矩阵

矩阵的定义和运算

矩阵的定义和线性运算

矩阵定义

- 由 $m \times n$ 个数 a_{ij} 排成的 m 行 n 列的数表称为 m 行 n 列的矩阵, 记作:
- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$
- $m \times n$ 个数称为矩阵 A 的元素, 简称为元, 数 a_{ij} 位于矩阵 A 的第 i 行第 j 列, 称为矩阵 A 的 (i, j) 元, $m \times n$ 矩阵乘法记作 A_{mn} 或 $(a_{ij})_{m \times n}$
- 元素是实数的矩阵称为实矩阵, 元素是复数的矩阵称为复矩阵
- 行数和列数相等的矩阵称为方阵

矩阵的线性运算

- 加法: $C = A + B = (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} = (c_{ij})_{m \times n}$ 其中 $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- 标量乘法: $kA = k(a_{ij})_{m \times n} = (ka_{ij})_{m \times n}$

重要矩阵

- 零矩阵: 所有元素均为 0 的矩阵, 记作 O
- 单位矩阵: 主对角线元素均为 1, 其余元素全为 0 的 n 阶方阵, 记作 E 或 I
- 数量矩阵: 数 k 和单位矩阵乘积得到的矩阵被称为数量矩阵
- 对角矩阵: 非主对角线元素均为 0 的矩阵称为对角矩阵
- 上(下)三角矩阵: 当 $i > (<) j, a_{ij} = 0$ 的矩阵称为上(下)三角矩阵
- 对称矩阵: 满足条件 $A^T = A$ 的矩阵称为对称矩阵
- 反对称矩阵: 满足条件 $A^T = -A$ 的矩阵称为对称矩阵
- 幂等矩阵: 满足条件 $A^2 = A$ 的矩阵称为幂等矩阵
- 正交矩阵: A 是 n 阶方阵, 满足 $A^T A = E$ 的矩阵称为正交矩阵

- 分块矩阵
  - $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$
  - $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_n \end{bmatrix}$

    其中 $A_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),B_j=(b_{j1},b_{j2},\cdots,b_{jm})^T$
  - $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} AX+BY & AY+BW \\ CX+DY & CY+DW \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} A^n & O \\ O & B^n \end{bmatrix}$

矩阵的乘法和幂

矩阵乘法

- $A=(a_{ij})_{m\times s},B=(b_{ij})_{s\times n}$, 矩阵 A,B 可以相乘(左乘矩阵的列数和右乘矩阵的行数相等), 记 $C=A\times B=(c_{ij})_{m\times n}$
- $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$

矩阵转置

- 将矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的行列互换得到矩阵A 的转置矩阵,记作 A^T
- $A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$
- $(A^T)^T=A$
- $(kA)^T=k(A)^T$
- $(A+B)^T=A^T+B^T$
- $(AB)^T=B^TA^T$

- 当 $m=n$ 时, $|A^T|=|A|$

矩阵幂

- A 是 n 阶方阵, $A^m=\overbrace{AA\cdots A}^{m个}$ 称为方阵 A 的 m 次幂
- $(A\pm B)^2=A^2+B^2\pm AB\pm BA$
- $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$
- $(AB)^m=\overbrace{(AB)(AB)\cdots(AB)}^{m个}$
- 当 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 时,
  $f(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_nA^n$

矩阵的逆和伴随矩阵

矩阵的逆

逆矩阵

- A,B 是 n 阶方阵, E 是 n 阶单位矩阵, 若 $AB=BA=E$, 则称 A 是可逆矩阵, 并称 B 是 A 的逆矩阵, 且逆矩阵唯一, 将A的逆矩阵记作A^{-1}
- $(A^{-1})^{-1}=A$
- AB 可逆, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
- $k\neq 0,(kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1}$
- $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$
- $A^T可逆,(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

伴随矩阵

- A 是 n 阶方阵, A 的伴随矩阵 A^* 是由 A 的代数余子式构成的矩阵, 记作 $A^*=(A_{ij})_{n\times n}$, 其中 A_{ij} 是 a_{ji} 的代数余子式
- $A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$

- $AA^* = A^*A = |A|E \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$
- $\forall A_n, \left|A^*\right| = \left|A\right|^{n-1}$
- $|A| \neq 0, A^* = |A|A^{-1}, A = |A|(A^*)^{-1}$
- $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1}$
- $(kA)^* = k^{n-1}A^*$

初等变换和初等矩阵

初等变换

- 用一个非零常数乘以矩阵的某一行(列)
- 互换矩阵中的某两行(列)的位置
- 将矩阵的某一行(列)的 k 倍加到另一行(列)

初等矩阵

- $E_i(k)$ 表示 E 的第 i 行(列)乘 k 倍
- $E_i(k) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & m & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$
- E_{ij} 表示 E 的第 i 行(列)与第 j 行(列)互换位置
- $E_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$

- $E_{ij}(k)$ 表示 E 的第 i 行(列)的 k 倍加到第 j 行(列)
- $E_{ij}(k) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & k & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$

初等矩阵的性质

- $\begin{cases} E_i(k)^T = E_i(k) \\ E_{ij}^T = E_{ij} \\ E_{ij}(k)^T = E_{ji}(k) \end{cases}$
- $\begin{cases} E_i(k)^{-1} = \dfrac{1}{k} E_i(k) \\ E_{ij}^{-1} = E_{ij} \\ E_{ij}(k)^{-1} = E_{ij}(-k) \end{cases}$
- $\begin{cases} \left|E_i(k)\right| = k \\ \left|E_{ij}\right| = -1 \\ \left|E_{ij}(k)\right| = 1 \end{cases}$

Gauss-Jordan Elimination

- 若 A 是可逆矩阵, 存在有限个初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$, 满足 $A = P_1 P_2 \cdots P_s$, 且 $A^{-1} = P_s^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1}$
- $\begin{bmatrix} A & E \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} E & A^{-1} \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{bmatrix} E \\ A^{-1} \end{bmatrix}$

等价矩阵和矩阵的秩

等价矩阵

- 设 A, B 均为 $m \times n$ 矩阵, $\exists P_{m\times m}, Q_{n\times n}(P, Q\text{可逆}),\ s.t.\ PAQ = B$, 称 A, B 是等价矩阵, 记作 $A \cong B$
- 同型矩阵 A, B 等价的的充要条件: $r(A) = r(B)$
- P, Q 均为可逆矩阵 $\forall A_{m\times n}, \exists P, Q,\ s.t. PAQ = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ 其中 $P_{m\times m}, Q_{n\times n}$ 均为可逆矩阵, E_r 是 r 阶单位矩阵, 矩阵 $\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ 是秩为 r 矩阵的等价标准型

矩阵的秩

- 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, A 中最高阶非零子式的阶数称为矩阵 A的秩, 记作 $r(A)$
- $r(A) = k$ 充要条件: A 存在 k 阶非零子式, 且所有 $k+1$ 阶子式全为 0
- $r(A) = k$ 充要条件: A 的行(列)向量中存在 k 个线性无关的向量, 且任意 $k+1$ 个行(列)向量线性相关
- $r(A_{n\times n}) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆

矩阵的秩的性质

- A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$
- A, B 是 $m \times n$ 矩阵, $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$
- A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, 则 $r(A) + r(B) - n \leq r(AB)$
- 设 A 是 n 阶方阵

$$r(A^*) = \begin{cases} n & r(A) = n \\ 1 & r(A) = n-1 \\ 0 & r(A) < n-1 \end{cases}$$