Министерство образования Российской Федерации

Московский государственный технический университет

имени Н.Э.Баумана

Факультет информатики и систем управления

Кафедра теоретической информатики и компьютерных технологий

Лабораторная работа №2

“Аппроксимация таблично-заданной функции методом наименьших квадратов”

по курсу “Численные методы”

Выполнил: Беляев А.В.

Проверила: Домрачева А.Б.

Москва, 2016

Оглавление

Постановка задачи

Дана таблично-заданная функция $y_i = g(x_i), i = 1, \dots, 10$ (таблица 1).

Необходимо найти $f(x)$ такое, что:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2 \to min$$

Таблица 1: $y_i = g(x_i)$:

X	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
Y	3.02	3.21	2.95	4.06	4.03	5.39	5.97	6.51	6.77	7.79

Решение разбивается на этапы:

1. Выбор вида функции:

Определить вид функции $Z(x)$, используя функции из таблицы 2.

2. Линеаризация выбранной функции:

Привести выбранную функцию к линейному виду.

3. Непосредственный расчет параметров:

Определить коэффициенты линейной функции с помощью метода наименьших квадратов.

Вычислить коэффициенты нелинеаризованной функции.

Оценить погрешность $\delta = \min \delta_i$.

Оценить $S = \sum_i^n (y_i - Z(x_i))^2$, введя среднее арифметическое, геометрическое и гармоническое.

$$x_a = \frac{x_0 + x_n}{2}$$

$$x_g = \sqrt{x_0 x_n}$$

$$x_h = \frac{x_0 x_n}{x_0 + x_n}$$

$$y_a^* = \frac{y_0^* + y_n^*}{2}$$

$$y_g^* = \sqrt{y_0 y_n}$$

$$y_h^* = \frac{y_0^* y_n^*}{y_0 + y_n}$$

$$\delta_1 = |Z(x_a) - y_a^*|$$

$$\delta_2 = |Z(x_g) - y_g^*|$$

$$\delta_3 = |Z(x_a) - y_g^*|$$

$$\delta_4 = |Z(x_g) - y_a^*|$$

$$\delta_5 = |Z(x_h) - y_g^*|$$

$$\delta_6 = |Z(x_a) - y_h^*|$$

$$\delta_7 = |Z(x_h) - y_h^*|$$

$$\delta_8 = |Z(x_h) - y_g^*|$$

$$\delta_9 = |Z(x_g) - y_h^*|$$

Таблица 2. Замены для функций:

Функция	Замена для получения линейного аналога
$y = ax + b$	$\begin{cases} \bar{x} = x \\ \bar{y} = y \\ \bar{b} = b \\ \bar{a} = a \end{cases}$
$y = ax^b$	$\begin{cases} \bar{x} = \ln(x) \\ \bar{y} = \ln(y) \\ \bar{b} = \ln(a) \\ \bar{a} = b \end{cases}$
$y = ae^{bx}$	$\begin{cases} \bar{x} = x \\ \bar{y} = \ln(y) \\ \bar{b} = \ln(a) \\ \bar{a} = b \end{cases}$
$y = a\ln x + b$	$\begin{cases} \bar{x} = \ln(x) \\ \bar{y} = y \\ \bar{b} = b \\ \bar{a} = a \end{cases}$

$y = \frac{a}{x} + b$	$\begin{cases} \bar{x} = 1/x \\ \bar{y} = y \\ \bar{b} = b \\ \bar{a} = a \end{cases}$
$y = \frac{1}{ax + b}$	$\begin{cases} \bar{x} = x \\ \bar{y} = 1/y \\ \bar{b} = b \\ \bar{a} = a \end{cases}$
$y = \frac{x}{ax + b}$	$\begin{cases} \bar{x} = x \\ \bar{y} = x/y \\ \bar{b} = b \\ \bar{a} = a \end{cases}$
$y = ae^{\frac{b}{x}}$	$\begin{cases} \bar{x} = 1/x \\ \bar{y} = \ln(y) \\ \bar{b} = \ln(a) \\ \bar{a} = b \end{cases}$
$y = \frac{1}{a \ln x + b}$	$\begin{cases} \bar{x} = \ln(x) \\ \bar{y} = 1/y \\ \bar{b} = b \\ \bar{a} = a \end{cases}$

Основные теоретические сведения

Метод наименьших квадратов:

Если $f(x) = ax + b$ – линейная функция, то для минимизации

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2 \to min$$

Коэффициенты выбираются следующим образом (с заменой):

$$\begin{cases} aA + bB = D \\ aB + bC = F \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{BF - CD}{B^2 - FA} \\ b = \dfrac{BD - AF}{B^2 - FA} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = n\dfrac{\sum_1^n x_i y_i - \sum_1^n x_i \sum_1^n y_i}{n\sum_1^n x_i^2 - (\sum_1^n x_i)^2} \\ b = \dfrac{\sum_1^n y_i - a\sum_1^n x_i}{n} \end{cases}$$

При подобных a и b функция $S(a, b)$ принимает наименьшее значение.

Текст программы

Была написана программа на языке С++. На Листинге 1 представлен обобщенный код функции, реализующий расчет коэффициентов для случая экспоненциальной функции.

Листинг 1

```
XTYPE x[N] = { 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0 };
XTYPE y[N] = { 3.02, 3.21, 2.95, 4.06, 4.03, 5.39, 5.97, 6.51, 6.77, 7.79 };

XTYPE X_a = (x[0] + x[N-1]) / 2;
XTYPE X_g = sqrt(x[0] * x[N-1]);
XTYPE X_h = (x[0] * x[N-1]) / (x[0] + x[N-1]);

XTYPE Y_a = (y[0] + y[N-1]) / 2;
XTYPE Y_g = sqrt(y[0] * y[N-1]);
XTYPE Y_h = (y[0] * y[N-1]) / (y[0] + y[N-1]);

XTYPE z_3(XTYPE x, XTYPE a, XTYPE b) {
	return a * exp(b * x);
}

void f_3(int k, XTYPE xarr[], XTYPE yarr[]) {
	int i;
	XTYPE sum_x = 0, sum_y = 0, sum_xx = 0, sum_xy = 0;

	for (i = 0; i < N; i++) {
		sum_x += xarr[i];
		sum_xx += xarr[i] * xarr[i];
		sum_y += log(yarr[i]);
		sum_xy += xarr[i] * log(yarr[i]);
	}
	sXX = sum_xx;
	sX = sum_x;
	sXY = sum_xy;
	sY = sum_y;

	XTYPE a_curr = (sX*sY - N * sXY) / (pow(sX, 2) - N * sXX);
	XTYPE b_curr = (sX*sXY - sXX*sY) / (pow(sX, 2) - N*sXX);

	a[k - 1] = exp(b_curr);
	b[k - 1] = a_curr;

	printf("y = %f*x + %f\n", a[k - 1], b[k - 1]);
```

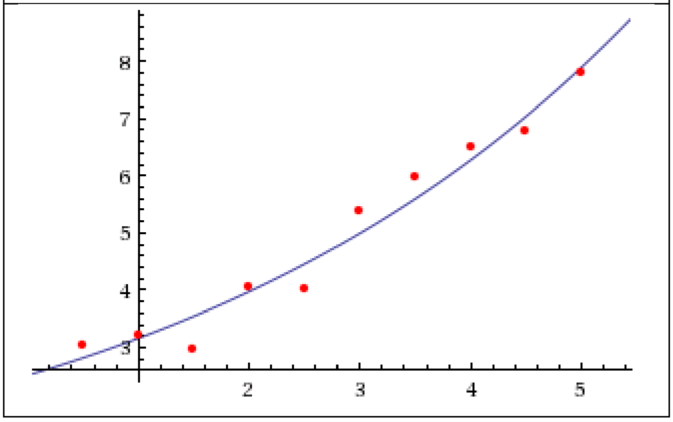
```
	t = count _deltas();

	XTYPE t_min = FLT_MAX;

	for (i = 0; i < NF; i++)
		if (t[i] < t_min)
			t_min = t[i];

	d[k - 1] = t_min;

	printf("delta = %f\n", t_min);

	XTYPE S = 0;
	for (i = 0; i < N; i++)
		S += pow((y[i] - z_3(x[i], a[k - 1], b[k - 1])), 2);

	printf("S = %f\n\n", S);
}
```

Тесты

$f(x)$	a	b	δ_{min}	$\sum_{i}^{n}(y_i - f(x_i))^2$
$y = ax + b$	1.124121	1.878667	0.119660	1.369849
$y = ax^b$	3.260526	0.445295	0.118837	3.910534
$y = ae^{bx}$	2.477520	0.232206	0.158496	1.018414
$y = a \ln x + b$	2.095890	3.257042	0.027753	6.189605
$y = \frac{a}{x} + b$	-2.190746	6.253327	0.017437	14.150211
$y = \frac{1}{ax + b}$	-0.050878	0.365794	0.423214	3.081460
$y = \frac{x}{ax + b}$	0.090979	0.266043	0.077976	4.808385
$y = ae^{\frac{b}{x}}$	6.208591	-0.478169	0.007957	12.487358
$y = \frac{1}{a \ln x + b}$	-0.100229	0.307797	0.005499	2.923973

Исходя из проведенных тестов было получено наилучшее приближение экспоненциальной функцией. График этого приближения на рисунке 1:

Рисунок 1



Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы, был реализован метод наименьших квадратов, сводящий вычисления к простому расчету неизвестных коэффициентов. Для представленной таблично-заданной функции было получено наилучшее приближение.