

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Э. БАУМАНА
Факультет информатики и систем управления
Кафедра теоретической информатики и компьютерных технологий

Лабораторная работа №3
по курсу «Теория игр и исследование операций»
«Целочисленное линейное программирование.
Метод ветвей и границ»

Выполнил:
студент группы ИУ9-31М
Беляев А. В.

Проверил:
Басараб М.А.

Москва 2019

1 Вариант 3. Метод ветвей и границ

1.1 Цель работы

Изучить постановку задачи целочисленного линейного программирования; получить решение задачи ЦЛП методом ветвей и границ.

1.2 Постановка задачи и методические указания

Задача ЦЛП имеет вид

$$F = cx \rightarrow \max$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0, x \in Z$$

Требуется решить задачу методом ветвей и границ, согласно алгоритму.

Решить задачу также методом полного перебора.

Сравнить полученные по обоим методам результаты

1.3 Ход работы

На вход программы подаются следующие данные ($c = \lambda$)

```
1 a = np.array([[2, 1, 1],
2               [1, 2, 0],
3               [0, 0.5, 1]])
4 b = np.array([[4],
5               [6],
6               [2]])
7 lambdas = np.array([[2, 8, 3]])
8
9 solution = BranchAndBound(a, b, lambdas, Condition.MAX).run()
```

Печать промежуточных результатов, дает следующий вывод:

```
1 [[4.  2.  1.  1. ]
2   [6.  1.  2.  0. ]
3   [2.  0.  0.5  1. ]
4   [0.  2.  8.  3. ]]
5 Поиск опорного решения
6 Опорное решение:
7 {'x_1': 0, 'x_2': 0, 'x_3': 0, 'x_4': 4.0, 'x_5': 6.0, 'x_6': 2.0, 'F':
  ↪ -0.0}
8 Поиск оптимального решения
9 Замена базиса: x_4 <-> x_1, row: 0, col: 1
10 Более оптимальное решение:
11 {'x_4': 0, 'x_2': 0, 'x_3': 0, 'x_1': 2.0, 'x_5': 4.0, 'x_6': 2.0, 'F':
  ↪ 4.0}
```

```

12 Замена базиса: x_5 <-> x_2, row: 1, col: 2
13 Более оптимальное решение:
14 {'x_4': 0, 'x_5': 0, 'x_3': 0, 'x_1': 0.67, 'x_2': 2.67, 'x_6': 0.67,
   ↪ 'F': 22.67}
15 Замена базиса: x_1 <-> x_4, row: 0, col: 1
16 Более оптимальное решение:
17 {'x_1': 0, 'x_5': 0, 'x_3': 0, 'x_4': 1.0, 'x_2': 3.0, 'x_6': 0.5, 'F':
   ↪ 24.0}
18 Замена базиса: x_6 <-> x_3, row: 2, col: 3
19 Более оптимальное решение:
20 {'x_1': 0, 'x_5': 0, 'x_6': 0, 'x_4': 0.5, 'x_2': 3.0, 'x_3': 0.5, 'F':
   ↪ 25.5}
21 Решение: {'x_1': 0, 'x_5': 0, 'x_6': 0, 'x_4': 0.5, 'x_2': 3.0, 'x_3':
   ↪ 0.5, 'F': 25.5}
22 Нецелочисленное решение: {'x_3': 0.5}. Разветвляем
23
24
25 Решаем ветку 1
26 [[4. 2. 1. 1. ]
27  [6. 1. 2. 0. ]
28  [2. 0. 0.5 1. ]
29  [0. 0. 0. 1. ]
30  [0. 2. 8. 3. ]]
31 Поиск опорного решения
32 Опорное решение:
33 {'x_1': 0, 'x_2': 0, 'x_3': 0, 'x_4': 4.0, 'x_5': 6.0, 'x_6': 2.0,
   ↪ 'x_7': 0.0, 'F': -0.0}
34 Поиск оптимального решения
35 Замена базиса: x_4 <-> x_1, row: 0, col: 1
36 Более оптимальное решение:
37 {'x_4': 0, 'x_2': 0, 'x_3': 0, 'x_1': 2.0, 'x_5': 4.0, 'x_6': 2.0,
   ↪ 'x_7': 0.0, 'F': 4.0}
38 Замена базиса: x_5 <-> x_2, row: 1, col: 2
39 Более оптимальное решение:
40 {'x_4': 0, 'x_5': 0, 'x_3': 0, 'x_1': 0.67, 'x_2': 2.67, 'x_6': 0.67,
   ↪ 'x_7': 0.0, 'F': 22.67}
41 Замена базиса: x_1 <-> x_4, row: 0, col: 1
42 Более оптимальное решение:
43 {'x_1': 0, 'x_5': 0, 'x_3': 0, 'x_4': 1.0, 'x_2': 3.0, 'x_6': 0.5,
   ↪ 'x_7': 0.0, 'F': 24.0}
44 Замена базиса: x_6 <-> x_3, row: 2, col: 3
45 Более оптимальное решение:
46 {'x_1': 0, 'x_5': 0, 'x_3': 0, 'x_4': 1.0, 'x_2': 3.0, 'x_6': 0.5,
   ↪ 'x_7': 0.0, 'F': 24.0}

```

```

47 Решение: {'x_1': 0, 'x_5': 0, 'x_3': 0, 'x_4': 1.0, 'x_2': 3.0, 'x_6':
    ↳ 0.5, 'x_7': 0.0, 'F': 24.0}
48 Решение целочисленное. Ветка закончена
49
50
51 Решаем ветку 2
52 [[ 4.  2.  1.  1. ]
53 [ 6.  1.  2.  0. ]
54 [ 2.  0.  0.5  1. ]
55 [-1.  0.  0. -1. ]
56 [ 0.  2.  8.  3. ]]
57 Поиск опорного решения
58 Замена базиса: x_7 <-> x_3, row: 3, col: 3
59 Опорное решение:
60 {'x_1': 0, 'x_2': 0, 'x_7': 0, 'x_4': 3.0, 'x_5': 6.0, 'x_6': 1.0,
    ↳ 'x_3': 1.0, 'F': 3.0}
61 Поиск оптимального решения
62 Замена базиса: x_4 <-> x_1, row: 0, col: 1
63 Более оптимальное решение:
64 {'x_4': 0, 'x_2': 0, 'x_7': 0, 'x_1': 1.5, 'x_5': 4.5, 'x_6': 1.0,
    ↳ 'x_3': 1.0, 'F': 6.0}
65 Замена базиса: x_6 <-> x_2, row: 2, col: 2
66 Более оптимальное решение:
67 {'x_4': 0, 'x_6': 0, 'x_7': 0, 'x_1': 0.5, 'x_5': 1.5, 'x_2': 2.0,
    ↳ 'x_3': 1.0, 'F': 20.0}
68 Решение: {'x_4': 0, 'x_6': 0, 'x_7': 0, 'x_1': 0.5, 'x_5': 1.5, 'x_2':
    ↳ 2.0, 'x_3': 1.0, 'F': 20.0}
69 Нецелочисленное решение: {'x_1': 0.5}. Разветвляем
70
71
72 Решаем ветку 1
73 [[ 4.  2.  1.  1. ]
74 [ 6.  1.  2.  0. ]
75 [ 2.  0.  0.5  1. ]
76 [-1.  0.  0. -1. ]
77 [ 0.  1.  0.  0. ]
78 [ 0.  2.  8.  3. ]]
79 Поиск опорного решения
80 Замена базиса: x_7 <-> x_3, row: 3, col: 3
81 Опорное решение:
82 {'x_1': 0, 'x_2': 0, 'x_7': 0, 'x_4': 3.0, 'x_5': 6.0, 'x_6': 1.0,
    ↳ 'x_3': 1.0, 'x_8': 0.0, 'F': 3.0}
83 Поиск оптимального решения
84 Замена базиса: x_4 <-> x_1, row: 0, col: 1

```

```

85 Более оптимальное решение:
86 {'x_1': 0, 'x_2': 0, 'x_7': 0, 'x_4': 3.0, 'x_5': 6.0, 'x_6': 1.0,
   ↪ 'x_3': 1.0, 'x_8': 0.0, 'F': 3.0}
87 Замена базиса: x_6 <-> x_2, row: 2, col: 2
88 Более оптимальное решение:
89 {'x_1': 0, 'x_2': 0, 'x_7': 0, 'x_4': 3.0, 'x_5': 6.0, 'x_6': 1.0,
   ↪ 'x_3': 1.0, 'x_8': 0.0, 'F': 3.0}
90 Решение: {'x_1': 0, 'x_2': 0, 'x_7': 0, 'x_4': 3.0, 'x_5': 6.0, 'x_6':
   ↪ 1.0, 'x_3': 1.0, 'x_8': 0.0, 'F': 3.0}
91 Решение целочисленное. Ветка закончена
92
93
94 Решаем ветку 2
95 [[ 4.  2.  1.  1. ]
96  [ 6.  1.  2.  0. ]
97  [ 2.  0.  0.5  1. ]
98  [-1.  0.  0. -1. ]
99  [-1. -1.  0.  0. ]
100 [ 0.  2.  8.  3. ]]
101 Поиск опорного решения
102 Замена базиса: x_7 <-> x_3, row: 3, col: 3
103 Замена базиса: x_8 <-> x_1, row: 4, col: 1
104 Опорное решение:
105 {'x_8': 0, 'x_2': 0, 'x_7': 0, 'x_4': 1.0, 'x_5': 5.0, 'x_6': 1.0,
   ↪ 'x_3': 1.0, 'x_1': 1.0, 'F': 5.0}
106 Поиск оптимального решения
107 Замена базиса: x_4 <-> x_8, row: 0, col: 1
108 Более оптимальное решение:
109 {'x_4': 0, 'x_2': 0, 'x_7': 0, 'x_8': 0.5, 'x_5': 4.5, 'x_6': 1.0,
   ↪ 'x_3': 1.0, 'x_1': 1.5, 'F': 6.0}
110 Замена базиса: x_8 <-> x_2, row: 0, col: 2
111 Более оптимальное решение:
112 {'x_4': 0, 'x_8': 0, 'x_7': 0, 'x_2': 1.0, 'x_5': 3.0, 'x_6': 0.5,
   ↪ 'x_3': 1.0, 'x_1': 1.0, 'F': 13.0}
113 Решение: {'x_4': 0, 'x_8': 0, 'x_7': 0, 'x_2': 1.0, 'x_5': 3.0, 'x_6':
   ↪ 0.5, 'x_3': 1.0, 'x_1': 1.0, 'F': 13.0}
114 Решение целочисленное. Ветка закончена
115
116 Итоговое решение:
117 {'x_1': 0, 'x_5': 0, 'x_3': 0, 'x_4': 1.0, 'x_2': 3.0, 'x_6': 0.5,
   ↪ 'x_7': 0.0, 'F': 24.0}

```

Таким образом, наиболее оптимальное решение следующее:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0 \\x_2 &= 3 \\x_3 &= 0 \\x_4 &= 1 \\x_5 &= 0 \\x_6 &= 0.5\end{aligned}$$

Проверяем решение подстановкой:

$$F(x) = 2x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 0 + 24 + 0 = 24$$

В приложении к работе содержатся 2 файла

- файл с непосредственно реализацией метода
- файл с набором тестов, гарантирующих его правильную работу

2 Полный перебор

2.1 Ход работы

На вход программы подаются данные в точно таком же, как и в случае с прямым симплекс-методом, виде:

```
1 a = np.array([[2, 1, 1],
2               [1, 2, 0],
3               [0, 0.5, 1]])
4 b = np.array([[4],
5               [6],
6               [2]])
7 lambdas = np.array([[2, 8, 3]])
8
9 solution = BruteForce(a, b, lambdas, Condition.MAX).run()
```

Диапазон перебора x_i выбирается, как максимальное отношение соответствующего элемента b к x_i при прочих $x = 0$.

Программа выдает следующие результаты

```
1 x_1: диапазон перебора [0..4]
2 x_2: диапазон перебора [0..6]
3 x_3: диапазон перебора [0..4]
4
5 Итоговое решение:
6 {'x_1': 0, 'x_2': 3, 'x_3': 0, 'F': 24}
```

Проверим подстановкой:

$$F(x) = 2 * 0 + 8 * 3 + 3 * 0 = 24$$

В приложении к работе аналогично содержатся 2 файла - файл с реализацией метода и файл с тестами, гарантирующий правильность решения.

3 Выводы

В ходе решения лабораторной работы были реализованы 2 метода решения целочисленной задачи - перебором и методом ветвей и границ. Методы показали одинаковые результаты, а наличие тестов дополнительно гарантирует их корректность.