随机事件和概率

1. 基本术语

1.1 随机试验

- 试验可以在相同条件下重复进行
- 试验的所有结果是明确可知道的, 并且不止一个
- 每一次试验出现哪一个结果, 事先并不确定

1.2 随机事件

- 每一次试验中可能出现也可能不出现的结果称为随机事件
- 在试验中一定发生的事件为必然事件, 一定不发生的事件为不可能事件

1.3 样本空间

- 随机试验的每一个可能的结果称为**样本点**, 记作 ω; 样本点的全体组成的几何称为**样本空间**, 记作 $\Omega \Rightarrow \Omega = \{\omega\}$
- 由一个样本点构成的事件为**基本事件**
- 随机事件 A 是由若干个基本事件组成 $\Rightarrow A \subset \Omega$

2. 事件的关系和运算

2.1 事件间关系

- 包含: 事件 A 发生, 事件 B 发生 $\Rightarrow A \subset B$
- 相等: $A \subset B, B \subset A \Rightarrow A = B$
- 相容: $AB \neq \varnothing$
- 互斥: $AB = \varnothing$
- 对立: $A \cup B = \Omega, A \cap B = \varnothing$

2.2 运算法则

- **交换律**: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- **结合律**: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- **分配律**: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- **De Morgan's Laws**: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

3. 概率定义

3.1 描述性定义

- 通常将随机事件 A 发生的可能性大小的度量(非负值)称为事件 A 发生的概率, 记作 $P(A)$

3.2 统计性定义

- 在相同条件下做重复实验, 事件 A 出现的次数 k 和总的试验次数 n 的比 $\frac{k}{n}$ 称为事件 A 在这 n 次试验中出现的频率, 当试验次数 n 足够大时, 频率将稳定于某个常数 p , n 越大, 频率偏离 p 的可能性越小, 这个常数 p 称为事件 A 发生的概率

3.3 公理化定义

设随机事件的样本空间为 Ω, 对于每一个事件 A 都有一个确定的实数 $P(A)$, 且事件函数 $P(*)$ 满足

- **非负性**: $P(A) \geq 0$
- **规范性**: $P(\Omega) = 1$
- **可列可加性**: 对于任意两个互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$

4. 古典概率型和几何概率型

4.1 古典概率型

- 样本空间只有有限个基本事件

- 每个基本事件都是等可能发生
  $$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

4.2 几何概率型

- 样本空间无限个基本事件
- 每个基本事件都是等可能发生
- 样本空间是一个可以度量的有界区域
  $$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega}$$

5. 概率论基本公式

5.1 性质和基本公式

- $0 \le P(A) \le 1, P(\varnothing) = 0, P(\Omega) = 1$
- $A \subset B \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A), P(B) \ge P(A)$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

5.2 条件概率公式

A, B 是两个任意事件, 如果 $P(A) > 0$, 称在 A 发生的条件下 B 发生的概率为条件概率, 记作 $P(B|A)$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

5.3 乘法公式

- $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个事件, 且
  $P(A_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n), P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$$

特别的, 当 $n = 2$ 时

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

5.4 全概率公式

完备事件组 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$, 满足 $\bigcup_{i=1}^n A_i=1, A_iA_j=\varnothing$, 对于任意事件 B

$$B=\bigcup_{i=1}^n A_iB, P(B)=\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

5.5 贝叶斯公式

完备事件组 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$, 满足 $\bigcup_{i=1}^n A_i=1, A_iA_j=\varnothing$, 对于任意事件 B

$$P(A_j|B)=\frac{P(A_jB)}{P(B)}=\frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum\limits_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}(j=1,2,\cdots,n)$$

6. 事件独立性和独立重复实验

6.1 事件的独立性

- **描述性定义**
  事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意一个事件 A_i 发生的概率不受其他 $n-1$ 个事件的影响, 称这 n 个事件相互独立
- **数学定义**
  A,B 为两个事件, 如果 $P(AB)=P(A)P(B)$, 称事件 A,B 相互独立

6.2 独立重复实验

如果各个试验的结果是相互独立的, 称这些试验是相互独立的, 试验序列 $\{E_1,E_2,\cdots,E_n\}$ 中任意两个试验 E_i,E_j, 在这两个试验中任意两个结果 A_{ip},A_{iq} 满足 $P(A_{ip}A_{jq})=P(A_{ip})P(A_{jq})$, 称试验序列相互独立