МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Э. БАУМАНА
Факультет информатики и систем управления
Кафедра теоретической информатики и компьютерных технологий

Лабораторная работа №5
по курсу «Численные методы»

«Интегрирование методами Симпсона, прямоугольников и трапеций»

Выполнил:
студент группы ИУ9-62
Беляев А. В.

Проверила:
Домрачева А. Б.

Москва 2016

Содержание

1 Постановка задачи

Необходимо с заданной точностью ϵ вычислить значение интеграла с помощью методов Симпсона, прямоугольников и трапеций и сравнить результаты по эффективности вычиления результата.

В качестве подынтегральной функции возьмем функцию вида:

$$x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 6$$

2 Необходимые теоретические сведения

Метод Симпсона заключается в приближении подынтегральной функции квадратичным многочленом. Т.е. в приближении графика функции на отрезке интегрирования параболой, проходящей по точкам $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, $(x_{i-0.5}, f(x_{i-0.5}))$, $(x_i, f(x_i))$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-0.5}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right)$$

Метод прямоугольников (средних) вычисления интеграла заключается в замене подынтегральной функции на некоторую константу, равную значению функции в центре элементарного отрезка, на которые был предварительно разбит отрезок интегрирования.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)(x_i - x_{i-1})$$

Метод трапеций заключается в замене подынтегральной функции на линейную функцию на каждом элементарном отрезке, на которые был предварительно разбит отрезок интегрирования. Площадь под полученным графиком аппроксимируется прямоугольными трапециями.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}(x_i - x_{i-1})$$

Для получения результата с заданной точностью воспользуемся правилом Рунге остановки. Это правило заключается в вычислении интеграла по выбранной формуле при числе шагов, равном n, а затем при числе, равном $2n$. Погрешность вычисления при числе шагов $2n$ определяется по формуле Рунге:

$$\delta_{2n} \approx \Theta|I_{2n} - I_n|$$

При этом для формул средних прямоугольников и трапеций $\Theta = \frac{1}{3}$, а для формулы Симпсона $\Theta = \frac{1}{15}$.

Процесс вычислений закачивается, когда для определенного значения числа шагов N будет выполнено $\delta_{2n} < \epsilon$, где ϵ - заданная точность.

3 Текст программы

Для написания программы был использован язык Javascript.

```
K1 = 1.0/3.0;
K2 = 1.0/15.0;

function fx(x) { return Math.pow(x, 4) - 12*Math.pow(x, 3) + 15*Math.pow(x, 2) - 6; }

function simpsons(f, a, b, n) {
        var h = (b - a) / n;
        var r, s = 0.0, m = 0;

        for (var x = a; x <= b; x += h) {
                r = f(x);
                if (x == a || x == b) {
                        s += r;
                } else {
                        m = !m;
                        s += r * (m + 1) * 2.0;
                }
        }

        return s * (h / 3.0);
}

function rektangles(f, a, b, n) {
        var h = (b - a) / n;
        var s = 0.0;

        for (var i = 0; i < n; i++)
                s += f(a + h*(i + 0.5));

        return s * h;
}

function trapezoids(f, a, b, n) {
        var h = (b - a) / n;
        var s = 0.0;

        for (var i = 1; i <= n-1; i++)
                s += f(a + i*h);

        return (h/2) * (f(a) + f(b) + 2*s);
}

function Lab5Main() {
        var a = 0, b = 1;
        steps = 1;
        epsilon = 0.001;
        rektStop = false, trapStop = false, simpStop = false;

        do {
                rektDelta = K1 * Math.abs(rektangles(fx, a, b, 2*steps) - rektangles(fx, a, b, steps));
                trapDelta = K1 * Math.abs(trapezoids(fx, a, b, 2*steps) - trapezoids(fx, a, b, steps));
                simpDelta = K2 * Math.abs(  simpsons(fx, a, b, 2*steps) -   simpsons(fx, a, b, steps));

                if (rektDelta < epsilon && !rektStop) {
                        rektStop = true;
                        rektSteps = 2*steps;
                }
                if (trapDelta < epsilon && !trapStop) {
                        trapStop = true;
                        trapSteps = 2*steps;
                }
                if (simpDelta < epsilon && !simpStop) {
                        simpStop = true;
                        simpSteps = 2*steps;
                }
                steps *= 2;

        } while (!(rektStop && trapStop && simpStop));

        console.log("rektangles I=" + rektangles(fx, a, b, rektSteps) + " n=" + rektSteps);
        console.log("trapezoids I=" + trapezoids(fx, a, b, trapSteps) + " n=" + trapSteps);
        console.log("simpsons   I=" +   simpsons(fx, a, b, simpSteps) + " n=" + simpSteps);

}
```

4 Результаты

В результате работы программы были получены следующие результаты:

Для подынтегральной функции $x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 6$ на отрезке $[0, 1]$ с точностью $\epsilon = 0.001$:

Таблица 1: Результаты работы 1

Метод	Значение интеграла	Кол-во итераций
Прямоугольников	-3.7996740341186523	16
Трапеций	-3.8006515502929688	16
Симпсона	-3.7994791666666665	4

Для подынтегральной функции $\exp x$ на отрезке $[0, 1]$ с точностью $\epsilon = 0.001$:

Таблица 2: Результаты работы 2

Метод	Значение интеграла	Кол-во итераций
Прямоугольников	1.71800219205266	16
Трапеций	1.7188411285799947	16
Симпсона	1.718318841921747	4

Для подынтегральной функции $\sin x$ на отрезке $[0, 4]$ с точностью $\epsilon = 0.001$:

Таблица 3: Результаты работы 3

Метод	Значение интеграла	Кол-во итераций
Прямоугольников	1.6539127992561373	64
Трапеций	1.653105290365576	64
Симпсона	1.6542353517615562	8

5 Выводы

В ходе работы были реализованы методы Симпсона, прямоугольников и трапеций приближенного интегрирования.

Как видно из результатов тестирования, метод трапеций показывает схожие с методом прямоугольников результаты, но это достигается бОльшим числом шагов, чем в методе Симпсона, который требует на порядок меньше итераций (4 против 16 для монотонно возрастающих на рассатриваемом отрезке функций и 8 против 64 для периодической функции) в протестированных с одинаковой точностью ϵ функциях.