# 向量组

## 向量和向量组的线性相关性

### 向量的定义和运算

### 向量的定义

- n 个数构成的有序数组  $[a_1,a_2,\cdots,a_n]$  称为一个 n 维向量,记作
- $m{lpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n],m{lpha}$  称为 n 维行向量, $m{lpha}^T$  称为 n 维列向量,其中  $a_i$  称为向量的第i个分量

### 向量的线性运算

- 向量的加法:  $oldsymbol{lpha}+oldsymbol{eta}\stackrel{def}{\Longrightarrow}[a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n]$
- 标量乘法: $koldsymbol{lpha} \overset{def}{\Longrightarrow} [ka_1,ka_2,\cdots,ka_n], k \in \mathbb{R}$

### 向量的内积和正交

#### 向量的内积

• 设 
$$m{lpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T, m{eta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^T$$
,则称: $m{lpha}^Tm{eta}=\sum_{i=1}^na_ib_i=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$  为向量  $m{lpha},m{eta}$  的内积,记作 $(m{lpha},m{eta})$ 

#### 向量的模

• 
$$\|oldsymbol{lpha}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$
 称为向量  $oldsymbol{lpha}$  的模, 特别的当  $oldsymbol{lpha}$ 时, 称  $oldsymbol{lpha}$  为单位向量

#### 正交

• 当 $oldsymbol{lpha}^Toldsymbol{eta}=0$ 时,称向量 $oldsymbol{lpha}$ , $oldsymbol{eta}$ 是正交向量

#### 标准正交基

• 向量组  $oldsymbol{lpha}_1, oldsymbol{lpha}_2, \cdots, oldsymbol{lpha}_n$  满足:

$$oldsymbol{lpha}_i^T oldsymbol{lpha}_j = egin{cases} 0 & i 
eq j \ 1 & i = j \end{cases}$$

则称  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  是标准或单位正交向量组

#### 正交矩阵

- 设A 是n 阶方阵, 若 $A^TA=E$ , 则称A 为正交矩阵
- $A^TA = E \Rightarrow A^T = A^{-1}$
- $|A| = \pm 1$
- A 的行(列)向量是标准正交向量组

#### 施密特正交化

• 线性无关的向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  的标准正交化公式:

$$egin{cases} eta_1 = oldsymbol{lpha}_1 \ oldsymbol{eta}_2 = oldsymbol{lpha}_2 - rac{(oldsymbol{lpha}_2, oldsymbol{eta}_1)}{(oldsymbol{eta}_1, oldsymbol{eta}_1)} oldsymbol{eta}_1 \ oldsymbol{eta}_n = oldsymbol{lpha}_n - rac{(oldsymbol{lpha}_n, oldsymbol{eta}_1)}{(oldsymbol{eta}_1, oldsymbol{eta}_1)} oldsymbol{eta}_1 - rac{(oldsymbol{lpha}_n, oldsymbol{eta}_2)}{(oldsymbol{eta}_2, oldsymbol{eta}_2)} oldsymbol{eta}_2 - \dots - rac{(oldsymbol{lpha}_n, oldsymbol{eta}_{n-1})}{(oldsymbol{eta}_{n-1}, oldsymbol{eta}_{n-1})} oldsymbol{eta}_{n-1} \end{cases}$$

• 将 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 单位化:

$$egin{cases} oldsymbol{\eta}_1 = rac{oldsymbol{eta}_1}{\|oldsymbol{eta}_1\|} \ oldsymbol{\eta}_2 = rac{oldsymbol{eta}_2}{\|oldsymbol{eta}_2\|} \ \cdots \ oldsymbol{\eta}_n = rac{oldsymbol{eta}_n}{\|oldsymbol{eta}_n\|} \end{cases}$$

•  $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$  是一个标准正交向量组

### 向量组的线性相关性

### 线性相关和线性表出

#### 线性组合

• 设有 m 个 n 维向量  $m{lpha}_1, m{lpha}_2, \cdots, m{lpha}_m$  和 m 个数  $k_1, k_2, \cdots, k_m$ ,向量  $k_1m{lpha}_1 + k_2m{lpha}_2 + \cdots + k_mm{lpha}_m$  称作向量组  $m{lpha}_1, m{lpha}_2, \cdots, m{lpha}_m$  的线性组合

#### 线性表出

• 向量  $oldsymbol{eta}$  可以表示为向量组  $oldsymbol{lpha}_1, oldsymbol{lpha}_2, \cdots, oldsymbol{lpha}_m$  的线性组合

 $\exists k_i (i=1,2,\cdots,m) \in \mathbb{R}, \ s.t. \ m{eta} = k_1 m{lpha}_1 + k_2 m{lpha}_2 + \cdots + k_m m{lpha}_m$ 向量 $m{eta}$  可以由向量组 $m{lpha}_1, m{lpha}_2, \cdots, m{lpha}_m$  线性表出

#### 线性相关

• 向量组  $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 

$$\exists k_i 
eq 0 (i=1,2,\cdots,m), \; s.\, t. \; k_1oldsymbol{lpha}_1 + k_2oldsymbol{lpha}_2 + \cdots + k_moldsymbol{lpha}_m = 0$$

向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  线性相关

#### 线性无关

• 向量组 $oldsymbol{lpha}_1,oldsymbol{lpha}_2,\cdots,oldsymbol{lpha}_m$ 

$$\exists k_i \in \mathbb{R}, \ s. \ t. \ k_1 oldsymbol{lpha}_1 + k_2 oldsymbol{lpha}_2 + \cdots + k_m oldsymbol{lpha}_m = 0$$

当且仅当  $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$  时上式成立, 向量组  $oldsymbol{lpha}_1,oldsymbol{lpha}_2,\cdots,oldsymbol{lpha}_m$  线性无关

### 判别线性相关性的七大定理

- 向量组  $m{lpha}_1, m{lpha}_2, \cdots, m{lpha}_n$  线性相关的充要条件: 至少有一个向量可以由其余的 n-1 个 向量<mark>线性表出</mark>
- 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  线性无关,  $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  线性相关,  $\beta$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  线性表出, 且表示唯一
- 向量组  $m{eta}_1, m{eta}_2, \cdots, m{eta}_t$  可以由  $m{lpha}_1, m{lpha}_2, \cdots, m{lpha}_s$  线性表出,且 t>s,则  $m{eta}_1, m{eta}_2, \cdots, m{eta}_t$  线性相关

• 设 $m \land n$ 维向量 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_m$ ,其中

$$egin{cases} oldsymbol{lpha}_1 = [a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{n1}]^T \ oldsymbol{lpha}_2 = [a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{n2}]^T \ \cdots \ oldsymbol{lpha}_m = [a_{1m}, a_{2m}, \cdots, a_{nm}]^T \end{cases}$$

向量组  $m{lpha}_1, m{lpha}_2, \cdots, m{lpha}_m$  线性相关的充要条件时齐次线性方程组 AX=0 有非零解,也等价于零空间不为零

- 向量  $m{eta}$  可以由向量组  $m{lpha}_1, m{lpha}_2, \cdots, m{lpha}_s$  线性表出,等价于非齐次方程组方程  $AX = m{eta}$  有解;向量  $m{eta}$  不能由向量组  $m{lpha}_1, m{lpha}_2, \cdots, m{lpha}_s$  线性表出,等价于非齐次方程组方程  $AX = m{eta}$ 无解
- 如果向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  一部分向量线性相关,那么整个向量组也线性相关
- 如果一组 n 维向量  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  线性无关,那么把这些向量各任意添加 m 个分量得到的新向量组 (n+m) 维  $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \cdots, \alpha_n^*$  线性无关;如果向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  线性相关,那各去掉相同的若干个分量所得到的新向量组也线性相关

## 极大线性无关组和向量组的秩

### 极大线性无关组

- 在向量组  $m{lpha}_1, m{lpha}_2, \cdots, m{lpha}_s$ , 如果存在部分向量组  $m{lpha}_{i_1}, m{lpha}_{i_2}, \cdots, m{lpha}_{i_r}$  满足:
  - $\circ$   $oldsymbol{lpha}_{i_1}, oldsymbol{lpha}_{i_2}, \cdots, oldsymbol{lpha}_{i_r}$  线性无关
  - $\circ$  向量组中任意向量  $m{lpha}_i(i=1,2,\cdots,s)$  都可以被向量组  $m{lpha}_{i_1},m{lpha}_{i_2},\cdots,m{lpha}_{i_r}$  线性表出
  - $\circ$  称向量组  $oldsymbol{lpha}_{i_1}, oldsymbol{lpha}_{i_2}, \cdots, oldsymbol{lpha}_{i_r}$  是原向量组的一个极大线性无关组
- 一个向量组的极大线性无关组不唯一, 对于线性无关的向量组, 它的极大线性无关组是自身

### 向量组的秩

• 向量组  $m{lpha}_1, m{lpha}_2, \cdots, m{lpha}_s$  的极大线性无关组  $m{lpha}_{i_1}, m{lpha}_{i_2}, \cdots, m{lpha}_{i_r}$  中所含向量的个数 r 称为向量组的秩,记作:

$$rank(oldsymbol{lpha}_1,oldsymbol{lpha}_2,\cdots,oldsymbol{lpha}_s)=r(oldsymbol{lpha}_1,oldsymbol{lpha}_2,\cdots,oldsymbol{lpha}_s)=r$$

- r(A) = r(col(A)) = r(row(A))
- 初等行变换和初等列变换不改变矩阵的秩
- $A \stackrel{col}{\longrightarrow} B, A$  的行向量与 B 的行向量是等价向量组

• 设向量组  $m{lpha}_1, m{lpha}_2, \cdots, m{lpha}_s$  及  $m{eta}_1, m{eta}_2, \cdots, m{eta}_t$ , 若  $m{eta}_i (i=1,2,\cdots,t)$  均可由 $m{lpha}_1, m{lpha}_2, \cdots, m{lpha}_s$  线性表出,则:

$$r(oldsymbol{lpha}_1,oldsymbol{lpha}_2,\cdots,oldsymbol{lpha}_s) \leq r(oldsymbol{eta}_1,oldsymbol{eta}_2,\cdots,oldsymbol{eta}_t)$$

## 等价向量组

- 设两个向量组:  $(1)\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, (2)\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ , 若(1) 中向量  $\alpha_i (i=1,2,\cdots,s)$  均可由(2) 中向量线性表出,则称向量组(1) 可由向量组(2) 线性表出;若向量组(1) 和向量组(2) 互相线性表出,称向量组(1) 与向量组(2) 是等价向量组,记作 $(1)\cong(2)$
- $(1) \cong (1)$
- $(1) \cong (2), (2) \cong (1)$
- 向量组和它的极大线性无关组是等价向量组

## 向量空间

### 向量空间的定义

• 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是n维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中线性无关的有序向量, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$ 均可由向量组 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 线性表出,且表出式:

$$\boldsymbol{\alpha} = a_1 \boldsymbol{\xi}_1 + a_2 \boldsymbol{\xi}_2 + \dots + a_n \boldsymbol{\xi}_n$$

称  $m{\xi}_1, m{\xi}_2, \cdots, m{\xi}_n$  是 n 维向量空间  $\mathbb{R}^n$  的一组基,基向量的个数 n 称为向量空间的维度, $[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T$  是向量  $\alpha$  在基向量  $m{\xi}_1, m{\xi}_2,\cdots,m{\xi}_n$  的坐标

### 基变换

•  $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$  和  $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$  是向量空间  $\mathbb{R}^n$  中的两个基, 其有关系:

$$[oldsymbol{\eta}_1,oldsymbol{\eta}_2,\cdots,oldsymbol{\eta}_n] = [oldsymbol{\xi}_1,oldsymbol{\xi}_2,\cdots,oldsymbol{\xi}_n] egin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \ dots & dots & \ddots & dots \ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = [oldsymbol{\xi}_1,oldsymbol{\xi}_2,\cdots,oldsymbol{\xi}_n]C$$

上式是基 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  到基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  的基变换公式,矩阵 C 是基 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  到基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  的过渡矩阵,C 的第i 列即是 $\eta_i$  在基 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  下的坐标,过渡矩阵 C 为可逆矩阵

## 坐标变换

• 设向量  $m{lpha}$  在基  $m{\xi}_1, m{\xi}_2, \cdots, m{\xi}_n$  和基  $m{\eta}_1, m{\eta}_2, \cdots, m{\eta}_n$  下的坐标为别是  $m{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T, m{y} = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^T$ 

$$oldsymbol{lpha} = [oldsymbol{\xi}_1, oldsymbol{\xi}_2, \cdots, oldsymbol{\xi}_n] \mathbf{x} = [oldsymbol{\eta}_1, oldsymbol{\eta}_2, \cdots, oldsymbol{\eta}_n] \mathbf{y}$$

$$[\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n] = [\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n]C$$

$$\mathbf{x} = C\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} = C^{-1}\mathbf{x}$$