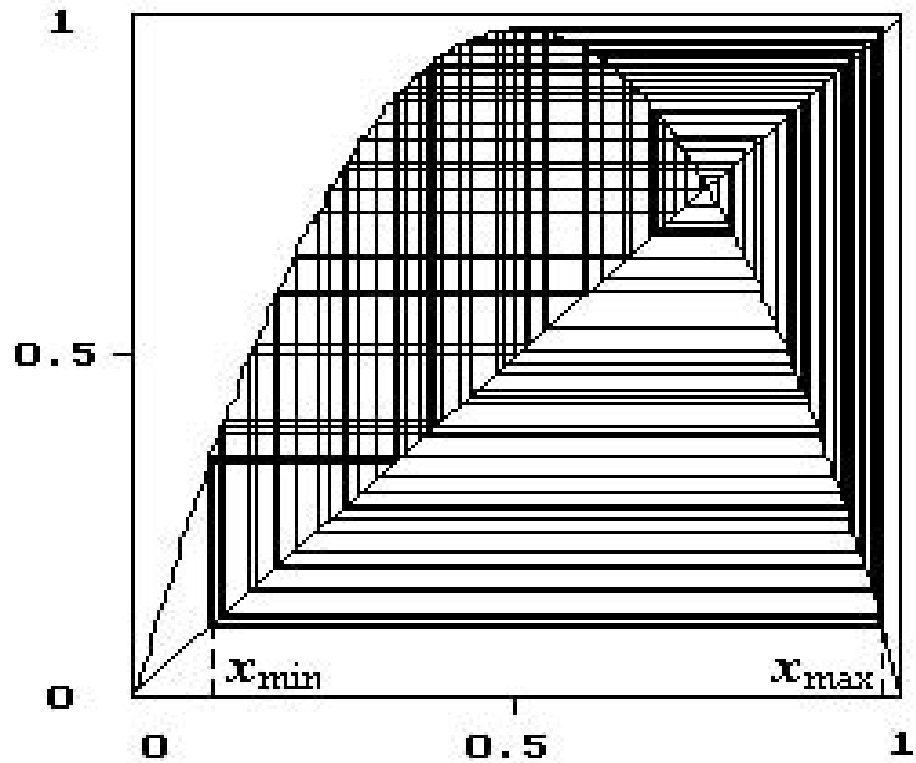
$$x_1 = 4 \sin^2 \pi \beta (1 - \sin^2 \pi \beta) = \sin^2 2\pi \beta,$$

$$x_2 = \sin^2 2^2 \pi \beta, \dots, x_n = \sin^2 2^n \pi \beta.$$

Полученные соотношения показывают, что x_n ведет себя как псевдослучайная величина, которая хаотично заполняет отрезок $[0,1]$. Эту ситуацию хорошо иллюстрирует рис. 5.1, на котором представлены итерации (5.1) при $\mu = 3.9$ после достаточно большого числа шагов ($N = 1000$). Видно, что x_n достаточно плотно заполнили отрезок $[x_{\min}, x_{\max}]$, где

$$x_{\max} = \varphi_{\mu}(x) \big|_{x=3.9} = \frac{\mu}{4} \big|_{\mu=3.9} = 0.975,$$

$$x_{\min} = \varphi_{\mu}(x) \big|_{x=x_{\max}} = \frac{\mu^2}{4} \left(1 - \frac{\mu}{4}\right) \big|_{\mu=3.9} = 0.095.$$



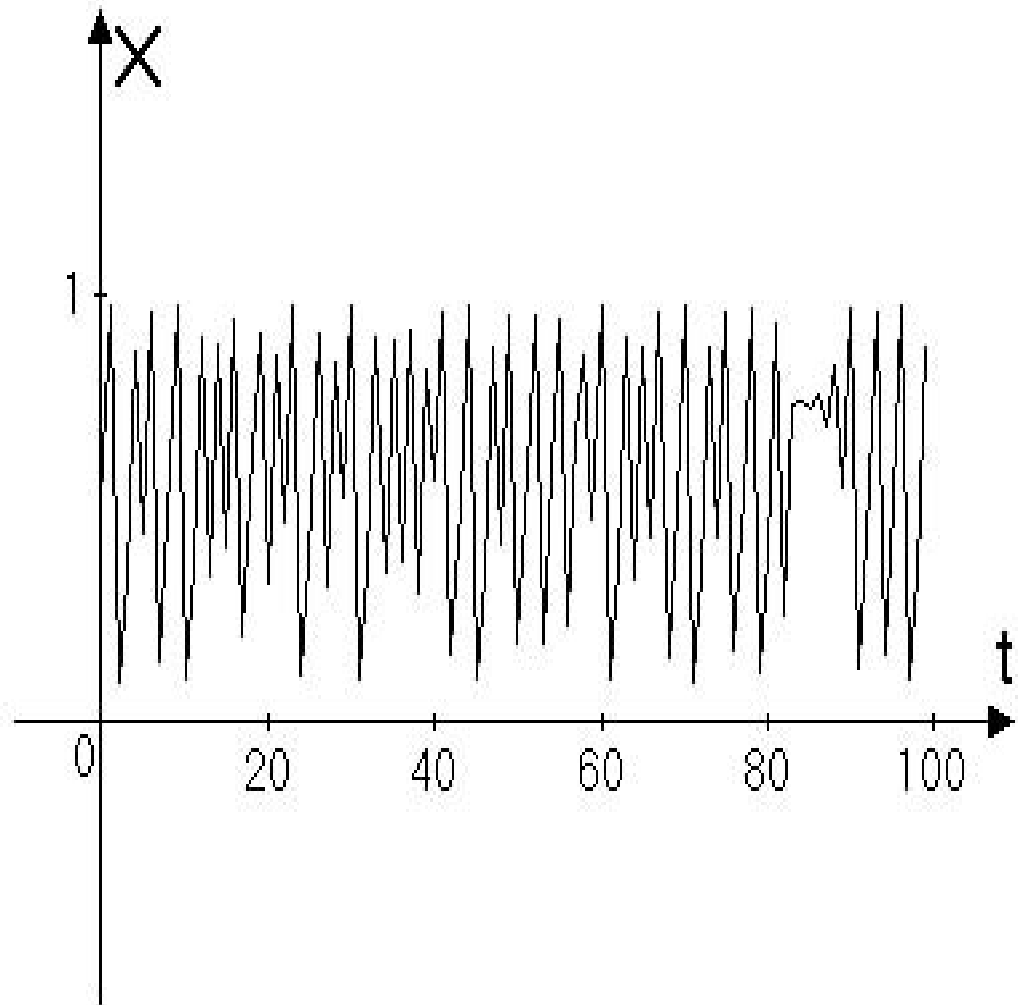


Рис. 5.1. Хаос при $\mu = 3.9$.

5.2. Показатель Ляпунова

Важнейшей количественной характеристикой особенностей динамики нелинейных систем является показатель Ляпунова. Показатель Ляпунова является функцией параметра μ , задающей степень устойчивости системы. В частности, по знаку этого показателя можно судить в какой области значений параметра находится система: область регулярного поведения, точки бифуркации или область хаоса?

Строгому определению предпослелим некоторые наводящие сообра-

жения. На отрезке $[0,1]$ возьмем две близкие точки $x_0, x_0 + \varepsilon$, где ε — малый параметр. После n итераций процессом (5.1) точки займут положение $\varphi_\mu^n(x_0), \varphi_\mu^n(x_0 + \varepsilon)$ соответственно. Введем величину λ , для которой приближенно выполнено соотношение

$$\exp[n\lambda] \approx \frac{|\varphi_\mu^n(x_0 + \varepsilon) - \varphi_\mu^n(\varepsilon)|}{\varepsilon}.$$

Поскольку правая часть соотношения при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к производной $|(\varphi_\mu^n(x_0))'|$, то можно определить функцию $\lambda^{\varphi, x_0}(\mu)$, независимую от n :

$$\lambda^{\varphi, x_0}(\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |(\varphi_\mu^n(x_0))'|.$$

Введенная характеристика называется **показателем Ляпунова**.

Этот показатель будет интересовать нас прежде всего как функция параметра μ . Однако ясно, что он зависит также от начальной точки x_0 и функции φ , хотя можно предположить, что в результате усреднения по n зависимость от x_0 будет слабой.

Теперь, с учетом формулы (2.3), показатель Ляпунова принимает вид

$$\lambda^{\varphi, x_0}(\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |\varphi'_\mu(x_i)|. \quad (5.3)$$

Утверждение 5.1. *Если*

$$\lambda(\mu) < 0,$$

то процесс (5.1) осуществляет периодический режим с циклом некоторого порядка.

Если

$$\lambda(\mu) = 0,$$

то это соответствует режиму бифуркации, т. е. удвоению периода.

Если

$$\lambda(\mu) > 0,$$

то поведение процесса хаотическое.

Рис. 5.2. иллюстрирует факт, составляющий содержание утверждения 5.1.

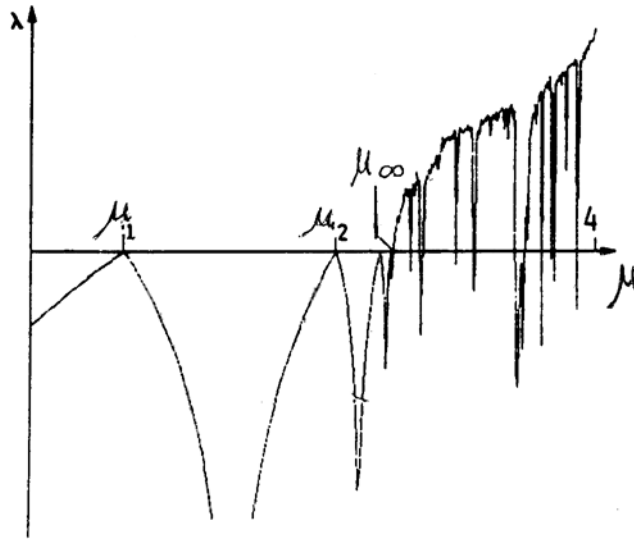


Рис. 5.2

Как будет показано в следующем параграфе, явления бифуркации, удвоения периода и перехода к хаотическому поведению системы не являются уникальным свойством процесса (5.1), а имеют место для целого класса функций $\varphi_\mu(x)$. В частности, аналогичным свойством обладает итерационный процесс с треугольным отображением $\varphi_\mu(x) = \mu(1 - |1 - 2x|)$.

Упражнения

5.1. Вычислить показатель Ляпунова для треугольного отображения

$$\varphi_\mu(x) = \mu(1 - |1 - 2x|).$$

5.2. Вычислить приближенно константу δ для треугольного отображения. Сравнить полученную величину с первой универсальной константой Фейгенбаума $\delta = 4.669201$.

6.1. Определение константы α

В своих исследованиях М. Фейгенбаум [19] обнаружил еще одну константу. Она определяется следующим образом. При переходе от цикла порядка 2^n ($n = 1, 2, \dots$) к циклу порядка 2^{n+1} в процессе (5.1) при некотором значении параметра $\mu = M_n$ точка $x^* = 1/2$ становится аттрактором (см. рис. 7.1, 7.2).

Обозначим через d_n алгебраическое расстояние (т. е. с учетом знака) от аттрактора $x^* = 1/2$ до ближайшего к нему аттрактора (см. рис. 4.6).

Оказывается, что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = -\alpha, \quad \alpha > 0, \quad (6.1)$$

который определяет вторую универсальную константу. Ее численное значение с точностью до семи знаков после запятой есть

$$\alpha = 2.5029078.$$

Позднее было установлено (см., например: [25]), что эту константу также можно определить соотношением

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d'_n}{d'_{n+1}} = -\alpha, \quad (6.1a)$$

где d'_n — расстояние между ближайшими к $1/2$ аттракторами при значении параметра $\mu = \mu_{n+1}$, когда цикл порядка 2^n разрушается и рождается цикл порядка 2^{n+1} .

6.2. Универсальность констант

Почему же константы δ, α называли универсальными?

Одна из версий происхождения этого термина следующая. В своей работе [19] М. Фейгенбаум пишет, что после его численных экспериментов с процессом (5.1) и обнаружением закономерностей, характеризующихся константами (5.2), (6.1), коллега по Лос-Аламосской лаборатории П. Стайн обратил его внимание, что итерационный процесс

$$x_{t+1} = \mu \sin(\pi x_t) \quad (t = 0, 1, 2, \dots)$$

с функцией шага $\varphi_\mu(x) = \mu \sin(\pi x)$ также обладает свойством удвоения периода (числа предельных точек) при изменении параметра μ и, что самое удивительное, с теми же константами δ, α !

Дальнейшие исследования показали, что явление бифуркации (резкого изменения поведения системы) обнаруживается для двумерного процесса Хеннона:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= 1 - ax_t^2 + y_t \\ y_{t+1} &= bx_t, \end{aligned} \tag{6.2}$$

причем последовательность a_n критических значений параметра a (для некоторых фиксированных значений b), при которых происходит качественный скачок в процессе (6.2), подчиняется соотношению (5.2).

Конечно, в данном случае можно говорить о некотором сходстве систем (5.1) и (6.2), например, о наличии квадратичной нелинейности.

Однако та же закономерность при изменении одного из параметров была обнаружена в знаменитой системе Лоренца

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned}$$

А именно: при $\sigma = 10$, $b = 8/3$ отношение

$$\sigma_n = \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n}$$

критических значений параметра r_n очень хорошо аппроксимирует константу δ , например $\delta_5 \approx 4.670$ (см. [7]).

Рис. 7.8 иллюстрирует сложное поведение решения системы Лоренца.

На этом рисунке изображена траектория, порождаемая системой Лоренца при $r = 28, \sigma = 10, b = 8/3$. Оказывается, что а) она притягивается к ограниченной области в фазовом пространстве (аттрактору Лоренца); б) движение ее блуждающее, т. е. траектория делает один виток направо, затем несколько витков налево, затем снова направо и т. д.; в) траектория очень чувствительна к малым изменениям начальных условий.

Факт геометрической скорости сходимости (с константой δ) критических значений параметра был подтвержден и во многих других системах. Это обстоятельство, по-видимому, породило у некоторых исследователей уверенность в том, что переход динамической системы к хаосу происходит по одному и тому же сценарию и может быть описан одной и той же константой δ . Что касается константы α , которая отвечает за структуру аттракторов в одномерном итерационном процессе, то были найдены другие функции $\varphi_\mu(x)$, отличные от $\varphi_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, $\varphi_\mu(x) = \mu \sin(\pi x)$, которые генерируют итерационные последовательности (орбиты) со свойством удвоения числа предельных точек, расположение которых на отрезке подчинено соотношению (6.1).

По-видимому, М. Фейгенбаумом впервые была высказана гипотеза, которая до сих пор строго не доказана, но и не опровергнута, что установленные закономерности, характеризуемые константами $\delta = 4.6692016 \dots$, $\alpha = 2.5029078 \dots$, справедливы по крайней мере для

всех унимодальных функций с квадратичной нелинейностью в точке максимума, т. е. функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условию

$$\varphi(x) - \varphi(\bar{x}) = O(x - \bar{x})^2$$

в окрестности единственной точки максимума \bar{x} на отрезке.

Таким образом, можно сказать, что сценарий удвоения числа предельных точек процесса (5.1) и переход к хаосу не зависят от конкретной функции $\varphi(x)$ в пределах класса с квадратичной нелинейностью и, следовательно, носят универсальный характер.

Таким образом, в математике, наряду с числами $e = 2.718281\dots$, $\pi = 3.141592\dots$, найдены еще две замечательные иррациональные константы α и δ , которые характеризуют сценарий бифуркации в одномерном итерационном процессе с функцией перехода $\varphi_\mu(x)$, обладающей квадратичной нелинейностью.

Вскоре выяснилось, однако, что численные значения констант α, δ , определяемых соотношениями (5.2), (6.1), зависят от характера нелинейности переходной функции $\varphi_\mu(x)$.

Проще всего это можно пояснить, если от системы (5.1) перейти к процессу

$$v_{t+1} = 1 - a|v_t|^2, \quad (6.3)$$

где функция перехода $\psi_a(x) = 1 - ax^2$ задана на отрезке $[-1, 1]$.

Заменой

$$v_t = \frac{4}{\mu - 2} \left(x_t - \frac{1}{2} \right), \quad a = \frac{\mu(\mu - 2)}{4}$$

один процесс сводится к другому, но процесс (6.3) более удобен, так как в нем ясно виден квадратичный характер нелинейности и его легко можно варьировать, меняя степень.

Оказалось, что если теперь рассмотреть одномерный итерационный процесс

$$v_{t+1} = 1 - a|v_t|^p \equiv \psi_a(v_t) \quad (6.4)$$

при $p > 2$ (например, $p = 3$), то он, как и (6.3), испытывает бифуркации (удвоение периода), существуют пределы (5.2), (6.1), но численные значения констант δ, α уже другие. Итак, константы δ, α зависят от степени p , и следует писать δ_p, α_p , отмечая зависимость констант от показателя степени p .

6.3. Класс функций, порождающий бифуркацию удвоения

Естественно возникает вопрос, можно ли описать совокупность всех функций $\varphi_\mu(x)$, для которых итерационный процесс претерпевает бифуркации, причем сценарий удвоения периода, структура аттракторов и переход к хаотическому поведению системы характеризуется некоторыми константами δ, α , которые определяются соотношением (5.2), (6.1). Попытаемся это сделать из существующего к настоящему времени теоретического анализа и вычислительного опыта.

Обозначим этот класс через K и будем считать для определенности, что речь идет о функциях на отрезке $[0, 1]$.

Не лишено достоверности (это лишь гипотеза!) следующее утверждение (для простоты в записи функции мы опускаем параметр μ).

У т в е р ж д е н и е 6.1. *Для того чтобы функция $\varphi(x)$, где $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, трижды дифференцируемая почти всюду, принадлежала классу K , достаточно выполнение следующих условий:*

- 1) *существует единственная точка максимума $x^* \in (0, 1)$ этой функции;*
- 2) $\varphi'(x) > 0 \quad \forall x \in [0, x^*), \quad \varphi'(x) < 0 \quad \forall x \in (x^*, 1];$
- 3) *п р о и з в о д н а я Ш в а р ц а*

$$S[\varphi](x) = \frac{\varphi'''(x)}{\varphi''(x)} - \frac{3}{2} \left[\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)} \right]^2 < 0$$

почти для всех $x \in [0, 1]$.

Строгое доказательство этого факта (как, впрочем, и пример, опровергающий его) отсутствует, но некоторую аргументацию в пользу этого утверждения, в частности, важности условия 3 можно найти в работе Г. Шустера ([23], см. приложение 3).

Однако справедлива следующая теорема, в которой для $\varphi \in C^3[0, 1]$ с условиями 1 – 3 утверждается несколько более слабое свойство, чем принадлежность классу K .

Т е о р е м а 6.1. *Пусть $\varphi \in C^3[0, 1]$ и выполнены условия 1 – 3 из утверждения 6.1. Тогда существует не более одного устойчивого цикла. В случае его существования элементы цикла являются предельными точками последовательности*

$$v^n = \varphi^n(x^*),$$

где x^* — точка из условия 2 ($\varphi'(x^*) = 0$).

Доказательство теоремы приведено в работе Д. Зингера. Там же построен пример, показывающий, что без условия 3 утверждение, вообще говоря, не имеет места (см. [31]).

З а м е ч а н и е 6.1. Условие 3 в утверждении 1 нельзя, вообще говоря, заменить более слабым — $S[\varphi](x) \leq 0$. Например, для линейной функции $S[\varphi](x) \equiv 0$, но эта функция, очевидно, не принадлежит классу K . С другой стороны, для кусочно-линейной функции $\varphi(x) = \mu(1 - |1 - 2x|)$ также $S[\varphi](x) \equiv 0$ (за исключением точки $x = 1/2$, где она является недифференцируемой), тем не менее эта функция из класса K , в чем непосредственно можно убедиться, исследуя итерационный процесс с такой переходной функцией. Следовательно, условие 3 не является необходимым для $\varphi \in K$.

Упражнения

6.1. Доказать следующие свойства производной Шварца:

1) если f — линейная функция, а $\varphi \in C^3$, то

$$S[f(\varphi)](x) = S[\varphi](x) \text{ для всех } x;$$

2) если φ — дробно линейная функция, то $S[\varphi](x) = 0$;

3) если $S[\varphi](x) < 0$ ($S[\varphi](x) > 0$) и $S[f](x) \leq 0$ ($S[f](x) \geq 0$), то $S[f(\varphi)](x) < 0$ ($S[f(\varphi)](x) > 0$);

4) если для функции $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ $S[\varphi](x) < 0$, то для любого целого n выполняется неравенство

$$[\varphi^n](x) < 0. \text{ Здесь } \varphi^n(x) = \underbrace{\varphi(\varphi(\dots \varphi(x)))}_{n \text{ раз}}.$$

6.2

А. Проверить аналитически, что следующие функции удовлетворяют условиям утверждения 6.1:

1) $\varphi_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, $x \in [0, 1]$, $0 \leq \mu \leq 4$;

2) $\varphi_\mu(x) = \exp^{-\mu x^2}$, $x \in [-1, 1]$, $0 \leq \mu \leq 1$;

3) $\varphi_\mu(x) = \mu \sin x$, $x \in [0, \pi]$, $0 \leq \mu \leq 1$;

4) $\varphi_\mu(x) = 1 - \mu|x|^p$, $x \in [-1, 1]$, $0 \leq \mu \leq 1$, $1 < p < \infty$.

Б. Численно найти показатель Ляпунова на некоторой сетке по μ для функций из пункта А. Построить бифуркационную диаграмму.

В. Построить другие функции из класса K и протестировать их аналогично пунктам А, Б.

Г. Построить функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую условиям 1, 2 утверждения 6.1 и не принадлежащую классу K .

Д. Построить функцию $\varphi(x)$ из класса K , удовлетворяющую условиям 1 – 2 и не удовлетворяющую условию 3 утверждения 6.1.

Глава 2. Непрерывные динамические системы

§ 7. Модели динамических процессов

Стандартными моделями динамических процессов с непрерывным временем являются дифференциальные уравнения. Впервые появившиеся в задачах механики, они в настоящее время широко используются и в других областях при моделировании различных процессов.

7.1. Одномерная модель динамики популяции

Простейшей моделью динамики популяции с непрерывно меняющимся временем является дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = \alpha x - \beta x - \gamma x^2. \quad (7.1)$$

Здесь

$x(t)$ – численность популяции в момент времени t ,

$\alpha > 0$ – коэффициент рождаемости,

$\beta > 0$ – коэффициент смертности, вызванной старением организма,

$\gamma > 0$ – коэффициент смертности, связанный с ограниченностью ресурса.

Для заданного $x(0) = x_0$ (значения численности популяции в начальный момент времени $t = 0$) решение этого уравнения можно найти аналитически.

При $a \neq 0$

$$x(t) = \frac{ae^{at}}{\gamma(e^{at} - 1) + \frac{a}{x_0}},$$

при $a = 0$

$$x(t) = \frac{1}{\gamma t + \frac{1}{x_0}}.$$

Здесь динамика численности определяется коэффициентом естественного прироста $a = \alpha - \beta$.

При $a > 0$ численность популяции $x(t)$, независимо от начального значения x_0 , при $t \rightarrow \infty$ стремится к стационарному значению (см. рис.7.1)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x} = \frac{a}{\gamma} > 0.$$

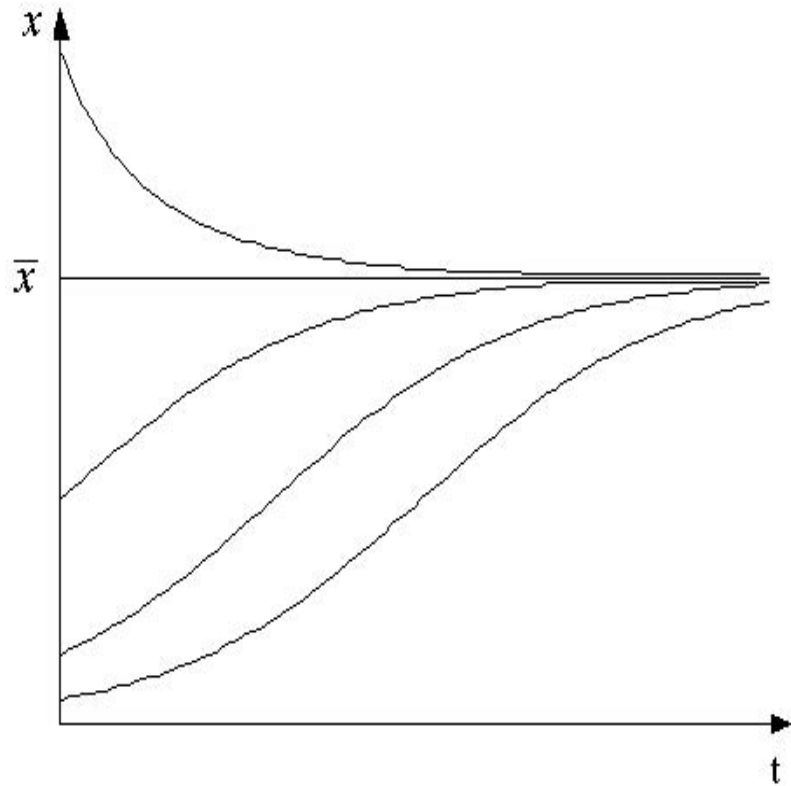


Рис. 7.1. Динамика решений уравнения (7.1) при $\alpha > \beta$

В случае $a \leq 0$ численность популяции стремится к нулю, популяция вымирает.

7.2. Модель «хищник – жертва»

Основателем современной математической теории популяций справедливо считается итальянский математик Вито Вольтерра, разработавший математическую теорию биологических сообществ, аппаратом которой служат дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения. (Vito Volterra. Lecons sur la Theorie Mathematique de la Lutte pour la Vie. Paris, 1931). В последующие десятилетия популяционная динамика развивалась, в основном, в русле высказанных в этой книге идей. Русский перевод книги Вольтерра вышел в 1976 г. под названием "Математическая теория борьбы за существование" с послесловием Ю.М. Свирежева, в котором рассматривается история развития математической экологии в период 1931 – 1976 гг. Книга Вольтерра написана так, как пишут книги по математике. В ней сначала сформулированы некоторые предположения о математических объектах, которые предполагается изучать, а затем проводится математическое исследование свойств этих объектов. Системы, изученные Вольтерра, состоят из двух или нескольких видов. В отдельных случаях рассматривается запас используемой пищи. В основу уравнений, описывающих взаимодействие этих видов, положены следующие представления.

Гипотезы Вольтерра:

1. Пища либо имеется в неограниченном количестве, либо ее поступление с течением времени жестко регламентировано.
2. Особи каждого вида отмирают так, что в единицу времени погибает постоянная доля существующих особей.
3. Хищные виды поедают жертв, причем в единицу времени количество съеденных жертв всегда пропорционально вероятности встречи особей этих двух видов, т.е. произведению количества хищников на количество жертв.

4. Если имеется пища в ограниченном количестве и несколько видов, которые способны ее потреблять, то доля пищи, потребляемой видом в единицу времени, пропорциональна количеству особей этого вида, взятому с некоторым коэффициентом, зависящим от вида (модели межвидовой конкуренции).

5. Если вид питается пищей, имеющейся в неограниченном количестве, прирост численности вида в единицу времени пропорционален численности вида.

6. Если вид питается пищей, имеющейся в ограниченном количестве, то его размножение регулируется скоростью потребления пищи, т.е. за единицу времени прирост пропорционален количеству съеденной пищи.

Эти гипотезы имеют близкие параллели с химической кинетикой. В уравнениях популяционной динамики, как и в уравнениях химической кинетики, используется "принцип соударений", когда скорость реакции пропорциональна произведению концентраций реагирующих компонентов. Действительно, согласно гипотезам Вольтерра, скорость процесса отмирания каждого вида пропорциональна численности вида. В химической кинетике это соответствует мономолекулярной реакции распада некоторого вещества, а в математической модели - отрицательным линейным членам в правых частях уравнений. Согласно представлениям химической кинетики, скорость бимолекулярной реакции взаимодействия двух веществ пропорциональна вероятности столкновения этих веществ, т.е. произведению их концентрации. Точно так же, в соответствии с гипотезами Вольтерра, скорость размножения хищников (гибели жертв) пропорциональна вероятности встреч особей хищника и жертвы, т.е. произведению их численностей. И в том и в другом случае в модельной системе появляются билинейные члены в правых частях соответствующих уравнений.

Классической моделью динамики двух взаимодействующих популяций является модель Лотке–Вольтерра, задаваемая системой двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy, & \alpha > 0, \beta \geq 0, \\ \dot{y} = -\gamma y + \delta xy, & \gamma > 0, \delta \geq 0. \end{cases} \quad (7.2)$$

Здесь

$x(t)$ – численность жертв,

$y(t)$ – численность хищников.

В условиях изоляции ($\beta = \delta = 0$) численность жертв

$$x(t) = e^{\alpha t} x_0$$

экспоненциально возрастает, а численность хищников

$$y(t) = e^{-\gamma t} y_0$$

экспоненциально убывает. При взаимодействии ($\beta > 0, \delta > 0$) в системе может наблюдаться равновесное состояние, отвечающее стационарному решению

$$x(t) \equiv \bar{x} = \frac{\gamma}{\delta}, \quad y(t) \equiv \bar{y} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Отклонение от равновесия ведет к колебательному решению (см. рис. 7.2). Здесь сплошной кривой изображен график изменения численности жертв, а пунктирной – динамика численности хищников.

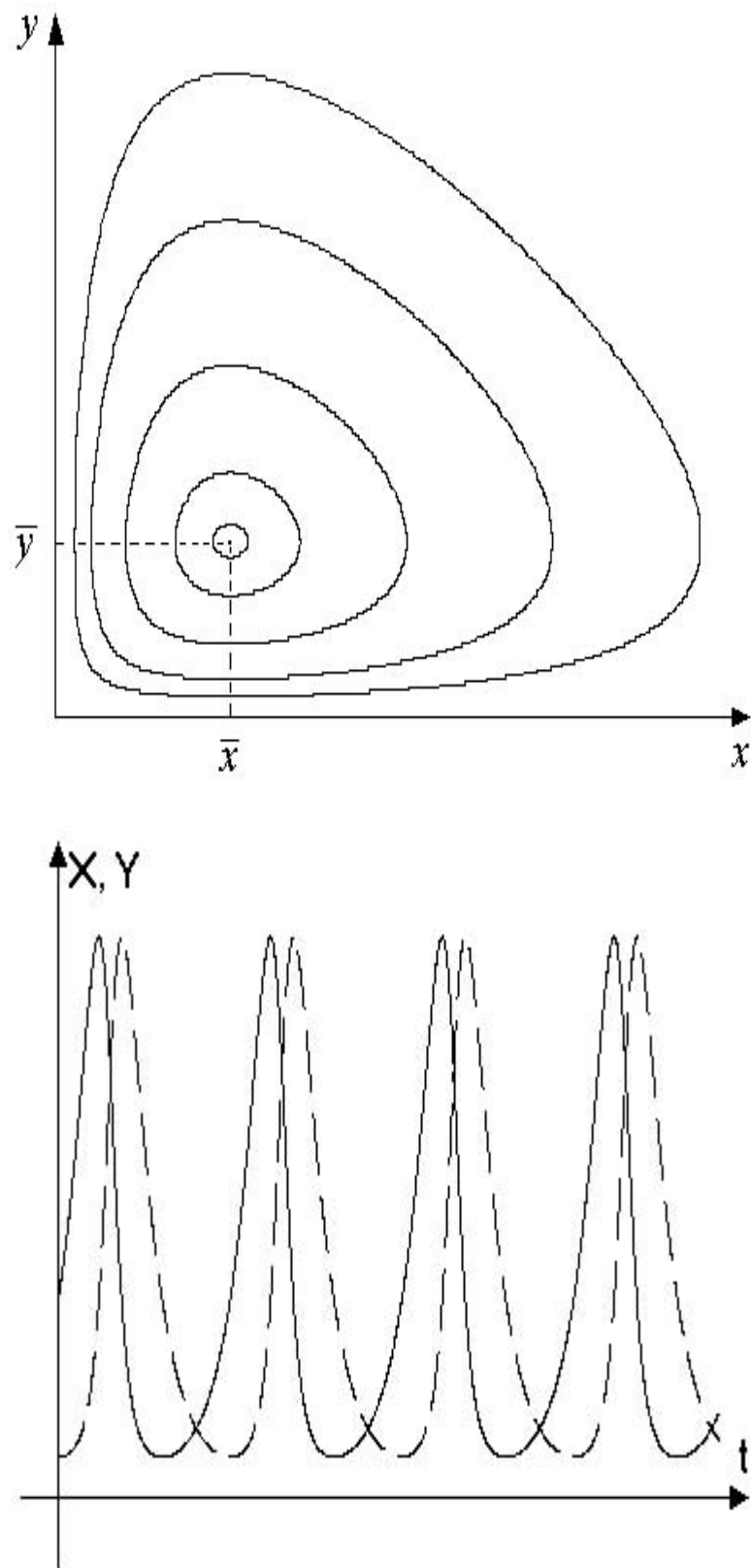


Рис. 7.2. Периодические решения в модели «хищник – жертва»

7.3. Линейный осциллятор

Движение бруска, связанного с пружиной при наличии трения, задается дифференциальным уравнением второго порядка

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + lx = 0.$$

Здесь

$x(t)$ – отклонение от положения равновесия,

m – масса бруска,

k – коэффициент трения,

l – коэффициент жесткости пружины.

Будем далее считать, что $m = 1$.

От уравнения перейдем к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -lx - ky. \end{cases} \quad (7.3)$$

В отсутствие трения ($k = 0$) брусок совершает гармонические колебания по закону

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{y_0}{\omega} \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{l},$$

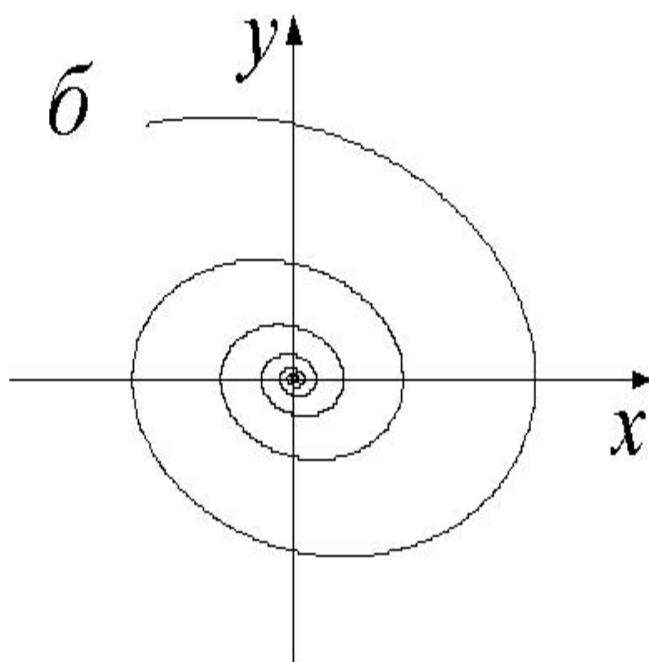
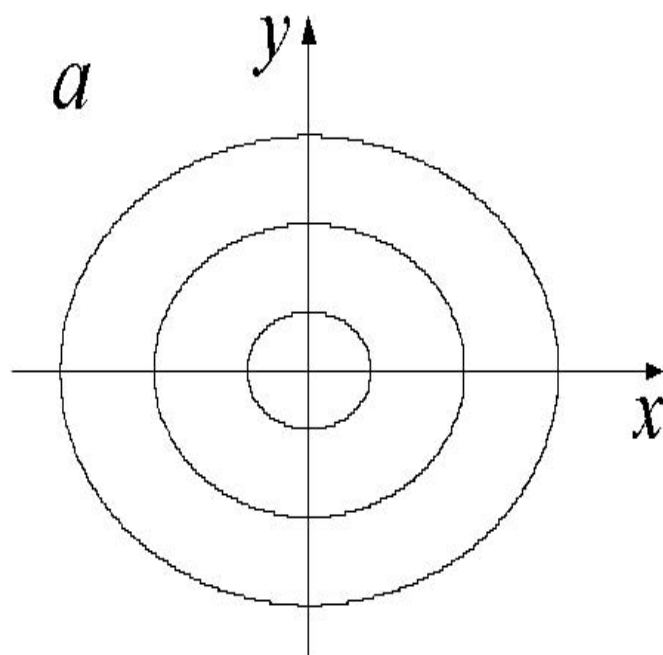
где $x_0 = x(0)$, $y_0 = \dot{x}(0)$ – начальные положение и скорость, а ω – частота колебаний (рис. 7.3, а).

Слабое трение ($0 < k < 2\omega$) ведет к затуханию колебаний (рис. 7.3, б). Действительно, в этом случае решение имеет вид

$$x(t) = \left(x_0 \cos \omega_1 t + \frac{2y_0 + x_0 k}{2\omega_1} \sin \omega_1 t \right) e^{-\frac{k}{2}t}, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \frac{k^2}{4}},$$

и, следовательно, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

При сильном трении ($k > 2\omega$) система стремится к положению равновесия без колебаний (рис. 7.3, в).



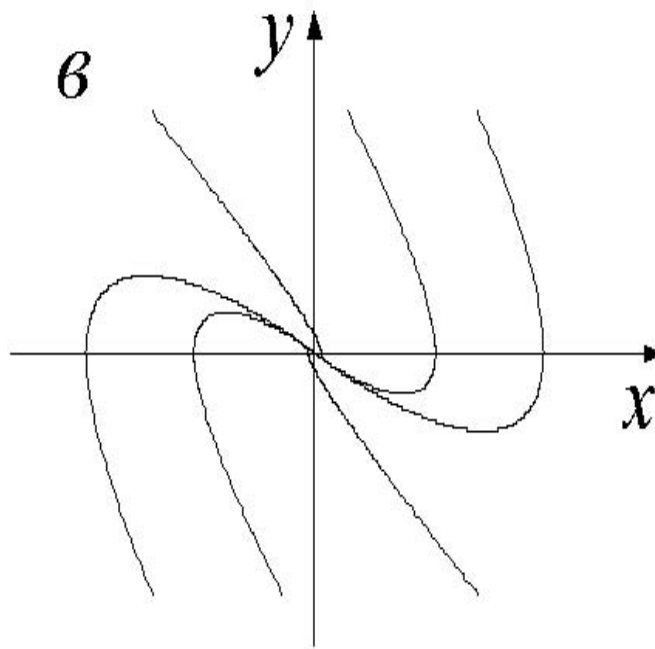


Рис. 7.3. Линеиный осциллятор:

a – отсутствие трения ($k = 0$); $б$ – слабое трение ($0 < k < 2\omega$); $в$ – сильное трение ($k > 2\omega$)

7.4. Электронный осциллятор. Уравнение Ван-дер-Поля

Классической моделью электронного генератора является предложенное Ван-дер-Полем дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + x = \delta(1 - x^2)\dot{x}.$$

Перепишем его в виде системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \delta(1 - x^2)y. \end{cases} \quad (7.4)$$

При $\delta > 0$ траектории системы с ростом t стремятся к некоторой замкнутой кривой – предельному циклу (рис. 7.4).

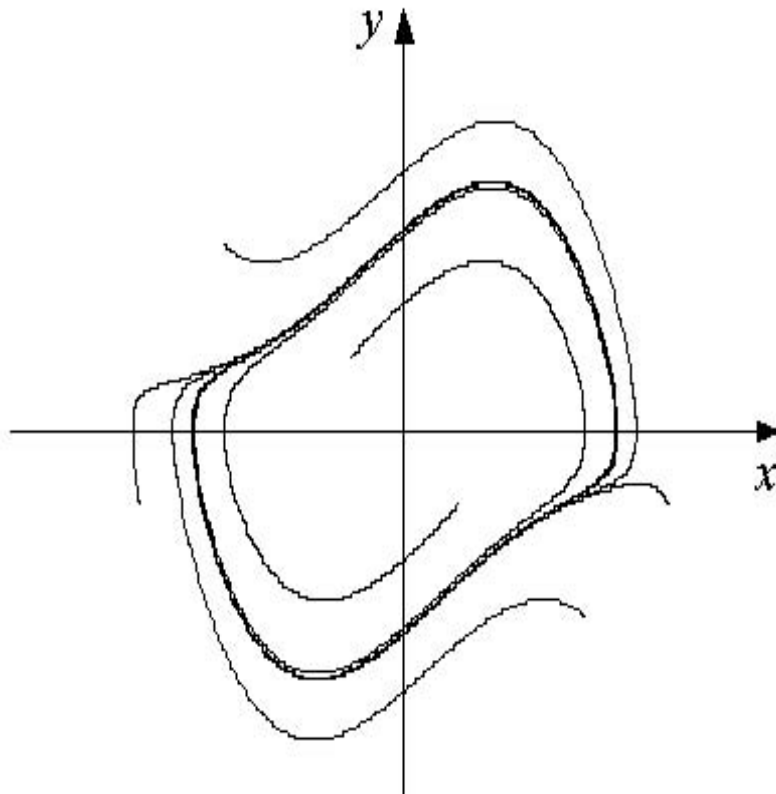


Рис. 7.4. Предельный цикл уравнения Ван-дер-Поля при $\delta = 1$

В результате в системе поддерживаются колебания фиксированной частоты и амплитуды (автоколебания).

7.5. Химический осциллятор (брюсселятор)

Изучая неравновесные химические процессы, Тьюринг (1952), Пригожин и Лефевр (1976) предложили и исследовали систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - (b + 1)x + ax^2y, & a > 0, b > 0 \\ \dot{y} = bx - ax^2y. \end{cases} \quad (7.5)$$

Основной целью при изучении этой модели, получившей название брюсселятор, было установление качественных типов поведения, совместимых с фундаментальными законами химической и биологической ки-

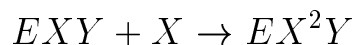
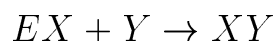
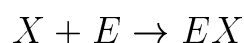
нетики. В настоящее время брюсселятор играет роль базовой модели биологии, такой же как гармонический осциллятор в физике или модели Вольтерра в динамике популяций.

Брюсселятор содержит простейшую реализацию кубической нелинейности посредством химической реакции



Хотя тримолекулярная стадия в химической кинетике не столь распространена, как бимолекулярные процессы, выражения для скорости ряда биохимических реакций в определенных случаях можно свести к кубическому виду.

В качестве примера приведем следующую последовательность ферментативных реакций:



Здесь предполагается что фермент E имеет по крайней мере три каталитических центра, способных одновременно фиксировать две молекулы X и одну молекулу Y . Если образующиеся комплексы распадаются с достаточно большой скоростью, а ферменты присутствуют в небольших количествах, легко показать, что всю последовательность реакций можно свести к одной стадии, дающей нелинейный член типа X^2Y в выражении для скорости реакции.

Данная модель, подобно уравнению Ван-дер-Поля, имеет устойчивые периодические режимы (рис.7.5). Периодический характер реакции, наблюдаемый в этой модели, в свое время был весьма неожиданным для специалистов.

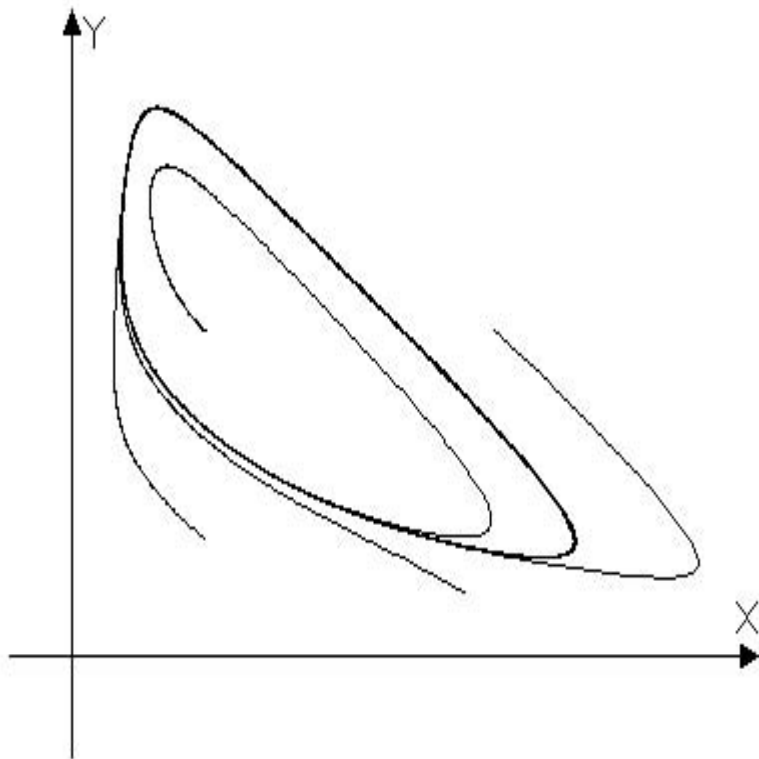


Рис. 7.5. Предельный цикл брюсселятора ($a = 1$, $b = 3$)

7.6. Гликолитический осциллятор (модель Хиггинса)

Классическим примером колебательной биохимической реакции является гликолиз.

Гликолиз является одним из древнейших путей метаболизма клетки, возникший на ранних стадиях эволюции.

В процессе гликолиза осуществляется распад глюкозы и других сахаров, при этом соединения, содержащие шесть молекул углерода, превращаются в трикарбоновые кислоты, включающие три молекулы углерода. За счет избытка свободной энергии в процессе гликолиза на одну молекулу шестиуглеродного сахара образуются две молекулы АТФ.

Гликолиз до сих пор играет большую роль в процессе эволюции, например у простейших микроорганизмов. Гликолитический аппарат

сохранился и в клетках высших организмов, в том числе млекопитающих. Интенсивный гликолиз осуществляется, например, в сердечных мышцах.

Основную роль в генерации наблюдаемых колебаний концентраций компонентов реакции: фруктозо-6-фосфата, фруктозо-1,6-фосфата и восстановленного НАД (никотинаминадениндинуклеотид) играет ключевой фермент гликолитического пути фосфофруктокиназа (ФФК).

Интересно, что колебательные реакции в системе гликолиза были сначала предсказаны на математической модели (Higgins, 1964), и лишь после этого зарегистрированы экспериментально с помощью метода дифференциальной спектрофотометрии в лаборатории Б. Чанса (1966).

В безразмерных переменных уравнения гликолиза имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - xy \\ \dot{y} = py \left(x - \frac{1+q}{q+y} \right) \end{cases};$$

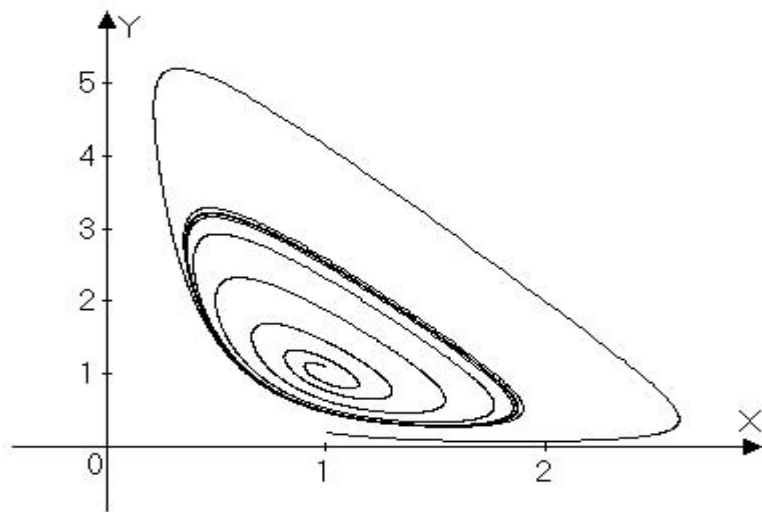


Рис. 7.6. Предельный цикл гликолитического осциллятора ($p = 2.5$, $q = 1.$)

7.7. Модель осцилляторной активности нейрона

В настоящее время общепризнанно и подтверждено экспериментами, что ритмические движения живых организмов задаются нейронами, вырабатывающими тот или иной стандартный ритм в автономном режиме, не используя сенсорную обратную связь с двигательным аппаратом животного. Осцилляторная активность нейрона объясняется тем, что нейрон является неравновесной системой с различными механизмами обратных связей. Именно эти связи, закрывающие или открывающие ионные каналы, в соответствующей фазе электрической активности мембраны могут сделать нейрон неустойчивым и превратить его в генератор.

Для описания динамики нейронов используются классические модели Ходжкина-Хаксли (1952г.). Одной из стандартных моделей нейрона является система Бонхоффера - Ван-дер-Поля

$$\begin{cases} \dot{x} = c(x - \frac{x^3}{3} + y + z) \\ \dot{y} = (a - x - by)/c. \end{cases}$$

Здесь x – электрический потенциал клеточной мембраны нейрона, y – удельная электропроводность калийного русла мембраны, z – основной управляемый параметр системы в промежутке $[-0.6; 2]$, представляет физиологически возможное состояние нейрона, c – электрическая емкость мембраны, a и b – параметры, характеризующие активацию и инактивацию канала и могут рассматриваться как вероятности открытия и закрытия того или иного канала. Стандартным набором параметров в литературе является $a = 0.7$, $b = 0.8$, $c = 3$.

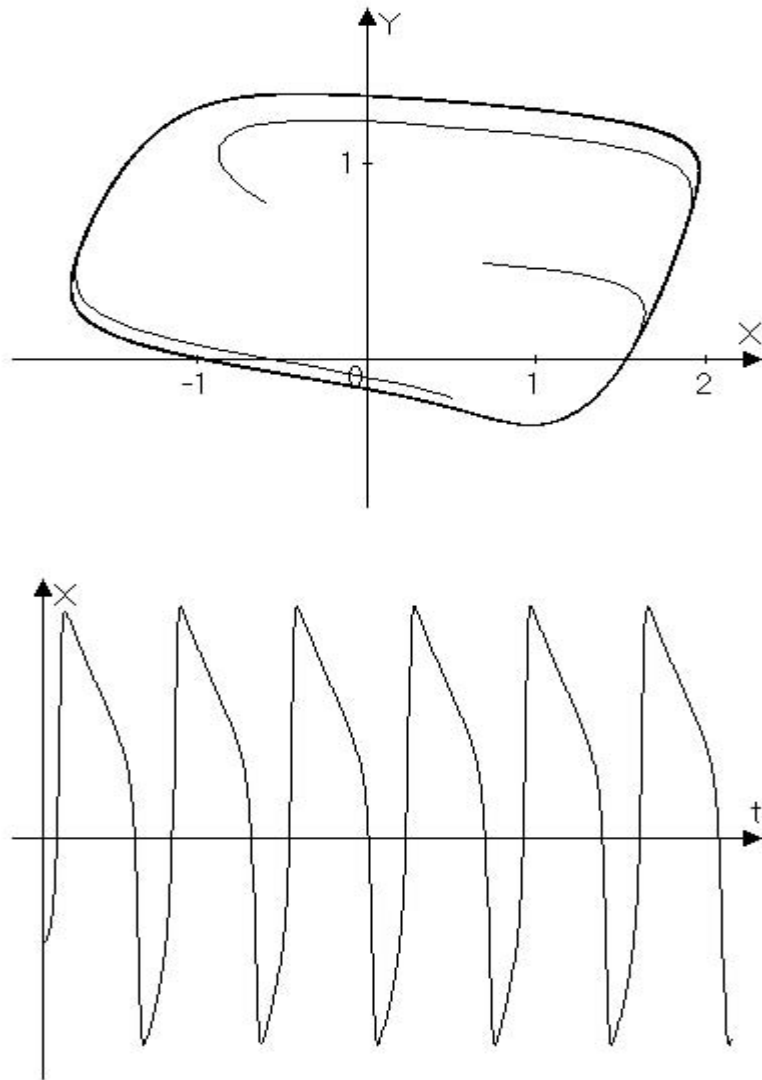


Рис. 7.7. Колебания в модели нейронного осциллятора ($z = -0.4$.)

7.8. Хаотический осциллятор. Модель Лоренца

В 1962 году Лоренц, специалист по физике атмосферы, предложил простую модель тепловой конвекции

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \quad (7.6)$$

Прямое компьютерное моделирование этой системы при $\sigma = 10$, $b =$

$\frac{8}{3}$, $r = 28$ показало сложное нерегулярное поведение ее решений (рис.7.8).

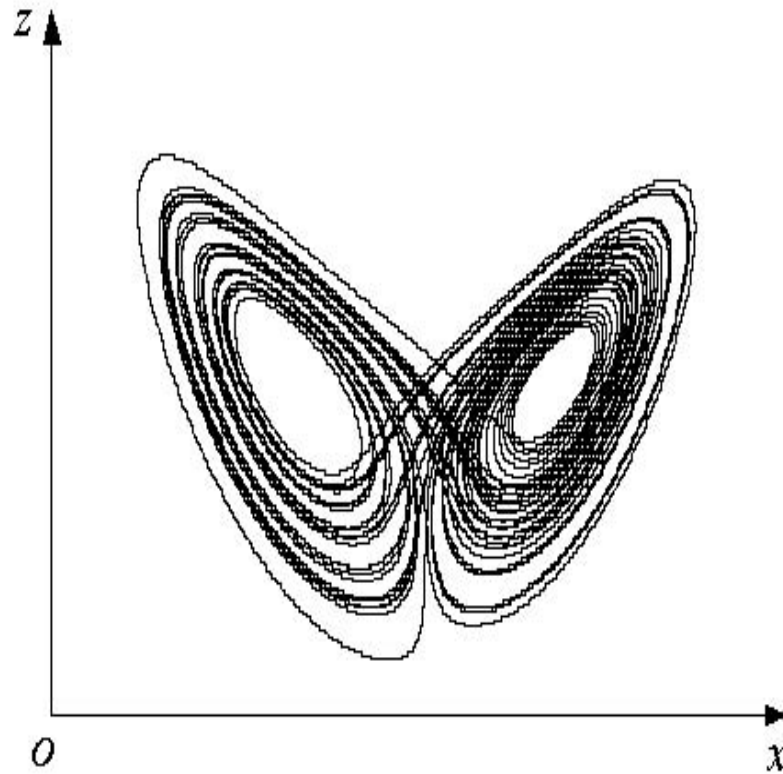


Рис. 7.8. Хаотический аттрактор системы Лоренца
в проекции на плоскость xoz

Система Лоренца стала классической моделью хаотической динамики.

7.9. Модель Ресслера

Следующая система, предложенная Ресслером (1976), является хорошей моделью, демонстрирующей периодическое и хаотическое поведение

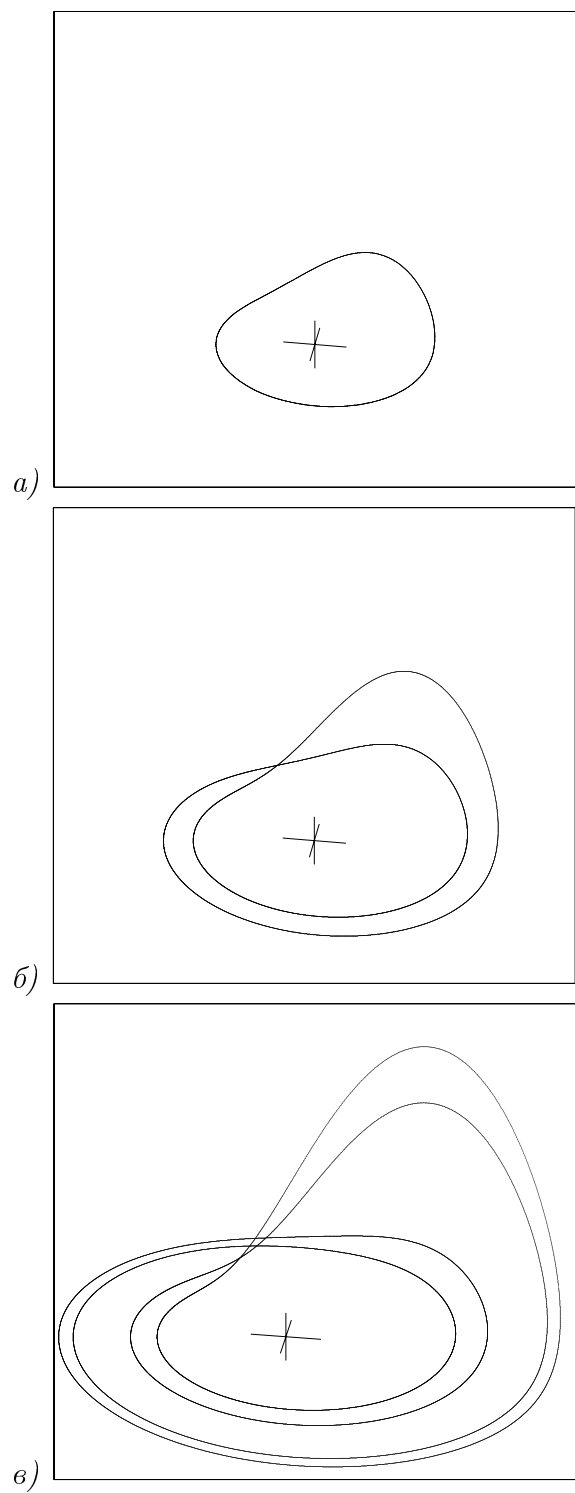


Рис. 7.9. Предельные циклы системы Ресслера:
а) $\mu = 2$ (1-цикл), б) $\mu = 3$ (2-цикл), в) $\mu = 4$ (4-цикл)

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z) \\ \dot{y} = x + \alpha y \\ \dot{z} = \alpha + z(x - \mu). \end{cases} \quad (7.7)$$

При переходе параметра μ через бифуркационное значение $\bar{\mu} = 2\alpha = 0.4$ у системы появляется устойчивый предельный цикл.

При дальнейшем увеличении параметра μ в системе Ресслера происходят бифуркации удвоения периода с переходом к хаосу. Здесь можно выделить зоны структурной устойчивости – интервалы $I_1, I_2, \dots, I_{2^k}, \dots$, на которых существуют предельные циклы $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_{2^k}, \dots$. Здесь \mathcal{M}_{2^k} есть устойчивый предельный цикл кратности 2^k (2^k -цикл).

При $\alpha = 0.2$ имеем: $I_1 = (0.4; 2.830)$, $I_2 = (2.830; 3.836)$, $I_4 = (3.836; 4.123)$, $I_8 = (4.123; 4.186)$ и т.д.

На рис. 7.9 а,б,в изображены предельные циклы системы Ресслера для $\mu = 2$ (1-цикл), $\mu = 3$ (2-цикл), $\mu = 4$ (4-цикл).

На рис. 7.10 изображена проекция хаотического аттрактора Ресслера на плоскость xOy при $\mu = 5$.

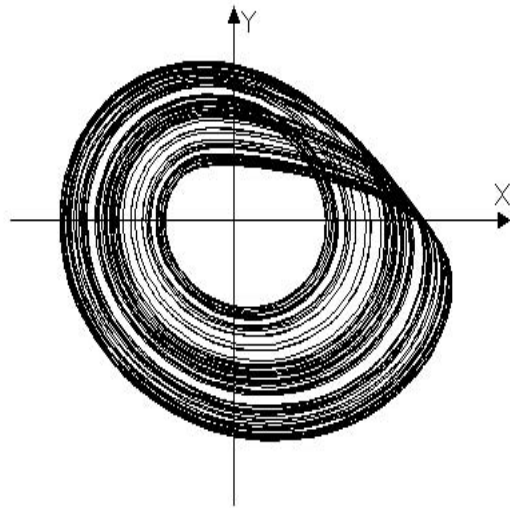


Рис. 7.10. Хаотический аттрактор системы Ресслера в проекции на плоскость xOy

§ 8. Фазовый портрет системы дифференциальных уравнений и его свойства

8.1. Основные понятия. В предыдущем параграфе представлены модели, задаваемые одно-, двух- и трехмерными системами дифференциальных уравнений. В общем n -мерном случае автономная система дифференциальных уравнений задается следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Ее векторная запись имеет вид

$$\dot{x} = f(x), \quad (8.1)$$

где

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}.$$

Пусть $X \subset R^n$ – область определения функции $f(x)$. Предполагается, что при любых $x^{(0)}$ из X дифференциальное уравнение (8.1) имеет решение $x = \varphi(t, x^{(0)})$, определенное для всех $t \geq 0$, с начальным условием $x(0) = x^{(0)}$.

Подробное геометрическое изображение решения $x(t)$ с помощью графика – и н т е г р а л ь н о й к р и в о й – требует $(n + 1)$ -мерного пространства переменных t, x_1, \dots, x_n . Если при $n = 1$ интегральные кривые располагаются на плоскости t, x_1 и их изображение не вызывает особых затруднений, то уже при $n = 2$ соответствующие интегральные кривые лежат в трехмерном пространстве t, x_1, x_2 , что резко усложняет их наглядное представление.

Метод фазового пространства

Для сокращения размерности можно пожертвовать переменной t , оставив только так называемые фазовые переменные x_1, x_2, \dots, x_n , составляющие n -мерное фазовое пространство. При $n = 2$ фазовое пространство двумерно и называется фазовой плоскостью.

Проекция интегральной кривой $x(t)$ на фазовое пространство называется фазовой кривой, или фазовой траекторией.

Множество фазовых кривых, отвечающих различным начальным данным, называется фазовым портретом системы. Во многих случаях фазовый портрет позволяет получить достаточно наглядное представление о динамике системы.

В каждой точке x фазового пространства системы (18.1) вектор $f(x)$ есть вектор скорости движения системы вдоль фазовой кривой, проходящей через эту точку. Вектор $f(x)$ указывает направление касательной к соответствующей фазовой кривой. Множество точек фазового пространства с указанными в них направлениями составляют поле направлений системы (18.1). Поле направлений позволяет построить, хотя бы приближенно, фазовый портрет исследуемой системы. Для этого линии, изображающие фазовые кривые, следует провести так, чтобы в каждой своей точке они имели касательную, совпадающую с полем направлений.

Устойчивость

Основой качественного анализа динамических систем является ис-

следование устойчивости.

О п р е д е л е н и е 8.1. Решение $\bar{x}(t)$ системы (8.1) называется устойчивым по Ляпунову, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x^{(0)}$$

$$\|\bar{x}(0) - x^{(0)}\| < \delta \Rightarrow \|\bar{x}(t) - \varphi(t, x^{(0)})\| < \varepsilon.$$

В противном случае решение $\bar{x}(t)$ называется неустойчивым.

О п р е д е л е н и е 8.2. Решение $\bar{x}(t)$ системы (8.1) называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову, и

$$\exists \delta > 0 \quad : \quad \forall x^{(0)} \quad \|\bar{x}(0) - x^{(0)}\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\bar{x}(t) - \varphi(t, x^{(0)})\| = 0.$$

О п р е д е л е н и е 8.3. Решение $\bar{x}(t)$ системы (8.1) называется экспоненциально устойчивым, если

$$\exists \alpha > 0 \quad \exists K > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x^{(0)}$$

$$\|\bar{x}(0) - x^{(0)}\| < \delta \Rightarrow \|\bar{x}(t) - \varphi(t, x^{(0)})\| \leq K e^{-\alpha t} \|\bar{x}(0) - x^{(0)}\|.$$

О п р е д е л е н и е 8.4. Множество $M \subset X$ называется инвариантом системы (8.1), если

$$\forall x^{(0)} \in M \quad \forall t \geq 0 \quad \varphi(t, x^{(0)}) \in M.$$

Если $x^{(0)} \in M$, то и во все последующие моменты времени $\varphi(t, x^{(0)}) \in M$. Простейшим примером инвариантного множества является точка покоя.

О п р е д е л е н и е 8.5. Точка $\bar{x} \in X$ называется точкой покоя системы (8.1), если

$$\forall t \geq 0 \quad \varphi(t, \bar{x}) = \bar{x}.$$

Если \bar{x} – точка покоя, то $f(\bar{x}) = 0$. Все точки покоя системы (8.1) находятся из решения системы

$$f(x) = 0. \quad (8.2)$$

Другим примером инвариантного множества является цикл.

О п р е д е л е н и е 8.6. Пусть $\xi(t)$ является T -периодическим решением системы (8.1): $\xi(t + T) = \xi(t)$. Множество $\Gamma = \{\xi(t) | 0 \leq t < T\}$ называется **ц и к л о м**.

В фазовом пространстве цикл изображается в виде замкнутой кривой. Возьмем в качестве начальной произвольную точку цикла. Можно показать, что фазовая кривая соответствующего решения совпадает с циклом.

Введем функцию $\rho(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\|$, задающую расстояние от фиксированной точки x до множества Y .

О п р е д е л е н и е 8.7. Компактное инвариантное множество M системы (8.1) называется **у с т о й ч и в ы м п о Л я п у н о в у**, если справедливо следующее:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x^{(0)}$$

$$\rho(x^{(0)}, M) < \delta \Rightarrow \rho(\varphi(t, x^{(0)}), M) < \varepsilon.$$

О п р е д е л е н и е 8.8. Компактное инвариантное множество M системы (8.1) называется **а с и м п т о т и ч е с к и у с т о й ч и в ы м**, если оно устойчиво по Ляпунову, и

$$\exists \delta > 0 \quad : \quad \forall x^{(0)} \quad \rho(x^{(0)}, M) < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(\varphi(t, x^{(0)}), M) = 0.$$

При этом множество $U = \{x \in X | \lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(\varphi(t, x), M) = 0\}$ называется **о б л а с т ь ю (б а с с е й н о м) п р и т я ж е н и я** инвариантного множества M .

О п р е д е л е н и е 8.9. Компактное инвариантное множество M системы (8.1) называется э к с п о н е н ц и а л ь н о у с т о й ч и – в ы м, если

$$\exists \alpha > 0 \quad \exists K > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x^{(0)}$$

$$\rho(x^{(0)}, M) < \delta \Rightarrow \rho(\varphi(t, x^{(0)}), M) \leq K e^{-\alpha t} \rho(x^{(0)}, M).$$

8.2. Фазовые портреты линейных систем

Рассмотрим двумерную ($n = 2$) линейную систему

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Пусть λ_1, λ_2 – собственные числа, а h_1, h_2 – линейно независимые собственные векторы матрицы A . По этим данным общее решение системы записывается аналитически

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} h_2.$$

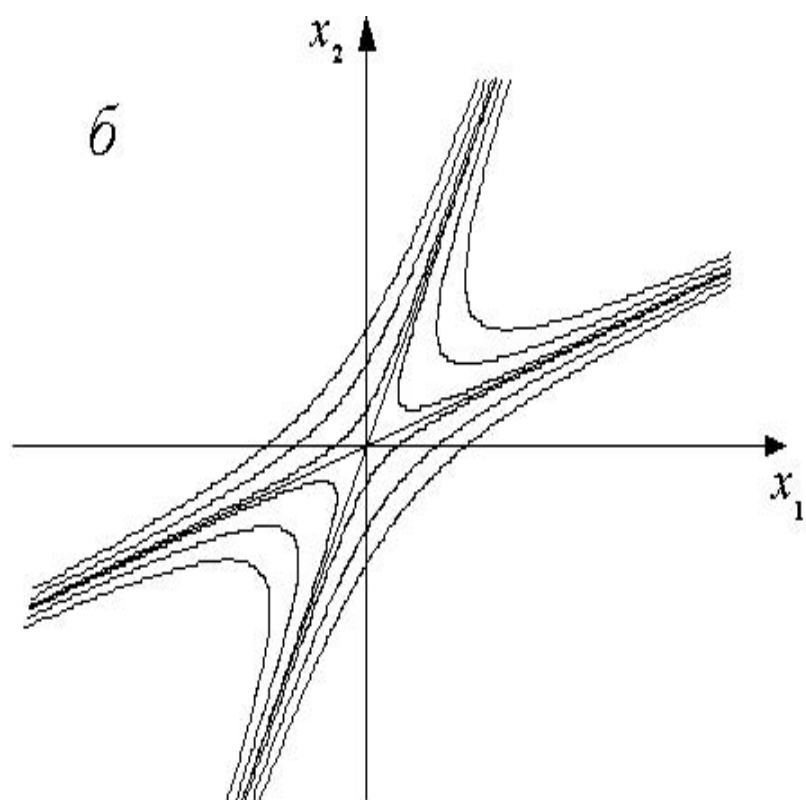
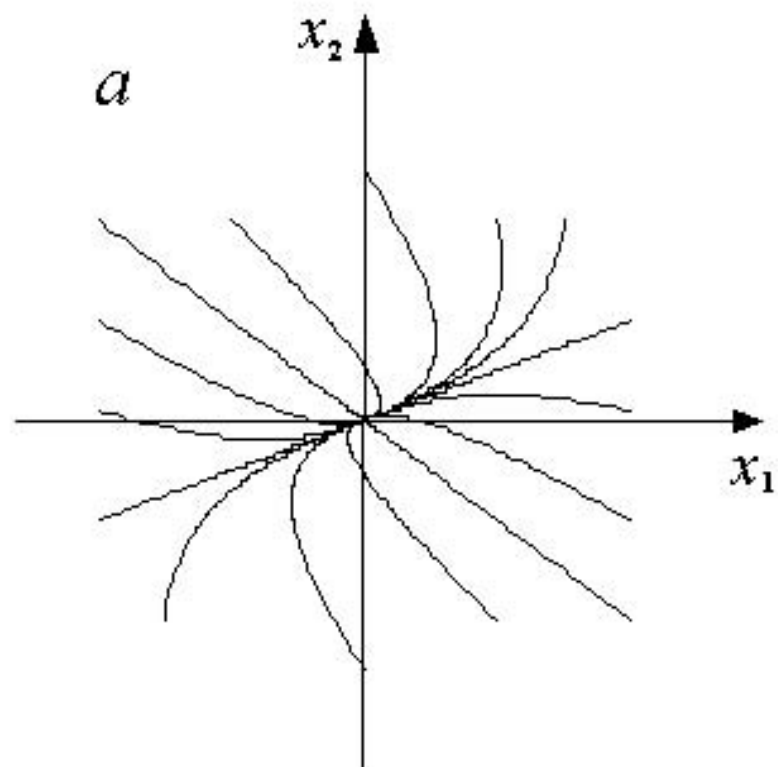
Здесь возможны следующие случаи [17]:

а) λ_1, λ_2 – вещественные одного знака. Фазовый портрет – у з е л (рис. 18.1,а);

б) λ_1, λ_2 – вещественные разных знаков. Фазовый портрет – с е д л о (рис. 18.1,б);

в) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ – комплексно сопряженные ($\alpha \neq 0$). Фазовый портрет – ф о к у с (рис. 18.1,в);

г) $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ – чисто мнимые. Фазовый портрет – ц е н т р (рис. 18.1,г).



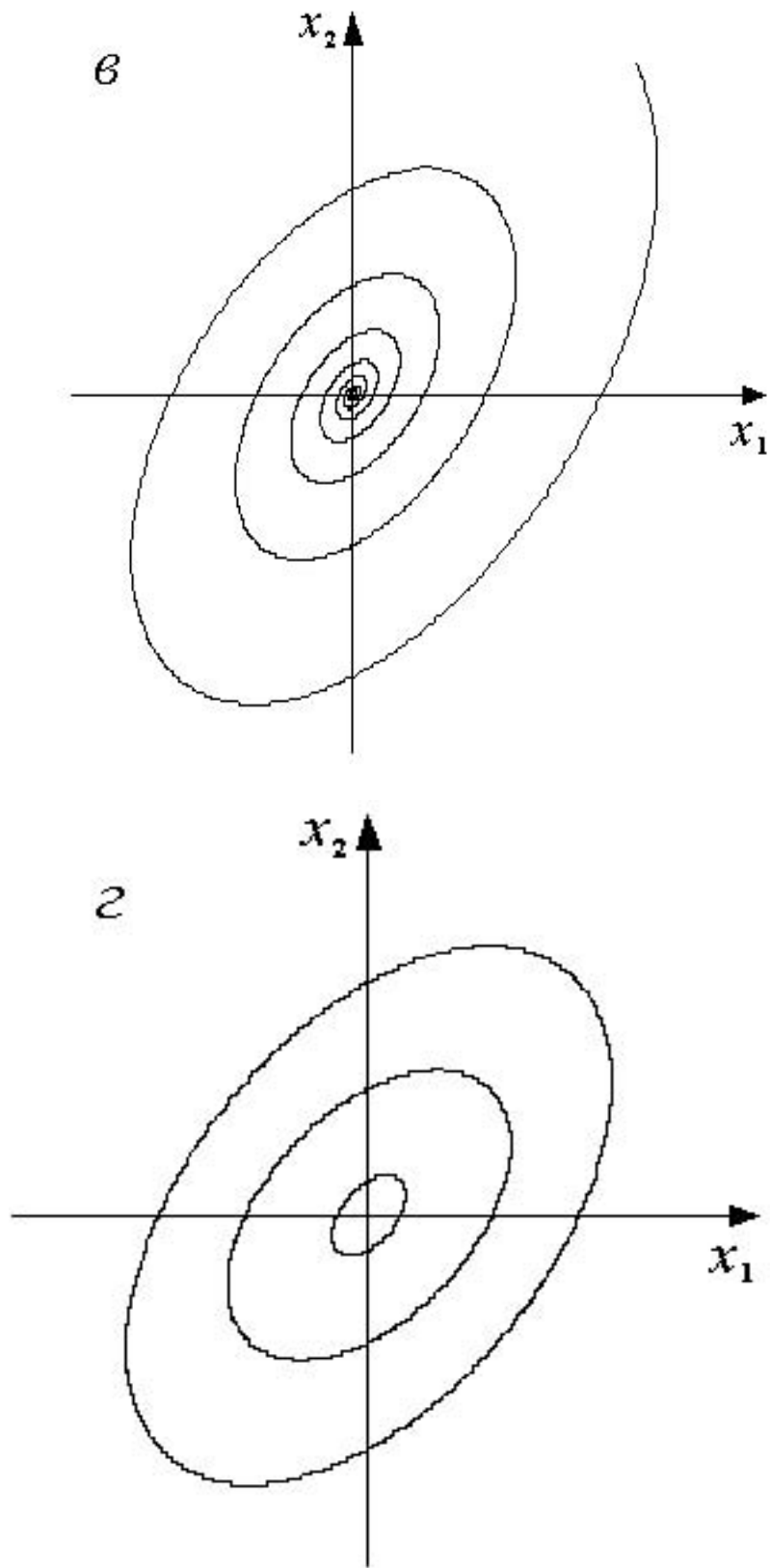


Рис. 8.1. Фазовые портреты линейной системы:

a – узел, b – седло, $в$ – фокус, $г$ – центр

При $Re\lambda_{1,2} < 0$ движение вдоль фазовых траекторий идет в направлении точки покоя $\bar{x} = 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Точка покоя $\bar{x} = 0$ — асимптотически устойчива. Тогда говорят, что узел (фокус) является устойчивым.

При $Re\lambda_{1,2} > 0$ движение вдоль фазовых траекторий идет по направлению от точки покоя в бесконечность. Точка покоя $\bar{x} = 0$ неустойчива. В этом случае говорят, что узел (фокус) является неустойчивым.

В случае центра $Re\lambda_{1,2} = 0$ движение происходит по замкнутым фазовым траекториям вокруг точки покоя. Точка покоя $\bar{x} = 0$ устойчива (но не асимптотически).

В случае седла всегда имеется направление, движение по которому идет от точки покоя в бесконечность. Поэтому здесь точка покоя $\bar{x} = 0$ является неустойчивой.

Приведенная здесь детальная классификация фазовых портретов получена на основе аналитического представления для общего решения рассматриваемой линейной системы. Построение точных аналитических решений для нелинейных систем возможно лишь в каких-то частных случаях.

В общем случае при исследовании отдельных траекторий и построении фазовых портретов нелинейных дифференциальных уравнений используют численные методы.

8.3. Численные методы решения дифференциальных уравнений

Рассмотрим основные конструкции и подходы к построению численных методов решения дифференциальных уравнений. Основной идеей является дискретизация рассматриваемых интервалов и функций.

Для дискретизации временного отрезка $[t_0, t_0+T]$ разобьем его на N частей узлами $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0+T$ с шагом $h = \frac{T}{N} : t_{m+1} = t_m + h$. Пусть $x(t)$ – решение задачи Коши для дифференциального уравнения с начальным условием

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Для дискретизации функций обозначим через x_m приближенное значение для неизвестного точного решения $x(t_m)$ в момент t_m . Для расчета x_m используют различные методы.

М е т о д Э й л е р а

Расчет приближенных значений ведется по формуле

$$x_{m+1} = x_m + hf(t_m, x_m).$$

Получаемые приближения имеют погрешности первого порядка:

$$\|x(t_m) - x_m\| = O(h).$$

М е т о д Э й л е р а с п е р е с ч е т о м

Расчет приближенных значений ведется по формуле

$$x_{m+1} = x_m + \frac{h}{2} (f(t_m, x_m) + f(t_m + h, x_m + hf(t_m, x_m))).$$

Получаемые приближения имеют погрешности второго порядка:

$$\|x(t_m) - x_m\| = O(h^2).$$

М е т о д К о ш и

Расчет приближенных значений ведется по формуле

$$x_{m+1} = x_m + hf\left(t_m + \frac{h}{2}, x_m + \frac{h}{2}f(t_m, x_m)\right).$$

Получаемые приближения имеют погрешности второго порядка:

$$\|x(t_m) - x_m\| = O(h^2).$$

М е т о д Р у н г е - К у т т а

Расчет приближенных значений ведется по формулам:

$$x_{m+1} = x_m + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4);$$

$$K_1 = hf(t_m, x_m), \quad K_2 = hf\left(t_m + \frac{h}{2}, x_m + \frac{K_1}{2}\right),$$

$$K_3 = hf\left(t_m + \frac{h}{2}, x_m + \frac{K_2}{2}\right), \quad K_4 = hf(t_m + h, x_m + K_3).$$

Получаемые по методу Рунге-Кутта приближения имеют погрешности четвертого порядка

$$\|x(t_m) - x_m\| = O(h^4).$$

Численные методы решения систем дифференциальных уравнений

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned}x(0) &= x_0 \\ y(0) &= y_0\end{aligned}.$$

Пусть пара функций $x(t)$, $y(t)$ является решением этой задачи Коши. Для дискретизации временного отрезка $[t_0, t_0 + T]$ разобьем его на N частей узлами $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T$ с шагом $h = \frac{T}{N}$: $t_{m+1} = t_m + h$.

Для дискретизации функций обозначим через x_m , y_m приближенное значение для неизвестного точного решения $x(t_m)$, $y(t_m)$ в момент t_m . Для расчета x_m , y_m используют различные методы.

М е т о д Э й л е р а

Расчет приближенных значений ведется по формулам

$$\begin{aligned}x_{m+1} &= x_m + hf(x_m, y_m) \\ y_{m+1} &= y_m + hg(x_m, y_m)\end{aligned}$$

Получаемые приближения имеют погрешности порядка $O(h)$.

М е т о д Э й л е р а с п е р е с ч е т о м

Расчет приближенных значений ведется по формулам

$$\begin{aligned}x_{m+1} &= x_m + \frac{h}{2}(f(x_m, y_m) + f(x_m + hf(x_m, y_m), y_m + hg(x_m, y_m))) \\ y_{m+1} &= y_m + \frac{h}{2}(g(x_m, y_m) + g(x_m + hf(x_m, y_m), y_m + hg(x_m, y_m)))\end{aligned}$$

Получаемые приближения имеют погрешности порядка $O(h^2)$.

М е т о д К о ш и

Расчет приближенных значений ведется по формулам

$$\begin{aligned}x_{m+1} &= x_m + hf \left(x_m + \frac{h}{2}f(x_m, y_m), y_m + \frac{h}{2}g(x_m, y_m) \right) \\y_{m+1} &= y_m + hg \left(x_m + \frac{h}{2}f(x_m, y_m), y_m + \frac{h}{2}g(x_m, y_m) \right)\end{aligned}$$

Получаемые приближения имеют погрешности порядка $O(h^2)$.

М е т о д Р у н г е - К у т т а

Расчет приближенных значений ведется по формулам:

$$\begin{aligned}x_{m+1} &= x_m + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4); \\y_{m+1} &= y_m + \frac{1}{6}(L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4); \\K_1 &= hf(x_m, y_m), \quad L_1 = hg(x_m, y_m), \\K_2 &= hf\left(x_m + \frac{K_1}{2}, y_m + \frac{L_1}{2}\right), \quad L_2 = hg\left(x_m + \frac{K_1}{2}, y_m + \frac{L_1}{2}\right), \\K_3 &= hf\left(x_m + \frac{K_2}{2}, y_m + \frac{L_2}{2}\right), \quad L_3 = hg\left(x_m + \frac{K_2}{2}, y_m + \frac{L_2}{2}\right), \\K_4 &= hf(x_m + K_3, y_m + L_3), \quad L_4 = hg(x_m + K_3, y_m + L_3).\end{aligned}$$

Получаемые по методу Рунге-Кутта приближения имеют погрешности $O(h^4)$.

Вывод формул, анализ их погрешностей, описание других численных методов можно найти в книгах [4], [20].

8.1. Построить поле направлений и фазовые траектории следующих систем:

а) модель Лотке–Вольтерра (7.2) для $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$; $\alpha = \delta = 1$, $\beta = \gamma = 4$;

б) линейный осциллятор (7.3) для $l = 1$ при $k = 0$;
 $k = \pm 0.5$; $k = \pm 1$; $k = \pm 2$;

в) осциллятор Ван-дер-Поля (7.5) при $\delta = 0$,
 $\delta = \pm 0.5$, $\delta = \pm 1$, $\delta = \pm 2$;

г) $\ddot{x} + \sin x = 0$

д) $\ddot{x} + x - \alpha x^3 = 0$, $\alpha = -1, +1$.

8.2. Построить фазовые портреты линейных систем

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dot{x} &= 3x \\ \dot{y} &= 2x + y \end{cases} ; \quad \begin{cases} \dot{x} &= x + 3y \\ \dot{y} &= -6x + 5y \end{cases} ; \\ \begin{cases} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= 2x - y \end{cases} ; \quad \begin{cases} \dot{x} &= -2x - 5y \\ \dot{y} &= 2x + 2y \end{cases} . \end{aligned}$$

8.3. Пусть $s = a_{11} + a_{22}$ (след матрицы A), $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ (определитель A). В плоскости параметров (s, Δ) изобразить зоны, соответствующие узлу (устойчивому и неустойчивому), фокусу (устойчивому и неустойчивому), седлу и центру.

8.4. Сравнить фазовые кривые системы (7.2), полученные методами Эйлера, Эйлера с пересчетом, Коши и Рунге-Кутта при различных шагах $h = 0.5$; 0.1 ; 0.01 ; 0.001 .

8.5. Используя методы Эйлера и Рунге-Кутта, построить фазовые портреты систем из задачи 8.1.

8.6. Построить фазовые портреты следующих систем при различных значениях параметров:

а) уравнение Хайрера $\ddot{x} + x = \varepsilon \dot{x} - (\dot{x})^3$;

б) гликолитический осциллятор

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - xy \\ \dot{y} = py \left(x - \frac{1+q}{q+y} \right) \end{cases};$$

в) осциллятор Ван-дер-Поля (мягкий режим)

$$\ddot{x} + x = \delta(1 - x^2)\dot{x};$$

г) осциллятор Ван-дер-Поля (жесткий режим)

$$\ddot{x} + x = \delta(1 + ax^2 - bx^4)\dot{x}, \quad a = 5, \quad b = 0.5;$$

д) уравнение Дуффинга $\ddot{x} + x + \beta x^3 = 0$;

е) модель «хищник – жертва» с ограниченностью ресурса

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - \alpha y) - \gamma x^2 \\ \dot{y} = y(\beta x - 1) \end{cases};$$

ж) модель «хищник – жертва» с насыщением хищника

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - \gamma x) - \alpha \frac{x}{1+x} y \\ \dot{y} = -y + \beta \frac{x}{1+x} y \end{cases};$$

з) маятник с трением $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \sin x = 0$;

и) брюсселятор

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - (b+1)x + ax^2y, \quad a > 0, \quad b > 0 \\ \dot{y} = bx - ax^2y \end{cases};$$

к) модель Хопфа (мягкий режим)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + \mu x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases};$$

л) модель Хопфа (жесткий режим)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(\mu + 2x_1^2 + 2x_2^2 - (x_1^2 + x_2^2)^2) - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2(\mu + 2x_1^2 + 2x_2^2 - (x_1^2 + x_2^2)^2) + x_1 \end{cases}.$$

8.7. Написать программу динамики множества точек, равномерно распределенных в начальный момент времени в заданном прямоугольнике. Положение каждой точки в последующие моменты времени определяется численно по заданной системе дифференциальных уравнений. При помощи этой программы исследовать динамику различных систем в прямом и обратном времени. К каким предельным множествам стягиваются эти точки? Как меняется характер сходимости и форма предельных множеств при изменении параметров динамической системы?

Если для построения фазового портрета нелинейной системы в основном используются лишь численные методы, то при исследовании характерных особенностей вблизи точки покоя возможен общий аналитический подход. Этот подход состоит в отыскании для исследуемой нелинейной системы некоторой близкой линейной, с тем чтобы по результатам анализа последней можно было судить об основных чертах динамики исходной нелинейной системы.

9.1. Система первого приближения

Рассмотрим способ построения линейной системы первого приближения в окрестности точки покоя исходной нелинейной системы. Для наглядности ограничимся сначала случаем двумерной ($n = 2$) системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}. \quad (9.1)$$

Пусть

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

– точка покоя системы (9.1). Это означает, что

$$\begin{cases} f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0 \\ f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0 \end{cases}. \quad (9.2)$$

Разложим в окрестности точки покоя \bar{x} правые части системы (9.1) – функции f_1 и f_2 – в ряды Тейлора:

$$\dot{x}_1 = f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_2 - \bar{x}_2) + \dots,$$

$$\dot{x}_2 = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_2 - \bar{x}_2) + \dots$$

Первый член в каждом из этих разложений, благодаря (9.2), равен нулю. Далее идут линейные члены, за ними – слагаемые более высоких порядков, которые вблизи точки покоя существенно меньше линейных.

Отбрасывая эти малые слагаемые и делая замену

$$z_1 = x_1 - \bar{x}_1, \quad z_2 = x_2 - \bar{x}_2,$$

$$a_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \quad a_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2),$$

$$a_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \quad a_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2),$$

получим линейную систему

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = a_{11}z_1 + a_{12}z_2 \\ \dot{z}_2 = a_{21}z_1 + a_{22}z_2 \end{cases}.$$

Данная система получила название **системы первого приближения** для исходной нелинейной системы в окрестности точки покоя.

Системы первого приближения играют весьма важную роль в исследовании нелинейных систем. Как правило (если не рассматривать особые вырожденные случаи), общий характер фазового портрета нелинейной системы вблизи точки покоя совпадает с фазовым портретом соответствующей системы первого приближения.

Тип фазового портрета системы первого приближения, благодаря ее линейности, определяется достаточно просто – аналитически (см.

§8.2). Примеры анализа некоторых двумерных нелинейных систем по системам первого приближения даются в §9.3.

В случае общей n -мерной системы (8.1) в окрестности точки покоя \bar{x} замена $x = \bar{x} + z$ ($\|z\|$ —мало) и разложение Тейлора приводят к равенствам

$$\dot{x} = \dot{\bar{x}} + \dot{z} = f(\bar{x} + z) = f(\bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})z + \dots$$

Отбрасывая нелинейные члены с учетом равенств

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}) = 0,$$

получим для малых отклонений

$$z = x - \bar{x}$$

состояния x от положения равновесия \bar{x} линейную систему первого приближения

$$\dot{z} = Az, \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}). \quad (9.3)$$

9.2. Устойчивость точки покоя

Исследование устойчивости начнем с линейной системы (9.3). Для этой системы точкой покоя является вектор $\bar{z} = 0$. Анализ общего решения системы (9.3) позволяет получить (см. об этом [9]) следующие критерии.

Т е о р е м а 9.1. *Для того, чтобы точка покоя $\bar{z} = 0$ системы (9.3) была устойчивой по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения $\lambda_i (i = 1, \dots, n)$ матрицы A имели неположительные вещественные части:*

$$\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0.$$

При этом собственным значениям, лежащим на мнимой оси ($\operatorname{Re} \lambda_j = 0$), должны соответствовать клетки Жордана размерности единица.

Т е о р е м а 9.2. Для того, чтобы точка покоя $\bar{z} = 0$ системы (9.3) была экспоненциально устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения $\lambda_i (i = 1, \dots, n)$ матрицы A имели отрицательные вещественные части:

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0.$$

Отметим, что в случае линейных систем понятия асимптотической и экспоненциальной устойчивости эквивалентны.

Если система (9.3) является экспоненциально устойчивой, то она остается таковой и при малых изменениях ее параметров. В случае, если система (9.3) просто устойчива по Ляпунову, отмеченное свойство уже не выполняется. Сколь угодно малые изменения параметров могут перевести собственные значения матрицы системы, лежащие на мнимой оси, в правую часть комплексной полуплоскости, что сделает систему уже неустойчивой.

Сформулируем теперь критерий устойчивости решения $x(t) \equiv \bar{x}$, являющегося точкой покоя нелинейной системы (8.1).

Т е о р е м а 9.3. Для того, чтобы точка покоя \bar{x} системы (8.1) была экспоненциально устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы у системы первого приближения

$$\bar{z} = Az, \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}),$$

была экспоненциально устойчивой точка покоя $\bar{z} = 0$.

Как видим, исследование экспоненциальной устойчивости точек покоя нелинейной системы сводится к выяснению знаков вещественных частей собственных значений матриц соответствующих систем первого приближения.

9.3. Примеры

Пример 1.

Рассмотрим модель «хищник – жертва». Для отыскания точек покоя системы (7.2) составим систему

$$\begin{cases} \alpha x - \beta xy = 0 \\ -\gamma y + \delta xy = 0 \end{cases}.$$

Получаем две точки покоя:

$\bar{x}_1 = 0, \bar{y}_1 = 0$ – полное отсутствие какой-либо жизни,
 $\bar{x}_2 = \frac{\gamma}{\delta}, \bar{y}_2 = \frac{\alpha}{\beta}$ – равновесное состояние.

Матрицы соответствующих систем первого приближения имеют вид

$$A_1 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\delta\alpha}{\beta} & 0 \end{bmatrix}.$$

У матрицы A_1 собственные значения

$$\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = -\gamma$$

вещественны и имеют разные знаки. Фазовый портрет первой точки покоя – седло. У матрицы A_2 собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha\gamma} i$ – чисто мнимые. Фазовый портрет второй точки покоя – центр. Как видим (см.рис.7.2), фазовые портреты систем первого приближения в окрестности точек покоя соответствуют фазовому портрету исходной нелинейной системы.

Пример 2.

Рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля. Для отыскания точек покоя составим систему

$$\begin{cases} y = 0 \\ -x + \delta(1 - x^2)y = 0 \end{cases}.$$

Здесь единственной точкой покоя является $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$.

Матрица соответствующей системы первого приближения равна

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta \end{bmatrix}$$

и имеет характеристическое уравнение $\lambda^2 - \delta\lambda + 1 = 0$.

В зависимости от значений параметра δ возможны следующие случаи:

1) При $\delta < -2$ собственные значения

$$\lambda_{1,2} = \frac{\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4}}{2}$$

вещественные и отрицательные. Фазовый портрет – устойчивый узел.

2) При $-2 < \delta < 0$ собственные значения становятся комплексно сопряженными с отрицательной вещественной частью:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\delta \pm i\sqrt{4 - \delta^2}}{2}.$$

Фазовый портрет – устойчивый фокус.

3) При $\delta = 0$ собственные значения

$$\lambda_{1,2} = \pm i$$

чисто мнимые. Фазовый портрет – центр.

4) При $0 < \delta < 2$ собственные значения становятся комплексно сопряженными с положительной вещественной частью:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\delta \pm i\sqrt{4 - \delta^2}}{2}.$$

Фазовый портрет – неустойчивый фокус.

5) При $\delta > 2$ собственные значения

$$\lambda_{1,2} = \frac{\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4}}{2}$$

вещественные положительные. Фазовый портрет – неустойчивый узел.

Здесь по системе первого приближения при различных значениях параметра удастся достаточно точно представить фазовый портрет исходной нелинейной системы вблизи точки покоя (рис. 11.9). Однако в области, удаленной от точки покоя, нелинейная система имеет предельный цикл (рис. 7.4) – важнейшую особенность, которую система первого приближения уже никак не отражает. Исследованию предельных циклов посвящен §10 нашего пособия.

П р и м е р 3.

Проведем анализ устойчивости точки покоя брюсселятора. Из системы

$$\begin{cases} 1 - (b + 1)x + ax^2y = 0 \\ bx - ax^2y = 0 \end{cases}$$

найдем единственную точку покоя

$$\bar{x} = 1, \bar{y} = \frac{b}{a}.$$

Матрица соответствующей системы первого приближения равна

$$A = \begin{bmatrix} b - 1 & a \\ -b & -a \end{bmatrix}$$

и имеет характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - (b - a - 1)\lambda + ab = 0.$$

Для того, чтобы при положительных коэффициентах a и b выполнялось условие $Re\lambda_{1,2} < 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

неравенство

$$b < a + 1.$$

Полученное неравенство задает в пространстве значений параметров $a > 0$, $b > 0$ область, внутри которой точка покоя брюсселятора сохраняет экспоненциальную устойчивость. Граница области устойчивости задается уравнением $b_* = a + 1$. При переходе параметров системы через эту границу точка покоя теряет устойчивость. Потеря устойчивости сопровождается появлением у системы качественно нового типа решения – предельного цикла (см. далее в §11, рис. 11.8).

Упражнения

9.1. Доказать, что для уравнения (7.1)

а) решение $\bar{x} = \frac{a}{\gamma}$ при $a > 0$ является экспоненциально устойчивым;

б) решение $\bar{x} = 0$ при $a = 0$ асимптотически устойчиво, но не экспоненциально;

в) решение $\bar{x} = 0$ при $a > 0$ – неустойчиво.

9.2. Доказать, что необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости точки покоя $(0,0)$ линейной двумерной системы являются неравенства $s = a_{11} + a_{22} < 0$, $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$.

9.3. Провести анализ устойчивости точек покоя нелинейных систем из задачи 8.6 (в пространстве их параметров) по системам первого приближения.

9.4. Для следующих систем

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2 - x \end{cases}; \quad \begin{cases} \dot{x} = y - x^3 \\ \dot{y} = -x - y^3 \end{cases}; \quad \begin{cases} \dot{x} = y + x^3 \\ \dot{y} = x + y^3 \end{cases}$$

исследовать устойчивость точки покоя $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$.

9.5. Доказать критерии устойчивости и асимптотической устойчивости теорем 9.1 и 9.2 для случая $n = 2$.

Рассмотрим основные элементы теории исследования динамики системы вблизи периодических решений – циклов.

10.1. Основные понятия. Система первого приближения

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x), \quad (10.1)$$

имеющую T -периодическое решение

$$x = \xi(t) \quad (\xi(t + T) = \xi(t)).$$

Графиком такого решения будет замкнутая фазовая кривая – цикл Γ . Точка $x_0 = \xi(0)$ отмечает на Γ начальное положение этого решения. Всякое решение, стартующее с любой другой точки цикла, будет двигаться по этой же замкнутой кривой. Цикл Γ – инвариантное множество системы (10.1).

Если начальную точку взять в окрестности цикла, то траектория соответствующего решения может вести себя различным образом. Здесь возможны следующие варианты:

- а) решение приближается к циклу так, что отклонение от цикла стремится к нулю; другими словами, фазовая траектория наматывается на цикл;
- б) решение движется вдоль цикла и формирует замкнутую фазовую кривую – новый цикл, расположенный рядом с исходным;
- в) решение удаляется от цикла; фазовая кривая разматывается по спирали.

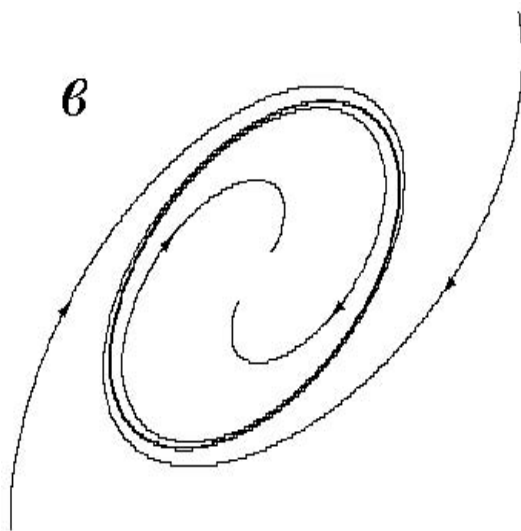
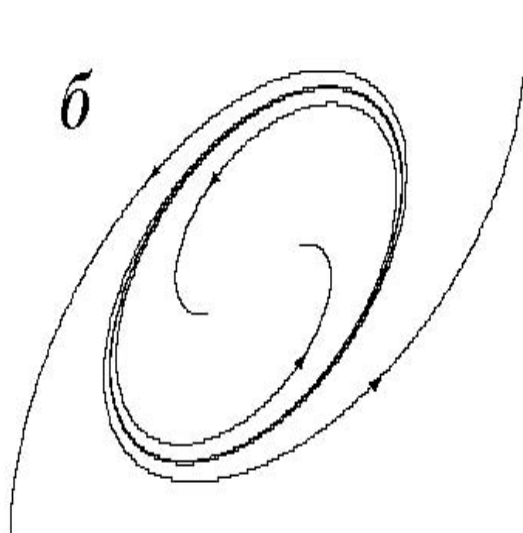
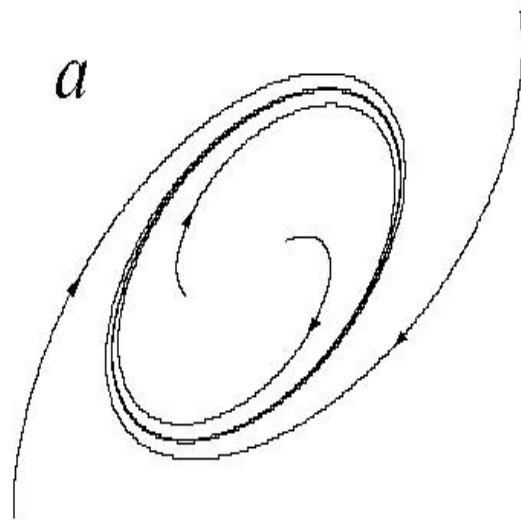


Рис. 10.1. Циклы:

a – устойчивый, *б* – неустойчивый, *в* – полустойчивый

Среди возможных сочетаний динамики снаружи и внутри цикла обычно выделяют следующие:

устойчивый предельный цикл (рис.10.1, *a*);

неустойчивый цикл (рис.10.1, *б*);

полуустойчивый цикл (рис.10.1, *в*).

Нас интересуют условия, при которых предельный цикл имеет сильное экспоненциальное притяжение.

Предполагается, что в U – некоторой окрестности кривой Γ – определена функция $\gamma(x) = \operatorname{argmin}_{y \in \Gamma} \|y - x\|$, задающая для каждого x из окрестности U ближайшую к ней точку $\gamma(x)$ с цикла Γ . Тогда функция $\Delta(x) = x - \gamma(x)$ задает отклонение точки x от цикла Γ .

О п р е д е л е н и е 10.1. Решение $\xi(t)$ будем называть э к с п о – н е н ц и а л ь н о о р б и т а л ь н о у с т о й ч и в ы м, если найдутся такие $\alpha > 0$, $K > 0$, что справедливо неравенство

$$\|\Delta(x(t))\| \leq K e^{-\alpha t} \|\Delta(x_0)\|$$

для любого решения $x(t)$ системы (10.1) с начальным условием $x(0) = x_0 \in U$.

Динамика малых отклонений, как и в случае точки покоя, определяется системой первого приближения.

Рассмотрим для T -периодического решения $\xi(t)$ системы (10.1) новую переменную

$$z = x - \xi(t).$$

Подставив $x = \xi(t) + z$ в систему (10.1) и разложив ее правую часть в ряд Тейлора, получим

$$\dot{\xi} + \dot{z} = f(\xi(t) + z) = f(\xi(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t))z + \dots$$

Отбрасывая нелинейные члены с учетом тождества

$$\dot{\xi} = f(\xi(t)),$$

получим линейную систему первого приближения

$$\dot{z} = F(t)z, \quad F(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t)). \quad (10.2)$$

Матрица $F(t)$ этой системы вслед за функцией $\xi(t)$ является T -периодической.

10.2. Линейные системы с периодическими коэффициентами. Элементы теории Флоке

Рассмотрим для системы

$$\dot{z} = A(t)z, \quad (10.3)$$

где $A(t)$ – произвольная T -периодическая $(n \times n)$ -матрица, фундаментальную матрицу

$$Z(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_n(t)],$$

составленную из линейно независимых решений системы (10.3) с начальными условиями

$$z_1(0) = (1, 0, \dots, 0)^\top, \ z_2(0) = (0, 1, \dots, 0)^\top, \dots, \ z_n(0) = (0, 0, \dots, 1)^\top.$$

Л е м м а 10.1.

Для фундаментальной матрицы справедливо тождество

$$Z(t+T) = Z(t) \cdot Z(T). \quad (10.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим вектор-функции $\tilde{z}_1(t) = z_1(t+T), \dots, \tilde{z}_n(t) = z_n(t+T)$ – столбцы матрицы $Z(t+T)$. Благодаря T -периодичности матрицы $A(t)$, справедливы соотношения

$$\dot{\tilde{z}}_i(t) = \dot{z}_i(t+T) = A(t+T)z_i(t+T) = A(t)z_i(t+T) = A(t)\tilde{z}_i(t),$$

означающие, что функции $\tilde{z}_i(t)$ также являются решениями системы (10.3). Последнее позволяет связать их при помощи фундаментальной матрицы $Z(t)$ со своими начальными значениями $\tilde{z}_i(t) = Z(t)\tilde{z}(0)$. Переписывая эти соотношения в исходных обозначениях $z_i(t+T) = Z(t)z_i(T)$, получим требуемое тождество (10.4).

Матрица

$$B = Z(T),$$

задающая отображение за период T системы (10.3), называется
м а т р и ц е й м о н о д р о м и и.

Любое решение $z(t)$ системы (10.3) в моменты времени, кратные периоду, благодаря (10.4) легко выражается с помощью матрицы монодромии через начальные данные:

$$z(kT) = Z(kT)z(0) = Z((k-1)T)Z(T)z(0) = \dots = B^k z(0).$$

Рассмотрим постоянную матрицу

$$\Lambda = \frac{1}{T} \ln B \quad (B = e^{T\Lambda})$$

и матричную функцию $\Phi(t) = Z(t)e^{-t\Lambda}$.

Л е м м а 10.2. Матричная функция $\Phi(t)$ является T -периодической.

Доказательство следует из цепочки равенств:

$$\begin{aligned} \Phi(t+T) &= Z(t+T)e^{-(t+T)\Lambda} = Z(t)Z(T)e^{-T\Lambda}e^{-t\Lambda} = \\ &= \{Z(T)e^{-T\Lambda} = I\} = Z(t)e^{-t\Lambda} = \Phi(t) \end{aligned}$$

П р и в о д и м о с т ь. В системе (10.3) сделаем замену переменных $z = \Phi(t)y$, где y – новая переменная.

Т е о р е м а 10.1. Система (10.3) в новых переменных y имеет вид

$$\dot{y} = \Lambda y. \tag{10.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство (20.5) следует из (20.3) и соотношений

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \dot{\Phi}(t)y + \Phi(t)\dot{y} = \dot{Z}(t)e^{-t\Lambda}y + Z(t)e^{-t\Lambda}(-\Lambda)y + \Phi(t)\dot{y} = \\ &= A(t)Z(t)e^{-t\Lambda}y - Z(t)e^{-t\Lambda}\Lambda y + \Phi(t)\dot{y} \\ A(t)z &= A(t)\Phi(t)y = A(t)Z(t)e^{-t\Lambda}y.\end{aligned}$$

Как видим, линейная система с периодическими коэффициентами (10.3) подходящей заменой переменных приводится к системе (10.5) с постоянной матрицей.

Собственные значения ρ_i ($i = 1, \dots, n$) матрицы монодромии $B = Z(T)$ называют м у л ь т и п л и к а т о р а м и системы (10.3). Собственные числа λ_i матрицы Λ – х а р а к т е р и с т и ч е с к и е п о к а з а т е л и – связаны с мультипликаторами соотношениями

$$\lambda_i = \frac{1}{T} \text{Ln } \rho_i, \quad \rho_i = e^{\lambda_i T}.$$

Критерием асимптотической устойчивости решения $\bar{y} = 0$ системы (10.5) является условие

$$\text{Re} \lambda_i < 0$$

(см. теорему 9.2). В силу равенства

$$|\rho_i| = e^{\text{Re} \lambda_i T}$$

это эквивалентно условию

$$|\rho_i| < 1.$$

Полученное неравенство и теорема 10.1 дают следующий результат.

Т е о р е м а 10.2. *Для асимптотической устойчивости решения $\bar{z} = 0$ системы (10.3), необходимо и достаточно, чтобы все мультипликаторы удовлетворяли неравенствам*

$$|\rho_i| < 1, \quad (i = 1, \dots, n).$$

10.3. Экспоненциальная устойчивость цикла

Система первого приближения (10.2) в общем классе линейных систем с периодическими коэффициентами (10.3) имеет важную особенность. Действительно, вектор-функция $r(t) = f(\xi(t))$ в силу равенств

$$\dot{r}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t))\dot{\xi}(t)$$

и

$$\dot{\xi}(t) = f(\xi(t))$$

является частным решением системы первого приближения (10.2). Отсюда, в частности, следует равенство $r(T) = Br(0)$, или, с учетом T -периодичности функции $r(t)$, равенство $r(0) = Br(0)$. Как видим, вектор $r(0)$ является собственным вектором матрицы B с соответствующим собственным значением, равным единице. Таким образом, в случае цикла матрица монодромии B обязательно имеет мультипликатор $\rho_1 = 1$. Полученное означает (см. теорему 9.2), что точка покоя $\bar{z} = 0$ системы первого приближения (10.2) никогда не может быть асимптотически устойчивой. Следует подчеркнуть, что для экспоненциальной устойчивости цикла этого и не требуется. Вопрос об экспоненциальной устойчивости цикла Γ решается в зависимости от расположения остальных мультипликаторов ρ_2, \dots, ρ_n .

Т е о р е м а 10.3 (Андропова – Витта). *Для экспоненциальной орбитальной устойчивости решения $\xi(t)$ системы (10.1) необходимо и достаточно, чтобы мультипликаторы ρ_2, \dots, ρ_n удовлетворяли неравенствам*

$$|\rho_i| < 1, \quad i = 2, \dots, n.$$

Доказательство см. в монографии Б. П. Демидовича [9].

Из теоремы Виета и формулы Лиувилля следуют равенства

$$\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \dots \cdot \rho_n = \det B = e^{\int_0^T \text{tr} F(t) dt}.$$

Неравенство

$$\int_0^T \text{tr} F(t) dt < 0 \quad (10.6)$$

по теореме Андронова – Витта является в общем n -мерном случае необходимым условием экспоненциальной устойчивости цикла Γ .

В двумерном случае справедливо равенство

$$\rho_2 = \det B,$$

что делает неравенство (10.6) не только необходимым, но одновременно и достаточным условием экспоненциальной устойчивости цикла (критерий Пуанкаре).

В случае цикла на плоскости мультипликатор ρ_2 имеет простой геометрический смысл, показывая при малых отклонениях, во сколько раз траектория приближается к циклу за один оборот. Величина ρ_2 может служить мерой устойчивости предельного цикла к начальным возмущениям. Малость ρ_2 означает высокую степень устойчивости. При значениях $\rho_2 < 1$, но близких к единице, цикл устойчив слабо. При $\rho_2 > 1$ цикл неустойчив. Случай $\rho_2 = 1$ – критический. Здесь возможны различные варианты: цикл устойчив, но не экспоненциально; цикл полуустойчив; цикл находится в окружении других близких циклов и т. д.

Упражнения

10.1. Написать программу отыскания устойчивого предельного цикла с заданной точностью. При помощи этой программы найти предельные циклы и соответствующие им мультипликаторы для следующих систем:

а) уравнение Хайрера

$$\ddot{x} + x = \varepsilon \dot{x} - (\dot{x})^3;$$

б) гликолитический осциллятор

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - xy \\ \dot{y} = py \left(x - \frac{1+q}{q+y} \right) \end{cases};$$

в) осциллятор Ван-дер-Поля (мягкий режим)

$$\ddot{x} + x = \delta(1 - x^2)\dot{x};$$

г) осциллятор Ван-дер-Поля (жесткий режим)

$$\ddot{x} + x = \delta(1 + ax^2 - bx^4)\dot{x}, \quad a = 5, \quad b = 0.5;$$

д) брюсселятор

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - (b+1)x + ax^2y, & a > 0, \quad b > 0 \\ \dot{y} = bx - ax^2y. \end{cases}$$

10.2. Исследовать изменения циклов из задачи 10.1 и их мультипликаторов при изменении параметров порождающих их систем. Получить графики зависимости мультипликаторов от параметров.

11.1. Структурная устойчивость и бифуркации

В исследовании зависимости фазового портрета системы от изменения входящих в нее параметров выделяют два случая. К первому относят системы, изменение параметров которых в некоторой области сопровождается сохранением качественной картины их фазовых портретов. Два фазовых портрета называют качественно одинаковыми, если существует взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное отображение, переводящее один фазовый портрет в другой. Область параметров, внутри которой сохраняется качественная картина фазовых портретов системы, называется *областью структурной устойчивости*.

Второй случай составляют системы, в которых при прохождении параметра μ через некоторое значение μ_* происходит качественное изменение фазового портрета (см. [1]). При этом говорят, что в системе при $\mu = \mu_*$ происходит *бифуркация*, а само значение μ_* называют *точкой бифуркации*.

Пример. Фазовые портреты линейной системы

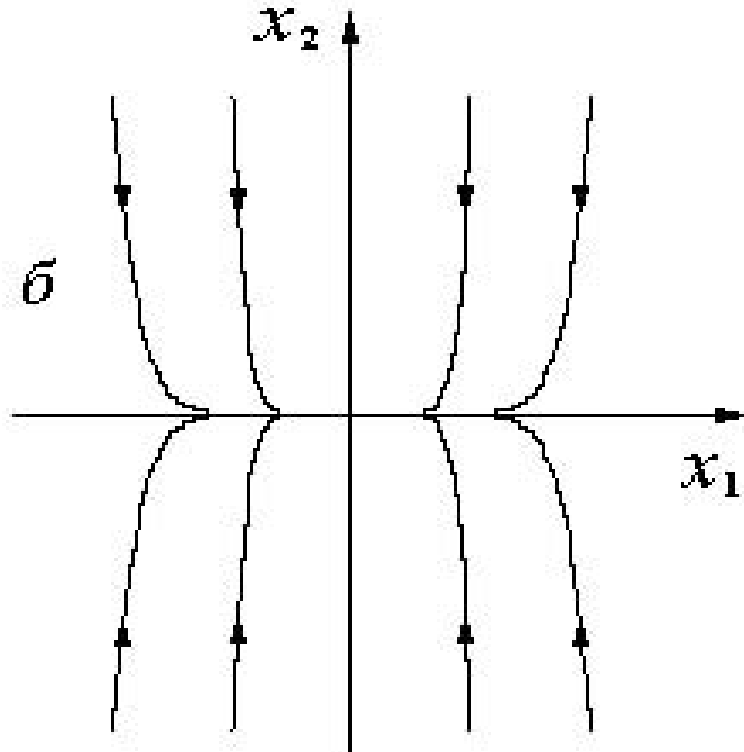
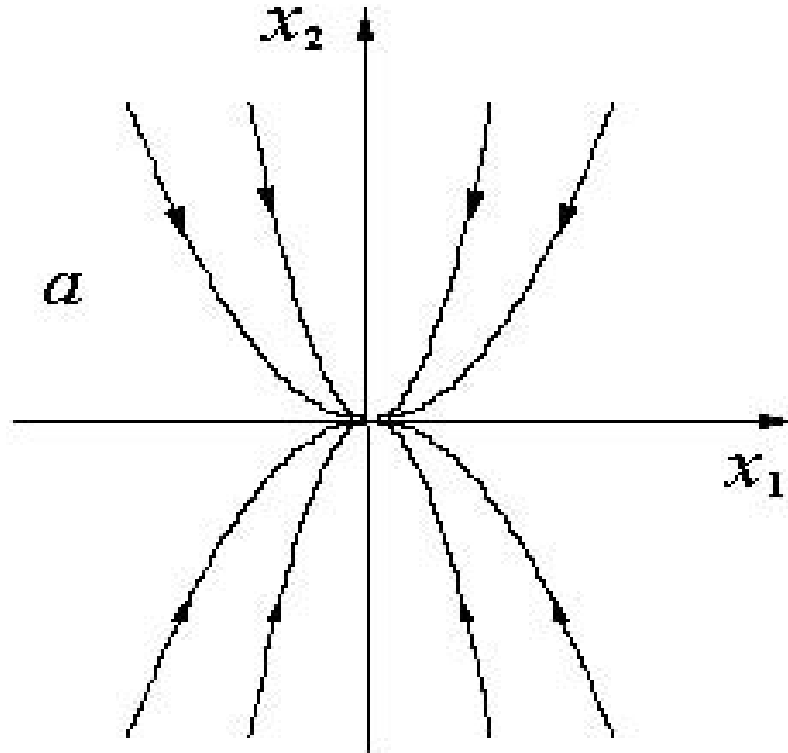
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

для различных μ представлены на рис. 11.1.

Как видим, система имеет две области структурной устойчивости. При $-\infty < \mu < 0$ фазовый портрет – устойчивый узел (рис. 11.1,а; 11.1,б).

При $0 < \mu < \infty$ фазовый портрет – седло (рис. 11.1,г). Эти области разделены единственной точкой бифуркации $\mu_* = 0$ (рис. 11.1,в).

Переход параметра μ через бифуркационное значение $\mu_* = 0$ слева направо сопровождается потерей устойчивости точки покоя $\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0$.



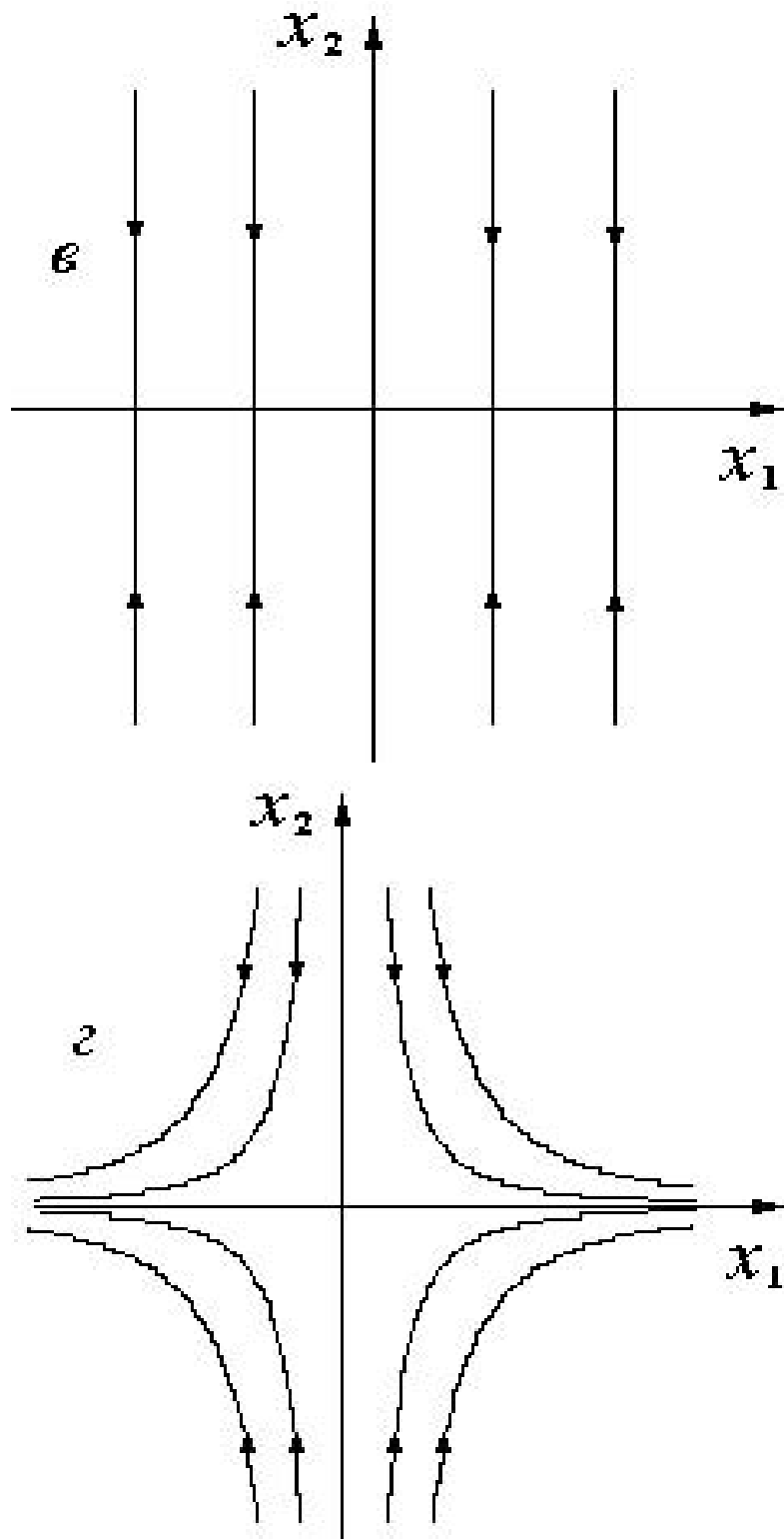


Рис. 11.1. Фазовые портреты:

a – при $\mu = -0.5$; b – при $\mu = -0.1$; $в$ – при $\mu = 0$; $г$ – при $\mu = 1$

Бифуркация потери устойчивости точки покоя в случае линейных

систем обязательно приводит к тому, что фазовые траектории уходят в бесконечность. В нелинейном случае такая бифуркация может сопровождаться появлением у системы новых инвариантных множеств.

11.2. Бифуркация рождения цикла

Рассмотрим двумерную систему – модель Хопфа

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + \mu x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \quad (11.1)$$

Перейдя от декартовых координат x_1, x_2 к полярным r, φ по формулам

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi$$

получим совсем простую систему

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r - r^3 \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases}, \quad (11.2)$$

состоящую из двух независимых уравнений. Решением второго уравнения будет функция $\varphi = \varphi_0 + t$, где φ_0 – начальное положение угла φ .

Решения первого уравнения в зависимости от параметра μ имеют следующий вид:

а) при $\mu < 0$ $r_0 = 0$ – единственная точка покоя, к которой экспоненциально стремятся все другие решения при $t \rightarrow +\infty$ (рис. 11.2,а);

б) при $\mu = 0$ общая картина предыдущего случая сохраняется, однако скорость стремления решений к $r_0 = 0$ перестает быть экспоненциальной:

$$r(t) = \frac{r(0)}{\sqrt{2tr^2(0) + 1}};$$

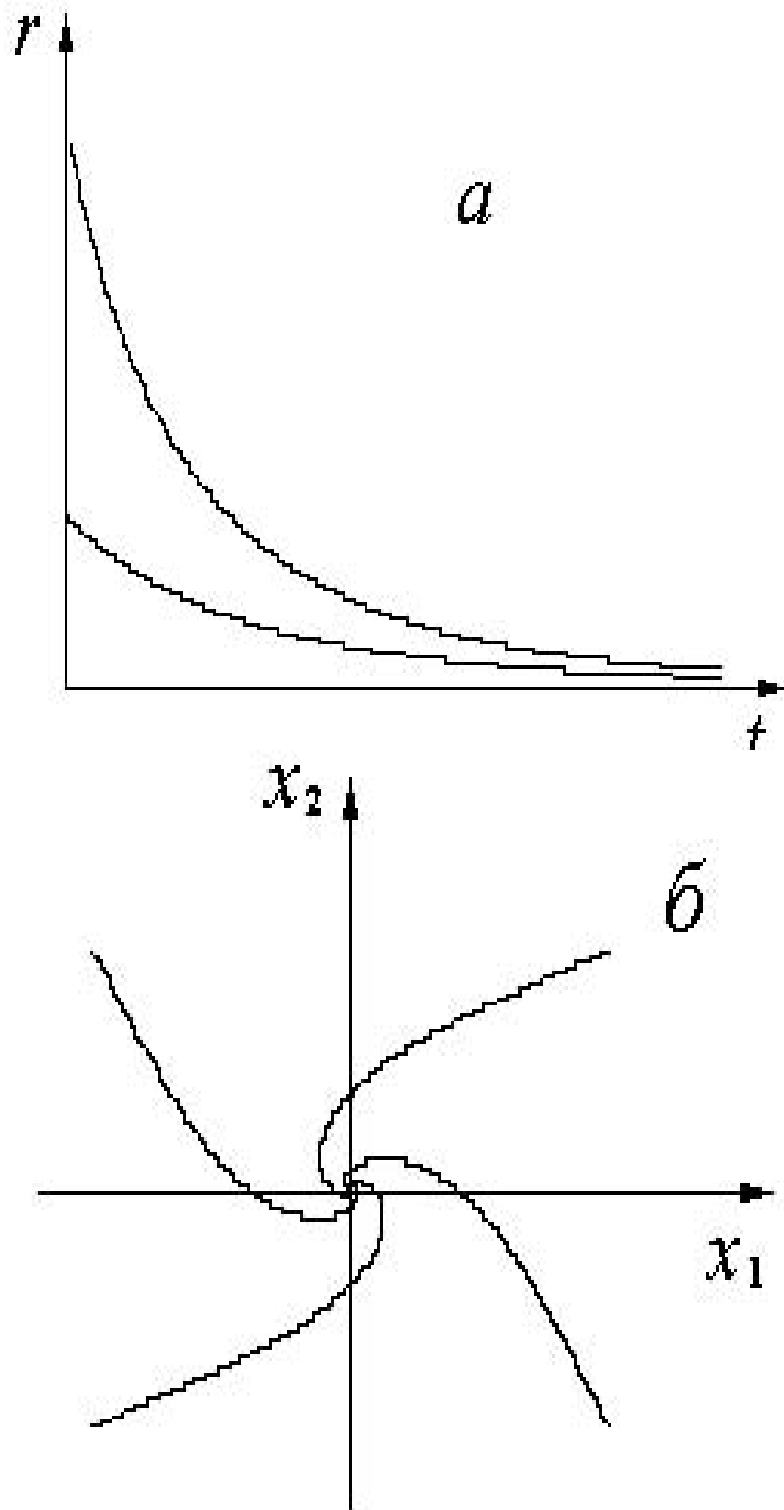


Рис. 11.2. Динамика систем при $\mu = -1$:

a – система (11.2); $б$ – система (11.1)

(Как видим, для всех $\mu \leq 0$ точка покоя $r_0 = 0$ является асимптотически устойчивой.)

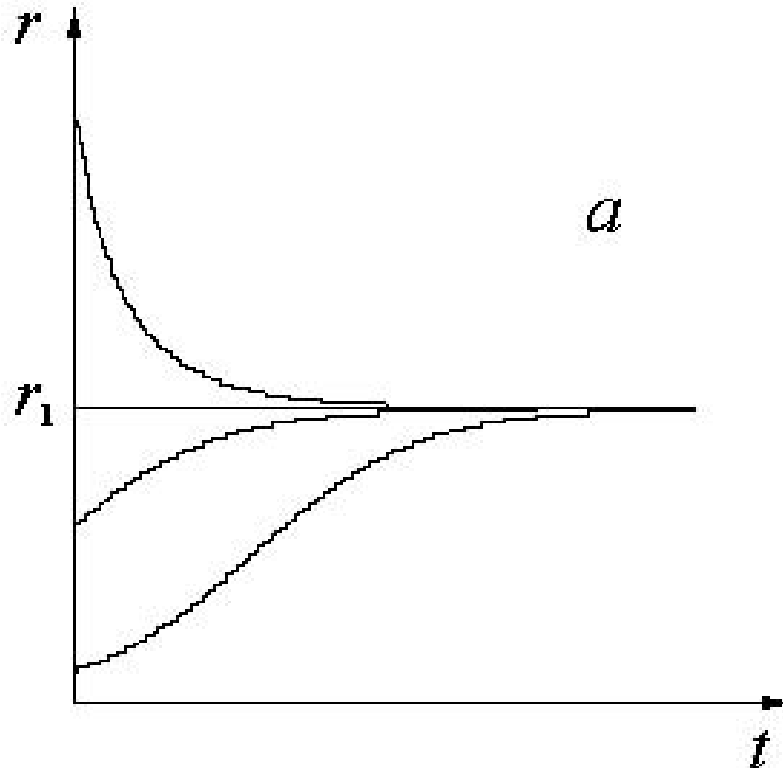
в) при $\mu > 0$ у первого уравнения системы (11.2) наряду с $r_0 = 0$ появляется еще одна точка покоя $r_1 = \sqrt{\mu}$, к которой стремятся экспоненциально другие решения. Расположение интегральных кривых для этого случая представлено на рис. 11.3,а.

Как видно, при переходе параметра μ через бифуркационное значение $\mu_* = 0$ в область $\mu > 0$ точка покоя $r_0 = 0$ теряет устойчивость. При этом появляется новая устойчивая точка покоя r_1 . Проведенный анализ позволяет теперь проследить изменение фазовых портретов системы (11.1):

а) при $\mu < 0$ точка покоя $(0, 0)$ системы экспоненциально устойчива. Фазовый портрет – фокус (рис. 11.2,б);

б) при $\mu = 0$ точка покоя $(0, 0)$ – асимптотически устойчива;

в) при $\mu > 0$ точка покоя $(0, 0)$ – неустойчива. В системе появляется устойчивый предельный цикл – окружность радиуса $r_1 = \sqrt{\mu}$ (рис. 11.3,б).



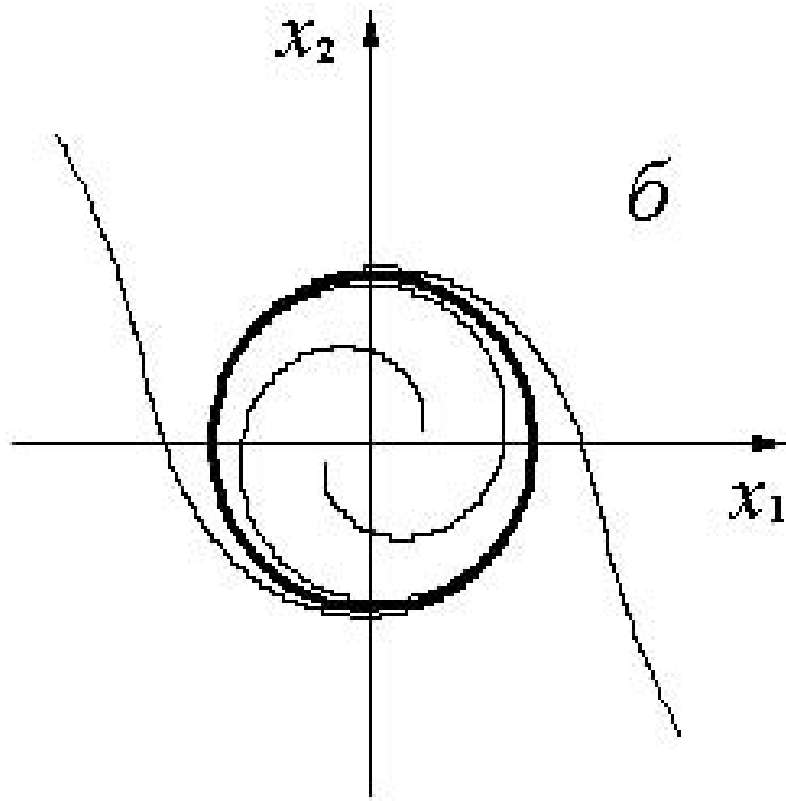


Рис. 11.3. Динамика систем при $\mu = 0.5$:

a – система (11.2); $б$ – система (11.1)

Таким образом, переход параметра μ через бифуркационное значение $\mu_* = 0$ сопровождается качественным изменением фазового портрета системы (11.1). При этом потеря устойчивости точки покоя $(0, 0)$ сопровождается рождением устойчивого предельного цикла – окружности

$$x_1^2 + x_2^2 = \mu.$$

Следует отметить, что размер цикла (радиус окружности $r_1 = \sqrt{\mu}$) непрерывно меняется (возрастает) по мере удаления параметра от своего бифуркационного значения $\mu_* = 0$. Такой вариант бифуркации называется **м я г к и м р о ж д е н и е м ц и к л а**, или бифуркацией Андронова – Хопфа.

Другой вариант бифуркации рождения цикла рассмотрим на при-

мере системы

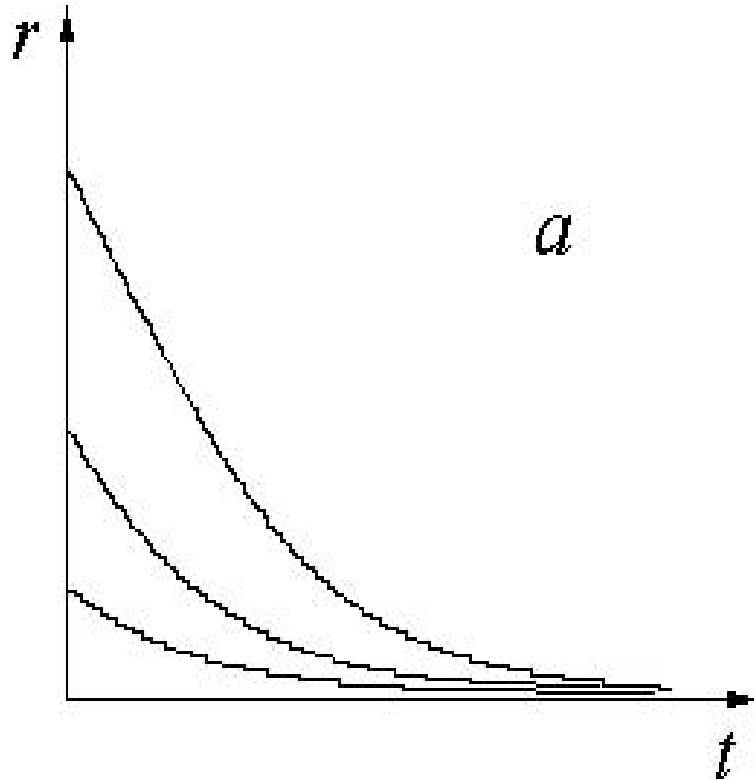
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(\mu + 2x_1^2 + 2x_2^2 - (x_1^2 + x_2^2)^2) - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2(\mu + 2x_1^2 + 2x_2^2 - (x_1^2 + x_2^2)^2) + x_1 \end{cases}. \quad (11.3)$$

В полярных координатах данная система распадается на два независимых уравнения

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu + 2r^2 - r^4) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases}. \quad (11.4)$$

Решения первого уравнения в зависимости от параметра μ имеют следующий вид:

а) При $\mu < -1$ единственной точкой покоя является $r_0 = 0$. Все другие решения стремятся к $r_0 = 0$ экспоненциально. Точка покоя $r_0 = 0$ устойчива (рис. 11.4, а).



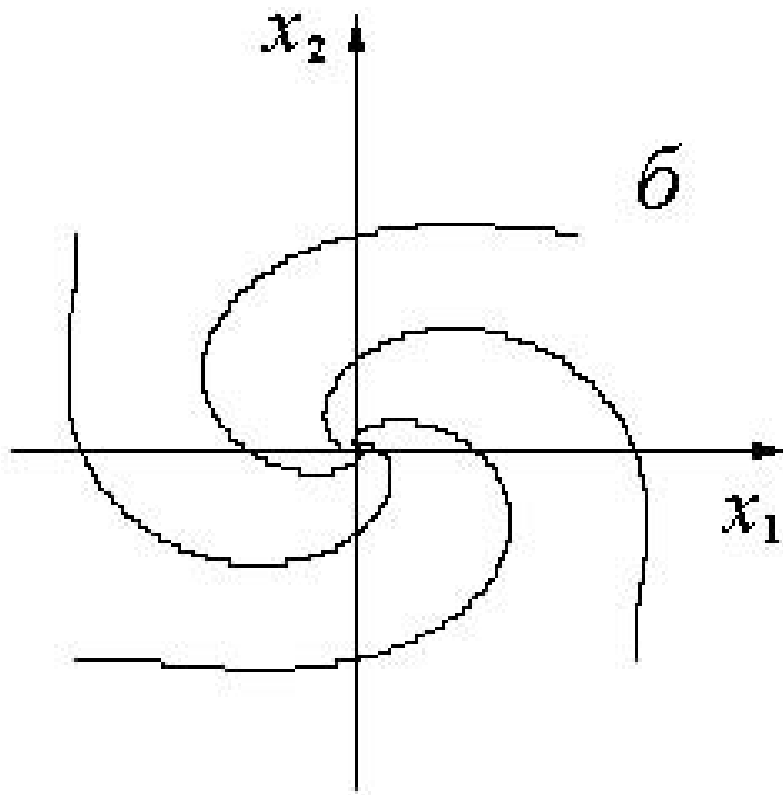


Рис. 11.4. Динамика систем при $\mu = -1.2$:

a – система (11.4); b – система (11.3)

б) При $\mu = -1$ наряду с $r_0 = 0$ появляется еще одна точка покоя $r_1 = 1$. Расположение интегральных кривых становится другим (см. рис. 11.5, a). Решения с начальными точками, лежащими выше $r_1 = 1$, монотонно убывая, стремятся к $r_1 = 1$. Решения с начальными точками, лежащими ниже $r_1 = 1$, уже стремятся к $r_0 = 0$. Точка покоя $r_0 = 0$ устойчива, а точка покоя $r_1 = 1$ полуустойчива.

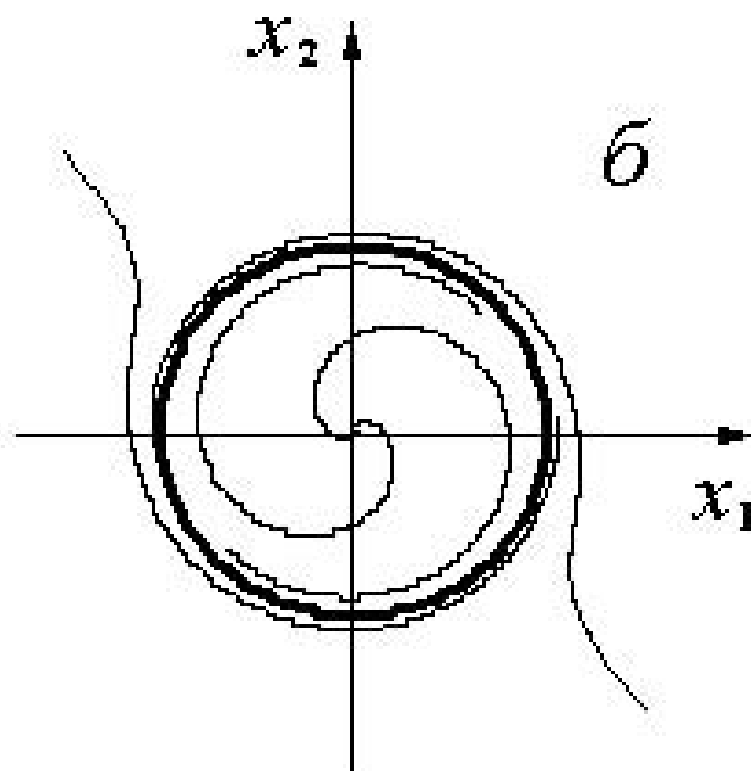
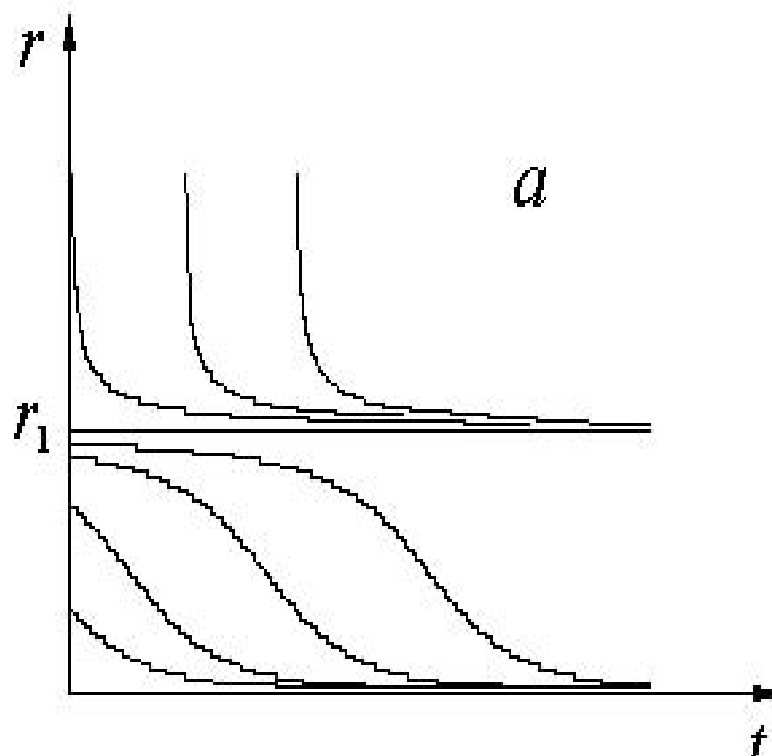
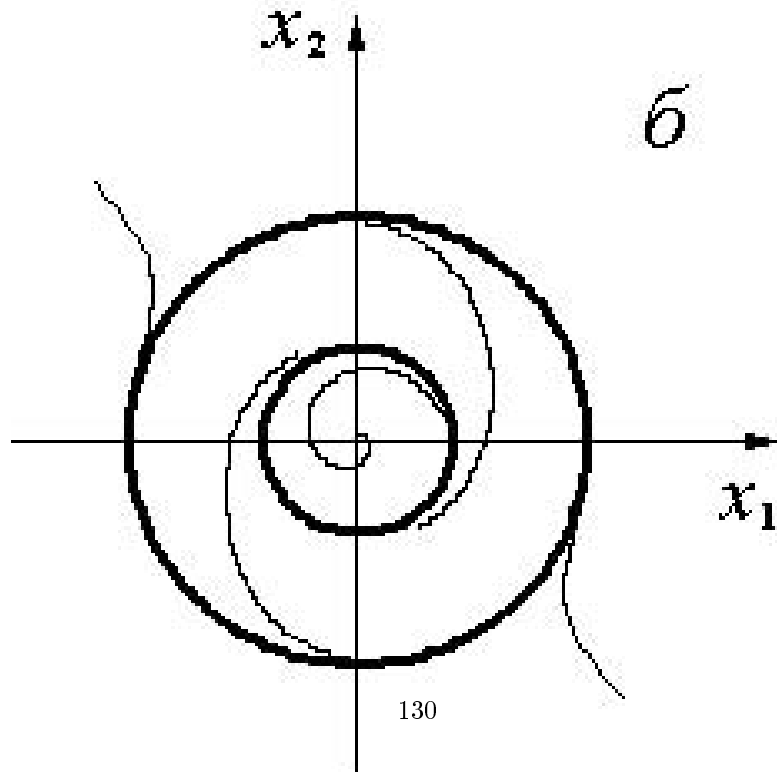
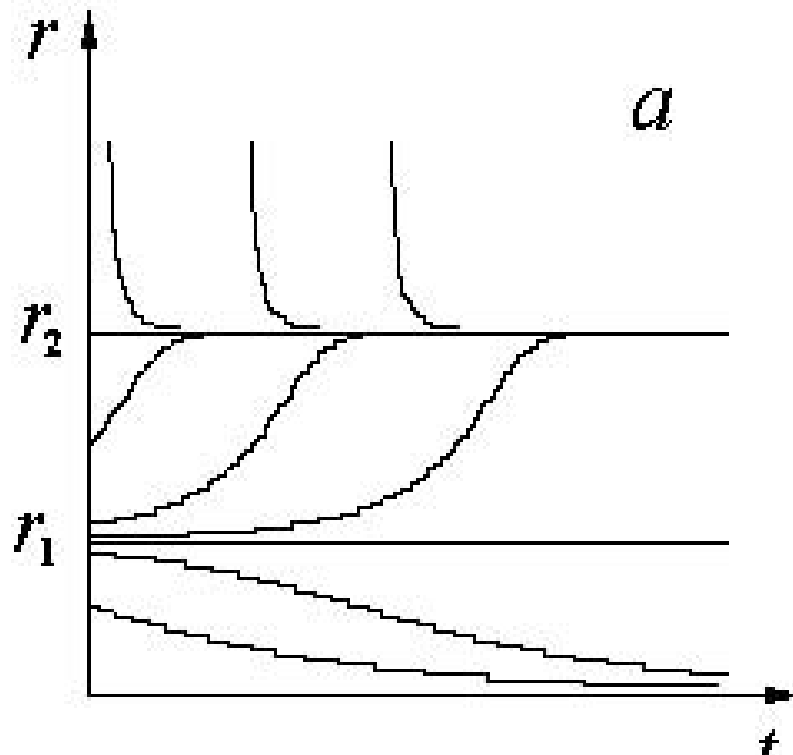


Рис. 11.5. Динамика систем при $\mu = -1$:
 a – система (11.4); b – система (11.3)

в) При $-1 < \mu < 0$ имеем уже три точки покоя:

$$r_0 = 0, \quad r_1 = \sqrt{1 - \sqrt{1 + \mu}}, \quad r_2 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \mu}}.$$

Точка покоя r_1 при переходе μ в интервал $-1 < \mu < 0$ расщепляется в две. Соответственно меняется и расположение интегральных кривых (см. рис.11.6, а).



a – система (11.4); b – система (11.3)

Решения с начальными точками, лежащими в интервале (r_1, ∞) , стремятся к r_2 . Решения с начальными точками, лежащими в интервале $(0, r_1)$, стремятся к r_1 . Точки покоя r_0 и r_2 – устойчивы, точка покоя r_1 – неустойчива.

г) При $\mu = 0$ имеем две точки покоя:

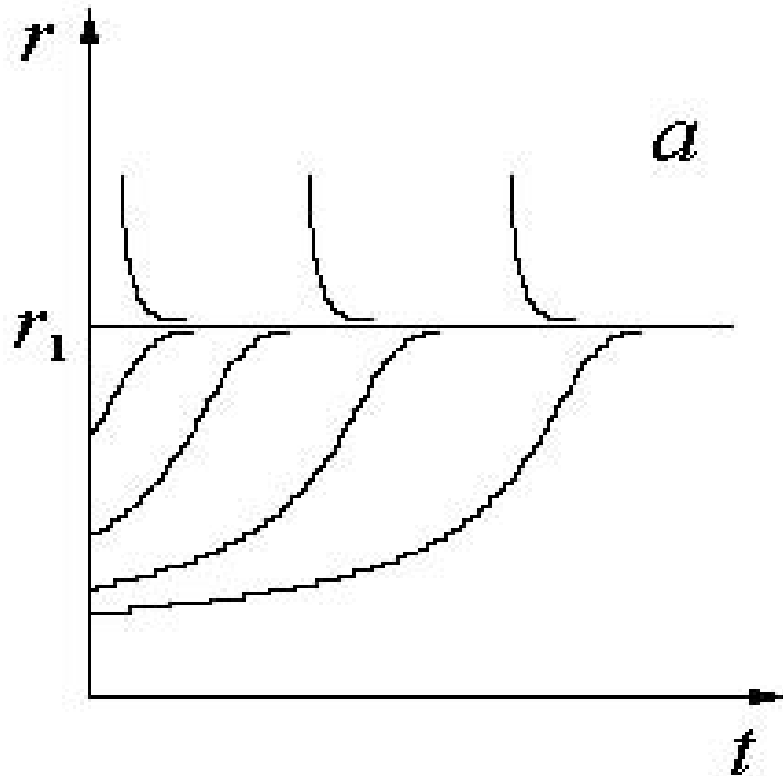
$$r_0 = 0, r_2 = \sqrt{2}.$$

Вид интегральных кривых показан на рис. 11.7, a . Точка покоя r_0 – неустойчива, точка покоя r_1 – устойчива.

д) При $\mu > 0$ имеем две точки покоя

$$r_0 = 0, r_2 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \mu}}.$$

Общая картина подобна случаю g .



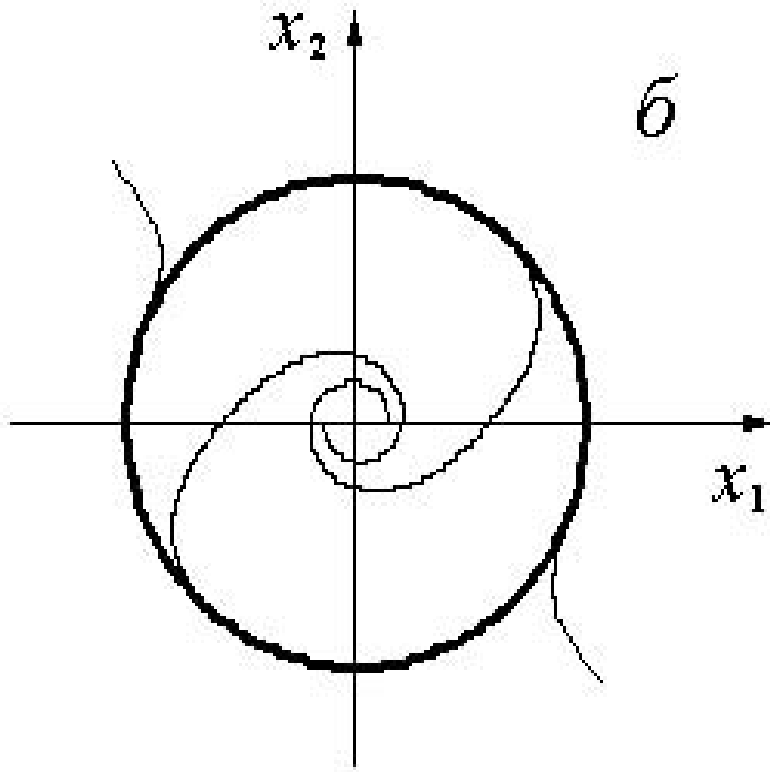


Рис. 11.7. Динамика систем при $\mu = 0$:

a – система (11.4); b – система (11.3)

Проследим, как представленные изменения в поведении интегральных кривых $r(t)$ скажутся на изменении фазовых портретов системы (11.3).

а) При $\mu < -1$ у системы (11.3) – единственная точка покоя $(0,0)$. Фазовый портрет – устойчивый фокус (рис. 11.4,б). Все траектории стремятся к точке покоя.

б) При $\mu = -1$ у системы (11.3) появляется периодическое решение (цикл), фазовая траектория которого есть окружность

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

единичного радиуса.

Фазовые траектории с началом вне единичного круга асимптотически стремятся к этому циклу. Все остальные с началом внутри круга стремятся к точке покоя $(0,0)$ (рис. 11.5,б).

В системе (11.3) при $\mu = -1$ произошла жесткая бифуркация рождения цикла (полуустойчивого) фиксированного радиуса.

в) При $-1 < \mu < 0$ на фазовом портрете мы видим результат расщепления полуустойчивого цикла из b на два новых цикла. Один из них (внешний, радиусом r_2) – устойчивый, другой (внутренний, радиусом r_1) – неустойчивый (рис. 11.6, б).

Точка покоя $(0,0)$ по-прежнему остается устойчивой. При приближении μ к 0 внутренний цикл, уменьшая свой радиус, стремится к точке покоя $(0, 0)$.

г) При $\mu = 0$ происходит слияние внутреннего цикла с точкой покоя $(0,0)$. В результате данной бифуркации точка покоя теряет устойчивость и у системы на фазовой плоскости остается единственное притягивающее множество – предельный цикл (рис. 11.7, б).

д) При $\mu > 0$ и дальнейшем увеличении параметра μ фазовый портрет системы (11.3) качественно не изменяется.

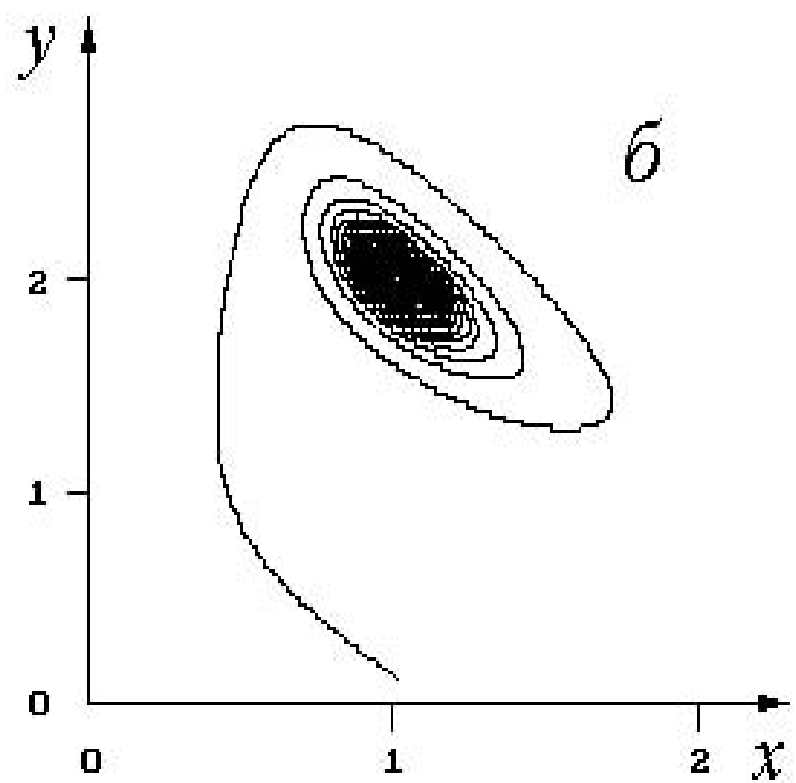
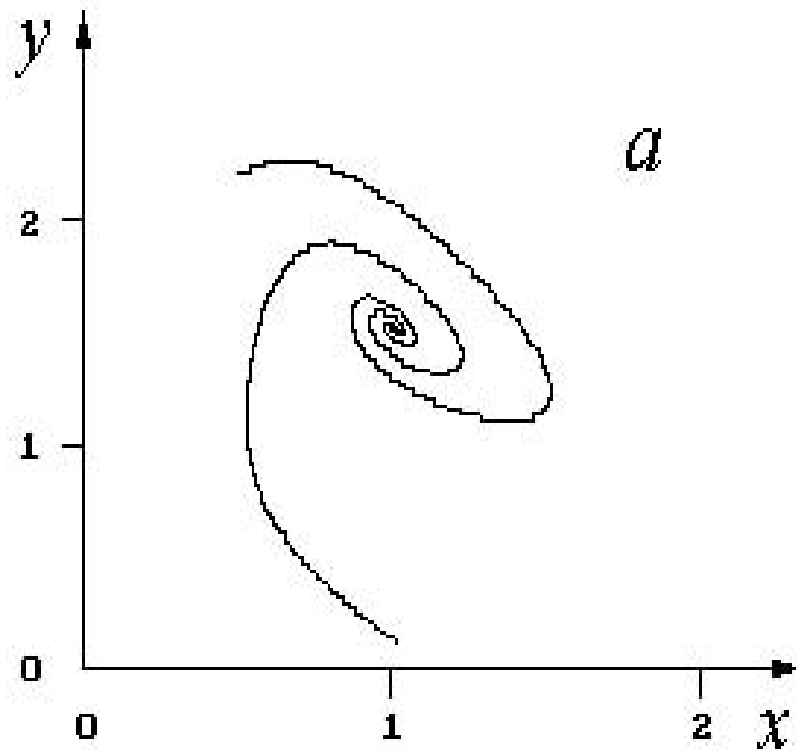
В нелинейных системах потеря устойчивости точки покоя при изменении параметров часто сопровождается рождением устойчивого предельного цикла. Отмеченная связь (потеря устойчивости точки покоя – появление предельного цикла) позволяет искать бифуркации рождения цикла по бифуркациям потери устойчивости точек покоя, используя для отыскания последних анализ линейных систем первого приближения.

Возможности такого подхода иллюстрируются на примерах брюсселятора и уравнения Ван-дер-Поля. У брюсселятора (см. анализ системы первого приближения в примере 3 из §9) бифуркация потери устойчивости точки покоя

$$\bar{x} = 1, \bar{y} = \frac{b}{a}$$

происходит при пересечении прямой $b = a + 1$.

Например, для $a = 1$ бифуркационным значением параметра будет $b_* = 2$. При $b > 2$ у брюсселятора вокруг уже неустойчивой точки покоя появляется (рис. 11.8) предельный цикл.



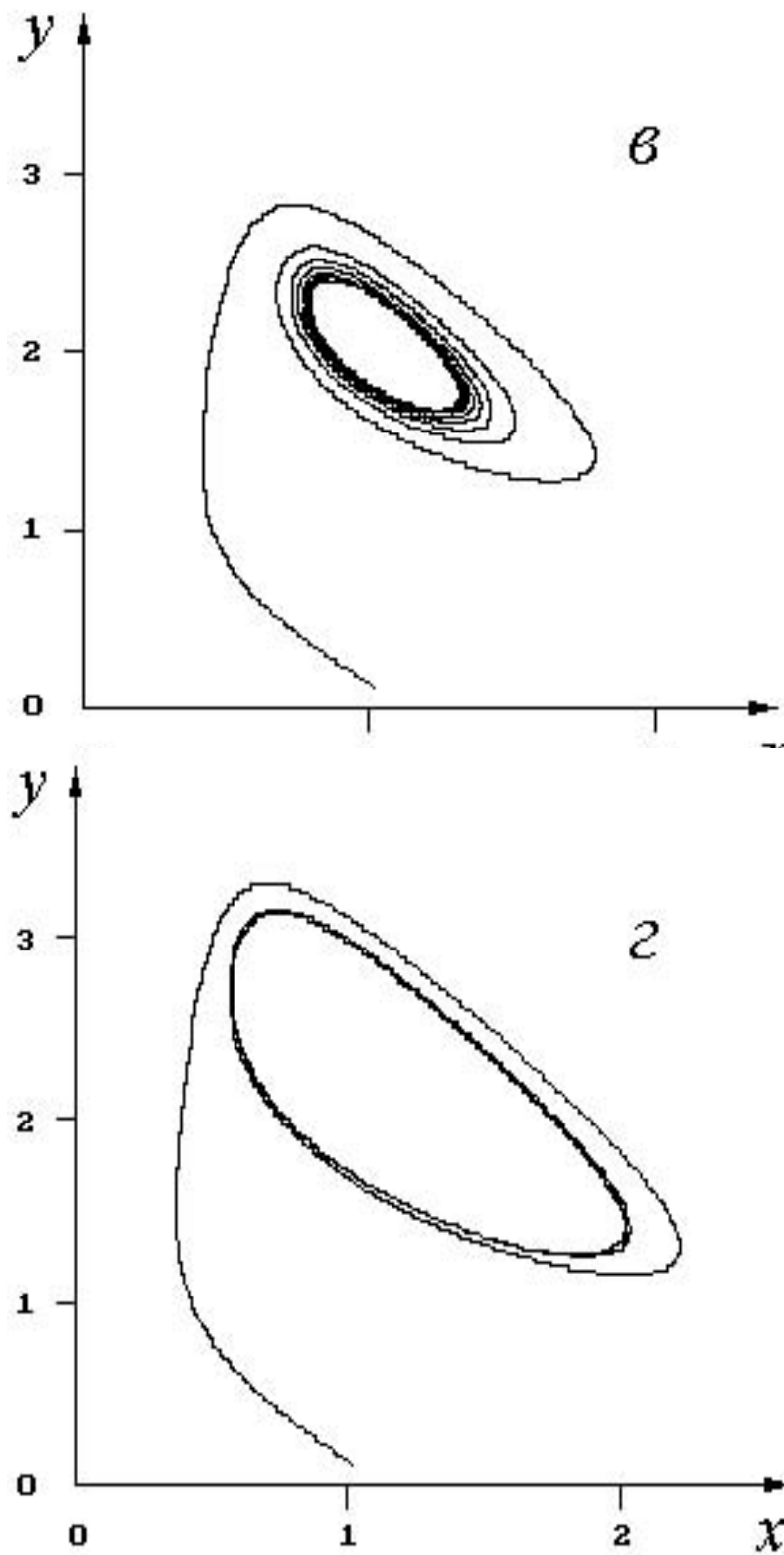


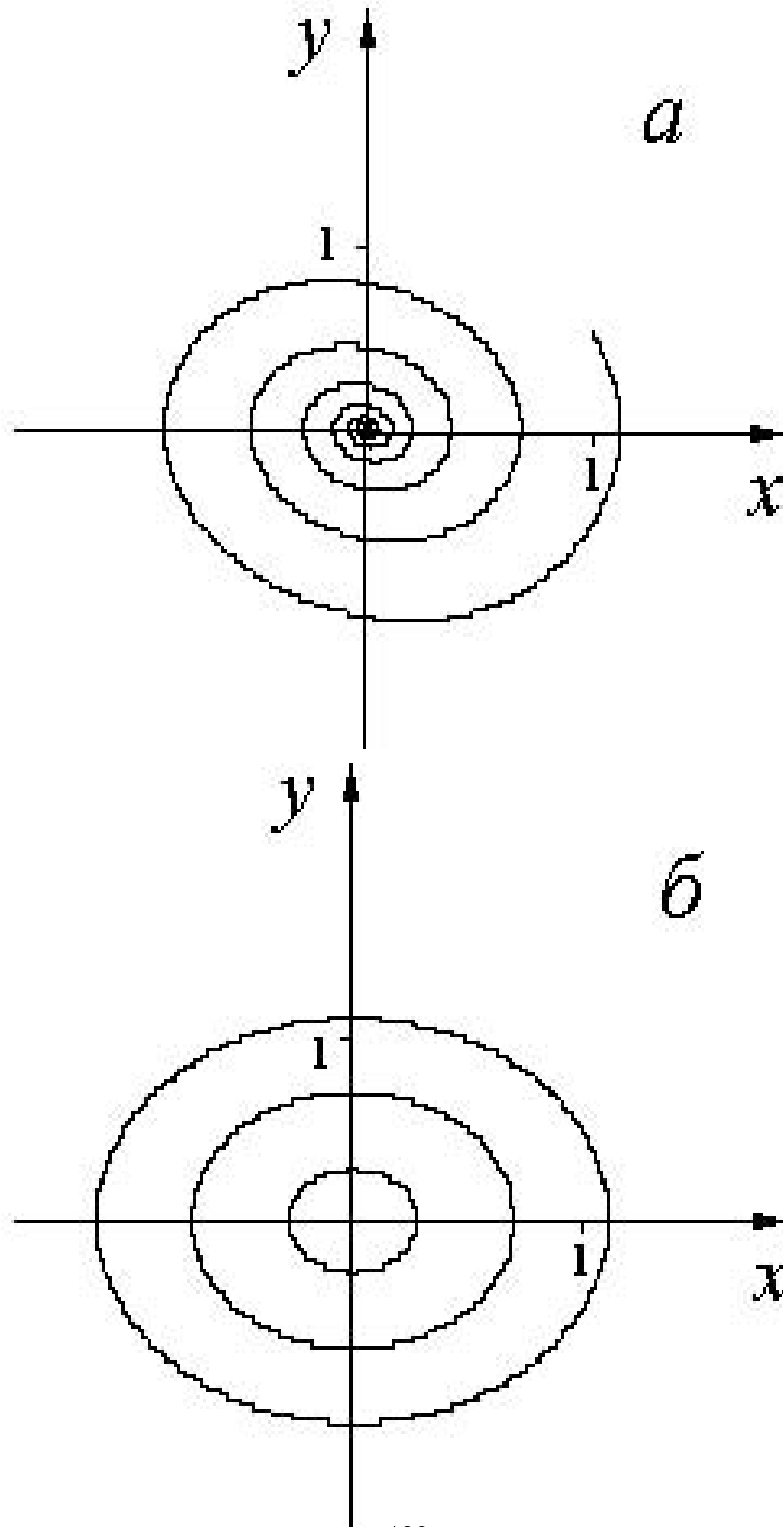
Рис. 11.8. Фазовые портреты брюсселятора при $a = 1$:

a — для $b = 1.5$; $б$ — для $b = 2$; $в$ — для $b = 2.05$; z — для $b = 2.3$

Размеры цикла по мере увеличения параметра b непрерывно возрас-

тают. Рис.11.8 демонстрирует для брюсселятора бифуркацию мягкого рождения цикла.

У модели Ван-дер-Поля (см. анализ системы первого приближения в примере 2 из § 9) потеря устойчивости точки покоя $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$ (см. рис. 11.9) происходит при $\delta_* = 0$.



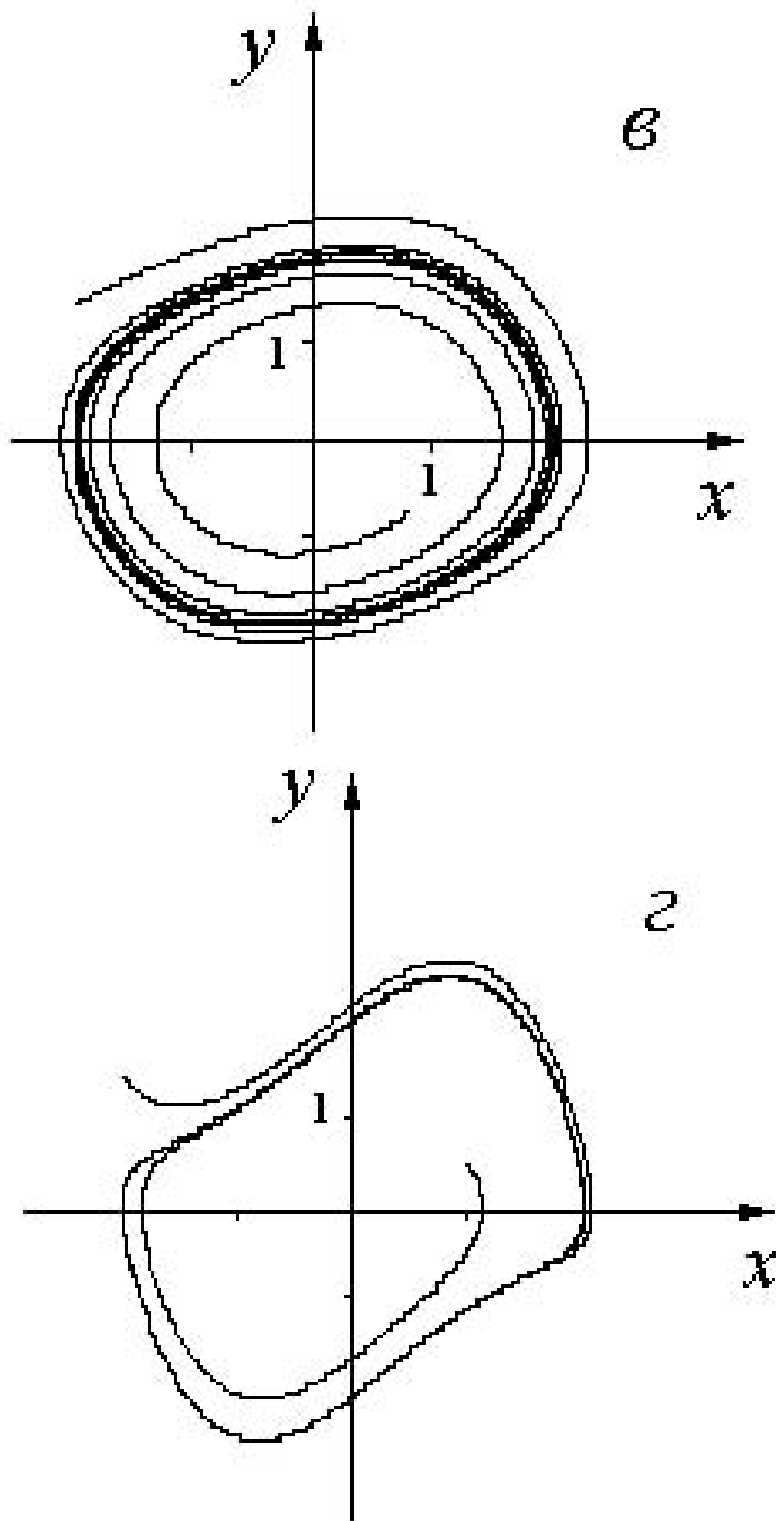


Рис. 11.9. Фазовые портреты модели Ван-дер-Поля:

a – для $\delta = -0.2$; $б$ – для $\delta = 0$; $в$ – для $\delta = 0.2$; $г$ – для $\delta = 1$

Для $\delta = 0$ уравнение Ван-дер-Поля вырождается в линейное с фа-

зовым портретом типа центр. Фазовыми траекториями здесь являются окружности различных радиусов. Последнее означает возможность в данной системе гармонических колебаний любой амплитуды в зависимости от выбора начальных данных.

При переходе в область $\delta > 0$ на фазовом портрете остается единственная замкнутая фазовая кривая (цикл), близкая при малых δ к окружности радиуса 2. Остальные фазовые кривые асимптотически, при $t \rightarrow +\infty$, приближаются к этому циклу. Фазовые портреты уравнения Ван-дер-Поля при

$$\delta = -0.2, \delta = 0, \delta = 0.2, \delta = 1$$

представлены на рис. 11.9.

Наличие у системы устойчивого периодического решения с фиксированной частотой и амплитудой, не зависящей от выбора начальных данных, позволяет использовать это электронное устройство в качестве генератора электрических колебаний. Следует отметить, что подобные режимы, получившие название **а в т о к о л е б а н и й**, возможны лишь в нелинейных системах.

11.3. Порядок и хаос в модели Лоренца

Отметим, что, наряду с решением $x(t), y(t), z(t)$, для модели Лоренца (7.6) всегда будет решением и набор функций $-x(t), -y(t), z(t)$. Поэтому фазовый портрет симметричен относительно оси OZ .

Рассмотрим для функции

$$v = x^2 + y^2 + (z - \sigma - r)^2$$

производную в силу системы Лоренца

$$\dot{v} = -2w + \frac{b}{2}(\sigma + r)^2, \quad w = \sigma x^2 + y^2 + b \left(z - \frac{\sigma + r}{r} \right)^2.$$

При достаточно больших K

$$\left(K^2 \geq \frac{1}{4} + \frac{b}{4} \max\left(\frac{1}{\sigma}, 1\right)\right)$$

сфера

$$v = K^2(\sigma + r)^2$$

целиком содержит эллипсоид

$$w = \frac{b}{4}(\sigma + r)^2.$$

При этом во всех точках сферы выполняется неравенство $\dot{v} \leq 0$, означающее, что все фазовые траектории пересекают сферу снаружи вовнутрь и далее из нее не выходят.

Для любого решения след матрицы

$$F = \frac{\partial f}{\partial x}$$

имеет постоянное отрицательное значение

$$\text{tr} F = -(\sigma + b + 1) < 0,$$

что означает равномерное сжатие фазового объема (см. [5]). Таким образом, всякое притягивающее множество системы Лоренца имеет нулевой объем.

Проследим изменение фазового портрета в зависимости от параметра r .

При всех значениях параметров система Лоренца имеет точку покоя

$$\bar{x} = 0, \bar{y} = 0, \bar{z} = 0.$$

Характеристическое уравнение соответствующей системы первого приближения

$$(\lambda + b)(\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)) = 0$$

имеет вещественные корни

$$\lambda_1 = -b, \lambda_{2,3} = \frac{-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma r}}{2}.$$

При $0 < r < 1$ все корни отрицательны и точка покоя $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$ асимптотически устойчива.

При $r > 1$ эта точка становится неустойчивой. В этом случае у системы появляются еще две точки покоя с координатами

$$\bar{x} = \bar{y} = \pm \sqrt{b(r - 1)} \quad \bar{z} = r - 1.$$

В силу симметрии они имеют одинаковый тип. Соответствующее характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1) = 0$$

в силу критерия Рауса–Гурвица приводит к условию устойчивости

$$r < r^* = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}.$$

При $r > r^*$ все три точки покоя становятся неустойчивыми. Для рассматриваемых здесь параметров

$$\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$$

бифуркационное значение

$$r^* = 24.737.$$

При $r = 28$ Лоренц обнаружил притягивающее множество – странный аттрактор (см. рис.7.6).

В модели Лоренца при дальнейшем увеличении параметра можно увидеть большое разнообразие как хаотических, так и периодических режимов.

Так, например, известно окно периодичности – интервал

$$99.524 < r < 100.795.$$

Этот интервал разбивается на подынтервалы

$$I_1 = (99.98, 100.795) , I_2 = (99.629, 99.98) , I_4 = (99.547, 99.629), \dots, I_{2^n}, \dots$$

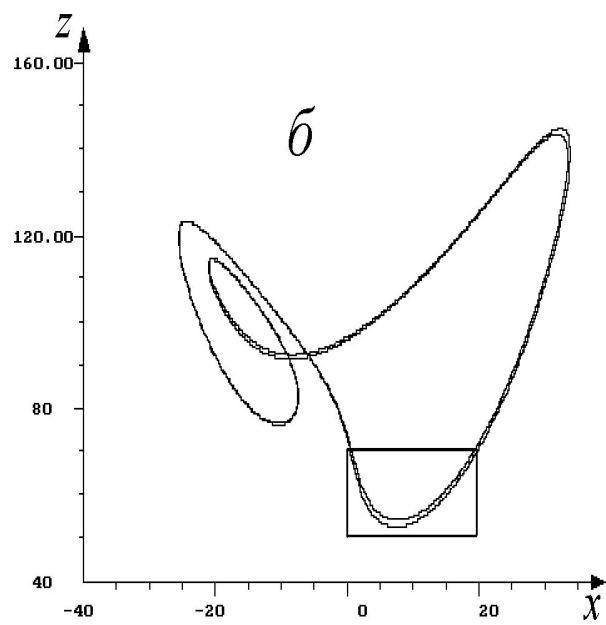
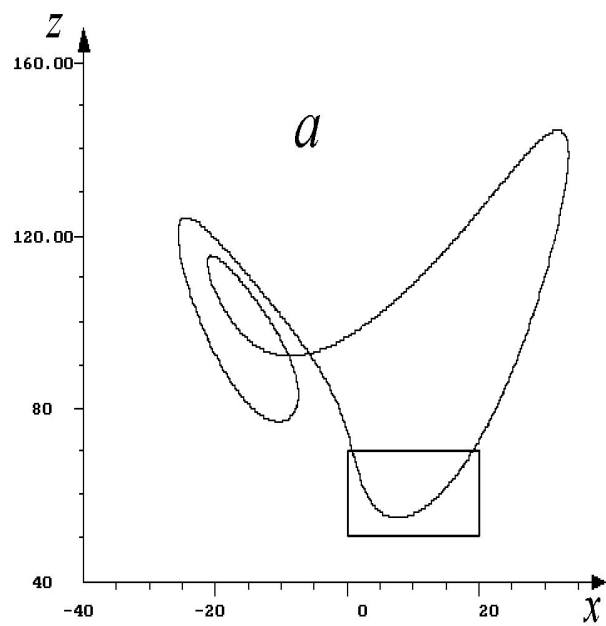
с предельными циклами

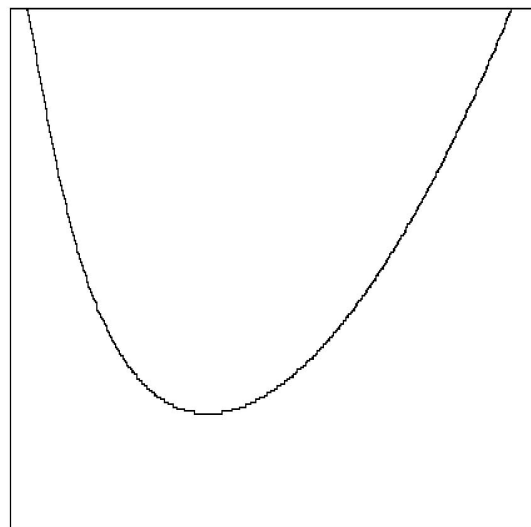
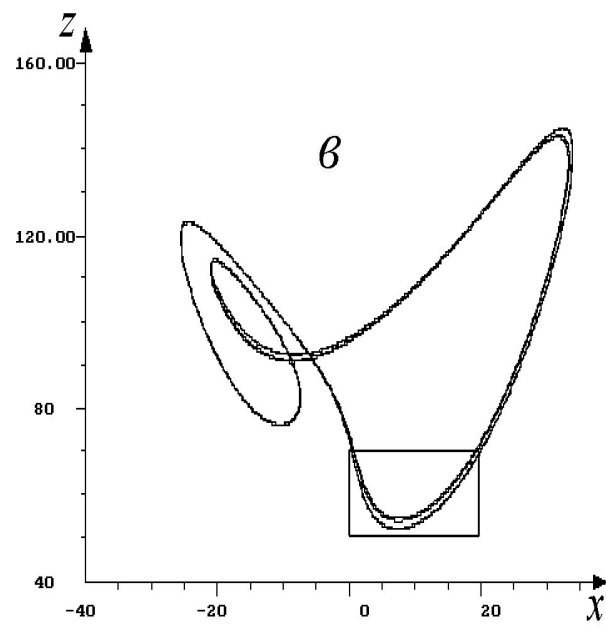
$$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4, \dots, \Gamma_{2^n}, \dots$$

Здесь Γ_k – цикл, наблюдаемый на подынтервале I_k .

Переход параметра r из одного интервала в другой сопровождается бифуркациями удвоения периода. Так, например, при переходе из I_1 в I_2 цикл Γ_1 расщепляется и образуется 2-цикл Γ_2 , при переходе из I_2 в I_4 2-цикл Γ_2 расщепляется в 4-цикл Γ_4 и т. д. (рис. 11.10).

Наблюдаемые здесь бифуркации удвоения периода сопровождаются характерными изменениями мультипликаторов. Один из мультипликаторов, отражающий динамику возмущений вдоль цикла, всегда равен единице. Степень притяжения возмущенных траекторий к циклу характеризуется двумя оставшимися: ρ_1 и ρ_2 ($|\rho_1| \geq |\rho_2|$). Неравенство $|\rho_{1,2}| < 1$ является необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости цикла. В стандартном сценарии бифуркации удвоения периода старший мультипликатор ρ_1 меняется следующим образом. При переходе параметра r через точку бифуркации (границу между соседними интервалами I_k и I_{2k}) значение ρ_1 стремится к -1 , достигает -1 и после появления цикла с удвоенным периодом становится равным 1. При этом модуль мультипликатора ρ_2 остается строго меньше единицы.





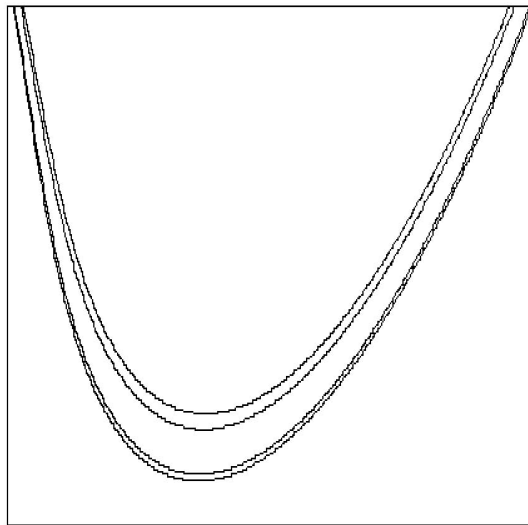
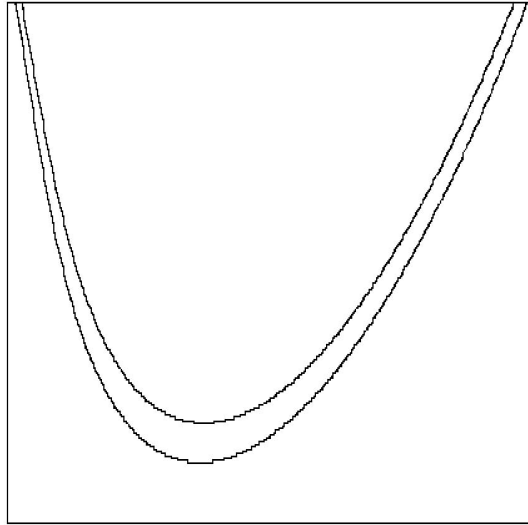


Рис. 11.10. Бифуркации удвоения периода:
 a – 1-цикл для $r = 100.563$; b – 2-цикл для $r = 99.803$;
 c – 4-цикл для $r = 99.5866$

На интервалах $I_1, I_2, \dots, I_{2^n}, \dots$ выделим значения
 $r_1, r_2, \dots, r_{2^n}, \dots$ параметра r , соответствующие минимуму

функции $|\rho_1(r)|$:

$$r_k = \operatorname{argmin}_{r \in I_k} |\rho_1(r)|.$$

Предельный цикл для значения $r = r_k$ является наиболее устойчивым в классе k -циклов на интервале I_k . Такой цикл будем называть *с у п е р ц и к л о м*. Для модели Лоренца

$$r_1 = 100.563, \quad r_2 = 99.803, \quad r_4 = 99.5866.$$

Суперциклы, отвечающие этим параметрам, представлены на рис. 11.10. На рис. 11.11 дан график функции $\rho_1(r)$. Здесь хорошо виден бифуркационный механизм. На каждом из интервалов I_1, I_2, I_4, \dots , при убывании параметра r , функция $\rho_1(r)$ монотонно убывает от $+1$ до -1 , имея скачки в точках бифуркации. Что касается мультипликатора $\rho_2(r)$, то он практически не изменяется, сохраняя в данном диапазоне значение $|\rho_1(r)| \doteq 1.75 \cdot 10^{-2}$.

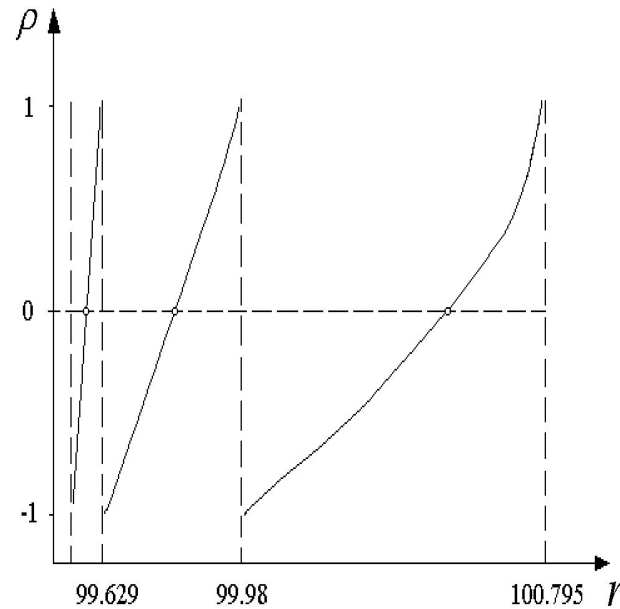


Рис. 11.11. График мультипликатора $\rho_1(r)$ в окне периодичности

В поведении мультипликаторов необходимо отметить одну важную деталь. Функция $\rho_1(r)$, непрерывно изменяя свои значения на интерва-

ле I_k от $+1$ до -1 , не может принимать значение, равное нулю (матрица монодромии является всегда невырожденной). Обход нуля связан с выходом в комплексную плоскость.

Функция $\rho_1(r)$ (совместно с $\rho_2(r) = \bar{\rho}_1(r)$) становится комплекснозначной только в малой окрестности точки r_k . В остальной части интервала I_k она имеет вещественные значения. Символически эта деталь в поведении $\rho_1(r)$ изображена на рис. 21.11 маленькими окружностями.

После каскада бифуркаций удвоения периода в системе наблюдается хаос. Поведение решения в проекции на плоскость xoz представлено на рис. 11.12.

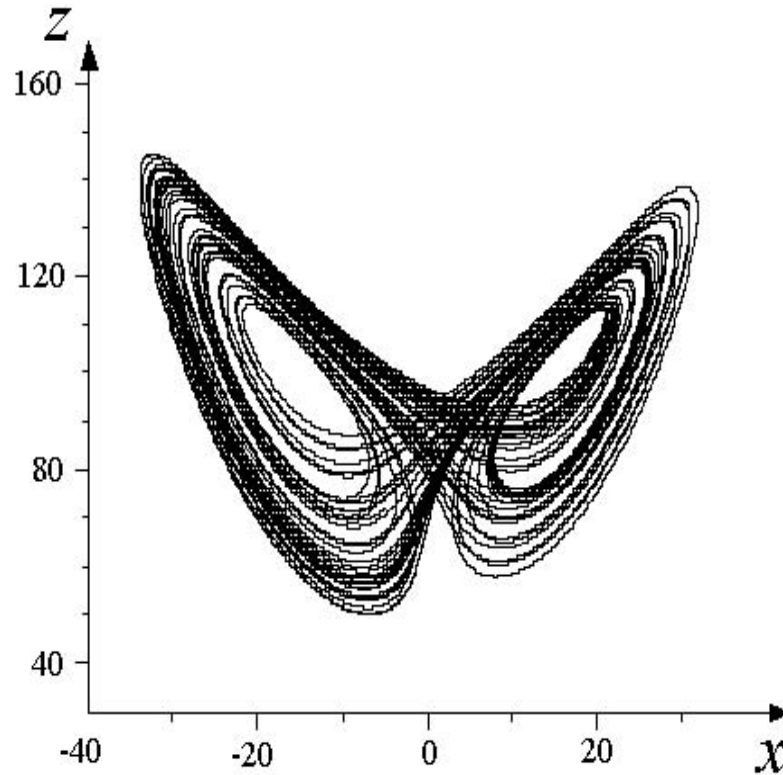


Рис. 11.12. Хаотический аттрактор системы Лоренца при

$$\sigma = 10, \quad b = \frac{8}{3}, \quad r = 99$$

11.1. Найти интервалы структурной устойчивости и исследовать бифуркации в системах

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \alpha y \end{cases}; \quad \begin{cases} \dot{x} = x - \alpha y \\ \dot{y} = \alpha x - y \end{cases}.$$

11.2. Для системы «хищник – жертва» (с насыщением) в плоскости параметров a и b изобразить зоны структурной устойчивости. Выделить зону существования предельного цикла. Проиллюстрировать бифуркации рождения предельного цикла при пересечении границ этой зоны.

11.3. Для модели Лоренца ($\sigma = 10, b = 8/3$) при различных значениях $r \in (0, 28)$ найти решения $(x(t), y(t), z(t))$ и $(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t))$, выходящие из близких точек $x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 0$ и $\bar{x}(0) = 1 + 10^{-6}, \bar{y}(0) = 0, \bar{z}(0) = 0$. Изобразить $x(t)$ и $\bar{x}(t)$ на графике. Найти момент времени T , при котором $\|x(T) - \bar{x}(T)\| > 10$. Исследовать зависимость T от r .

11.4. Проследить бифуркации модели Лоренца для $\sigma = 10, b = 8/3$ при изменении r на интервалах а) $(0, 28)$; б) $(99.5, 100.7)$.

11.5. Исследовать зависимость мультипликаторов модели Лоренца для $\sigma = 10, b = 8/3$ от параметра r на интервале $(99.5, 100.7)$.

11.6. Для модели Ресслера (17.7) для $\alpha = 0.2$ проследить бифуркации при $\mu \in (2, 5)$.

Список литературы

1. А н д р о н о в А. А. Бифуркации динамических систем. М.: Наука, 1962.
2. А н и щ е н к о В. С. Знакомство с нелинейной динамикой: Учеб. пособие. Саратов: Изд-во Гос.УНЦ «Колледж». 2000.
3. А р н о л ь д В. И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990.
4. Б а х в а л о в Н. С., Ж и д к о в Н. П., К о б е л ь к о в Г. Менные методы. М.: Наука, 1987.
5. Б е р д ы ш е в В. И., П е т р а к Л. В. Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения. Екатеринбург: УрО РАН, 1999.
6. Б е р ж е П., П о м о И., В и д а л ь К. Порядок в хаосе. О детерминистическом подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991.
7. В у л Е. В., С и н а й Я. Г., Х а н и н К. М. Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм // Успехи физических наук. 1984. Т. 39, № 9. С. 3–37.
8. Г л а с с Л., М э к и М. От часов к хаосу. Ритмы жизни. М.: Мир, 1991.
9. Д е м и д о в и ч Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
10. Ж и г у л е в В. М. Динамика неустойчивостей (динанстика). М.: Изд-во МФТИ, 1996.
11. К у з н е ц о в А. П. Колебания, катастрофы, бифуркации, хаос. Саратов: Изд-во Гос. УНЦ «Колледж», 2000.

12. Кузнецов С. П. Динамический хаос. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 2001. (Сер. Современная теория колебаний и волн).
13. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и хаотическая динамика. М.: Мир, 1984.
14. Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
15. Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
16. Пайтген Х. О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М.: Мир, 1993.
17. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.
18. Смирнова А. Б. Итеративные методы решения нелинейных операторных уравнений 1 рода и их приложения: Дис... канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург, 1995.
19. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // Успехи физических наук. 1983. Т. 141, № 2. С. 343–374.
20. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений: Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.
21. Чуличков А. И. Математические методы нелинейной динамики. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 2000.
22. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая / НИЦ «Регул. и хаотич. динамика». Ижевск, 2001.

23. Ш у с т е р Г. Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988.
24. Complex Dynamic System: Mathematics Behiend Mandelbrot and Julia Sets. Proc. Sympos. Appl. Math. (Held in Cincinatti, OHIO Jan 10-11. 1994) 1994. Vol. 49.
25. H u t c h i n s o n J. E. Fractals and selfsimilarity //Indian Univ. Math. J. 1981. Vol. 30, nr. 5. P. 713–747.
26. L a n f o r d O. E. A computer — assisted prof of the Feigenbaum conjectures // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. Vol. 6, nr. 3. P. 427–434.
27. P e i t g e n H. O., Jürgen H., Saupe D. Chaos and Fractals. New Frontiers of Science. N.Y. etc.: Springer-Verlag, 1992.
28. S i n g e r D. Stable orbits and bifurcation of maps on the interval // SIAM J. Appl. Math. Comput. 1978. Vol. 85, nr. 2. P. 260–267.

Рекомендуемая литература

29. А н д р о н о в А.А., В и т т А.А., Х а й к и н С.Э. Теория колебаний. М., Наука, 1981.
30. А н д р о н о в А.А., Л е о н т о в и ч Е.А., Г о р д о н Н.Н., М а й е р А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М., Наука, 1966.
31. А х р о м е е в а Т. С., К у р д ю м о в С. П., М а л и н е ц- к и й Г. Г., С а м а р с к и й А. А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М., Наука, 1992.
32. Б а е в с к и й Р. М. Прогнозирование состояний на грани нормы и патологии. М., Медицина, 1979, 295 с.
33. Б а е в с к и й Р.М., К и р и л л о в О.И., К л е ц к и н С.З. Математический анализ изменений сердечного ритма при стрессе. М., Наука, 1984, 226 с.
34. Б а з ы к и н А.Д., К у з н е ц о в Ю.А., Х и б н и к А.И. Портреты бифуркаций. М., Знание, 1989.
35. Б а з ы к и н А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М., Наука, 1985.
36. Б е р е з о в с к а я Ф.С., К а р е в Г.П. Дифференциальные уравнения в математических моделях, М., Изд. МИРЭА, 2000.
37. Б и г о н М., Х а р п е р Дж., Т а у с е н д К. Экология. Особи, популяции и сообщества. М., Мир, 1989.
38. Б о н д а р е н к о Н.Ф. Моделирование продуктивности агроэкосистем. Л., 1982.

39. В а р ф о л о м е е в С.Д., Г у р е в и ч К.Г. Биокинетика. М., Фаир-Пресс, 1998.
40. В а с и н В.В., Р я ш к о Л.Б. Элементы нелинейной динамики: от порядка к хаосу. Москва-Ижевск, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика"; Институт компьютерных исследований, 2006. - 164 с.
41. В о л ь т е р р а В. Математическая теория борьбы за существование. М., Наука, 1976.
42. Г о р с т к о А.Б., Д о м б р о в с к и й Ю.А.,
С у р к о в Ф.А. Методы управления эколого-экономическими системами. М., 1985.
43. Д ж е ф ф е р с Д. Введение в системный анализ: применение в экологии. М., 1981.
44. Д у л ь н е в Г.Н. От Ньютона и термодинамики к биоэнергоинформатике. - URL: www.outsider.ru/lib/index.php
45. З а с л а в с к и й Б.Г., П о л у э к т о в Р.А. Управление экологическими системами. М., 1988.
46. И с т о м и н а Т.В., Л о м т е в Е.А., С к о т н и к о в а О.А. Хаотическая динамика в нарушениях сердечного ритма. - URL: <http://www.mks.ru/library/text/biomedpribor/98/s1t7.htm>
47. К о л м о г о р о в А.Н. Качественное изучение математических моделей динамики популяций // Проблемы кибернетики. М., 1972, Вып.5.
48. Л о б а н о в А.И., П е т р о в И.Б. Вычислительные методы для анализа моделей сложных динамических систем. М., Изд. МФТИ, 2000.

49. Л о ж к и н а А.Н. Флуктуации в физиологии. Поиск закономерностей. (Медицинская академия, Чита).-
URL: <http://rusnauka.narod.ru/lib/biologyh/lozk1.htm>
50. Л о с к у т о в А. Нелинейная динамика, теория динамического хаоса и синергетика (перспективы и приложения). -
URL: <http://www.cplire.ru/win/InformChaosLab/chaoscomputerra/Loskutov.html>
51. М е н ш у т к и н В.В. Математическое моделирование популяций и сообществ водных животных, Л., 1971.
52. П р и г о ж и н И., С т е н г е р с И. Порядок из хаоса: новый диалог с природой. - М., Прогресс, 1986. 432 с.
53. Р а б и н о в и ч М.И. Нелинейная динамика и турбулентность // Нелинейные волны. Динамика и эволюция - М.,1989. - С.50 - 61.
54. Р и з н и ч е н к о Г.Ю., Р у б и н А.Б. Математические модели биологических продукционных процессов. М., Изд. МГУ, 1993.
55. Р о м а н о в с к и й Ю.М., С т е п а н о в а Н.В., Ч е р н а в - с к и й Д.С. Математическое моделирование в биофизике. М., Наука, 1975.
56. Р у б и н А. Б. Биофизика. Т.1. М., Изд-во МГУ, 2004, 448с.
57. Р у б и н А. Б., П ы т ь е в а Н.Ф., Р и з н и ч е н к о Г.Ю. Кинетика биологических процессов. М., Изд-во МГУ, 1997.
58. С в и р е ж е в Ю.М., Л о г о ф е т Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М., Наука, 1978.
59. Т о р н л и Дж. Математические модели в физиологии растений. Киев, 1982.

60. Ф р а н с Дж., Т о р н л и Дж. Математические модели в сельском хозяйстве. М., 1987.
61. Ш н о л ь С.Э. Физико-химические факторы биологической эволюции. М., 1979.
62. Э л ь с г о л ь ц Л.Э. Теория дифференциальных уравнений. М., Наука, 1971.
63. H i g g i n s J.A. A chemical mechanism for oscillations in glicolitic intermediates in yeast cells. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, v.51, 1954.
64. М а у R.M. When two and two make four: nonlinear phenomena in ecology. Proc. R. Soc. London, B228, N1252, 241-268, 1986.
65. Р о о л R. Is it healthy to be chaotic // Science. - 1989.- V.243, № 4891. - P.604 - 607.
66. V r i e s de P. Simulation of plant growth and crop production/Wageningen, 1982.