一维随机变量及其分布

1. 基本术语

1.1 随机变量

设随机试验 E 的样本空间 $\Omega=\{\omega\}$满足 $\forall\omega\in\Omega$ 都有唯一的实数 $X(\omega)$ 与之对应, 且对任意实数 x, 都有 $\{\omega|X(\omega)\le x,\omega\in\Omega\}$ 是随机事件, 称定义在 Ω 上的单值函数 $X(\omega)$ 是**随机变量**

1.2 分布函数

设 X 是随机变量, x 是任意实数, 称函数 $F(x)=P(X\le x)$ 为随机变量 X 的**分布函数**, 或者称 X 服从 $F(x)$ 分布, 记作 $X\sim F(x)$

1.3 分布函数性质

- $F(x)$ 是**单调不减**函数, $\forall x_1\le x_2, F(x_1)\le F(x_2)$
- $F(x)$ 是**右连续**函数, $\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x_0^+)=F(x_0)$
- $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0, F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$
- $P\{X\le a\}=F(a), P\{X<a\}=F(a^-), P\{X=a\}=F(a)-F(a^-)$

2. 一维离散型随机变量

2.1 离散型随机变量

随机变量 X 只能取有限个值 $x_1,x_2,\cdots$, 称 X 为**离散型随机变量**

$$P\{X=x_i\}=p_i(i=1,2,\cdots)$$

上面的式子称为随机变量 X 的分布列、分布律或者概率分布, 记作 $X\sim p_i$, 概率分布通常用表格或者矩阵形式表示

$$X\sim\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots\\ p_1 & p_2 & \cdots\end{pmatrix}$$

2.2 离散型随机变量的性质

- $P(X=x_i)\ge 0, \sum\limits_{i=1}^{n}P(X=x_i)=1$
- $P(X\le x_i)=\sum\limits_{x_j\le x_i}P(X=x_j)$

- $P(X \in B)=\sum\limits_{x_i \in B} P(X=x_i)$
- $P(a<X \leq b)=P(X \leq b)-P(X \leq a)=F(b)-F(a)$

2.3 常见离散型随机变量分布

- $0-1$ **分布**
  $X \sim B(1, p)$
  $P(X=1)=p, P(X=0)=1-p$
- **二项分布**
  $X \sim B(n, p)$, 试验次数为 n, 成功概率为 p, 随机变量 X 为成功次数
  $P(X=k)=C_k^n p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2, \cdots, n), 0<p<1$
- **泊松分布**
  $X \sim P(\lambda)$
  $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}(k=0,1,2, \cdots), 0<p<1$
- **几何分布**
  $X \sim G(p)$
  $P(X=k)=(1-p)^{k-1} p(k=1,2, \cdots), 0<p<1$
- **超几何分布**
  $X \sim H(n, N, M)$
  $P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}(\max \{0, n-M+N\} \leq k \leq \min \{M, n\})$

3. 一维连续型随机变量

3.1 连续型随机变量分布函数和密度函数

随机变量 X 的分布函数可以表示为:
$F(x)=\int_{-\infty}^x f(t) d t, t \in \mathbb{R}$

其中 $f(x)$ 是非负可积函数, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d x=1$, 称 X 是连续型随机变量, $f(x)$ 是随机变量 X 的**概率密度函数**, 记作 $X \sim f(x)$

3.2 连续型随机变量分布函数性质

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d x=1$
- $P(a<X<b)=P(a \leq X<b)=P(a<X \leq b)=P(a \leq X \leq b)=\int_a^b f(x) d x$
- $P(X=c)=0$

3.3 常见连续型随机变量分布

- **均匀分布**

$X \sim U(a,b)$, X 的概率密度函数 $f(x)$ 和分布函数 $F(x)$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & x\in(a,b)\\ 0 & x\in(-\infty,a]\cup[b,+\infty)\end{cases} \Rightarrow F(x)=\begin{cases}0 & x\in(-\infty,a)\\ \dfrac{x-a}{b-a} & x\in[a,b)\\ 1 & x\in[b,+\infty)\end{cases}$$

- **指数分布**

$X \sim E(\lambda)$, X 的概率密度函数 $f(x)$ 和分布函数 $F(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\in(0,+\infty)\\ 0 & x\in(-\infty,0]\end{cases} \Rightarrow F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\in(0,+\infty)\\ 0 & x\in(-\infty,0]\end{cases}(\lambda>0)$$

- **正态分布**

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, X 的概率密度 $f(x)$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}(-\infty<x<+\infty)$$

特别的,当 $\mu=0,\sigma=1$ 时, $X \sim f(x)$ 是标准正态分布

$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}(x\in\mathbb{R})\\ \varPhi(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt\end{cases}$$

正态分布函数性质

- $F(x)=P(X\le x)=\varPhi(\dfrac{x-\mu}{\sigma})$
- $P(a\le X\le b)=\varPhi(\dfrac{b-\mu}{\sigma})-\varPhi(\dfrac{a-\mu}{\sigma})$
- $F(\mu-x)+F(\mu+x)=1, aX+b\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$

4. 一维随机变量函数的分布

设 X 是随机变量, 函数 $y=g(x)$, 以随机变量 X 作为自变量的函数 $Y=g(X)$ 也是随机变量, 称为**随机变量函数**

- 离散型 $\longrightarrow$ 离散型
- 连续型 $\longrightarrow$ 连续型

- **连续型 $\longrightarrow$ 离散型**