МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Э. БАУМАНА

Факультет информатики и систем управления

Кафедра теоретической информатики и компьютерных технологи

Лабораторная работа №2

по курсу «Структуры и алгоритмы обработки больших данных»

«Преобразование Фурье»

Выполнил:
студент группы ИУ9-21М
Беляев А. В.

Проверил:
Магазов С. С.

Вариант 3

Москва 2019

Цель работы

Научиться анализировать спектры изображений и выбирать классификационные признаки.

Задание 1

1. Аналитически найти преобразование Фурье функции:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 \le x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0, l = 1 \\ x & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

Формула преобразования Фурье:

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixw} dx,$$

где $e^{iwx} = \cos(wx) + i\sin(wx), i = \sqrt{-1}$

Построим преобразование заданной функции:

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{0} e^{-ixw} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} x e^{-ixw} dx =$$

$$= \frac{ie^{-iwx}}{\sqrt{2*\pi w}} |_{-1}^{0} + \frac{e^{-iwx}(1+iwx)}{\sqrt{2*\pi w^2}} |_{0}^{1} = \frac{i}{\sqrt{2*\pi w}} - \frac{ie^{iw}}{\sqrt{2*\pi w}} + \frac{e^{-iw} + iwe^{-iw}}{\sqrt{2*\pi w^2}} - \frac{1}{\sqrt{2*\pi w^2}} =$$

$$\frac{i(1-e^{iw})}{\sqrt{2\pi} w} + \frac{-1 + e^{-iw}(1+iw)}{\sqrt{2\pi} w^2} = -\frac{i(-1+e^{iw})}{\sqrt{2\pi} w} + \frac{-1 + e^{-iw}(1+iw)}{\sqrt{2\pi} w^2} =$$

$$= -\frac{i(-1 + \cos(w) + i\sin(w))}{\sqrt{2\pi} w} + \frac{-1 + (1+iw)(\cos(-w) + i\sin(-w))}{\sqrt{2\pi} w^2} =$$

$$= \frac{iw - iw\cos(w) + w\sin(w) - 1 + \cos(-w) + i\sin(-w) + iw\cos(-w) - w\sin(-w)}{\sqrt{2\pi} w^2}$$

$$= \frac{iw - iw\cos(w) + w\sin(w) - 1 + \cos(w) + i\sin(-w) + iw\cos(w) - w\sin(-w)}{\sqrt{2\pi} w^2}$$

$$= \frac{iw + w\sin(w) - 1 + \cos(w) - i\sin(w) + w\sin(w)}{\sqrt{2\pi} w^2} =$$

$$= \frac{iw + 2w\sin(w) - 1 + \cos(w) - i\sin(w)}{\sqrt{2\pi}w^2}$$

Действительная часть преобразования:

$$Re(f(\hat{w})) = \frac{-1 + \cos(w) + 2w\sin(w)}{\sqrt{2\pi}w^2}$$

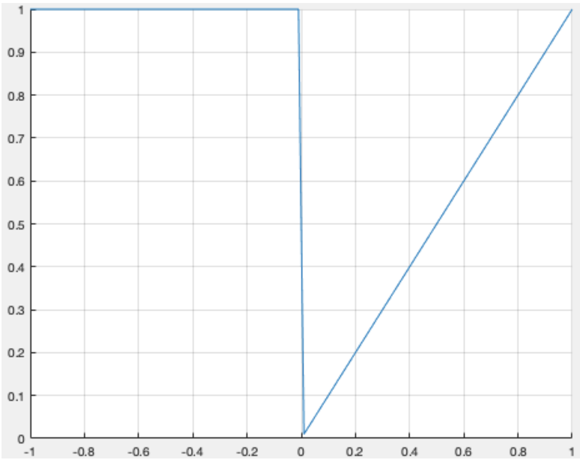
Мнимая часть преобразования:

$$Im(f(\hat{w})) = \frac{w - \sin(w)}{\sqrt{2\pi}w^2}$$

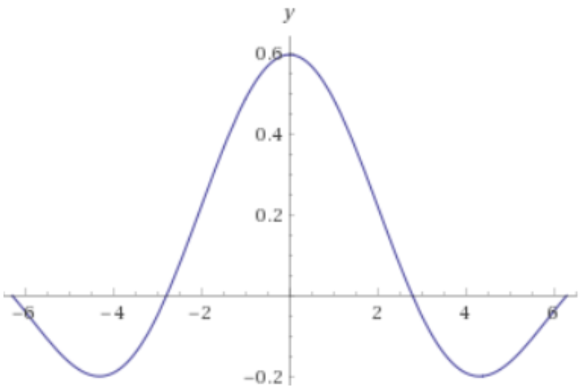
2. Построить график функции, графики модулей (abs) преобразований Фурье, действительной и мнимой части.

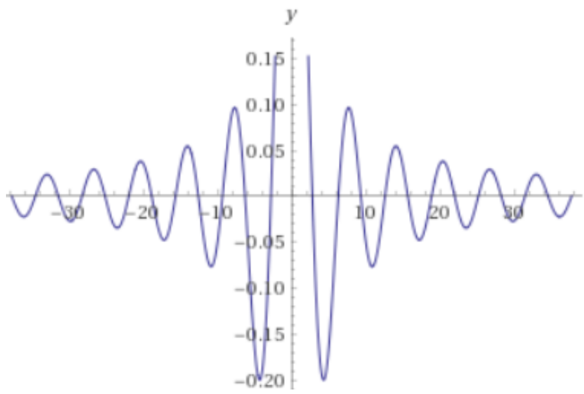
```
clear all;
clc;

step = 200;
x = -1:2/step:1;
n = length(x);

y_real = zeros(1, n);
y_img = zeros(1, n);
y = zeros(1, n);

y_real = (-1 + cos(x) + 2*x*sin(x)) / (sqrt(2*pi)*x*x);
y_img = (x - sin(x)) / (sqrt(2*pi)*x*x);
y = func(x);

grid on
hold on
% plot(x, y);
plot(x, y_real);
plot(x, y_img);
legend('real', 'img');


function y = func(x)
    if x >= -1 && x < 0
        y = 1;
    elseif x == 0
        y = 1/2;
    elseif x > 0 && x <= 1
        y = x;
    end
end
```

График исходной функции

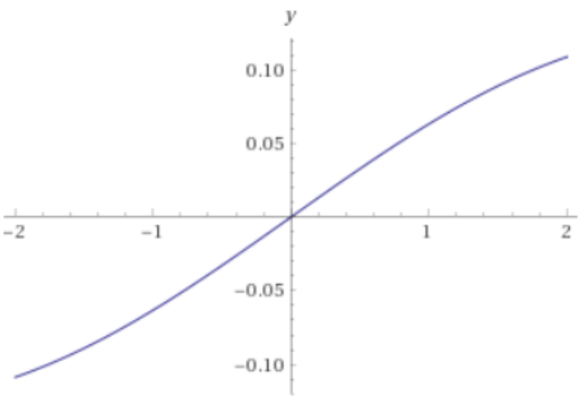


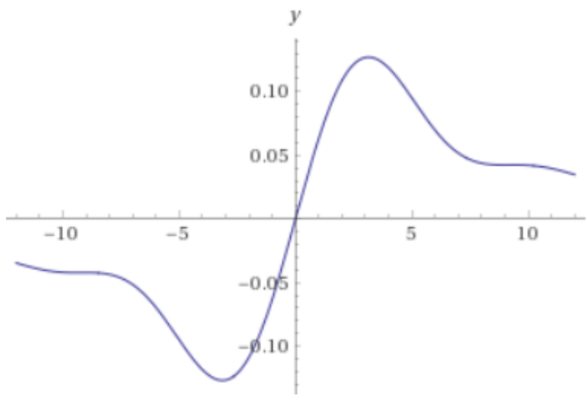
Действительная часть





Мнимая часть





Задание 2

1. **Найти период функции**:

$$y = 1 + \cos(\pi + x) + \cos(x - \pi)$$

Период функции cos(x)=2*pi
Воспользовавшись формулами приведения, получим:

$$y = 1 + \cos(\pi + x) + \cos(x - \pi) = 1 - 2\cos(x)$$

Период такой функции = **2*pi**

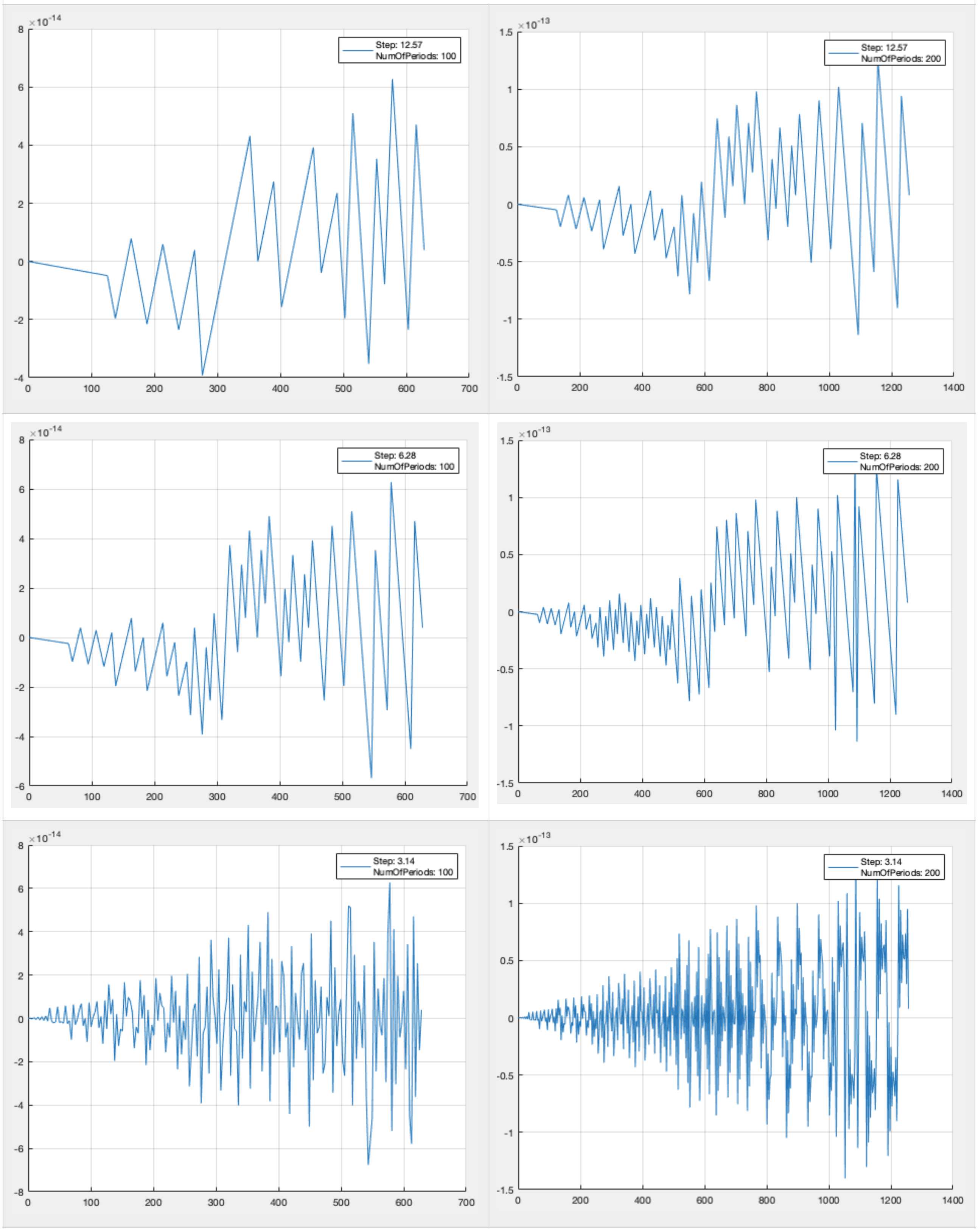
2. **Построить в matLab дискретное преобразование фурье sin x на интервале в 100 и 200 периодов с шагом 2 периода, 1 период, 1/2 периода. Построить графики:**

- **sin x**
- **Модулей преобразования Фурье,**
- **Действительной и мнимой части преобразования Фурье функций.**

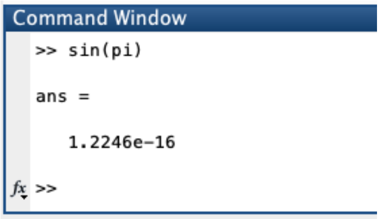
```
clear all;
clc;

% NUM_OF_PERIODS = 100;
NUM_OF_PERIODS = 200;

PERIOD = 2*pi;
MIN = 0;
MAX = NUM_OF_PERIODS * PERIOD;
% step = 2 * PERIOD;
% step = 1 * PERIOD;
step = 0.5 * PERIOD;

x = MIN:step:MAX;
y = sin(x);
% y =
y1 = fft(y);

grid on;
hold on;
plot(x, abs(real(y1)));       % real | imag; y | y1
legend(sprintf('Step: %.2f\nNumOfPeriods: %d',step, NUM_OF_PERIODS));
```

Matlab при построении графика преобразования Фурье, строит лишь график действительной части преобразования.

Исходный **sin(x)**. Слева - 100 периодов, Справа - 200. Шаг: 2 периода, 1, 0.5

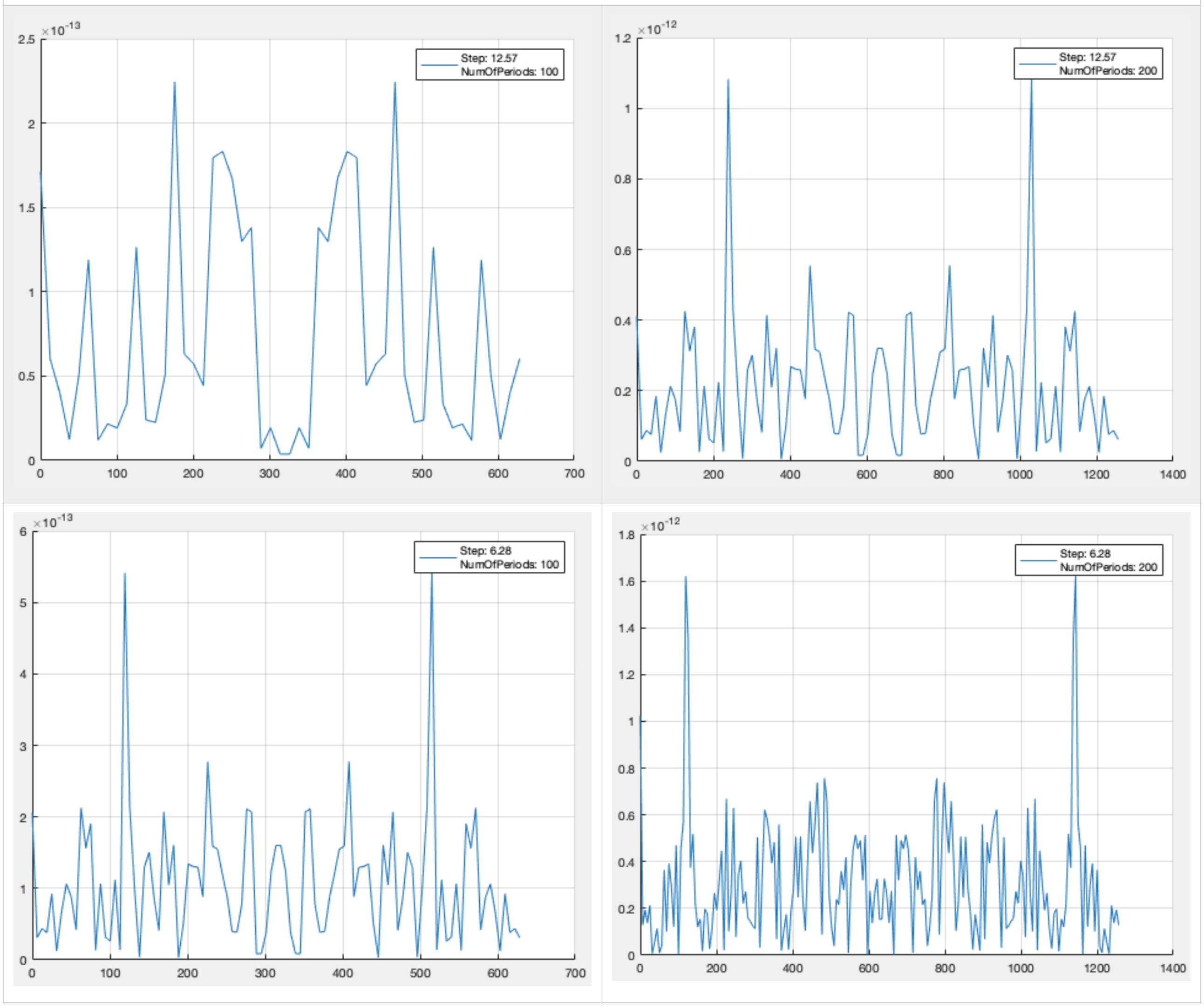


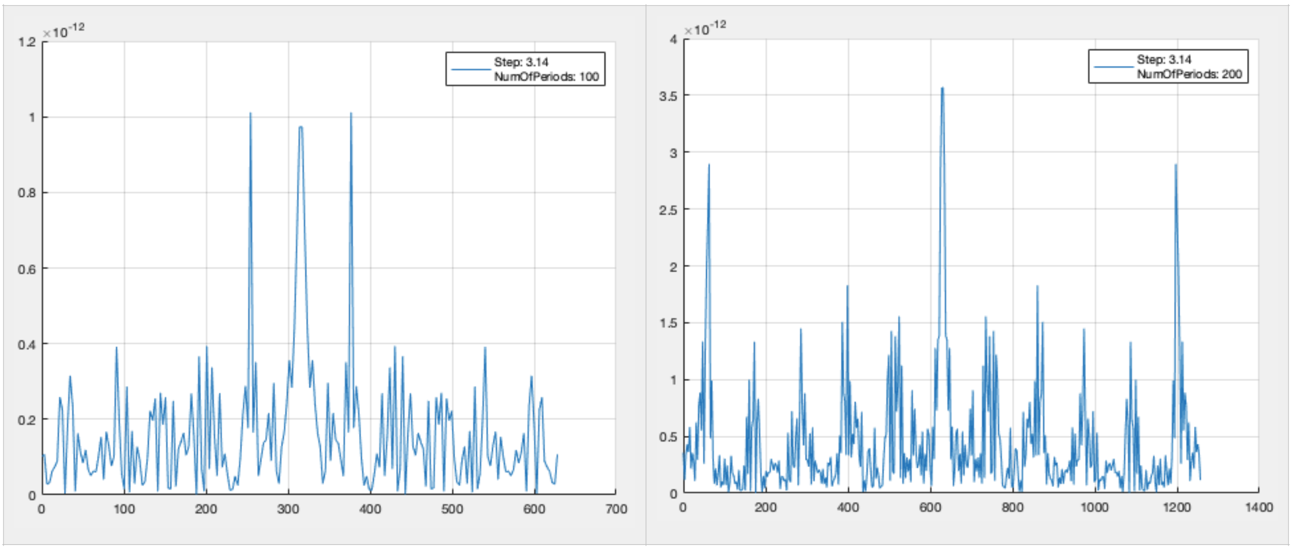
В Matlab имеется следующая проблема:



Из-за того, что sin(pi) != 0, на графиках исходной функции sin(x) появляются погрешности вычисления, которые накапливаются и чем больше правая граница MAX, тем больше «портят» ожидаемый результат.

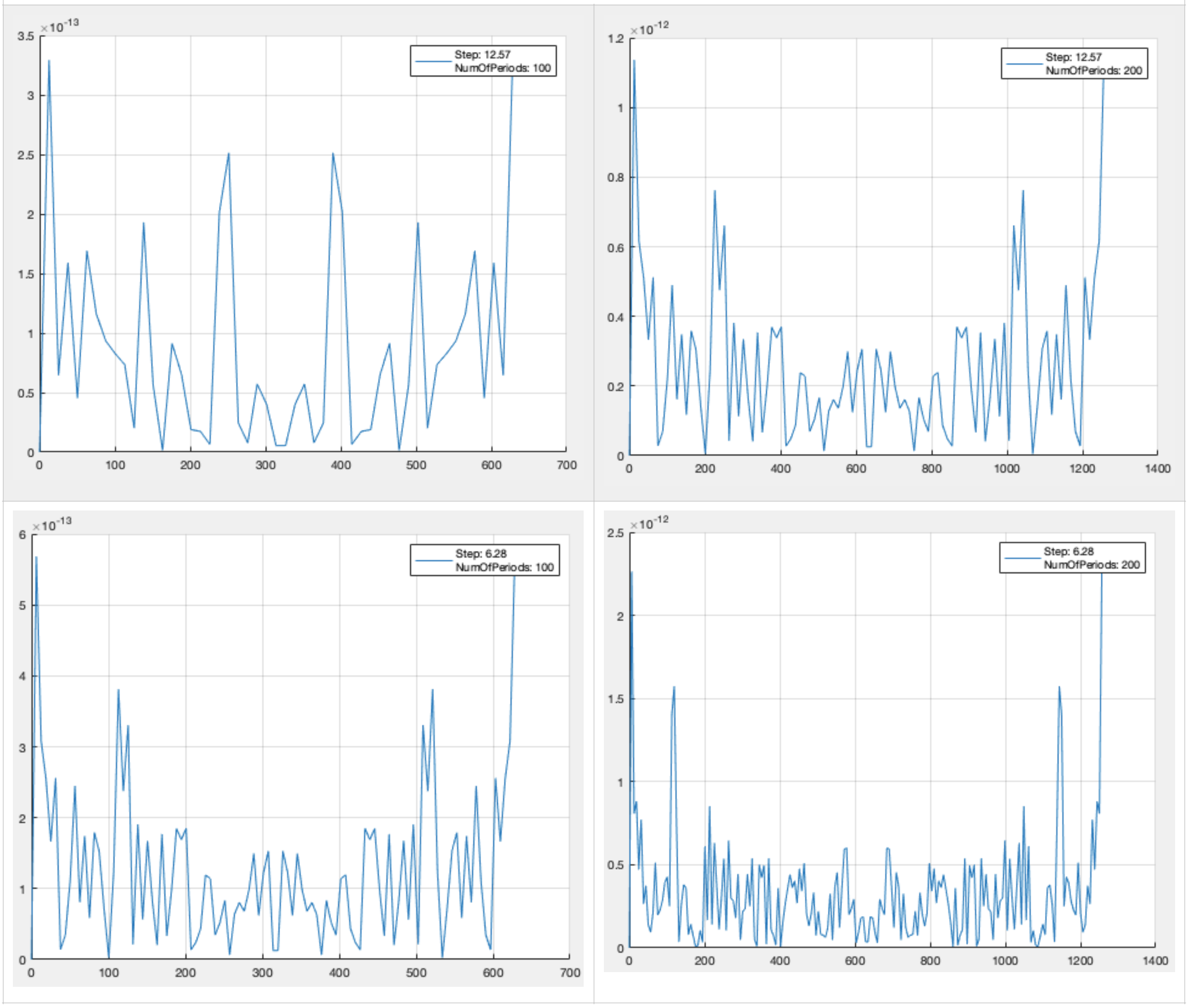
График **модуля действительной части преобразования Фурье** для sin(x). Слева - 100 периодов, Справа - 200 периодов. Шаг: 2 периода, 1, 0.5

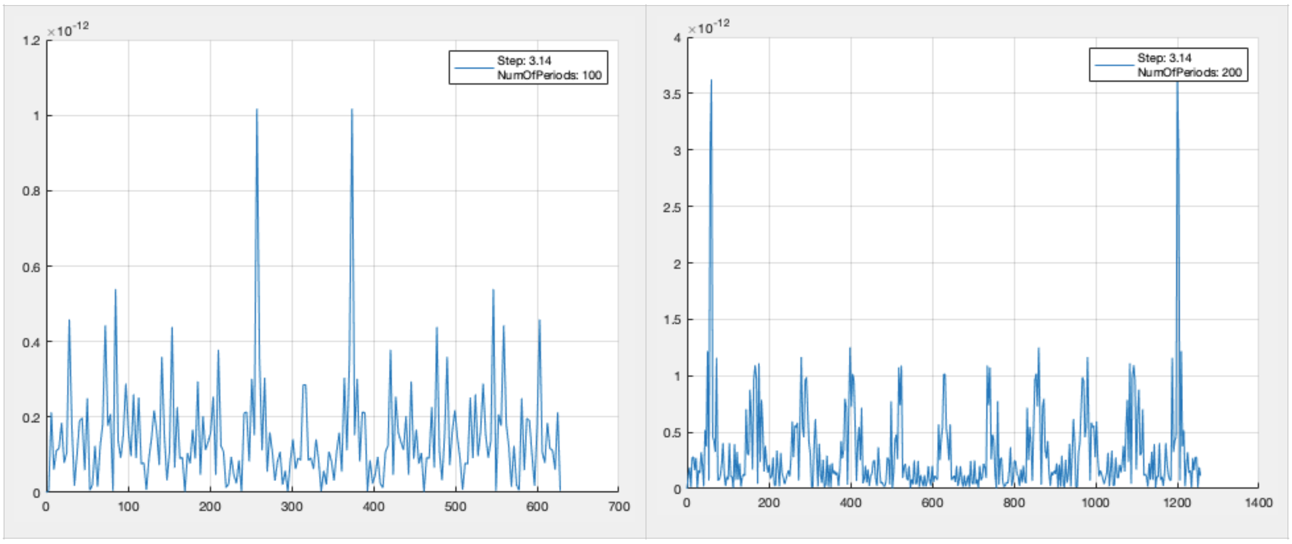




—

График **модуля мнимой части преобразования Фурье** для sin(x). Слева - 100 периодов, Справа - 200 периодов. Шаг: 2 периода, 1, 0.5



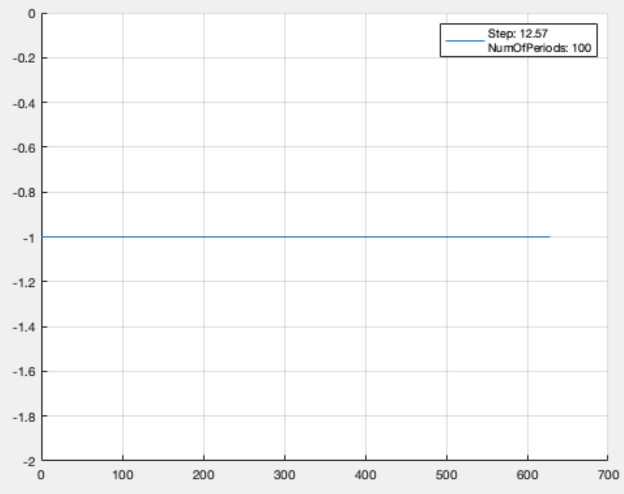


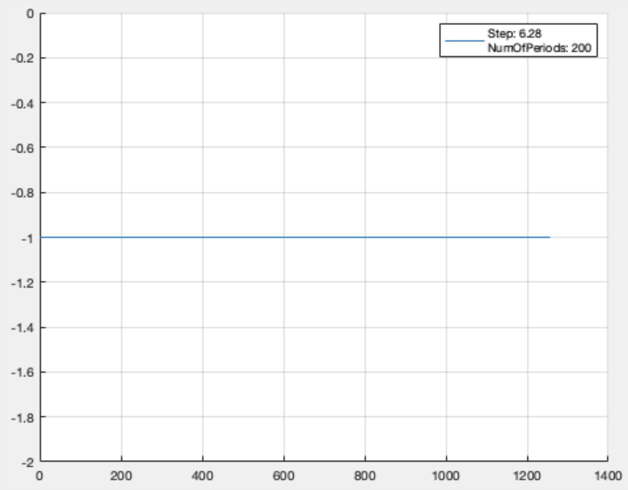
С увеличением периода, амплитуда значений должна уменьшаться в общем случае, однако, из-за описанный выше ошибки округления (sin(pi) != 0) реальные значения, построенные в matlab

3. **Построить в matLab дискретное преобразование фурье фукнции $y = 1 + \cos(\pi + x) + \cos(x - \pi)$ на интервале в 100 и 200 периодов с шагом 2 периода, 1 период, 1/2 периода. Построить графики:**
- **Функции из задания**
- **Модулей преобразования Фурье,**
- **Действительной и мнимой части преобразования Фурье функций.**

```
clear all;
clc;

NUM_OF_PERIODS = 100;
% NUM_OF_PERIODS = 200;

PERIOD = 2*pi;
MIN = 0;
MAX = NUM_OF_PERIODS * PERIOD;
step = 2 * PERIOD;
% step = 1 * PERIOD;
% step = 0.5 * PERIOD;

x = MIN:step:MAX;
% y = sin(x);
y = 1 + cos(pi + x) + cos(x - pi);
y1 = abs(fft(y));

grid on;
hold on;
plot(x, y);
% plot(x, abs(imag(y1)));
legend(sprintf('Step: %.2f\nNumOfPeriods: %d',step, NUM_OF_PERIODS));
```

Исходный график $y = 1 + \cos(\pi + x) + \cos(x - \pi)$. Слева - 100 периодов, Справа - 200. Шаг: 2 периода, 1, 0.5

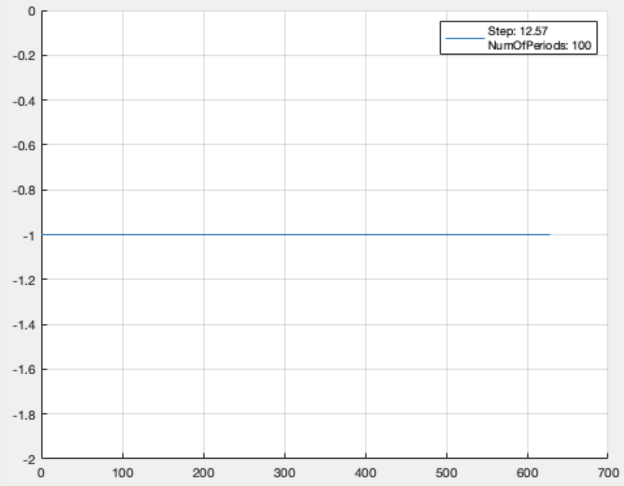


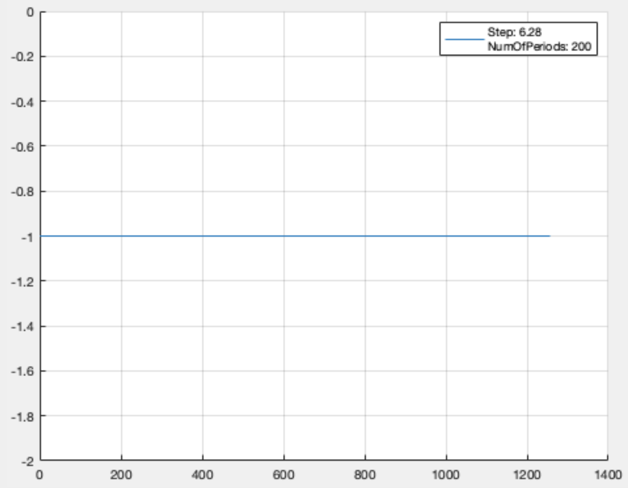


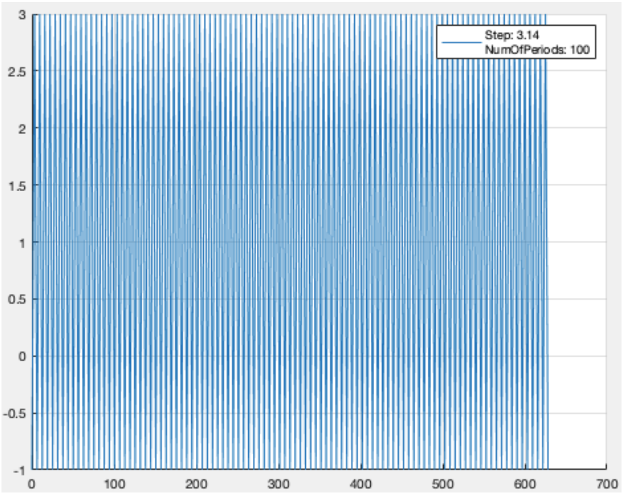
Согласно формулам приведения,

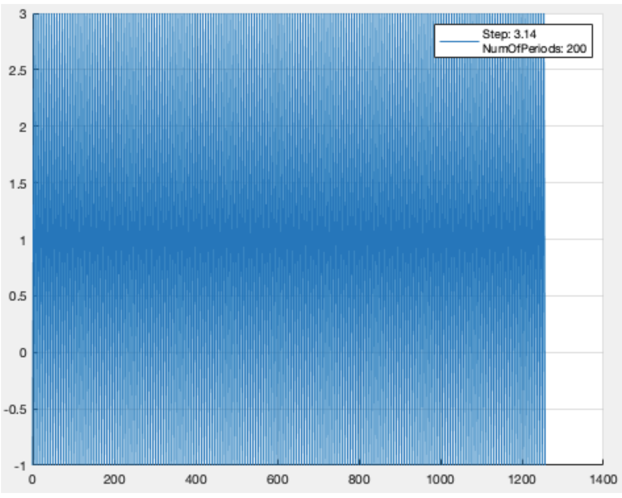
$y = 1 + \cos(\pi + x) + \cos(x - \pi) = 1 - 2\cos(x)$

Таким образом, при любом значении, кратном 2pi (периоду функции), мы получаем одно и то же значение = -1.







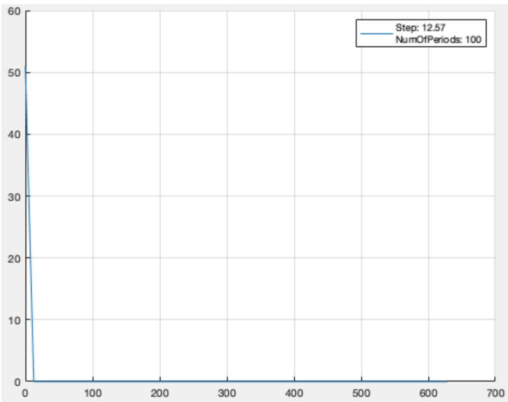


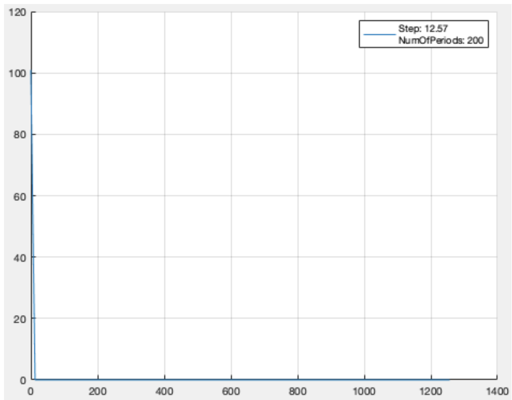
```
Command Window
>> cos(pi/2)

ans =

   6.1232e-17
```

Графики выше получились такими «замощенными» из-за встречавшейся ранее «проблемы с синусом». По этой же причине cos(pi/2) != 0 и при любом x, кратном pi/2 мы получаем ошибку вычислений, влияющую на графики подобным образом

–

График **модуля действительной части преобразования Фурье** для $y = 1 + \cos(\pi + x) + \cos(x - \pi)$. Слева - 100 периодов, Справа - 200 периодов. Шаг: 2 периода, 1, 0.5



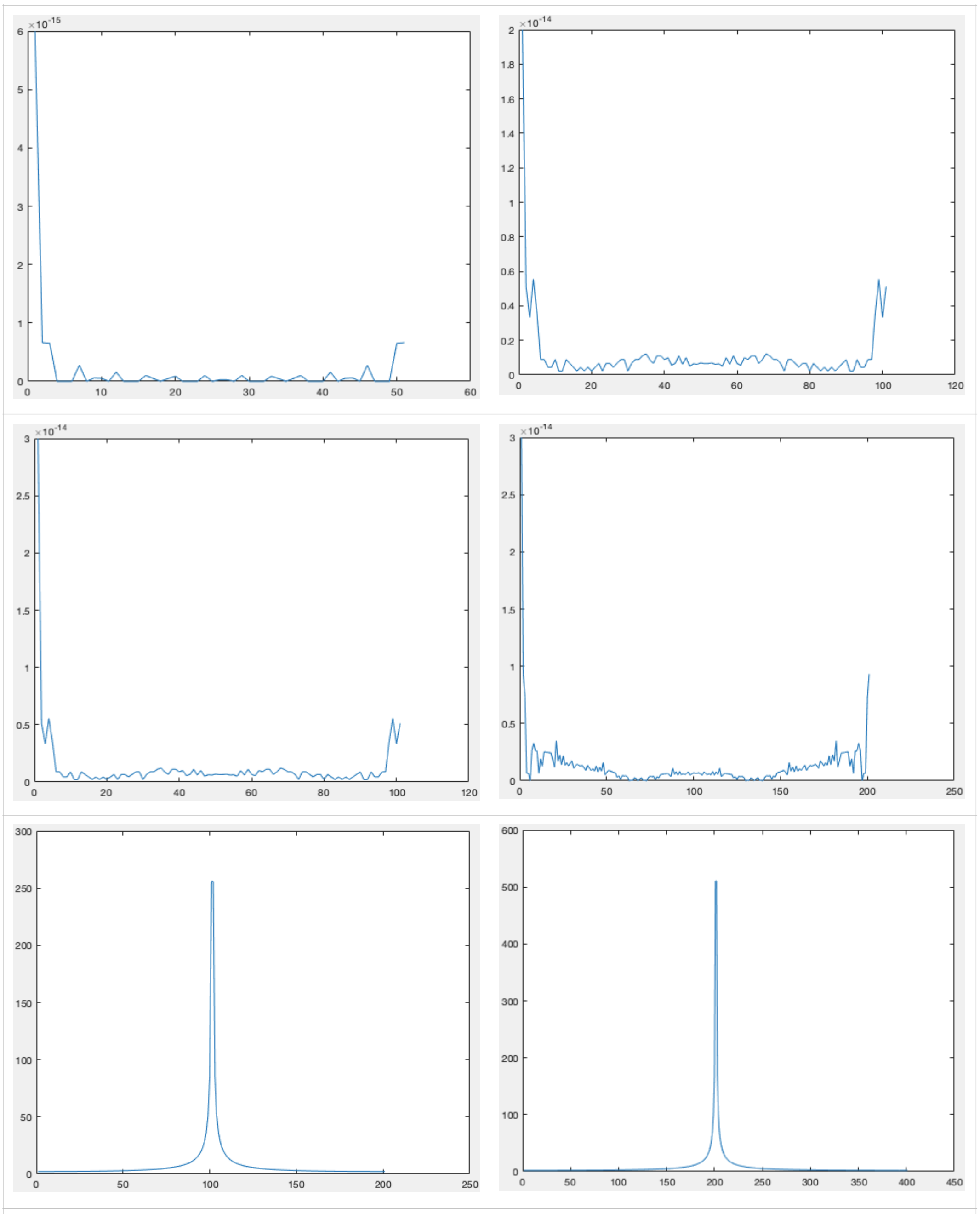


Если из получившихся графиков выше убрать пик в нуле, то получаем осциллирующие около границ графики ниже .

Причина возникновения пика:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N}kn}$$

В нуле с возрастанием количества значений происходит суммирование (e^0 = 1) и получается пик тем выше, чем больше периодов функции мы рассматриваем



Причина пика в середине

Дискретное преобразование Фурье даёт нам дискретный спектр.
Если частота в сигнале кратна шагу равному ***(частота дискретизации)/(количество отсчётов)****, то мы получим выраженный остроконечный пик:*

Период функции (сигнала) = 2*pi
Частота в сигнале = 1/(2*pi)
Частота дискретизации = 0.5*PERIOD = pi (на графике выше)
Количество отсчетов = 200

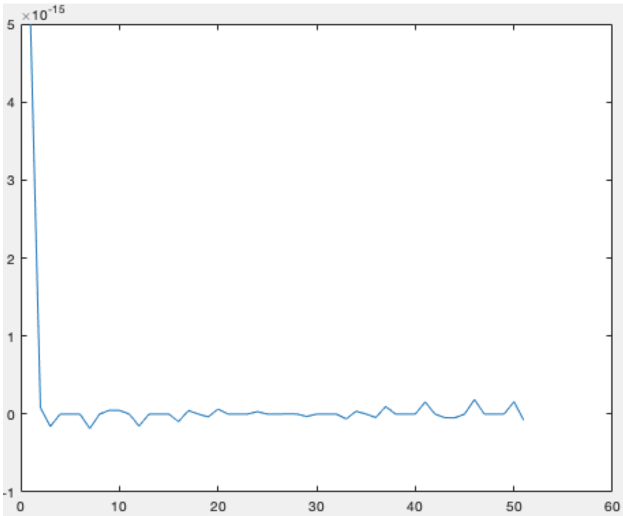
Проверим кратность:

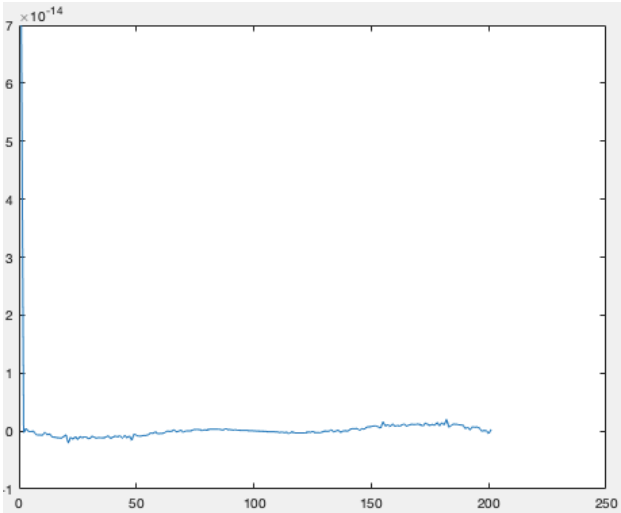
$$\frac{1}{2\pi} \mod \frac{\pi}{200} = 0$$

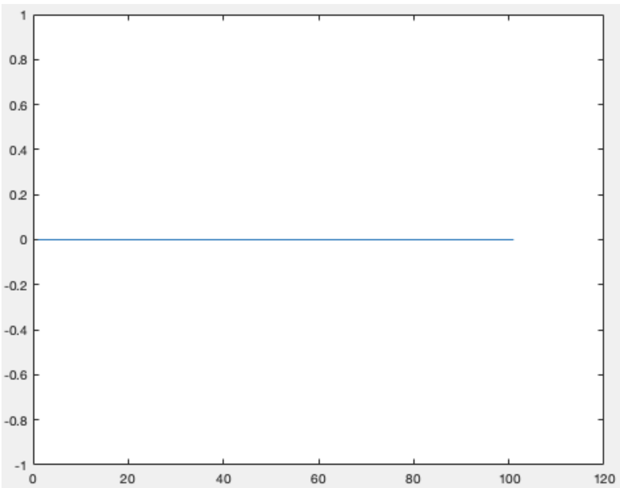
Таким образом в середине возникает пик.

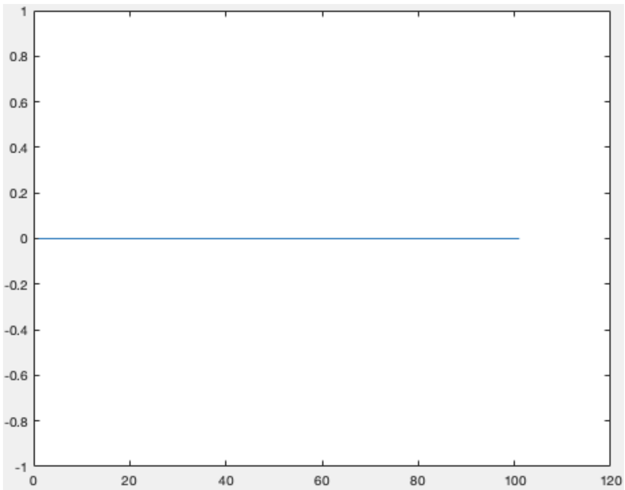
—

График **модуля мнимой части преобразования Фурье** для $y = 1 + \cos(\pi + x) + \cos(x - \pi)$. Слева - 100 периодов, Справа - 200 периодов. Шаг: 2 периода, 1, 0.5

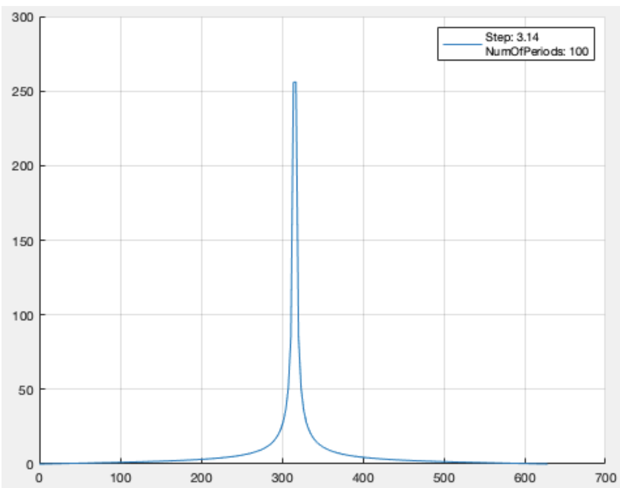


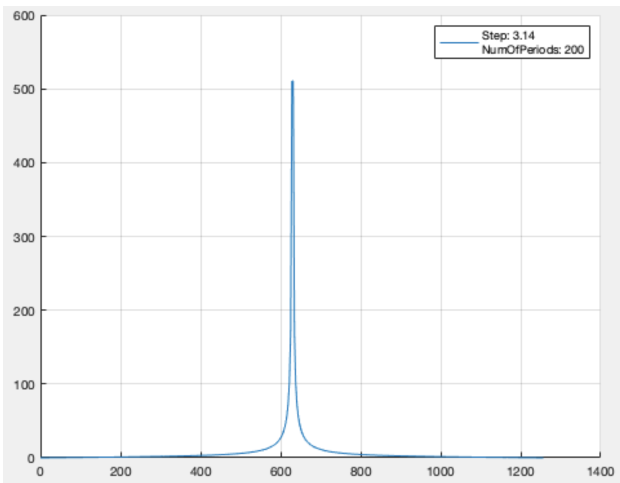






Шаг == 1 период == 2pi. А функция 2pi-периодична. Таким образом, проходя с шагом 2pi мы получаем всегда одно и то же значение



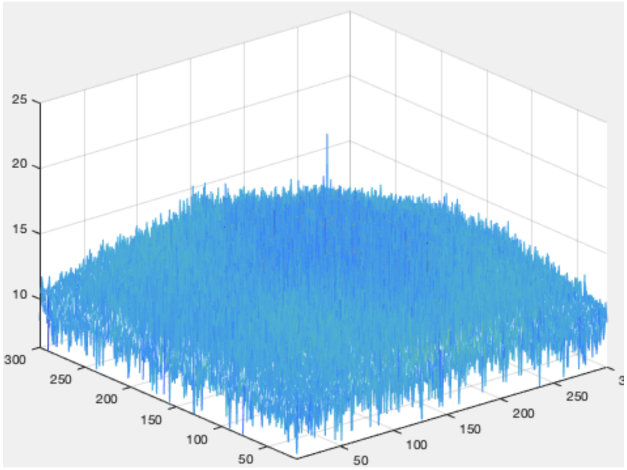
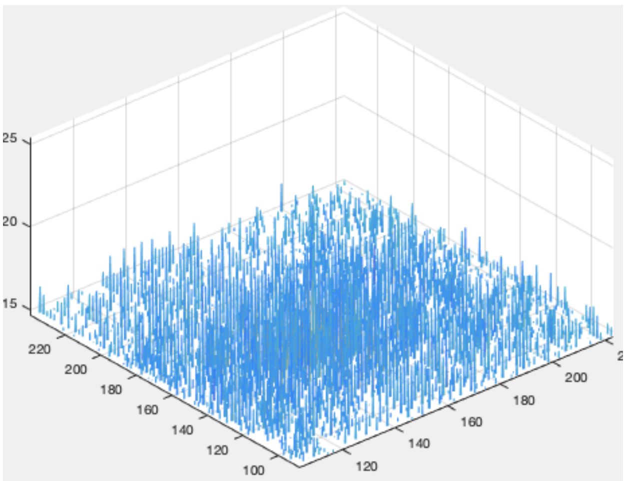
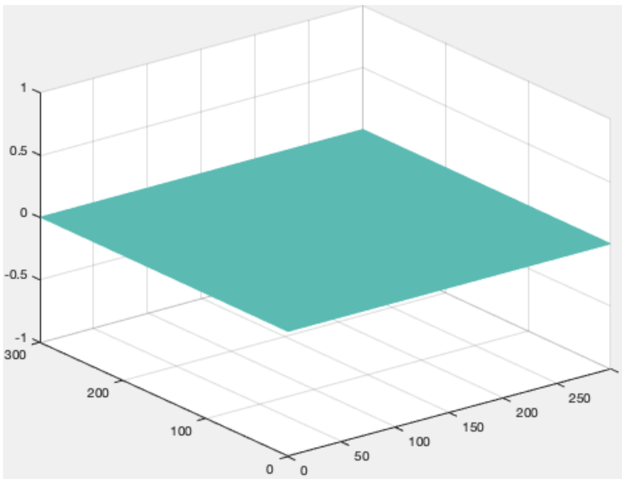


Частота сигнала кратна шагу сетки (частота дискретизации / кол-вот отсчетов)

Задание 3

1. Для регулярных и не регулярных текстур построить спектры с окнами 50x50. Сдвиг на один пиксель
2. Построить графики:
    1. модулей преобразований Фурье,
    2. действительной
    3. мнимой части.
3. Объяснить полученные результаты

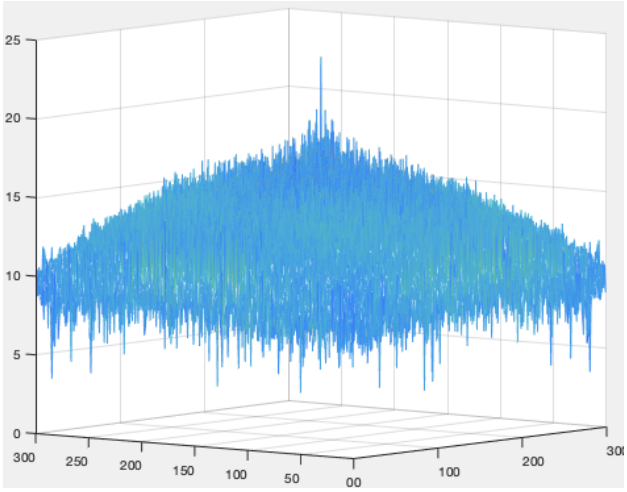
```
clear all;
clc;

REGULAR = 'regular.jpg';
NOT_REG = 'stoh.jpg';
img = imread(NOT_REG);

WINDOW_SIZE = 50;

grayImage = rgb2gray(img);
F = fft2(double(grayImage));
S = fftshift(fftshift(F), WINDOW_SIZE);
A = abs(log2(S));

% plot(imagesc(img));
figure();
% mesh(A);
% mesh(real(A));
mesh(imag(A));
```

Оригинал	**Модуль преобразования фурье.** Видно четкое выделение значений в центре текстуры
	
Действительная часть. Показан центральный участок в 100x100 пикселей. В центре виден уплотненный зашумленный участок с наибольшими значениями.	**Мнимая часть.** Значение константно
	

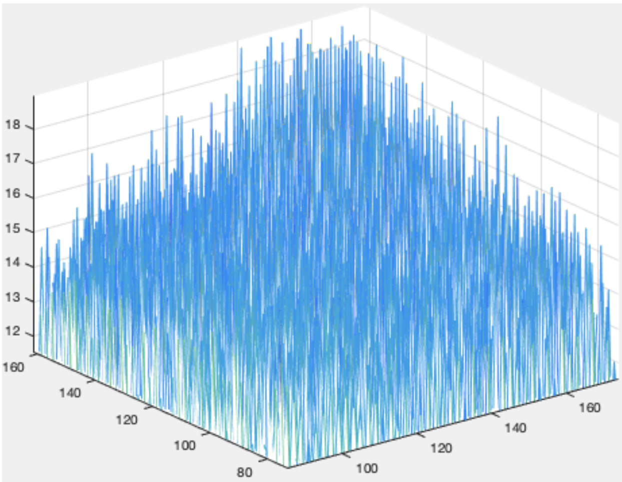
–

Оригинал

Модуль преобразования фурье
Выделена центральная часть



Действительная часть.
В центре виден участок с наибольшими значениями.



Мнимая часть