



LATEX *main*

Sun for morning, moon for night, and you forever.

作者：Lyshmily.Y & 木易

组织：Lyshmily.Y

时间：December 12, 2024

版本：V.2.0

邮箱：yjlpku.outlook.com & 845307723@qq.com



在没有结束前，总要做很多没有意义的事，这样才可以在未来某一天，用这些无
意义的事去堵住那些讨厌的缺口



目录

目录

A

1

第 1 部分 * 高数 (上)

第 1 章 预备知识	3
1.1 函数	3
1.1.1 初等函数	5
1.1.2 三角函数和反三角函数	5
1.1.3 特殊函数	7
1.2 函数的表示方法	9
1.2.1 显式表达	9
1.2.2 隐式表达	9
1.2.3 极坐标	9
1.2.4 参数方程	9
第 2 章 数列极限	11
2.1 数列极限	11
2.2 数列极限计算	12
2.2.1 定义法	12
2.2.2 归结原理	12
2.2.3 夹逼准则	12
2.2.4 单调有界准则	13
2.3 Exercise	13
第 3 章 函数极限和连续	23
3.1 函数极限	23

3.2 函数极限计算.....	24
3.2.1 无穷小(大)概念和比阶	24
3.3 连续和间断.....	27
第 4 章 一元微分学	28
4.1 一元微分学概念.....	28
4.2 一元微分学计算.....	29
4.3 一元微分学应用.....	31
4.3.1 几何应用	31
4.3.2 函数单调性 & 凹凸性 & 极值点 & 拐点.....	32
4.3.3 物理应用	35
第 5 章 中值定理	36
5.1 介值定理 & 零点定理	36
5.2 费马定理.....	37
5.3 罗尔定理.....	37
5.4 拉格朗日中值定理.....	37
5.5 柯西中值定理.....	38
5.6 泰勒公式.....	38
5.7 积分中值定理.....	38
5.8 达布定理.....	39
5.9 Exercise	40
5.9.1 零点问题	40
5.9.2 复合函数零点问题	47
5.9.3 罗尔定理 & 费马定理.....	48
5.9.4 原函数、导函数、高阶导数关系	51
5.9.5 复合函数构造问题	52
5.9.6 拉格朗日中值定理 & 柯西中值定理	57
5.9.7 双中值问题	59
5.9.8 泰勒公式	66
5.9.9 广义罗尔定理	74
第 6 章 一元积分学	78
6.1 不定积分.....	78
6.1.1 不定积分计算	79
6.2 定积分.....	89
6.3 变限积分.....	92
6.4 反常积分.....	92
6.5 一元积分学应用.....	94
6.5.1 几何应用	94



6.5.2 物理应用	96
------------------	----

2**第 2 部分 * 高数 (下)**

第 7 章 多元函数微分	111
7.1 多元函数微分概念	111
7.2 链式法则	113
7.3 隐函数存在定理	114
7.4 多元函数极值和最值	114
第 8 章 二重积分	117
8.1 二重积分概念和性质	117
8.2 二重积分的对称性	118
8.3 二重积分计算	119
第 9 章 常微分方程	122
9.1 一阶微分方程	123
9.1.1 可分离变量型微分方程	123
9.1.2 齐次型微分方程	124
9.1.3 一阶线性微分方程	124
9.1.4 伯努利方程	124
9.1.5 二阶可降阶微分方程	125
9.2 高阶线性微分方程	125
9.2.1 二阶常系数线性微分方程	125
9.2.2 欧拉方程	126
9.2.3 高阶常系数齐次线性微分方程	127
第 10 章 无穷级数	128
10.1 常数项级数	128
10.2 敛散性判别	129
10.2.1 正项级数判别	129
10.2.2 交错级数判别	131
10.2.3 一般项级数判别	131
10.2.4 常见级数敛散性推论	131
10.3 函数项级数	132
10.3.1 幂级数	133
10.3.2 幂级数收敛域	133
10.3.3 幂级数求和函数	134
10.3.4 重要展开式	135
10.3.5 函数展开成幂级数	136



10.4傅里叶级数	136
10.4.1三角函数集 Γ 的归一正交性	136
10.4.2周期函数的傅里叶级数	137
10.4.3任意对称区间中的傅里叶展开	138
10.4.4周期延拓	138
10.4.5逐点收敛性理论	139
第 11 章空间解析几何	140
11.1向量代数	140
11.2空间平面和直线	141
11.2.1平面	141
11.2.2直线	142
11.3空间曲面和曲线	143
11.3.1空间曲线的切线和法平面	148
11.3.2空间曲面的切平面和法线	149
11.4场论初步	150
11.4.1方向导数	150
11.4.2梯度	150
11.4.3散度和旋度	151
第 12 章三重积分	152
12.1三重积分定义和性质	152
12.2三重积分对称性	153
12.3三重积分计算方法	154
12.4三重积分应用	156
第 13 章第一型曲线和曲面积分	158
13.1第一型曲线积分	158
13.1.1第一型曲线积分定义和性质	158
13.1.2第一型曲线积分的对称性	159
13.1.3第一型曲线积分计算	160
13.2第一型曲面积分	161
13.2.1第一型曲面积分定义和性质	161
13.2.2第一型曲面积分的对称性	162
13.2.3第一型曲面积分计算	163
13.3第一型曲线积分和曲面积分应用	163
第 14 章第二型曲线和曲面积分	166
14.1第二型曲线积分	166
14.1.1第二型曲线积分定义和性质	166
14.1.2第二型曲线积分计算	167



14.2 第二型曲面积分	168
14.2.1 第二型曲面积分定义和性质	168
14.2.2 第二型曲面积分计算	169

3

第3部分 * 线代

第15章 行列式	172
15.1 行列式的定义和性质	172
15.2 行列式展开定理	174
15.2.1 余子式	174
15.2.2 代数余子式	174
15.2.3 行列式展开定理	174
15.3 几类特殊的行列式	175
15.3.1 上下三角行列式	175
15.3.2 副三角行列式	175
15.3.3 拉普拉斯展开式	176
15.3.4 范德蒙行列式	176
15.4 行列式计算	176
15.5 Cramer Rule	180
第16章 矩阵	182
16.1 矩阵的定义和运算	182
16.1.1 矩阵定义和线性运算	182
16.1.2 矩阵乘法和幂	184
16.2 矩阵的逆和伴随矩阵	185
16.2.1 矩阵的逆	185
16.2.2 伴随矩阵	185
16.3 初等变换和初等矩阵	186
16.4 等价矩阵和矩阵的秩	189
第17章 向量组	193
17.1 向量和向量组的线性相关性	193
17.1.1 向量的定义和运算	193
17.1.2 向量组的线性相关性	195
17.2 极大线性无关组和向量组的秩	201
17.3 等价向量组	202
17.4 向量空间	202
第18章 线性方程组	204
18.1 具体型方程组	204
18.1.1 齐次方程组	204



18.1.2非齐次方程组	205
18.2两个方程组的公共解	207
18.3同解方程组	208
第 19 章 特征值和特征向量	209
19.1特征值和特征向量定义	209
19.2相似	213
19.2.1矩阵的相似对角化	214
19.2.2实对称矩阵的相似对角化	215
第 20 章 二次型	218
20.1二次型定义	218
20.2合同	220
20.3二次型的标准型和规范型	220
20.4正定二次型	221

第 21 章 随机事件和概率	224
21.1事件的关系和运算	224
21.2概率定义	225
21.3古典概率型和几何概率型	225
21.4概率论基本公式	226
21.5事件独立性和独立重复实验	227
第 22 章 一维随机变量及其分布	228
22.1一维随机变量	228
22.2一维离散型随机变量	229
22.3一维连续型随机变量	230
22.4一维随机变量函数的分布	232
第 23 章 多维随机变量及其分布	233
23.1 n 维随机变量及其分布函数	233
23.2二维离散型随机变量	234
23.3二维连续型随机变量	236
23.3.1常见二维连续型随机变量分布	237
23.4独立性	238
23.5多维随机变量函数的分布	238
第 24 章 随机变量的数字特征	244
24.1一维随机变量的数字特征	244
24.2二维随机变量的数字特征	246
24.3独立性与相关性判定、切比雪夫不等式	247



第 25 章大数定理和中心极限定理	249
25.1 依概率收敛	249
25.2 大数定理	249
25.3 中心极限定理	250
第 26 章数理统计	251
26.1 总体和样本	251
26.2 统计量及其分布	251
26.3 三大分布	252
26.4 参数的点估计	255
26.5 参数的区间估计	256
26.6 假设检验	257

5**第 5 部分 * 每日一题 I**

第 27 章 January	261
27.1 Week I	261
27.2 Week II	269
27.3 Week III	276
27.4 Week IV	282
第 28 章 February	292
28.1 Week I	292
28.2 Week II	299
28.3 Week III	306
28.4 Week IV	313
第 29 章 March	321
29.1 Week I	321
29.2 Week II	327
29.3 Week III	330
29.4 Week IV	335
第 30 章 April	346
30.1 Week I	346
30.2 Week II	351
30.3 Week III	358
30.4 Week IV	364
第 31 章 May	373
31.1 Week I	373
31.2 Week II	379
31.3 Week III	387



31.4Week IV	395
第 32 章 June	409
32.1Week I	409
32.2Week II	415
32.3Week III	422
32.4Week IV	430

6**第 6 部分 * 每日一题 II**

第 33 章 July	446
33.1Week I	446
33.2Week II	455
33.3Week III	464
33.4Week IV	475
第 34 章 August	487
34.1Week I	487
34.2Week II	496
34.3Week III	506
34.4Week IV	514
第 35 章 September	524
35.1Week I	524
35.2Week II	530
35.3Week III	538
35.4Week IV	545
第 36 章 October	558
36.1Week I	558
36.2Week II	566
36.3Week III	574
36.4Week IV	581
第 37 章 November	588
37.1Week I	588
37.2Week II	591
37.3Week III	594
37.4Week IV	597
第 38 章 December	602
38.1Week I	602
38.2Week II	605
38.3Week III	608



38.4Week IV	611
-------------------	-----

7

第 7 部分 * Summary

第 39 章 Summary	618
39.1 柯西收敛准则	618
39.2 双曲函数	620
39.3 两类欧拉积分	621
39.4 多项式函数极值点和拐点	622
39.5 阿达玛不等式	626
39.6 特殊曲线	627
39.7 谱分解定理	630





第一部分
高数 (上)



第1部分目录

第1章 预备知识	3
1.1 函数	3
1.2 函数的表示方法	9
第2章 数列极限	11
2.1 数列极限	11
2.2 数列极限计算	12
2.3 Exercise	13
第3章 函数极限和连续	23
3.1 函数极限	23
3.2 函数极限计算	24
3.3 连续和间断	27
第4章 一元微分学	28
4.1 一元微分学概念	28
4.2 一元微分学计算	29
4.3 一元微分学应用	31
第5章 中值定理	36
5.1 介值定理 & 零点定理	36
5.2 费马定理	37
5.3 罗尔定理	37
5.4 拉格朗日中值定理	37
5.5 柯西中值定理	38
5.6 泰勒公式	38
5.7 积分中值定理	38
5.8 达布定理	39
5.9 Exercise	40
第6章 一元积分学	78
6.1 不定积分	78
6.2 定积分	89
6.3 变限积分	92
6.4 反常积分	92
6.5 一元积分学应用	94





第1章 预备知识

内容提要

- 函数定义和性质
- 基本不等式
- 柯西不等式
- 三角函数和反三角函数
- 特殊函数

1.1 函数

定义 1.1.1 (函数)

1. 函数定义:

X, Y 是给定的两个集合, 若对于任意 $x \in X$, 存在法则 f , 使得唯一的 $y = f(x)$ 满足 $y \in Y$, 则称 f 为从 X 到 Y 的一个函数, 记为 $f : X \rightarrow Y$, 其中 X 称为定义域, $f(x)(x \in X)$ 称为值域

2. 函数的三要素: 定义域、对应法则和值域

定义 1.1.2 (函数的基本性质)

1. 单射: 若对于任意 $x_1, x_2 \in X$, 若 $x_1 \neq x_2$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$
2. 满射: 若对于任意 $y \in Y$, 存在 $x \in X$, 使得 $f(x) = y$
3. 双射: 若 f 既是单射又是满射

定义 1.1.3 (函数基本运算)

1. 基本四则运算
2. 复合运算
3. 反函数运算



性质 1. 函数四大性质

- 有界性
- 奇偶性: $\begin{cases} \text{奇函数: } f(-x) = -f(x) \\ \text{偶函数: } f(-x) = f(x) \end{cases}$
- 周期性: $f(x+T) = f(x)$
- 单调性: $\forall x_1, x_2 \in I (x_1 \neq x_2), \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > (<) 0, f(x)$ 单调递增 (减)

推论 1.1.1 (奇偶性推论)

任意一个定义在 $[-l, l]$ 上的函数 $f(x)$ 均可以写成一个奇函数和一个偶函数的和 $f(x) = h(x) + g(x)$, 其中 $h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ 是偶函数, $g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ 是奇函数

推论 1.1.2 (周期性、中心对称性、轴对称性)

- (1). $f(x)$ 有对称中心 (a, c) , 且关于直线 $x = b$ 轴对称, 我们可以推出 $f(x)$ 的一个周期 $T = 4|b - a|$.
- (2). $f(x)$ 有两个对称中心 (a, c) 和 (b, c) , 我们可以推出 $f(x)$ 的一个周期 $T = 2|b - a|$.
- (3). $f(x)$ 有两个对称轴直线 $x = a$ 和直线 $x = b$, 我们可以推出 $f(x)$ 的一个周期 $T = 2|b - a|$.

证明

(1).

$$\begin{cases} f(2a-x) + f(x) = 2c \\ f(2b-x) = f(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(2a-x) + f(2b-x) = 2c \\ f(2a-2b+x) + f(x) = 2c \end{cases} \rightarrow f(x) = f(x+4a-4b)$$

(2).

$$\begin{cases} f(2a-x) = f(2b-x) \\ f(2a-2b+x) = f(x) \end{cases} \rightarrow f(x) = f(x+2a-2b)$$

(3).

$$\begin{cases} f(2a-x) = f(x) \\ f(2b-x) = f(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(2a-x) = f(2b-x) \\ f(2a-2b+x) = f(x) \end{cases} \rightarrow f(x) = f(x+2a-2b)$$



1.1.1 初等函数

定义 1.1.4 (初等函数)

初等函数是指可以用有限次基本初等函数和有限次代数运算得到的函数, 六种基本初等函数:

1. 常数函数: $y = C$
2. 幂函数: $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^*$
3. 指数函数: $y = a^x, a > 0, a \neq 1$
4. 对数函数: $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$
5. 三角函数: $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$
6. 反三角函数: $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \cot^{-1}(x), y = \sec^{-1}(x), y = \csc^{-1}(x)$



1.1.2 三角函数和反三角函数

定理 1.1.1 (积化和差 & 和差化积 & 倍角公式)

积化和差公式:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

和差化积公式:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

倍角公式:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$



$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} & \cos 2\alpha &= \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \\ \sin 3\alpha &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha & \cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha\end{aligned}$$



定义 1.1.5 (反三角函数)

1. $\arcsin x$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
2. $\arccos x$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[0, \pi]$
3. $\arctan x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

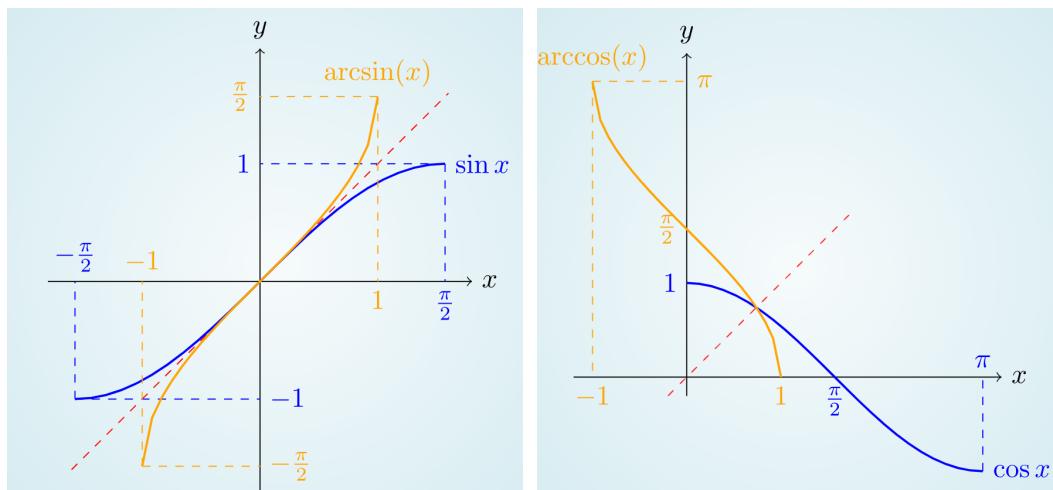
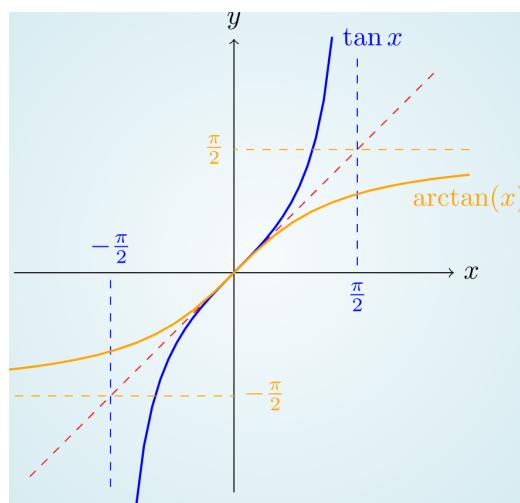
(a) $\arcsin(x)$ & $\sin(x)$ (b) $\arccos(x)$ & $\cos(x)$ (c) $\arctan(x)$ & $\tan(x)$

图 1.1: 反三角函数图像



1.1.3 特殊函数

定义 1.1.6 (特殊函数)

1. 阶乘函数:

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1, (2n)!! = 2^n \cdot n!, 0! = 1$$

2. 二项式系数:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, (a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

3. 绝对值函数:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

4. 符号函数:

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

5. 取整函数:

$$f(x) = [x], x - 1 < [x] \leq x, \lim_{x \rightarrow 0^+} = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} = -1$$

6. 分段函数:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in D_1 \\ f_2(x) & x \in D_2 \\ \dots \end{cases}$$

7. 黎曼函数:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & p, q \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q} \in (0, 1) \\ 0 & x \notin \mathbb{Q}, x = 0, 1 \end{cases}$$

8. 狄利克雷函数:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

定理 1.1.2 (平均值不等式 $a_i > 0$)

平方平均值:

$$Q_n = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{n}}$$



算术平均值:

$$A_n = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}$$

几何平均值:

$$G_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$$

调和平均值:

$$H_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{a_i}}$$

平均值不等式:

$$Q_n \geq A_n \geq G_n \geq H_n, \text{ 当且仅当 } a_1 = a_2 = \dots = a_n \text{ 等号成立}$$



定理 1.1.3 (柯西不等式)

二维形式:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2, \text{ 当且仅当 } ad = bc \text{ 时等号成立}$$

n 维形式:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right), \text{ 当且仅当 } \frac{a_i}{b_i} = c \text{ 时等号成立}$$

向量形式:

$$(\alpha, \beta)^2 \leq (\alpha, \alpha)(\beta, \beta)$$



定理 1.1.4 (重要不等式)

1. $\sin x < x < \tan x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$ $\arctan x < x < \arcsin x, x \in [0, 1]$
2. $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$ $x < \tan x < \frac{4}{\pi}x, x \in (0, \frac{\pi}{4})$
3. $e^x \geq x + 1, x \in \mathbb{R}$ $x - 1 \geq \ln x, x \in (0, +\infty)$
4. $\frac{1}{1+x} < \ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$



定理 1.1.5 (重要公式)

1. $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$
2. $(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ $(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$



$$3. \quad a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$4. \quad a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}), n \in \{2k + 1 | k \in \mathbb{N}\}$$



1.2 函数的表示方法

1.2.1 显式表达

定义 1.2.1 (显示表达)

$y = f(x)$ 初等函数都是显性表达



1.2.2 隐式表达

定义 1.2.2 (隐式表达)

$f(x, y) = 0$ 一般不能用 x 表示 y , 也不能用 y 表示 x



1.2.3 极坐标

定义 1.2.3 (极坐标)

极坐标系是平面直角坐标系的一种推广, 它是由一个原点 O 和一个射线 Ox 组成的, 其中 O 称为极点, Ox 称为极轴, 任意一点 P 到极点 O 的距离 r 叫做点 P 的极径, 点 P 到极轴的角 θ 叫做点 P 的极角, 记为 $P(r, \theta)$



定义 1.2.4 (重要极坐标方程)

1. 圆方程: $r = a, r = a \sin \theta, r = a \cos \theta$
2. 心形线方程: $r = a(1 \pm \cos \theta), r = a(1 \pm \sin \theta)$
3. 阿基米德螺线方程: $r = a\theta$
4. 三叶玫瑰线方程: $r = a \sin 3\theta, r = a \cos 3\theta$
5. 伯努利双扭线方程: $r^2 = a^2 \cos 2\theta, r^2 = a^2 \sin 2\theta$



1.2.4 参数方程

定义 1.2.5 (参数方程)

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$$



定义 1.2.6 (重要参数方程)

1. 摆线方程: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$
2. 星形线方程: $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$

**注**

- 双曲函数和反双曲函数的定义和性质 **def : 39.2.1**
- 常见曲线极坐标和参数方程 **def : 39.6.1**





第 2 章 数列极限

内容提要

- 数列极限定义和性质
- 夹逼准则
- 归结原理
- 单调有界准则

2.1 数列极限

定义 2.1.1 (数列极限)

设 x_n 是一数列, 若存在常数 a , $\forall \epsilon > 0$, $\exists N_0 > 0$, 当 $n > N_0$ 时, $|x_n - a| < \epsilon$ 恒成立, 常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限或者说数列 $\{x_n\}$ 趋近于 a

推论 2.1.1 (唯一性)

若极限存在, 则极限唯一

推论 2.1.2 (有界性)

若数列 $\{x_n\}$ 的极限 a 存在, 则数列 $\{x_n\}$ 有界

推论 2.1.3 (保号性)

若数列 $\{x_n\}$ 的极限 $a > 0(a < 0)$, 则存在正整数 N_0 , 当 $n > N_0$ 时, $x_n > 0(x_n < 0)$, 取 $\epsilon = \pm a$ 即可

注

- 若数列的任意子列发散, 数列极限不存在
- 若数列的任意两个子列极限存在但不相等, 数列极限不存在



推论 2.1.4 (数列极限)

- 如果数列从某项起有 $x_n \geq 0$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $a \geq 0$
- 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |A|$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1, & a \neq 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \text{不一定存在}, & a = 0 \end{cases}$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a \rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \infty, & |a| > 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0, & |a| < 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \text{不确定}, & |a| = 1 \end{cases}$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在且 $x_n > 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$



2.2 数列极限计算

2.2.1 定义法

定义 2.2.1 (极限的四则运算)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}, b \neq 0$



2.2.2 归结原理

定义 2.2.2 (归结原理)

设函数 $f(x)$ 在去心邻域 $\dot{U}(a, \delta)$ 上有定义, 那么 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ 的充分必要条件是: 对与一切序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \dot{U}(a, \delta)$, 只要 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 就有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$



2.2.3 夹逼准则

定义 2.2.3 (夹逼准则)

设数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ 满足 $x_n \leq y_n \leq z_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$, 条件可变为 $n > N_0$ 时, $x_n \leq y_n \leq z_n$ (有限无关性)



推论 2.2.1 (夹逼准则)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_1^n + u_2^n + u_3^n + \cdots + u_m^n} = \max\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$$

证明

令 $a = \max\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$

$$a^n \leq u_1^n + u_2^n + u_3^n + \cdots + u_m^n \leq ma^n$$

夹逼准则:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{(ma^n)} = a = \max\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$$

2.2.4 单调有界准则

定义 2.2.4 (单调有界准则)

单调有界数列必有极限 the : 39.1.1



2.3 Exercise

命题 2.3.1

设 $x_1 = a \geq 0, y_1 = b \geq 0, a \leq b, x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} (n = 1, 2, \dots)$, 证明:
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$



解

$$x_1 = a \geq 0, y_1 = b \geq 0, x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

数学归纳法:

$$x_n \geq 0, y_n \geq 0$$

基本不等式:

$$\frac{x_n + y_n}{2} \geq \sqrt{x_n y_n} \Rightarrow y_{n+1} \geq x_{n+1}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \geq \sqrt{x_n x_n} = x_n \\ y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \leq \frac{y_n + y_n}{2} = y_n \end{cases}$$

 $\{x_n\}$ 单调递增, $\{y_n\}$ 单调递减, $x_1 \leq x_n \leq y_n \leq y_1$ 

$\{x_n\}, \{y_n\}$ 单调且有界, 数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 均有极限

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{ab} \\ b = \frac{a+b}{2} \end{cases} \Rightarrow a = b$$

综上所述, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$

命题 2.3.2

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, 且 $|q| < 1$, 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

解

考虑数列 $\{|a_n|\}$:

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \\ \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| \geq \left| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| - |q| \right| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, n > M, \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, n > M, \left| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| - |q| \right| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |q|$$

取 $\varepsilon > 0, \varepsilon + |q| < 1$

$$\exists N > 0, n > N, \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - |q| \right| < \varepsilon \Rightarrow n > N, \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \varepsilon + |q| < 1$$

$$\begin{cases} |a_n| \geq 0 \\ |a_n| = \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| \cdots \left| \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \right| \cdot |a_{N+1}| < (|q| + \varepsilon)^{n-N-1} \cdot |a_{N+1}| \end{cases}$$

夹逼准则:

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (|q| + \varepsilon)^{n-N-1} \cdot |a_{N+1}| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 0 \\ \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, n > N, |a_n| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

综上所述, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

命题 2.3.3

设 $f_n(x) = 1 - (1 - \cos x)^n (n = 1, 2, \dots)$

(1). 证明: 方程 $f_n(x) = \frac{1}{2}$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内有且只有一个实数根 x_n

(2). 设 $x_n \in (0, \frac{\pi}{2})$, 满足 $f_n(x) = \frac{1}{2}$, 证明:

$$\arccos \frac{1}{n} < x_n < \frac{\pi}{2}, \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$$

解

构造辅助函数: $G_n(x) = \frac{1}{2} - (1 - \cos x)^n$

(1).

$$G'_n(x) = -n \sin x (1 - \cos x)^{n-1}$$



$x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $G'_n(x) < 0$, $G_n(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 单调递减

$$G_n(0) = \frac{1}{2} > 0, G_n(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0$$

零点定理: $\exists! x_n \in (0, \frac{\pi}{2})$, s.t. $G_n(x_n) = 0$

(2).

$$\begin{cases} G_n(\arccos \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} - (1 - \frac{1}{n})^n \\ G_n(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0 \end{cases}$$

构造辅助函数: $h(x) = \frac{1}{2} - e^{x \ln(1 - \frac{1}{x})}$, $x \geq 2$

$$\begin{cases} p(x) = \ln(1 - \frac{1}{x}) + \frac{1}{x-1}, x \geq 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = 0 \\ p'(x) = \frac{-1}{x(x-1)^2} < 0 \end{cases} \Rightarrow h'(x) = -e^{x \ln(1 - \frac{1}{x})} \left[\ln(1 - \frac{1}{x}) + \frac{1}{x-1} \right] < 0$$

$G_n(\arccos \frac{1}{n})$ 单调递减, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(\arccos \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} > 0$ 零点定理:

$$\exists! x_n \in (\arccos \frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}), \text{s.t. } f(x_n) = \frac{1}{2}$$

夹逼定理:

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \arccos \frac{1}{n} = \frac{\pi}{2} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$$

命题 2.3.4

设 $x_1 > 0$, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = \ln(e^{x_n} - 1) - \ln x_n$, 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在并求其值



解

$$x_{n+1} = \ln(e^{x_n} - 1) - \ln x_n \Rightarrow e^{x_{n+1}} = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n}$$

构造辅助函数: $f(x) = e^x - x - 1$, $f'(x) = e^x - 1$

$$\begin{cases} x > 0, f'(x) > 0 \\ f(x) > f(0) = 0 \\ \frac{e^x - 1}{x} > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 = \ln(\frac{e^{x_1} - 1}{x_1}) > 0 \end{cases}$$

数学归纳法: $x_n > 0$, 数列 $\{x_n\}$ 有下界

拉格朗日中值定理:

$$e^{x_{n+1}} = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = e^\xi, \xi \in (0, x_n) \Rightarrow x_{n+1} = \xi < x_n$$



数列 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界, 单调有界准则: 数列 $\{x_n\}$ 极限必定存在

不妨设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$:

$$e^a = \frac{e^a - 1}{a} \Rightarrow a = 0$$

综上所述, 数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 其值为 0

命题 2.3.5

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $|f'(x)| < 1$, 当 $x \in [a, b]$ 时, 有 $a < f(x) < b$, $F(x) = \frac{x + f(x)}{2}$,

证明:

(1). $\exists! x^* \in (a, b)$, s.t. $F(x^*) = x^*$

(2). 对 $x_0 \in [a, b]$, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = F(x_n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x^*$



解

(1).

构造辅助函数: $G(x) = F(x) - x = \frac{f(x) - x}{2}$, $G'(x) = \frac{f'(x) - 1}{2}$

$|f'(x)| < 1 \Rightarrow G'(x) < 0 \Rightarrow G(x)$ 单调递减

$$\begin{cases} G(a) = \frac{f(a)-a}{2} > 0 \\ G(b) = \frac{f(b)-b}{2} < 0 \end{cases} \Rightarrow G(a)G(b) < 0$$

零点定理:

$\exists! x^* \in (a, b)$, s.t. $G(x^*) = 0 \Rightarrow \exists! x^* \in (a, b)$, s.t. $F(x^*) = x^*$

(2).

$F'(x) = \frac{1 + f'(x)}{2} \geq 0 \Rightarrow F(x)$ 单调递增

(i). $x_0 = x^*, x_n = x^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x^*$

(ii). $x_0 > x^*, G(x^*) > G(x_0) \Rightarrow F(x_0) < x_0 \Rightarrow x_1 < x_0$

1. 当 $n = 1$ 时, $x_1 < x_0$

2. 假设当 $n = k$ ($k \geq 1$) 时, $x_k < x_{k-1}$ 成立

3. 当 $n = k + 1$ 时, $F(x_k) < F(x_{k-1}) \Rightarrow x_{k+1} < x_k$

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2} \\ x_1 \in [a, b] \\ f(x_n) \in (a, b) \end{cases} \Rightarrow x_n \in [a, b]$$

数列 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界, 极限必定存在

不妨设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = A$



$$A = \frac{A + f(A)}{2} \Rightarrow F(A) = A \Rightarrow A = x^*$$

(iii). $x_0 < x^*, G(x^*) < G(x_0) \Rightarrow F(x_0) > x_0 \Rightarrow x_1 > x_0$

1. 当 $n = 1$ 时, $x_1 > x_0$
2. 假设当 $n = k (k \geq 1)$ 时, $x_k > x_{k-1}$ 成立
3. 当 $n = k + 1$ 时, $F(x_k) > F(x_{k-1}) \Rightarrow x_{k+1} > x_k$

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2} \\ x_1 \in [a, b] \Rightarrow x_n \in [a, b] \\ f(x_n) \in (a, b) \end{cases}$$

数列 $\{x_n\}$ 单调递增且有上界, 极限必定存在

不妨设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = A$

$$A = \frac{A + f(A)}{2} \Rightarrow F(A) = A \Rightarrow A = x^*$$

综上所述, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x^*$

命题 2.3.6

(1). 设 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数, 证明:

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k), \quad k = 1, 2, \dots$$

(2). 证明: $\ln(1+n) \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \leq 1 + \ln n$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln n}$



解

(1).

$f(x)$ 单调减少且非负:

$$0 \leq f(k+1) \leq f(x) \leq f(k), \quad x \in [k, k+1]$$

不等式在 $[k, k+1]$ 上同时求定积分:

$$\int_k^{k+1} f(k+1) dx \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \int_k^{k+1} f(k) dx \Rightarrow f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k)$$

(2).



构造辅助函数 $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减且非负:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{1}{x} dx \leq 1 \\ \frac{1}{3} \leq \int_2^3 \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{2} \\ \dots \\ \frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(1+n) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq 1 + \ln n \end{cases}$$

$$\ln(1+n) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$$

夹逼定理:

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+n)}{\ln n} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln n} = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln n} = 1$$

命题 2.3.7

设 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$, 证明: $f(x)$ 在 (a, b) 内有最大值



解

取 $M = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

极限定义:

$$\begin{cases} \exists a < c < \frac{a+b}{2}, x \in (a, c), s.t. f(x) \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \exists \frac{a+b}{2} < d < b, x \in (d, b), s.t. f(x) \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \exists \xi \in [c, d], \forall x \in [c, d], f(\xi) \geq f(x) \\ f(\xi) \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ x \in (a, c], f(x) < f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(\xi) \\ x \in [d, b), f(x) < f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(\xi) \end{cases}$$

综上所述, $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有最大值 $f(\xi)$

引理 2.3.1 (不单调数列极限)

1. 压缩映射原理: 从定义出发, 证明: $|x_n - a|$ 极限为 0
2. 柯西列: $\sum_{n=1}^{+\infty} (x_{n+1} - x_n)$, 证明这个级数收敛即可证明出数列 $\{x_n\}$ 极限存在
3. 奇数项和偶数项极限存在且相等: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = A$



命题 2.3.8

设 $2x_1 = 1, 2x_{n+1} = 1 - x_n^2$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$



解

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{8}, x_3 = \frac{55}{128} \Rightarrow x_1 > x_3 > x_2$$

数列 $\{x_n\}$ 不单调, 不能使用单调有界准则来判断

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1-x_n^2}{2} \\ x_1 = \frac{1}{2} \in (0, 1) \\ x \in (0, 1), 1-x^2 \in (0, 1) \end{cases} \Rightarrow x_n \in (0, \frac{1}{2})$$

压缩映射原理

不妨设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a (a > 0)$, 对 $2x_{n+1} = 1 - x_n^2$ 两边同时取极限:

$$2a = 1 - a^2 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1-a^2}{2} \\ a = \sqrt{2}-1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - a| &= \left| \frac{1-x_n^2}{2} - \frac{1-a^2}{2} \right| \\ &= \left| \frac{x_n^2 - a^2}{2} \right| = \frac{(x_n + a)}{2} |x_n - a| \\ &\leq \frac{2\sqrt{2}-1}{4} |x_{n-1} - a| \\ &\leq \dots \\ &\leq \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{4} \right)^{n-1} |x_1 - a| \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{4} \right)^{n-1} = 0$$

夹逼定理: $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - a| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a = \sqrt{2}-1$

柯西列

构造无穷级数: $\sum_{n=1}^{+\infty} (x_{n+1} - x_n)$



$$\begin{aligned}
 |x_{n+1} - x_n| &= \left| \frac{x_n^2 - x_{n-1}^2}{2} \right| = \frac{x_n + x_{n-1}}{2} |x_n - x_{n-1}| \\
 &\leq \frac{1}{2} |x_n - x_{n-1}| \\
 &\leq \dots \\
 &\leq \frac{1}{2^{n-1}} |x_2 - x_1|
 \end{aligned}$$

级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛

比较判别法:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_{n+1} - x_n| \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (x_{n+1} - x_n) \text{ 收敛}$$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (x_{k+1} - x_k) = A \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} - x_1 = A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \\ 2a = 1 - a^2 \Rightarrow a = \sqrt{2} - 1 \\ a > 0 \end{cases}$$

命题 2.3.9

设 $x_1 = 1, x_n = 1 + \frac{1}{1 + x_{n-1}}$, ($n = 1, 2, \dots$), 证明极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在并求出此极限



解

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = \frac{7}{5}, x_4 = \frac{17}{12} \Rightarrow \begin{cases} x_1 < x_3 \\ x_2 > x_4 \\ x_n > 0 \\ x_n \in (1, 2) \end{cases}$$

1. 当 $n = 1, x_1 < x_3, x_2 > x_4$
2. 假设 $n = k$ 时, $x_{2k-1} < x_{2k+1}, x_{2k} > x_{2k+2}$
3. 当 $n = k + 1$ 时:

$$\begin{cases} x_{2k+3} = 1 + \frac{1}{1 + x_{2k+2}} > 1 + \frac{1}{1 + x_{2k}} = x_{2k+1} \\ x_{2k+4} = 1 + \frac{1}{1 + x_{2k+3}} < 1 + \frac{1}{1 + x_{2k+1}} = x_{2k+2} \end{cases}$$

$\{x_{2k-1}\}$ 单调递增且有上界, $\{x_{2k}\}$ 单调递减且有下界



单调有界准则:

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = A (A > 0) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = B (B > 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 + \frac{1}{1+B} \\ B = 1 + \frac{1}{1+A} \end{cases} \Rightarrow A = B = \sqrt{2}$$

命题 2.3.10

设 $x_1 = 1, 2x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n^2 + \frac{1}{n^2}}, (n = 1, 2, \dots)$, 证明极限数列 $\{x_n\}$ 收敛.



解

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ 2x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n^2 + \frac{1}{n^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{n+1} > x_n \\ x_n \geq 1 \end{cases}$$

令

$$\begin{cases} a = \sqrt{x_n^2 + \frac{1}{n^2}} \\ b = x_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{1}{n^2} \\ a + b > 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{\sqrt{x_n^2 + \frac{1}{n^2}} - x_n}{2} \\ &= \frac{a - b}{2} \\ &= \frac{a^2 - b^2}{2(a + b)} \\ &< \frac{1}{4n^2} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (x_{n+1} - x_n) < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2}$$

级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2}$ 收敛

比较判别法:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (x_{n+1} - x_n) \text{ 收敛} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} - x_1 = A$$

综上所述, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在

命题 2.3.11

设 $x_0 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{x_n^3 + 4}, (n = 0, 1, 2, \dots)$, 证明极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在并求出此极限



解



$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{1}{x_n^3 + 4} \end{cases} \Rightarrow x_n \in (0, 1)$$

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= \left| \frac{1}{x_n^3 + 4} - \frac{1}{x_{n-1}^3 + 4} \right| \\ &= \frac{|x_n^3 - x_{n-1}^3|}{(x_n^3 + 4)(x_{n-1}^3 + 4)} \\ &= \frac{|x_n^2 + x_{n-1}^2 + x_n x_{n-1}|}{(x_n^3 + 4)(x_{n-1}^3 + 4)} |x_n - x_{n-1}| \\ &< \frac{3}{16} |x_n - x_{n-1}| \\ &< \dots \\ &< \left(\frac{3}{16}\right)^n |x_1 - x_0| \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n - x_{n-1}| < \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^n |x_1 - x_0|$$

级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^n |x_1 - x_0|$ 收敛

比较判别法:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n - x_{n-1}| \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n - x_{n-1}| \text{ 收敛} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - x_0 \text{ 存在}$$

不妨设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A (A > 0)$:

$$A = \frac{1}{A^3 + 4} \Rightarrow A^4 + 4A - 1 = 0$$

A 是方程 $x^4 + 4x - 1 = 0$ 的唯一正根





第3章 函数极限和连续

内容提要

- 函数极限定义和性质
- 洛必达法则
- 无穷小概念和比阶
- 连续和间断

3.1 函数极限

定义 3.1.1 (函数极限)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 内有定义, 如果存在常数 A , 对于任意给定的正数 ϵ , 总存在正数 δ , 使得当 x 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \epsilon$, 那么常数 A 是当 x 趋于 x_0 时函数 $f(x)$ 的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \xi > 0, x \in (x_0 - \xi, x_0) \cup (x_0, x_0 + \xi), |f(x) - A| < \epsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

定义 3.1.2 (单侧极限)

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左(右)邻域内有定义, 如果存在常数 A , 对于任意给定的正数 ϵ , 总存在正数 δ , 使得当 x 满足不等式 $0 < x - x_0 < \delta$ ($0 < x_0 - x < \delta$) 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \epsilon$, 那么常数 A 是当 x 趋于 x_0 时函数 $f(x)$ 的左(右)极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A (\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A)$$

定义 3.1.3 (无穷远极限)

无穷远处极限(双侧, 单侧只取一边): $f(x)$ 在 $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$ 上有定义, $\forall \epsilon > 0, \exists A > 0$, 当 $|x| > A$ 时, $|f(x) - l| < \epsilon$, 我们称 l 是当 x 趋于无穷远时函数 $f(x)$ 的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$$
定义 3.1.4 (极限发散)

1. 震荡发散: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\frac{1}{x})$ 反复震荡
2. 左右极限存在但不相等: $\lim_{x \rightarrow 0} [x]$
3. 广义收敛: $f(x)$ 在 $x = a$ 的去心邻域 $\mathring{U}(a, \delta)$ 上有定义, $\forall X > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, $|f(x)| > X$, 则称 $f(x)$ 在 $x = a$ 处广义收敛

性质 1. 唯一性

若极限存在, 则极限唯一

性质 1. 局部有界性

若函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \exists M > 0, \delta > 0$, s.t. $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta), |f(x)| \leq M$

性质 1. 局部保号性

若函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > (<)0, \exists \delta > 0$, s.t. $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta), f(x) > (<)0$

3.2 函数极限计算**3.2.1 无穷小(大)概念和比阶****定义 3.2.1 (无穷小(大))**

1. 无穷小: 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 内有定义, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 那么称函数 $f(x)$ 是当 x 趋于 x_0 时的无穷小
2. 无穷大: 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 内有定义, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 那么称函数 $f(x)$ 是当 x 趋于 x_0 时的无穷大



定义 3.2.2 (无穷小比阶)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

1. 等价无穷小: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, 记作 $f(x) \sim g(x)$
2. 同阶无穷小: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = k (k \neq 0)$, 记作 $f(x) \approx g(x)$
3. 高阶无穷小: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, 记作 $f(x) = o(g(x))$
4. 低阶无穷小: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, 记作 $g(x) = O(f(x))$



推论 3.2.1 (等价无穷小)

1. $x \rightarrow 0, x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(x+1) \sim e^x - 1$
2. $x \rightarrow 0, \sin x \sim x - \frac{x^3}{6}, \arcsin x \sim x + \frac{x^3}{6}, \tan x \sim x + \frac{x^3}{3}, \arctan x \sim x - \frac{x^3}{3}, \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$
3. $x \rightarrow 0, (1+x)^a - 1 \sim ax, a^x - 1 \sim x \ln a$



定理 3.2.1 (洛必达法则)

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $x = a$ 的某去心邻域内可导 (a 可以为 ∞ , 邻域也可以是单侧的), 且 $g'(a) \neq 0$, 满足:(1) 或 (2)

$$(1). \underset{0}{\underset{x \rightarrow a}{\lim}} f(x) = \underset{x \rightarrow a}{\lim} g(x) = 0$$

$$(2). \underset{\infty}{\underset{x \rightarrow a}{\lim}} f(x) = \underset{x \rightarrow a}{\lim} g(x) = \infty$$

如果 $\underset{x \rightarrow a}{\lim} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l (l \text{ 可以是实数或者 } \infty) \Rightarrow \underset{x \rightarrow a}{\lim} \frac{f(x)}{g(x)} = l$



证明

构造辅助函数:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x = x_0 \\ f(x) & x \in \mathring{U}(x_0) \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} 0 & x = x_0 \\ g(x) & x \in \mathring{U}(x_0) \end{cases}$$

$F(x), G(x)$ 在 $[x_0, x]$ 上连续, 在 (x_0, x) 内可导, 且 $G'(x) \neq 0$

柯西中值定理:

$$\exists \xi \in (x_0, x), s.t. \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(x)}{G'(\xi)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$



定理 3.2.2 (广义洛必达定理)

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $\dot{U}(x_0)$ 上可导, 满足:

- (1). $g'(x) \neq 0$
- (2). $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$

- (3). $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (A 为有限数或 $\pm \infty$)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

**证明**

首先考虑 $x \rightarrow x_0^-$:

- (1). 当 A 为常数时:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. x \in (x_0 - \delta, x_0), \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \text{取定 } x_1 \in (x_0 - \delta, x_0)$$

$x \in (x_1, x)$, 柯西中值定理:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} - A \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$x \in [x_1, x_0]$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| &= \left| \frac{g(x) - g(x_1)}{g(x)} \left[\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} - A \right] + \frac{f(x_1) - Ag(x_1)}{g(x)} \right| \\ &\leq \left| 1 - \frac{g(x_1)}{g(x)} \right| \left| \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} - A \right| + \left| \frac{f(x_1) - Ag(x_1)}{g(x)} \right| \\ &\leq \left(1 + \left| \frac{g(x_1)}{g(x)} \right| \right) \left| \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} - A \right| + \left| \frac{f(x_1) - Ag(x_1)}{g(x)} \right| \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x_1)}{g(x)} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - Ag(x_1)}{g(x)} = 0 \end{cases}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_2 \in (x_1, x_0), \forall x \in (x_2, x_0), s.t. \left| \frac{g(x_1)}{g(x)} \right| < 1 \text{ 且 } \left| \frac{f(x_1) - Ag(x_1)}{g(x)} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

此时, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 = x_0 - x_2, \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0), \left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

(2). 当 A 为 ∞ 时: $\left| \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \right| > M$

取 $M = 1 \rightarrow |f(x) - f(x_1)| > |g(x) - g(x_1)| \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$



$x \rightarrow x_0^+$ 的情况类似

3.3 连续和间断

定义 3.3.1 (连续点)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0, \delta)$ 内有定义, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 那么称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续

定义 3.3.2 (间断点)

第一类间断点:

1. 可去间断点: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ ($f(x_0)$ 可以无定义)
2. 跳跃间断点: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

第二类间断点: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 至少有一个不存在

1. 震荡间断点: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 震荡不存在
2. 无穷间断点: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$
3. 其他第二类间断点





第4章 一元微分学

内容提要

- | | |
|----------|-------------|
| □ 导数和微分 | □ 函数单调性和凹凸性 |
| □ 基本求导公式 | □ 极值点和拐点 |
| □ 高阶导数 | □ 渐近线 |
| □ 泰勒公式 | □ 曲率和曲率半径 |

4.1 一元微分学概念

定义 4.1.1 (导数)

设 $y = f(x)$ 定义在区间 I 上, 自变量在 $x = x_0$ 处增加一个增量 Δx 时, 其中 $x_0 \in I, x_0 + \Delta \in I$, 函数值的增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, 如果极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在, 那么称此极限为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数, 记为 $f'(x_0)$ 或 $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$ 或 $\frac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}$

定义 4.1.2 (导数的几何意义)

函数 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 是函数 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的切线的斜率

定理 4.1.1 (导数存在充要条件)

函数 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处可导的充要条件是: 函数 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 存在且相等



定义 4.1.3 (微分)

设 $y = f(x)$ 定义在区间 I 上, 如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 那么函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的微分为 $dy = f'(x_0)dx$, 其中 dx 是自变量 x 的增量, dy 是因变量 y 的增量

**4.2 一元微分学计算****定理 4.2.1 (基本求导公式)**

1. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

2. $(a^x)' = a^x \ln a \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

3. $(e^x)' = e^x \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$

4. $(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x$

5. $(\tan x)' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

6. $(\sec x)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \tan x \sec x$

7. $(\csc x)' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x \csc x$

8. $(\cot x)' = -\csc^2 x$

9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $(\arctan x)' = \frac{1}{x^2+1}$

12. $\left(\ln(x + \sqrt{x^2 + a})\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$

13. $\left(\ln(x + \sqrt{x^2 - a})\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-a}}$

**定理 4.2.2 (导数四则运算)**

1. 和差法则: $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

2. 积法则: $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

3. 商法则: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

4. 复合函数求导: $F[G(x)]' = F'[G(x)]' \cdot G'(x)$



定理 4.2.3 (高阶导数)

1. $\sin^{(n)} x = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$ $\sin^{(n)}(ax + b) = a^n \sin(ax + b + \frac{n\pi}{2})$
2. $\cos^{(n)} x = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$ $\cos^{(n)}(ax + b) = a^n \cos(ax + b + \frac{n\pi}{2})$
3. $[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ $[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$
4. $(\frac{1}{ax+b})^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$
5. 莱布尼茨公式: $(uv)^n = \sum_{i=0}^n \binom{i}{n} u^{(i)} v^{(n-i)}$



定理 4.2.4 (泰勒公式)

1. 欧拉公式: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$
2. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$
3. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n-1)!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$
4. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{2n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$
5. $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} x^{2n-1}, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
6. $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1}, x \in (-1, 1)$
7. $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, x \in (-1, 1)$
8. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots, x \in (-1, 1]$
9. $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \cdots, x \in [-1, 1)$
10. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$



定理 4.2.5 (特殊函数导函数)

1. 隐函数导数:

$$F(x, y) = 0 \Rightarrow F'(x, y) \cdot y' = 0$$

2. 指对数函数求导:

$$\ln y = \ln f(x) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad y = a^{f(x)} \Rightarrow y = e^{f(x) \ln a}$$



3. 反函数导数: $x = \varphi(y), y = f(x)$ 记 $x'_y = \varphi'(y), y'_x = f'(x)$

$$(1). \text{ 一阶导数: } x'_y y'_x = 1 \Rightarrow \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$(2). \text{ 二阶导数: } x''_{yy} = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^3} \quad y''_{xx} = -\frac{x''_{yy}}{(x'_y)^3}$$

4. 参数方程导数: $x = x(t), y = y(t)$

$$(1). \text{ 一阶导数: } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$(2). \text{ 二阶导数: } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dx} \left[\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt} \right]$$



4.3 一元微分学应用

4.3.1 几何应用

定义 4.3.1 (函数图像要点)

1. 定义域 (间断点)
2. 奇偶性
3. 渐近线 (铅垂、水平、斜)

Points

(1).

$$\begin{cases} \text{水平渐近线: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \Rightarrow y = a \\ \text{铅垂渐近线: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Rightarrow x = a \\ \text{斜渐近线: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = b \Rightarrow y = ax + b \end{cases}$$

(2). 在同一个趋向方向中水平渐近线和斜渐进线只能有一个

(3). 间断点处看铅垂渐近线, $\pm\infty$ 处看水平渐近线和斜渐近线

4. 单调性和极值
5. 凹凸性和拐点



4.3.2 函数单调性 & 凹凸性 & 极值点 & 拐点

定义 4.3.2 (单调性)

- 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是严格单调递增的; $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是严格单调递减的
- 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调不减的; $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调不增的

定义 4.3.3 (凹凸性)

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义

- $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是凹的
- $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是凸的
- $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2) > (\lambda_1f(x_1) + \lambda_2f(x_2))$ ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$), 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是凸(凹)的

定义 4.3.4 (极值点)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义, $\forall x \in U(x_0)$, 均有 $f(x) \leq (\geq) f(x_0)$, 称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极(大)值

定义 4.3.5 (驻点)

一阶导数为 0 的点称为驻点, 对于多元函数, 驻点是一阶偏导数都为 0 的点

定理 4.3.1 (极值点判别)

第一充分条件: $f(x)$ 在 x_0 处连续, 且在 $U(x_0)$ 内可导

$$\begin{cases} x \in (x_0 - \delta, x_0), f'(x) > 0; x \in (x_0, x_0 + \delta), f'(x) < 0 & f(x_0) = \max_{x \in U(x_0)} \{f(x)\} \\ x \in (x_0 - \delta, x_0), f'(x) < 0; x \in (x_0, x_0 + \delta), f'(x) > 0 & f(x_0) = \min_{x \in U(x_0)} \{f(x)\} \\ x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta), f'(x) \leq (\geq) 0 & \end{cases}$$

第二充分条件: $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导, 且 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$

$$\begin{cases} f''(x_0) > 0 & f(x_0) = \min_{x \in U(x_0)} \{f(x)\} \\ f''(x_0) < 0 & f(x_0) = \max_{x \in U(x_0)} \{f(x)\} \end{cases}$$

第三充分条件: $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导, 且 $f^{(m)}(x_0) = 0$ ($m = 1, 2, \dots, n-1$), $f^{(n)}(x_0) \neq 0$



$0, n \in \{2k | k \in \mathbb{N}^+\}$

$$\begin{cases} f^{(n)}(x_0) > 0 & f(x_0) = \min_{x \in U(x_0)} \{f(x)\} \\ f^{(n)}(x_0) < 0 & f(x_0) = \max_{x \in U(x_0)} \{f(x)\} \end{cases}$$



定义 4.3.6 (拐点)

连续函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, x_0 是区间的内点, 当函数 $f(x)$ 经过点 $(x_0, f(x_0))$ 时, 函数的凹凸性发生改变, 称 $(x_0, f(x_0))$ 是函数 $f(x)$ 的拐点



定理 4.3.2 (拐点判别)

第一充分条件: $f(x)$ 在 x_0 处连续, 且在 $\mathring{U}(x_0)$ 内二阶可导

$$\begin{cases} x \in (x_0 - \delta, x_0), f''(x) < (>)0 \\ x \in (x_0, x_0 + \delta), f''(x) > (<)0 \end{cases}$$

第二充分条件: $f(x)$ 在 x_0 处三阶可导

$$\begin{cases} f''(x_0) = 0 \\ f'''(x_0) \neq 0 \end{cases}$$

第三充分条件: $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导

$$\begin{cases} f^{(m)}(x_0) = 0 & m = 1, 2, \dots, n-1 \\ f^{(n)}(x_0) \neq 0 & n \in \{2k+1 | k \in \mathbb{N}^+\} \end{cases}$$



定理 4.3.3 (多项式函数极值点和拐点个数)

假设 $P_n(x) = \prod_{i=1}^k (x - a_i)^{p_i}$, 其中 k_1 个 p_i 为奇数 (大于 1), k_2 个 p_i 为偶数, k_0 个 $p_i = 1$, 满足 $k_0 + k_1 + k_2 = k$

- $P_n(x)$ 的极值点个数: $k - 1 + k_2 = k_0 + k_1 + 2k_2 - 1$
- $P_n(x)$ 的拐点个数: $k + 2k_1 + k_2 - 2 = k_0 + 3k_1 + 2k_2 - 2$

多项式函数极值点和拐点 [the : 39.4.1](#)



注

- 驻点是导数为 0 的点, 不一定是极值点
- 极值点导数可能存在, 也可能不存在
- 极值点导数存在时, 导数值为 0
- 拐点处二阶导数可能存在, 也可能不存在
- 拐点二阶导数存在时, 二阶导数值为 0



定义 4.3.7 (曲率和曲率半径)

设 $y(x)$ 二阶可导, 则曲线 $y = y(x)$ 在其上点 (x_0, y_0) 处的曲率公式表示为:

$$k = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

曲率半径:

$$R = \frac{1}{k} = \frac{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

**曲率半径推导**

不妨设曲线上的任意一点 $C(x_0, f(x_0))$, 点 C 的曲率圆半径为 R , 曲率圆是 C 点和周围两个点 $A(x_0 - \delta, f(x_0 - \delta)), B(x_0 + \delta, f(x_0 + \delta))$ 的外接圆, 且 A, B 无线靠近 C

正弦定理:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{R}$$

ΔABC 的面积:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})|$$

$$\begin{cases} \mathbf{a} = (\delta, f(x_0) - f(x_0)) \\ \mathbf{b} = (\delta, f(x_0 + \delta) - f(x_0)) \\ \mathbf{c} = (2\delta, f(x_0 + \delta) - f(x_0 - \delta)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = \frac{\sqrt{\delta^2 + [f(x_0) - f(x_0 - \delta)]^2} \sqrt{\delta^2 + [f(x_0 + \delta) - f(x_0)]^2} \sqrt{4\delta^2 + [f(x_0 + \delta) - f(x_0 - \delta)]^2}}{4R} \\ S = |\delta [f(x_0 + \delta) + f(x_0 - \delta) - 2f(x_0)]| \end{cases}$$

$$R = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \left[\frac{f(x_0 + \delta) - f(x_0)}{\delta}\right]^2} \sqrt{1 + \left[\frac{f(x_0) - f(x_0 - \delta)}{\delta}\right]^2} \sqrt{4 + \left[\frac{f(x_0 + \delta) - f(x_0 - \delta)}{2\delta}\right]^2}}{\left|\frac{f(x_0 + \delta) + f(x_0 - \delta) - 2f(x_0)}{\delta^2}\right|}$$

$$R = \frac{\left[1 + [f'(x_0)]^2\right]^{\frac{3}{2}}}{f''(x_0)}, R \text{ 越大, 曲线越平坦, } R \text{ 越小, 曲线越陡峭.}$$



4.3.3 物理应用

定义 4.3.8 (相关变化率)

$$y = y(x) \begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$





第 5 章 中值定理

内容提要

- 介值定理
- 零点定理
- 费马定理
- 罗尔定理
- 拉格朗日中值定理
- 柯西中值定理
- 积分中值定理
- 达布定理

5.1 介值定理 & 零点定理

定理 5.1.1 (有界和最值定理)

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 有: $m \leq f(x) \leq M$
其中 m, M 分别是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值和最大值



定理 5.1.2 (介值定理)

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 有: $m \leq f(x) \leq M$
其中 m, M 分别是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值和最大值
 $\forall \mu \in [m, M], \exists \xi \in [a, b], s.t. f(\xi) = \mu$



定理 5.1.3 (平均值定理)

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 有: $m \leq f(x) \leq M$
其中 m, M 分别是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值和最大值
当 $a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq b, \exists \xi \in [a, b], s.t. f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$



定理 5.1.4 (零点定理)

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)f(b) < 0$, $\exists \xi \in (a, b)$, s.t. $f(\xi) = 0$

**5.2 费马定理****定理 5.2.1 (费马定理)**

$f(x)$ 在 x_0 处可导, 且 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 极值点, 有: $f'(x_0) = 0$

证明: 不妨设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取极大值

极值点的定义:

$$\begin{cases} f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \\ f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \geq 0 \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f(x_0) = 0$

**5.3 罗尔定理****定理 5.3.1 (罗尔定理)**

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b)$, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, s.t. $f'(\xi) = 0$

证明:

最值定理: $m \leq f(x) \leq M$

(1). $m = M$ 时, $f(x) = C \Rightarrow f'(x) = 0$

(2). $m < M$ 时, $f(a) = f(b)$, 在区间 (a, b) 中至少存在一个最值(最大值或者最小值)

不妨假在 $x = \xi$ 时, $f(\xi)$ 取得最值, 此时 $x = \xi$ 一定是 $f(x)$ 极值点

费马定理: $f'(\xi) = 0$

**5.4 拉格朗日中值定理****定理 5.4.1 (拉格朗日中值定理)**

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, s.t. $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$

证明: 构造辅助函数 $g(x) = f(x)(b - a) - [f(b) - f(a)]x$

$$g(a) = g(b) = bf(a) - af(b)$$

罗尔定理:

$$\exists \xi \in (a, b), \text{s.t. } g'(\xi) = 0$$



$$f'(\xi)(b-a) = f(b) - f(a) \Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$



5.5 柯西中值定理

定理 5.5.1 (柯西中值定理)

$f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $g'(x) \neq 0, \exists \xi \in (a, b), s.t. \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

证明: 构造辅助函数 $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g(x)$

$$F(a) = F(b) = \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)}$$

罗尔定理:

$$\exists \xi \in (a, b), s.t. F'(\xi) = 0$$

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(\xi) \Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$



5.6 泰勒公式

定理 5.6.1 (泰勒公式)

(1). 带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内 $n+1$ 阶导数存在, 对邻域内任意一点 x , 有:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$$

(2). 带佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式

设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导, 则存在 x_0 的一个邻域, 对于该邻域内任意一点 x , 有:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$



5.7 积分中值定理

定理 5.7.1 (积分中值定理)

(1). 一元函数积分中值定理

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\exists \xi \in (a, b), s.t. \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$



证明：构造函数 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

拉格朗日中值定理：

$$\exists \xi \in (a, b), s.t. F'(\xi) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$$

(2). 二元函数积分中值定理

$f(x, y)$ 在 D 上连续，则 $\exists (\xi, \eta) \in D, s.t. \iint_D f(x, y)dxdy = S_D f(\xi, \eta)$

(3). 广义积分中值定理

$f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $g(x)$ 不变号，有：

$$\exists \xi \in [a, b], s.t. \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

设 $f(x, y)$ 在平面有界闭区域 D 连续， $g(x, y)$ 平面有界闭区域 D 可积且不变号，有：

$$\exists (\xi, \eta) \in D, s.t. \iint_D f(x, y)g(x, y)d\sigma = f(\xi, \eta) \iint_D g(x, y)d\sigma$$

注

构造函数： $F(x) = \int_a^x f(t)g(t)dt, G(x) = \int_a^x g(t)dt, F'(x) = f(x)g(x), G'(x) = g(x)$

柯西中值定理：

$$\exists \xi \in (a, b), s.t. \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} \Rightarrow \frac{f(\xi)g(\xi)}{g(\xi)} = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

$$f(\xi) \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx$$



5.8 达布定理

定理 5.8.1

1. 导数零点定理

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导，且 $f'_+(a)f'_-(b) < 0$ ，则 $\exists \xi \in (a, b), s.t. f'(\xi) = 0$

证明：不妨假设 $f_+(a) > 0, f'_-(b) < 0$

极限定义：

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \\ \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) > f(a) \\ f(x) > f(b) \end{cases}$$



$f(x)$ 一定在 (a, b) 内取得最大值, 费马定理: $\exists \xi \in (a, b), s.t. f'(\xi) = 0$

2. 导数介值定理(达布定理)

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $f'_+(a) \neq f'_-(b), \forall \eta \in (f'_+(a), f'_-(b)), \exists \xi \in (a, b), s.t. f'(\xi) = \eta$

证明: 不妨假设 $f_+(a) = m, f'_-(b) = M (M > m)$

$$g(x) = f(x) - \eta x, g'(x) = f'(x) - \eta$$

$$g'_+(a) = f'_+(a) - \eta < 0, g'_-(b) = f'_-(b) - \eta > 0$$

极限的保号性:

$$\begin{cases} \exists \delta_1 > 0, s.t. g(x) < g(a), x \in (a, a + \delta_1) \\ \exists \delta_2 > 0, s.t. g(x) < g(b), x \in (b - \delta_2, b) \end{cases}$$

$g(x)$ 是连续可导函数, 费马定理: $g(x)$ 最小值一定在 (a, b) 内取得, 且 $g'(\xi) = 0 \rightarrow f'(\xi) - \eta = 0$

综上所述: $\exists \xi \in (a, b), s.t. f'(\xi) = \eta$



5.9 Exercise

5.9.1 零点问题

命题 5.9.1

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续, 且 $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 0$, 证明: $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内至少有两个零点



解

令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt :$

$$F'(x) = f(x), F(0) = F(1) = 0$$

$$\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x dF(x) = xF(x)|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 F(x)dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 F(x)dx = 0$$

积分中值定理:

$$\exists c \in (0, 1), s.t. F(c) = \int_0^1 xf(x)dx = 0$$

$F(0) = F(c) = F(1) = 0$, 罗尔定理:

$$\begin{cases} \exists \xi_1 \in (0, c), s.t. F'(\xi_1) = f(\xi_1) = 0 \\ \exists \xi_2 \in (c, 1), s.t. F'(\xi_2) = f(\xi_2) = 0 \end{cases}$$

综上所述: $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内至少有两个零点



命题 5.9.2

假设某 n 次多项式 $P_n(x)$ 的一切根均为实数根, 证明: $P'_n(x), P''_n(x), \dots, P^{n-1}_n(x)$ 也仅有实根



解

不妨设:

$$P_n(x) = A(x - x_1)^{r_1}(x - x_2)^{r_2} \cdots (x - x_k)^{r_k}, (r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n, r_i \geq 1)$$

$$\begin{aligned} P'_n(x) &= r_1 A(x - x_1)^{r_1-1}(x - x_2)^{r_2} \cdots (x - x_k)^{r_k} \\ &\quad + r_2 A(x - x_1)^{r_1}(x - x_2)^{r_2-1} \cdots (x - x_k)^{r_k} \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + r_k A(x - x_1)^{r_1}(x - x_2)^{r_2} \cdots (x - x_k)^{r_k-1} \\ &= A(x - x_1)^{r_1-1}(x - x_2)^{r_2-1} \cdots (x - x_k)^{r_k-1} f(x) \end{aligned}$$

$$f(x) = r_1(x - x_2) \cdots (x - x_k) + \cdots + r_k(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})$$

$x_i (r_i > 2)$ 是 $P'_n(x)$ 的实数根, x_i 根的重数 $r_i - 1$

此类实数根个数:

$$n_1 = \sum_{i=1}^k (r_i - 1) = n - k$$

$f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_k) = 0$, 罗尔定理:

$$\exists \xi_i \in (x_i, x_{i+1}), s.t. f'(\xi_i) = 0$$

此类实数根个数:

$$n_2 \geq k - 1$$

$P'_n(x)$ 至少存在 $n_1 + n_2 \geq n - 1$ 个实数零点, $P'_n(x)$ 至多有 $n - 1$ 个实数根, $P'_n(x)$ 的根全为实数根

对于 $P''_n(x), \dots, P^{n-1}_n(x)$, 同理可证

命题 5.9.3

设 $f(x)$ 在 $[0, 4]$ 二阶可导, $f(0) = 0, f(1) = 1, f(4) = 2$, 证明: $\exists \xi \in (0, 4), s.t. f''(\xi) = -\frac{1}{3}$



解

构造辅助函数:

$$F(x) = f(x) + \frac{x^2}{6} - \frac{7x}{6} \Rightarrow F(0) = F(1) = F(4) = 0$$



$F(0) = F(1) = F(4) = 0$, 罗尔定理:

$$\begin{cases} \exists \xi_1 \in (0, 1), \text{ s.t. } F'(\xi_1) = f'(\xi_1) + \frac{\xi_1}{3} - \frac{7}{6} = 0 \\ \exists \xi_2 \in (1, 4), \text{ s.t. } F'(\xi_2) = f'(\xi_2) + \frac{\xi_2}{3} - \frac{7}{6} = 0 \end{cases}$$

$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$, 罗尔定理:

$$\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2), \text{ s.t. } F''(\xi) = f''(\xi) + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow f''(\xi) = -\frac{1}{3}$$

综上所述, $\exists \xi \in (0, 4), \text{ s.t. } f''(\xi) = -\frac{1}{3}$

泰勒展开

$f(x)$ 在 $x = 1$ 处的泰勒展开式:

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - 1)^2$$

令 $x = 0, x = 4$:

$$\begin{cases} f(0) = f(1) - f'(1) + \frac{1}{2}f''(\xi_1) = 0, \xi_1 \in (0, 1) \\ f(4) = f(1) + 3f'(1) + \frac{9}{2}f''(\xi_2) = 2, \xi_2 \in (1, 4) \end{cases}$$

消去 $f'(1)$:

$$3f''(\xi_1) + 9f''(\xi_2) = -4$$

(i). 当 $f''(\xi_1) = f''(\xi_2)$ 时, $f''(\xi_1) = f''(\xi_2) = -\frac{1}{3}$, 命题成立

(ii). 当 $f''(\xi_1) \neq f''(\xi_2)$, 不妨设 $f''(\xi_1) < f''(\xi_2)$:

$$\begin{cases} 3f''(\xi_1) + 9f''(\xi_2) = -4 < 12f''(\xi_2) \\ 3f''(\xi_1) + 9f''(\xi_2) = -4 > 12f''(\xi_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''(\xi_2) > -\frac{1}{3} \\ f''(\xi_1) < -\frac{1}{3} \end{cases}$$

达布定理: $\exists \xi_3 \in (\xi_1, \xi_2), \text{ s.t. } f''(\xi_3) = -\frac{1}{3}$

综上所述: $\exists \xi \in (0, 4), \text{ s.t. } f''(\xi) = -\frac{1}{3}$

命题 5.9.4

设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $(0, 2)$ 内三阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 2, f(1) = 1, f(2) = 6$, 证明:
 $\exists \xi \in (0, 2), \text{ s.t. } f^{(3)}(\xi) = 9$

解



构造辅助函数:

$$F(x) = f(x) - \frac{3}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x$$

$F(0) = F(1) = F(2) = 0$, 罗尔定理:

$$\begin{cases} \exists \xi_1 \in (0, 1), \text{s.t. } F'(\xi_1) = f'(\xi_1) - \frac{9}{2}\xi_1^2 + 5\xi_1 - 2 = 0 \\ \exists \xi_2 \in (1, 2), \text{s.t. } F'(\xi_2) = f'(\xi_2) - \frac{9}{2}\xi_2^2 + 5\xi_2 - 2 = 0 \end{cases}$$

$F'(0) = F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$, 罗尔定理:

$$\begin{cases} \exists \eta_1 \in (0, \xi_1), \text{s.t. } F''(\eta_1) = f''(\eta_1) - 9\eta_1 + 5 = 0 \\ \exists \eta_2 \in (\xi_1, \xi_2), \text{s.t. } F''(\eta_2) = f''(\eta_2) - 9\eta_2 + 5 = 0 \end{cases}$$

$F''(\eta_1) = F''(\eta_2) = 0$, 罗尔定理:

$$\exists \xi \in (\eta_1, \eta_2), \text{s.t. } F^{(3)}(\xi) = f^{(3)}(\xi) - 9 = 0$$

综上所述, $\exists \xi \in (0, 2)$, s.t. $f^{(3)}(\xi) = 9$

命题 5.9.5

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, $f(0) = 0, f(1) = 1, \int_0^1 f(x)dx = 1$, 证明: $\exists \eta \in (0, 1)$, s.t. $f''(\eta) < -2$



解

构造辅助函数:

$$F(x) = f(x) + 3x^2 - 4x, F(0) = F(1) = 0$$

$\int_0^1 F(x)dx = 0$, 积分中值定理:

$$\exists c \in (0, 1), \text{s.t. } F(c) = 0$$

$F(0) = F(c) = F(1) = 0$, 罗尔定理:

$$\begin{cases} \exists \xi_1 \in (0, c), \text{s.t. } F'(\xi_1) = f'(\xi_1) + 6\xi_1 - 4 = 0 \\ \exists \xi_2 \in (c, 1), \text{s.t. } F'(\xi_2) = f'(\xi_2) + 6\xi_2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$, 罗尔定理:

$$\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2), \text{s.t. } F''(\xi) = f''(\xi) + 6 = 0$$

综上所述, $\exists \xi \in (0, 1)$, s.t. $f''(\xi) = -6 < -2$



命题 5.9.6

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, $f(0) = f(1) = 0$, $[f(x)]_{min} = -1$, 证明: $\exists \xi \in (0, 1)$, s.t. $f''(\xi) \geq 8$



解

构造辅助函数: $F(x) = f(x) - 4x^2 + 4x$

$$[f(x)]_{min} = -1 \Rightarrow \exists c \in (0, 1). \text{ s.t. } f(c) = -1$$

$$(1). c = \frac{1}{2}, F\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$(2). c \in (0, \frac{1}{2})$$

$$\begin{cases} F(c) = f(c) - 4c^2 + 4c = -(2c-1)^2 < 0 \\ F\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + 1 \geq 0 \end{cases}$$

零点定理: $\exists c_1 \in (c, \frac{1}{2})$, s.t. $F(c_1) = 0$

$$(3). c \in (\frac{1}{2}, 1)$$

$$\begin{cases} F(c) = f(c) - 4c^2 + 4c = -(2c-1)^2 < 0 \\ F\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + 1 \geq 0 \end{cases}$$

零点定理: $\exists c_2 \in (\frac{1}{2}, c)$, s.t. $F(c_2) = 0$

综上: $\exists \eta \in (0, 1)$, s.t. $F(\eta) = 0$

$F(0) = F(\eta) = F(1) = 0$, 罗尔定理:

$$\begin{cases} \exists \xi_1 \in (0, \eta), \text{ s.t. } F'(\xi_1) = f'(\xi_1) - 8\xi_1 + 4 = 0 \\ \exists \xi_2 \in (\eta, 1), \text{ s.t. } F'(\xi_2) = f'(\xi_2) - 8\xi_2 + 4 = 0 \end{cases}$$

$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$, 罗尔定理:

$$\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2), \text{ s.t. } F''(\xi) = f''(\xi) - 8 = 0$$

综上所述, $\exists \xi \in (0, 1)$, s.t. $f''(\xi) = 8 \geq 8$

泰勒展开

$[f(x)]_{min} = -1$, 且 $f(0) = f(1) = 0 \Rightarrow f(x)$ 一定在 $(0, 1)$ 内部取的最小值

不妨设 $f(c) = -1$, 费马定理: $f'(c) = 0$

$f(x)$ 在 $x = c$ 处泰勒展开式:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - c)^2$$



令 $x = 0$ 和 $x = 1$:

$$\begin{cases} f(0) = f(c) - f'(c)c + \frac{f''(\xi_1)}{2}c^2 = 0 \\ f(1) = f(c) + f'(c)(1-c) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2 = 0 \end{cases}$$

$f(c) = -1, f'(c) = 0$:

$$f''(\xi_1) = \frac{2}{c^2}, f''(\xi_2) = \frac{2}{1-c^2}$$

$$\begin{cases} c \in (0, \frac{1}{2}], f'(\xi_1) \geq 8 \\ c \in (\frac{1}{2}, 1), f''(\xi_2) \geq 8 \end{cases}$$

综上所述, $\exists \xi \in (0, 1)$, s.t. $f''(\xi) \geq 8$

命题 5.9.7

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导, $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$, 且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 (a, b) 内存在相等的最大值, 证明: $\exists \xi \in (a, b)$, s.t. $f''(\xi) = g''(\xi)$

解

构造辅助函数: $F(x) = f(x) - g(x), F(a) = F(b) = 0$

不妨设 $f(x), g(x)$ 分别在 x_1, x_2 处取得最大值 $a \Rightarrow f(x_1) = g(x_2) = a$

(1). $x_1 = x_2 \Rightarrow F(x_1) = F(x_2) = 0$

(2). $x_1 < x_2$

$$\begin{cases} F(x_1) = f(x_1) - g(x_1) \geq 0 \\ F(x_2) = f(x_2) - g(x_2) \leq 0 \end{cases}$$

$\exists x_3 \in [x_1, x_2] \text{ s.t. } F(x_3) = 0$

(3). $x_1 > x_2$

$$\begin{cases} F(x_1) = f(x_1) - g(x_1) \leq 0 \\ F(x_2) = f(x_2) - g(x_2) \geq 0 \end{cases}$$

$\exists x_4 \in [x_2, x_1], \text{ s.t. } F(x_4) = 0$

综上: $\exists \eta \in (a, b), \text{ s.t. } F(\eta) = 0$



$F(a) = F(\eta) = F(b) = 0$, 罗尔定理:

$$\begin{cases} \exists \xi_1 \in (a, \eta), s.t. F'(\xi_1) = f'(\xi_1) - g'(\xi_1) = 0 \\ \exists \xi_2 \in (\eta, b), s.t. F'(\xi_2) = f'(\xi_2) - g'(\xi_2) = 0 \end{cases}$$

$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$, 罗尔定理:

$$\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2), s.t. F''(\xi) = f''(\xi) - g''(\xi) = 0$$

综上所述, $\exists \xi \in (a, b), s.t. f''(\xi) = g''(\xi)$

命题 5.9.8

设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 三阶连续可导, $f(-1) = 0, f'(0) = 0, f(1) = 1$, 证明: $\exists \xi \in (-1, 1), s.t. f^{(3)}(\xi) = 3$



解

构造辅助函数: $F(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^3 - \left(\frac{1}{2} - f(0)\right)x^2 - f(0)$

$$F(-1) = F(0) = F(1) = 0, F'(0) = 0$$

$F(-1) = F(0) = F(1) = 0$, 罗尔定理:

$$\begin{cases} \exists \xi_1 \in (-1, 0), s.t. F'(\xi_1) = f'(\xi_1) - \frac{3}{2}\xi_1^2 - (1 - 2f(0))\xi_1 = 0 \\ \exists \xi_2 \in (0, 1), s.t. F'(\xi_2) = f'(\xi_2) - \frac{3}{2}\xi_2^2 - (1 - 2f(0))\xi_2 = 0 \end{cases}$$

$F'(\xi_1) = F'(0) = F'(\xi_2) = 0$, 罗尔定理:

$$\begin{cases} \exists \eta_1 \in (\xi_1, 0), s.t. F''(\eta_1) = f''(\eta_1) - 3\eta_1 + 2f(0) - 1 = 0 \\ \exists \eta_2 \in (0, \xi_2), s.t. F''(\eta_2) = f''(\eta_2) - 3\eta_2 + 2f(0) - 1 = 0 \end{cases}$$

$F''(\eta_1) = F''(\eta_2)$, 罗尔定理:

$$\exists \xi \in (\eta_1, \eta_2), s.t. F^{(3)}(\xi) = f^{(3)}(\xi) - 3 = 0 \Rightarrow f^{(3)}(\xi) = 3$$

综上所述, $\exists \xi \in (-1, 1), s.t. f^{(3)}(\xi) = 3$

泰勒展开

$f(x)$ 在 $x = 0$ 处泰勒展开式:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}x^3$$



令 $x = 1$ 和 $x = -1$, 且 $f'(0) = 0$

$$\begin{cases} f(1) = f(0) + \frac{f''(0)}{2} + \frac{f'''(\xi_1)}{6} = 1 \\ f(-1) = f(0) + \frac{f''(0)}{2} - \frac{f'''(\xi_2)}{6} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{6} = 1$$

不妨设 $f'''(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上最大值 M , 最小值 m :

$$\frac{m}{6} \leq \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{6} \leq \frac{M}{6} \Rightarrow m \leq 3 \leq M$$

介值定理: $\exists \xi \in (-1, 1), s.t. f'''(\xi) = 3$

5.9.2 复合函数零点问题

命题 5.9.9

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 内可导, $f(a) = f(b) = 0$, 证明: $\exists \xi \in (a, b), s.t. 2f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$

解

构造辅助函数: $F(x) = x^2 f(x)$

$F(a) = F(b) = 0$, 罗尔定理:

$$\exists \xi \in (a, b), s.t. F'(\xi) = 2\xi f(\xi) + \xi^2 f'(\xi) = 0$$

(1). 当 $\xi \neq 0 \Rightarrow 2f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$

(2). 当 $\xi = 0, F(a) = F(0) = F(b) = 0$

$F(a) = F(0) = F(b) = 0$, 罗尔定理:

$$\begin{cases} \exists \xi_1 \in (a, 0), s.t. F'(\xi_1) = 2\xi_1 f(\xi_1) + \xi_1^2 f'(\xi_1) = 0 \\ \exists \xi_2 \in (0, b), s.t. F'(\xi_2) = 2\xi_2 f(\xi_2) + \xi_2^2 f'(\xi_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2f(\xi_1) + \xi_1 f'(\xi_1) = 0, \xi_1 \in (a, 0) \\ 2f(\xi_2) + \xi_2 f'(\xi_2) = 0, \xi_2 \in (0, b) \end{cases}$$

综上所述, $\exists \xi \in (a, b), s.t. 2f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$

命题 5.9.10

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 内可导, $f(a) = f(b) = 0$, 证明: $\exists \xi \in (a, b), s.t. f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$

解

构造辅助函数: $F(x) = xf(x)$

$F(a) = F(b) = 0$, 罗尔定理:

$$\exists \xi \in (a, b), s.t. F'(\xi) = f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$$

综上所述, $\exists \xi \in (a, b), s.t. f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$

命题 5.9.11

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 内可导, $a > 0, f(a) = 0$, 证明: $\exists \xi \in (a, b), s.t. f(\xi) = \frac{b-\xi}{a} f'(\xi)$



解

构造辅助函数: $F(x) = (x - b)^a f(x)$

$F(a) = F(b) = 0$, 罗尔定理:

$$\exists \xi \in (a, b), s.t. F'(\xi) = a(\xi - b)^{a-1} f(\xi) + (\xi - b)^a f'(\xi) = 0 \Rightarrow a f(\xi) + (\xi - b) f'(\xi) = 0$$

$$\text{综上所述, } \exists \xi \in (a, b), s.t. f(\xi) = \frac{b-\xi}{a} f'(\xi)$$

命题 5.9.12

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 内可导, $f(a) = f(b) = 0$, 证明: $\exists \xi \in (a, b), s.t. f'(\xi) + f^2(\xi) = 0$



解

构造辅助函数: $F(x) = f(x) e^{\int_a^x f(t) dt}$

$F(a) = F(b) = 0$, 罗尔定理:

$$\exists \xi \in (a, b), s.t. F'(\xi) = e^{\int_a^\xi f(t) dt} (f'(\xi) + f^2(\xi)) = 0$$

$$\text{综上, } \exists \xi \in (a, b), s.t. f'(\xi) + f^2(\xi) = 0$$

5.9.3 罗尔定理 & 费马定理

命题 5.9.13

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $(0, 1)$ 内可导, $f(0) = 1, f(1) = \frac{1}{2}$, 证明: $\exists \xi \in (0, 1), s.t. f'(\xi) + f^2(\xi) = 0$



解

(1). $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 无零点



构造辅助函数: $F(x) = -\frac{1}{f(x)} + x$
 $F(0) = F(1) = -1$, 罗尔定理:

$$\exists \xi \in (0, 1), s.t. F'(\xi) = \frac{f'(\xi) + f^2(\xi)}{f^2(\xi)} = 0$$

(2). $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上至少两个零点, $f(x_1) = f(x_2) = \dots = 0$

构造辅助函数: $F(x) = f(x)e^{\int_a^x f(t)dt}$

$F(x_1) = F(x_2) = 0$, 罗尔定理:

$$\exists \xi \in (x_1, x_2), s.t. F'(\xi) = e^{\int_a^\xi f(t)dt} (f'(\xi) + f^2(\xi)) = 0$$

(3). $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上只有一个零点, $f(x_0) = 0$

费马定理: $f'(x_0) = 0$

$$\exists x_0 \in (0, 1), s.t. f'(x_0) + f^2(x_0) = 0$$

综上, $\exists \xi \in (0, 1), s.t. f'(\xi) + f^2(\xi) = 0$

命题 5.9.14

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 内可导, 且 $\exists c \in (a, b)$, $s.t. f'(c) = 0$, 证明: $\exists \xi \in (a, b)$, $s.t. f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b - a}$



解

构造辅助函数: $F(x) = [f(x) - f(a)] e^{\frac{x}{a-b}}$

$$F'(x) = e^{\frac{x}{a-b}} \left[f'(x) + \frac{f(x) - f(a)}{a-b} \right] \Rightarrow \begin{cases} F(a) = 0 \\ F(c) = [f(c) - f(a)] e^{\frac{c}{a-b}} \\ F'(c) = -e^{\frac{c}{a-b}} \frac{f(c) - f(a)}{b-a} \end{cases}$$

(1). $f(a) = f(c) \Rightarrow F(a) = F(c) = 0$

罗尔定理:

$$\exists \xi \in (a, c), s.t. F'(\xi) = e^{\frac{\xi}{a-b}} [f(\xi) - \frac{f(\xi) - f(a)}{b-a}] = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b-a}$$

(2). $f(a) \neq f(c)$, 不妨设 $f(a) > f(c)$:

$$F(a) = 0, F(c) < 0, F'(c) > 0$$

$F(x)$ 在区间 $[a, c]$ 上的最小值一定在区间内, 不妨设 $F(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得最小值

费马定理: $F'(x_0) = 0$

$$\exists x_0 \in (a, c), s.t. f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(a)}{b-a}$$

$$\text{综上所述, } \exists \xi \in (a, b), s.t. f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b-a}$$



命题 5.9.15

$f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 二阶可导, $|f(x)| < 1$, $[f(0)]^2 + [f'(0)]^2 = 4$, 证明: $\exists \xi \in (-2, 2)$, s.t. $f(\xi) + f''(\xi) = 0$



解

构造辅助函数:

$$F(x) = [f(x)]^2 + [f'(x)]^2 \Rightarrow \begin{cases} F'(x) = 2f(x)f'(x) + 2f'(x)f''(x) = 2f'(x)[f(x) + f''(x)] \\ F(0) = 4 \end{cases}$$

拉格朗日中值定理:

$$\begin{cases} \exists \xi_1 \in (-2, 0), \text{ s.t. } \frac{f(0) - f(-2)}{2} = f'(\xi_1) \\ \exists \xi_2 \in (0, 2), \text{ s.t. } \frac{f(2) - f(0)}{2} = f'(\xi_2) \\ |f(x)| < 1 \\ -1 < f(x) < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(\xi_1) \in (-1, 1) \\ f'(\xi_2) \in (-1, 1) \\ F(\xi_1) = [f(\xi_1)]^2 + [f'(\xi_1)]^2 < 2 \\ F(\xi_2) = [f(\xi_2)]^2 + [f'(\xi_2)]^2 < 2 \end{cases}$$

$F(\xi_1) < 2$, $F(\xi_2) < 2$, $F(0) = 4 \Rightarrow F(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 的最大值一定在区间内部取得, 不妨设 $x = \xi$ 处 $F(x)_{\max} = F(\xi) \geq F(0) = 4$

费马定理: $F'(\xi) = 2f'(\xi)[f(\xi) + f''(\xi)] = 0$ (i). $f'(\xi) = 0$, $F(\xi) = [f(\xi)]^2 + [f'(\xi)]^2 < 1$, 矛盾(ii). $f(\xi) + f''(\xi) = 0$, 满足 $F(\xi) \geq 4$ 综上所述, $\exists \xi \in (-2, 2)$, s.t. $f(\xi) + f''(\xi) = 0$

命题 5.9.16

设 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 二阶可导, $2f(0) = \int_0^2 f(x)dx = f(2) + f(3)$, 证明: $\exists \xi \in (0, 3)$, s.t. $f''(\xi) - 2f'(\xi) = 0$



解

构造辅助函数: $F(x) = e^{-2x}f'(x)$

$$F'(x) = e^{-2x}[f''(x) - 2f'(x)]$$

积分中值定理:

$$\exists \xi_1 \in (0, 2), \text{ s.t. } \int_0^2 f(x)dx = 2f(\xi_1) = 2f(0) \Rightarrow \exists \xi_1 \in (0, 2), \text{ s.t. } f(\xi_1) = f(0)$$

 $f(0) = f(\xi_1)$, 罗尔定理:

$$\exists \eta_1 \in (0, \xi_1), \text{ s.t. } f'(\eta_1) = 0$$

介值定理:

$$\exists \xi_2 \in (2, 3), \text{ s.t. } f(2) + f(3) = 2f(\xi_2) \Rightarrow f(\xi_2) = f(\xi_1)$$



$f(\xi_1) = f(\xi_2)$, 罗尔定理:

$$\exists \eta_2 \in (\xi_1, \xi_2), s.t. f'(\eta_2) = 0$$

$f'(\eta_1) = f'(\eta_2) = 0 \Rightarrow F(\eta_1) = F(\eta_2) = 0$, 罗尔定理:

$$\exists \xi \in (\eta_1, \eta_2), s.t. F'(\xi) = e^{-2\xi} [f''(\xi) - 2f'(\xi)] = 0$$

综上所述, $\exists \xi \in (0, 3), s.t. f''(\xi) - 2f'(\xi) = 0$

5.9.4 原函数、导函数、高阶导数关系

命题 5.9.17

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 可导, $f(a) = f(b) = 0, f'_+(a)f'_-(b) > 0$ 证明: $\exists \xi \in (a, b), s.t. f''(\xi) = f(\xi)$

解

构造辅助函数: $\begin{cases} F(x) = e^{-x}[f(x) + f'(x)] \\ G(x) = e^x f(x) \end{cases}$

$$\begin{cases} F'(x) = e^{-x}[f''(x) - f(x)] \\ G(a) = G(b) = 0 \end{cases}$$

$f'_+(a)f'_-(b) > 0$, 不妨设 $f'_+(a) > 0, f'_-(b) > 0$:

$$\begin{cases} f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \\ f'_-(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (a, a + \sigma_1), f(x) > f(a) = 0 \\ x \in (b - \sigma_2, b), f(x) < f(b) = 0 \end{cases}$$

零点定理: $\exists c \in (a, b), s.t. f(c) = 0 \Rightarrow f(a) = f(c) = f(b) = 0$

$G(a) = G(c) = G(b) = 0$, 罗尔定理:

$$\begin{cases} \exists x_1 \in (a, c), s.t. G'(x_1) = e^{x_1}(f(x_1) + f'(x_1)) = 0 \\ \exists x_2 \in (c, b), s.t. G'(x_2) = e^{x_2}(f(x_2) + f'(x_2)) = 0 \end{cases} \Rightarrow \exists x_1 \in (a, c), x_2 \in (c, b), s.t. F(x_1) = F(x_2) = 0$$

$F(x_1) = F(x_2) = 0$, 罗尔定理:

$$\exists \xi \in (x_1, x_2), s.t. F'(\xi) = e^{-\xi}[f''(\xi) - f(\xi)] = 0 \Rightarrow f''(\xi) = f(\xi)$$

综上所述, $\exists \xi \in (a, b), s.t. f''(\xi) = f(\xi)$

命题 5.9.18

设 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 二阶可导, $f''(x) \neq f(x)$, 证明: $\exists \xi \in (0, 2\pi), s.t. \tan \xi = \frac{2f'(\xi)}{f(\xi) - f''(\xi)}$

解



构造辅助函数:

$$F(x) = f(x) \sin x \Rightarrow \begin{cases} F'(x) = f(x) \cos x + f'(x) \sin x \\ F''(x) = -f(x) \sin x + f'(x) \sin x + f'(x) \cos x + f''(x) \sin x \end{cases}$$

$F(0) = F(\pi) = F(2\pi) = 0$, 罗尔定理:

$$\begin{cases} \exists x_1 \in (0, \pi), s.t. F'(x_1) = f'(x_1) \sin x_1 + f(x_1) \cos x_1 = 0 \\ \exists x_2 \in (\pi, 2\pi), s.t. F'(x_2) = f'(x_2) \sin x_2 + f(x_2) \cos x_2 = 0 \end{cases}$$

$F'(x_1) = F'(x_2) = 0$, 罗尔定理:

$$\begin{aligned} \exists \xi \in (x_1, x_2), s.t. F''(\xi) &= [f''(\xi) - f(\xi)] \sin \xi + 2f'(\xi) \cos \xi = 0 \\ f''(x) \neq f(x) \Rightarrow \tan \xi &= \frac{2f'(\xi)}{f(\xi) - f''(\xi)} \\ \text{综上所述, } \exists \xi \in (0, 2\pi), s.t. \tan \xi &= \frac{2f'(\xi)}{f(\xi) - f''(\xi)} \end{aligned}$$

命题 5.9.19

设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 二阶可导, 证明: $\forall a > 0, \exists c \in (2a, 4a), s.t. f(4a) - 2f(3a) + f(2a) = a^2 f''(c)$

解

构造辅助函数: $F(x) = f(x+a) - f(x)$

$$\exists c \in (2a, 4a), s.t. F(3a) - F(2a) = a^2 f''(c)$$

拉格朗日中值定理:

$$\exists \xi \in (2a, 3a), s.t. F(3a) - F(2a) = aF'(\xi) = a[f'(\xi+a) - f'(\xi)]$$

拉格朗日中值定理:

$$\exists c \in (\xi, \xi+a) \subset (3a, 4a), s.t. f'(\xi+a) - f'(\xi) = af''(c)$$

综上:

$$\forall a > 0, \exists c \in (2a, 4a), s.t. f(4a) - 2f(3a) + f(2a) = a^2 f''(c)$$

5.9.5 复合函数构造问题

命题 5.9.20

设 $f(x)$ 在 $[\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi]$ 可导, $f(\frac{3}{4}\pi) = f(\frac{7}{4}\pi) = 0$, 证明: $\exists \xi \in (\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi), s.t. f'(\xi) + f(\xi) = \cos \xi$

解



构造辅助函数: $F(x) = e^x \left[f(x) - \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x \right]$

$F(\frac{3\pi}{4}) = F(\frac{7\pi}{4}) = 0$, 罗尔定理:

$$\exists \xi \in (\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}), s.t. F'(\xi) = e^\xi [f'(\xi) + f(\xi) - \cos \xi] = 0$$

综上所述, $\exists \xi \in (\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi)$, s.t. $f'(\xi) + f(\xi) = \cos \xi$

命题 5.9.21

设 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 可导, 证明: $\exists \xi \in (1, 2)$, s.t. $\xi f'(\xi) - f(\xi) = f(2) - 2f(1)$



解

构造辅助函数:

$$F(x) = \frac{f(x) + f(2) - 2f(1)}{x} \Rightarrow \begin{cases} F(1) = F(2) = f(2) - f(1) \\ F'(x) = \frac{xf'(x) - f(x) - f(2) + 2f(1)}{x^2} \end{cases}$$

$F(1) = F(2) = 0$, 罗尔定理:

$$\exists \xi \in (0, 1), s.t. F'(\xi) = 0 \Rightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) - f(2) + 2f(1) = 0$$

综上所述: $\exists \xi \in (1, 2)$, s.t. $\xi f'(\xi) - f(\xi) = f(2) - 2f(1)$

柯西中值定理

构造辅助函数:

$$\begin{cases} F(x) = \frac{f(x)}{x} \\ G(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \\ G'(x) = -\frac{1}{x^2} \end{cases}$$

柯西中值定理:

$$\exists \xi \in (1, 2), s.t. \frac{F(2) - F(1)}{G(2) - G(1)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

$$\begin{cases} \frac{F(2) - F(1)}{G(2) - G(1)} = 2f(1) - f(2) \\ \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = f(\xi) - \xi f'(\xi) \end{cases} \Rightarrow \exists \xi \in (1, 2), s.t. \xi f'(\xi) - f(\xi) = f(2) - 2f(1)$$

综上所述: $\exists \xi \in (1, 2)$, s.t. $\xi f'(\xi) - f(\xi) = f(2) - 2f(1)$



命题 5.9.22

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 内可导, $g'(x) \neq 0$, 证明: $\exists \xi \in (a, b)$, s.t. $\frac{f(a) - f(\xi)}{g(\xi) - g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

解

构造辅助函数: $F(x) = [f(x) - f(a)][g(x) - g(b)]$

$$F'(x) = f'(x)[g(x) - g(b)] + g'(x)[f(x) - f(a)]$$

$F(a) = F(b) = 0$ 上使用罗尔定理:

$$\exists \xi \in (a, b), \text{ s.t. } F'(\xi) = f'(\xi)[g(\xi) - g(b)] + g'(\xi)[f(\xi) - f(a)] \Rightarrow \frac{f(a) - f(\xi)}{g(\xi) - g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$\text{综上所述: } \exists \xi \in (a, b), \text{ s.t. } \frac{f(a) - f(\xi)}{g(\xi) - g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

命题 5.9.23

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 可导, $f(0) = 0, \forall x \in (0, 1), f(x) > 0$, 证明: $\exists \xi \in (0, 1), \text{ s.t. } \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

解

构造辅助函数: $F(x) = f(x)f(1-x)$

$$F'(x) = f'(x)f(1-x) - f(x)f'(1-x)$$

$F(0) = F(1) = 0$, 罗尔定理:

$$\exists \xi \in (0, 1), \text{ s.t. } F'(\xi) = f'(\xi)f(1-\xi) - f(\xi)f'(1-\xi) \Rightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$

$$\text{综上所述: } \exists \xi \in (0, 1), \text{ s.t. } \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$

命题 5.9.24

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 可导, $f(0) = 0, \forall x \in (0, 1), f(x) > 0$, 证明: $\forall a > 0, \exists \xi \in (0, 1), \text{ s.t. } a \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

解

构造辅助函数: $F(x) = f^a(x)f(1-x)$



$$F'(x) = af^{a-1}(x)f'(x)f(1-x) - f^a(x)f'(1-x) = f^{a-1}(x)[af'(x)f(1-x) - f(x)f'(1-x)]$$

$F(0) = F(1) = 0$, 罗尔定理:

$$\exists \xi \in (0, 1), \text{ s.t. } F'(\xi) = f^{a-1}(\xi)[af'(\xi)f(1-\xi) - f(\xi)f'(1-\xi)] = 0$$

$$\forall x \in (0, 1), f(x) > 0 \Rightarrow f^{a-1}(\xi) > 0$$

$$af'(\xi)f(1-\xi) - f(\xi)f'(1-\xi) = 0 \Rightarrow a \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$

$$\text{综上所述: } \forall a > 0, \exists \xi \in (0, 1), \text{ s.t. } a \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$

命题 5.9.25

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可导, $f(a) = 0, \forall x \in (a, b], f(x) > 0$, 证明: $\forall m, n > 0, \exists \lambda, \mu \in (0, 1)$, s.t. $\frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} = \frac{mf'(\mu)}{nf(\mu)}$



解

构造辅助函数: $F(x) = f^m(x)f^n(a+b-x)$

$$F'(x) = mf^{m-1}(x)f'(x)f^n(a+b-x) - nf^m(x)f^{n-1}(a+b-x)$$

$F(a) = F(b) = 0$, 罗尔定理:

$$\exists \xi \in (a, b), \text{ s.t. } F'(\xi) = 0 \Rightarrow mf'(\xi)f(a+b-\xi) = nf(\xi)f'(a+b-\xi)$$

$$\exists \xi \in (a, b), \text{ s.t. } \frac{mf'(\xi)}{nf(\xi)} = \frac{f'(a+b-\xi)}{f(a+b-\xi)}$$

取 $\lambda = a+b-\xi, \mu = \xi$:

$$\forall m, n > 0, \exists \lambda, \mu \in (0, 1), \text{ s.t. } \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} = \frac{mf'(\mu)}{nf(\mu)}$$

命题 5.9.26

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 二阶可导, $g''(x) \neq 0, g(a) = g(b) = f(a) = f(b) = 0$, 证明: $\exists \xi \in (a, b), \text{ s.t. } \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$



解

构造辅助函数: $F(x) = f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$



$$F'(x) = f''(x)g(x) + f'(x)g'(x) - f'(x)g'(x) - f(x)g''(x) = f''(x)g(x) - f(x)g''(x)$$

$F(a) = F(b) = 0$, 罗尔定理:

$$\exists \xi \in (a, b), s.t. F'(\xi) = 0 \Rightarrow f''(\xi)g(\xi) - f(\xi)g''(\xi) = 0$$

$$\text{综上所述: } \exists \xi \in (a, b), s.t. \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$$

命题 5.9.27

设 $f(x)$ 二阶可导, $f(1) > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$, 证明: $f(x)f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有两个根.



解

构造辅助函数: $F(x) = f(x)f'(x)$

$$F'(x) = f(x)f''(x) + [f'(x)]^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0 \rightarrow \begin{cases} f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \\ \exists \xi > 0, x \in (0, \xi), f(x) < 0 \end{cases}$$

零点定理:

$$\exists c \in (0, 1), s.t. f(c) = 0$$

$f(0) = f(c) = 0$, 罗尔定理:

$$\exists \eta \in (0, c), s.t. f'(\eta) = 0$$

$F(0) = F(\eta) = F(c) = 0$, 罗尔定理:

$$\begin{cases} \exists x_1 \in (0, \eta), s.t. F'(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_1)f''(x_1) + [f'(x_1)]^2 = 0 \\ \exists x_2 \in (\eta, c), s.t. F'(x_2) = 0 \Rightarrow f(x_2)f''(x_2) + [f'(x_2)]^2 = 0 \end{cases}$$

综上所述: $f(x)f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有两个根 $x_1 \in (0, \eta)$, $x_2 \in (\eta, c)$

命题 5.9.28

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 二阶可导, $f'(a) = f'(b) = 0$, $f(x) > 0$, 证明: $\exists \xi \in (a, b), s.t. f(\xi)f''(\xi) - [f'(\xi)]^2 = 0$



解

构造辅助函数: $F(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

$$F'(x) = \frac{f''(x)f(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)}$$

$F(a) = F(b) = 0$, 罗尔定理:

$$\exists \xi \in (a, b), s.t. F'(\xi) = 0 \Rightarrow f''(\xi)f(\xi) - [f'(\xi)]^2 = 0$$

综上所述: $\exists \xi \in (a, b), s.t. f(\xi)f''(\xi) - [f'(\xi)]^2 = 0$

命题 5.9.29

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 二阶可导, $f'(a) = f'(b) = 0$, $f(x) > 0$, 证明: $\exists \xi \in (a, b), s.t. f(\xi)f''(\xi) - 2[f'(\xi)]^2 = 0$



解

构造辅助函数: $F(x) = \frac{f'(x)}{f^2(x)}$

$$F'(x) = \frac{f''(x)f(x) - 2[f'(x)]^2}{f^3(x)}$$

$F(a) = F(b) = 0$, 罗尔定理:

$$\exists \xi \in (a, b), s.t. F'(\xi) = 0 \Rightarrow f''(\xi)f(\xi) - 2[f'(\xi)]^2 = 0$$

综上所述: $\exists \xi \in (a, b), s.t. f(\xi)f''(\xi) - 2[f'(\xi)]^2 = 0$

5.9.6 拉格朗日中值定理 & 柯西中值定理

命题 5.9.30

设 $a, b > 0$, 证明: $\exists \xi \in (a, b). s.t. ae^b - be^a = (1 - \xi)e^\xi(a - b)$



解

构造辅助函数: $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2} \\ g'(x) = -\frac{1}{x^2} \end{cases}$$

柯西中值定理:

$$\exists \xi \in (a, b), s.t. \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$



$$\begin{cases} \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{ae^b - be^a}{a - b} \\ \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = (1 - \xi)e^\xi \end{cases}$$

综上所述: $\exists \xi \in (a, b), s.t. ae^b - be^a = (1 - \xi)e^\xi(a - b)$

命题 5.9.31

设 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 可导, 证明: $\exists \xi \in (1, 2), s.t. f(2) - f(1) = \frac{1}{2}\xi^2 f'(\xi)$



解

构造辅助函数: $g(x) = \frac{1}{x}$

柯西中值定理:

$$\exists \xi \in (1, 2), s.t. \frac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

我们有:

$$\begin{cases} \frac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)} = -2[f(2) - f(1)] \\ \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = -\xi^2 f'(\xi) \end{cases} \Rightarrow f(2) - f(1) = \frac{1}{2}\xi^2 f'(\xi)$$

综上所述: $\exists \xi \in (1, 2), s.t. f(2) - f(1) = \frac{1}{2}\xi^2 f'(\xi)$

命题 5.9.32

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, (a, b) 可导, 证明: $\exists \xi \in (1, 2), s.t. 2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi)$



解

构造辅助函数: $g(x) = x^2$

柯西中值定理:

$$\exists \xi \in (1, 2), s.t. \frac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

我们有:

$$\begin{cases} \frac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)} = \frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} \\ \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{2\xi} \end{cases} \Rightarrow 2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi)$$

综上所述: $\exists \xi \in (1, 2), s.t. 2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi)$



5.9.7 双中值问题

命题 5.9.33

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可导, $f(a) = f(b) = 1$, 证明: $\exists \xi_1, \xi_2 \in (a, b)$, s.t. $e^{\xi_2 - \xi_1} [f'(\xi_2) + f(\xi_2)] = 1$

解

构造辅助函数: $F(x) = e^x f(x)$

$$F'(x) = e^x [f'(x) + f(x)]$$

拉格朗日中值定理:

$$\exists \xi \in (a, b), \text{ s.t. } F(b) - F(a) = F'(\xi)(b - a) \Rightarrow \frac{e^b f(b) - e^a f(a)}{b - a} = e^\xi [f(\xi) + f'(\xi)]$$

$$f(a) = f(b) = 1 \Rightarrow \frac{e^b f(b) - e^a f(a)}{b - a} = \frac{e^b - e^a}{b - a}$$

构造辅助函数: $g(x) = e^x$

拉格朗日中值定理:

$$\exists \eta \in (a, b), \text{ s.t. } \frac{e^b - e^a}{b - a} = g'(\eta) = e^\eta$$

$$e^\eta = e^\xi [f(\xi) + f'(\xi)]$$

$$\text{取 } \xi_1 = \eta, \xi_2 = \xi \rightarrow \exists \xi_1, \xi_2 \in (a, b), \text{ s.t. } e^{\xi_2 - \xi_1} [f'(\xi_2) + f(\xi_2)] = 1$$

注

取 $\xi_1 = \xi_2 \rightarrow \exists \xi \in (a, b)$, s.t. $f'(x) + f(x) - 1 = 0$

构造辅助函数: $F(x) = e^x [f(x) - 1]$

$$F'(x) = e^x [f'(x) + f(x) - 1]$$

$F(a) = F(b) = 0$, 罗尔定理:

$$\exists \xi \in (a, b), \text{ s.t. } F'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) + f(\xi) - 1 = 0$$

综上所述: $\exists \xi_1 = \xi_2 \in (a, b)$, s.t. $e^{\xi_2 - \xi_1} [f'(\xi_2) + f(\xi_2)] = 1$

命题 5.9.34

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, (a, b) 可导, 且 $a > 0$, 证明: $\exists \xi, \eta \in (a, b)$, s.t. $f'(\xi) = (a + b) \frac{f'(\eta)}{2\eta}$

解



构造辅助函数: $g(x) = x^2$

柯西中值定理:

$$\exists \eta \in (a, b), s.t. \frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = \frac{f'(\eta)}{2\eta} \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = (a + b) \frac{f'(\eta)}{2\eta}$$

拉格朗日中值定理:

$$\exists \xi \in (a, b), s.t. \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

综上所述: $\exists \xi, \eta \in (a, b), s.t. f'(\xi) = (a + b) \frac{f'(\eta)}{2\eta}$

注

令 $\xi = \eta \rightarrow \exists \sigma, s.t. f'(\sigma)[1 - \frac{a+b}{2\sigma}] = 0$

取 $\sigma = \frac{a+b}{2}$ 证毕

命题 5.9.35

设 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 连续, $(1, 2)$ 可导, 且 $f'(x) \neq 0$, 证明: $\exists \xi, \eta, \gamma \in (1, 2), s.t. \frac{f'(\gamma)}{f'(\xi)} = \frac{\xi}{\eta}$

解

构造辅助函数: $g(x) = \ln x$

柯西中值定理:

$$\exists \xi \in (1, 2), s.t. \frac{f(2) - f(1)}{\ln 2 - \ln 1} = \xi f'(\xi)$$

拉格朗日中值定理:

$$\exists \gamma \in (1, 2), s.t. \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f'(\gamma)$$

$$\frac{f'(\gamma)}{f'(\xi)} = \xi \ln 2$$

综上所述: 取 $\xi, \gamma \in (1, 2), \eta = \frac{1}{\ln 2} \in (1, 2), s.t. \frac{f'(\gamma)}{f'(\xi)} = \frac{\xi}{\eta}$

注

取 $\xi = \gamma = \eta \in (a, b), s.t. \frac{f'(\gamma)}{f'(\xi)} = \frac{\xi}{\eta} = 1$ 恒成立



命题 5.9.36

设 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 二阶连续可导, $f'(0) = 0$, 证明: $\exists \xi, \eta, \omega \in (0, \frac{\pi}{2})$, s.t. $f'(\xi) = \frac{\pi}{2}\eta \cdot \sin 2\xi \cdot f''(\omega)$

解

$$\frac{f'(\xi)}{\sin 2\xi} = \frac{\pi}{2}\eta f''(\omega)$$

拉格朗日中值定理:

$$\begin{cases} \exists \eta \in (0, \frac{\pi}{2}), \text{s.t. } f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = \frac{\pi}{2}f'(\eta) \\ \exists \omega \in (0, \eta), \text{s.t. } f'(\eta) = f'(\eta) - f'(0) = \eta f''(\omega) \Rightarrow \frac{\pi}{2}\eta f''(\omega) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

构造辅助函数: $g(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x$

柯西中值定理:

$$\exists \xi \in (0, \frac{\pi}{2}), \text{s.t. } \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)}{g\left(\frac{\pi}{2}\right) - g(0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = \frac{f'(\xi)}{\sin 2\xi}$$

综上所述: $\exists \xi, \eta, \omega \in (0, \frac{\pi}{2})$, s.t. $f'(\xi) = \frac{\pi}{2}\eta \cdot \sin 2\xi \cdot f''(\omega)$

命题 5.9.37

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续, $(0, 1)$ 可导, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, 证明:

- (1). $\exists c \in (0, 1)$, s.t. $f(c) = 1 - c$
- (2). $\exists \xi, \eta \in (0, 1) (\xi \neq \eta)$ s.t. $f'(\xi)f'(\eta) = 1$

解

(1). 构造辅助函数: $F(x) = f(x) + x - 1$

$$F(0) = f(0) - 1 = -1 < 0, F(1) = f(1) = 1 > 0$$

零点定理:

$$\exists c \in (0, 1), \text{s.t. } F(c) = 0 \Rightarrow f(c) = 1 - c$$

(2).

拉格朗日中值定理:

$$\begin{cases} \exists \xi \in (0, c), \text{s.t. } \frac{F(c) - F(0)}{c} = F'(\xi) \\ \exists \eta \in (c, 1), \text{s.t. } \frac{F(1) - F(c)}{1 - c} = F'(\eta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(\xi) = \frac{1 - c}{c} \\ f'(\eta) = \frac{c}{1 - c} \\ f'(\xi)f'(\eta) = 1 \end{cases}$$



综上所述: $\exists \xi, \eta \in (0, 1) (\xi \neq \eta)$, s.t. $f'(\xi)f'(\eta) = 1$

命题 5.9.38

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续, $(0, 1)$ 可导, $f(0) = 0, f(1) = 1$, 证明:

$$(1). \exists c \in (0, 1), \text{ s.t. } f(c) = \frac{1}{2}$$

$$(2). \exists \xi, \eta \in (0, 1) (\xi \neq \eta), \text{ s.t. } \frac{1}{f'(\xi)} + \frac{1}{f'(\eta)} = 2$$



解

(1).

$f(0) = 0, f(1) = 1$, 介值定理:

$$\exists c \in (0, 1), \text{ s.t. } f(c) = \frac{1}{2}$$

(2). 拉格朗日中值定理:

$$\begin{cases} \exists \xi \in (0, c), \text{ s.t. } \frac{f(c) - f(0)}{c} = f'(\xi) \\ \exists \eta \in (\frac{1}{2}, 1), \text{ s.t. } \frac{f(1) - f(c)}{1 - c} = f'(\eta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(\xi) = \frac{1}{2c} \\ f'(\eta) = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}c} \\ \frac{1}{f'(\xi)} + \frac{1}{f'(\eta)} = 2 \end{cases}$$

$$\text{综上所述: } \exists \xi, \eta \in (0, 1) (\xi \neq \eta), \text{ s.t. } \frac{1}{f'(\xi)} + \frac{1}{f'(\eta)} = 2$$

命题 5.9.39

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 可导, $f(0) = 0, f(1) = 1$, $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 均为正数, 证明: 存在互不相等的 $\xi_i \in (0, 1)$, s.t. $\frac{\lambda_1}{f'(\xi_1)} + \frac{\lambda_2}{f'(\xi_2)} + \dots + \frac{\lambda_n}{f'(\xi_n)} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$



解

$f(0) = 0, f(1) = 1$, 介值定理:

$\exists x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in (0, 1)$ 满足:

$$\begin{cases} f(x_0) = f(0) = 0 \\ f(x_1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} \\ f(x_2) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} \\ \dots \\ f(x_{n-1}) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} \\ f(x_n) = f(1) = 1 \end{cases}$$



拉格朗日中值定理:

$$\exists \xi_i \in (x_{i-1}, x_i) (i = 1, 2, \dots, n), \text{ s.t. } \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i) \Rightarrow x_i - x_{i-1} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{f'(\xi_i)}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = 1 \\ f(x_i) - f(x_{i-1}) = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^n \lambda_j} \\ \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{f'(\xi_i)} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \lambda_j} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{f'(\xi_i)} \end{cases} \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{f'(\xi_i)} = \sum_{j=1}^n \lambda_j$$

综上所述: 存在互不相等的 $\xi_i \in (0, 1)$, s.t. $\frac{\lambda_1}{f'(\xi_1)} + \frac{\lambda_2}{f'(\xi_2)} + \dots + \frac{\lambda_n}{f'(\xi_n)} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$

命题 5.9.40

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 可导, $f(0) = 0, f(1) = 1$, 证明: 存在互不相等的 $\xi_i \in (0, 1)$, s.t. $\sum_{i=1}^n \frac{1}{f'(\xi_i)} = n$



解

$f(0) = 0, f(1) = 1$, 介值定理:

$\exists x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in (0, 1)$ 满足:

$$\begin{cases} f(x_0) = f(0) = 0 \\ f(x_1) = \frac{1}{n} \\ f(x_2) = \frac{2}{n} \\ \dots \\ f(x_{n-1}) = \frac{n-1}{n} \\ f(x_n) = f(1) = 1 \end{cases}$$

拉格朗日中值定理:

$$\exists \xi_i \in (x_{i-1}, x_i) (i = 1, 2, \dots, n), \text{ s.t. } \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i) \Rightarrow x_i - x_{i-1} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{f'(\xi_i)}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = 1 \\ f(x_i) - f(x_{i-1}) = \frac{1}{n} \\ \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{f'(\xi_i)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{f'(\xi_i)} \end{cases} \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{f'(\xi_i)} = \sum_{j=1}^n \lambda_j$$



综上所述, 我们得到: 存在互不相等的 $\xi_i \in (0, 1)$, s.t. $\sum_{i=1}^n \frac{1}{f'(\xi_i)} = n$

命题 5.9.41

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 可导, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, 证明: $\xi, \eta \in (0, 1)$ ($\xi \neq \eta$), s.t. $\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a+b$ ($a, b > 0$)



解

$f(0) = 0$, $f(1) = 1$ 介值定理:

$$\exists c \in (0, 1), \text{s.t. } f(c) = \frac{a}{a+b}$$

拉格朗日中值定理:

$$\begin{cases} \exists \xi \in (0, c), \text{s.t. } \frac{f(c) - f(0)}{c} = f'(\xi) \\ \exists \eta \in (c, 1), \text{s.t. } \frac{f(1) - f(c)}{1 - c} = f'(\eta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{f'(\xi)} = \frac{(a+b)c}{a} \\ \frac{1}{f'(\eta)} = \frac{(1-c)(a+b)}{b} \\ \frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = (a+b)c + (1-c)(a+b) = a+b \end{cases}$$

综上所述: $\xi, \eta \in (0, 1)$ ($\xi \neq \eta$), s.t. $\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a+b$

命题 5.9.42

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 可导, $f(0) = 0$, $f(1) = \frac{1}{4}$, 证明: $\xi, \eta \in (0, 1)$ ($\xi \neq \eta$), s.t. $f'(\xi) + f'(\eta) = \eta - \xi$



解

构造辅助函数: $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^2$, $h(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$

$c \in (0, 1)$, 拉格朗日中值定理:

$$\begin{cases} \exists \xi \in (0, c), \text{s.t. } \frac{g(c) - g(0)}{c} = g'(c) \\ \exists \eta \in (c, 1), \text{s.t. } \frac{h(1) - h(c)}{1 - c} = h'(c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(\xi) + \xi = \frac{2f(c) + c^2}{2c} \\ f'(\eta) - \eta = \frac{c^2 - 2f(c) - 2f(1)}{2 - 2c} \end{cases}$$

令 $c = \frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} f'(\xi) + \xi = 2f(c) + c^2 \\ f'(\eta) - \eta = c^2 - 2f(c) - 2f(1) \end{cases} \Rightarrow f'(\xi) + \xi + f'(\eta) - \eta = 2c^2 - 2f(1) = 0$$

综上所述: $\xi \in (0, \frac{1}{2})$, $\eta \in (\frac{1}{2}, 1)$, s.t. $f'(\xi) + f'(\eta) = \eta - \xi$



命题 5.9.43

设 $f(x) \in \mathbb{R}[0, 1]$, $\int_0^1 f(x)dx \neq 0$, 证明: 存在互异的三个数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in [0, 1]$, 满足下列不等式:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{8} \int_0^1 f(x)dx &= \left[\frac{1}{1+\xi_1^2} \int_0^{\xi_1} f(x)dx + f(\xi_1) \arctan \xi_1 \right] \xi_3 \\ &= \left[\frac{1}{1+\xi_2^2} \int_0^{\xi_2} f(x)dx + f(\xi_2) \arctan \xi_2 \right] (1-\xi_3)\end{aligned}$$



解

构造辅助函数:

$$\begin{aligned}F(x) = \arctan x \int_0^x f(t)dt &\rightarrow \begin{cases} F(0) = 0 \\ F(1) = \frac{\pi}{4} \int_0^1 f(x)dx \end{cases} \\ F'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \int_0^x f(t)dt + f(x) \arctan x\end{aligned}$$

等价命题:

存在互异的三个数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in [0, 1]$, s.t. $\frac{1}{2}F(1) = F'(\xi_1)\xi_3 = F'(\xi_2)(1-\xi_3)$

介值定理:

$$\exists c \in (0, 1), \text{s.t. } F(c) = \frac{1}{2}F(1)$$

拉格朗日中值定理:

$$\begin{cases} \exists x_1 \in (0, c), \text{s.t. } \frac{F(c)-F(0)}{c} = F'(x_1) \\ \exists x_2 \in (c, 1), \text{s.t. } \frac{F(1)-F(c)}{1-c} = F'(x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}F(1) = cF'(x_1) \\ \frac{1}{2}F(1) = (1-c)F'(x_2) \end{cases}$$

取 $c = \xi_3, \xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2$, 证毕

综上所述: 存在互异的三个数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in [0, 1]$, 满足下列不等式:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{8} \int_0^1 f(x)dx &= \left[\frac{1}{1+\xi_1^2} \int_0^{\xi_1} f(x)dx + f(\xi_1) \arctan \xi_1 \right] \xi_3 \\ &= \left[\frac{1}{1+\xi_2^2} \int_0^{\xi_2} f(x)dx + f(\xi_2) \arctan \xi_2 \right] (1-\xi_3)\end{aligned}$$

命题 5.9.44

设 $f(x), g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, $\int_0^1 f(x)dx = 3 \int_{\frac{2}{3}}^1 g(x)dx$, 证明: 存在两个不同的点 $\xi, \eta \in (0, 1)$, s.t. $f'(\xi) = g'(\xi)[f(\eta) - f(\xi)]$



解

$$\int_0^1 f(x)dx = 3 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx \Rightarrow \int_0^{\frac{2}{3}} f(x)dx = 2 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx$$

积分中值定理:

$$\begin{cases} \exists x_1 \in (0, \frac{2}{3}), \text{ s.t. } \int_0^{\frac{2}{3}} f(x)dx = \frac{2}{3}f(x_1) \\ \exists x_2 \in (\frac{2}{3}, 1), \text{ s.t. } \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx = \frac{1}{3}f(x_2) \end{cases} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

构造辅助函数: $F(x) = [f(x) - f(x_1)]e^{g(x)}$

$$F'(x) = e^{g(x)} [f'(x) + g'(x)[f(x) - f(x_1)]]$$

 $F(x_1) = F(x_2) = 0$, 罗尔定理:

$$\exists \xi \in (x_1, x_2), \text{ s.t. } F'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) + g'(\xi)[f(\xi) - f(x_1)] = 0$$

令 $\eta = x_1, \exists \xi \in (x_1, x_2), \text{ s.t. } f'(\xi) = g'(\xi)[f(\eta) - f(\xi)]$ 综上所述: $\exists \xi, \eta \in (0, 1), \text{ s.t. } f'(\xi) = g'(\xi)[f(\eta) - f(\xi)]$

5.9.8 泰勒公式

命题 5.9.45

设 $f(x)$ 二阶连续可导, $f''(x) \neq 0$, 若 $f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)$ ($0 < \theta < 1$), 证明:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}$$

解

 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处泰勒展开式:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2, \xi \in (x_0 \sim x)$$

令 $x_0 = x, x = x_0 + h$:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{f''(\xi)}{2}h^2 \rightarrow f'(x+\theta h) - f'(x) = \frac{f''(\xi)}{2}h$$

拉格朗日中值定理:

$$\exists \eta \in (x, x+\theta h), \text{ s.t. } f'(x+\theta h) - f'(x) = \theta h f''(\eta) \Rightarrow \theta = \frac{f''(\eta)}{2f''(\xi)}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(\eta)}{2f''(\xi)} = \frac{1}{2}$$

综上所述: $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}$ 

命题 5.9.46

设 $f(x)$ 有 $n+1$ 阶导数, 若 $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n$ ($0 < \theta < 1$), 且 $f^{(n+1)}(a) \neq 0$

证明: $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n+1}$



解

$f(x)$ 在 $x = a$ 处泰勒展开式:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \xi \in (a \sim x)$$

令 $x = a + h$:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}, \xi \in (a \sim x)$$

$$\frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1} \rightarrow f^{(n)}(a+\theta h) - f^{(n)}(a) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{n+1}h, \xi \in (a \sim a+h)$$

拉格朗日中值定理:

$$\exists \eta \in (a \sim a+h), s.t. f^{(n)}(a+\theta h) - f^{(n)}(a) = \theta h f^{(n+1)}(\eta) \Rightarrow \theta = \frac{1}{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{f^{(n+1)}(\eta)}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{f^{(n+1)}(\eta)} = \frac{1}{n+1}$$

命题 5.9.47

设 $f(x)$ 有 n 阶连续导数, $f^{(k)}(x_0) = 0$ ($k = 2, 3, \dots, n-1$), $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, $f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0 + \theta h)$, 其中 $\theta \in (0, 1)$, 证明: $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$



解

$f(x)$ 在 $x = x_0$ 处泰勒展开式:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \xi \in (x_0 \sim x)$$

令 $x = x_0 + h$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}, \xi \in (x_0 \sim x)$$

$f^{(k)}(x_0) = 0$ ($k = 2, 3, \dots, n-1$):

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n \Rightarrow f'(x_0 + \theta h) - f'(x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^{n-1}$$



$f'(x)$ 在 $x = x_0$ 处泰勒展开式:

$$f'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + \frac{f'''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2} + \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}, \eta \in (x_0 \sim x)$$

令 $x = x_0 + \theta h$:

$$f'(x_0 + \theta h) = f'(x_0) + f''(x_0)\theta h + \frac{f'''(x_0)}{2}(\theta h)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-2)!}(\theta h)^{n-2} + \frac{f^{(n)}(\eta)}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1}, \eta \in (x_0 \sim x)$$

$f^{(k)}(x_0) = 0 (k = 2, 3, \dots, n-1)$:

$$f'(x_0 + \theta h) = f'(x_0) + \frac{f^{(n)}(\eta)}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1} \Rightarrow \theta^{n-1} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{nf^{(n)}(\eta)}$$

$$\theta^{n-1} = \frac{f^{(n)}\xi}{nf^{(n)}(\eta)} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \theta^{n-1} = \frac{1}{n}$$

综上所述: $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

命题 5.9.48

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的邻域内四阶可导, $|f^{(4)}(x)| \leq M (M > 0)$, 证明: 对此邻域上任意一个不同于 x_0 的点 a :

$$\left| f''(x_0) - \frac{f(a) + f(b) - 2f(x_0)}{(a - x_0)^2} \right| \leq \frac{M}{12}(a - x_0)^2, a + b = 2x_0$$



解

$f(x)$ 在 $x = x_0$ 的泰勒展开式:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{6}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}(x - x_0)^4, \xi \in (x_0 \sim x)$$

令 $x = a, x = b$:

$$\begin{cases} f(a) = f(x_0) + f'(x_0)(a - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(a - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{6}(a - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{24}(a - x_0)^4 \\ f(b) = f(x_0) + f'(x_0)(b - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(b - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{6}(b - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_2)}{24}(b - x_0)^4 \end{cases}$$

$a + b = 2x_0$:

$$f(a) + f(b) - 2f(x_0) = 2f''(x_0)(a - x_0)^2 + \frac{[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)]}{24}(a - x_0)^4$$

$$\left| f''(x_0) - \frac{f(a) + f(b) - 2f(x_0)}{(a - x_0)^2} \right| = \left| \frac{[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)]}{24} (a - x_0)^2 \right| \leq \frac{M}{12}(a - x_0)^2$$

综上所述:

$$\left| f''(x_0) - \frac{f(a) + f(b) - 2f(x_0)}{(a - x_0)^2} \right| \leq \frac{M}{12}(a - x_0)^2, a + b = 2x_0$$



命题 5.9.49

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 三阶连续可导, 证明:

$$\exists \xi \in (a, b), \text{ s.t. } f(b) = f(a) + f'(\frac{a+b}{2})(b-a) + \frac{(b-a)^3}{24} f^{(3)}(\xi)$$



解

$f(x)$ 在 $x = \frac{a+b}{2}$ 的泰勒展开式:

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{f^{(3)}(\xi)}{6}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3, \xi \in (x, \frac{a+b}{2})$$

令 $x = a, x = b$:

$$\begin{cases} f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right) + \frac{f''\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \frac{f^{(3)}(\xi_1)}{6}\left(\frac{a-b}{2}\right)^3, & \xi_1 \in (a, \frac{a+b}{2}) \\ f(b) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{f''\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \frac{f^{(3)}(\xi_2)}{6}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3, & \xi_2 \in (\frac{a+b}{2}, b) \end{cases}$$

$f(b) - f(a)$:

$$f(b) = f(a) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{(b-a)^3}{24}[2f^{(3)}(\xi_1) + 2f^{(3)}(\xi_2)]$$

介值定理:

$$\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2), \text{ s.t. } f^{(3)}(\xi) = \frac{f^{(3)}(\xi_1) + f^{(3)}(\xi_2)}{2}$$

综上所述:

$$\exists \xi \in (a, b), \text{ s.t. } f(b) = f(a) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{(b-a)^3}{24} f^{(3)}(\xi)$$

命题 5.9.50

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 二阶连续可导, 证明:

$$\exists \xi \in (a, b), \text{ s.t. } f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) = \frac{(b-a)^2}{4} f''(\xi)$$



解

$f(x)$ 在 $x = \frac{a+b}{2}$ 处泰勒展开式:

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2, \xi \in (x, \frac{a+b}{2})$$

令 $x = a, x = b$:

$$\begin{cases} f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right) + \frac{f''(\xi_1)}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2, & \xi_1 \in (a, \frac{a+b}{2}) \\ f(b) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{f''(\xi_2)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2, & \xi_2 \in (\frac{a+b}{2}, b) \end{cases}$$

$f(a) + f(b)$:



$$f(b) + f(a) = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8}[f''(\xi_1) + f''(\xi_2)]$$

介值定理:

$$\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2), \text{ s.t. } f''(\xi) = \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2}$$

综上所述:

$$\exists \xi \in (a, b), \text{ s.t. } f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) = \frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$$

命题 5.9.51

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 $n(n \geq 2)$ 阶可导, 满足 $f^{(i)}(a) = f^{(i)}(b) = 0(i = 1, 2, \dots, n-1)$, 证明:

$$\exists \xi \in (a, b), \text{ s.t. } |f^{(n)}(\xi)| \geq \frac{2^{n-1}n!}{(b-a)^n}|f(b) - f(a)|$$



解

$f(x)$ 在 $x=a$ 和 $x=b$ 处的泰勒展开式:

$$\begin{cases} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!}(x-a)^n, & \xi_1 \in (a, x) \\ f(x) = f(b) + f'(b)(x-b) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!}(x-b)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi_2)}{n!}(x-b)^n, & \xi_2 \in (x, b) \end{cases}$$

令 $x = \frac{a+b}{2}$, 且 $f^{(i)}(a) = f^{(i)}(b) = 0(i = 1, 2, \dots, n-1)$:

$$\begin{cases} f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + \frac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^n \\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + \frac{f^{(n)}(\xi_2)}{n!}\left(\frac{a-b}{2}\right)^n \end{cases} \Rightarrow f(b) - f(a) = \frac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^n - \frac{f^{(n)}(\xi_2)}{n!}\left(\frac{a-b}{2}\right)^n$$

$$\frac{2^{n-1}n!|f(b) - f(a)|}{(b-a)^n} = \frac{|(-1)^nf^{(n)}(\xi_2) + f^{(n)}(\xi_1)|}{2} \leq \frac{|f^{(n)}(\xi_2)| + |f^{(n)}(\xi_1)|}{2}$$

介值定理:

$$\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2), \text{ s.t. } |f^{(n)}(\xi)| = \frac{|f^{(n)}(\xi_1)| + |f^{(n)}(\xi_2)|}{2}$$

综上所述:

$$\exists \xi \in (a, b), \text{ s.t. } |f^{(n)}(\xi)| \geq \frac{2^{n-1}n!}{(b-a)^n}|f(b) - f(a)|$$

命题 5.9.52

$f(x)$ 在 $[0, 1]$ 二阶可导, 且 $|f(x)| \leq a, |f''(x)| \leq b$, 证明: $|f'(x)| \leq 2a + b$



解



$f(x)$ 在 x_0 处泰勒展开式:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(\xi)(x - x_0)^2, \xi \in (x \sim x_0)$$

令 $x_0 = x, x = 0, x = 1$:

$$\begin{cases} f(0) = f(x) + f'(x)(0 - x) + f''(\xi_1)(0 - x)^2, & \xi_1 \in (0, x) \\ f(1) = f(x) + f'(x)(1 - x) + f''(\xi_2)(1 - x)^2, & \xi_2 \in (x, 1) \end{cases}$$

$f(1) - f(0)$:

$$f'(x) = f(0) - f(1) + f''(\xi_2)(1 - x)^2 - f''(\xi_1)x^2$$

绝对值三角不等式:

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= |f(0) - f(1) + f''(\xi_2)(1 - x)^2 - f''(\xi_1)x^2| \\ &\leq |f(0)| + |f(1)| + |f''(\xi_2)|(1 - x)^2 + |f''(\xi_1)|x^2 \\ &\leq 2a + b [x^2 + (1 - x)^2] \\ &\leq 2a + b \end{aligned}$$

综上所述: $|f'(x)| \leq 2a + b$

命题 5.9.53

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 三阶可导, 且 $f(x)$ 和 $f^{(3)}(x)$ 有界, 证明: $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上也有界



解

不妨设 $|f(x)| \leq a, |f^{(3)}(x)| \leq b$

1. $f''(x)$ 有界

(1). 当 $x > 1$ 时, $f(x)$ 在 x_0 处泰勒展开式:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(\xi)}{6}(x - x_0)^3, \xi \in (x_0, x)$$

令 $x_0 = x, x = x_0 + 1$:

$$\begin{cases} f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{f''(x)}{2} + \frac{f^{(3)}(\xi_1)}{6}, & \xi_1 \in (x, x+1) \\ f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{f''(x)}{2} - \frac{f^{(3)}(\xi_2)}{6}, & \xi_2 \in (x-1, x) \end{cases}$$

$f(x+1) + f(x-1)$:

$$\begin{aligned} |f''(x)| &= |f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) + \frac{f^{(3)}(\xi_1) - f^{(3)}(\xi_2)}{6}| \\ &\leq |f(x+1)| + |f(x-1)| + 2|f(x)| + \frac{1}{6} [|f^{(3)}(\xi_1)| + |f^{(3)}(\xi_2)|] \\ &\leq 4a + \frac{b}{3} \end{aligned}$$



(2). 当 $0 < x \leq 1$ 时:

$$\begin{aligned}|f''(x)| &= |f''(x) - f''(2) + f''(2)| \\&\leq |f''(x) - f''(2)| + |f''(2)| \\&\leq |(x-2)f^{(3)}(\xi_3)| + |f''(2)| \\&\leq 2b + 4a + \frac{b}{3}\end{aligned}$$

综上所述: $f''(x)$ 有界, 记 $|f''(x)| < c$

2. $f'(x)$ 有界

(1). 当 $x > 1$ 时, $f(x)$ 在 x_0 处泰勒展开式:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2$$

令 $x = x_0 + 1, x_0 = x$:

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{f''(\xi_1)}{2}$$

$$\begin{aligned}|f'(x)| &= |f(x+1) - f(x) - \frac{f''(\xi_1)}{2}| \\&\leq |f(x+1)| + |f(x)| + \frac{|f''(\xi_1)|}{2} \\&\leq 2a + \frac{c}{2}\end{aligned}$$

(2). 当 $0 < x \leq 1$ 时:

$$\begin{aligned}|f'(x)| &= |f'(x) - f'(2) + f'(2)| \\&\leq |f'(x) - f'(2)| + |f'(2)| \\&\leq |(x-2)f''(\xi)| + |f'(2)| \\&\leq 2c + 2a + \frac{c}{2}\end{aligned}$$

综上所述: $f'(x)$ 有界

命题 5.9.54

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 二阶可导, 记 $M_i = \max|f^{(i)}(x)|(i = 0, 1, 2)$, 证明: $M_1^2 \leq 4M_0M_2$



解

$f(x)$ 在 $x = x_0$ 处泰勒展开式:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2, \xi \in (x \sim x_0)$$

令 $x = x_0 + h, x_0 = x$:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2$$



绝对值三角不等式:

$$\begin{aligned}|f'(x)| &= \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f''(\xi)}{2}h \right| \\&\leq \frac{|f(x+h)| + |f(x)|}{|h|} + \frac{|f''(\xi)|}{2}|h| \\&\leq \frac{2M_0}{|h|} + \frac{M_2}{2}|h|\end{aligned}$$

$$\forall x, h, s.t. |f'(x)| \leq \frac{2M_0}{|h|} + \frac{M_2}{2}|h| \Rightarrow M_1 < \min\left\{\frac{2M_0}{|h|} + \frac{M_2}{2}|h|\right\}$$

平均值不等式:

$$\frac{2M_0}{|h|} + \frac{M_2}{2}|h| \geq 2\sqrt{M_0 M_2} \Rightarrow M_1^2 \leq 4M_0 M_2$$

综上所述: $M_1^2 \leq 4M_0 M_2$

命题 5.9.55

$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 二阶可导, 记 $M_i = \max|f^{(i)}(x)|(i = 0, 1, 2)$, 证明: $M_1^2 \leq 2M_0 M_2$



解

$f(x)$ 在 $x = x_0$ 处泰勒展开式:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2, \xi \in (x \sim x_0)$$

令 $x = x_0 + h, x = x_0 - h$:

$$\begin{cases} f(x+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(\xi_1)}{2}h^2 \\ f(x-h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(\xi_2)}{2}h^2 \end{cases}$$

两式相减:

$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x_0)h + \frac{f''(\xi_1) - f''(\xi_2)}{2}h^2$$

绝对值三角不等式:

$$\begin{aligned}|f'(x_0)| &= \left| \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{f''(\xi_1) - f''(\xi_2)}{4}h \right| \\&\leq \frac{|f(x+h)| + |f(x)|}{|2h|} + \frac{|f''(\xi_1) + f''(\xi_2)|}{4}|h| \\&\leq \frac{M_0}{|h|} + \frac{M_2}{2}|h|\end{aligned}$$

$$\forall x, h, s.t. |f'(x)| \leq \frac{M_0}{|h|} + \frac{M_2}{2}|h| \Rightarrow M_1 < \min\left\{\frac{M_0}{|h|} + \frac{M_2}{2}|h|\right\}$$

平均值不等式:

$$\frac{M_0}{|h|} + \frac{M_2}{2}|h| \geq \sqrt{2M_0 M_2} \Rightarrow M_1^2 \leq 2M_0 M_2$$



综上所述: $M_1^2 \leq 2M_0M_2$

5.9.9 广义罗尔定理

命题 5.9.56

1. $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = A$, 证明: $\exists \xi \in (a, b), s.t. f'(\xi) = 0$
2. $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内可导, 且 $f(0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 证明: $\exists \xi \in (0, +\infty), s.t. f'(\xi) = 0$
3. $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内可导, 且 $0 \leq f(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$, 证明: $\exists \xi > 0, s.t. f'(\xi) = \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$
4. $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内可导, $f(0) = 1$, 且 $|f(x)| \leq e^{-x}$, 证明: $\exists \xi > 0, s.t. f'(\xi) + e^{-\xi} = 0$

解

1. 构造辅助函数: $g(x) = \begin{cases} A, & x = a \\ f(x), & x \in (a, b) \\ A, & x = b \end{cases}$

$g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导

$g(a) = g(b) = A$, 罗尔定理:

$$\exists \xi \in (a, b), s.t. g'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = 0$$

综上所述: $\exists \xi \in (a, b), s.t. f'(\xi) = 0$

2. 构造辅助函数: $g(x) = \begin{cases} f(\tan x), & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ A, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$g(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上连续, $(0, \frac{\pi}{2})$ 上可导

$g(0) = g(\frac{\pi}{2}) = A$, 罗尔定理:

$$\exists \eta \in (0, \frac{\pi}{2}), s.t. f'(\tan \eta) = 0 \Rightarrow \exists \xi \in (0, +\infty), s.t. f'(\xi) = 0$$

综上所述: $\exists \xi \in (0, +\infty), s.t. f'(\xi) = 0$

3. 构造辅助函数: $g(x) = f(x) - \frac{x}{1+x^2}$

$$0 \leq f(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$$

夹逼定理:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0:$$



$$\exists \xi \in (0, +\infty), s.t. g'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \frac{1 - \xi^2}{(1 + \xi^2)^2}$$

4. 构造辅助函数: $g(x) = f(x) - e^{-x}$

$$g'(x) = f'(x) + e^{-x}, g(0) = 0$$

夹逼定理: $0 \leq |f(x)| \leq e^{-x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0:$$

$$\exists \xi \in (0, +\infty), s.t. g'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) + e^{-\xi} = 0$$

命题 5.9.57

$f(x)$ 在 (a, b) 上三阶可导, 证明:

$$\exists \xi \in (a, b), s.t. f(b) = f(a) + \frac{f'(a) + f'(b)}{2}(b - a) - \frac{(b - a)^3}{12}f^{(3)}(\xi)$$

解

构造辅助函数:

$$\begin{cases} g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(x) + f'(a)}{2}(x - a) \\ h(x) = (x - a)^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'(x) = \frac{f'(x) - f'(a)}{2} - \frac{f''(x)}{2}(x - a) \\ g''(x) = -\frac{f'''(x)}{2}(x - a) \\ g(a) = g'(a) = g''(a) = 0 \end{cases}$$

柯西中值定理:

$$\exists \xi_1 \in (a, b), s.t. \frac{g(b) - g(a)}{h(b) - h(a)} = \frac{g'(\xi_1)}{h'(\xi_1)} = \frac{g'(\xi_1) - g'(a)}{h'(\xi_1) - h'(a)}$$

柯西中值定理:

$$\exists \xi_2 \in (a, \xi_1), s.t. \frac{g'(\xi_1) - g'(a)}{h'(\xi_1) - h'(a)} = \frac{g''(\xi_2)}{h''(\xi_2)}$$

$$\frac{g(b) - g(a)}{h(b) - h(a)} = \frac{g''(\xi_2)}{h''(\xi_2)} \Rightarrow \frac{f(b) - f(a) - \frac{f'(b) + f'(a)}{2}(b - a)}{(b - a)^3} = -\frac{f^{(3)}(\xi_2)(\xi_2 - a)}{12(\xi_2 - a)} = -\frac{f^{(3)}(\xi_2)}{12}$$

$$\text{综上所述: } \exists \xi = \xi_2 \in (a, b), s.t. f(b) = f(a) + \frac{f'(a) + f'(b)}{2}(b - a) - \frac{(b - a)^3}{12}f^{(3)}(\xi)$$



命题 5.9.58

$f(x)$ 在 (a, b) 上三阶可导, 证明:

$$\exists \xi \in (a, b), \text{ s.t. } \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{4} \left[f(a) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) \right] + \frac{(b-a)^4}{216} f^{(3)}(\xi)$$



解

构造辅助函数:

$$\begin{cases} g(x) = \int_a^x f(t) dt - \frac{x-a}{4} \left[f(a) + 3f\left(\frac{a+2x}{3}\right) \right] \\ h(x) = (x-a)^4 \\ g'(x) = f(x) - \frac{x-a}{2} f'\left(\frac{a+2x}{3}\right) - \frac{1}{4} \left[f(a) + 3f\left(\frac{a+2x}{3}\right) \right] \\ g''(x) = f'(x) - f'\left(\frac{a+2x}{3}\right) - \frac{x-a}{3} f''\left(\frac{a+2x}{3}\right) \\ g^{(3)}(x) = f''(x) - f''\left(\frac{a+2x}{3}\right) - \frac{2(x-a)}{9} f^{(3)}\left(\frac{a+2x}{3}\right) \\ g(a) = g'(a) = g''(a) = g^{(3)}(a) = 0 \end{cases}$$

柯西中值定理:

$$\exists \xi_1 \in (a, b), \text{ s.t. } \frac{g(b) - g(a)}{h(b) - h(a)} = \frac{g'(\xi_1)}{h'(\xi_1)} = \frac{g'(\xi_1) - g'(a)}{h'(\xi_1) - h'(a)}$$

柯西中值定理:

$$\exists \xi_2 \in (a, \xi_1), \text{ s.t. } \frac{g'(\xi_1) - g'(a)}{h'(\xi_1) - h'(a)} = \frac{g''(\xi_2)}{h''(\xi_2)}$$

柯西中值定理:

$$\exists \xi_3 \in (a, \xi_2), \text{ s.t. } \frac{g''(\xi_2) - g''(a)}{h''(\xi_2) - h''(a)} = \frac{g^{(3)}(\xi_3)}{h^{(3)}(\xi_3)}$$

$$\frac{\int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{4} \left[f(a) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) \right]}{(b-a)^4} = \frac{f''(\xi_3) - f''\left(\frac{a+2\xi_3}{3}\right) - \frac{2(\xi_3-a)}{9} f^{(3)}\left(\frac{a+2\xi_3}{3}\right)}{24(\xi_3-a)}$$

拉格朗日中值定理:

$$\exists \xi_4 \in \left(\frac{a+2\xi_3}{3}, \xi_3\right), \text{ s.t. } f''(\xi_3) - f''\left(\frac{a+2\xi_3}{3}\right) = f^{(3)}(\xi_4) \frac{\xi_3 - a}{3}$$

$$\frac{\int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{4} \left[f(a) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) \right]}{(b-a)^4} = \frac{3f^{(3)}(\xi_4) - 2f^{(3)}\left(\frac{a+2\xi_3}{3}\right)}{216}$$



命题 5.9.59

设 $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, 且 $f(x)$ 在区间 $[a_1, a_n]$ 上二阶可导, $c \in [a_1, a_n]$, $f(a_1) = f(a_2) = \dots = f(a_n) = 0$, 证明:

$$\exists \xi \in (a_1, a_n), s.t. f(c) = \frac{(c - a_1)(c - a_2) \cdots (c - a_n)}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

解

命题 5.9.60

$f(x)$ 在 (a, b) 上二阶可导, 证明:

$$\forall c \in (a, b), \exists \xi \in (a, b), s.t. \frac{f''(\xi)}{2} = \frac{f(a)}{(a - b)(a - c)} + \frac{f(b)}{(a - b)(c - b)} + \frac{f(c)}{(c - a)(c - b)}$$

解





第 6 章 一元积分学

内容提要

- 不定积分
- 定积分
- 变限积分

- 反常积分
- 积分方法
- 积分应用

6.1 不定积分

定义 6.1.1 (不定积分)

$\forall x \in I$, 对于可导函数 $F(x)$, 均有 $F'(x) = f(x)$, 我们称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 记为 $\int f(x)dx = F(x) + C$ 是 $f(x)$ 的原函数



定理 6.1.1 (原函数存在定理 (充分条件))

连续函数 $f(x)$ 必存在原函数 $F(x)$

证明

1. 构造函数 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, 证明 $F'(x) = f(x)$
2. $\forall x \in (a, b), F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x)$



定理 6.1.2 (达布定理 (必要条件))

1. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有原函数 $F(x)$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有介值性
2. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有原函数 $F(x)$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必无第一类间断点
3. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有原函数 $F(x)$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必无无穷间断点



6.1.1 不定积分计算

定理 6.1.3 (常用不定积分)

1. 基础不定积分

1. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
3. $\int e^x dx = e^x + C$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
5. $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$
6. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$
7. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$
8. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C, |x| > |a|$
9. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$
10. $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$
11. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$
12. $\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$

$$\begin{cases} \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \\ \int \cos x dx = \sin x + C \\ \int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C \\ \int \frac{1}{\cos x} dx = \int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \\ \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C \end{cases}$$

2. 扩展不定积分

1. $\begin{cases} \int \sin^n x dx, & n = 2, 3, 4, 5 \\ \int \cos^n x dx, & n = 2, 3, 4, 5 \end{cases}$
2. $\begin{cases} \int \frac{1}{\sin^n x} dx, & n = 2, 3, 4, 5 \\ \int \frac{1}{\cos^n x} dx, & n = 2, 3, 4, 5 \end{cases}$
3. $\int \frac{1}{x^n+1} dx, n = 3, 4, 6$



推论 6.1.1 (扩展不定积分)

命题 6.1.1

$$\int \sin^2 x dx \quad \int \cos^2 x dx$$



解

$$\begin{cases} \int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C \\ \int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C \end{cases}$$

命题 6.1.2

$$\int \sin^3 x dx \quad \int \cos^3 x dx$$

解

$$\begin{cases} \int \sin^3 x dx = \int (\cos^2 x - 1) d(\cos x) = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C \\ \int \cos^3 x dx = \int (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C \end{cases}$$

命题 6.1.3

$$\int \sin^4 x dx \quad \int \cos^4 x dx$$

解

$$\begin{cases} \int \sin^4 x dx = \int \frac{\cos^2 2x - 2 \cos 2x + 1}{4} dx = \frac{\sin 4x}{32} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3}{8} + C \\ \int \cos^4 x dx = \int \frac{\cos^2 2x - 2 \cos 2x + 1}{4} dx = \frac{\sin 4x}{32} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3}{8} + C \end{cases}$$

命题 6.1.4

$$\int \sin^5 x dx \quad \int \cos^5 x dx$$

解

$$\begin{cases} \int \sin^5 x dx = - \int (1 - \cos^2 x)^2 d(\cos x) = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{2 \cos^3 x}{3} - \cos x + C \\ \int \cos^5 x dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2 \sin^3 x}{3} + \sin x + C \end{cases}$$

命题 6.1.5

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

解



$$\begin{cases} \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \end{cases}$$

命题 6.1.6

$$\int \frac{1}{\sin^3 x} dx \quad \int \frac{1}{\cos^3 x} dx$$

解

$$\begin{aligned} I &= - \int \frac{1}{\sin^4 x} d \cos x \\ &= - \int \frac{1}{(1-t^2)^2} dt \\ &= \int \left[\frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{C}{t-1} + \frac{D}{(t-1)^2} \right] dx \end{aligned}$$

令 $f(x) = A(t-1)^2(t+1) + B(t-1)^2 + C(t+1)^2(t-1) + D(t+1)^2 = -1$:

$$\begin{cases} f(0) = A + B - C + D = -1 \\ f(-1) = 4B = -1 \\ f(1) = 4D = -1 \\ f(2) = 3A + B + 9C + 9D = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{4} \\ B = -\frac{1}{4} \\ C = \frac{1}{4} \\ D = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \left[-\frac{1}{4(t+1)} - \frac{1}{4(t+1)^2} + \frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4(t-1)^2} \right] dt \\ &= -\frac{\ln|t+1|}{4} + \frac{1}{4(t+1)} + \frac{\ln|t-1|}{4} + \frac{1}{4(t-1)} \\ &= \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right) - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} \end{aligned}$$

综上所述:

$$\begin{cases} \int \frac{1}{\sin^3 x} dx = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right) - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + C \\ \int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right) - \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + C \end{cases}$$

命题 6.1.7

$$\int \frac{1}{\sin^4 x} dx \quad \int \frac{1}{\cos^4 x} dx$$



解

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^4 x} dx \\
 &= \int \frac{1 + \tan^2 x}{\tan^4 x} d \tan x \\
 &= -\frac{1}{3 \tan^3 x} - \frac{1}{\tan x} + C \\
 J &= \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^4 x} dx \\
 &= \int (1 + \tan^2 x) d \tan x \\
 &= \tan x - \frac{\tan^3 x}{3} + C
 \end{aligned}$$

综上所述:

$$\begin{cases} \int \frac{1}{\sin^4 x} dx = -\frac{1}{3 \tan^3 x} - \frac{1}{\tan x} + C \\ \int \frac{1}{\cos^4 x} dx = \tan x - \frac{\tan^3 x}{3} + C \end{cases}$$

命题 6.1.8

$$\int \frac{1}{\sin^5 x} dx \quad \int \frac{1}{\cos^5 x} dx$$

解

$$\begin{aligned}
 I &= - \int \frac{1}{\sin^6 x} d \cos x \\
 &= \int \frac{1}{(t^2 - 1)^3} dt \\
 &= \int \left[\frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{C}{(t+1)^3} + \frac{D}{t-1} + \frac{E}{(t-1)^2} + \frac{F}{(t-1)^3} \right] dx
 \end{aligned}$$

令:

$$f(x) = A(t-1)^3(t+1)^2 + B(t-1)^3(t+1) + C(t-1)^3 + D(t+1)^3(t-1)^2 + E(t+1)^3(t-1) + F(t+1)^3 = 1$$

$$\begin{cases} A + D = 0 \\ -A + B + D + E = 0 \\ f(0) = -A - B - C + D - E + F = 1 \\ f(-1) = -8C = 1 \\ f(1) = 8F = 1 \\ f(2) = 9A + 3B + C + 27D + 27E + 27F = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{3}{16} \\ B = -\frac{3}{16} \\ C = -\frac{1}{8} \\ D = \frac{3}{16} \\ E = -\frac{3}{16} \\ F = \frac{1}{8} \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
 I &= \int \left[-\frac{1}{8(t+1)} - \frac{3}{16(t+1)^2} - \frac{1}{8(t+1)^3} + \frac{3}{16(t-1)} - \frac{3}{16(t-1)^2} + \frac{1}{8(t-1)^3} \right] dx \\
 &= -\frac{3\ln|t+1|}{16} + \frac{3}{16(t+1)} + \frac{1}{16(t+1)^2} + \frac{3\ln|t-1|}{16} + \frac{3}{16(t-1)} - \frac{1}{16(t-1)^2} \\
 &= \frac{3}{16} \ln \left(\left| \frac{1-t}{1+t} \right| \right) + \frac{6t^3 - 10t}{16(t^2-1)^2} \\
 &= \frac{3}{16} \ln \left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right) + \frac{3\cos^3 x - 5\cos x}{8\sin^4 x} + C
 \end{aligned}$$

综上所述：

$$\begin{cases} \int \frac{1}{\sin^5 x} dx = \frac{3}{16} \ln \left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right) + \frac{3\cos^3 x - 5\cos x}{8\sin^4 x} + C \\ \int \frac{1}{\cos^5 x} dx = \frac{3}{16} \ln \left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right) - \frac{3\sin^3 x - 5\sin x}{8\cos^4 x} + C \end{cases}$$

命题 6.1.9

$$\int \frac{1}{x^n + 1} dx, n = 3, 4, 6$$



解

(i).

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x^3 + 1} dx &= \int \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} dx \\
 &= \int \frac{1}{3} \left[\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1} \right] dx \\
 &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x-1-3}{x^2-x+1} dx \\
 &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} dx \\
 &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C
 \end{aligned}$$

(ii).

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x^4 + 1} dx &= \int \frac{1}{(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} dx \\
 &= \int \frac{Ax+B}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx + \int \frac{Cx+D}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{x + \sqrt{2}}{(x + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} dx - \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{x - \sqrt{2}}{(x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} dx \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \left| \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x + 1) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x - 1) + C
 \end{aligned}$$



(iii)

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x^6+1} dx &= \int \frac{1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)} dx \\
 &= \int \frac{1}{(x^2+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)} dx \\
 &= \int \left[\frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \frac{Ex+F}{x^2+\sqrt{3}x+1} \right] dx \\
 &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^2+1} dx + \frac{1}{6\sqrt{3}} \int \left[\frac{3x+2\sqrt{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1} - \frac{3x-2\sqrt{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1} \right] dx \\
 &= \frac{1}{3} \arctan x + \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1} \right| \\
 &\quad + \frac{1}{12} \int \left[\frac{1}{(x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{(x-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} \right] dx \\
 &= \frac{1}{3} \arctan x + \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1} \right| + \frac{1}{6} [\arctan(2x+\sqrt{3}) + \arctan(2x-\sqrt{3})] + C
 \end{aligned}$$

定义 6.1.2 (积分方法)1. 第一换元法 (凑微分): $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(u)du$ 2. 第二换元法: $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ 3. 三角换元法: $\sqrt{a^2-x^2} \rightarrow t = a \sin x, \sqrt{a^2+x^2} \rightarrow t = a \tan x$ 4. 万能公式: $\int R(\sin x, \cos x)dx \rightarrow t = \tan \frac{x}{2} \rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$

$$\begin{cases} R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos x) \rightarrow t = \cos x \\ R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, -\cos x) \rightarrow t = \sin x \\ R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x) \rightarrow t = \tan x \end{cases}$$

5. 分部积分法:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

6. 组合积分法:

$$\begin{cases} \int f(x)dx = I + A \int g(x)dx \\ \int g(x)dx = J + B \int f(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int [f(x) + g(x)]dx = I \\ \int [f(x) - g(x)]dx = J \end{cases}$$

7. 递归积分法 (分部积分推广):

$$I_n = f(x) + I_{n-1}$$



表 6.1: 分部积分表格

u 各阶导数	u	u'	u''	$u^{(3)}$	\dots	$u^{(n+1)}$
$v^{(n+1)}$ 的各阶原函数	$v^{(n+1)}$	$v^{(n)}$	v^{n-1}	v^{n-2}	\dots	v

定理 6.1.4 (分部积分: 表格法)

$$\begin{aligned}
 \int uv^{(n+1)} dx &= uv^{(n)} - \int v^n u' dx \\
 &= uv^{(n)} - u' v^{(n-1)} + \int v^{(n-1)} u'' dx \\
 &= uv^{(n)} - u' v^{(n-1)} + u'' v^{(n-2)} - \int v^{(n-2)} u^{(3)} dx \\
 &= uv^{(n)} - u' v^{(n-1)} + u'' v^{(n-2)} - \dots + (-1)^n u^{(n)} v + (-1)^{n+1} \int u^{(n+1)} v dx
 \end{aligned}$$



定理 6.1.5 (组合积分)

命题 6.1.10

$$\begin{cases} I = \int e^{ax} \sin(bx) dx \\ J = \int e^{ax} \cos(bx) dx \end{cases}$$



解

分部积分公式

$$\begin{cases} I = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos(bx) + \frac{1}{b} \int e^{ax} \cos(bx) dx \\ J = \frac{1}{b} e^{ax} \sin(bx) - \frac{1}{b} \int e^{ax} \sin(bx) dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos(bx) + \frac{1}{b} J \\ J = \frac{1}{b} e^{ax} \sin(bx) - \frac{1}{b} I \end{cases}$$

$$\begin{cases} I = \frac{ae^{ax} \sin(bx) - be^{ax} \cos(bx)}{a^2 + b^2} = \frac{\begin{vmatrix} (e^{ax})' & (\sin(bx))' \\ e^{ax} & \sin(bx) \end{vmatrix}}{a^2 + b^2} \\ J = \frac{ae^{ax} \cos(bx) + be^{ax} \sin(bx)}{a^2 + b^2} = \frac{\begin{vmatrix} (e^{ax})' & (\cos(bx))' \\ e^{ax} & \cos(bx) \end{vmatrix}}{a^2 + b^2} \end{cases}$$



定理 6.1.6 (递归积分)

命题 6.1.11

$$I_n = \int \frac{1}{\cos^n x} dx$$



解



分部积分:

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int \frac{1}{\cos^{n-2} x} d \tan x \\
 &= \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} - \int \tan x d\left(\frac{1}{\cos^{n-2} x}\right) \\
 &= \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} - (n-2) \int \frac{\sin^2 x}{\cos^n x} dx \\
 &= \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} - (n-2)I_n + (n-2) \int \frac{1}{\cos^{n-2} x} dx \\
 &= \tan x \sec^{n-2} x - (n-2)I_n + (n-2)I_{n-2} \\
 I_n &= \frac{1}{n+1} \tan x \sec^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} I_0 = x + C_0 \\ I_1 = \int \frac{1}{\cos x} dx = \ln |\sec x + \tan x| + C_1 \end{cases}$$

命题 6.1.12

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx$$



解

分部积分:

$$\begin{aligned}
 I_{n-1} &= \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}} dx \\
 &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} - \int x d\left(\frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}}\right) \\
 &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2(n-1) \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^n} dx \\
 &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2(n-1)(I_{n-1} - a^2 I_n) \\
 I_n &= \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{(2n-3)I_{n-1}}{2(n-1)a^2}, n = 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

其中 $I_1 = \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C_1, a > 0$

命题 6.1.13

$$I_n = \int \tan^n x dx$$



解



$$\begin{cases} 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \\ d(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I_n &= \int \tan^n x dx \\ I_n + I_{n-2} &= \int \tan^n x dx + \int \tan^{n-2} x dx \\ &= \int \tan^{n-2} x (1 + \tan^2 x) dx \\ &= \int \tan^{n-2} x d(\tan x) \\ &= \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x, n = 2, 3 \dots \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{cases} I_0 = x + C_0 \\ I_1 = \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C_1 \end{cases}$$

命题 6.1.14

$$I_n = \int \ln^n x dx$$

解

分部积分:

$$\begin{aligned} I_n &= \int \ln^n x dx \\ &= x \ln^n x - \int x d(\ln^n x) \\ &= x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x dx \\ &= x \ln^n x - n I_{n-1} \end{aligned}$$

$$I_n = x \ln^n x - n I_{n-1}, n = 2, 3, \dots$$

其中: $I_1 = \int \ln x dx = x \ln x - x + C_1$



定理 6.1.7 (唯一因式分解定理 (有理积分))

有理函数指的是分子、分母都是 x 的多项式的分式 $\frac{p(x)}{q(x)}$, 其中 ($m > n$)

$$\begin{cases} p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, a_n \neq 0 \\ p(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m, b_m \neq 0 \end{cases}$$



在实数范围内,任意实系数多项式 $q(x)$ 都可以分解为:

$$q(x) = b_m(x - a_1)^{r_1} \cdots (x - a_k)^{r_k} (x^2 + b_1x + c_1)^{s_1} \cdots (x^2 + b_lx + c_l)^{s_l}$$

其中 $r_1 + \cdots + r_k + 2(s_1 + \cdots + s_l) = m$

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{A_{1,1}}{x - a_1} + \cdots + \frac{A_{1,r_1}}{(x - a_1)^{r_1}} \\ &\quad + \cdots + \\ &\quad \frac{A_{k,1}}{x - a_k} + \cdots + \frac{A_{k,r_k}}{(x - a_k)^{r_k}} \\ &\quad + \frac{M_{1,1}x + N_{1,1}}{x^2 + b_1x + c_1} + \cdots + \frac{M_{1,s_1}x + N_{1,s_1}}{(x^2 + b_1x + c_1)^{s_1}} \\ &\quad + \cdots + \\ &\quad \frac{M_{l,1}x + N_{l,1}}{x^2 + b_lx + c_l} + \cdots + \frac{M_{l,s_l}x + N_{l,s_l}}{(x^2 + b_lx + c_l)^{s_l}} \end{aligned}$$

只需要求解两种不定积分:

$$\begin{cases} I = \int \frac{1}{(x-a)^k} dx \\ J = \int \frac{mx+n}{(x^2+bx+c)^k}, c - \frac{b^2}{4} > 0 \end{cases}$$

第一个不定积分:

$$I = \int \frac{1}{(x-a)^k} dx = \begin{cases} \ln(x-a), & k=1 \\ \frac{1}{1-k}(x-a)^{1-k}, & k>1 \end{cases}$$

第二个不定积分:

$$J = \int \frac{mx+n}{(x^2+bx+c)^k}$$

令 $t = x + \frac{b}{2}$, $a^2 = c - \frac{b^2}{4}$:

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{m(t - \frac{b}{2}) + n}{(t^2 + a^2)^k} dt \\ &= \frac{m}{2} \int \frac{2t}{(t^2 + a^2)^k} dt + (n - \frac{mb}{2}) \int \frac{1}{(t^2 + a^2)^k} dt \\ &= \frac{m}{2} \int \frac{1}{(t^2 + a^2)^k} d(t^2 + a^2) + (n - \frac{mb}{2}) \int \frac{1}{(t^2 + a^2)^k} dt \\ &= \frac{m}{2} P + (n - \frac{mb}{2}) Q \end{aligned}$$



其中

$$P = \begin{cases} \ln(t^2 + a^2), & k = 1 \\ \frac{1}{1-k} \frac{1}{(t^2 + a^2)^{1-k}}, & k > 1 \end{cases}$$

关于不定积分 Q , 递归积分 pro :6.1.12

综上所述: 有理分式一定存在原函数



6.2 定积分

定义 6.2.1 (定积分)

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 在 (a, b) 上任取 $n - 1$ 个分点 $x_i (i = 1, 2, 3, \dots, n - 1)$, 定义 $x_0 = a, x_n = b$, 且满足 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, 记 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k = 1, 2, \dots, n$, 任取一点 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, 记 $\lambda = \max\{\Delta x_k\}$, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ 存在且与分点 x_i 和 ξ_k 的取法无关, 则称函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 记 $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分

任取 x_i : 变为将区间 $[a, b]$ 分为 n 个小区间, 且每个小区间的长度为 Δx_k , 且 $\Delta x_k \rightarrow 0$, 且 ξ_k 为每个小区间的右端点, $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(a + \frac{b-a}{n} i) \frac{b-a}{n}$



定理 6.2.1 (定积分存在定理)

1. 必要条件: 区间有界, 函数有界

2. 充分条件:

(1). $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积

(2). $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 且只有有限个间断点, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积



定理 6.2.2 (牛顿莱布尼茨公式)

$f(x)$ 是 $[a, b]$ 上连续函数, $\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$



定理 6.2.3 (对称函数积分)

(1). $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上连续, 我们有:

1. $f(x)$ 是奇函数

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 0$$



2. $f(x)$ 是偶函数

$$\int_{-l}^l f(x)dx = 2 \int_0^l f(x)dx$$

(2). $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续:

1. $f(a+b-x) = -f(x)$, 称 $f(x)$ 关于 $x = \frac{a+b}{2}$ 奇对称

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

2. $f(a+b-x) = f(x)$, 称 $f(x)$ 关于 $x = \frac{a+b}{2}$ 偶对称

$$\int_a^b f(x)dx = 2 \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = 2 \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx$$

(3). $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且:

1. $f(a+b-x) = f(x)$, $f(x)$ 关于 $\frac{a+b}{2}$ 对称

2. $g(a+b-x) + g(x) = A$, A 为常数

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \frac{A}{2} \int_a^b f(x)dx = A \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = A \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx$$

(3). $f(x), g(x)$ 在 $[\frac{1}{a}, a]$ 上连续, 且:

1. $f(x) = f(\frac{1}{x})$

2. $g(x) + g(\frac{1}{x}) = A$, A 为常数

$$\int_{\frac{1}{a}}^a f(x)g(x)dx = \frac{A}{2} \int_{\frac{1}{a}}^a f(x)dx = A \int_{\frac{1}{a}}^1 f(x)dx = A \int_1^a f(x)dx$$



定理 6.2.4 (华里士公式)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1, & n \in \{2k+1 | k \in \mathbb{N}\} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \in \{2k+2 | k \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

递归积分法, 需要证明两个部分:

$$(1). \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

区间再现公式: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

$$(2). \text{分部积分: } I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$



$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d(-\cos x) \\
 &= -\cos x \sin^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} dx \\
 &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} dx \\
 &= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \\
 I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2}
 \end{aligned}$$

其中：

$$\begin{cases} I_0 = \frac{\pi}{2} \\ I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1 \end{cases}$$

(i). 当 $n \in \{2k+1 | k \in \mathbb{N}\}$ 时：

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} = \cdots = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} I_1 = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1$$

(ii). 当 $n \in \{2k+2 | k \in \mathbb{N}\}$ 时：

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} I_{n-4} = \cdots = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} I_0 = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

推论 6.2.1 (华里士公式推论)

$$\int_0^\pi \sin^n x dx = \begin{cases} 2 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1, & n \in \{2k+1 | k \in \mathbb{N}\} \\ 2 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \in \{2k+2 | k \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

$$\int_0^\pi \cos^n x dx = \begin{cases} 0, & n \in \{2k+1 | k \in \mathbb{N}\} \\ 2 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \in \{2k+2 | k \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^n x dx = \int_0^{2\pi} \cos^n x dx = \begin{cases} 0, & n \in \{2k+1 | k \in \mathbb{N}\} \\ 4 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \in \{2k+2 | k \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

命题 6.2.1

$$\int_0^1 x^k \ln^m x, k > 0, m \in \mathbb{N}$$

命题 6.2.2

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1}$$



6.3 变限积分

定义 6.3.1 (变限积分)

$x \in [a, b], \forall x \in [a, b]$, 积分 $\int_a^x f(t)dt$ 都有一个确定的值, 我们将这个关于 x 的函数 $\int_a^x f(t)dt$ 称作变限积分

推论 6.3.1 (变限积分)

1. $f(x)$ 可积, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 一定连续
2. $f(x)$ 连续, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 一定可导, 且 $F'(x) = f(x)$
3. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有唯一跳跃间断点 x_0 , 则 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $x = x_0$ 处不可导
4. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有唯一可去间断点 x_0 , 则 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $x = x_0$ 处可导, 且 $F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

定理 6.3.1 (变限积分的导数)

$f(x)$ 是连续函数, 则 $\left[\int_{\phi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt \right]' = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\phi(x)]\phi'(x)$

推论 6.3.2 (变上限积分奇偶性和周期性与原函数关系)

$f(x)$ 连续, $f(x)$ 与 $\int_a^x f(t)dt$ 之间的关系

- (1). 如果 $f(x)$ 是奇函数, $\int_a^x f(t)dt$ 是偶函数
- (2). 如果 $f(x)$ 是偶函数, $\int_a^x f(t)dt$ 是奇函数当且仅当 $a = 0$ 时成立.
- (3). 如果 $f(x)$ 是周期函数, $\int_a^x f(t)dt$ 是周期函数与 $\int_0^T f(t)dt = 0$ 等价

证明

令: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

- (i). 必要性: $F(x+T) - F(x) = \int_x^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt = 0$
- (ii). 充分性: $\int_0^T f(t)dt = 0 \Leftrightarrow F(x+T) - F(x) = 0$

6.4 反常积分

定义 6.4.1 (反常积分)

1. 积分区间无界: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx$
2. 被积函数无界: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$



反常积分敛散性判别

定理 6.4.1 (比较判别法)

1. 无穷区间: $f(x), g(x)$ 连续, 且 $0 \leq f(x) \leq g(x)$
 1. 若 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛
 2. 若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散
2. 无穷函数: $f(x), g(x)$ 在 $(a, b]$ 连续, 疱点为 $x = a$, 且 $0 \leq f(x) \leq g(x)$
 1. 若 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛
 2. 若 $\int_a^b f(x)dx$ 发散, 则 $\int_a^b g(x)dx$ 发散



定理 6.4.2 (比较判别法的极限形式)

1. 无穷区间: $f(x), g(x)$ 连续, 且 $g(x) > 0, f(x) \geq 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$
 1. $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq \infty$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同敛散
 2. $\lambda = 0$, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛
 3. $\lambda = \infty$, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散
2. 无穷函数: $f(x), g(x)$ 在 $(a, b]$ 连续, 疱点为 $x = a$, 且 $g(x) > 0, f(x) \geq 0, \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$
 1. $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq \infty$, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 同敛散
 2. $\lambda = 0$, 则 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 收敛
 3. $\lambda = \infty$, 则 $\int_a^b g(x)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 发散



推论 6.4.1 (p 级数判别法)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx \begin{cases} \text{收敛, } & 0 < p < 1 \\ \text{发散, } & p \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \begin{cases} \text{收敛, } & p > 1 \\ \text{发散, } & p \leq 1 \end{cases}$$



6.5 一元积分学应用

6.5.1 几何应用

6.5.1.1 平面图形面积

定义 6.5.1 (定积分几何意义)

(i). 直角坐标 $y = f(x)$

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

S 表示的是由 $y = 0, y = f(x)$ 和 $x = a, x = b$ 四条直线围成的平面图形的面积

(ii). 极坐标 $r = r_1(\theta)$ 与 $r = r_2(\theta)$

$$S = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} |[r_1(\theta)]^2 - [r_2(\theta)]^2| d\theta$$

S 表示的是由 $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2$ 和 $r = r_1(\theta), r = r_2(\theta)$ 四条曲线围成的平面图形的面积

(iii). 参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt$$

S 表示的是由 $t = \alpha, t = \beta$ 和 $x = x(t), y = y(t)$ 四条曲线围成的平面图形的面积



6.5.1.2 平面曲线弧长

定理 6.5.1 (平面曲线的弧长)

(i). 直角坐标 $y = f(x)$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

(ii). 极坐标 $r = r(\theta)$

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta$$

(iii). 参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$



6.5.1.3 旋转体体积

定理 6.5.2 (旋转体体积)

(i). 绕 x 轴旋转

$y = f(x)$ 与 $x = a, x = b$ 围成的几何图形绕 x 轴旋转得到的几何体体积 V :

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

(ii). 绕 y 轴旋转

$y = f(x)$ 与 $x = a, x = b$ 围成的几何图形绕 y 轴旋转得到的几何体体积 V :

$$V = 2\pi \int_a^b x|f(x)| dx$$

(iii). 绕任意直线 $L_0 : Ax + By + C = 0$ 旋转

$$\begin{cases} V = \pi \int_{l_1}^{l_2} r^2 dl \\ r = \frac{|Ax + Bf(x) + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ dl = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}}{|\mathbf{l}|} \\ \mathbf{n} = (dx, dy) \\ \mathbf{l} = (B, -A) \end{cases} \Rightarrow V = \frac{\pi}{(A^2 + B^2)^{\frac{3}{2}}} \int_a^b [Ax + Bf(x) + C]^2 |Af'(x) - B| dx$$

(iv). 平面区域 D 绕直线 $L_0 : Ax + By + C = 0$

$$V = 2\pi \iint_{(x,y) \in D} r d\sigma = 2\pi \iint_{(x,y) \in D} \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} d\sigma$$



6.5.1.4 旋转曲面侧面积

定理 6.5.3 (曲线绕 x 轴旋转得到的曲面的侧面积)

(i). 直角坐标

$$S = 2\pi \int_a^b |y(x)| \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

(ii). 参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

(iii). 极坐标



$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |r \sin \theta| \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta$$



6.5.1.5 函数平均值和形心坐标

定理 6.5.4 (平均值和形心坐标)

(i). 平均值

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

(ii). 形心坐标

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\iint x d\sigma}{\iint d\sigma} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \\ \bar{y} = \frac{\iint y d\sigma}{\iint d\sigma} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \end{cases}$$



6.5.2 物理应用

6.5.2.1 变力做功

定义 6.5.2 (变力做功)

1. $dW = F ds$
2. $W = \int_a^b F ds$



6.5.2.2 抽水做功

定义 6.5.3 (抽水做功)

1. 建立坐标系
2. 确立横截面积表达式
3. $W = \rho g \int_a^b x A(x) dx$



6.5.2.3 水压力

定义 6.5.4 (水中受到的压力)

1. 建立坐标系
2. 建立横截面积表达式: $S = (f(x) - h(x)) dx$
3. $F = \rho g \int_a^b x (f(x) - h(x)) dx$



积分训练

命题 6.5.1

$$\int \frac{x \sin x}{(1 + \cos^2 x)^{\frac{3}{2}}} dx$$



解

$$\text{令 } f(x) = \frac{\sin x}{(1 + \cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx \\ &= \int -\frac{d \cos x}{(1 + \cos^2 x)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \int -\frac{du}{(1 + u^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\stackrel{u=\tan t}{=} \int (-\cos t) dt \\ &= -\sin t + C \\ &\stackrel{\sin t = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}}{=} -\frac{\cos x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} + C \end{aligned}$$

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \int x d(F(x)) \\ &= xF(x) - \int F(x) dx \\ &= -\frac{x \cos x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} + \int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} dx \\ &= -\frac{x \cos x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} + \int \frac{d \sin x}{\sqrt{2 - \sin^2 x}} \\ &= \arcsin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{x \cos x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} + C \end{aligned}$$

命题 6.5.2

$$\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$



解



我们令 $f(x) = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx \\ &= \int -\arccos x d(\arccos x) \\ &= -\frac{1}{2}(\arccos x)^2 + C \end{aligned}$$

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \int x^3 d(F(x)) \\ &= x^3 F(x) - \int F(x) dx \\ &= -\frac{x^3}{2}(\arccos x)^2 - \frac{1}{2} \int (\arccos x)^2 dx \\ &\stackrel{u=\arccos x}{=} \frac{x^3}{2}(\arccos x)^2 + \frac{1}{2} \int u^2 \sin u du \\ &\stackrel{\text{分部积分}}{=} -\frac{x^3}{2}(\arccos x)^2 - \frac{u^2}{2} \cos u + u \sin u + \cos u + C \\ &\stackrel{u=\arccos x}{=} -\frac{x^3}{2}(\arccos x)^2 - \frac{x(\arccos x)^2}{2} + \sqrt{1-x^2} \arccos x + x + C \end{aligned}$$

命题 6.5.3

$$\int \frac{x + \sin x \cos x}{(x \sin x + \cos x)^2} dx$$

解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{xd \tan x + \tan x dx}{(x \tan x + 1)^2} \\ &= \int \frac{dx \tan x}{(x \tan x + 1)^2} \\ &= -\frac{1}{x \tan x + 1} + C \end{aligned}$$

命题 6.5.4

$$\int \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2} dx$$

解



我们令: $f(x) = \frac{h(x)}{x - \ln x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{h'(x)(x - \ln x) - h(x)\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(x - \ln x)^2} \\ &= \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2} \end{aligned}$$

当 $h(x) = x$ 时, $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}$, 原不定积分为: $I = \frac{x}{x - \ln x} + C$

命题 6.5.5

$$\int \frac{x \cos x}{(x + \cos x)^2} dx$$



解

我们令: $f(x) = \frac{h(x)}{x + \cos x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{h'(x)(x + \cos x) - h(x)(1 - \sin x)}{(x + \cos x)^2} \\ &= \frac{x \cos x}{(x + \cos x)^2} \end{aligned}$$

当 $h(x) = \sin x + 1$ 时, $f'(x) = \frac{x \cos x}{(x + \cos x)^2}$, 原不定积分为: $I = \frac{\sin x + 1}{x + \cos x} + C$

命题 6.5.6

$$\int \frac{\cos^2 x - x^2 \sin x}{(x + \cos x)^2} dx$$



解

我们令: $f(x) = \frac{h(x)}{x + \cos x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{h'(x)(x + \cos x) - h(x)(1 - \sin x)}{(x + \cos x)^2} \\ &= \frac{\cos^2 x - x^2 \sin x}{(x + \cos x)^2} \end{aligned}$$

当 $h(x) = x \cos x$ 时, $f'(x) = \frac{x \cos x}{(x + \cos x)^2}$, 原不定积分为: $I = \frac{x \cos x}{x + \cos x} + C$

命题 6.5.7

$$\int \frac{x \sin x + \cos x}{x^2 + \cos^2 x} dx$$



解



原不定积分等价为:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{x \sin x + \cos x}{x^2}}{1 + \left(\frac{\cos x}{x}\right)^2} dx \\ &= - \int \frac{d \frac{\cos x}{x}}{1 + \left(\frac{\cos x}{x}\right)^2} \\ &= -\arctan\left(\frac{\cos x}{x}\right) + C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = -\arctan\left(\frac{\cos x}{x}\right) + C$

命题 6.5.8

$$\int \frac{e^x(x-1)}{x^2+e^{2x}} dx$$



解

原不定积分等价为:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\frac{e^x(x-1)}{x^2}}{1 + \left(\frac{e^x}{x}\right)^2} dx \\ &= - \int \frac{d \frac{e^x}{x}}{1 + \left(\frac{e^x}{x}\right)^2} \\ &= -\arctan\left(\frac{e^x}{x}\right) + C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = -\arctan\left(\frac{e^x}{x}\right) + C$

命题 6.5.9

$$\int e^{\sec x}(\tan x - \sin x) dx$$



解

我们令: $f(x) = h(x)e^{\sec x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(x)e^{\sec x} + h(x)e^{\sec x} \frac{\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{h'(x)\cos^2 x + h(x)\sin x}{\cos^2 x} e^{\sec x} \\ &= (\tan x - \sin x)e^{\sec x} \end{aligned}$$

当 $h(x) = \cos x$ 时, $f'(x) = (\tan x - \sin x)e^{\sec x}$, 原不定积分为: $I = \cos x e^{\sec x} + C$

命题 6.5.10

$$\int e^{\frac{1}{x}}(2x-1) dx$$



解



我们令: $f(x) = h(x)e^{\frac{1}{x}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(x)e^{\frac{1}{x}} - h(x)e^{\sec x} \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{h'(x)x^2 - h(x)}{x^2} e^{\sec x} \\ &= (2x - 1)e^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

当 $h(x) = x^2$ 时, $f'(x) = (2x - 1)e^{\frac{1}{x}}$, 原不定积分为: $I = x^2e^{\frac{1}{x}} + C$

命题 6.5.11

$$\int e^{\sin x} \frac{x \cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} dx$$



解

我们令: $f(x) = h(x) \frac{e^{\sin x}}{\cos x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{[h(x)e^{\sin x} \cos x + h'(x)e^{\sin x}] \cos x + h(x)e^{\sin x} \sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{e^{\sin x}}{\cos^2 x} [h(x) \cos^2 x + h'(x) \cos x + h(x) \sin x] \\ &= e^{\sin x} \frac{x \cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

当 $h(x) = x \cos x - 1$ 时, $f'(x) = e^{\sin x} \frac{x \cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x}$, 原不定积分为: $I = \frac{(x \cos x - 1)e^{\sin x}}{\cos x} + C$

命题 6.5.12

$$\int e^{x^3} (10x - 9x^7) dx$$



解

我们令: $f(x) = h(x)e^{x^3}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x^3} (h'(x) + 3x^2 h(x)) \\ &= e^{x^3} (10x - 9x^7) \end{aligned}$$

当 $h(x) = 5x^2 - 3x^5$ 时, $f'(x) = e^{x^3} (10x - 9x^7)$, 原不定积分为: $I = e^{x^3} (5x^2 - 3x^5) + C$

命题 6.5.13

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx$$



解



原不定积分等价于:

$$\begin{aligned} I &\stackrel{\substack{u=\sqrt{x-1} \\ x=u^2+1}}{=} \int \frac{2u}{(u^2+1)u} du \\ &= 2 \arctan u + C \\ &= 2 \arctan \sqrt{x-1} + C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = 2 \arctan \sqrt{x-1} + C$

命题 6.5.14

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x-1}} dx$$



解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned} I &\stackrel{\substack{u=\sqrt{x-1} \\ x=u^2+1}}{=} \int \frac{2u}{(u^2+1)+u} du \\ &= \int \frac{2u}{u^2+u+1} du - \int \frac{1}{\frac{3}{4}+(u+\frac{1}{2})^2} du \\ &= \ln(u^2+u+1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2u+1}{\sqrt{3}} + C \\ &= \ln(x+\sqrt{x-1}) - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = \ln(x+\sqrt{x-1}) - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{3}} + C$

命题 6.5.15

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{2x-1}} dx$$



解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned} I &\stackrel{\substack{u=\sqrt{2x-1} \\ x=\frac{u^2+1}{2}}}{=} \int \frac{4}{(u^2+1)^2} du \\ &\stackrel{u=\tan t}{=} \int 4 \cos^2 t dt \\ &= 2t + \sin 2t \\ &= 2t + \frac{2 \tan t}{1 + \tan^2 t} \\ &= 2 \arctan u + \frac{2u}{1+u^2} \\ &= 2 \arctan \sqrt{2x-1} + \frac{\sqrt{2x-1}}{x} + C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = 2 \arctan \sqrt{2x-1} + \frac{\sqrt{2x-1}}{x} + C$



命题 6.5.16

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{x^3} dx$$



解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned} I & \stackrel{x=1-t^2}{=} \int \frac{2t^2}{(t^2-1)^3} dt \\ & \stackrel{u=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)}{=} \int \frac{2\cos^2 u}{\sin^5 u} du \\ & = \int \frac{2}{\sin^5 u} du - \int \frac{2}{\sin^3 u} du \end{aligned}$$

我们有:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \int \frac{1}{\sin^3 x} dx = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right) - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + C \\ \int \frac{1}{\sin^5 x} dx = \frac{3}{16} \ln \left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right) + \frac{3\cos^3 x - 5\cos x}{8 \sin^4 x} + C \end{array} \right. \\ I = \frac{3}{8} \ln \left(\frac{1-\cos u}{1+\cos u} \right) + \frac{3\cos^3 u - 5\cos u}{4 \sin^4 u} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-\cos u}{1+\cos u} \right) + \frac{\cos u}{\sin^2 u} \\ = -\frac{1}{8} \ln \left(\frac{1-\cos u}{1+\cos u} \right) - \frac{\cos^3 u + \cos u}{4 \sin^4 u} \\ = -\frac{1}{8} \ln \left(\frac{t-1}{t+1} \right) - \frac{t^3+t}{4(t^2-1)^2} \\ = -\frac{1}{8} \ln \left(\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1} \right) - \frac{(2-x)\sqrt{1-x}}{4x^2} + C \end{aligned}$$

$$\text{原不定积分为: } I = -\frac{1}{8} \ln \left(\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1} \right) - \frac{(2-x)\sqrt{1-x}}{4x^2} + C$$

命题 6.5.17

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx$$



解



原不定积分等价于:

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})}{2} dx \\
 &= \int \frac{x\sqrt{x+1}}{2} dx - \int \frac{x\sqrt{x-1}}{2} dx \\
 &= I_1 - I_2 \\
 I_1 &\stackrel{\substack{x=u^2-1 \\ u=\sqrt{x+1}}}{=} \int (u^2 - 1)u^2 du \\
 &= \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \\
 I_2 &\stackrel{\substack{x=t^2+1 \\ t=\sqrt{x-1}}}{=} \int (t^2 + 1)t^2 dt \\
 &= \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} \\
 I &= \frac{(x+1)^2\sqrt{x+1}}{5} - \frac{(x+1)\sqrt{x+1}}{3} - \frac{(x-1)^2\sqrt{x-1}}{5} - \frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{3} + C
 \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = \frac{(x+1)^2\sqrt{x+1}}{5} - \frac{(x+1)\sqrt{x+1}}{3} - \frac{(x-1)^2\sqrt{x-1}}{5} - \frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{3} + C$

命题 6.5.18

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{2}} dx$$



解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - \sqrt{2}}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2 - 2} dx \\
 &= \int \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - \sqrt{2}}{2\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= \int \frac{1}{2\sqrt{1-x}} dx + \int \frac{1}{2\sqrt{1+x}} dx - \int \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - \frac{\sqrt{2}}{2} \arcsin x + C
 \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - \frac{\sqrt{2}}{2} \arcsin x + C$

命题 6.5.19

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$$



解



原不定积分等价于:

$$\begin{aligned}
 I &\stackrel{\substack{t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \\ x=\frac{t^2-1}{t^2+1}}}{=} \int \frac{4t^2}{(t^2+1)^2} dt \\
 &\stackrel{t=\tan u}{=} \int 4 \sin^2 u du \\
 &= 2u - \sin 2u \\
 &= 2u - \frac{2 \tan u}{1 + \tan^2 u} + C \\
 &= 2 \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{1-x^2} + C
 \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = 2 \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{1-x^2} + C$

命题 6.5.20

$$\int x \sqrt{\frac{x}{3-x}} dx$$



解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned}
 I &\stackrel{\substack{t=\sqrt{\frac{x}{3-x}} \\ x=\frac{3t^2}{t^2+1}}}{=} \int \frac{18t^4}{(t^2+1)^3} dt \\
 &\stackrel{t=\tan u}{=} \int 18 \sin^4 u du \\
 &= \int \frac{9(1-2\cos 2u+\cos^2 2u)}{2} du \\
 &= \int \left(\frac{27}{4} + \frac{9}{4} \cos 4u - 9 \cos 2u \right) du \\
 &= \frac{27}{4}u + \frac{9}{16} \sin 4u - \frac{9}{2} \sin 2u \\
 &\stackrel{\cos 2u=\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\stackrel{\sin 2u=\frac{2t}{1+t^2}}{=}} \frac{27}{4} \arctan \sqrt{\frac{x}{3-x}} - \frac{(9+2x)\sqrt{3x-x^2}}{4} + C
 \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = \frac{27}{4} \arctan \sqrt{\frac{x}{3-x}} - \frac{(9+2x)\sqrt{3x-x^2}}{4} + C$

命题 6.5.21

$$\int \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$$



解

原不定积分等价于：

$$\begin{aligned}
 I &\stackrel{\substack{t=\sqrt{\frac{x}{1+x}} \\ x=\frac{t^2}{1-t^2}}}{=} \int \frac{2t^2}{(t^2-1)^2} dt \\
 &\stackrel{t=\sec u}{=} \int \frac{2}{\sin^3 u} du \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-\cos u}{1+\cos u} \right) - \frac{\cos u}{\sin^2 u} + C \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t-1}{t+1} \right) - \frac{t}{1-t^2} + C \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}} \right) + \sqrt{x+x^2} + C
 \end{aligned}$$

原不定积分为： $I = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}} \right) + \sqrt{x+x^2} + C$

命题 6.5.22

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$$

解

原不定积分等价于：

$$\begin{aligned}
 I &\stackrel{\substack{t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \\ x=\frac{t^2+1}{t^2-1}}}{=} \int -\frac{4t^2}{(t^2-1)^2} dt \\
 &\stackrel{t=\sec u}{=} \int -\frac{4}{\sin^3 u} du \\
 &= \ln \left(\frac{1+\cos u}{1-\cos u} \right) + \frac{2\cos u}{\sin^2 u} + C \\
 &= \ln \left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} \right) + \sqrt{x^2-1} + C
 \end{aligned}$$

原不定积分为： $I = \ln \left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} \right) + \sqrt{x^2-1} + C$

命题 6.5.23

$$\int \sqrt{x(x+2)} dx$$

解



原不定积分等价于:

$$\begin{aligned}
 I & \stackrel{\substack{u=x+1 \\ x=u-1}}{=} \int \sqrt{u^2 - 1} du \\
 & = \frac{u\sqrt{u^2 - 1}}{2} - \frac{\ln|u + \sqrt{u^2 - 1}|}{2} + C \\
 & = \frac{(x+1)\sqrt{x^2 + 2x}}{2} - \frac{\ln|x+1 + \sqrt{x^2 + 2x}|}{2} + C \\
 \text{原不定积分为: } I & = \frac{(x+1)\sqrt{x^2 + 2x}}{2} - \frac{\ln|x+1 + \sqrt{x^2 + 2x}|}{2} + C
 \end{aligned}$$

命题 6.5.24

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} dx$$

解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned}
 I & \stackrel{\substack{\sin \theta = \frac{x-1}{2} \\ x=2 \sin \theta + 1}}{=} \int (2 \sin \theta + 1)^2 d\theta \\
 & = 3\theta - \sin 2\theta - 4 \cos \theta + C \\
 & = 3 \arcsin \frac{x-1}{2} - \frac{(x+3)\sqrt{-x^2 + 2x + 3}}{2} + C \\
 \text{原不定积分为: } I & = 3 \arcsin \frac{x-1}{2} - \frac{(x+3)\sqrt{-x^2 + 2x + 3}}{2} + C
 \end{aligned}$$

命题 6.5.25

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$$

解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned}
 I & \stackrel{\tan x = u}{=} \int \frac{2u}{u^4 + 1} du \\
 & = \int \frac{1}{(u^2)^2 + 1} d(u^2) \\
 & = \arctan u^2 + C \\
 & = \arctan(\tan^2 x) + C
 \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = \arctan(\tan^2 x) + C$

命题 6.5.26

$$\int \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{\sin^4(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})} dx$$

解



原不定积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{8e^{\sin x} \sin x}{(1 + \sin x)^2} d \sin x \\ &\stackrel{\substack{\sin x = u \\ x = \arcsin u}}{=} \int \frac{8e^u u}{(1 + u)^2} du \\ &= \frac{8e^u}{1 + u} + C \\ &= \frac{8e^{\sin x}}{1 + \sin x} + C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = \frac{8e^{\sin x}}{1 + \sin x} + C$

命题 6.5.27

$$\int \frac{1}{\sin^2 x + \sin 2x} dx$$

解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\tan^2 x + 2 \tan x} d \tan x \\ &= \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\tan x + 2} \right) d \tan x \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\tan x}{\tan x + 2} \right| + C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\tan x}{\tan x + 2} \right| + C$

命题 6.5.28

$$\int \frac{\sin x}{\cos x + 2 \sin x} dx$$

解

原不定积分等价于: $I = \frac{A(\cos x + 2 \sin x) + B(2 \cos x - \sin x)}{\cos x + 2 \sin x}$

$$\text{我们有: } \begin{cases} A + 2B = 0 \\ 2A - B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{5} \\ B = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

原不定积分等价为:

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{5} - \frac{2 \cos x - \sin x}{5(\cos x + 2 \sin x)} \\ &= \frac{2x}{5} - \frac{\ln |\cos x + 2 \sin x|}{5} + C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = \frac{2x}{5} - \frac{\ln |\cos x + 2 \sin x|}{5} + C$





第二部分
高数 (下)



第2部分目录

第7章 多元函数微分	111
7.1 多元函数微分概念	111
7.2 链式法则	113
7.3 隐函数存在定理	114
7.4 多元函数极值和最值	114
第8章 二重积分	117
8.1 二重积分概念和性质	117
8.2 二重积分的对称性	118
8.3 二重积分计算	119
第9章 常微分方程	122
9.1 一阶微分方程	123
9.2 高阶线性微分方程	125
第10章 无穷级数	128
10.1 常数项级数	128
10.2 敛散性判别	129
10.3 函数项级数	132
10.4 傅里叶级数	136
第11章 空间解析几何	140
11.1 向量代数	140
11.2 空间平面和直线	141
11.3 空间曲面和曲线	143
11.4 场论初步	150
第12章 三重积分	152
12.1 三重积分定义和性质	152
12.2 三重积分对称性	153
12.3 三重积分计算方法	154
12.4 三重积分应用	156
第13章 第一型曲线和曲面积分	158
13.1 第一型曲线积分	158
13.2 第一型曲面积分	161
13.3 第一型曲线积分和曲面积分应用	163
第14章 第二型曲线和曲面积分	166
14.1 第二型曲线积分	166
14.2 第二型曲面积分	168





第 7 章 多元函数微分

内容提要

- 连续、偏导、可微、全微分
- 链式法则
- 隐函数存在定理
- 多元函数极值和最值
- 拉格朗日数乘法

7.1 多元函数微分概念

定义 7.1.1 (邻域)

1. δ 邻域: 设 $P_0(x_0, y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点, $U(P_0, \delta)$ 表示以 P_0 为中心, 半径为 δ 的圆盘, 即 $U(P_0, \delta) = \{(x, y) | \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$
2. 去心 δ 邻域: $\mathring{U}(P_0, \delta) = \{(x, y) | 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$

定义 7.1.2 (多元函数极限)

设函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上有定义, $P_0(x_0, y_0) \in D$ 或为区域 D 边界上的一点, 如果对于任意给定的正数 ε , 总存 $\delta > 0$, 使得当点 $P(x, y) \in D$ 且 $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ 时, 对应的函数值 $f(x, y)$ 都满足不等式 $|f(x, y) - A| < \varepsilon$, 那么称函数 $f(x, y)$ 当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时的极限为 A , 记为 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$

定义 7.1.3 (连续)

设函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上有定义, $P_0(x_0, y_0) \in D$ 或为区域 D 边界上的一点, 如果 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, 那么称函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续, 如果函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上每一点都连续, 那么称函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上连续



定义 7.1.4 (偏导数)

设函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 邻域内有定义, 若极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ 存在, 我们将这记作 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数, 记作:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \quad z'_x \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

类似地, 可以定义 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处对 y 的偏导数, 记作:

$$\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \quad z'_y \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

对偏导数进一步求偏导数, 可以得到高阶偏导数: $f''_{xx}(x, y), f''_{yy}(x, y), f''_{xy}(x, y), f''_{yx}(x, y)$

**定义 7.1.5 (可微)**

函数 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处的全增量 $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ 可表示为:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

其中 A, B 只与 x, y 相关, 称 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微, $A\Delta x + B\Delta y$ 是 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处的全微分.

$$dz = A\Delta x + B\Delta y = Adx + Bdy$$

1. 可微必要条件: $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微 $\Rightarrow f(x, y)$ 在点 (x, y) 处偏导数必定存在

$$\text{且 } \begin{cases} A = \frac{\partial z}{\partial x} \\ B = \frac{\partial z}{\partial y} \end{cases}$$

2. 可微充分条件: $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处偏导数连续 $\Rightarrow f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微

**定义 7.1.6 (偏导数连续性)**

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} f'_x(x, y_0) \\ f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{y \rightarrow y_0} f'_y(x_0, y) \end{cases}$$

如果这两个极限相等, 就称偏导数在此点连续



定义 7.2.2 (全微分形式不变性)

设 $z = f(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, 如果 $f(u, v)$, $u(x, y)$, $v(x, y)$ 分别有连续偏导数, 则复合函数 $z = f(u, v)$ 在 (x, y) 处的全微分:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

**7.3 隐函数存在定理****定理 7.3.1 (隐函数存在定理 1)**

如果函数 $F(x, y)$ 满足一下条件:

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某一个邻域内具有连续偏导数
3. $F'(x_0, y_0) \neq 0$

那么方程 $F(x, y) = 0$ 在点 (x_0, y_0) 的某一个邻域内能够确定唯一的连续且具有连续导数的函数 $y = f(x)$, 满足 $F(x, f(x)) = 0$ 且 $y_0 = y(x_0)$, 且有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

**定理 7.3.2 (隐函数存在定理 2)**

如果函数 $F(x, y, z)$ 满足一下条件:

1. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
2. $F(x, y, z)$ 在 (x_0, y_0, z_0) 的某一个邻域内具有连续偏导数
3. $F'(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

那么方程 $F(x, y, z) = 0$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 的某一个邻域内能够确定唯一的连续且具有连续导数的函数 $z = f(x, y)$, 满足 $F(x, y, z(x, y)) = 0$ 且 $z_0 = z(x_0, y_0)$, 且有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

**7.4 多元函数极值和最值****定义 7.4.1 (多元函数极值和最值)****极值**

设函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处有定义

1. 如果存在邻域 $U(P_0, \delta)$, 使得对于任意 $(x, y) \in U(P_0, \delta)$, 都有 $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, 那么称 $f(x_0, y_0)$ 是函数 $f(x, y)$ 的一个极大值
2. 如果存在邻域 $U(P_0, \delta)$, 使得对于任意 $(x, y) \in U(P_0, \delta)$, 都有 $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$, 那么



称 $f(x_0, y_0)$ 是函数 $f(x, y)$ 的一个极小值

最值

- 如果对于区域 D 上的任意 (x, y) , 都有 $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, 那么称 $f(x_0, y_0)$ 是函数 $f(x, y)$ 的一个最大值
- 如果对于区域 D 上的任意 (x, y) , 都有 $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$, 那么称 $f(x_0, y_0)$ 是函数 $f(x, y)$ 的一个最小值

无条件极值

定义 7.4.2 (多元函数极值)

二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取极值的必要条件:

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$$

二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取极值的充分条件:

$$\begin{cases} f'_{xx}(x_0, y_0) = A \\ f'_{xy}(x_0, y_0) = B \\ f'_{yy}(x_0, y_0) = C \end{cases} \quad \Delta = AC - B^2 \Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0, \begin{cases} A > 0, \min \\ A < 0, \max \end{cases} \\ \Delta < 0, \text{非极值} \\ \Delta = 0, \text{方法失效} \end{cases}$$

条件极值

定义 7.4.3 (拉格朗日数乘法)

求目标函数 $u = f(x, y, z)$ 在条件 $\begin{cases} g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 下的最值

构造辅助函数: $F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z)$

令

$$\begin{cases} F'_x = f'_x + \lambda g'_x + \mu h'_x = 0 \\ F'_y = f'_y + \lambda g'_y + \mu h'_y = 0 \\ F'_z = f'_z + \lambda g'_z + \mu h'_z = 0 \\ F'_{\lambda} = g(x, y, z) = 0 \\ F'_{\mu} = h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

得到所有的备选点 P_i , 计算 $f(P_i)$ 得到最大值和最小值.



注

1. 在不封闭曲线上求最值, 可以用拉格朗日数乘法, 但是要注意边界条件
2. 闭区域上多元函数的最值, 分为两部分, 第一部分是在区域内部求最值, 第二部分是在区域边界求最值; 前者利用驻点, 后者利用拉格朗日数乘法, 两者结合求最值





第 8 章 二重积分

内容提要

- 二重积分定义
- 极坐标和直角坐标下的二重积分
- 积分次序
- 变量替换

8.1 二重积分概念和性质

定义 8.1.1 (二重积分)

$f(x, y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数, 将有界闭区域 D 任意分割为 n 个小闭区域

$$D = \bigcup_{i=1}^n D_i$$

$\Delta\sigma_i$ 是 D_i 的面积, 任取 $(\varepsilon_i, \eta_i) \in D_i$, 作乘积 $f(\varepsilon_i, \eta_i)\sigma_i$, 并求和 $\sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i, \eta_i)\sigma_i$, 当

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \{\lambda | \lambda = \max\{d_i | i = 1, 2, \dots, n\}\}, d_i$ 是 D_i 区域的直径} = 0 时, 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i, \eta_i)\sigma_i$ 存在, 且与 D 的分割方法和 (ε_i, η_i) 的取法无关, 那么称此极限为 $f(x, y)$ 在区域 D 上的二重积分, 记作 $\iint_D f(x, y)d\sigma$

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i, \eta_i)\sigma_i$$

其中 $f(x, y)$ 称为被积函数, $f(x, y)d\sigma$ 称为被积表达式, x, y 是积分变量, D 是积分区域

二重积分的几何意义

二重积分 $\iint_D f(x, y)d\sigma$ 表示区域 D 上以 $f(x, y)$ 为曲顶的曲顶柱体的体积



推论 8.1.1

- (1). $\iint_D 1 d\sigma = \iint_D d\sigma = S_D$, S_D 是 D 的面积
- (2). $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上可积, $f(x, y)$ 在 D 上必有界
- (3). 积分的线性性质

$$\iint_D [k_1 f(x, y) + k_2 g(x, y)] d\sigma = k_1 \iint_D f(x, y) d\sigma + k_2 \iint_D g(x, y) d\sigma$$

(4). 积分的可加性

设 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 内可积, 且 $D_1 \cup D_2 = D, D_1 \cap D_2 = \emptyset$

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma$$

(5). 积分的保号性 设 $f(x, y), g(x, y)$ 在有界闭区域 D 内可积, 且 $f(x, y) \leq g(x, y)$

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma \Rightarrow \left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| = \iint_D |f(x, y)| d\sigma$$

(6). 估值定理

设 M, m 分别是 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 内的最大值和最小值

$$mS_D \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq MS_D$$

(7). 中值定理

设 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 内连续

$$\exists (\xi, \eta) \in D, s.t. \iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) S_D$$

**8.2 二重积分的对称性****定理 8.2.1 (对称性)**

1. 普通对称性

(i). 区域 D 关于 $x = a$ 对称, 我们有:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma & f(2a - x) = f(x) \\ 0 & f(2a - x) = -f(x) \end{cases}$$



特别的, 当 $a = 0$ 时, 我们有:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma & f(-x) = f(x) \\ 0 & f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

(ii). 区域 D 关于 $y = b$ 对称, 我们有:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma & f(x, 2b - y) = f(x, y) \\ 0 & f(x, 2b - y) = -f(x, y) \end{cases}$$

特别的, 当 $b = 0$ 时, 我们有:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma & f(x, -y) = f(x, y) \\ 0 & f(x, -y) = -f(x, y) \end{cases}$$

2. 轮换对称性

区域 D 关于 $x = y$ 对称, 我们有:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) d\sigma &= \iint_D f(y, x) d\sigma = \frac{1}{2} \iint_D [f(x, y) + f(y, x)] d\sigma \\ \iint_D f(x, y) d\sigma &= \begin{cases} 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma & f(x, y) = f(y, x) \\ 0 & f(x, y) = -f(y, x) \end{cases} \end{aligned}$$

3. 区域 D 关于原点对称, 我们有:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma & f(-x, -y) = f(x, y) \\ 0 & f(-x, -y) = -f(x, y) \end{cases}$$



8.3 二重积分计算

定义 8.3.1 (直角坐标系)

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} \int_a^b dx \int_{h(x)}^{g(x)} f(x, y) dy \\ \int_a^b dy \int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y) dx \end{cases}$$



定义 8.3.2 (极坐标系)

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D'} r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta$$



定义 8.3.3 (换元法)

令 $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$, 是 (x, y) 面到 (u, v) 面的一对一映射, 且 $x = x(u, v), y = y(u, v)$ 有一阶连续偏导数

$$J = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$\iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{D_{uv}} f[x(u, v), y(u, v)] \cdot J dudv$$



变量替换

$$d\sigma_1 = dudv \quad d\sigma_2 = |l \times m|$$

$$\begin{cases} x(u, v + dv) - x(u, v) = x'_v dv \\ x(u + du, v) - x(u, v) = x'_u du \\ y(u, v + dv) - y(u, v) = y'_v dv \\ y(u + du, v) - y(u, v) = y'_u du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l = (x'_u du, y'_u du) \\ m = (x'_v dv, y'_v dv) \end{cases}$$

$$d\sigma_2 = (x'_u y'_v - x'_v y'_u) dv du = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} d\sigma_1$$

Example

例题 8.1.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

证明

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy$$



$$\begin{aligned}
 I^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \\
 &= \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr \\
 &= \frac{\pi}{4} \\
 I &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}
 \end{aligned}$$

例题 8.2.

$$\int_0^a f(x)dx \int_0^a \frac{1}{f(x)}dx \geq a^2$$

证明

$$I = \int_0^a f(x)dx \int_0^a \frac{1}{f(x)}dx = \iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq a}} \frac{f(x)}{f(y)} dxdy$$

$$\begin{aligned}
 2I &= \iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq a}} \frac{f(x)}{f(y)} dxdy + \iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq a}} \frac{f(y)}{f(x)} dxdy \\
 &\geq \iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq a}} 2dxdy \\
 &= 2a^2
 \end{aligned}$$

$$I \geq a^2$$





第 9 章 常微分方程

内容提要

- 微分方程概念、解和通解
- (非) 齐次二阶常系数线性微分方程
- 一阶微分方程
- 欧拉方程
- 伯努利方程
- 高阶线性微分方程

定义 9.0.1 (微分方程及其阶)

表示未知函数及其导数(或者微分)与自变量之间关系的方程称为微分方程,一般写为:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \text{ 或 } y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

微分方程中未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶.



定义 9.0.2 (常微分方程)

未知函数是一元函数的微分方程称为常微分方程.



定义 9.0.3 (线性微分方程)

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

形如上述的微分方程称为 n 阶线性微分方程,其中 $a_k(x)(k = 0, 1, 2, \dots, n)$ 都是自变量 x 的函数, $a_k(x) \neq 0$,当 $a_k(x)(k = 0, 1, 2, \dots, n)$ 都是常数时,又称方程为 n 阶常系数线性微分方程;若右端 $f(x) \equiv 0$,则称方程为 n 阶齐次线性微分方程,否则称其为 n 阶非齐次线性微分方程.



定义 9.0.4 (微分方程的解和通解)

- 若将函数代入微分方程, 使方程成为恒等式, 则该函数称为微分方程的解, 微分方程解的图形称为积分曲线
- 若微分方程的解中含有的独立常数的个数等于微分方程的阶数, 则该解称为微分方程的通解.

定义 9.0.5 (初始条件和特解)

确定通解中常数的条件就是**初始条件**, 如 $y(x_0) = a_0, y'(x_0) = a_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$, 其中 a_0, a_1, \dots, a_{n-1} 为 n 个给定的数, 确定通解中的常数后, 解就成为**特解**.

9.1 一阶微分方程**9.1.1 可分离变量型微分方程****9.1.1.1 直接可分离**

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) = f(x)g(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

9.1.1.2 换元后可分离

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \Rightarrow \begin{cases} u = ax + by + c \\ \frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} \\ \frac{du}{dx} = a + bf(u) \end{cases} \Rightarrow \int \frac{du}{a + bf(u)} = \int dx$$

注

- 在换元过程中, 可能会因为定义域问题漏掉某些解, 这些解称为奇解.
- 非线性微分方程的所有解等于通解和奇解的并集; 线性微分方程的所有解等于通解, 没有奇解.



9.1.2 齐次型微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{y}{x} \\ \frac{dy}{dx} = \frac{d(ux)}{dx} = u + x \frac{du}{dx} \\ u + x \frac{du}{dx} = \varphi(u) \end{cases} \Rightarrow \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$$

9.1.3 一阶线性微分方程

定义 9.1.1 (一阶线性微分方程)

$y' + p(x)y = q(x)$, $p(x)$ 和 $q(x)$ 是已知的连续函数



定理 9.1.1 (一阶线性微分方程解)

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C \right]$$

注

$$\begin{aligned} e^{\int p(x)dx} y' + p(x)e^{\int p(x)dx} &= q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \\ \left[e^{\int p(x)dx} y \right]' &= q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \\ e^{\int p(x)dx} y &= \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} + C \\ y &= e^{-\int p(x)dx} \left[\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} + C \right] \end{aligned}$$



9.1.4 伯努利方程

定义 9.1.2 (伯努利方程)

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$$



定理 9.1.2

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = q(x) \Rightarrow \begin{cases} z = y^{1-n} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{1}{1-n} y^{-n} \frac{dy}{dx} \end{cases} \Rightarrow (1-n) \frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x)$$



我们可以得到:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x) \Rightarrow z = e^{-\int(1-n)p(x)dx} \left[e^{\int(1-n)p(x)dx} \cdot q(x) + C \right]$$



9.1.5 二阶可降阶微分方程

定义 9.1.3 (二阶可降阶微分方程)

1. $y'' = f(y, y')$ $\Leftrightarrow F(y, y', y'') = 0$

我们令: $p = y'$, 则

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p'p \Rightarrow p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

2. $y'' = f(x, y')$ $\Leftrightarrow F(x, y', y'') = 0$

我们令: $p(x) = y'$, 则

$$y'' = \frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx} = f(x, p)$$



9.2 高阶线性微分方程

9.2.1 二阶常系数线性微分方程

定义 9.2.1 (二阶常系数线性微分方程)

二阶常系数齐次微分方程:

$$y'' + py' + py = 0$$

二阶常系数非齐次微分方程:

$$y'' + py' + py = f(x)$$



定理 9.2.1 (二阶常系数齐次线性微分方程解)

对于二阶常系数齐次 x 线性微分方程:

特征方程: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

- 当方程有两个不同的实数根 λ_1, λ_2 , 微分方程通解:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

- 当方程有两个相同的实根 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, 微分方程通解:

$$y = C_1 + C_2 x e^{\lambda x}$$

- 当方程有两个不同的虚根 $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$, 微分方程通解:

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$



定理 9.2.2 (二阶常系数非齐次线性微分方程解)

对于二阶常系数非齐次线性微分方程:

$$y'' + py' + py = f(x)$$

通解为二阶常系数齐次线性微分方程的通解加上特解: $y_0 = y^* + y$

1. 当 $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ 时, 特解 y^* :

$$y^* = e^{\alpha x} x^k Q_n(x)$$

- 当 α 不是特征方程的根, $k = 0$
- 当 α 是特征方程的一个根, $k = 1$
- 当 α 是特征方程的重根, $k = 2$

2. 当 $f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + P_m(x) \sin \beta x)$ 时, 特解 y^* :

$$y^* = e^{\alpha x} x^k (Q_l^{(1)}(x) \cos \beta x + Q_l^{(2)}(x) \sin \beta x), \quad l = \max\{m, n\}$$

- 当 $\alpha \pm i\beta$ 不是特征方程的根, $k = 0$
- 当 $\alpha \pm i\beta$ 是特征方程的根, $k = 1$

**9.2.2 欧拉方程****定义 9.2.2 (欧拉方程)**

形如以下形式的微分方程:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + px \frac{dy}{dx} + qy = f(x)$$

1. 当 $x > 0$ 时, 令 $x = e^t, t = \ln x; \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dt})}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dt^2}$$

原微分方程可化为:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = f(e^t)$$

2. 当 $x < 0$ 时, 令 $x = -e^t, t = \ln(-x); \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}$$



$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2} \frac{d^2y}{dt^2}$$

原微分方程可化为:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = f(-e^t)$$

9.2.3 高阶常系数齐次线性微分方程

定义 9.2.3 (高阶常系数齐次线性微分方程)

$n(n \geq 3)$ 阶常系数齐次线性微分方程称为高阶常系数齐次线性微分方程。

命题 9.2.1 (n 阶常系数线性微分方程解)

特征方程:

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = 0$$

1. r 是单实数根, 通解包含 Ce^{rx}
2. r 是 k 重实数根, 通解包含 $(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \cdots + C_kx^{k-1})e^{rx}$
3. r 是单复根, 通解包括 $e^{rx}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$
4. r 是二重复根, 通解包括 $e^{rx}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x + C_3x \cos \beta x + C_4x \sin \beta x)$





第 10 章 无穷级数

内容提要

- 常数项级数
- 收敛性判别
- 收敛域和收敛半径
- 函数项级数
- 幂级数
- 和函数和函数展开式
- 傅里叶级数

10.1 常数项级数

定义 10.1.1 (级数定义)

给定一个无穷数列 $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$, 将其各项相加得到 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

我们将 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 称为无穷级数, 简称为级数, 其中 u_n 是无穷级数的通项, 如果 u_n 是常数项, 则称为常数项级数; 如果 u_n 是函数, 则称为函数项级数

定义 10.1.2 (级数敛散性)

级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的敛散性研究:

引入 $S_n = \sum_{i=1}^n u_i$, 我们称 S_n 是无穷级数的部分和, 我们定义:



(1). 当 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$ 时, 我们称级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛.

(2). 当 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \infty$ 或者不存在时, 我们称级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散.

推论 10.1.1

(1). 当 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛时, 我们有: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (必要条件)

(2). 当 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n, \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛时, 且这两个级数的和分别为 $S, T, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha u_n + \beta v_n)$ 收敛, 且级数和为 $\alpha S + \beta T$

(3). 改变级数任意有限项, 不会改变该级数的收敛性

(4). 收敛级数的任意项加括号所得到的新级数仍收敛, 且其和不变

10.2 收敛性判别

10.2.1 正项级数判别

(1). 定义法

定理 10.2.1 (收敛原则)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ 收敛} \Leftrightarrow S_n \text{ 有界}$$



证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 是正项级数, $u_n \geq 0, S_n$ 单调递增

S_n 有界, 单调有界准则: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ 存在, 原级数收敛

(2). 比较判别法

定理 10.2.2 (比较判别法)

两个正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$, 若从某一项起满足 $u_n \leq v_n$:

若 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 发散



若 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛



(3). 比较判别法的极限形式

定理 10.2.3 (比较判别法的极限形式)

两个正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ ($v_n \neq 0$), 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = A$

(i). $A = 0$, 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛

(ii). $0 < A < +\infty$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 有相同的敛散性

(iii). $A = +\infty$, 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散



(4). 比值判别法 (达朗贝尔判别法)

定理 10.2.4 (比值判别法)

正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

(i). $\rho < 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛

(ii). $\rho > 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散

(iii). $\rho = 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 敛散性不确定



(5). 根值判别法 (柯西判别法)

定理 10.2.5 (根值判别法)

正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

(i). $\rho < 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛

(ii). $\rho > 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散

(iii). $\rho = 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 敛散性不确定



(6). 积分判别法



定理 10.2.6 (积分判别法)

正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, 若存在在 $[1, +\infty)$ 上单调减少的非负函数 $f(x)$, 使得 $u_n = f(n)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 敛散性相同

**10.2.2 交错级数判别****定理 10.2.7 (莱布尼茨判别法)**

u_n 单调不增且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛

**10.2.3 一般项级数判别****定义 10.2.1**

$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 是原级数的绝对值级数

(i). 如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 收敛, 称其绝对收敛

(ii). 如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 发散, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 称其条件收敛

**10.2.4 常见级数敛散性推论****推论 10.2.1**

设 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n, \sum_{n=1}^{+\infty} v_n, \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ 是任意项级数

$$\begin{cases} v_n = \frac{u_n + |u_n|}{2} \\ w_n = \frac{|u_n| - u_n}{2} \end{cases}$$

(1). a, b, c 是非零常数, 且 $au_n + bv_n + cw_n = 0$, 在 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n, \sum_{n=1}^{+\infty} v_n, \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ 中只要有两个级数收敛, 另一个级数必收敛

(2). 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 收敛 \Rightarrow 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛; 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散 \Rightarrow 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 发散

(3). 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ 收敛 \Rightarrow 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n}$ 绝对收敛 $\quad \left| \frac{u_n}{n} \right| \leq \frac{1}{2} (u^2 + \frac{1}{n^2})$



- (4). 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 和级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ 收敛性不确定 $u_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$
- (5). 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ 收敛性不确定 $u_n = (-1)^n \frac{1}{n}$
- (6). 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$ 收敛性不确定 $u_n = (-1)^n \frac{1}{\ln n}$
- (7). 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛; 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n}$ 和级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n-1}$ 收敛性不确定



10.3 函数项级数

定义 10.3.1 (函数项级数)

设函数列 $\{u_n(x)\}$ 定义在区间 I 上, 称

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x) + \dots$$

为定义在区间 I 上的 **函数项级数**, 记作 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$, 当 x 取确定的值 x_0 时, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 成为常数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$



定义 10.3.2 (收敛点和发散点)

- (1). 若给定 $x_0 \in I$, 有 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$ 收敛, 则称 $x = x_0$ 是函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的收敛点
- (2). 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$ 发散, 则称 $x = x_0$ 是函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的发散点



定义 10.3.3 (收敛域)

函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的所有收敛点的集合称为函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的 **收敛域**



10.3.1 幂级数

定义 10.3.4 (幂级数)

若 $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ 的一般项 $u_n(x)$ 是 x 的 n 次幂函数, 则称 $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ 为幂级数

标准形式:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \dots$$

一般形式:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

其中 $a_n(n = 0, 1, 2, \dots)$ 为幂级数的系数



10.3.2 幂级数收敛域

定理 10.3.1 (阿贝尔定理)

阿贝尔定理

当幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_1(x_1 \neq 0)$ 处收敛时, $\forall x < |x_1|$, 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 都收敛

当幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_2(x_2 \neq 0)$ 处发散时, $\forall x > |x_2|$, 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 都发散



定理 10.3.2 (收敛域和收敛半径)

(1). 不缺项幂级数 (充分条件):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$$

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0 \\ 0, & \rho = \infty \\ \infty, & \rho = 0 \end{cases}$$

区间 $(-R, R)$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛区间; 幂级数的收敛域为 $(-R, R)$ or $[-R, R]$ or $(-R, R]$ or $[-R, R)$

(2). 缺项幂级数或一般项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$, 利用正项级数判别法中的比值判别法 (充分条件)



件):

$$\rho(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| < 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} < 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (a, b)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(a) \text{ 和 } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(b) \text{ 敛散性}$$

(3). 对级数提出或者乘以因式 $(x - x_0)^k$ 或者平移, 收敛半径不变

(4). 对级数逐项求导, 收敛半径不变, 收敛域可能缩小

(5). 对级数逐项积分, 收敛半径不变, 收敛域可能扩大



10.3.3 幂级数求和函数

定义 10.3.5 (幂级数的和函数)

在幂级数收敛域上, 记 $S(x)$ 是幂级数的和函数:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$



定理 10.3.3 (运算法则)

幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_a 和 R_b , 且 $R_a \neq R_b$

(i).

$$k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} k a_n x^n, |x| < R_a$$

(ii).

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n, |x| < \min\{R_a, R_b\}$$

(iii).

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \right) x^n$$



推论 10.3.1

(i). 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上连续

(ii). 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上可积分, 且有逐项积分公式, 收敛半径



不变, 收敛域可能变大

$$\int_0^x S(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} (x \in I)$$

(iii). 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 $(-R, R)$ 上可导, 且有逐项求导公式, 收敛半径不变, 收敛域可能变小

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} (|x| < R)$$



10.3.4 重要展开式

定理 10.3.4

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, -\infty < x < +\infty$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, -1 < x < 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, -1 < x \leq 1$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, -\infty < x < +\infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, -\infty < x < +\infty$$

$$\tan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, -1 \leq x \leq 1$$



$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

$$= \begin{cases} x \in (-1, 1), & \alpha \leq -1 \\ x \in (-1, 1], & -1 < \alpha < 0 \\ x \in [-1, 1], & \alpha > 0 \ \& \alpha \notin \mathbb{N}_+ \\ x \in (-\infty, +\infty), & \alpha \in \mathbb{N}_+ \end{cases}$$



10.3.5 函数展开成幂级数

定义 10.3.6

泰勒级数: $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处存在任意阶导数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

麦克劳林级数: $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处存在任意阶导数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$



10.4 傅里叶级数

定义 10.4.1 (傅里叶级数)

考虑到三角函数是周期函数, 任意一个以 2π 为周期的函数 $f(x)$, 能写成一系列三角函数 $\sin(nx)$ 和 $\cos(nx)$ 的线性组合:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$f(x)$ 三角函数分解被称为傅里叶级数或傅里叶展开, 也被称为三角级数



10.4.1 三角函数集 Γ 的归一正交性

定义 10.4.2 (内积、正交和范数)

考虑 $[-\pi, \pi]$ 上的函数 $f(x)$ 构成的无限维空间, 我们希望用正交的向量组来表示一般的向量(函数), 我们定义函数内积、正交和范数概念

(1). 内积



$$\forall f, g \in V, (f \cdot g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

(2). 正交

$$\forall f, g \in V, (f \cdot g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = 0 \Rightarrow f \perp g$$

(3). 范数

$$\forall f \in V, \|f\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

定义 10.4.3 (三角函数集 Γ 的归一正交性)

定义在 $[-\pi, \pi]$ 上的函数空间中存在一系列范数为 1 且正交的向量组, 考虑 $[-\pi, \pi]$ 上的三角函数组

$$\Gamma = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \dots \right\}$$

$$\forall f \in \Gamma, \|f\| = 1, \forall f, g \in \Gamma, f \cdot g = 0 \Rightarrow f \perp g$$

不妨设

$$\begin{cases} f_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin mx \\ f_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \end{cases} \quad \begin{cases} g_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx \\ g_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \end{cases}$$

$$\begin{cases} \|f_1\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx \right)^{\frac{1}{2}} = 1 \\ \|g_1\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx \right)^{\frac{1}{2}} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} f_1 \cdot g_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos mx dx = 0 \\ f_1 \cdot f_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0 (m \neq n) \\ g_1 \cdot g_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0 (m \neq n) \end{cases}$$

10.4.2 周期函数的傅里叶级数

定理 10.4.1 (周期为 2π 函数的傅里叶级数)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$



三角函数分解, a_n, b_n 是傅里叶级数系数:

$$\begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos^2 nx dx \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin^2 nx dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \end{cases}$$

记作: 2π 周期函数 $f(x)$ 的傅里叶级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$



定理 10.4.2 (周期为 2π 奇偶函数的傅里叶级数)

(1). $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 为奇函数, 傅里叶级数为正弦级数:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx \Rightarrow b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

(2). $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 为偶函数, 傅里叶级数为余弦级数:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx \Rightarrow a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$$



10.4.3 任意对称区间中的傅里叶展开

定义 10.4.4 (任意对称区间中的傅里叶展开)

设 $f(x)$ 定义域为 $[-l, l]$, 令 $y = \frac{x\pi}{l}, y \in [-\pi, \pi]$

$$g(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos ny + b_n \sin ny) \Rightarrow f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{l}x + b_n \sin \frac{n\pi}{l}x)$$

傅里叶系数:

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l}x dx, & n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l}x dx, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$



10.4.4 周期延拓

定义 10.4.5 (周期延拓)

- (1). 周期延拓: $[-\pi, \pi] \rightarrow (-\infty, +\infty)$
- (2). 奇延拓: $[0, \pi] \rightarrow [-\pi, \pi]$ 且 $f(x)$ 为奇函数, 正弦级数
- (3). 偶延拓: $[0, \pi] \rightarrow [-\pi, \pi]$ 且 $f(x)$ 为偶函数, 余弦级数



10.4.5 逐点收敛性理论

定理 10.4.3 (狄利克雷收敛定理)

$f(x)$ 以 $2l$ 为周期的可积函数, 在 $[-l, l]$ 上 $f(x)$ 满足条件:

- (1). 连续或者只有有限个第一类间断点
- (2). 至多有有限个极值点

$f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-l, l]$ 上处处收敛, 其和函数 $S(x)$ 满足

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ 为连续点} \\ \frac{f(x_-) + f(x_+)}{2}, & x \text{ 为间断点} \\ \frac{f(-l_+) + f(l_-)}{2}, & x = \pm l \end{cases}$$



定理 10.4.4 (帕塞瓦尔公式)

$f(x)$ 是 2π 周期函数, $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 有界可积, 傅里叶系数满足:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$



推论 10.4.1 (常见级数和)

$$(1). \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$$

$$(2). \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$(3). \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \ln 2$$

$$(4). \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = 2$$

$$(5). \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} = \frac{e + e^{-1}}{2}$$

$$(6). \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

$$(7). \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+2}{(2n+1)!} = \sin 1 + \cos 1$$





第 11 章 空间解析几何

11.1 向量代数

定义 11.1.1 (向量代数)

- (1). 方向角: 非零向量 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 与 x, y, z 轴所成夹角 α, β, γ 称为向量 \mathbf{a} 的方向角
(2). 方向余弦: $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 称为向量 \mathbf{a} 的方向余弦, $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \cos \beta = \frac{a_y}{|\mathbf{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \cos \gamma = \frac{a_z}{|\mathbf{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

设 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z), \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$

- (3). 夹角

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \\ \cos \theta &= \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \end{aligned}$$

- (4). 投影

$$\text{Prj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

- (5). 叉积

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$$

11.2 空间平面和直线

11.2.1 平面

定义 11.2.1 (平面方程)

假设平面的法向量 $\mathbf{n} = (A, B, C)$

(1). 一般式

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

(2). 点法式

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

(3). 截距式, 平面过 $(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$ 三点

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

(4). 三点式 $P_i(x_i, y_i, z_i) (i = 1, 2, 3)$ 不共线

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \end{vmatrix} = 0$$



11.2.2 直线

定义 11.2.2 (直线方程)

假设直线的方向向量 $\tau = (l, m, n)$, $P(x_0, y_0, z_0)$ 是直线上的一点

(1). 一般式

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, & \mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, & \mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) \\ \tau = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 \end{cases}$$

(2). 点向式

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

(3). 参数式

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

(4). 两点式

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_2}$$



定理 11.2.1 (位置关系)

(1). 点到直线的距离公式

点 $M(x, y, z)$ 到直线 $L : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ 的距离

$$d = \frac{|\tau \times \overrightarrow{M_0M}|}{|\tau|} = \frac{\left\| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ l & m & n \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{array} \right\|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

二维平面:

$$d = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

(2). 点到平面距离公式

点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离, $P(x, y, z)$ 是平面上任意一点



$$d = |\mathbf{Prj}_n \overrightarrow{P_0 P}| = \frac{|A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

(3). 直线和直线

设 $\tau_1(l_1, m_1, n_1), \tau_2(l_2, m_2, n_2)$ 分别是 L_1, L_2 的方向向量

$$\begin{cases} L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \tau_1 \perp \tau_2 \Leftrightarrow l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0 \\ L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \tau_1 \parallel \tau_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \end{cases}$$

L_1, L_2 的夹角 $\theta = \arccos \frac{|\tau_1 \cdot \tau_2|}{|\tau_1||\tau_2|}, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

(4). 平面和平面

设 $n_1(A_1, B_1, C_1), n_2(A_2, B_2, C_2)$ 分别是 π_1, π_2 的法向量

$$\begin{cases} \pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow n_1 \perp n_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \\ \pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow n_1 \parallel n_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \end{cases}$$

π_1, π_2 的夹角 $\theta = \arcsin \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1||n_2|}, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$



11.3 空间曲面和曲线

定义 11.3.1 (空间曲线)

(1). 一般式

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

(2). 参数方程式

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$$

(3). 空间曲线在坐标面的投影

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$



定义 11.3.2 (空间曲面)

(1). 一般曲面方程

$$F(x, y, z) = 0$$

(2). 二次曲面

(a). 椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

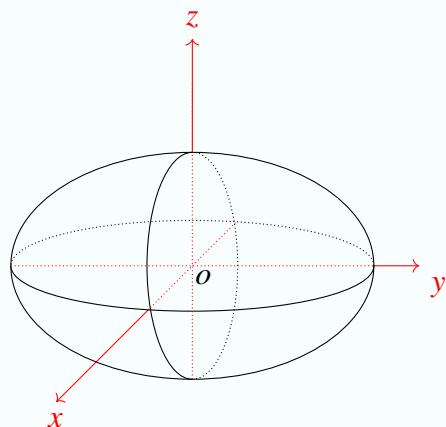


图 11.1: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(b). 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

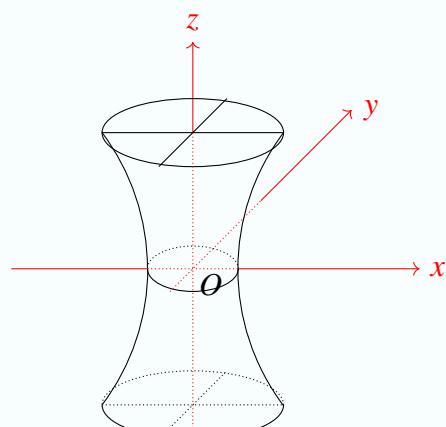


图 11.2: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

(c). 双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

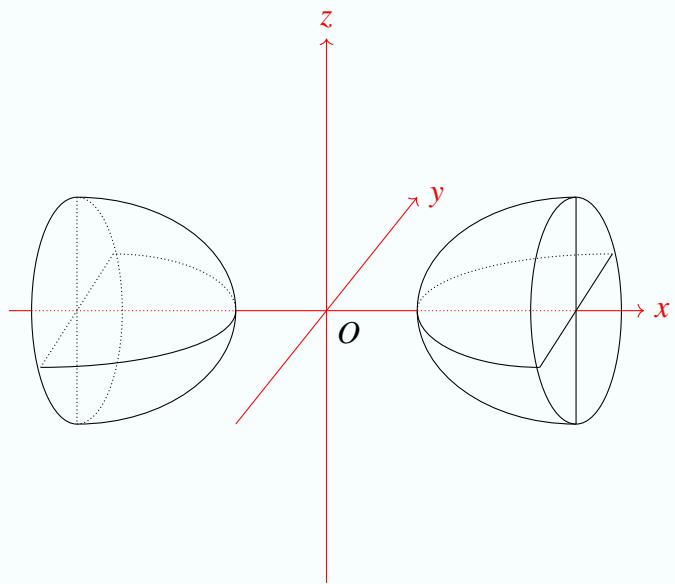


图 11.3: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

(d). 椭圆抛物面 $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z (p, q > 0)$

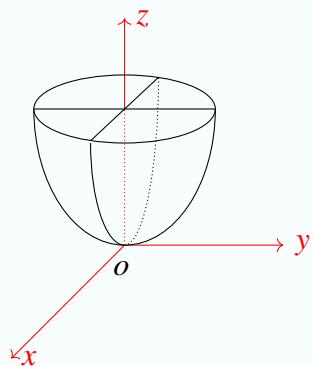


图 11.4: $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z (p, q > 0)$

(f). 椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$

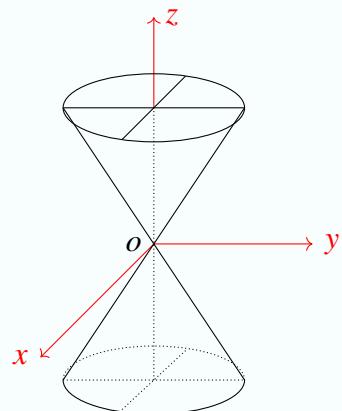


图 11.5: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$

(g). 双曲抛物面 $-\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z(p, q > 0)$

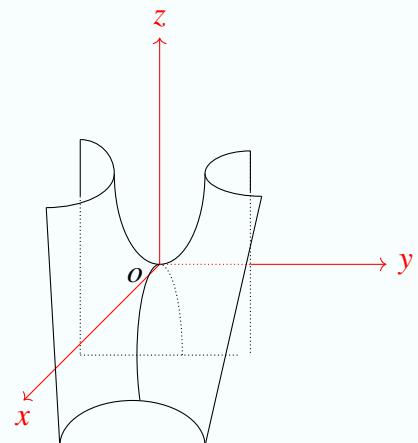


图 11.6: $-\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z(p, q > 0)$

(h). 双曲抛物面 $z = xy$

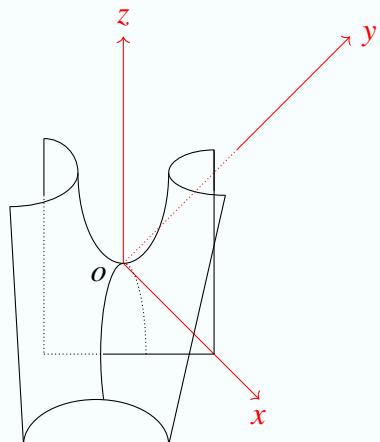


图 11.7: $z = xy$

(i). 椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

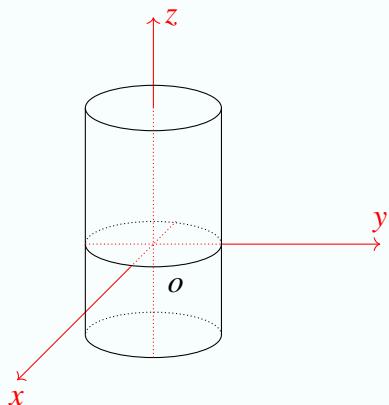


图 11.8: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(j). 双曲柱面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

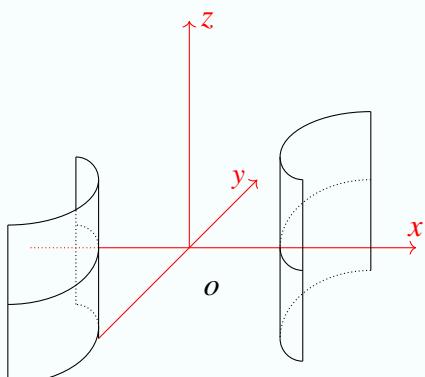


图 11.9: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

(k). 抛物柱面 $y = ax^2$

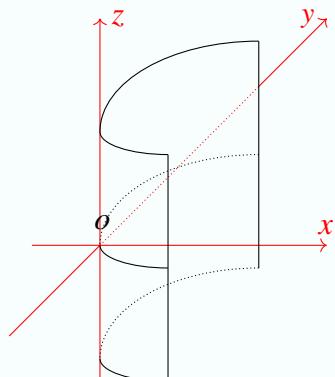


图 11.10: $y = ax^2$

(3). 旋转曲面

曲线 $\Gamma : \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 绕直线 $L : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ 旋转一周形成的旋转曲面,

直线 L 的方向向量 $\tau = (l, m, n)$

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 是曲线 Γ 上任意一点, $P(x, y, z)$ 是 M_1 绕直线 L 旋转一周形成的纬圆上异于 M_1 的一点:

$$\begin{cases} \tau \perp \overrightarrow{M_1 P} \\ |\overrightarrow{M_1 M_0}| = |\overrightarrow{P M_0}| \\ F(x_1, y_1, z_1) = 0 \\ G(x_1, y_1, z_1) = 0 \end{cases}$$



11.3.1 空间曲线的切线和法平面

定义 11.3.3 (曲线切线和法平面)

(1). 参数方程

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$$

在 $t = t_0$ 时, 点 $P_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ 处切线的方向向量 $\mathbf{n} = (f'(t_0), g'(t_0), h'(t_0))$

切线方程

$$\frac{x - x_0}{f'(t_0)} = \frac{y - y_0}{g'(t_0)} = \frac{z - z_0}{h'(t_0)}$$

法平面方程

$$f'(t_0)(x - x_0) + g'(t_0)(y - y_0) + h'(t_0)(z - z_0) = 0$$

(2). 一般式

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处切线的方向向量

$$\tau = \begin{vmatrix} i & j & k \\ F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \end{vmatrix} = (A, B, C)$$



切线方程

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$$

法平面方程

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$



11.3.2 空间曲面的切平面和法线

定义 11.3.4

(1). $F(x, y, z) = 0$, 点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 处切平面法向量 $\mathbf{n} = \{F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0)\}$

切平面方程

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

法线方程

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$$

(2). $z = f(x, y)$, 点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 处切平面法向量 $\mathbf{n} = \{f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1\}$

切平面方程

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

法线方程

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$



11.4 场论初步

11.4.1 方向导数

定义 11.4.1 (方向导数)

设三元函数 $u = u(x, y, z)$ 在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的某空间邻域内 $U \subset R^3$ 有定义, l 是从 P_0 出发的一条射线, $P(x, y, z)$ 为 l 上且在 U 中的任意一点:

$$\begin{cases} x - x_0 = \Delta x = t \cos \alpha \\ y - y_0 = \Delta y = t \cos \beta \\ z - z_0 = \Delta z = t \cos \gamma \end{cases}$$

$t = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ 表示 $|PP_0|$, 如果下面极限存在:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(P) - u(P_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) - u(x_0, y_0, z_0)}{t}$$

我们将此极限称为 $u = f(x, y, z)$ 在 P_0 处沿着 l 的方向导数, 记作 $\frac{\partial u}{\partial l}|_{P_0}$

定理 11.4.1 (方向导数计算公式)

$$\frac{\partial u}{\partial l}|_{P_0} = u'_x \cos \alpha + u'_y \cos \beta + u'_z \cos \gamma$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为方向 l 的方向余弦



11.4.2 梯度

定义 11.4.2 (梯度)

设三元函数 $u = u(x, y, z)$ 在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 处具有一阶偏导数, 定义下面为 $u = u(x, y, z)$ 在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的梯度:

$$\mathbf{grad} u|_{P_0} = (u'_x(P_0), u'_y(P_0), u'_z(P_0))$$

梯度和方向导数之间的关系:

$$\frac{\partial u}{\partial l}|_{P_0} = \mathbf{grad} u|_{P_0} \cdot l = |\mathbf{grad} u|_{P_0} |l| \cos \theta$$



11.4.3 散度和旋度

定义 11.4.3 (散度和旋度)

设向量场 $\mathbf{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$

散度

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

旋度

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$





第 12 章 三重积分

◆ 12.1 三重积分定义和性质

定义 12.1.1 (三重积分)

设 $f(x, y, z)$ 是空间有界闭区域 Ω 上的有界函数, 将 Ω 任意分为 n 个小闭区域

$$\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$$

其中 Δv_i 表示第 i 个小闭区域, 也表示第 i 个小闭区域的体积, 在每一个 Δv_i 中任意取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) , 作乘积 $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 并求和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$, 如果当 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \{\lambda | \lambda = \max\{\Delta v_i \text{ 的直径}, i = 1, 2, \dots, n\}\} = 0$ 时, 求和的极限总是存在, 与 Δv_i 的分法以及点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无关, 称此极限为函数 $f(x, y, z)$ 在闭区域 Ω 上的三重积分, 记作

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

其中 $f(x, y, z)$ 称为被积函数, Ω 称为积分区域, $f(x, y, z)dv$ 称为被积表达式, dv 称为体积微元, x, y, z 称为积分变量, $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$ 称为积分和

物理意义

设一物体占有 $Oxyz$ 上闭区域 Ω , 在点 (x, y, z) 处的密度为 $\rho(x, y, z)$, 假定 $\rho(x, y, z)$ 在 Ω 上连续, 物体质量 $M = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dv$



推论 12.1.1

- (1). 当 $f(x, y, z)$ 在闭区域 Ω 上连续时, 三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$ 一定存在; 当 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上可积, $f(x, y, z)$ 在 Ω 上必有界
- (2). $\iint_{\Omega} 1 dv = \iiint_{\Omega} dv = V$, V 是 Ω 的体积
- (3). 积分线性性质

$$\iiint_{\Omega} [k_1 f(x, y, z) \pm k_2 g(x, y, z)] dv = k_1 \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \pm k_2 \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dv$$

(4). 积分的可加性

设 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上可积, 且 $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset, \Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv + \iiint_{\Omega_2} f(x, y, z) dv$$

(5). 积分保号性

设 $f(x, y, z)$ 和 $g(x, y, z)$ 在 Ω 上可积, 且在 Ω 上, $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \leq \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dv \Rightarrow \left| \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \right| \leq \iiint_{\Omega} |f(x, y, z)| dv$$

(6). 估值定理

设 M, m 分别是 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上的最大值和最小值, V 是 Ω 的体积

$$mV \leq \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \leq MV$$

(7). 中值定理

设 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上连续, V 是 Ω 的体积

$$\exists (\xi, \eta, \zeta) \in \Omega, s.t. \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = f(\xi, \eta, \zeta)V$$



12.2 三重积分对称性

定义 12.2.1 (普通对称性)

- (1). Ω 关于平面 xoz 对称



$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \begin{cases} 2 \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv & f(x, y, z) = f(x, -y, z) \\ 0 & f(x, y, z) = -f(x, -y, z) \end{cases}$$

(2). Ω 关于平面 yoz 对称

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \begin{cases} 2 \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv & f(x, y, z) = f(-x, y, z) \\ 0 & f(x, y, z) = -f(-x, y, z) \end{cases}$$

(3). Ω 关于平面 xoy 对称

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \begin{cases} 2 \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv & f(x, y, z) = f(x, y, -z) \\ 0 & f(x, y, z) = -f(x, y, -z) \end{cases}$$

定义 12.2.2 (轮换对称性)

若将 x, y, z 任意两个交换位置后, 积分区域 Ω 保持不变

$$\iiint_{\Omega} f(x) dv = \iiint_{\Omega} f(y) dv = \iiint_{\Omega} f(z) dv$$

12.3 三重积分计算方法

定义 12.3.1 (直角坐标系)

(1). 先一后二

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iint_{D_{xy}} d\sigma \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz$$

一般用于空间区域 Ω 无侧面或者侧面为柱面, 转化为二重积分, 积分区域为空间区域 Ω 在 xoy (yoz , xoz) 平面的投影

(2). 先二后一

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_a^b dz \iint_{D_z} f(x, y, z) d\sigma$$

适用于旋转体, 旋转曲面方程 $z = z(x, y)$



定义 12.3.2 (换元法)

令 $\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$, 且 $(x, y, z) \rightarrow (u, v, w)$ 是一一映射, $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$ 有一阶连续偏导数

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\iiint_{\Omega_{xyz}} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega_{uvw}} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$



定义 12.3.3 (柱面坐标系)

令 $\begin{cases} x = r \cos \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi] \\ y = r \sin \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi] \\ z = z \end{cases}$, 且 $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, z)$ 是一一映射, $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$ 有一阶连续偏导数

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

$$\iiint_{\Omega_{xyz}} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Omega_{r\theta z}} dr d\theta \int_{z_1(r, \theta)}^{z_2(r, \theta)} r f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) dz$$



定义 12.3.4 (球面坐标系)

令 $\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi] \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi] \\ z = r \cos \varphi, \quad \varphi \in [0, \pi] \end{cases}$, 且 $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \varphi)$ 是一一映射, $x = r \sin \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \varphi$ 有一阶连续偏导数



$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \cos \theta & r \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi & 0 & -r \sin \varphi \end{vmatrix} = r^2 \sin \varphi$$

$$\iiint_{\Omega_{xyz}} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega_{r\varphi\theta}} r^2 \sin \varphi f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) dr d\theta d\varphi$$



12.4 三重积分应用

定理 12.4.1 (重心公式)

对于空间物体, 体密度 $\rho(x, y, z)$, Ω 是物体所占的空间区域, 重心 $O(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) dv}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dv} \\ \bar{y} = \frac{\iiint_{\Omega} y \rho(x, y, z) dv}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dv} \\ \bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z \rho(x, y, z) dv}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dv} \end{cases}$$

当密度函数为 $\rho(x, y, z)$ 为常数, 重心就是形心

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} x dv}{\iiint_{\Omega} dv} \\ \bar{y} = \frac{\iiint_{\Omega} y dv}{\iiint_{\Omega} dv} \\ \bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z dv}{\iiint_{\Omega} dv} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \iiint_{\Omega} x dv = \bar{x} \cdot V \\ \iiint_{\Omega} y dv = \bar{y} \cdot V \\ \iiint_{\Omega} z dv = \bar{z} \cdot V \end{cases}$$



定理 12.4.2 (转动惯量 $I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$)

对于空间物体, 体密度 $\rho(x, y, z)$, Ω 是物体所占的空间区域



(1). x 轴

$$I_x = \iint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) d\nu$$

(2). y 轴

$$I_y = \iint_{\Omega} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) d\nu$$

(3). z 轴

$$I_z = \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) d\nu$$

(4). 原点 O

$$I_O = \iint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) d\nu$$



定理 12.4.3 (万有引力 $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$)

对于空间物体，体密度 $\rho(x, y, z)$, Ω 是物体所占的空间区域，计算该物体对物体外一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处质量为 m 的质点的引力 $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$

$$\begin{aligned} F_x &= Gm \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \cos \alpha d\nu \\ &= Gm \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)(x - x_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ F_y &= Gm \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{(y - y_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \cos \beta d\nu \\ &= Gm \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)(y - y_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ F_z &= Gm \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{(z - z_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \cos \gamma d\nu \\ &= Gm \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)(z - z_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$





第 13 章 第一型曲线和曲面积分

◆ 13.1 第一型曲线积分

13.1.1 第一型曲线积分定义和性质

定义 13.1.1 (第一型曲线积分)

设 L 是 xoy 平面上一条光滑曲线弧, 函数 $f(x, y)$ 在 L 上有界, 在 L 上任意插入一系列的点 M_1, M_2, \dots, M_{n-1} 将 L 分成 n 小段, 设第 i 段的弧长为 Δs_i , 在第 i 段上任意取一点 (ζ_i, η_i) , 作乘积 $f(\zeta_i, \eta_i)\Delta s_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 并求和 $\sum_{i=1}^n f(\zeta_i, \eta_i)\Delta s_i$, 当 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \{\lambda | \lambda = \max\{\Delta s_i\}, i = 1, 2, \dots, n\} = 0$ 时, 求和极限存在, 且与 Δs_i 的分法以及 (ζ_i, η_i) 的取法无关, 称此极限为函数 $f(x, y)$ 在曲线 L 上对弧长的曲线积分或第一型曲线积分, 记作 $\int_L f(x, y)ds$

$$\int_L f(x, y)ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i, \eta_i)\Delta s_i$$

其中 $f(x, y)$ 称为被积函数, $f(x, y)ds$ 称为被积表达式, x, y 是积分变量, L 是积分弧
对于函数 $f(x, y, z)$ 在空间曲线 Γ 上的第一型曲线积分

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z)ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i$$

物理意义

1. 设一物体在 xoy 平面上一光滑曲线弧 L 上, 物体在 L 上的线密度为 $\rho(x, y)$, 则物体的质量 $m = \int_L \rho(x, y)ds$
2. 设一物体在空间曲线 Γ 上, 物体在 Γ 上的线密度为 $\rho(x, y, z)$, 则物体的质量 $m = \int_{\Gamma} \rho(x, y, z)ds$



推论 13.1.1

- (1). $\int_{\Gamma} ds = l_{\Gamma}$, 其中 l_{Γ} 是 Γ 的长度
- (2). 设 $f(x, y, z)$ 在 Γ 上可积, 其在 Γ 上必有界
- (3). 积分线性性质

$$\int_{\Gamma} [k_1 f(x, y, z) + k_2 g(x, y, z)] ds = k_1 \int_{\Gamma} f(x, y, z) ds + k_2 \int_{\Gamma} g(x, y, z) ds$$

- (4). 积分可加性

设 $f(x, y, z)$ 在 Γ 上可积, 且 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset, \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \int_{\Gamma_1} f(x, y, z) ds + \int_{\Gamma_2} f(x, y, z) ds$$

- (5). 积分保号性

设 $f(x, y, z), g(x, y, z)$ 在 Γ 上可积, 且在 Γ 上 $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds \leq \int_{\Gamma} g(x, y, z) ds \Rightarrow \left| \int_{\Gamma} f(x, y, z) ds \right| \leq \int_{\Gamma} |f(x, y, z)| ds$$

- (6). 估值定理 设 M, m 分别是 $f(x, y, z)$ 在 Γ 上的最大值和最小值, l_{Γ} 的长度

$$ml_{\Gamma} \leq \int_{\Gamma} f(x, y, z) ds \leq Ml_{\Gamma}$$

- (7). 中值定理

设 $f(x, y, z)$ 在 Γ 上连续, l_{Γ} 是 Γ 的长度

$$\exists (\xi, \eta, \zeta) \in \Gamma, s.t. \int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = f(\xi, \eta, \zeta) l_{\Gamma}$$

**13.1.2 第一型曲线积分的对称性****定义 13.1.2 (普通对称性)**

- (1). Γ 关于平面 xoz 对称

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \begin{cases} 2 \int_{\Gamma_1} f(x, y, z) ds & f(x, y, z) = f(x, -y, z) \\ 0 & f(x, y, z) = -f(x, -y, z) \end{cases}$$

- (2). Γ 关于平面 yoz 对称

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \begin{cases} 2 \int_{\Gamma_1} f(x, y, z) ds & f(x, y, z) = f(-x, y, z) \\ 0 & f(x, y, z) = -f(-x, y, z) \end{cases}$$

- (3). Γ 关于平面 xoy 对称



$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \begin{cases} 2 \int_{\Gamma_1} f(x, y, z) ds & f(x, y, z) = f(x, y, -z) \\ 0 & f(x, y, z) = -f(x, y, -z) \end{cases}$$

**定义 13.1.3 (轮换对称性)**

若将 x, y, z 任意两个交换位置后, 积分区域 Γ 保持不变

$$\int_{\Gamma} f(x) ds = \int_{\Gamma} f(y) ds = \int_{\Gamma} f(z) ds$$

**13.1.3 第一型曲线积分计算****定理 13.1.1 (平面曲线)**

(1). $L : y = f(x), x \in [a, b]$

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

(2). $L : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t)] \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

(3). $L : r = r(\theta), \theta \in [\theta_1, \theta_2]$

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta$$

**定理 13.1.2 (空间曲线)**

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta] \Rightarrow ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$



13.2 第一型曲面积分

13.2.1 第一型曲面积分定义和性质

定义 13.2.1 (第一型曲面积分)

设曲面 Σ 是光滑的, 函数 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上有界, 将 Σ 任意分为 n 个小块 $\Delta\Sigma_i$, ΔS_i 表示曲面 $\Delta\Sigma_i$ 的面积, 在 $\Delta\Sigma_i$ 上任意取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) , 作乘积 $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 并求和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)S_i$, 当 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \{\lambda | \lambda = \max\{S_i\}, i = 1, 2, \dots, n\} = 0$ 时, 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$ 存在, 且与 $\Delta\Sigma_i$ 的分法和 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的取法无关, 称此极限为函数 $f(x, y, z)$ 在曲面 Σ 上对面积的曲面积分或第一型曲面积分, 记作 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$$

其中 $f(x, y, z)$ 称为被积函数, $f(x, y, z)dS$ 称为被积表达式, x, y, z 是积分变量, Σ 是积分曲面

物理意义

设一曲面物体 Σ , 曲面密度为 $\rho(x, y, z)$, 则物体的质量 $m = \iint_{\Sigma} \rho(x, y, z)dS$



推论 13.2.1

(1). $\iint_{\Sigma} dS = S$, 其中 S 是 Σ 的面积

(2). 设 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上可积, 其在 Σ 上必有界

(3). 积分线性性质

$$\iint_{\Sigma} [k_1 f(x, y, z) + k_2 g(x, y, z)]dS = k_1 \iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS + k_2 \iint_{\Sigma} g(x, y, z)dS$$

(4). 积分可加性

设 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上可积, 且 $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset, \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z)dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z)dS$$

(5). 积分保号性

设 $f(x, y, z), g(x, y, z)$ 在 Σ 上可积, 且在 Σ 上 $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS \leq \iint_{\Sigma} g(x, y, z)dS \Rightarrow |\iint_{\Sigma} f(x, y, z)dS| \leq \iint_{\Sigma} |f(x, y, z)|dS$$

(6). 估值定理



设 M, m 分别是 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上的最大值和最小值, S_Σ 表示 Σ 的面积

$$mS_\Sigma \leq \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS \leq MS_\Sigma$$

(7). 中值定理

设 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上连续, S_Σ 是 Σ 的面积

$$\exists (\xi, \eta, \zeta) \in \Sigma, s.t. \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = f(\xi, \eta, \zeta) S_\Sigma$$



13.2.2 第一型曲面积分的对称性

定义 13.2.2 (普通对称性)

(1). Σ 关于平面 xoz 对称

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \begin{cases} 2 \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS & f(x, y, z) = f(x, -y, z) \\ 0 & f(x, y, z) = -f(x, -y, z) \end{cases}$$

(2). Σ 关于平面 yoz 对称

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \begin{cases} 2 \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS & f(x, y, z) = f(-x, y, z) \\ 0 & f(x, y, z) = -f(-x, y, z) \end{cases}$$

(3). Σ 关于平面 xoy 对称

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \begin{cases} 2 \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS & f(x, y, z) = f(x, y, -z) \\ 0 & f(x, y, z) = -f(x, y, -z) \end{cases}$$



定义 13.2.3 (轮换对称性)

若将 x, y, z 任意两个交换位置后, 积分区域 Σ 保持不变

$$\iint_{\Sigma} f(x) dS = \iint_{\Sigma} f(y) dS = \iint_{\Sigma} f(z) dS$$



13.2.3 第一型曲面积分计算

定理 13.2.1 (投影法)

1. 曲面投影 xoy 平面

$$\text{设曲面 } \Sigma \text{ 的方程为 } z = z(x, y), \text{ 则 } \Sigma \text{ 的面积元素 } dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

2. 曲面投影 yoz 平面

$$\text{设曲面 } \Sigma \text{ 的方程为 } x = x(y, z), \text{ 则 } \Sigma \text{ 的面积元素 } dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz$$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz$$

3. 曲面投影 xoz 平面

$$\text{设曲面 } \Sigma \text{ 的方程为 } y = y(x, z), \text{ 则 } \Sigma \text{ 的面积元素 } dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz$$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz$$



13.3 第一型曲线积分和曲面积分应用

1. 曲线长度和曲面面积

定理 13.3.1 (曲线弧长和曲面面积)

$$L_{\Gamma} = \int_{\Gamma} ds$$

$$S_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} dS$$



2. 重心



定理 13.3.2 (重心公式)

(1). 光滑曲线, 对于光滑曲线 Γ , 线密度 $\rho(x, y, z)$, 重心 $O(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\int_{\Gamma} x \rho(x, y, z) ds}{\int_{\Gamma} \rho(x, y, z) ds} \\ \bar{y} = \frac{\int_{\Gamma} y \rho(x, y, z) ds}{\int_{\Gamma} \rho(x, y, z) ds} \\ \bar{z} = \frac{\int_{\Gamma} z \rho(x, y, z) ds}{\int_{\Gamma} \rho(x, y, z) ds} \end{cases}$$

当密度函数为 $\rho(x, y, z)$ 为常数, 重心就是形心

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\int_{\Gamma} x ds}{\int_{\Gamma} ds} \\ \bar{y} = \frac{\int_{\Gamma} y ds}{\int_{\Gamma} ds} \\ \bar{z} = \frac{\int_{\Gamma} z ds}{\int_{\Gamma} ds} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_{\Gamma} x ds = \bar{x} \cdot l_{\Gamma} \\ \int_{\Gamma} y ds = \bar{y} \cdot l_{\Gamma} \\ \int_{\Gamma} z ds = \bar{z} \cdot l_{\Gamma} \end{cases}$$

(2). 光滑曲面, 对于光滑曲面 Σ , 曲面密度 $\rho(x, y, z)$, 重心 $O(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\int_{\Sigma} x \rho(x, y, z) dS}{\int_{\Sigma} \rho(x, y, z) dS} \\ \bar{y} = \frac{\int_{\Sigma} y \rho(x, y, z) dS}{\int_{\Sigma} \rho(x, y, z) dS} \\ \bar{z} = \frac{\int_{\Sigma} z \rho(x, y, z) dS}{\int_{\Sigma} \rho(x, y, z) dS} \end{cases}$$

当密度函数为 $\rho(x, y, z)$ 为常数, 重心就是形心

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\int_{\Sigma} x dS}{\int_{\Sigma} dS} \\ \bar{y} = \frac{\int_{\Sigma} y dS}{\int_{\Sigma} dS} \\ \bar{z} = \frac{\int_{\Sigma} z dS}{\int_{\Sigma} dS} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_{\Sigma} x dS = \bar{x} \cdot S_{\Sigma} \\ \int_{\Sigma} y dS = \bar{y} \cdot S_{\Sigma} \\ \int_{\Sigma} z dS = \bar{z} \cdot S_{\Sigma} \end{cases}$$

**3. 转动惯量****定义 13.3.1 (转动惯量: $I = mr^2$)**

(1). 光滑曲线, 对于光滑曲线 Γ , 线密度 $\rho(x, y, z)$

对 x 轴: $I_x = \int (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds$

对 y 轴: $I_y = \int (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds$



对 z 轴: $I_z = \int_L (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) ds$

对坐标原点 O : $I_O = \int_L (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds$

(2). 光滑曲面, 对于光滑曲线 Σ , 面密度 $\rho(x, y, z)$

对 x 轴: $I_x = \iint_{\Sigma} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dS$

对 y 轴: $I_y = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dS$

对 z 轴: $I_z = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dS$

对坐标原点 O : $I_O = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dS$

4. 万有引力

定义 13.3.2 (引力公式): $F = \frac{GMm}{r^2}$

(1). 光滑曲线, 对于光滑曲线 Γ , 线密度 $\rho(x, y, z)$

$$F_x = Gm \int_{\Gamma} \frac{\rho(x, y, z)(x - x_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} ds$$

$$F_y = Gm \int_{\Gamma} \frac{\rho(x, y, z)(y - y_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} ds$$

$$F_z = Gm \int_{\Gamma} \frac{\rho(x, y, z)(z - z_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} ds$$

(2). 光滑曲面, 对于光滑曲面 Σ , 面密度 $\rho(x, y, z)$

$$F_x = Gm \iint_{\Sigma} \frac{\rho(x, y, z)(x - x_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} dS$$

$$F_y = Gm \iint_{\Sigma} \frac{\rho(x, y, z)(y - y_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} dS$$

$$F_z = Gm \iint_{\Sigma} \frac{\rho(x, y, z)(z - z_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} dS$$





第 14 章 第二型曲线和曲面积分

◆ 14.1 第二型曲线积分

14.1.1 第二型曲线积分定义和性质

定义 14.1.1 (第二型曲线积分)

在变力场中, $\mathbf{F} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ 沿着曲线 L 从 A 点到 B 点的做功
二维平面

$$W = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

三维空间

$$W = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Gamma} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$



推论 14.1.1

(1). 线性性质

$$\int_{\Gamma} (k_1 \mathbf{F}_1 \pm \mathbf{F}_2) ds = k_1 \int_{\Gamma} \mathbf{F}_1 ds + k_2 \int_{\Gamma} \mathbf{F}_2 ds$$

(2). 积分有向性

$$\int_{AB} \mathbf{F} ds = - \int_{BA} \mathbf{F} ds$$

(3). 积分可加性

$$\int_{AB} \mathbf{F} ds = \int_{AC} \mathbf{F} ds + \int_{CB} \mathbf{F} ds$$



14.1.2 第二型曲线积分计算

14.1.2.1 参数方程转定积分

定理 14.1.1

1. 二维平面

$$L = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$$

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt$$

2. 三维空间

$$\Gamma = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t), z(t))x'(t) dt \\ &\quad + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) dt \\ &\quad + R(x(t), y(t), z(t))z'(t) dt \end{aligned}$$



14.1.2.2 格林公式

定理 14.1.2 (格林公式)

设平面有界区域 D 由光滑曲线 L 围成, L 取正向 (左手在内侧), $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 上有一阶连续偏导数

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$



- L 是非封闭区域, 且在区域 D 内满足 $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, 补线使其成为封闭区域

- L 是封闭区域, 且在区域 D 内有奇点, 且除奇点之外满足 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$$\oint_L P dx + Q dy = \oint_{L_1} P dx + Q dy$$

- 平面曲线积分与路径无关 $\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Leftrightarrow u = P dx + Q dy$



14.1.2.3 斯托克斯公式

定理 14.1.3 (斯托克斯公式)

设 Ω 是某空间区域, Σ 是 Ω 内分片光滑有向曲面, Γ 是 Σ 的边界, 方向和 Σ 法向量成右手系, 函数 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在 Ω 内有连续的一阶偏导数

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dx dz & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$



14.2 第二型曲面积分

14.2.1 第二型曲面积分定义和性质

定义 14.2.1 (第二型曲线积分)

在向量场中, 存在向量函数 $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$, Σ 是向量场中某一有向光滑曲面, \mathbf{n} 是 Σ 的单位法向量, \mathbf{F} 在 Σ 上的通量

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dy dz$$



推论 14.2.1

(1). 线性性质

$$\iint_{\Sigma} (k_1 \mathbf{F}_1 \pm \mathbf{F}_2) dS = k_1 \iint_{\Sigma} \mathbf{F}_1 dS + k_2 \iint_{\Sigma} \mathbf{F}_2 dS$$

(2). 积分有向性

$$\iint_{\Sigma^+} \mathbf{F} dS = - \iint_{\Sigma^-} \mathbf{F} dS$$

(3). 积分可加性



$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{F} d\mathbf{S} + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{F} d\mathbf{S}$$



14.2.2 第二型曲面积分计算

14.2.2.1 投影转二重积分

-

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dy dz$$

- 每一项的符号由 \mathbf{n} 的方向决定

$$\begin{cases} \cos\alpha > 0 \rightarrow dy dz \\ \cos\beta > 0 \rightarrow dx dz \\ \cos\gamma > 0 \rightarrow dx dy \end{cases}$$

14.2.2.2 高斯公式

定理 14.2.1 (高斯公式)

设空间有界闭区域 Ω 由分片光滑封闭曲面 Σ 围成, Σ 取外侧, 函数 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在 Ω 内有连续的一阶偏导数

$$\iint_{\Omega} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) d\nu$$





第三部分

线代



第3部分目录

第 15 章 行列式	172
15.1 行列式的定义和性质	172
15.2 行列式展开定理	174
15.3 几类特殊的行列式	175
15.4 行列式计算	176
15.5 Cramer Rule	180
第 16 章 矩阵	182
16.1 矩阵的定义和运算	182
16.2 矩阵的逆和伴随矩阵	185
16.3 初等变换和初等矩阵	186
16.4 等价矩阵和矩阵的秩	189
第 17 章 向量组	193
17.1 向量和向量组的线性相关性	193
17.2 极大线性无关组和向量组的秩	201
17.3 等价向量组	202
17.4 向量空间	202
第 18 章 线性方程组	204
18.1 具体型方程组	204
18.2 两个方程组的公共解	207
18.3 同解方程组	208
第 19 章 特征值和特征向量	209
19.1 特征值和特征向量定义	209
19.2 相似	213
第 20 章 二次型	218
20.1 二次型定义	218
20.2 合同	220
20.3 二次型的标准型和规范型	220
20.4 正定二次型	221





第 15 章 行列式

15.1 行列式的定义和性质

定义 15.1.1 (行列式)

行列式是一个在方阵上按照一定法则计算得到的标量, 记作 $\det(A)$ 或者 $|A|$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1. 几何定义

n 阶行列式 $\det(A_n)$ 的几何意义是 n 维空间中由 n 阶行列式中的 n 个向量围成的 n 维空间体的“体积”

$$\det(A_2) = |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = S_D$$



$$\det(A_3) = |A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = V_\Omega$$

2. 逆序数法定义

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 是 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数



推论 15.1.1 (行列式的性质)

- 性质 1

行列式中 **行列等价**, 行列互换, 行列式的值不变, $|\Lambda| = |\Lambda^T|$

- 性质 2

行列式中某行或者某列元素全为 0, 行列式的值 $\det(\Lambda) = 0$

- 性质 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 性质 4

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 性质 5

行列式两行或者两列互换, 行列式的值相反



- 性质 6

行列式中两行或者两列成比例, 行列式的值为 0

- 性质 7

行列式中某一行加上另一行的 k 倍, 行列式的值不变



15.2 行列式展开定理

15.2.1 余子式

定义 15.2.1 (余子式)

行列式 $\det(A)$ 去掉任意一项 a_{ij} 所在行和列去掉后的 $n - 1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式

M_{ij}



15.2.2 代数余子式

定义 15.2.2 (代数余子式)

行列式中任意一项 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$



15.2.3 行列式展开定理

定理 15.2.1 (行列式展开定理)

行列式 $\det(A)$ 按照第 i 行或者第 j 列展开

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{cases} \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} \\ \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj} \end{cases}$$



◆ 15.3 几类特殊的行列式

15.3.1 上下三角行列式

推论 15.3.1 (上下三角行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$



15.3.2 副三角行列式

推论 15.3.2 (副三角行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n a_{i,n-i+1}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n a_{i,n-i+1}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n a_{i,n-i+1}$$



15.3.3 拉普拉斯展开式

推论 15.3.3 (拉普拉斯展开式)

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$$

其中 A 是 m 阶矩阵, B 是 n 阶矩阵



15.3.4 范德蒙行列式

推论 15.3.4 (范德蒙行列式)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$



15.4 行列式计算

命题 15.4.1 (爪型行列式)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_n \\ y_2 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ y_3 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \prod_{i=2}^n x_i \left(x_1 - \sum_{j=2}^n \frac{z_j y_j}{x_j} \right)$$



命题 15.4.2 (X 型行列式)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & & & & b_1 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & a_k & b_k & \\ & & b_{k+1} & a_{k+1} & \\ & & \vdots & & \ddots \\ b_n & & & & a_n \end{vmatrix}$$



命题 15.4.3 (两三角形行列式)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x_1 & b & b & \cdots & b \\ c & x_2 & b & \cdots & b \\ c & c & x_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= \left| \begin{array}{cccc|c} x_1 & b & b & \cdots & b+0 \\ c & x_2 & b & \cdots & b+0 \\ c & c & x_3 & \cdots & b+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & c+x_n-c \end{array} \right| \\
 &= \left| \begin{array}{cccc|c} x_1 & b & b & \cdots & b \\ c & x_2 & b & \cdots & b \\ c & c & x_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & c \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cccc|c} x_1 & b & b & \cdots & 0 \\ c & x_2 & b & \cdots & 0 \\ c & c & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & x_n-c \end{array} \right| \\
 &= \left| \begin{array}{cccc|c} x_1 - b & 0 & 0 & \cdots & b \\ c - b & x_2 - b & 0 & \cdots & b \\ c - b & c - b & x_3 - b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c \end{array} \right| + (x_n - c)A_{n-1} \\
 &= c \prod_{i=1}^{n-1} (x_i - b) + (x_n - c)A_{n-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A_n = c \prod_{i=1}^{n-1} (x_i - b) + (x_n - c)A_{n-1} \\ A_n^T = b \prod_{i=1}^{n-1} (x_i - c) + (x_n - b)A_{n-1}^T \\ A_n = A_n^T \end{cases} \Rightarrow \det(A) = \frac{b \prod_{i=1}^n (x_i - c) - c \prod_{j=1}^n (x_j - b)}{b - c}$$

命题 15.4.4

$$\det(A) = \left| \begin{array}{ccccc|c} a & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{array} \right| = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}$$

当 $b = c$ 时



$$\begin{aligned}
 \det(A) &= \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a + (n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a + (n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a + (n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a + (n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\
 &= [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\
 &= [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} \\
 &= [a + (n-1)b](a-b)^{n-1} \\
 \det(A) &= \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

命题 15.4.5 (三对角型行列式)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a \end{vmatrix}$$

递推式: $A_n = aA_{n-1} - bcA_{n-2}$

特征方程: $x^2 - ax + bc = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4bc}}{2} \\ x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4bc}}{2} \end{cases}$

$$\det(A) = A_n = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2}$$



15.5 Cramer Rule

定理 15.5.1 (Cramer Rule)

对于 n 个方程 n 个未知数的非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

若行列式

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

方程组有唯一解 $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$, 其中 A_i 是将 $\det(A)$ 的第 i 列换成 b_1, b_2, \dots, b_n



对于 n 个方程 n 个未知数的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

$\det(A) \neq 0$, 方程组有唯一解 $x_i = 0$, $\det(A) = 0$, 方程组有无穷多非零解



第 16 章 矩阵

◆ 16.1 矩阵的定义和运算

16.1.1 矩阵定义和线性运算

定义 16.1.1 (矩阵定义)

由 $m \times n$ 个数 a_{ij} 排成的 m 行 n 列的数表称为 m 行 n 列的矩阵, 记作:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$m \times n$ 个数称为矩阵 A 的元素, 简称为元, 数 a_{ij} 位于矩阵 A 的第 i 行第 j 列, 称为矩阵 A 的 (i, j) 元, $m \times n$ 矩阵乘法记作 A_{mn} 或 $(a_{ij})_{m \times n}$

- 元素是实数的矩阵称为**实矩阵**, 元素是复数的矩阵称为**复矩阵**
- 行数和列数相等的矩阵称为**方阵**

定义 16.1.2 (矩阵的线性运算)

1. 加法

$$C = A + B = (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} = (c_{ij})_{m \times n}$$

其中 $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

2. 标量乘法

$$kA = k(a_{ij})_{m \times n} = (ka_{ij})_{m \times n}$$

定义 16.1.3 (重要矩阵)

- **零矩阵**: 所有元素均为 0 的矩阵, 记作 O
- **单位矩阵**: 主对角线元素均为 1, 其余元素全为 0 的 n 阶方阵, 记作 E 或 I
- **数量矩阵**: 数 k 和单位矩阵乘积得到的矩阵被称为数量矩阵
- **对角矩阵**: 非主对角线元素均为 0 的矩阵称为对角矩阵
- **上(下)三角矩阵**: 当 $i > (<)j, a_{ij} = 0$ 的矩阵称为上(下)三角矩阵
- **对称矩阵**: 满足条件 $A^T = A$ 的矩阵称为对称矩阵
- **反对称矩阵**: 满足条件 $A^T = -A$ 的矩阵称为反对称矩阵
- **幂等矩阵**: 满足条件 $A^2 = A$ 的矩阵称为幂等矩阵
- **正交矩阵**: A 是 n 阶方阵, 满足 $A^T A = E$ 的矩阵称为正交矩阵
- **分块矩阵**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_n \end{bmatrix}$$

其中 $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), B_j = (b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{jm})^T$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX + BY & AY + BW \\ CX + DY & CY + DW \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A^n & O \\ O & B^n \end{bmatrix}$$



16.1.2 矩阵乘法和幂

定义 16.1.4 (矩阵的乘法和幂)

1. 矩阵乘法

$A = (a_{ij})_{m \times s}$, $B = (b_{ij})_{s \times n}$, 矩阵 A, B 可以相乘 (左乘矩阵的列数和右乘矩阵的行数相等), 记 $C = A \times B = (c_{ij})_{m \times n}$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj}$$

2. 矩阵转置

将矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 的行列互换得到矩阵 A 的转置矩阵, 记作 A^T

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- $(A^T)^T = A$
- $(kA)^T = k(A)^T$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- 当 $m = n$ 时, $|A^T| = |A|$

3. 矩阵的幂

A 是 n 阶方阵, $A^m = \overbrace{AA \cdots A}^{m \text{ 个}}$ 称为方阵 A 的 m 次幂

- $(A \pm B)^2 = A^2 + B^2 \pm AB \pm BA$
- $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$
- $(AB)^m = \overbrace{(AB)(AB) \cdots (AB)}^{m \text{ 个}}$
- 当 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ 时, $f(A) = a_0E + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n$



16.2 矩阵的逆和伴随矩阵

16.2.1 矩阵的逆

定义 16.2.1 (逆矩阵)

A, B 是 n 阶方阵, E 是 n 阶单位矩阵, 若 $AB = BA = E$, 则称 A 是可逆矩阵, 并称 B 是 A 的逆矩阵, 且逆矩阵唯一, 将 A 的逆矩阵记作 A^{-1}

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- AB 可逆, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $k \neq 0, (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
- A^T 可逆, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

定理 16.2.1 (逆矩阵存在充要条件)

A 是 n 阶方阵, A 可逆的充要条件:

$$|A| \neq 0$$



16.2.2 伴随矩阵

定义 16.2.2 (伴随矩阵)

A 是 n 阶方阵, A 的伴随矩阵 A^* 是由 A 的代数余子式构成的矩阵, 记作 $A^* = (A_{ij})_{n \times n}$, 其中 A_{ij} 是 a_{ji} 的代数余子式

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$AA^* = A^*A = |A|E \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

- $\forall A_n, |A^*| = |A|^{n-1}$
- $|A| \neq 0, A^* = |A|A^{-1}, A = |A|(A^*)^{-1}$
- $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$
- $(kA)^* = k^{n-1}A^*$



16.3 初等变换和初等矩阵

定义 16.3.1 (初等变换)

- 用一个非零常数乘以矩阵的某一行(列)
- 互换矩阵中的某两行(列)的位置
- 将矩阵的某一行(列)的 k 倍加到另一行(列)



定义 16.3.2 (初等矩阵)

由单位矩阵经过一次初等变换后得到的矩阵被称为初等矩阵

- $E_i(k)$ 表示 E 的第 i 行(列)乘 k 倍

$$E_i(k) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & m & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- E_{ij} 表示 E 的第 i 行(列)与第 j 行(列)互换位置

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$



- $E_{ij}(k)$ 表示 E 的第 i 行(列)的 k 倍加到第 j 行(列)

$$E_{ij}(k) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & k & & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$



推论 16.3.1 (初等矩阵推论)

$$\begin{cases} E_i(k)^T = E_i(k) \\ E_{ij}^T = E_{ij} \\ E_{ij}(k)^T = E_{ji}(k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_i(k)^{-1} = \frac{1}{k} E_i(k) \\ E_{ij}^{-1} = E_{ij} \\ E_{ij}(k)^{-1} = E_{ij}(-k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} |E_i(k)| = k \\ |E_{ij}| = -1 \\ |E_{ij}(k)| = 1 \end{cases}$$

- Gauss-Jordan Elimination

$$\begin{bmatrix} A & E \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} E & A^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{bmatrix} E \\ A^{-1} \end{bmatrix}$$



推论 16.3.2 (矩阵变换)

若 A 是可逆矩阵, 存在有限个初等矩阵 P_1, P_2, \dots, P_s , 满足 $A = P_1 P_2 \cdots P_s$, 且 $A^{-1} = P_s^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1}$



定义 16.3.3 (行阶梯形矩阵)

行阶梯形矩阵

- 零行全部位于非零行下方
- 非零行的首个非零元素(主元)在每一行中的列标号递增

行最简阶梯形矩阵

- 行阶梯形矩阵非零行的首个非零元素(主元)为 1
- 主元所在列的其他元素全为 0

推论 16.3.3 (分块矩阵逆矩阵)

$$\begin{bmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & A_1 \\ & A_2 \\ \dots & \\ A_s & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & \dots & \\ & & A_2^{-1} & \\ & & & A_1^{-1} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} B_{s \times s} & O_{s \times r} \\ D_{r \times s} & C_{r \times r} \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} B_{s \times s} & D_{s \times r} \\ O_{r \times s} & C_{r \times r} \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} O_{s \times r} & B_{s \times s} \\ C_{r \times r} & D_{r \times s} \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} D_{s \times r} & B_{s \times s} \\ C_{r \times r} & O_{r \times s} \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \end{bmatrix}$$



16.4 等价矩阵和矩阵的秩

定义 16.4.1 (等价矩阵)

设 A, B 均为 $m \times n$ 矩阵, $\exists P_{m \times m}, Q_{n \times n}$ (P, Q 可逆), s.t. $PAQ = B$, 称 A, B 是等价矩阵, 记作 $A \cong B$

- 同型矩阵 A, B 等价的充要条件: $r(A) = r(B)$
- P, Q 均为可逆矩阵

$$\forall A_{m \times n}, \exists P, Q, \text{s.t. } PAQ = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

其中 $P_{m \times m}, Q_{n \times n}$ 均为可逆矩阵, E_r 是 r 阶单位矩阵, 矩阵 $\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ 是秩为 r 矩阵的等价标准型

定义 16.4.2 (矩阵的秩)

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, A 中最高阶非零子式的阶数称为矩阵 A 的秩, 记作 $r(A)$

- $r(A) = k$ 充要条件: A 存在 k 阶非零子式, 且所有 $k+1$ 阶子式全为 0
- $r(A) = k$ 充要条件: A 的行(列)向量中存在 k 个线性无关的向量, 且任意 $k+1$ 个行(列)向量线性相关
- $r(A_{n \times n}) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆

推论 16.4.1 (秩的性质)

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是满足有关矩阵运算要求的矩阵, 我们有

- $0 \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$
- $r(kA) = r(A), k \neq 0$
- $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$
- $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$
-

$$r(A^*) = \begin{cases} n & r(A) = n \\ 1 & r(A) = n - 1 \\ 0 & r(A) < n - 1 \end{cases}$$

其中 A 为 n 阶方阵

命题 16.4.1

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, 则 $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$



证明

(1). $r(AB) \leq r(B)$

令

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{bmatrix}$$

其中 β_i, γ_j 代表行向量, a_{ij} 代表元素

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \cdots + a_{1n}\beta_n \\ a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{2n}\beta_n \\ \vdots \\ a_{m1}\beta_1 + a_{m2}\beta_2 + \cdots + a_{mn}\beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{bmatrix}$$

 AB 的行向量都可以由 B 的行向量线性表出 $\Rightarrow r(AB) \leq r(B)$ (2). $r(AB) \leq r(A)$

令

$$A = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n], B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix}, AB = [\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s]$$

其中 α_i, γ_j 代表列向量, b_{ij} 代表元素

$$AB = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n] \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}\alpha_1 + b_{21}\alpha_2 + \cdots + b_{n1}\alpha_n \\ b_{12}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 + \cdots + b_{n2}\alpha_n \\ \vdots \\ b_{1s}\alpha_1 + b_{2s}\alpha_2 + \cdots + b_{ns}\alpha_n \end{bmatrix}^T = [\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s]$$

 AB 的列向量都可以由 A 的列向量线性表出 $\Rightarrow r(AB) \leq r(A)$

$$\begin{cases} r(AB) \leq r(B) \\ r(AB) \leq r(A) \end{cases} \Rightarrow r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$$

命题 16.4.2

设 A, B 是 $m \times n$ 矩阵, 则 $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$

**证明**

令

$$\begin{cases} A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \\ B = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n] \\ [A, B] = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n] \end{cases}$$

$$A + B = [\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n]$$

$A + B$ 的列向量都可以由 $[A, B]$ 的列向量线性表出 $\Rightarrow r(A + B) \leq r([A, B]) \Rightarrow r(A + B) \leq r(A) + r(B)$

命题 16.4.3

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, 则 $r(A) + r(B) - n \leq r(AB)$

**证明**

$$\begin{bmatrix} E_{m \times m} & -A_{m \times n} \\ O_{n \times m} & E_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{m \times n} & O_{m \times s} \\ E_{n \times n} & B_{n \times s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{n \times n} & -B_{n \times s} \\ O_{n \times s} & E_{s \times s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_{m \times n} & -AB \\ E_{n \times n} & O_{n \times s} \end{bmatrix}$$

其中 $\begin{bmatrix} E_{m \times m} & -A_{m \times n} \\ O_{n \times m} & E_{n \times n} \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} E_{n \times n} & -B_{n \times s} \\ O_{n \times s} & E_{s \times s} \end{bmatrix}$ 均为可逆矩阵

$$r(A) + r(B) \leq n + r(AB) \Rightarrow r(A) + r(B) - n \leq r(AB)$$

特别的, 当 $AB = O$ 时, $r(AB) = 0 \Rightarrow r(A) + r(B) \leq n$

命题 16.4.4

设 A 是 n 阶方阵, 则

$$r(A^*) = \begin{cases} n & r(A) = n \\ 1 & r(A) = n - 1 \\ 0 & r(A) < n - 1 \end{cases}$$



证明

(1). $r(A) = n$

$$\begin{cases} r(A) = n \\ AA^* = |A|E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |A| \neq 0 \\ |A^*| = |A|^{n-1} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow r(A^*) = n$$

(2). $r(A) = n - 1$

$$\begin{cases} r(A) = n - 1 \\ AA^* = |A|E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \\ AA^* = O \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r(A) + r(A^*) \leq n \\ r(A^*) \leq 1 \end{cases}$$

 $r(A) = n - 1 \rightarrow A^*$ 至少存在一个元素不为 0 $\rightarrow r(A^*) \geq 1$

$$\begin{cases} r(A^*) \geq 1 \\ r(A^*) \leq 1 \end{cases} \Rightarrow r(A^*) = 1$$

(3). $r(A) < n - 1$

$$\begin{cases} r(A) < n - 1 \\ AA^* = |A|E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \\ A^* = O \end{cases} \Rightarrow r(A^*) = 0$$





第 17 章 向量组

◆ 17.1 向量和向量组的线性相关性

17.1.1 向量的定义和运算

定义 17.1.1 (向量的定义)

n 个数构成的有序数组 $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ 称为一个 n 维向量, 记作 $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, α 称为 n 维行向量, α^T 称为 n 维列向量, 其中 a_i 称为向量的第 i 个分量



定义 17.1.2 (向量的线性运算)

1. 加法

$$\alpha + \beta \stackrel{\text{def}}{=} [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n]$$

2. 标量乘法

$$k\alpha \stackrel{\text{def}}{=} [ka_1, ka_2, \dots, ka_n], k \in \mathbb{R}$$



定义 17.1.3 (向量的内积和正交)

内积

设 $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$, $\beta = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$, 则称:

$$\alpha^T \beta = \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

为向量 α, β 的内积, 记作 (α, β)



模

$\|\alpha\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$ 称为向量 α 的模, 特别的当 α 时, 称 α 为单位向量

正交

当 $\alpha^T \beta = 0$ 时, 称向量 α, β 是正交向量

标准正交向量组

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 满足:

$$\alpha_i^T \alpha_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是标准或单位正交向量组

正交矩阵

设 A 是 n 阶方阵, 若 $A^T A = E$, 则称 A 为正交矩阵

- $A^T A = E \Rightarrow A^T = A^{-1}$
- $|A| = \pm 1$
- A 的行(列)向量是标准正交向量组

施密特正交化

线性无关的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的标准正交化公式:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = \alpha_1 \\ \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n = \alpha_n - \frac{(\alpha_n, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_n, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 - \dots - \frac{(\alpha_n, \beta_{n-1})}{(\beta_{n-1}, \beta_{n-1})} \beta_{n-1} \end{array} \right.$$

将 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 单位化:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} \\ \eta_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} \\ \dots \\ \eta_n = \frac{\beta_n}{\|\beta_n\|} \end{array} \right.$$

$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 是一个标准正交向量组



17.1.2 向量组的线性相关性

定义 17.1.4 (线性相关和线性表出)

1. 线性组合

设有 m 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 和 m 个数 k_1, k_2, \dots, k_m , 向量

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$$

称作向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的线性组合

2. 线性表出

向量 β 可以表示为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的线性组合

$$\exists k_i (i = 1, 2, \dots, m) \in \mathbb{R}, \text{ s.t. } \beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$$

向量 β 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表出

3. 线性相关

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$

$$\exists k_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, m), \text{ s.t. } k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$$

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关

4. 线性无关

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$

$$\exists k_i \in \mathbb{R}, \text{ s.t. } k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$$

当且仅当 $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$ 时上式成立, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关



定理 17.1.1 (判别线性相关性的七大定理)

定理一

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关的充要条件: 至少有一个向量可以由其余的 $n - 1$ 个向量线性表出

证明

(i). 必要性

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关

$$\exists k_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, n), \text{ s.t. } k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0$$

不妨假设 $k_m \neq 0 (1 \leq m \leq n)$

$$\alpha_m = -\frac{k_1}{k_m}\alpha_1 - \dots - \frac{k_n}{k_m}\alpha_n$$

 α_m 可以由其余 $n - 1$ 个向量线性表出

(ii). 充分性

不妨假设 α_m 可以由其余 $n - 1$ 个向量线性表出:

$$\alpha_m = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n$$

$$\exists k_i \neq 0 (k_m = 1), \text{ s.t. } k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + 1\alpha_m + \dots + k_n\alpha_n = 0$$

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关**定理二**若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关, β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出, 且表示唯一

证明

(i). 存在性

 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关

$$\exists k_i \in \mathbb{R} (i = 1, 2, \dots, n, \beta), \text{ s.t. } k_\beta \beta + k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_n \alpha_n = 0$$

假设 $k_\beta = 0$

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_n \alpha_n = 0 \Rightarrow \exists k_i \neq 0 (i \in \{1, 2, \dots, n\})$$

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关, 矛盾 $\Rightarrow k_\beta \neq 0$

$$\beta = -\frac{k_1}{k_\beta} \alpha_1 - \frac{k_2}{k_\beta} \alpha_2 - \dots - \frac{k_n}{k_\beta} \alpha_n$$

向量 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出

(ii). 唯一性

假设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 对 β 存在两种不同的线性表出

$$\begin{cases} \beta = l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + \dots + l_n \alpha_n \\ \beta = h_1 \alpha_1 + h_2 \alpha_2 + \dots + h_n \alpha_n \end{cases}$$

两式相减:

$$(l_1 - h_1) \alpha_1 + (l_2 - h_2) \alpha_2 + \dots + (l_n - h_n) \alpha_n = 0$$

$\exists l_i - h_i \neq 0 (i \in \{1, 2, \dots, n\})$, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关, 矛盾 \Rightarrow 线性表出唯一

定理三向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 且 $t > s$, 则 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性相关

证明

向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出

$$\begin{cases} \beta_1 = l_{11}\alpha_1 + l_{12}\alpha_2 + \dots + l_{1s}\alpha_s \\ \beta_2 = l_{21}\alpha_1 + l_{22}\alpha_2 + \dots + l_{2s}\alpha_s \\ \dots \\ \beta_t = l_{t1}\alpha_1 + l_{t2}\alpha_2 + \dots + l_{ts}\alpha_s \end{cases}$$

假设 $\exists k_i \in \mathbb{R}, s.t. \sum_{i=1}^s k_i \beta_i = 0$

$$\begin{cases} k_1\beta_1 = k_1(l_{11}\alpha_1 + l_{12}\alpha_2 + \dots + l_{1s}\alpha_s) \\ k_2\beta_2 = k_2(l_{21}\alpha_1 + l_{22}\alpha_2 + \dots + l_{2s}\alpha_s) \\ \dots \\ k_t\beta_t = k_t(l_{t1}\alpha_1 + l_{t2}\alpha_2 + \dots + l_{ts}\alpha_s) \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^t k_i \beta_i = (\sum_{i=1}^t k_i l_{i1}) \alpha_1 + (\sum_{i=1}^t k_i l_{i2}) \alpha_2 + \dots + (\sum_{i=1}^t k_i l_{is}) \alpha_s$$

$$\text{不妨令 } \sum_{i=1}^t k_i l_{i1} = \sum_{i=1}^t k_i l_{i2} = \dots = \sum_{i=1}^t k_i l_{is} = 0$$

$$\begin{cases} k_1 l_{11} + k_2 l_{21} + \dots + k_t l_{t1} = 0 \\ k_1 l_{12} + k_2 l_{22} + \dots + k_t l_{t2} = 0 \\ \dots \\ k_1 l_{1s} + k_2 l_{2s} + \dots + k_t l_{ts} = 0 \end{cases} \Rightarrow LX = 0$$

其中

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \dots & l_{t1} \\ l_{12} & l_{22} & \dots & l_{t2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{1s} & l_{2s} & \dots & l_{ts} \end{bmatrix}, X = [k_1, k_2, \dots, k_t]^T$$

这是一个 t 元 s 个方程的齐次线性方程组, 且 $t > s$, 方程组一定有非零解

$$\exists k_i \neq 0 (i \in \{1, 2, \dots, n\}), s.t. k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_t\beta_t = 0$$

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性相关



定理四

设 m 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_m$, 其中

$$\begin{cases} \alpha_1 = [a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}]^T \\ \alpha_2 = [a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}]^T \\ \dots \\ \alpha_m = [a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{nm}]^T \end{cases}$$

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关的充要条件时齐次线性方程组 $AX = 0$ 有非零解, 也等价于零空间不为零

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, X = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$$



证明

(i). 必要性

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关

$$\exists x_i \neq 0 (i \in \{1, 2, \dots, m\}), \text{ s.t. } x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m = 0$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$$

有非零解

(ii). 充分性

方程组 $AX = 0$ 有非零解

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m = 0$$

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关

定理五

向量 β 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 等价于非齐次方程组方程 $AX = \beta$ 有解;
 向量 β 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 等价于非齐次方程组方程 $AX = \beta$ 无解



证明

向量 β 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出

$$\exists x_i \neq 0 (i \in \{1, 2, \dots, s\}), \text{ s.t. } x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s = \beta$$

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = \beta$$

方程组 $AX = \beta$ 有非零解

定理 六

如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 一部分向量线性相关, 那么整个向量组也线性相关

证明

不妨设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j (j < n)$ 线性相关

$$\exists k_i \neq 0 (i \in \{1, 2, \dots, j\}), \text{ s.t. } k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_j\alpha_j = 0$$

取 $k_1, k_2, \dots, k_j, k_{j+1} = k_{j+2} = \dots = k_n = 0$

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_j\alpha_j + 0\alpha_{j+1} + \dots + 0\alpha_n = 0$$

$k_1, k_2, \dots, k_j, k_{j+1} = k_{j+2} = \dots = k_n = 0$ 不全为 0, 整个向量组也线性相关

定理 七

如果一组 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 那么把这些向量各任意添加 m 个分量得到的新向量组 $(n+m)$ 维 $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*$ 线性无关; 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关, 那各去掉相同的若干个分量所得到的新向量组也线性相关



17.2 极大线性无关组和向量组的秩

定义 17.2.1 (极大线性无关组)

在向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, 如果存在部分向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 满足:

- $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性无关
- 向量组中任意向量 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, s)$ 都可以被向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性表出

则称向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是原向量组的一个极大线性无关组



一个向量组的极大线性无关组不唯一, 对于线性无关的向量组, 它的极大线性无关组是自身

定义 17.2.2 (向量组的秩)

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的极大线性无关组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 中所含向量的个数 r 称为向量组的秩, 记作:

$$\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r$$

- $r(A) = r(\text{col}(A)) = r(\text{row}(A))$
- 初等行变换和初等列变换不改变矩阵的秩
- $A \xrightarrow{\text{col}} B$, A 的行向量与 B 的行向量是等价向量组
- 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 及 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$, 若 $\beta_i (i = 1, 2, \dots, t)$ 均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 则:

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \leq r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$$

17.3 等价向量组

定义 17.3.1 (等价向量组)

设两个向量组: (I) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, (II) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$, 若 (I) 中向量 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, s)$ 均可由 (II) 中向量线性表出, 则称向量组 (I) 可由向量组 (II) 线性表出; 若向量组 (I) 和向量组 (II) 互相线性表出, 称向量组 (I) 与向量组 (II) 是等价向量组, 记作 $(I) \cong (II)$

- $(I) \cong (I)$
- $(I) \cong (II), (II) \cong (I)$
- $(I) \cong (II), (II) \cong (III)$, 则 $(I) \cong (III)$
- 向量组和它的极大线性无关组是等价向量组

17.4 向量空间

定义 17.4.1 (向量空间)

设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 是 n 维向量空间 \mathbb{R}^n 中线性无关的有序向量, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$ 均可由向量组 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 线性表出, 且表出式:

$$\alpha = a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_n \xi_n$$

称 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 是 n 维向量空间 \mathbb{R}^n 的一组基, 基向量的个数 n 称为向量空间的维度,



$[a_1, a_2, \dots, a_n]^T$ 是向量 α 在基向量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 的坐标

定义 17.4.2 (基变换)

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 和 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 是向量空间 \mathbb{R}^n 中的两个基, 其有关系:

$$[\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n] = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] C$$

上式是基 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 的基变换公式, 矩阵 C 是基 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 的过渡矩阵, C 的第 i 列即是 η_i 在基 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 下的坐标, 过渡矩阵 C 为可逆矩阵

定义 17.4.3 (坐标变换)

设向量 α 在基 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 和基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ 下的坐标为别是 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T, \mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$

$$\alpha = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] \mathbf{x} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n] \mathbf{y}$$

$$[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n] C$$

$$\mathbf{x} = C \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} = C^{-1} \mathbf{x}$$





第 18 章 线性方程组

◆ 18.1 具体型方程组

18.1.1 齐次方程组

定义 18.1.1 (齐次方程组)

方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

称为 m 个方程, n 个未知数的齐次方程组

向量形式:

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$$

其中:

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} (j = 1, 2, \dots, n)$$

矩阵形式:



$$A_{m \times n} X = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

定理 18.1.1

1. 当 $r(A) = n$ 时, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 线性无关, 方程组只有零解
2. 当 $r(A) = r < n$ 时, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 线性相关, 方程组有非零解, 且有 $n - r$ 个线性无关解

推论 18.1.1 (解的性质)

$$\begin{cases} A\xi_1 = 0 \\ A\xi_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}, A(k_1\xi_1 + k_2\xi_2) = 0$$

定义 18.1.2 (基础解系和通解)

1. 基础解系

设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 满足:

- $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是方程组的解
- $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关
- 方程组 $AX = 0$ 任意一个解均可以由 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性表出

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是方程组 $AX = 0$ 的基础解系

2. 通解

设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 为方程组 $AX = 0$ 的基础解系, 则 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r}$ 是方程组 $AX = 0$ 的通解, 其中 $k_1, k_2, \dots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$

18.1.2 非齐次方程组



定义 18.1.3 (非齐次方程组)

方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

称为 m 个方程, n 个未知数的非齐次方程组

向量形式:

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$$

其中:

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix} (j = 1, 2, \dots, n)$$

矩阵形式:

$$A_{m \times n}X = \beta$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\text{矩阵 } \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_{mj} \end{array} \right] \text{ 记作为矩阵 } A \text{ 的增广矩阵, 简记为 } [A \quad | \quad \beta]$$

定理 18.1.2

1. $r(A) \neq r([A, \beta])$, 方程组无解 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出2. $r(A) = r([A, \beta]) = n$, 方程组有唯一解 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关3. $r(A) = r([A, \beta]) < n$, 方程组有无穷多组解

推论 18.1.2 (解的性质)

设 η_1, η_2, η_3 是非齐次方程组 $AX = \beta$ 的解, ξ 是对应齐次方程组 $AX = 0$ 的解

- $\eta_1 - \eta_2$ 是 $AX = 0$ 的解
- $k\xi + \eta$ 是方程组 $AX = \beta$ 的解

定义 18.1.4 (特解和通解)

1. 特解

η 是非齐次性方程组 $AX = \beta$ 的一个特解

2. 通解

设 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$ 是方程组 $AX = 0$ 的通解, 其中 $k_1, k_2, \dots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$, 非齐次性方程组的通解:

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta$$

18.2 两个方程组的公共解

定义 18.2.1 (两个方程组的公共解)

(1). 齐次性线性方程组 $A_{m \times n}X = 0$ 和 $B_{m \times n}X = 0$ 的公共解是满足方程组

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} X = 0$$

(2). 非齐次性线性方程组 $A_{m \times n}X = \alpha$ 和 $B_{m \times n}X = \beta$ 的公共解是满足方程组

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

(3). 给出方程组 $A_{m \times n}X = 0$ 的通解 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_s\xi_s$, 代入第二个方程组 $B_{m \times n}X = 0$ 得到 $k_i (i = 1, 2, \dots, s)$ 之间的关系, 代回方程 $A_{m \times n}X = 0$

(4). 给出方程组 $A_{m \times n}X = 0$ 的基础解系 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 和方程组 $B_{m \times n}X = 0$ 的基础解系 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$, 公共解为:

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_s\xi_s = l_1\eta_1 + l_2\eta_2 + \cdots + l_t\eta_t$$



18.3 同解方程组

定义 18.3.1 (同解方程组)

如果两个方程组 $A_{m \times n}X = 0$ 和 $B_{m \times n}X = 0$ 有完全相同的解, 则称它们为同解方程组

- $AX = 0$ 的解满足 $BX = 0$ 且 $BX = 0$ 的解满足 $AX = 0$
- $r(A) = r(B)$ 且 $AX = 0$ 的解满足 $BX = 0$ ($BX = 0$ 的解满足 $AX = 0$)
- $r(A) = r(B) = r\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\right)$





第 19 章 特征值和特征向量 2012.08.18

19.1 特征值和特征向量定义

定义 19.1.1 (特征值和特征向量)

设 A 是 n 阶矩阵, λ 为常数, 存在非零列向量 ξ , 满足:

$$A\xi = \lambda\xi$$

称 λ 为 A 的特征值, ξ 是 A 对应于特征值 λ 的特征向量

推论 19.1.1 (特征值)

$$(\lambda E - A)\xi = O \Rightarrow |\lambda E - A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) = 0$$

上式是关于 λ 的特征多项式, 也是 A 的特征方程

$$\lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \prod_{i=1}^n \lambda_i = 0$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr}(A) \\ \prod_{i=1}^n \lambda_i = |A| \end{cases}$$

推论 19.1.2 (特征向量)

命题 19.1.1

若 ξ_1, ξ_2 是 A 的属于不同特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, ξ_1, ξ_2 线性无关

证明

ξ_1, ξ_2 是矩阵 A 不同特征值 $\lambda_1, \lambda_2 (\lambda_1 \neq \lambda_2)$ 对应的特征向量

不妨设 ξ_1, ξ_2 线性相关, 则存在不全为 0 的常数 c_1, c_2

$$\exists c_1, c_2, \text{ s.t. } c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 = 0$$

$$\begin{cases} A\xi_1 = \lambda_1 \xi_1 \\ A\xi_2 = \lambda_2 \xi_2 \end{cases} \Rightarrow c_1 A \xi_1 + c_2 A \xi_2 = c_1 \lambda_1 \xi_1 + c_2 \lambda_2 \xi_2$$

$$\begin{cases} c_1(\lambda_1 - \lambda_2)\xi_1 = 0 \\ c_2(\lambda_1 - \lambda_2)\xi_2 = 0 \\ \xi_1 \neq 0, \xi_2 \neq 0, \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

矛盾, 假设不成立, ξ_1, ξ_2 线性无关

命题 19.1.2

若 ξ_1, ξ_2 是 A 的属于不同特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, $k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 (k_1 \neq 0, k_2 \neq 0)$ 不是 A 的特征向量



证明

不妨设 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2$ 是矩阵 A 特征值 λ 对应的特征向量

$$A(k_1\xi_1 + k_2\xi_2) = \lambda(k_1\xi_1 + k_2\xi_2)$$

$$\begin{cases} A\xi_1 = \lambda_1\xi_1 \\ A\xi_2 = \lambda_2\xi_2 \end{cases} \Rightarrow k_1(\lambda_1 - \lambda)\xi_1 + k_2(\lambda_2 - \lambda)\xi_2 = 0$$

ξ_1, ξ_2 线性无关

$$\begin{cases} k_1(\lambda_1 - \lambda) = 0 \\ k_2(\lambda_2 - \lambda) = 0 \\ k_1 \neq 0, k_2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \lambda_1 = \lambda_2$$

矛盾, 假设不成立, $k_1\xi_1 + k_2\xi_2$ 不是 A 的特征向量

命题 19.1.3

若 ξ_1, ξ_2 是 A 的属于同一特征值 λ 的特征向量, $k_1\xi_1 + k_2\xi_2$ (k_1, k_2 不同时为 0) 仍然是 A 属于特征值 λ 的特征向量

证明

$$\begin{cases} A\xi_1 = \lambda\xi_1 \\ A\xi_2 = \lambda\xi_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(k_1\xi_1 + k_2\xi_2) = \lambda(k_1\xi_1 + k_2\xi_2) \\ k_1\xi_1 + k_2\xi_2 \neq \mathbf{0} \end{cases}$$

$k_1\xi_1 + k_2\xi_2$ 是矩阵 A 特征值 λ 对应的特征向量

定理 19.1.1 (特征值和特征向量)

k 重特征值至多有 k 个线性无关的特征向量

不妨设 λ_0 是矩阵 A 的一个特征值, λ 对应的 m 个线性无关的特征向量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$

构造一个 n 维空间的极大线性无关组 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_n)$

令 $P = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_n)$

$$\begin{cases} A\xi_i = \lambda_0\xi_i (i = 1, 2, \dots, m) \\ AP = (A\xi_1, A\xi_2, \dots, A\xi_m, A\xi_{m+1}, \dots, A\xi_n) \end{cases}$$

$$AP = (\lambda_0\xi_1, \lambda_0\xi_2, \dots, \lambda_0\xi_m, A\xi_{m+1}, \dots, A\xi_n)$$



$$A\xi_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} \xi_k \quad (j = m+1, \dots, n)$$

综上：

$$\begin{aligned} AP &= (\lambda_0 \xi_1, \lambda_0 \xi_2, \dots, \lambda_0 \xi_m, \sum_{k=1}^n a_{k(m+1)} \xi_k, \dots, \sum_{k=1}^n a_{kn} \xi_k) \\ &= (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_n) \begin{bmatrix} \lambda_0 & & a_{1(m+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda_0 & & a_{2(m+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & \lambda_0 & a_{m(m+1)} & \cdots & a_{mn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{(m+1)(m+1)} & \cdots & a_{(m+1)n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n(m+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ &= PB \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} P^{-1}AP = B \\ |\lambda E - A| = |P^{-1}(\lambda E - B)P| = |\lambda E - B| \end{cases} \\ |\lambda E - A| &= \begin{bmatrix} \lambda - \lambda_0 & & a_{1(m+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda - \lambda_0 & & a_{2(m+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & \lambda - \lambda_0 & a_{m(m+1)} & \cdots & a_{mn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda - a_{(m+1)(m+1)} & \cdots & a_{(m+1)n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n(m+1)} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix} \\ &= (\lambda - \lambda_0)^m f(\lambda) \end{aligned}$$

λ_0 至少是矩阵 A 的 m 重特征值, m 个线性无关特征向量对应的特征值至少是 m 重特征值 $\Leftrightarrow k$ 重特征值至多有 k 个线性无关的特征向量



表 19.1: 常用特征值和特征向量

矩阵	A	kA	A^k	$f(A)$	A^{-1}	A^*	$P^{-1}AP$
特征值	λ	$k\lambda$	λ^k	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{ A }{\lambda}$	λ
特征向量	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	$P^{-1}\xi$

19.2 相似

定义 19.2.1 (矩阵的相似)

设 A, B 是两个 n 阶方阵, $\exists n$ 阶可逆矩阵 P , s.t. $P^{-1}AP = B$, 称 A 相似于 B , 记作 $A \sim B$



推论 19.2.1 (相似矩阵)

- 反身性: $A \sim A$
- 对称性: $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
- 传递性: $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$



推论 19.2.2 (相似矩阵)

(1). $A \sim B \Rightarrow P^{-1}AP = B$

必要不充分条件

- $r(A) = r(B)$
- $|A| = |B|$
- $\lambda_A = \lambda_B$
- $tr(A) = tr(B)$
- $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$
- A, B 各阶主子式之和分别相等

(2). $A \sim B$

- $A^T \sim B^T$
- $A^* \sim B^*$
- $A^m \sim B^m$
- $f(A) \sim f(B)$

(3). $A \sim B$ 且 A 可逆

- $A^{-1} \sim B^{-1}$
- $f(A^{-1}) \sim f(B^{-1})$



19.2.1 矩阵的相似对角化

定义 19.2.2 (相似对角化)

设 A 是 n 阶方阵, $\exists n$ 阶可逆矩阵 P , s.t. $P^{-1}AP = \Lambda$, 其中 Λ 是对角矩阵, 称 A 可相似对角化, 记作 $A \sim \Lambda$, 称 Λ 为 A 的相似标准型

定理 19.2.1 (相似对角化充要条件)

n 阶矩阵 A 可相似对角化 $\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量

(1). 必要性

不妨设存在可逆矩阵 P , s.t. $P^{-1}AP = \Lambda$, 其中 Λ 是对角矩阵, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

令 $P = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]$

$$A(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$A\xi_i = \lambda_i \xi_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), P 是可逆矩阵, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 线性无关, 它们分别是矩阵 A 对应于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的特征向量

(2). 充分性

设 A 有 n 个线性无关的特征向量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, 对应的特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 令 $P = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]$, P 可逆

$$A\xi_i = \lambda_i \xi_i \Rightarrow AP = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$



$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$



推论 19.2.3 (对角化)

- n 阶矩阵 A 可相似对角化 $\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量
- n 阶矩阵 A 可相似对角化 \Leftrightarrow 对于每个 k_i 重特征值都有 k_i 个线性无关的特征向量
- A 有 n 个特征值 $\Rightarrow n$ 阶矩阵 A 可相似对角化
- n 阶矩阵 A 为实对称矩阵 $\Rightarrow A$ 可相似对角化



19.2.2 实对称矩阵的相似对角化

定义 19.2.3 (实对称矩阵)

$A^T = A$ 且 A 中元素全为实数, 我们把 A 称作 **实对称矩阵**



定理 19.2.2 (实对称矩阵特征值)

n 阶实对称矩阵 A 特征值为实数

不妨设实对称矩阵 A 的特征值 λ 和对应的特征向量 ξ , 记 \bar{A} 为 A 的共轭矩阵, $\bar{\lambda}$ 为 λ 的共轭复数, $\bar{\xi}$ 为 ξ 的共轭向量

$$\begin{cases} A\xi = \lambda\xi \\ \bar{A} = A \\ A = A^T \end{cases} \Rightarrow \bar{x}^T A x = \bar{x}^T \bar{A}^T x = \bar{A}^T x^T x$$

$$\bar{A}^T x = \bar{\lambda} x^T x = \bar{\lambda} \bar{x}^T x$$

$$\begin{cases} \bar{x}^T A x = \lambda \bar{x}^T x \\ \bar{x}^T A x = \bar{\lambda} \bar{x}^T x \end{cases} \Rightarrow (\lambda - \bar{\lambda}) \bar{x}^T x = 0$$

$$\lambda - \bar{\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}, \lambda \text{ 是实数}$$



定理 19.2.3 (实对称矩阵特征向量)

n 阶实对称矩阵 A 的不同特征值对应的特征向量互相正交



不妨设实对称矩阵 A 的特征值 λ_1, λ_2 对应的特征向量 ξ_1, ξ_2

$$\begin{cases} A\xi_1 = \lambda_1\xi_1 \\ A\xi_2 = \lambda_2\xi_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1^T A^T = \lambda_1 \xi_1^T \\ \xi_2^T A^T = \lambda_2 \xi_2^T \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_1^T A \xi_2 = \lambda_1 \xi_1^T \xi_2 \\ \xi_1^T A \xi_2 = \lambda_2 \xi_1^T \xi_2 \end{cases} \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \xi_1^T \xi_2 = 0$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \xi_1^T \xi_2 = 0, \xi_1, \xi_2 \text{ 互相正交}$$



定理 19.2.4 (实对称矩阵的相似对角化)

n 阶实对称矩阵 A_n 可正交相似对角化

1. 当 $n = 1$ 时, A_1 已经是对角矩阵, A_1 可正交相似对角化
2. 假设当 $n = k - 1$ 时, A_{k-1} 可以正交相似对角化
3. 当 $n = k$, 不妨设 A_k 的一个特征值为 $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, 对应的一个单位特征向量为 η_1 , 不妨构造一个正交矩阵 $T = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k)$

$$T^{-1} A_k T = (T^{-1} \lambda_1 \eta_1, T^{-1} A \eta_2, \dots, T^{-1} A \eta_k)$$

$$(T^{-1} A_k T)^T = T^T A_k^T (T^{-1})^T = T^{-1} A_k T$$

$$\begin{cases} T^{-1} \eta_1 = (1, 0, \dots, 0) \\ T^{-1} \eta_2 = (0, 1, \dots, 0) \\ \dots \\ T^{-1} \eta_k = (0, 0, \dots, 1) \end{cases} \Rightarrow T^{-1} A_k T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_{k-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

当 $n = k - 1$ 时, A_{k-1} 可以正交相似对角化 $\Rightarrow T_2^{-1} A_{k-1} T_2 = \Lambda_{k-1}$

存在可逆矩阵 T_f

$$T_f = T \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & T_2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \Rightarrow |T_f| = |T_2| \neq 0$$



$$T_f^{-1} A_k T_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & T_2^{-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} T^{-1} A_k T \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & T_2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

$$T_f^{-1} A_k T_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & T_2^{-1} & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & P_{k-1} & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & T_2 & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & T_2^{-1} P_{k-1} T_2 & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

$$T_2^{-1} P_{k-1} T_2 = \Lambda_{k-1} \Rightarrow A_k \sim \Lambda_k$$

综上, n 阶实对称矩阵 A_n 可正交相似对角化





第 20 章 二次型

20.1 二次型定义

定义 20.1.1 (二次型)

n 元变量 x_1, x_2, \dots, x_n 的二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为 n 元二次型, 简称二次型

令 $a_{ij} = a_{ji}$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n \\ & a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2m}x_2x_n \\ & \dots \\ & a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j$$

令

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

二次型可表示: $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$, A 为二次型 $f(\mathbf{x})$ 的矩阵



定义 20.1.2 (线性变换)

对于 n 元二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

令

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

记

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$x \rightarrow y$ 线性变化:

$$\mathbf{x} = C\mathbf{y}$$

这种变换称为 x_1, x_2, \dots, x_n 到 y_1, y_2, \dots, y_n 的 **线性变换**, 如果线性变换矩阵 $C(|C| \neq 0)$ 可逆, 则称为 **可逆线性变换**

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \\ \mathbf{x} = C\mathbf{y} \end{cases} \Rightarrow f(\mathbf{x}) = (C\mathbf{y})^T A (C\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (C^T A C) \mathbf{y}$$

记 $B = C^T A C$

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T B \mathbf{y} = g(\mathbf{y})$$

二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ 通过线性变换 $\mathbf{x} = C\mathbf{y}$ 得到了一个新二次型 $g(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T B \mathbf{y}$



20.2 合同

定义 20.2.1 (矩阵合同)

设 A, B 为 n 阶矩阵, C 是可逆矩阵

$$\exists C \in \mathbb{R}^{n \times n}, s.t. B = C^T AC$$

称 A, B 合同, 记作 $A \simeq B$, 其对应的二次型 $f(\mathbf{x})$ 与 $g(\mathbf{y})$ 为合同二次型

推论 20.2.1 (合同)

- 反身性: $A \simeq A$
- 对称性: $A \simeq B \Rightarrow B \simeq A$
- 传递性: $A \simeq B, B \simeq C \Rightarrow A \simeq C$

20.3 二次型的标准型和规范型

定义 20.3.1 (标准型)

二次型中只有平方项, 而没有交叉项 (所有交叉项系数全为 0), 形如:

$$d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$$

的二次型为标准二次型

定义 20.3.2 (规范型)

在标准二次型中, 如果二次型的系数 $d_i \in \{0, 1, -1\}$, 这样的二次型称为规范型二次型

推论 20.3.1 (合同标准型和合同规范型)

- 二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ 合同于标准型 $d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$, 则称 $d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$ 为二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ 的合同标准型
- 二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ 合同于规范型 $x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+q}^2$, 则称 $x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+q}^2$ 为二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ 的合同规范型
- 对任意实对称矩阵 A , 必存在可逆矩阵 C , 使得 $C^T AC = \Lambda$
- 对任意实对称矩阵 A , 必存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^T AQ = \Lambda$

定理 20.3.1 (惯性定理)

$f(\mathbf{x})$ 是二次型, A 是二次型 $f(\mathbf{x})$ 对应的矩阵, 对于任意可逆线性变换 C , $C^T AC = \Lambda$, 标准型或者规范型中正项个数 p , 负项个数 q 都是不变的, p 是正惯性指数, q 是负惯性指数



推论 20.3.2 (惯性定理)

- A 是二次型 $f(\mathbf{x})$ 对应的矩阵, $r(A) = p_A + q_A$
- A, B 分别是二次型 $f(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})$ 对应的矩阵, $A \simeq B$ 充要条件:

$$A \simeq B \Leftrightarrow \begin{cases} p_A = p_B \\ q_A = q_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r(A) = r(B) \\ q_A = q_B (p_A = p_B) \end{cases}$$

20.4 正定二次型

定义 20.4.1 (正定矩阵)

n 元二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$

$$\forall \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \neq 0, \mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$$

f 为正定二次型, 二次型对应的矩阵 A 为 **正定矩阵**

推论 20.4.1 (二次型正定充要条件)

- f 正定 $\Leftrightarrow f$ 正惯性指数 $p = n$
- f 正定 $\Leftrightarrow \exists D, s.t. A = D^T D, D$ 是可逆矩阵
- f 正定 $\Leftrightarrow A \simeq E$
- f 正定 $\Leftrightarrow A$ 的所有特征值 $\lambda_i > 0$
- f 正定 $\Leftrightarrow A$ 的全部顺序主子式大于 0

推论 20.4.2 (二次型正定必要条件)

- f 正定 $\Rightarrow a_{ii} > 0$
- f 正定 $\Rightarrow |A| > 0$





第四部分

概率论



第4部分目录

第 21 章 随机事件和概率	224
21.1 事件的关系和运算	224
21.2 概率定义	225
21.3 古典概率型和几何概率型	225
21.4 概率论基本公式	226
21.5 事件独立性和独立重复实验	227
第 22 章 一维随机变量及其分布	228
22.1 一维随机变量	228
22.2 一维离散型随机变量	229
22.3 一维连续型随机变量	230
22.4 一维随机变量函数的分布	232
第 23 章 多维随机变量及其分布	233
23.1 n 维随机变量及其分布函数	233
23.2 二维离散型随机变量	234
23.3 二维连续型随机变量	236
23.4 独立性	238
23.5 多维随机变量函数的分布	238
第 24 章 随机变量的数字特征	244
24.1 一维随机变量的数字特征	244
24.2 二维随机变量的数字特征	246
24.3 独立性与相关性判定、切比雪夫不等式	247
第 25 章 大数定律和中心极限定理	249
25.1 依概率收敛	249
25.2 大数定律	249
25.3 中心极限定理	250
第 26 章 数理统计	251
26.1 总体和样本	251
26.2 统计量及其分布	251
26.3 三大分布	252
26.4 参数的点估计	255
26.5 参数的区间估计	256
26.6 假设检验	257





第 21 章 随机事件和概率

定义 21.0.1 (随机试验)

- 试验可以在相同条件下重复进行
- 试验的所有结果是明确可知道的，并且不止一个
- 每一次试验出现哪一个结果，事先并不确定



定义 21.0.2 (随机事件)

- 每一次试验中可能出现也可能不出现的结果称为随机事件
- 在试验中一定发生的事件为必然事件，一定不发生的事件为不可能事件



定义 21.0.3 (样本空间)

- 随机试验的每一个可能的结果称为样本点，记作 ω ；样本点的全体组成的几何称为样本空间，记作 $\Omega \Rightarrow \Omega = \{\omega\}$
- 由一个样本点构成的事件为基本事件
- 随机事件 A 是由若干个基本事件组成 $\Rightarrow A \subset \Omega$



21.1 事件的关系和运算

定义 21.1.1 (事件间关系)

- 包含：事件 A 发生，事件 B 发生 $\Rightarrow A \subset B$
- 相等： $A \subset B, B \subset A \Rightarrow A = B$
- 相容： $AB \neq \emptyset$
- 互斥： $AB = \emptyset$
- 对立： $A \cup B = \Omega, A \cap B = \emptyset$



定义 21.1.2 (运算法则)

- 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- 分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- De Morgan's Laws: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

21.2 概率定义**定义 21.2.1 (概率定义)**

(1). 描述性定义

通常将随机事件 A 发生的可能性大小的度量(非负值)称为事件 A 发生的概率, 记作 $P(A)$

(2). 统计性定义

在相同条件下做重复实验, 事件 A 出现的次数 k 和总的试验次数 n 的比 $\frac{k}{n}$ 称为事件 A 在这 n 次试验中出现的频率, 当试验次数 n 足够大时, 频率将稳定于某个常数 p , n 越大, 频率偏离 p 的可能性越小, 这个常数 p 称为事件 A 发生的概率

(3). 公理化定义

设随机事件的样本空间为 Ω , 对于每一个事件 A 都有一个确定的实数 $P(A)$, 且事件函数 $P(*)$ 满足

- 非负性: $P(A) \geq 0$
- 规范性: $P(\Omega) = 1$
- 可列可加性: 对于任意两个互不相容的事件 A_1, A_2, \dots, A_n

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

21.3 古典概率型和几何概率型**定义 21.3.1 (古典概率型)**

古典概率型样本空间

- 只有有限个基本事件
- 每个基本事件都是等可能发生

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$



定义 21.3.2 (几何概率型)

几何概率型样本空间

- 无限个基本事件
- 每个基本事件都是等可能发生
- 样本空间是一个可以度量的有界区域

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega}$$

**21.4 概率论基本公式****定义 21.4.1 (性质和基本公式)**

- $0 \leq P(A) \leq 1, P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$
- $A \subset B \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A), P(B) \geq P(A)$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

**定理 21.4.1 (条件概率公式)**

A, B 是两个任意事件, 如果 $P(A) > 0$, 称在 A 发生的条件下 B 发生的概率为条件概率, 记作 $P(B|A)$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

**定理 21.4.2 (乘法公式)**

A_1, A_2, \dots, A_n 是 n 个事件, 且 $P(A_i) > 0 (i = 1, 2, \dots, n), P(A_1 A_2 \dots A_{n-1}) > 0$

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

特别的, 当 $n = 2$ 时

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

**定理 21.4.3 (全概率公式)**

完备事件组 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 满足 $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega, A_i A_j = \emptyset$, 对于任意事件 B

$$B = \bigcup_{i=1}^n A_i B, P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$



定理 21.4.4 (贝叶斯公式)

完备事件组 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 满足 $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$, $A_i A_j = \emptyset$, 对于任意事件 B

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j B)}{P(B)} = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)} (j = 1, 2, \dots, n)$$

**21.5 事件独立性和独立重复实验****定义 21.5.1 (独立性)****(1). 事件的独立性****(i). 描述性定义**

事件 A_1, A_2, \dots, A_n 中任意一个事件 A_i 发生的概率不受其他 $n - 1$ 个事件的影响, 称这 n 个事件相互独立

(ii). 数学定义

A, B 为两个事件, 如果 $P(AB) = P(A)P(B)$, 称事件 A, B 相互独立

(2). 试验的独立性

如果各个试验的结果是相互独立的, 称这些试验是相互独立的, 试验序列 $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ 中任意两个试验 E_i, E_j , 在这两个试验中任意两个结果 A_{ip}, A_{iq} 满足 $P(A_{ip}A_{jq}) = P(A_{ip})P(A_{jq})$, 称试验序列相互独立





第 22 章 一维随机变量及其分布

22.1 一维随机变量

定义 22.1.1 (随机变量)

设随机试验 E 的样本空间 $\Omega = \{\omega\}$ 满足: $\forall \omega \in \Omega$ 都有唯一的实数 $X(\omega)$ 与之对应, 且对任意实数 x , 都有 $\{\omega | X(\omega) \leq x, \omega \in \Omega\}$ 是随机事件, 称定义在 Ω 上的单值函数 $X(\omega)$ 是随机变量



定义 22.1.2 (分布函数)

设 X 是随机变量, x 是任意实数, 称函数 $F(x) = P(X \leq x)$ 为随机变量 X 的分布函数, 或者称 X 服从 $F(x)$ 分布, 记作 $X \sim F(x)$



推论 22.1.1 (分布函数性质)

- $F(x)$ 是单调不减函数, $\forall x_1 \leq x_2, F(x_1) \leq F(x_2)$
- $F(x)$ 是右连续函数, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x_0^+) = F(x_0)$
- $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
- $P\{X \leq a\} = F(a), P\{X < a\} = F(a^-), P\{X = a\} = F(a) - F(a^-)$



22.2 一维离散型随机变量

定义 22.2.1 (一维离散型随机变量)

随机变量 X 只能取有限个值 x_1, x_2, \dots , 称 X 为离散型随机变量

$$P\{X = x_i\} = p_i (i = 1, 2, \dots)$$

上面的式子称为随机变量 X 的分布列、分布律或者概率分布, 记作 $X \sim p_i$, 概率分布通常用表格或者矩阵形式表示

X	x_1	x_2	...
P	p_1	p_2	...

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}$$

推论 22.2.1 (离散型随机变量的性质)

- $P(X = x_i) \geq 0, \sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1$
- $P(X \leq x_i) = \sum_{x_j \leq x_i} P(X = x_j)$
- $P(X \in B) = \sum_{x_i \in B} P(X = x_i)$
- $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$

定义 22.2.2 (常见离散型随机变量分布)

(1). 0-1 分布

$$X \sim B(1, p)$$

$$P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$$

(2). 二项分布

$X \sim B(n, p)$, 试验次数为 n , 成功概率为 p , 随机变量 X 为成功次数

$$P(X = k) = C_k^n p^k (1 - p)^{n-k} (k = 0, 1, 2, \dots, n), 0 < p < 1$$

(3). 泊松分布

$$X \sim P(\lambda)$$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} (k = 0, 1, 2, \dots), 0 < p < 1$$

(4). 几何分布

$$X \sim G(p)$$

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p (k = 1, 2, \dots), 0 < p < 1$$



(5). 超几何分布

$$X \sim H(n, N, M)$$

$$P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} (\max\{0, n - M + N\} \leq k \leq \min\{M, n\})$$



22.3 一维连续型随机变量

定义 22.3.1 (连续型随机变量分布函数和密度函数)

随机变量 X 的分布函数可以表示为:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, t \in \mathbb{R}$$

其中 $f(x)$ 是非负可积函数, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, 称 X 是连续型随机变量, $f(x)$ 是随机变量 X 的概率密度函数, 记作 $X \sim f(x)$



推论 22.3.1 (连续型随机变量分布函数性质)

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
- $P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$
- $P(X = c) = 0$

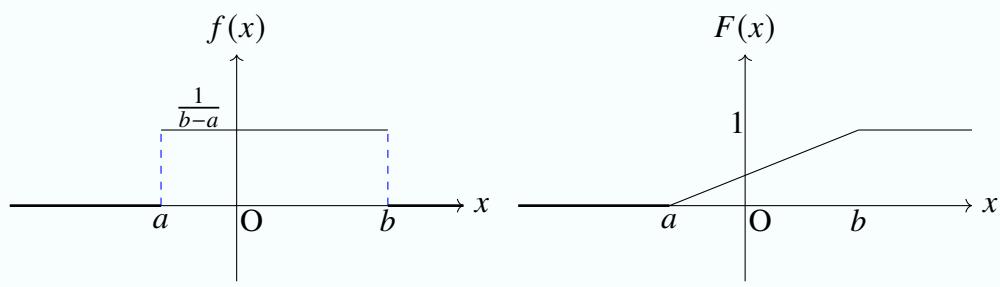


定义 22.3.2 (常见连续型随机变量分布)

(1). 均匀分布

$X \sim U(a, b)$, X 的概率密度函数 $f(x)$ 和分布函数 $F(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a, b) \\ 0 & x \in (-\infty, a] \cup [b, +\infty) \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, a) \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a, b) \\ 1 & x \in [b, +\infty) \end{cases}$$



(a) 概率密度

(b) 分布函数

图 22.1: 均匀分布概率密度和分布函数



(2). 指数分布

$X \sim E(\lambda)$, X 的概率密度函数 $f(x)$ 和分布函数 $F(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \in (0, +\infty) \\ 0 & x \in (-\infty, 0] \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \in (0, +\infty) \\ 0 & x \in (-\infty, 0] \end{cases} (\lambda > 0)$$

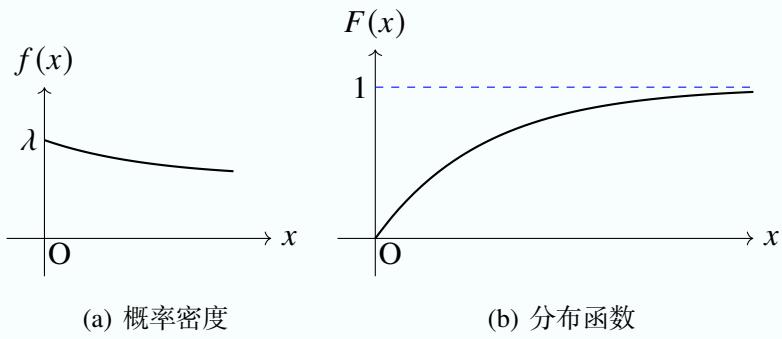


图 22.2: 指数分布概率密度和分布函数

(3). 正态分布

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, X 的概率密度 $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} (-\infty < x < +\infty)$$

特别的,当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时, $X \sim f(x)$ 是标准正态分布

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} (x \in \mathbb{R}) \\ \Phi(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \end{cases}$$

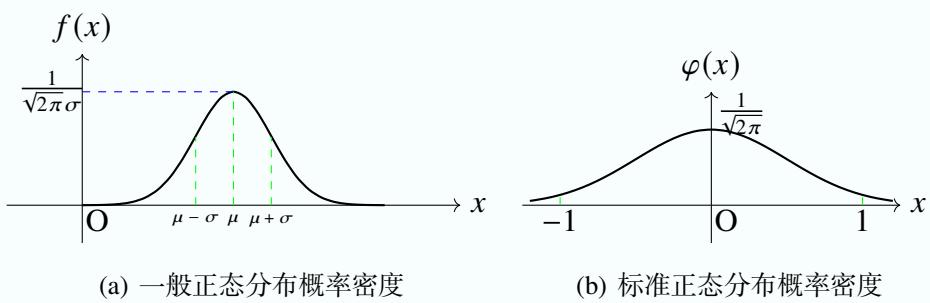


图 22.3: 一般正态分布和标准正态分布概率密度函数

推论 22.3.2 (正态分布函数性质)

- $F(x) = P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$
- $P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$
- $F(\mu - x) + F(\mu + x) = 1, aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$



22.4 一维随机变量函数的分布

定义 22.4.1

设 X 是随机变量, 函数 $y = g(x)$, 以随机变量 X 作为自变量的函数 $Y = g(X)$ 也是随机变量, 称为随机变量函数

- 离散型 \rightarrow 离散型
- 连续型 \rightarrow 连续型
- 连续型 \rightarrow 离散型





第 23 章 多维随机变量及其分布

◆ 23.1 n 维随机变量及其分布函数

定义 23.1.1 (n 维随机变量)

如果 X_1, X_2, \dots, X_n 是定义在同一个样本空间 Ω 上的 n 个随机变量, 称 (X_1, X_2, \dots, X_n) 为 n 维随机向量

定义 23.1.2 (n 维随机变量分布函数)

对于任意的 n 个实数 x_1, x_2, \dots, x_n , n 元函数

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\}$$

称为 n 维随机向量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的联合分布函数

特别的, 当 $n = 2$ 时, 记 (X, Y) 为 二维随机变量或者 二维随机向量, 称 $F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$ 为二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数

$$(X, Y) \sim F(x, y) \Leftrightarrow F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

推论 23.1.1 (二维随机变量联合分布性质)

(1). 单调性 (单调不减)

$$\forall x, y_1 < y_2, F(x, y_1) \leq F(x, y_2)$$

$$\forall y, x_1 < x_2, F(x_1, y) \leq F(x_2, y)$$



(2). 右连续性

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x, y) = F(x_0 + 0, y) = F(x_0, y) \\ \lim_{y \rightarrow y_0^+} F(x, y) = F(x, y_0 + 0) = F(x, y_0) \end{cases}$$

(3). 有界性

$$\begin{cases} F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0 \\ F(+\infty, +\infty) = 1 \end{cases}$$

(4). 非负性 $\forall x_1 < x_2, y_1 < y_2$

$$F(x_1 < x \leq x_2, y_1 < y \leq y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \geq 0$$

**定义 23.1.3 (边缘分布函数)**

设二维随机变量 (X, Y) 的分布函数 $F(X, Y)$, 随机变量 X 与 Y 的分布函数 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 分别称为随机变量关于 (X, Y) 关于 X 和 Y 的边缘分布函数

$$\begin{cases} F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{X \leq x, Y < +\infty\} = F(x, +\infty) \\ F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X < +\infty, Y \leq y\} = F(+\infty, y) \end{cases}$$

**23.2 二维离散型随机变量****定义 23.2.1 (概率分布)**

二维随机变量 (X, Y) 只能取有限对值或可列无限对值 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n), \dots$, 称 (X, Y) 为二维离散型随机变量, (X, Y) 满足概率分布

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\} (i, j = 1, 2, \dots)$$

上面的式子称为 (X, Y) 的联合分布律, 记作 $(X, Y) \sim p_{ij}$, 见 **table : 23.1** 所示

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$$



表 23.1: 离散型二维随机变量概率分布

$X \backslash Y$	y_1	\cdots	y_j	\cdots	$P\{X = x_i\}$
x_1	p_{11}	\cdots	p_{1j}	\cdots	p_{1*}
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots
x_i	p_{i1}	\cdots	p_{ij}	\cdots	p_{i*}
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots
$P\{Y = y_j\}$	p_{*1}	\cdots	p_{*j}	\cdots	1

定义 23.2.2 (边缘分布)

 X 边缘分布

$$p_{i*} = P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} (i = 1, 2, \dots)$$

 Y 边缘分布

$$p_{*j} = P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} (j = 1, 2, \dots)$$

定义 23.2.3 (条件分布)

 X 在 $Y = y_j$ 下的条件分布

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{*j}} (i = 1, 2, \dots)$$

 Y 在 $X = x_i$ 下的条件分布

$$P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{i*}} (j = 1, 2, \dots)$$



23.3 二维连续型随机变量

定义 23.3.1 (分布函数和概率密度)

二维随机变量 (X, Y) 的分布函数 $F(X, Y)$ 可以表示为:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv, (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

其中 $f(x, y)$ 是非负可积函数, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$, 称 (X, Y) 是二维连续型随机变量, $f(x, y)$ 是随机变量 (X, Y) 的概率密度函数, 记作 $(X, Y) \sim f(x, y)$

推论 23.3.1 (分布函数和概率密度性质)

- $P\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y) dx dy$
- $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续 $\Rightarrow \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}|_{(x_0, y_0)} = f(x_0, y_0)$
- $F(x, y)$ 连续且可导, $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$

定义 23.3.2 (边缘分布函数和边缘概率密度)

$(X, Y) \sim f(x, y)$, X, Y 的边缘分布函数和边缘概率密度

边缘分布函数

$$\begin{cases} F_X(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^x \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) dv \right] du \\ F_Y(y) = F(+\infty, y) = \int_{-\infty}^y \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) du \right] dv \end{cases}$$

边缘概率密度

$$\begin{cases} f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \\ f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \end{cases}$$

定义 23.3.3 (条件分布函数和条件概率密度)

$(X, Y) \sim f(x, y)$, X 在 $Y = y$ 条件下的条件概率密度和 Y 在 $X = x$ 条件下的条件概率密度

$$\begin{cases} f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx} \\ f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy} \end{cases}$$



$$f(x, y) = \begin{cases} f_X(x)f_{Y|X}(y|x) \\ f_Y(y)f_{X|Y}(x|y) \end{cases}$$

$(X, Y) \sim f(x, y)$, X 在 $Y = y$ 条件下的条件分布函数和 Y 在 $X = x$ 条件下的条件分布函数

$$\begin{cases} F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^y f_{Y|X}(y|x) dy = \int_{-\infty}^y \frac{f(x, y)}{f_X(x)} dy \\ F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(x|y) dx = \int_{-\infty}^x \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} dx \end{cases}$$

23.3.1 常见二维连续型随机变量分布

定义 23.3.4 (二维均匀分布)

(X, Y) 在有界区域 D 服从均匀分布, (X, Y) 的概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S_D} & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

定义 23.3.5 (二维正态分布)

(X, Y) 概率密度

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \right\}$$

其中 $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1$, 称 (X, Y) 服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 的二维正态分布, 记作 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$

推论 23.3.2 (二维正态分布性质)

- 若 $(X_1, X_2) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho) \Rightarrow X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
- $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 且 X_1, X_2 相互独立, 则 $(X_1, X_2) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; 0)$
- $(X_1, X_2) \sim N \Rightarrow k_1 X_1 + k_2 X_2 \sim N$



23.4 独立性

定义 23.4.1 (二维随机变量独立性)

设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布 $F(x, y)$, 边缘分布分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 如果任意实数对 (x, y)

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

称 X 和 Y 相互独立

定义 23.4.2 (n 维随机变量独立性)

设 n 维随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的联合分布 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 边缘分布分别为 $F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \dots, F_{X_n}(x_n)$, 如果任意实数对 (x_1, x_2, \dots, x_n)

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$$

称 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立

推论 23.4.1 (独立性性质)

- n 个随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立 $\Leftrightarrow \forall x_i \in \mathbb{R} (i = 1, 2, \dots, n)$, n 个事件 $\{X_1 \leq x_1\}, \{X_2 \leq x_2\}, \dots, \{X_n \leq x_n\}$ 相互独立
- 离散型二维随机变量 (X, Y) 相互独立 $\Leftrightarrow \forall x_i, y_j (i, j = 1, 2, \dots)$, $P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}$
- 连续型二维随机变量 (X, Y) 相互独立 $\Leftrightarrow \forall x, y, f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$
- (X_1, X_2, \dots, X_n) 相互独立, 其中任意 $k (2 \leq k \leq n)$ 个随机变量相互独立
- (X_1, X_2, \dots, X_n) 相互独立, $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$ 是一元连续函数, $g_1(X_1), g_2(X_2), \dots, g_n(X_n)$ 相互独立
- 独立的二维随机变量, 边缘分布和条件分布相等, 边缘概率密度与条件概率密度相等

23.5 多维随机变量函数的分布

定义 23.5.1 (二维随机变量函数)

设 X, Y 为随机变量, $g(x, y)$ 是二元函数, 以随机变量 X, Y 作为自变量的函数 $Z = g(X, Y)$ 也是随机变量, 称为随机变量函数



定理 23.5.1 (随机变量函数分布函数和概率密度)

设 X, Y 是随机变量, $f(x, y)$ 是 (X, Y) 的概率密度, $\begin{cases} U = G(X, Y) \\ V = H(X, Y) \end{cases}$, 求 $U = g(X, Y)$ 和 $V = h(X, Y)$ 的分布函数和概率密度

$$\begin{cases} U = G(X, Y) \\ V = H(X, Y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = P(U, V) \\ Y = Q(U, V) \end{cases} \Rightarrow |J| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial X}{\partial U} & \frac{\partial X}{\partial V} \\ \frac{\partial Y}{\partial U} & \frac{\partial Y}{\partial V} \end{array} \right\|$$

$$F(u, v) = P\{U(X, Y) \leq u, V(X, Y) \leq v\} = \iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy$$

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy \\ &= \iint_{D_{uv}} f(P(u, v), Q(u, v)) |J| du dv \end{aligned}$$

$$f(u, v) = \frac{\partial^2 F(u, v)}{\partial u \partial v} = f(P(u, v), Q(u, v)) |J|$$

$$\begin{cases} f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} f(P(u, v), Q(u, v)) |J| dv \\ f_V(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(P(u, v), Q(u, v)) |J| du \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_U(u_0) = \int_{-\infty}^{u_0} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(P(u, v), Q(u, v)) |J| dv \\ F_V(v_0) = \int_{-\infty}^{v_0} dv \int_{-\infty}^{+\infty} f(P(u, v), Q(u, v)) |J| du \end{cases}$$

**命题 23.5.1 (和的分布)**

$(X, Y) \sim f(x, y)$, $Z = X + Y$, 求 Z 的分布函数和概率密度

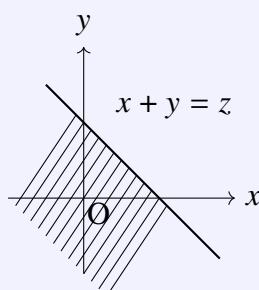
(a) $X + Y$

图 23.1: 和的分布



$$\begin{cases} Z = X + Y \\ W = Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = Z - W \\ Y = W \end{cases} \Rightarrow |J| = 1$$

概率密度

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-w, w) dw$$

分布函数

$$F_Z(z_0) = \int_{-\infty}^{z_0} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-w, w) dw$$

命题 23.5.2 (差的分布)

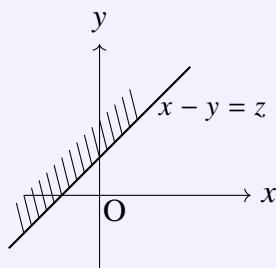
 $(X, Y) \sim f(x, y), Z = X - Y$, 求 Z 的分布函数和概率密度(a) $X - Y$

图 23.2: 差的分布

$$\begin{cases} Z = X - Y \\ W = Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = Z + W \\ Y = W \end{cases} \Rightarrow |J| = 1$$

概率密度

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z+w, w) dw$$

分布函数

$$F_Z(z_0) = \int_{-\infty}^{z_0} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(z+w, w) dw$$

命题 23.5.3 (积的分布)

 $(X, Y) \sim f(x, y), Z = XY$, 求 Z 的分布函数和概率密度

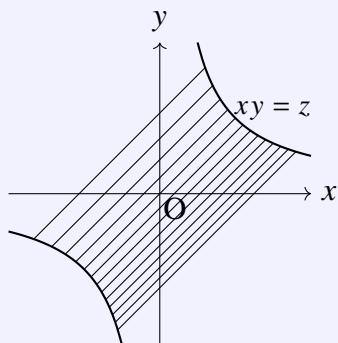
(a) XY

图 23.3: 积的分布

$$\begin{cases} Z = XY \\ W = Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{Z}{W} \\ Y = W \end{cases} \Rightarrow |J| = \left| \frac{1}{w} \right|$$

概率密度

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{z}{w}, w\right) \left|\frac{1}{w}\right| dw$$

分布函数

$$F_Z(z_0) = \int_{-\infty}^{z_0} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-w, w) \left|\frac{1}{w}\right| dw$$

命题 23.5.4 (商的分布)

$(X, Y) \sim f(x, y)$, $Z = \frac{X}{Y}$, 求 Z 的分布函数和概率密度

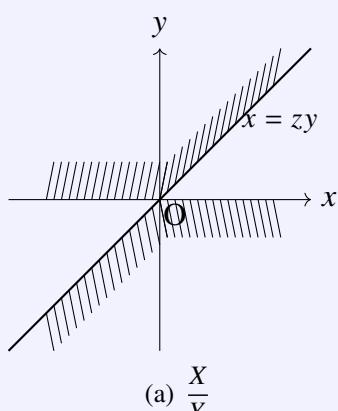
(a) $\frac{X}{Y}$

图 23.4: 商的分布

$$\begin{cases} Z = \frac{X}{Y} \\ W = Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = ZW \\ Y = W \end{cases} \Rightarrow |J| = |w|$$

概率密度

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{z}{w}, w\right) |w| dw$$

分布函数

$$F_Z(z_0) = \int_{-\infty}^{z_0} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-w, w) |w| dw$$

命题 23.5.5 (最大值和最小值的分布)

$(X, Y) \sim f(x, y)$, $Z_1 = \max\{X, Y\}$, $Z_2 = \min\{X, Y\}$, 求 Z_1, Z_2 的分布函数和概率密度
 $\max\{X, Y\}$ 分布函数

$$F_{Z_1}(z) = P\{Z_1 \leq \max\{X, Y\}\} = P\{X \leq z, Y \leq z\} = F(z, z)$$

 $\max\{X, Y\}$ 概率密度

$$f_{Z_1}(z) = F'_{Z_1}(z)$$

 $\min\{X, Y\}$ 分布函数

$$F_{Z_2}(z) = P\{Z_2 \leq \min\{X, Y\}\} = P\{X \leq z\} \cup P\{Y \leq z\} = F_X(z) + F_Y(z) - F(z, z)$$

 $\min\{X, Y\}$ 概率密度

$$f_{Z_2}(z) = F'_{Z_2}(z)$$

推论 23.5.1 (独立同分布随机变量推论)

随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, $Z_1 = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, $Z_2 = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$,
 Z_1, Z_2 的分布函数

$$\begin{cases} F_{Z_1}(z) = F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z) \\ F_{Z_2}(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)][1 - F_{X_2}(z)]\cdots [1 - F_{X_n}(z)] \end{cases}$$

假设随机变量 $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 独立同分布

- $F_{Z_1}(x) = [F(x)]^n$, $f_{Z_1}(x) = n[F(x)]^{n-1}f(x)$
- $F_{Z_2}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n$, $f_{Z_2}(x) = nf(x)[1 - F(x)]^{n-1}$



表 23.2: 常见独立分布可加性

X	Y	$X + Y$
$B(n, p)$	$B(m, p)$	$B(n + m, p)$
$P(\lambda_1)$	$P(\lambda_2)$	$P(\lambda_1 + \lambda_2)$
$N(\mu_1, \sigma_1^2)$	$N(\mu_2, \sigma_2^2)$	$N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
$\chi^2(n)$	$\chi^2(m)$	$\chi^2(n + m)$





第 24 章 随机变量的数字特征

24.1 一维随机变量的数字特征

定义 24.1.1 (数学期望)

离散型随机变量

X 是离散型随机变量, X 的分布列为 $p_i = P\{X = x_i\} (i = 1, 2, \dots, n)$

如果级数 $\sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i$ 绝对收敛, 称随机变量 X 的数学期望存在, 将其记作 $E(X)$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i$$

连续型随机变量

X 是连续型随机变量, X 的概率密度为 $f(x)$

如果积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ 绝对收敛, 称随机变量 X 的数学期望存在, 将其记作 $E(X)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

推论 24.1.1 (数学期望推论)

- $E(a) = a, E(E(X)) = E(X)$
- $E(aX \pm bY) = aE(X) \pm bE(Y)$
- $E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i)$
- X 与 Y 相互独立 $\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$



- X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立

$$\begin{cases} E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n E(X_i) \\ E\left[\prod_{i=1}^n g_i(X_i)\right] = \prod_{i=1}^n E[g_i(X_i)] \end{cases}$$

定义 24.1.2 (方差和标准差)

设 X 是随机变量, 如果 $E[(X - E(X))^2]$ 存在, 将 $E[(X - E(X))^2]$ 记作 X 的方差 $D(X)$

$$D(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

将 $\sqrt{D(X)}$ 称为随机变量 X 的标准差或者均方差, 记作 $\sigma(X)$

随机变量 $X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ 是 X 的标准化随机变量

$$\begin{cases} E(X^*) = 0 \\ D(X^*) = 1 \end{cases}$$

推论 24.1.2 (方差和标准差推论)

- $D(X) \geq 0, D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
- $D(c) = 0, c \in \mathbb{R}$
- $D(aX + b) = a^2 D(X), D(X + b) = D(X)$
- $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\text{Cov}(X, Y)$
- $D\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 D(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j)$
- X 和 Y 相互独立

$$\begin{cases} D(aX + bY) = a^2 D(X) + b^2 D(Y) \\ D(XY) = D(X)D(Y) + D(X)[E(Y)]^2 + D(Y)[E(X)]^2 \geq D(X)D(Y) \end{cases}$$

- X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立

$$\begin{cases} D\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 D(X_i) \\ D\left(\sum_{i=1}^n g_i(X_i)\right) = \sum_{i=1}^n D[g_i(X_i)] \end{cases}$$

- $\forall c \in \mathbb{R}, D(X) \leq E[(X - c)^2]$



24.2 二维随机变量的数字特征

定义 24.2.1 (数学期望)

设 X, Y 为随机变量, $g(X, Y)$ 为 X, Y 的函数 (g 是连续函数)

离散型随机变量

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\} (i, j = 1, 2, \dots)$$

级数 $\sum_i^m \sum_j^n g(x_i, y_j) p_{ij}$ 绝对收敛

$$E[g(X, Y)] = \sum_i^m \sum_j^n g(x_i, y_j) p_{ij}$$

连续型随机变量

(X, Y) 概率密度为 $f(x, y)$, 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy$ 绝对收敛

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy$$

定义 24.2.2 (协方差与相关系数)

随机变量 X 与 Y 的方差存在且 $D(X) > 0, D(Y) > 0$, 定义随机变量 X, Y 的协方差 $Cov(X, Y)$

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}}$ 定义为随机变量 X, Y 的相关系数

推论 24.2.1 (协方差和相关系数推论)

- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X), Cov(X, X) = D(X), \rho_{XX} = 1$
- $Cov(aX + b, Y) = aCov(X, Y), Cov(X_1 + X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$
- $\rho_{XY} = 0 \Rightarrow X, Y$ 不相关
- $\rho_{XY} \neq 0 \Rightarrow X, Y$ 相关



24.3 独立性与相关性判定、切比雪夫不等式

推论 24.3.1 (独立性与相关性判定)

随机变量 X, Y 相互独立充要条件

$$\begin{cases} f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \\ P\{X = x_i, Y = y_i\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_i\} \end{cases}$$

随机变量 X, Y 不相关充要条件 $\rho_{XY} = 0$

$$\rho_{XY} = 0 \Leftrightarrow Cov(X, Y) = 0 \Leftrightarrow E(XY) = E(X) \cdot E(Y) \Leftrightarrow D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$



定义 24.3.1 (切比雪夫不等式)

随机变量 X 的期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 都存在

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, P\{|X - E(X)| \leq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \\ \forall \varepsilon > 0, P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \end{cases}$$



表 24.1: 常用分布表

名称	概率分布	均值	方差	参数范围
两点分布	$P(X = k) = p^k q^{1-k}$ ($k = 0, 1$)	p	pq	$0 < p < 1$ $q = 1 - p$
二项分布 $B(n, p)$	$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ ($k = 0, 1, \dots, n$)	np	npq	$0 < p < 1$ $q = 1 - p$ $n \in N$
泊松分布 $P(\lambda)$	$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)	λ	λ	$\lambda > 0$
超几何分布 $H(n, N, M)$	$P(X = k) = \frac{C_{N-M}^{n-k} C_M^k}{C_N^n}$ ($k = 0, 1, \dots, \min\{M, n\}$)	$\frac{nM}{N}$	$\frac{n(N-n)(N-M)M}{N^2(N-1)}$	$n, N, M \in N$ $n \leq N, M \leq N$
几何分布 $G(p)$	$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$ ($k = 1, 2, \dots$)	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$0 < p < 1$ $q = 1 - p$
均匀分布 $U(a, b)$	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ ($a \leq x \leq b$)	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^3}{12}$	
指数分布 $E(\lambda)$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ($x > 0$)	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\lambda > 0$
正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2	$\sigma > 0$
Γ 分布 $\Gamma(\alpha, \beta)$	$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$ ($x > 0$)	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$\alpha > 0$ $\beta > 0$

第 25 章 大数定理和中心极限定理

25.1 依概率收敛

定义 25.1.1 (依概率收敛)

设随机变量 X 与随机变量序列 $\{X_n\} (n = 1, 2, 3, \dots, n)$

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} = 0 \\ \forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n - X| < \varepsilon\} = 1 \end{cases}$$

称随机变量序列 $\{X_n\}$ 依概率收敛于随机变量 X , 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X(P) \text{ or } X_n \xrightarrow{P} X (n \Rightarrow \infty)$$

25.2 大数定理

定理 25.2.1 (切比雪夫大数定理)

假设 $\{X_n\} (n = 1, 2, \dots, n)$ 是相互独立的随机变量序列, 如果方差 $D(X_i)$ 存在且一致有上界, $\forall i \geq 1, s.t. D(X_i) \leq C, C \in \mathbb{R}, \{X_n\}$ 服从大数定理

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)$$



定理 25.2.2 (伯努利大数定理)

假设 μ_n 是 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数, 在每次试验中事件 A 发生的概率为 $p(0 < p < 1)$, $\frac{\mu_n}{n} \xrightarrow{P} p$

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \left| \frac{\mu_n}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

**定理 25.2.3 (辛钦大数定理)**

假设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 如果 $E(X_i) = \mu(i = 1, 2, \dots, n)$ 存在, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \mu$

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right| < \varepsilon \right\} = 1$$



25.3 中心极限定理

中心极限定理

正态分布

定理 25.3.1 (列维-林德伯格定理)

假设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 如果 $E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2 > 0(i = 1, 2, \dots, n)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

**推论 25.3.1 (中心极限定理推论)**

- $\sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$
- $P\{a < \sum_{i=1}^n X_i < b\} \approx \Phi\left(\frac{b - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)$

**定理 25.3.2 (棣莫弗-拉普拉斯定理)**

假设随机变量 $Y_n \sim B(n, p)(0 < p < 1, n \geq 1)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$





第 26 章 数理统计

26.1 总体和样本

定义 26.1.1 (统计概念和统计量)

- 总体: 研究对象的全体称为总体
- 样本: n 个相互独立且与总体具有相同概率分布的随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 所组成的整体 (X_1, X_2, \dots, X_n) 称为来自总体 X , 容量为 n 的一个简单随机样本, 一次抽样结果的具体的 n 个数值 (x_1, x_2, \dots, x_n) 称为样本 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的一个观测值

定义 26.1.2 (样本分布)

假设总体的分布函数 $F(x)$, 概率密度函数 $f(x)$, 样本 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的分布函数和概率密度

- 离散型 $P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\} = \prod_{i=1}^n P\{X_i = x_i\}$
- 连续型

$$\begin{cases} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F(x_i) \\ f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i) \end{cases}$$

26.2 统计量及其分布

定义 26.2.1

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的一个样本, $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 n 元函数, 如果函数 g 中不含任何参数, 称 $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是样本 X_1, X_2, \dots, X_n 的一个统计量

定义 26.2.2 (样本数字特征)

- 样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$
- 样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$
- 样本标准差 $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$
- 样本 k 阶原点矩 $A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k (k = 1, 2, \dots)$
- 样本 k 阶中心矩 $B_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k (k = 2, 3, \dots)$

定义 26.2.3 (顺序统计量)

将样本 X_1, X_2, \dots, X_n 的 n 个观测值从小到大顺序排序

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$$

随机变量 $X_{(k)}$ 称作第 k 顺序统计量, $X_{(1)}$ 为最小顺序统计量, $X_{(n)}$ 为最大顺序统计量

$$\begin{cases} X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \\ X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \end{cases}$$

推论 26.2.1 (统计量 (数字特征) 性质)

假设总体期望 $E(X) = \mu$, 总体方差为 $D(X) = \sigma^2$, X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体的一个样本, \bar{X}, S^2 分别为样本的均值和方差

- $E(X_i) = \mu$
- $D(X_i) = \sigma^2$
- $E(\bar{X}) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = E(X) = \mu$
- $D(\bar{X}) = D\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sigma^2$
- $E(S^2) = D(X) = \sigma^2$

26.3 三大分布**定义 26.3.1 (χ^2 分布)**

随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 且都服从标准正态分布, 随机变量 $X = \sum_{i=1}^n X_i^2$ 服从自由度为 n 的卡方分布 $\chi^2(n)$, 记作 $X \sim \chi^2(n)$

上 α 分位数: 对于给定的 $\alpha (0 < \alpha < 1)$, 称满足



$$P\{\chi^2 > \chi_{\alpha}^2(n)\} = \int_{\chi_{\alpha}^2(n)}^{+\infty} f(x)dx = \alpha$$

的 $\chi_{\alpha}^2(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 分布的上 α 分位数

- $X_1 \sim \chi^2(n_1), X_2 \sim \chi^2(n_2), X_1, X_2$ 相互独立, $X_1 + X_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$
- $X \sim \chi^2(n) \Rightarrow E(X) = n, D(X) = 2n$

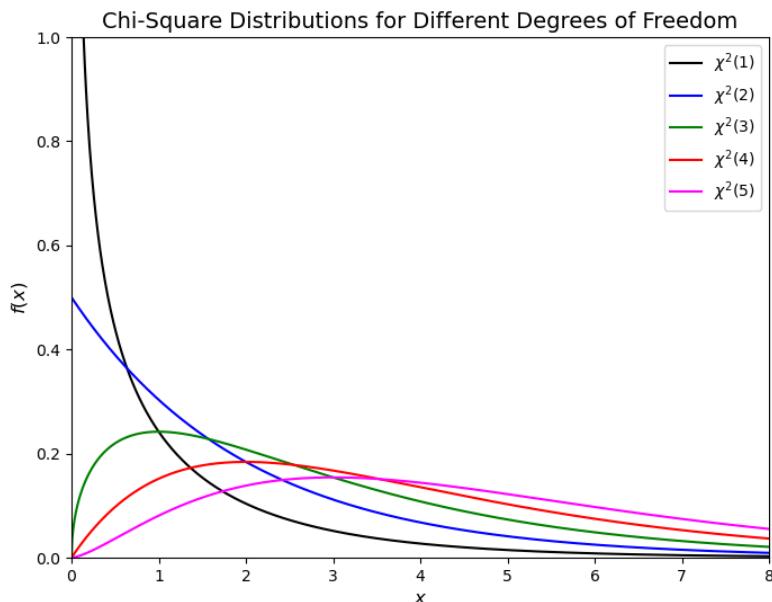


图 26.1: 卡方分布

定义 26.3.2 (t 分布)

随机变量 $X \sim N(0, 1), Y \sim \chi^2(n), X, Y$ 相互独立, 随机变量 $t = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布, 记作 $t \sim t(n)$

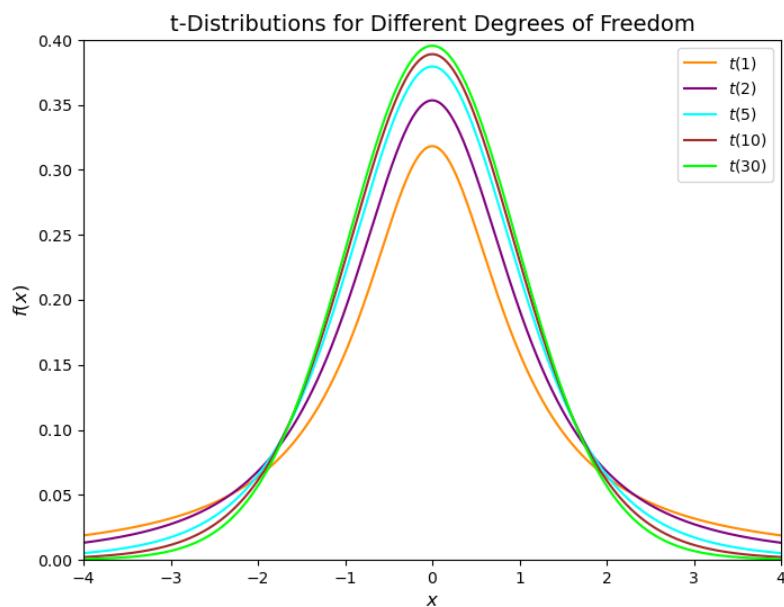
上 α 分位数: 对于给定的 $\alpha (0 < \alpha < 1)$, 称满足

$$P\{t > t_{\alpha}(n)\} = \alpha$$

的 $t_{\alpha}(n)$ 为 t 分布的上 α 分位数

- t 分布概率密度关于 $x = 0$ 对称 $\Rightarrow E(t) = 0$
- $P\{t > -t_{\alpha}(n)\} = P\{t > t_{1-\alpha}(n)\} \Rightarrow t_{1-\alpha}(n) = -t_{\alpha}(n)$

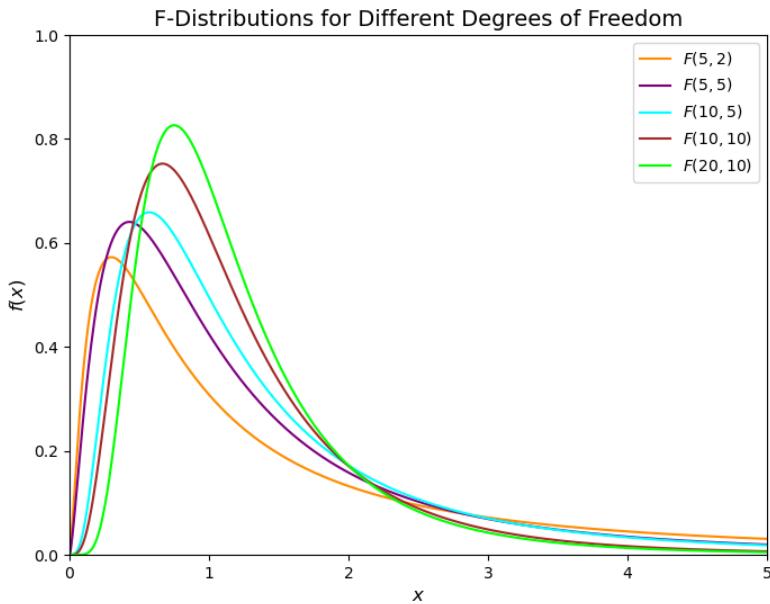


图 26.2: t 分布定义 26.3.3 (F 分布)

随机变量 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$, 且 X, Y 相互独立, 随机变量 $F = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从自由度为 (n_1, n_2) 的 F 分布, 记作 $F \sim F(n_1, n_2)$

- $F \sim F(n_1, n_2) \Rightarrow \frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$
- $F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}$
- $t \sim t(n) \Rightarrow t^2 \sim F(1, n)$



图 26.3: F 分布**推论 26.3.1 (正态总体推论)**

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本, \bar{X}, S^2 分别是样本的均值和方差

- $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$
- $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$
- $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n-1)$
- \bar{X} 和 S^2 相互独立 $\Rightarrow \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1)$
- σ 未知时, $\frac{n(\bar{X} - \mu)^2}{S^2} \sim F(1, n-1)$

**26.4 参数的点估计****定义 26.4.1 (参数点估计)**

设总体 X 的分布函数 $F(x; \theta)$, 其中 θ 是一个未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体的一个样本, 由样本构造一个适当的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 作为参数 θ 的估计, 称统计量 $\hat{\theta}$ 为参数 θ 的估计量



定义 26.4.2 (矩估计)

设总体分布中有 k 个未知的参数 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$, 来自总体 X 的一组样本 X_1, X_2, \dots, X_n , 如果 X 的原点矩 $E(X^l)(l = 1, 2, \dots, k)$ 存在, 样本原点矩 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^l$ 可作为 $E(X^l)$ 的估计

定义 26.4.3 (最大似然估计)

对未知参数 θ 进行估计, 在该参数可能的取值范围 I 中选取, 使用使样本观测值 x_1, x_2, \dots, x_n 最大的参数 $\hat{\theta}$ 作为参数 θ 的估计值

似然函数

$$\begin{cases} L(\theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) \\ L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \end{cases}$$

$$\exists \hat{\theta} \in I, \text{ s.t. } L(x_1, x_2, \dots, x_n, \hat{\theta}) = \max_{\theta \in I} L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$$

推论 26.4.1 (估计量评价标准)

- 无偏性: $E(\hat{\theta}) = \theta$
- 有效性: $D(\hat{\theta})$ 最小
- 一致性: $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon\} = 1$

26.5 参数的区间估计**定义 26.5.1 (区间估计和置信区间)**

设 θ 是总体 X 的一个未知参数, 对于给定的 $\alpha(0 < \alpha < 1)$, 如果由样本 X_1, X_2, \dots, X_n 确定的两个统计量 $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 满足

$$P\{\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n) < \theta < \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n)\} = 1 - \alpha$$

则称随机区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 是 θ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间, $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 分别称为置信上限和置信下限, $1 - \alpha$ 为置信水平, α 为显著性水平



表 26.1: 正态总体的置信区间

待估参数	其他参数	枢轴量分布	置信区间
μ	σ^2 已知	$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$	$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$
μ	σ^2 未知	$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$
σ^2	μ 已知	$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$	$\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{\alpha/2}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{1-\alpha/2}(n)}\right)$
σ^2	μ 未知	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n)}\right)$

26.6 假设检验

定义 26.6.1 (统计性检验)

- H_0 : 虚无假设
- H_1 : 备择假设

定义 26.6.2 (两类错误)

- 第一类错误: 虚无假设 H_0 为真, 但拒绝了 H_0 , 误认为备择假设 H_1 为真, 犯第一类错误概率 $\alpha = P\{R(H_0)|T(H_0)\}$
- 第二类错误: 备择假设 H_1 为真, 但接受了 H_0 , 误认为虚无假设 H_0 为真, 犯第二类错误概率 $\beta = P\{A(H_0)|T(H_1)\}$

推论 26.6.1 (正态总体下的六大检查和拒绝域)

- σ^2 已知, μ 未知, $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$

$$\mu_r \in (-\infty, \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (\mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}, +\infty)$$

- σ^2 未知, μ 未知, $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$

$$\mu_r \in (-\infty, \mu_0 - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)) \cup (\mu_0 + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), +\infty)$$

- σ^2 已知, μ 未知, $H_0: \mu \leq \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$

$$\mu_r \in (\mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha}, +\infty)$$

- σ^2 已知, μ 未知, $H_0: \mu \geq \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$

$$\mu_r \in (-\infty, \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha})$$



- σ^2 未知, μ 未知, $H_0 : \mu \leq \mu_0, H_1 : \mu > \mu_0$
$$\mu_r \in (\mu_0 + \frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1), +\infty)$$

- σ^2 未知, μ 未知, $H_0 : \mu \geq \mu_0, H_1 : \mu < \mu_0$
$$\mu_r \in (-\infty, \mu_0 - \frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1))$$





第五部分
每日一题 I



第 5 部分 目录

第 27 章 January	261
27.1 Week I.	261
27.2 Week II.	269
27.3 Week III	276
27.4 Week IV	282
第 28 章 February	292
28.1 Week I.	292
28.2 Week II.	299
28.3 Week III	306
28.4 Week IV	313
第 29 章 March	321
29.1 Week I.	321
29.2 Week II.	327
29.3 Week III	330
29.4 Week IV	335
第 30 章 April	346
30.1 Week I.	346
30.2 Week II.	351
30.3 Week III	358
30.4 Week IV	364
第 31 章 May	373
31.1 Week I.	373
31.2 Week II.	379
31.3 Week III	387
31.4 Week IV	395
第 32 章 June	409
32.1 Week I.	409
32.2 Week II.	415
32.3 Week III	422
32.4 Week IV	430



第 27 章 January

27.1 Week I

January 1

例题 27.1.

已知 $f(x+1)$ 的定义域为 $[0, a], (a > 0)$, 求 $f(x)$ 定义域

解

$f(x+1)$ 的定义域为 $[0, a]$, 则 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, a-1]$

例题 27.2.

已知 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1 - x$ 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 并求出定义域

解

$f[\varphi(x)] = 1 - x \Rightarrow e^{\varphi^2(x)} = 1 - x$, 因此: $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$, $x \leq 0$

例题 27.3.

设

$$g(x) = \begin{cases} 2-x & x \leq 0 \\ x+2 & x > 0 \end{cases}$$

,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ -x & x \geq 0 \end{cases}$$

求 $g[f(x)]$

解

$$g[f(x)] = \begin{cases} 2 + x^2 & x < 0 \\ x + 2 & x \geq 0 \end{cases}$$

例题 27.4.

设函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2 & x < -1 \\ x^3 & -1 \leq x \leq 2 \\ 12x - 16 & x > 2 \end{cases}$$

求 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式

解

$$g(x) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{1-x}{2}} & x \in (-\infty, -1) \\ \sqrt[3]{x} & x \in [-1, 8] \\ \frac{x+16}{12} & x \in (8, +\infty) \end{cases}$$

例题 27.5.

证明: 定义在 $[-a, a]$ 上的任意一个函数 $f(x)$ 都可以表示为一个奇函数和一个偶函数之和

解

$$\begin{aligned} \text{令 } g(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \\ &\left\{ \begin{array}{l} g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = g(x) \\ h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = \frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x) \\ f(x) = g(x) + h(x) \end{array} \right. \end{aligned}$$



其中 $g(x)$ 是偶函数, $h(x)$ 是奇函数

例题 27.6.

判断函数 $f(x) = x \tan x \cdot e^{\sin x}$ 的奇偶性、单调性、周期性和有界性

解

$f(x)$ 定义域为 $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, 关于原点对称

(1). 奇偶性: $f(-x) = x \tan x \cdot e^{-\sin x} \neq -f(x)$, $f(-x) \neq f(x)$

$f(x)$ 是非奇非偶函数

(2). 单调性: $f'(x) = \tan x \cdot e^{\sin x} + x \sec^2 x \cdot e^{\sin x} + x \tan x \cos x \cdot e^{\sin x} = e^{\sin x} [\tan x + x \sin x + x \sec^2 x]$

$f(x)$ 不是单调函数

(3). 有界性: $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 时, $f(x) > \frac{x \tan x}{e}$, 函数 $g(x) = \frac{x \tan x}{e}$ 为无界函数

$f(x)$ 是无界函数

(4). 周期性: $f(x + 2\pi) = (x + 2\pi) \tan(x + 2\pi) \cdot e^{\sin(x+2\pi)} = (x + 2\pi) \tan x \cdot e^{\sin x} \neq f(x)$

$f(x)$ 不是周期函数

例题 27.7.

函数 $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界

- A. $(-1, 0)$
- B. $(0, 1)$
- C. $(1, 2)$
- D. $(2, 3)$

解

(1). $x \rightarrow 0^-$, $f(x) \rightarrow -\frac{\sin 2}{4}$; $x \rightarrow 0^+$, $f(x) \rightarrow \frac{\sin 2}{4}$

(2). $x \rightarrow 1^-$, $f(x) \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow 1^+$, $f(x) \rightarrow -\infty$

(3). $x \rightarrow 2^-$, $f(x) \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow 2^+$, $f(x) \rightarrow \infty$

$f(x)$ 在区间 $(-1, 0)$ 有界

January 2

例题 27.8.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{1+2+\dots+n} - \sqrt{1+2+\dots+(n-1)} \right]$$

解



$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{1+2+\cdots+n} - \sqrt{1+2+\cdots+(n-1)} \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} - \sqrt{\frac{(n-1)n}{2}} \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} \right]}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} + \sqrt{\frac{(n-1)n}{2}}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{2n}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

例题 27.9.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}$$

解

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2(4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}) + x(1 + \frac{1}{x})}}{\sqrt{x^2(1 + \frac{\sin x}{x^2})}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - (1 + \frac{1}{x})}{\sqrt{1 + \frac{\sin x}{x^2}}} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

January 3**例题 27.10.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$$

解



$$\begin{aligned}
 I^+ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \\
 &= 0 + 1 = 1 \\
 I^- &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} \\
 &= 2 - 1 = 1
 \end{aligned}$$

综上所述, 原极限 $I = 1$

例题 27.11.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})$$

解

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x})}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - (x^2 - x)}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

January 4



例题 27.12.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x(1 - \cos x)}$$

解

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x(1 - \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x(1 - \cos x)} \cdot \frac{\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x}}{\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan x - 1 - \sin x}{x(1 - \cos x)(\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x(1 - \cos x)(\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{\frac{1}{2}x^3(\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x})} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

例题 27.13.

已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos 2x}{ax^b} = 1$, 求 a, b

解

泰勒展开式:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos 2x}{ax^b} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x^2 + \frac{x^4}{2} - 1 + \frac{4x^2}{2!} - \frac{8x^4}{4!}}{ax^b} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - \frac{x^4}{6}}{ax^b} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{a} = 1 \end{aligned}$$

因此: $a = 3, b = 2$

January 5



例题 27.14.

已知 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$, 下列结论正确的个数为

- A. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$
- B. $\lim_{x \rightarrow x_0} [1 + \varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi}} = e$
- C. 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\sin \varphi(x) \sim \varphi(x)$
- D. 若 $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = A$

解

正确的个数: 0, 令 $\varphi(x) = 0, x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$, A, B, C, D 四个选项均不正确

例题 27.15.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \arctan x}{\sin x - \tan x}$$

解

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \arctan x}{\sin x - \tan x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{-\frac{1}{2}x^3} \\ &= -1 \end{aligned}$$

January 6**例题 27.16.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x}{\ln(1+x)}}{x}$$

解

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x}{\ln(1+x)}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

例题 27.17.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(1 + \frac{1}{x})^{x^2}}$$

解

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(1 + \frac{1}{x})^{x^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{x^2 \ln(1+\frac{1}{x})}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - x^2 \ln(1+\frac{1}{x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - x^2(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{2}} \\
 &= e^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

January 7

例题 27.18.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos(\sin x)}{x^4}$$

解



$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos(\sin x)}{x^4} \text{(Lagrange's Mean Value Theorem)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin \xi(x - \sin x)}{x^4}, \xi \in (\sin x \sim x) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin \xi}{6x} \\
 &= -\frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

夹逼定理:

$$\sin \xi \in (\sin x \sim x) \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \xi}{x} = 1$$

例题 27.19.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 [\arctan(x+1) - \arctan x]$$

解

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 [\arctan(x+1) - \arctan x] \text{(Lagrange's Mean Value Theorem)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \frac{1}{1 + \xi^2}, \xi \in (x, x+1) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

夹逼定理:

$$\xi \in (x, x+1) \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1 + (x^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1 + (x+1)^2} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1 + \xi^2} = 1$$

27.2 Week II

January 8

例题 27.20.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[\arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1} \right]$$

解



归结原理:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left[\arctan \frac{a}{x} - \arctan \frac{a}{x+1} \right] \text{(Lagrange's Mean Value Theorem)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2}{x(x+1)} \frac{1}{1+\xi^2}, \xi \in \left(\frac{a}{x}, \frac{a}{x+1} \right) \\ &= a \end{aligned}$$

夹逼定理:

$$\xi \in \left(\frac{a}{x}, \frac{a}{x+1} \right) \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x+1} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \xi = 0$$

例题 27.21.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}]$$

解

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}] \text{(Lagrange's Mean Value Theorem)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \xi (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}), \xi \in (\sqrt{x}, \sqrt{x+1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \xi \left(\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

January 9

例题 27.22.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x^2)} - \frac{1}{\ln(1+\tan^2 x)} \right]$$

解



$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x^2)} - \frac{1}{\ln(1+\tan^2 x)} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\tan^2 x) - \ln(1+x^2)}{\ln(1+x^2) \ln(1+\tan^2 x)} \text{ (Lagrange's Mean Value Theorem)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x + x)(\tan x - x)}{x^4 \xi}, \xi \in (1+x^2, 1+\tan^2 x) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \frac{x^3}{3}}{x^4} \\
 &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

夹逼定理:

$$\xi \in (1+x^2, 1+\tan^2 x) \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} (1+\tan^2 x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \xi = 1$$

例题 27.23.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x^2)} - \frac{1}{\sin^2 x} \right]$$

解

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x^2)} - \frac{1}{\sin^2 x} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \ln(1+x^2)}{\ln(1+x^2) \sin^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 + x^2 - \ln(1+x^2)}{x^4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \ln(1+x^2)}{x^4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x + x)(\sin x - x)}{x^4} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^4}{x^4} \\
 &= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot (-\frac{1}{6}x^3)}{x^4} \\
 &= \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

夹逼定理:

$$\xi \in (1+\sin^2 x, 1+x^2) \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1+\sin^2 x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \xi = 1$$

January 10



例题 27.24.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + 2^x)^{\frac{2}{x}}$$

解

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} (x + 2^x)^{\frac{2}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{2 \ln(x+2^x)}{x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(x+2^x)}{x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x+2^x-1)}{x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \ln 2}{x}} \\ &= e^{2+2 \ln 2} \\ &= 4e^2 \end{aligned}$$

例题 27.25.

若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \right)^{\frac{1}{\sin kx}} = e$, 求 k

解

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \right)^{\frac{1}{\sin kx}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\sin kx} \ln \frac{1-\tan x}{1+\tan x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin kx} \ln \left(1 - \frac{2 \tan x}{1 + \tan x} \right)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{2 \tan x}{(1 + \tan x) \sin kx}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{2x}{kx}} \\ &= e^{-\frac{2}{k}} = e \end{aligned}$$

综上所述, $k = -2$

January 11



例题 27.26.

若 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + ax^2 + bx)^{\frac{1}{x^2}} = 1$, 求 a, b

解

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + ax^2 + bx)^{\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln(e^x + ax^2 + bx)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + ax^2 + bx - 1}{x^2}} \quad (\text{Taylor's Formula}) \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+\frac{1}{2})x^2 + (b+1)x + o(x^2)}{x^2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

综上所述, $a = -\frac{1}{2}, b = -1$

例题 27.27.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arctan x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

解

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arctan x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{1-\cos x} \ln \frac{\arctan x}{x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-\cos x} \ln \frac{\arctan x}{x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-\cos x} \ln \left(1 + \frac{\arctan x - x}{x} \right)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-\cos x} \frac{\arctan x - x}{x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{2x^3}{3x^3}} \\ &= e^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

January 12

例题 27.28.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \tan \frac{1}{n} \right)^{n^2}$$



解

归结原理:

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \tan \frac{1}{x} \right)^{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2 \ln(x \tan \frac{1}{x})} \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln(x \tan \frac{1}{x})} \\
 &= e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(\tan t)}{t^2}} \\
 &= e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t - t}{t^3}} \\
 &= e^{\frac{1}{3}}
 \end{aligned}$$

例题 27.29.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right)$$

解

归结原理:

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln(\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{x}))} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln(\frac{1+\tan(\frac{1}{x})}{1-\tan(\frac{1}{x})})} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} e^{\frac{2 \tan t}{t(1-\tan t)}} \\
 &= e^2
 \end{aligned}$$

January 13

例题 27.30.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x - 1}}$$

解

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x(e^x-1)}} \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}} \\
 &= e^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$



例题 27.31.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}}$$

解

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}} \\ &= e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

January 14

例题 27.32.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}}$$

解

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{2x \sin x + \cos 2x - 1}{x^4}} \quad (\text{Taylor's Formula}) \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(x - \frac{x^3}{6}) - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4}{x^4}} \\ &= e^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

例题 27.33.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}}$$

解

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} e^{\frac{\tan x - 1}{\cos x - \sin x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos x(1 - \tan x)}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} -\frac{1}{\cos x}} \\ &= e^{-\sqrt{2}} \end{aligned}$$



27.3 Week III

January 15

例题 27.34.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx})}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$$

解

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx})}{x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + e^{2x} - 1 + \cdots + e^{nx} - 1}{nx}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{n(n+1)x}{2}}{nx}} \\ &= e^{\frac{n+1}{2}} \end{aligned}$$

例题 27.35.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^n}{(x+1)(x+2) \cdots (x+n)} \right)^x$$

解

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{-x} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{-x} \cdots \left(1 + \frac{n}{x} \right)^{-x} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} -x \ln(1 + \frac{1}{x})} e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} -x \ln(1 + \frac{2}{x})} \cdots e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} -x \ln(1 + \frac{n}{x})} \\ &= e^{-1} e^{-2} \cdots e^{-n} \\ &= e^{-\frac{n(n+1)}{2}} \end{aligned}$$

January 16

例题 27.36.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$$

解



$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x})} \\
 &= e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin t + \cos t)}{t}} \\
 &= e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t + \cos t - 1}{t}} \\
 &= e
 \end{aligned}$$

例题 27.37.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[e \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} - 1 \right]$$

解

归结原理:

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[e \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{-x} - 1 \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} x (e^{1-x \ln(1+\frac{1}{x})} - 1) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{1-\frac{\ln(1+t)}{t}} - 1}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} \\
 &= e^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

January 17**例题 27.38.**

设 $a > 0, a \neq 1$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p (a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}}) = \ln a$, 求 p

解

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^p (a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}}) \text{ (Lagrange's Mean Value Theorem)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{x(x+1)} a^\xi \ln a, \xi \in (\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x}) \\
 &= \ln a \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{x(x+1)} \\
 &= \ln a
 \end{aligned}$$



夹逼准则:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \xi = 0$$

综上所述, 我们有: $p = 2$

例题 27.39.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{\cos x})(1 - \sqrt[3]{\cos x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{\cos x})}{(1 - \cos x)^{n-1}}$$

解

等价无穷小:

$$\begin{aligned} x \rightarrow 0, 1 - \sqrt[n]{\cos x} &\sim -(\sqrt[n]{1 + \cos x - 1} - 1) \sim \frac{1 - \cos x}{n} \\ I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{\cos x})(1 - \sqrt[3]{\cos x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{\cos x})}{(1 - \cos x)^{n-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^{n-1}}{n!(1 - \cos x)^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

January 18

例题 27.40.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - x}{\ln(x^2 + e^{2x}) - 2x}$$

解

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - x}{\ln(x^2 + e^{2x}) - 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin^2 x}{e^x} + 1\right)}{\ln\left(\frac{x^2}{e^{2x}} + 1\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin^2 x}{x^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

例题 27.41.

已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} = c$, 其中 k, c 为常数, 且 $c \neq 0$, 求 k, c

解



$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{3x^k} \\ &= c \end{aligned}$$

综上所述: $k = 3, c = \frac{1}{3}$

January 19

例题 27.42.

若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x^3}{x^4} - \frac{f(x)}{x^3} \right) = 2$, $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 x 的:

- A. 等价无穷小
- B. 同阶但非等价无穷小
- C. 高阶无穷小
- D. 低阶无穷小

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x^3}{x^4} - \frac{f(x)}{x^3} \right) x^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{x^2} = 0$$

综上所述, $f(x)$ 是 x 的高阶无穷小

例题 27.43.

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x) = kx^2$ 与 $\beta(x) = \sqrt{1 + x \arcsin x} - \sqrt{\cos x}$ 时等价无穷小, 求 k

解



等价无穷小定义:

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \arcsin x} - \sqrt{\cos x}}{kx^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \arcsin x} - 1}{kx^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{kx^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin x}{2kx^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2kx^2} \\
 &= \frac{3}{4k} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

综上所述, 我们有: $k = \frac{3}{4}$

January 20

例题 27.44.

当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 与 \sqrt{x} 等价的无穷小量为:

- A. $1 - e^{\sqrt{x}}$
- B. $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$
- C. $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$
- D. $1 - \cos \sqrt{x}$

解

$$\left\{
 \begin{array}{l}
 1 - e^{\sqrt{x}} \sim -\sqrt{x} \\
 1 - \cos \sqrt{x} \sim \frac{1}{2}x \\
 \sqrt{1+\sqrt{x}} - 1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x} \\
 \ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} \sim \sqrt{x}
 \end{array}
 \right.$$

因此: $\ln \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} \sim \sqrt{x}$

例题 27.45.

设 $\alpha_1 = x(\cos \sqrt{x} - 1)$, $\alpha_2 = \sqrt{x} \ln(1 + \sqrt[3]{x})$, $\alpha_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1$, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 以上 3 个无穷小量从低阶到高阶的排序为:

- A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
- B. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$



- C. $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3$
- D. $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$

解

$$\begin{cases} \alpha_1 \sim -\frac{1}{2}x^2 \\ \alpha_2 \sim x^{\frac{5}{6}} \\ \alpha_3 \sim \frac{1}{3}x \end{cases}$$

因此: $\alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_1$ **January 21****例题 27.46.**

函数 $f(x) = \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e) \tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的第一类间断点是:

- A. 0
- B. 1
- C. $-\frac{\pi}{2}$
- D. $\frac{\pi}{2}$

解

$f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上无定义的点有 $x = 0, x = 1, x = \pm\frac{\pi}{2}$

- $x \rightarrow 0^+, f(x) \rightarrow 1; x \rightarrow 0^-, f(x) \rightarrow -1$
- $x \rightarrow 1^+, f(x) \rightarrow -\infty; x \rightarrow 1^-, f(x) \rightarrow +\infty$
- $x \rightarrow \frac{\pi^+}{2}, f(x) \rightarrow -\infty; x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}, f(x) \rightarrow +\infty$
- $x \rightarrow -\frac{\pi^+}{2}, f(x) \rightarrow -\infty; x \rightarrow -\frac{\pi^-}{2}, f(x) \rightarrow +\infty$

综上所述, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点, 是第一类间断点

例题 27.47.

设函数 $f(x) = \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x$, 则 $f(x)$ 有

- A. 1 个可去间断点, 1 个跳跃间断点
- B. 1 个可去间断点, 1 个无穷间断点
- C. 2 个跳跃间断点
- D. 2 个无穷间断点



解

 $f(x)$ 在定义域上无定义的点有 $x = 0, x = 1$

- $x \rightarrow 0^+, f(x) \rightarrow 0; x \rightarrow 0^-, f(x) \rightarrow 0$
- $x \rightarrow 1^+, f(x) \rightarrow \sin 1; x \rightarrow 1^-, f(x) \rightarrow -\sin 1$

综上所述, $f(x)$ 有 1 个可去间断点, 1 个跳跃间断点

27.4 Week IV

January 22

例题 27.48.

函数 $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为:

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

解

 $f(x)$ 在定义域上无定义的点有 $x = 0, x = \pm 1$

- $x \rightarrow 0^+, f(x) \rightarrow 1; x \rightarrow 0^-, f(x) \rightarrow -1$
- $x \rightarrow 1^+, f(x) \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}; x \rightarrow 1^-, f(x) \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $x \rightarrow -1^+, f(x) \rightarrow +\infty; x \rightarrow -1^-, f(x) \rightarrow -\infty$

综上所述, $f(x)$ 有 1 个可去间断点, 1 个跳跃间断点, 1 个无穷间断点

例题 27.49.

函数 $f(x) = \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为:

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

解

 $f(x)$ 在定义域上无定义的点有 $x = 0, x = \pm 1$

- $x \rightarrow 0^+, f(x) \rightarrow 1; x \rightarrow 0^-, f(x) \rightarrow 1$
- $x \rightarrow 1^+, f(x) \rightarrow \frac{1}{2}; x \rightarrow 1^-, f(x) \rightarrow \frac{1}{2}$
- $x \rightarrow -1^+, f(x) \rightarrow +\infty; x \rightarrow -1^-, f(x) \rightarrow -\infty$

综上所述, $f(x)$ 有 2 个可去间断点, 1 个无穷间断点

January 23

例题 27.50.

设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$, 讨论函数的间断点, 其结论为:

- A. 不存在间断点
- B. 存在间断点 $x = 1$
- C. 存在间断点 $x = 0$
- D. 存在间断点 $x = -1$

解

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, -1) \\ 0 & x = -1 \\ x+1 & x \in (-1, 1) \\ 1 & x = 1 \\ 0 & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

综上所述, $f(x)$ 存在唯一的跳跃间断点 $x = 1$

例题 27.51.

设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2)}{h^2} = 1$, 则:

- A. $f(0) = 0$ 且 $f'_-(0)$ 存在
- B. $f(0) = 1$ 且 $f'_-(0)$ 存在
- C. $f(0) = 0$ 且 $f'_+(0)$ 存在
- D. $f(0) = 1$ 且 $f'_+(0)$ 存在

解

$f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2)}{h^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{h^2 \rightarrow 0} f(h^2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2)}{h^2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h^2 = 0 \\ f'_+(0) = \lim_{h^2 \rightarrow 0} \frac{f(h^2) - f(0)}{h^2} = 1 \end{cases}$$

综上所述, $f(0) = 0$ 且 $f'_+(0)$ 存在

January 24



例题 27.52.

设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta, \delta)$ 内有定义, 若当 $x \in (-\delta, \delta)$ 时, 恒有 $|f(x)| \leq x^2$, 则 $x = 0$ 必是 $f(x)$ 的:

- A. 间断点
- B. 连续而不可导的点
- C. 可导的点, 且 $f'(0) = 0$
- D. 可导的点, 且 $f'(0) \neq 0$

解

(1). 连续性: $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续

- $|f(x)| \leq x^2, x \in (-\delta, \delta) \Rightarrow |f(0)| \leq 0 \Rightarrow f(0) = 0$
- 夹逼准则: $\lim_{x \rightarrow 0} 0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \xi > 0, |f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

(2). 可导性: $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f'(0) = 0$

- $|f(x)| \leq x^2, x \in (-\delta, \delta) \Rightarrow 0 < \left| \frac{f(x)}{x} \right| < |x|$
- 夹逼准则: $\lim_{x \rightarrow 0} 0 = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{x} \right| = 0$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \xi > 0, \left| \frac{f(x)}{x} \right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$
- $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$

例题 27.53.

设函数 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos \frac{1}{x^\beta}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ ($\alpha > 0, \beta > 0$), 若 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则:

- A. $\alpha - \beta > 1$
- B. $0 < \alpha - \beta \leq 1$
- C. $\alpha - \beta > 2$
- D. $0 < \alpha - \beta \leq 2$

解

$f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, $\alpha > 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta} & x = 0 \\ \alpha x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta} + \beta x^{\alpha-\beta-1} \sin \frac{1}{x^\beta} & x > 0 \end{cases}$$



$$f'(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 1 > 0 \\ \alpha - \beta - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha - \beta > 1$$

January 25

例题 27.54.

曲线 $x + y + e^{2xy} = 0$ 在点 $(0, -1)$ 处的切线方程

解

$$\text{设 } \begin{cases} F(x, y) = x + y + e^{2xy} = 0 \\ y = y(x) \end{cases}$$

$$F'_x + F'_y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 1 + 2ye^{2xy} + (1 + 2xe^{2xy}) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{在 } (0, -1) \text{ 邻域附近, } F'_y \neq 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}|_{(0, -1)} = -\frac{1 + 2ye^{2xy}}{1 + 2xe^{2xy}} = 1$$

综上所述, $(0, -1)$ 处的切线方程为: $x - y - 1 = 0$

例题 27.55.

- (1). 设函数 $u(x), v(x)$ 可导, 利用导数定义证明: $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
- (2). 设函数 $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ 可导, $f(x) = u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$, 写出 $f(x)$ 的求导公式

解

(1). 导数定义: $f(x) = u(x)v(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x + \Delta x)v(x) + u(x + \Delta x)v(x) - u(x)v(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x + \Delta x)v(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x) - u(x)v(x)}{\Delta x} \\ &= v'(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x + \Delta x) + v(x)u'(x) \\ &= u(x)v'(x) + u'(x)v(x) \end{aligned}$$

$$(2). f'(x) = \sum_{i=1}^n u'_i(x) \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} u_j$$

January 26



例题 27.56.

设函数 $f(x) = \begin{cases} \ln \sqrt{x} & x \geq 1 \\ 2x - 1 & x < 1 \end{cases}$, $y = f(f(x))$, 则 $\frac{dy}{dx}|_{x=e}$

解

方法一

$$f(f(x)) = \begin{cases} \ln \frac{\ln x}{2} & x \in [e^2, +\infty) \\ \ln x - 1 & x \in [1, e^2) \\ 4x - 3 & x \in (-\infty, 1) \end{cases}$$

方法二

$$\frac{dy}{dx}|_{x=e} = f'(u)f'(x)|_{u=\ln \sqrt{x}} = 2 \cdot \frac{1}{2e} = \frac{1}{e}$$

综上所述, $\frac{dy}{dx}|_{x=e} = \frac{1}{e}$

例题 27.57.

设 $y = y(x)$ 是由方程 $xy + e^y = x + 1$ 确定的隐函数, 则 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}$

解

令 $F(x, y) = xy + e^y - x - 1 = 0$:

$$F'_x + F'_y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y - 1 + (x + e^y) \frac{dy}{dx} = 0$$

令 $G(x, y) = y - 1 + (x + e^y) \frac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2}(x + e^y) + (1 + e^y \frac{dy}{dx}) \frac{dy}{dx} = 0$$

令 $\begin{cases} \frac{dy}{dx}|_{x=0} = a \\ \frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0} = b \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 0, y = 0 \\ a - 1 = 0 \\ a + b + (1 + a)a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$$

综上所述, $\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0} = -3$



January 27

例题 27.58.

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t - \ln(1+t) \\ y = t^3 + t^2 \end{cases}$ 所确定, 则 $\frac{d^2y}{dx^2}$

解

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{(3t^2 + 2t)(1+t)}{t} = (3t+2)(1+t) \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{(6t+5)(t+1)}{1+t}\end{aligned}$$

例题 27.59.

设 $y = x^2 2^x$, 求 $y^{(n)}$

解

莱布尼茨求导公式:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{i}{n} u^{(i)} v^{(n-i)}, \quad u(x) = x^2, v(x) = 2^x$$

$$\begin{aligned}y^{(n)} &= (x^2 2^x)^n \\ &= \binom{0}{n} (x^2)^{(0)} (2^x)^{(n)} + \binom{1}{n} (x^2)^{(1)} (2^x)^{(n-1)} + \binom{2}{n} (x^2)^{(2)} (2^x)^{(n-2)} \\ &= (\ln 2)^n x^2 2^x + 2n(\ln 2)^{n-1} x 2^x + n(n-1)(\ln 2)^{n-2} 2^x\end{aligned}$$

January 28

例题 27.60.

设 $y = \frac{1}{x^2 - 1}$, 求 $y^{(n)}$

解



$$y = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right]$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x-1} \\ g(x) = \frac{1}{x+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} \\ g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} \end{cases}$$

$$y^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2} \left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right]$$

例题 27.61.

已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数, 且 $f'(x) = [f(x)]^2$, 则当 n 为大于 2 的正整数时, $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是:

- A. $n![f(x)]^{n+1}$
- B. $n[f(x)]^{n+1}$
- C. $[f(x)^{2n}]$
- D. $n![f(x)]^{2n}$

解

$$\begin{cases} f'(x) = [f(x)]^2 \\ f''(x) = 2f(x)f'(x) = 2[f(x)]^3 \\ f^{(3)}(x) = 6[f(x)]^2f'(x) = 2 \cdot 3[f(x)]^4 \\ \dots \\ f^{(n)}(x) = n![f(x)]^{n+1} \end{cases}$$

综上所述, $f^{(n)}(x) = n![f(x)]^{n+1}$

January 29**例题 27.62.**

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且对任意 x_1, x_2 , 当 $x_1 > x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则:

- A. 对任意 $x, f'(x) > 0$
- B. 对任意 $x, f'(-x) \leq 0$
- C. 函数 $f(-x)$ 单调增加
- D. 函数 $-f(-x)$ 单调增加

解

$$f'(x) \geq 0$$

$$\bullet [f(-x)]' = -f'(-x) \leq 0$$



- $[-f(-x)]' = f'(-x) \geq 0$

综上所述: $f(-x)$ 单调递减, $-f(-x)$ 单调递增

例题 27.63.

设 $f(x), g(x)$ 是恒大于零的可导函数, 且 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$, 当 $a < x < b$ 时, 有:

- A. $f(x)g(b) > f(b)g(x)$
- B. $f(x)g(a) > f(a)g(x)$
- C. $f(x)g(x) > f(b)g(b)$
- D. $f(x)g(x) > f(a)g(a)$

解

构造辅助函数: $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in (a, b), F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} < 0$

$F(x)$ 在 (a, b) 内单调递减, $F(a) > F(x) > F(b) \Rightarrow \begin{cases} f(a)g(x) > f(x)g(a) \\ f(x)g(b) > f(b)g(x) \end{cases}$

January 30

例题 27.64.

设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^n} = -1$, 其中 n 为大于 1 的整数, 则在点 $x = a$ 处:

- A. $f(x)$ 的导数存在, 且 $f'(a) \neq 0$
- B. $f(x)$ 取得极大值
- C. $f(x)$ 取得极小值
- D. $f(x)$ 是否取得极值与 n 的取值有关

解

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^n} \lim_{x \rightarrow a} (x - a)^n = 0 \\ f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^n} \lim_{x \rightarrow a} (x - a)^{n-1} = 0 \end{cases}$$

(1). 当 n 为偶数时, $x \in (a - \delta, a), f(x) < f(a); x \in (a, a + \delta), f(x) < f(a), x = a$ 是极大值点

(2). 当 n 为奇数时, $x \in (a - \delta, a), f(x) > f(a); x \in (a, a + \delta), f(x) < f(a), x = a$ 不是极值点

综上所述, $f(x)$ 是否取极值点与 n 的取值有关



例题 27.65.

设 $f(x)$ 的导数在 $x = a$ 处连续, 又 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x - a} = -1$, 则:

- A. $x = a$ 是 $f(x)$ 的极小值点
- B. $x = a$ 是 $f(x)$ 的极大值点
- C. $(a, f(a))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
- D. $x = a$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(a, f(a))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

解

$$\begin{cases} f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x - a} \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = 0 \\ x \in (a - \delta, a), f'(x) > 0 \\ x \in (a, a + \delta), f'(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow f''(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x - a} = -1$$

综上所述, $x = a$ 是 $f(x)$ 的极大值点, $(a, f(a))$ 不是曲线 $f(x)$ 的拐点.

January 31**例题 27.66.**

曲线 $y = (x - 5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为:

解

$$\begin{cases} y' = x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}(x - 5)x^{-\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{5}{3}x - \frac{10}{3}\right) \\ y'' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}\left(\frac{5}{3}x - \frac{10}{3}\right) + \frac{5}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}(x + 1) \end{cases}$$

令 $y''(x) = 0 \Rightarrow x = -1$, 因此拐点坐标 $(-1, -6)$

例题 27.67.

已知函数 $y = f(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$, 若 $f'(x_0) = 0 (x_0 \neq 0)$, 则:

- A. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
- B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
- C. $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
- D. $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(x_0, f(x_0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

解

$$f''(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x} - 3[f'(x)]^2$$

$$\text{当 } f'(x_0) = 0 (x_0 \neq 0) \text{ 时}, f''(x_0) = \frac{1 - e^{-x_0}}{x_0} > 0$$



综上所述, $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 点 $(x_0, f(x_0))$ 不是 $f(x)$ 的拐点.





第 28 章 February

28.1 Week I

February 1

例题 28.1.

设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$ 且 $f'(0) = 0$, 则:

- A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
- B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
- C. $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
- D. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

解

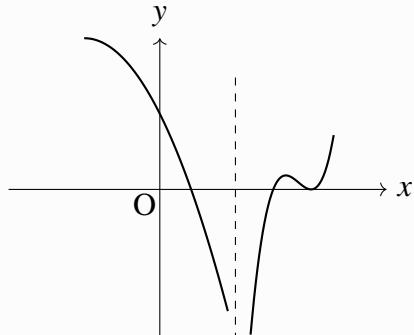
$$f''(x) = x - [f'(x)]^2, f'(0) = 0 \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = 1 - 2f'(x)f''(x), f^{(3)}(0) = 1 \neq 0$$

综上所述: $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, 点 $(0, f(0))$ 是曲线 $f(x)$ 的拐点

例题 28.2.

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 其导函数图形如图所示, 则:



- A. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点
- B. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 3 个拐点
- C. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 1 个拐点
- D. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点

解

$f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有 3 个零点 x_1, x_2, x_3

$$\begin{cases} x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty), f'(x) > 0 \\ x \in (x_1, x_2), f'(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 \text{ 是 } f(x) \text{ 极大值点} \\ x = x_2 \text{ 是 } f(x) \text{ 极小值点} \end{cases}$$

观察函数 $f'(x)$ 的单调性, $f'(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上单调减少; (a, b) 上单调增加, (b, c) 上单调减少; $(c, +\infty)$ 上单调增加; $f(x)$ 有拐点 $(a, f(a))$ 和 $(b, f(b))$ 以及 $(c, f(c))$

综上所述, $f(x)$ 有 2 个极值点和 3 个拐点

February 2**例题 28.3.**

曲线 $y = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right)$ ($x > 0$) 的渐近线方程为:

解

(i). 铅垂渐近线: $x \rightarrow 0, f(x) \rightarrow 0$, 无铅垂渐近线

(ii). 水平渐近线和斜渐进线: $x \rightarrow +\infty, f(x) \rightarrow +\infty$, 无水平渐近线

$$\begin{cases} a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \\ b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = \frac{1}{e} \end{cases}$$

综上所述, $f(x)$ 有且仅有一条斜渐近线: $x - y + \frac{1}{e} = 0$



例题 28.4.

曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 漐近线的条数为:

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

解

令 $f(x) = \frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x-1}, x \neq \pm 1$, 我们有: $\begin{cases} x \rightarrow -1, f(x) \rightarrow \frac{1}{2} \\ x \rightarrow 1^+, f(x) \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow 1^-, f(x) \rightarrow -\infty \end{cases}$

(i). 铅垂渐近线: $x = 1$

(ii). 水平渐近线和斜渐近线: $x \rightarrow \infty, f(x) \rightarrow 1$, 无斜渐近线

综上所述, $f(x)$ 有且仅有 2 条渐近线, 1 条铅垂渐近线, 1 条水平渐近线

February 3**例题 28.5.**

设函数 $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$, 求

- (1). 函数的增减区间及极值
- (2). 函数图像的凹凸区间及拐点
- (3). 渐近线
- (4). 作出其图形

解

令 $f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2} = x + \frac{4}{x^2}, x \neq 0$

(1). $f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2), f'(x) < 0 \\ x \in (2, +\infty), f'(x) > 0 \end{cases}$

$f(x)$ 单调递增区间 $(2, +\infty)$, 单调递减区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, 2)$, $f(x)$ 无极大值, 在 $x = 2$ 处取得极小值 $f(2) = 3$

(2). $f''(x) = \frac{24}{x^4} > 0$, $f(x)$ 在定义域上是凹函数, 无拐点

(3).

(i). 铅垂渐近线: $x \rightarrow 0, f(x) \rightarrow +\infty$, $f(x)$ 有铅垂渐近线 $x = 0$

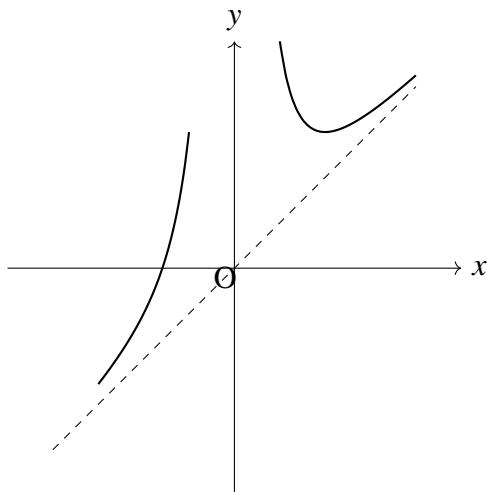


(ii). 水平渐近线和斜渐近线: $x \rightarrow \infty, f(x) \rightarrow \infty$, 无水平渐近线

$$\begin{cases} a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \\ b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = 0 \end{cases} \Rightarrow y = x$$

综上所述, $f(x)$ 有 2 条渐近线, 1 条铅垂渐近线 $x = 0$, 一条斜渐近线 $y = x$

(4). 如下图所示:



例题 28.6.

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内, 方程 $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$:

- A. 无实根
- B. 有且仅有一个实根
- C. 有且仅有两个实根
- D. 有无穷多个实根

解

令 $f(x) = |x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x$, $f(x)$ 是偶函数, 取 $x > 0$, $f(x) = x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{2}} - \cos x$

(i). 当 $x \geq 1$ 时, $f(x) > 0$

(ii). 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \sin x > 0$

$f(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递增

$$\begin{cases} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 2 - \cos 1 \quad \Rightarrow f(x) \text{ 在 } (0, 1) \text{ 内有且仅有1个零点} \\ f(0) \cdot f(1) < 0 \end{cases}$$

综上所述, $f(x)$ 有且仅有 2 个零点, $x_1 \in (-1, 0), x_2 \in (0, 1)$

February 4



例题 28.7.

函数 $f(x) = \ln |(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为:

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

解

令 $g(x) = |(x-1)(x-2)(x-3)|$, $f(x)$ 和 $g(x)$ 同单调性, 令 $h(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

罗尔定理: $\exists x_1 \in (1, 2), x_2 \in (2, 3)$, s.t. $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$

$$\begin{cases} x \in (-\infty, x_1] \cup (x_2, +\infty), f'(x) > 0 \\ x \in (x_1, x_2), f'(x) < 0 \\ f(1) = f(2) = f(3) = 0 \end{cases} \Rightarrow |h(x)| \text{ 在 } x = 1, 2, 3 \text{ 处均不可导}$$

$f(x)$ 的驻点只有 2 个驻点, 分别是 $x = x_1$ 和 $x = x_2$

例题 28.8.

设 $f(x) = x^2(1-x)^2$, 则方程 $f''(x) = 0$ 在 $(0, 1)$ 上:

- A. 无实根
- B. 有且仅有一个实根
- C. 有且仅有两个实根
- D. 有且仅有三个实根

解

$$f'(x) = 2x(x-1)^2 + 2x^2(x-1) = 2x(x-1)(3x-1) \text{ 且 } f'(0) = f'(\frac{1}{3}) = f(1) = 0$$

罗尔定理: $\exists x_1 \in (0, \frac{1}{3}), x_2 \in (\frac{1}{3}, 1)$, s.t. $f''(x_i) = 0$ ($i = 1, 2$)

$f''(x)$ 是一个二次多项式, 至多存在 2 个实数根, 综上, $f''(x)$ 有且仅有 2 个实数根.

February 5**例题 28.9.**

设常数 $k > 0$, 设函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点个数为:

- A. 3
- B. 2
- C. 1



• D. 0

解

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = \frac{e-x}{ex}, x > 0$$

当 $x \in (0, e)$, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (e, +\infty)$, $f'(x) < 0$; $f(x)$ 在 $x = e$ 处取得最大值 $f(e) = k > 0$
且

$$\begin{cases} x \rightarrow 0, f(x) \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow +\infty, f(x) \rightarrow -\infty \end{cases}$$

零点定理: $\exists x_1 \in (0, e), x_2 \in (e, +\infty)$, s.t. $f(x_i) = 0 (i = 1, 2)$

综上所述, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且仅有 2 个零点

例题 28.10.

证明: 当 $x > 0$, $\ln(1 + \frac{1}{x}) > \frac{1}{1+x}$

解

构造辅助函数: $f(x) = \ln x$, $\ln(1 + \frac{1}{x}) = \ln(1+x) - \ln x = f(x+1) - f(x)$

拉格朗日中值定理:

$$f(x+1) - f(x) = \frac{1}{\xi}, \xi \in (x, x+1) \Rightarrow \frac{1}{x+1} < f(x+1) - f(x) < \frac{1}{x}$$

综上所述: $\frac{1}{1+x} < \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x}$

February 6

例题 28.11.

证明: $x > 0$, $\arctan x + \frac{1}{x} > \frac{\pi}{2}$

解

构造辅助函数:

$$f(x) = \arctan x + \frac{1}{x}, f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{(1+x^2)x^2} < 0, x > 0$$

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $f(x) > \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\arctan x + \frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$$



综上所述, $f(x) > \frac{\pi}{2}$

例题 28.12.

设 p, q 是大于 1 的常数, 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 证明: $\forall x > 0, \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q} \geq x$

解

$$\forall x > 0, \frac{1}{p}x^p - x + 1 - \frac{1}{p} \geq 0$$

构造辅助函数: $f(x) = \frac{1}{p}(x^p - 1) - (x - 1), x > 0$

$$\begin{cases} f'(x) = x^{p-1} - 1, p > 1 \\ f''(x) = (p-1)x^{p-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 1), f'(x) < 0 \\ x \in (1, +\infty), f'(x) > 0 \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $x = 1$ 取最小值 $f(x)_{\min} = f(1) = 0$

综上所述, $f(x) \geq 0 \Rightarrow \forall x > 0, \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q} \geq x$

February 7

例题 28.13.

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 在 $(0, 3)$ 内可导, 且 $f(0) + f(1) + f(2) = 3, f(3) = 1$, 证明:

$$\exists \xi \in (0, 3), s.t. f'(\xi) = 0$$

解

不妨设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上最大值为 M , 最小值为 m , 介值定理:

$$\begin{cases} m \leq f(0) \leq M \\ m \leq f(1) \leq M \\ m \leq f(2) \leq M \end{cases}$$

$$m \leq \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3} \leq M \Rightarrow \exists \eta \in (0, 2), s.t. f(\eta) = \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3} = 1$$

罗尔定理:

$$\begin{cases} f(\eta) = 1, \eta \in [0, 2] \\ f(3) = 1 \end{cases} \Rightarrow \exists \xi \in (\eta, 3) \subset (0, 3), s.t. f'(\xi) = 0$$

综上所述, $\exists \xi \in (0, 3), s.t. f'(\xi) = 0$



例题 28.14.

设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有二阶导数, 且 $f(a) = f(b) = 0, f'(a)f'(b) > 0$, 证明:

$$\exists \xi \in (a, b), \eta \in (a, b), \text{ s.t. } f(\xi) = 0, f''(\eta) = 0$$

解

极限保号性: 不妨设 $f'(a) > 0$

$$\begin{cases} f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ f'(b) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (a, a + \delta), f(x) > f(a) = 0, f(x_1) > 0, x_1 \in (a, a + \delta) \\ x \in (b - \delta, b), f(x) < f(b) = 0, f(x_2) > 0, x_2 \in (b - \delta, b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x_1) > 0, x_1 \in (a, a + \delta) \\ f(x_2) > 0, x_2 \in (b - \delta, b) \end{cases} \Rightarrow f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$$

零点定理: $\exists \xi \in (a, b), \text{ s.t. } f(\xi) = 0$

罗尔定理: $f(a) = f(\xi) = f(b) = 0$

$$\begin{cases} \exists x_3 \in (a, \xi), \text{ s.t. } f'(x_3) = 0 \\ \exists x_4 \in (\xi, b), \text{ s.t. } f'(x_4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \exists \eta \in (x_3, x_4), \text{ s.t. } f''(\eta) = 0$$

综上所述, 存在 $\xi \in (a, b)$ 和 $\eta \in (a, b), \text{s.t. } f(\xi) = 0 \text{ 且 } f''(\eta) = 0$

28.2 Week II**February 8****例题 28.15.**

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明:

- (1). $\exists \xi \in (a, b), \text{ s.t. } f'(\xi) + f(\xi) = 0$
- (2). $\exists \eta \in (a, b), \text{ s.t. } f'(\eta) - f(\eta) = 0$
- (3). $\exists \zeta \in (a, b), \text{ s.t. } f'(\zeta) + \lambda f(\zeta) = 0$

解

(1). 构造辅助函数: $g(x) = e^x f(x), g'(x) = e^x [f'(x) + f(x)],$ 且 $g(a) = g(b) = 0$

罗尔定理: $\exists \xi \in (a, b), \text{ s.t. } g'(\xi) = e^\xi [f'(\xi) + f(\xi)] = 0 \Rightarrow f'(\xi) + f(\xi) = 0$

(2). 构造辅助函数: $g(x) = e^{-x} f(x), g'(x) = e^{-x} [f'(x) - f(x)],$ 且 $g(a) = g(b) = 0$

罗尔定理: $\exists \eta \in (a, b), \text{ s.t. } g'(\eta) = e^{-\eta} [f'(\eta) - f(\eta)] = 0 \Rightarrow f'(\eta) - f(\eta) = 0$

(3). 构造辅助函数: $g(x) = e^{\lambda x} f(x), g'(x) = e^{\lambda x} [f'(x) + \lambda f(x)],$ 且 $g(a) = g(b) = 0$



罗尔定理: $\exists \zeta \in (a, b)$, s.t. $g'(\zeta) = e^{\lambda\zeta} [f'(\zeta) + \lambda f(\zeta)] = 0 \Rightarrow f'(\zeta) + \lambda f(\zeta) = 0$

例题 28.16.

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(1) = 0$, 证明:

$$\exists \xi \in (0, 1), \text{ s.t. } \xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$$

解

构造辅助函数: $g(x) = xf(x)$, $g'(x) = f(x) + xf'(x)$, 且 $g(1) = g(0) = 0$

罗尔定理: $\exists \xi \in (0, 1)$, s.t. $g'(\xi) = 0 \Rightarrow \xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$

综上所述, $\exists \xi \in (0, 1)$, s.t. $\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$

February 9

例题 28.17.

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 在开区间 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$, $f(1) = \frac{1}{3}$, 证明:

$$\exists \xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \text{ s.t. } f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2$$

解

构造辅助函数: $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3$, $g(0) = g(1) = 0$, $g'(x) = f'(x) - x^2$

拉格朗日中值定理:

$$\begin{cases} 2[g(\frac{1}{2}) - g(0)] = g'(\xi), \xi \in (0, \frac{1}{2}) \\ 2[g(1) - g(\frac{1}{2})] = g'(\eta), \eta \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \Rightarrow g'(\xi) + g'(\eta) = 0 \Rightarrow f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2$$

综上所述, $\exists \xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, s.t. $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2$

例题 28.18.

设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 a, b 同号, 证明:

$$\exists \xi, \eta \in (a, b), \text{ s.t. } ab f'(\xi) = \eta^2 f'(\eta)$$

解



拉格朗日中值定理:

$$\exists \xi \in (a, b), s.t. \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

柯西中值定理: $g(x) = \frac{1}{x}$

$$\exists \eta \in (a, b), s.t. \frac{ab[f(b) - f(a)]}{a - b} = \eta^2 f'(\eta)$$

综上: $abf'(\xi) = \eta^2 f'(\eta)$

综上所述, $\exists \xi, \eta \in (a, b), s.t. abf'(\xi) = \eta^2 f'(\eta)$

February 10

例题 28.19.

求下列的不定积分

$$(1). \int \frac{1}{\cos x} dx$$

$$(2). \int \frac{1}{\sin x} dx$$

解

(1).

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{1}{1 - \sin^2 x} d(\sin x) \\ &= \int \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 + \sin x} + \frac{1}{1 - \sin x} \right] d(\sin x) \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + C \\ &= \ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| + C \\ &= \ln \left| \sec x + \tan x \right| + C \end{aligned}$$

(2).

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx \\ &= - \int \frac{1}{1 - \cos^2 x} d(\cos x) \\ &= - \int \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x} \right] d(\cos x) \\ &= - \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} + C \\ &= - \ln \left| \frac{1 + \cos x}{\sin x} \right| + C \\ &= - \ln \left| \csc x + \cot x \right| + C \end{aligned}$$



例题 28.20.

求下列的不定积分

$$(1). \int \frac{x+1}{x(1+x e^x)} dx$$

$$(2). \int (1 + \ln x)(\ln x + \ln \ln x) dx$$

解

(1).

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(x+1)e^x}{xe^x(1+xe^x)} dx \\ &= \int \frac{1}{xe^x(1+xe^x)} d(xe^x) \\ &= \int \left[\frac{1}{xe^x} - \frac{1}{1+xe^x} \right] d(xe^x) \\ &= \ln \left| \frac{xe^x}{1+xe^x} \right| + C \end{aligned}$$

(2). 令

$$\begin{cases} f(x) = x \ln x \\ g(x) = \ln x + \ln \ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 1 + \ln x \\ g'(x) = \frac{1 + \ln x}{x \ln x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int f'(x)g(x) dx \\ &= f(x)g(x) - \int g'(x)f(x) dx \\ &= x(\ln x) \ln(x \ln x) - \int (1 + \ln x) dx \\ &= x \ln x [\ln(x \ln x) - 1] + C \end{aligned}$$

February 11

例题 28.21.

求下列的不定积分

$$(1). \int \frac{1+x}{1+x^3} dx$$

$$(2). \int \frac{1-x}{1+x^3} dx$$

解



(1).

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx \\ &= \int \frac{1}{(x - \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

(2).

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1-x+x^2}{1+x^3} dx - \int \frac{x^2}{1+x^3} dx \\ &= \int \frac{1}{1+x} dx - \int \frac{1}{3(1+x^3)} d(x^3) \\ &= \ln |1+x| - \frac{1}{3} \ln |1+x^3| + C \end{aligned}$$

例题 28.22.

求下列的不定积分

(1). $\int \frac{dx}{1+x^3}$

(2). $\int \frac{x}{1+x^3} dx$

解

(1).

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{1+x^3} dx \\ &= \int \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} dx \\ &= \frac{1}{3} \int \left[\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1} \right] dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+x} dx - \frac{1}{6} \int \frac{2x-1}{1+x^2-x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2-x} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln |1+x| - \frac{1}{6} \ln |1+x^2-x| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$



(2).

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{x}{1+x^3} dx \\
 &= \frac{1}{3} \int \left[\frac{x+1}{1+x^2-x} - \frac{1}{1+x} \right] dx \\
 &= \frac{1}{6} \int \frac{2x-1}{1+x^2-x} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2-x} dx \\
 &= \frac{1}{6} \ln |1+x^2-x| - \frac{1}{3} \ln |1+x| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C
 \end{aligned}$$

February 12**例题 28.23.**

已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2 x$, 求 $\int x f'(x) dx$

解

$$\begin{aligned}
 I &= \int x f'(x) dx \\
 &= \int x df(x) \\
 &= x f(x) - \int f(x) dx \\
 &= x f(x) - \ln^2 x + C \\
 &= 2 \ln x - \ln^2 x + C
 \end{aligned}$$

例题 28.24.

设 $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, 求 $\int f(x) dx$

解

$$\begin{aligned}
 f(\ln x) &= \frac{\ln(1+x)}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} \\
 \int f(x) dx &= \int \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} dx \\
 &= \int \ln(1+e^x) d(-e^{-x}) \\
 &= -\frac{\ln(1+e^x)}{e^x} + \int \frac{1}{1+e^x} dx \\
 &= x - \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} - \ln(1+e^x) + C
 \end{aligned}$$



February 13

例题 28.25.

$$\int \max(1, x^2) dx$$

解

$$\max(1, x^2) = \begin{cases} x^2 & x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ 1 & x \in [-1, 1] \end{cases}$$

$$\int \max(1, x^2) dx = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + C - \frac{2}{3} & x \leq -1 \\ x + C & -1 < x < 1 \\ \frac{1}{3}x^3 + C + \frac{2}{3} & x \geq 1 \end{cases}$$

例题 28.26.

设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} \cos^4 x dx, N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^4 x) dx, P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^3 x - \cos^4 x) dx$

- A. $N < P < M$
- B. $M < P < N$
- C. $N < M < P$
- D. $P < M < N$

解

$$\begin{cases} M = 0 \\ N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx > 0 \quad \Rightarrow P < M < N \\ P = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx < 0 \end{cases}$$

February 14

例题 28.27.

设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx, N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx, K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx$

- A. $M > N > K$
- B. $M > K > N$
- C. $K > M > N$



- D. $K > N > M$

解

$$\begin{cases} M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2x+x^2}{1+x^2} dx = \pi \\ N < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \pi \\ K > \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \pi \end{cases} \Rightarrow N < M < K$$

例题 28.28.

设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx$

- A. $I_1 > I_2 > 1$
- B. $1 > I_1 > I_2$
- C. $I_2 > I_1 > 1$
- D. $1 > I_2 > I_1$

解

$$x \in (0, \frac{\pi}{4}), \tan x > x \Rightarrow I_1 > I_2$$

构造辅助函数: $f(x) = \frac{\tan x}{x}$

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{x - \sin x}{x^2 \cos^2 x} > 0 \\ f(x) < f(\frac{\pi}{4}) = \frac{4}{\pi} \end{cases} \Rightarrow I_1 < \frac{\pi}{4} \times \frac{4}{\pi} = 1$$

28.3 Week III

February 15

例题 28.29.

$$\int_{-2}^2 \left[\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \right] dx$$



解

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-2}^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx \\
 &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx \\
 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx \\
 &= 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \\
 &= \pi
 \end{aligned}$$

例题 28.30.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x| [x^3 + \sin^2 x] \cos^2 x dx$$

解

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin^2 x \cos^2 x dx \\
 &= 2 \int_0^{\pi} x \sin^2 x \cos^2 x dx \\
 &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x (1 - \sin^2 x) dx \\
 &= 2\pi \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{4} \\
 &= \frac{\pi^2}{8}
 \end{aligned}$$

February 16

例题 28.31.

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin x} dx$$



解

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^\pi \sqrt{1 - \sin x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sqrt{1 - \sin x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}) dx \\
 &= (2 \sin \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{2}) \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} - (2 \sin \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{2}) \Big|_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi} \\
 &= 4\sqrt{2} - 4
 \end{aligned}$$

例题 28.32.

$$\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{dx}{x \sqrt{\ln x(1 - \ln x)}}$$

解

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x(1 - \ln x)}} \\
 &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2 - (t - \frac{1}{2})^2}} dt \\
 &= \arcsin(2t - 1) \Big|_{t=\frac{1}{2}}^{t=\frac{3}{4}} \\
 &= \frac{\pi}{6}
 \end{aligned}$$

February 17

例题 28.33.

$$\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$



解

$$\begin{aligned}
 I &= 2 \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{2\sqrt{x(1-x)}} dx \\
 &= 2 \int_0^1 \arcsin \sqrt{x} d(\arcsin \sqrt{x}) \\
 &= (\arcsin \sqrt{x})^2 \Big|_{x=0}^{x=1} \\
 &= \frac{\pi^2}{4}
 \end{aligned}$$

February 18

例题 28.34.

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx$$

解

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx \\
 &= - \int_0^1 \ln(1+x) d\frac{1}{x-2} \\
 &= - \frac{\ln(1+x)}{x-2} \Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x-2)} dx \\
 &= \ln 2 + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| \Big|_{x=0}^{x=1} \\
 &= \frac{\ln 2}{3}
 \end{aligned}$$

例题 28.35.

已知函数 $f(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^4} dt$, 则 $\int_0^1 x^2 f(x) dx$ 

解

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x^2 f(x) dx &= \frac{1}{3} \int_0^1 f(x) d(x^3) \\
 &= \frac{1}{3} x^3 f(x) \Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 df(x) \\
 &= -\frac{1}{3} \int_0^1 x^3 \sqrt{1+x^4} dx \\
 &= -\frac{1}{12} \int_0^1 \sqrt{1+x^4} d(x^4) \\
 &= -\frac{1}{18} (1+x^4)^{\frac{3}{2}} \Big|_{x=0}^{x=1} \\
 &= \frac{1}{18} - \frac{\sqrt{2}}{9}
 \end{aligned}$$

February 19

例题 28.36.

已知 $f(x)$ 连续, $\int_0^x t f(x-t) dt = 1 - \cos x$, 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$

解

$$\int_0^x t f(x-t) dt = 1 - \cos x \Rightarrow \int_0^x (x-u) f(u) du = 1 - \cos x$$

$f(x)$ 连续, $\int_0^x f(u) du$ 可导:

$$\int_0^x f(u) du + x f(x) - x f(x) = \sin x \Rightarrow \int_0^x f(u) du = \sin x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

例题 28.37.

设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, 记 $F(x) = \int_0^x f(t) dt (0 \leq x \leq 2)$, 则有:

- A. $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - \frac{x^2}{2} & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

- B. $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{3} + 2x - \frac{x^2}{2} & 1 < x \leq 2 \end{cases}$



- C. $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{7}{6} + 2x - \frac{x^2}{2} & 1 < x \leq 2 \end{cases}$
- D. $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^2}{2} & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

解

$f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 在 $(0, 2)$ 上可导

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{6} & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

February 20

例题 28.38.

设 $x \geq -1$, 求 $\int_{-1}^x (1 - |t|)dt$

解

$$\int_{-1}^x (1 - |t|)dt = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} & -1 \leq x \leq 0 \\ -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} & x > 0 \end{cases}$$

例题 28.39.

设 $x = x(t)$ 由方程 $\sin t - \int_1^{x-t} e^{-u^2} du = 0$ 所确定, 试求 $\frac{d^2x}{dt^2}|_{t=0}$

解

$$\sin t - \int_1^{x-t} e^{-u^2} du = 0 \Rightarrow \cos t = e^{-(x-t)^2} \left[\frac{dx}{dt} - 1 \right]$$

当 $t = 0$ 时, $x = 1$ 且 $\frac{dx}{dt}|_{t=0} = e + 1$

$$-\sin t = -2(x-t)e^{-(x-t)^2} \left[\frac{dx}{dt} - 1 \right]^2 + e^{-(x-t)^2} \frac{d^2x}{dt^2}$$



且 $\begin{cases} t = 0 \\ x = 1 \\ \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = e + 1 \end{cases}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} \Big|_{t=0} = 2e^2$$

February 21**例题 28.40.**

设函数 $f(x) = \int_0^1 |t(t-x)| dt$ ($0 < x < 1$), 求 $f(x)$ 的极值、单调区间及曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间

解

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x t(x-t) dt + \int_x^1 t(t-x) dt \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}, x \in (0, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} f'(x) = x^2 - \frac{1}{2} & x \in (0, 1) \\ f''(x) = 2x & x \in (0, 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}}) & f'(x) < 0 \\ x \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1) & f'(x) > 0 \end{cases}$$

(1). $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 处取极小值 $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{2-\sqrt{2}}{6}$

(2). $f(x)$ 单调递减区间 $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, 单调递增区间 $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$

(3). $f(x)$ 的凹区间 $(0, 1)$, 无凸区间

例题 28.41.

下列反常积分中发散的是:

- A. $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$
- B. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$
- C. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$
- D. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$



解

$$\begin{cases} I_1 = 1 \\ I_2 = \frac{1}{2} \\ I_3 = \frac{\pi^2}{8} \\ I_4 = \ln \sqrt{1+x^2} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} \end{cases}$$

28.4 Week IV

February 22

例题 28.42.

$$\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$$

解

$$\begin{aligned} I &= \int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 3} \\ &= \int_5^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)(x-3)} \\ &= \frac{1}{2} \int_5^{+\infty} \left[\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| \Big|_{x=5}^{x=+\infty} \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

例题 28.43.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{1+x} + e^{3-x}}$$



解

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^{+\infty} \frac{d(e^x)}{e^{2x+1} + e^3} \\
 &= \int_e^{+\infty} \frac{1}{et^2 + e^3} dt \\
 &= \frac{1}{e^2} \arctan \frac{t}{e} \Big|_{t=e}^{t=+\infty} \\
 &= \frac{\pi}{4e^2}
 \end{aligned}$$

February 23

例题 28.44.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2} dx$$

解

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2} dx \\
 &= - \int_0^{+\infty} \ln(1+x) d\left(\frac{1}{1+x}\right) \\
 &= -\frac{\ln(1+x)}{1+x} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x} \frac{1}{1+x} dx \\
 &= -\frac{1}{1+x} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

例题 28.45.

已知抛物线通过 x 轴上的两点 $A(1, 0), B(3, 0)$

- (1). 求证: 两坐标轴与该抛物线所围图形的面积等于 x 轴与该抛物线所围图形的面积
 (2). 计算上述两平面图形绕 x 轴旋转一周所产生的两个旋转体体积之比

解

(1). 设抛物线方程为 $y = a(x-1)(x-3)$, 两坐标轴与抛物线围成的图形面积为 S_1 , x 轴与抛物线围成的图形面积为 S_2

$$\begin{cases} S_1 = \left| \int_0^1 a(x^2 - 4x + 3) dx \right| = \frac{4}{3}|a| \\ S_2 = \left| \int_1^3 a(x^2 - 4x + 3) dx \right| = \frac{4}{3}|a| \end{cases} \Rightarrow S_1 = S_2$$

(2). 设 S_1, S_2 绕 x 轴旋转所成旋转体体积分别为 V_1, V_2 

$$\begin{cases} V_1 = \pi \int_0^1 a^2(x^2 - 4x + 3)^2 dx = \frac{38\pi}{15}a^2 \\ V_2 = \pi \int_1^3 a^2(x^2 - 4x + 3)^2 dx = \frac{16\pi}{15}a^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{19}{8}$$

February 24

例题 28.46.

求心形线 $r = a(1 + \cos \theta)$ ($a > 0$) 所围图形的面积

解

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^\pi r^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi a^2(1 + \cos \theta)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi a^2(2 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi a^2(3 + 2 \cos \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} a^2(3\theta + 2 \sin \theta) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \\ &= \frac{3\pi a^2}{2} \end{aligned}$$

例题 28.47.

已知平面区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}, x \geq 1\}$

- (1). 求 D 的面积
- (2). 求 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积

解

(1). D 的面积为:

$$\begin{aligned} S_D &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx \\ &= \ln \frac{1-\cos x}{\sin x} \Big|_{x=\frac{\pi}{4}}^{x=\frac{\pi}{2}} \\ &= \ln(\sqrt{2}+1) \end{aligned}$$



(2). D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积为:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx \\ &= \pi \int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right] dx \\ &= \pi \left[-\frac{1}{x} - \arctan x \right] \Big|_{x=1}^{x=+\infty} \\ &= \frac{4\pi - \pi^2}{4} \end{aligned}$$

February 25

例题 28.48.

某水库的闸门形状为等腰梯形, 它的两条底边各长 $10m$ 和 $6m$, 高为 $20m$, 较长的底边与水面相齐, 求闸门的一侧所受水的压力

解

$$\begin{aligned} F &= \rho g \int_0^{20} hL(h)dh \\ &= \rho g \int_0^{20} h(10 - \frac{h}{5})dh \\ &= \rho g \left[5h^2 - \frac{h^3}{15} \right] \Big|_{h=0}^{h=20} \\ &= \frac{4400}{3} \rho g \end{aligned}$$

例题 28.49.

一个半径为 $R(m)$ 的球形贮水箱盛满了水, 如果把箱中的水从顶部全部抽出, 需要作的功

解

$$\begin{aligned} W &= \rho g \int_0^{2R} hA(h)dh \\ &= \rho g \int_0^{2R} h\pi(2Rh - h^2)dh \\ &= \pi\rho g \int_0^{2R} (2Rh^2 - h^3)dh \\ &= \pi\rho g \left[\frac{2}{3}Rh^3 - \frac{1}{4}h^4 \right] \Big|_{h=0}^{h=2R} \\ &= \frac{4}{3}\pi\rho g R^4 \end{aligned}$$



February 26**例题 28.50.**

方程 $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$ 的通解

解

$$\begin{aligned} x(1+y^2)dx &= y(x^2-1)dy \\ \Downarrow \\ \frac{x}{x^2-1}dx &= \frac{y}{1+y^2}dy \\ \Downarrow \\ \frac{1}{2}\ln(x^2-1) &= \frac{1}{2}\ln(y^2+1) + \frac{1}{2}\ln C \Rightarrow C(x^2-1) = y^2+1 \end{aligned}$$

例题 28.51.

方程 $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$ 的通解

解

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x(1+y^2) + (1+y^2) = (x+1)(1+y^2) \\ \Downarrow \\ \frac{1}{1+y^2}dy &= (x+1)dx \\ \Downarrow \\ \arctan y &= \frac{x^2}{2} + x + C \end{aligned}$$

February 27**例题 28.52.**

方程 $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$ 满足条件 $y|_{x=1} = 0$ 的特解

解

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + (\frac{y}{x})^2} = \frac{dy}{dx}$$



$$\begin{aligned} \text{令 } \frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux, \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx} \\ u + \sqrt{1+u^2} = u + x \frac{du}{dx} \\ \Downarrow \\ \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{x} dx \\ \Downarrow \\ \ln(u + \sqrt{1+u^2}) = \ln x + \ln C \Rightarrow \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = Cx \end{aligned}$$

例题 28.53.

方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y^4}$ 的通解

解

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} = x \cdot \frac{1}{y} + y^3 \\ \Downarrow \\ \frac{dx}{dy} - x \cdot \frac{1}{y} = y^3 \\ \Downarrow \\ \left[\frac{x}{y} \right]' = y^2 \\ \Downarrow \\ \frac{x}{y} = \frac{y^3}{3} + C \Rightarrow x = \frac{y^4}{3} + Cy \end{aligned}$$

February 28**例题 28.54.**

$$\int \frac{x \ln x + x \ln^2 x}{2 + x \ln x} dx$$



解

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{x \ln x(1 + \ln x)}{2 + x \ln x} dx \\
 &= \int \frac{x \ln x [x \ln x]'}{2 + x \ln x} dx \\
 &= \int \frac{t}{2+t} dt \\
 &= t - 2 \ln(t+2) + C \\
 &= x \ln x - 2 \ln |x \ln x + 2| + C
 \end{aligned}$$

例题 28.55.

$$\int \frac{\sin 2x \sin^2 x}{2 + \cos^4 x} dx$$

解

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{2 \cos x (\cos^2 x - 1)}{2 + \cos^4 x} d(\cos x) \\
 &= \int \frac{2 \cos^3 x - 2 \cos x}{2 + \cos^4 x} d(\cos x) \\
 &= \int \frac{2t^3}{2+t^4} dt - \int \frac{1}{2+(t^2)^2} d(t^2) \\
 &= \frac{1}{2} \ln(2+t^4) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t^2}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \ln(2+\cos^4 x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\cos^2 x}{\sqrt{2}} + C
 \end{aligned}$$

February 29

例题 28.56.

$$\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

解

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{A(\sin x + \cos x) + B(\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx \\
 &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \ln |\sin x + \cos x| + C
 \end{aligned}$$



例题 28.57.

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x(1 + \sin^2 x)} dx$$

解

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + 2 \sin^2 x} d(\tan x) \\
 &= \int \frac{1 - \tan^2 x}{1 + 2 \tan^2 x} d(\tan x) \\
 &= \frac{3}{2} \int \frac{1}{1 + 2t^2} dt - \frac{1}{2} \int dt \\
 &= \frac{3}{2\sqrt{2}} \arctan \sqrt{2}t - \frac{1}{2}t + C \\
 &= \frac{3}{2\sqrt{2}} \arctan \sqrt{2} \tan x - \frac{1}{2} \tan x + C
 \end{aligned}$$





第 29 章 March

29.1 Week I

March 1

例题 29.1.

$$\int \frac{1}{\cos^3 x} dx$$

解

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos x}{\cos^4 x} dx \\ &= \int \frac{1}{(1 - \sin^2 x)^2} d(\sin x) \\ &= \int \frac{1}{(t+1)^2(t-1)^2} dt \\ &= \int \left[\frac{A}{(t+1)} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{C}{(t-1)} + \frac{D}{(t-1)^2} \right] dt \\ &= \int \left[\frac{1}{4} \frac{1}{t+1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{t-1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(t-1)^2} \right] dt \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + \frac{1}{2} \frac{t}{1-t^2} + C \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + C \end{aligned}$$

例题 29.2.

$$\int \frac{2+x}{(1+x^2)^2} dx$$

解 令 $x = \tan u, dx = \frac{1}{\cos^2 u} du, 1+x^2 = \frac{1}{\cos^2 u}$

$$\begin{aligned} I &= \int (2 + \tan u) \cos^4 u \cdot \frac{1}{\cos^2 u} du \\ &= \int (2 \cos^2 u + \sin u \cos u) du \\ &= \int (1 + \cos 2u + \frac{1}{2} \sin 2u) du \\ &= u + \frac{1}{2} \sin 2u - \frac{1}{4} \cos 2u + C \\ &= \arctan x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{4} \frac{1-x^2}{1+x^2} + C \end{aligned}$$

March 2

例题 29.3.

$$\int \frac{\arcsin \sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx$$

解

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\arcsin t + 2 \ln t}{t} \cdot 2t dt \\ &= 2 \int \arcsin t dt + 4 \int \ln t dt \\ &= 2t \arcsin t + 4t \ln t - 4t - 4 \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= 2t \arcsin t + 4t \ln t - 4t + 4\sqrt{1-t^2} + C \\ &= 2\sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + 4\sqrt{1-x} + C \end{aligned}$$

例题 29.4.

$$\int e^x \arcsin \sqrt{1-e^{2x}} dx$$

解 令 $\sqrt{1-e^{2x}} = t, e^x = \sqrt{1-t^2}, x = \ln \sqrt{1-t^2}, dx = \frac{1}{t^2-1} dt$



$$\begin{aligned}
 I &= \int \sqrt{1-t^2} \arcsin t \cdot \frac{t}{t^2-1} dt \\
 &= - \int \frac{t \arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
 &= - \int \frac{u \sin u}{\cos u} \cdot \cos u du \\
 &= \int u d \cos u \\
 &= u \cos u - \sin u + C \\
 &= \sqrt{1-t^2} \arcsin t - t + C \\
 &= e^x \arcsin \sqrt{1-e^{2x}} - \sqrt{1-e^{2x}} + C
 \end{aligned}$$

March 3

例题 29.5.

已知 $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, 求 $\int f(x) dx$

解

$$f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$$

$$\begin{aligned}
 \int f(x) dx &= \int \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} dx \\
 &= \int \ln(1+e^x) d(-e^{-x}) \\
 &= -\frac{\ln(1+e^x)}{e^x} + \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x} \\
 &= -\frac{\ln(1+e^x)}{e^x} + x - \ln(1+e^x) + C
 \end{aligned}$$

例题 29.6.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x \cos^2 x dx$$



解

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin^2 x \cos^2 x dx \\
 &= \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x (1 - \sin^2 x) dx \\
 &= \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \right) \\
 &= \frac{\pi^2}{64}
 \end{aligned}$$

March 4

例题 29.7.

$$\int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx$$

解

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi} 2t^2 \cos t dt \\
 &= \int_0^{\pi} 2t^2 d(\sin t) \\
 &= 2t^2 \sin t \Big|_{t=0}^{t=\pi} - 4 \int_0^{\pi} t \sin t dt \\
 &= 4 \int_0^{\pi} t d(\cos t) \\
 &= 4t \cos t \Big|_{t=0}^{t=\pi} - 4 \int_0^{\pi} \cos t dt \\
 &= -4\pi
 \end{aligned}$$

例题 29.8.

$$\int_0^2 x \sqrt{2x - x^2} dx$$



解 令 $x - 1 = \sin t, t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], dx = \cos t dt$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin t) \cos^2 t dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

March 5

例题 29.9.

$$\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}} dx$$

解

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\sqrt{(1-(x^2)^2)} \right]^3 d(x^2) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\sqrt{1-u^2} \right]^3 du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{3\pi}{32} \end{aligned}$$

例题 29.10.

$$\int_1^2 (x-1)^2(x-2)^2 dx$$



解

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^2 (x-1)^2 [(x-1)-1]^2 d(x-1) \\
 &= \int_0^1 t^2(t-1)^2 dt \\
 &= \int_0^1 (t^4 - 2t^3 + t^2) dt \\
 &= \frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{2} + \frac{t^3}{3} \Big|_{t=0}^{t=1} \\
 &= \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\
 &= \frac{1}{30}
 \end{aligned}$$

March 6

例题 29.11.

$$\int_{-2}^2 x \ln(1 + e^x) dx$$

解

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-2}^2 -x \ln(1 + e^{-x}) \\
 &= - \int_{-2}^2 x \ln(1 + e^x) dx + \int_{-2}^2 x^2 dx \\
 &= -I + \frac{8}{3} \\
 I &= \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

例题 29.12.

设 D 是由曲线 $xy + 1 = 0$ 与直线 $y + x = 0$ 及 $y = 2$ 围成的有界区域, 求 D 的面积

解

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-2}^{-1} (2+x) dx + \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left(2 + \frac{1}{x}\right) dx \\
 &= \left(2x + \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_{-2}^{-1} + \left(2x + \ln|x|\right) \Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{3}{2} - \ln 2
 \end{aligned}$$

March 7



例题 29.13.

设 D 是由曲线 $y = x^2$ 与 $y = x$ 围成的有界区域, 求区域 D 分别绕直线 $y = 0, x = 0, x = 1, x = 2$ 旋转所得旋转体的体积

解

$$\begin{aligned} V_1 &= 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3) dx \\ &= \frac{\pi}{6} \\ V_2 &= \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx \\ &= \frac{2\pi}{15} \\ V_3 &= 2\pi \int_0^1 (1-x)(x-x^2) dx \\ &= \frac{\pi}{6} \\ V_4 &= 2\pi \int_0^1 (2-x)(x-x^2) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

例题 29.14.

方程 $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$ 满足条件 $y(0) = 1, y'(0) = 0$ 的特解

解

特征方程

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

不妨设方程一个特解为 $y^* = Ae^{-2x}x^2$, 代入方程 $A = \frac{1}{2}$

方程通解: $y = \frac{1}{2}x^2e^{-2x} + (C_1 + C_2x)e^{-2x}$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 - 2C_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

综上, 满足条件的特解为 $y = e^{-2x}\left(\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1\right)$

29.2 Week II

March 8



例题 29.15.

具有特解 $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = 2xe^{-x}$, $y_3 = 3e^x$ 的三阶常系数线性齐次方程为:

- A. $y''' - y'' - y' + y = 0$
- B. $y''' + y'' - y' - y = 0$
- C. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$
- D. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

解

例题 29.16.

方程 $y'' - 2y' = xe^{2x}$ 的特解形式为:

- A. $y = axe^{2x}$
- B. $y = (ax + b)e^{2x}$
- C. $y = x(ax + b)e^{2x}$
- D. $y = x^2(ax + b)e^{2x}$

解

March 9

例题 29.17.

方程 $y'' + y = e^x + 1 + \sin x$ 的特解形式为:

- A. $ae^x + b + c \sin x$
- B. $ae^x + b + c \cos x + d \sin x$
- C. $ae^x + b + x(c \cos x + d \sin x)$
- D. $y = ae^x + b + cx \sin x$

解

例题 29.18.

设函数 $f(x)$ 具有一阶连续导数, 且满足 $f(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f'(t) dt + x^2$, 求 $f(x)$ 表达式

解

$$f'(x) = 2x \int_0^x f'(t) dt + x^2 f'(x) - x^2 f'(x) + 2x$$

$$\begin{cases} f'(x) = 2x \left[\int_0^x f'(t) dt + 1 \right] \\ f''(x) = \end{cases}$$



March 10

例题 29.19.

设 L 是一条平面曲线, 其上任意一点 $P(x, y)(x > 0)$ 到坐标原点的距离恒等于该点处切线在 y 轴上的截距, 且 L 经过 $(\frac{1}{2}, 0)$, 求曲线 L 的渐近线方程为

例题 29.20.

二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处:

- A. 不连续
- B. 两个偏导数都不存在
- C. 偏导数存在但不可微
- D. 可微

March 11

例题 29.21.

二元函数 $f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处两个偏导数 $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ 存在, 是 $f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续的:

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 不充分不必要条件

例题 29.22.

已知 $f(x, y) = \sin \sqrt{x^4 + y^4}$

- A. $f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)$ 都存在
- B. $f'_x(0, 0)$ 不存在, $f'_y(0, 0)$ 存在
- C. $f'_x(0, 0)$ 存在, $f'_y(0, 0)$ 不存在
- D. $f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)$ 都不存在

March 12



例题 29.23.

设 $f(x, y) = \frac{2x + y^2}{1 + y^2\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$, 求 $df(0, 0)$

例题 29.24.

已知 $dF(x, y) = xye^x dx + (f(x) + y^2) dy$, 且 $f(x)$ 有连续一阶导数, $f(x) = 0$, 求 $F(x, y)$

March 13

例题 29.25.

设函数 $f(x, y)$ 可微, 且对于任意 x, y 都有 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$, 则下列结论正确的是:

- A. $f(1, 1) > f(0, 0)$
- B. $f(-1, 1) > f(0, 0)$
- C. $f(-1, -1) > f(0, 0)$
- D. $f(1, -1) > f(0, 0)$

例题 29.26.

设 $z = (x + e^y)^x$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(1,0)}$

March 14

例题 29.27.

设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(x + 1)z + y \ln z - \arctan(2xy) = 1$ 确定, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(0,2)}$

例题 29.28.

设 $f(x, y, z) = e^x + y^2z$, 其中 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x + y + z + xyz = 0$ 所确定的隐函数, 求 $f'_x(0, 1, -1)$

29.3 Week III

March 15



例题 29.29.

设 $z = xyf\left(\frac{y}{x}\right)$, 其中 $f(u)$ 可导, 求 $xz'_x + yz'_y$

例题 29.30.

设 $z = e^{xy} + f(x+y, xy)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, 其中 $f(u, v)$ 有二阶连续偏导数

March 16

例题 29.31.

已知 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处取得极小值

- A. $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$
- B. $f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0$, 且 $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$
- C. $f(x_0, y)$ 在 y_0 处取得极大值
- D. $f(x, y_0)$ 在 x_0 处取得极小值

例题 29.32.

设函数 $f(x), g(x)$ 均有二阶连续导数, 满足 $f(0) > 0, g(0) < 0$, 且 $f'(0) = g'(0) = 0$, 则函数 $z = f(x)g(y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取得极小值的一个充分条件

- A. $f''(0) < 0, g''(0) > 0$
- B. $f''(0) < 0, g''(0) < 0$
- C. $f''(0) > 0, g''(0) > 0$
- D. $f''(0) > 0, g''(0) < 0$

March 17

例题 29.33.

已知函数 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = (ay - x^2)dx + (ax - y^2)dy$, ($a > 0$), 函数 $f(x, y)$

- A. 无极值点
- B. 点 (a, a) 为极小值点
- C. 点 (a, a) 为极大值点
- D. 是否有极值点与 a 的取值有关



例题 29.34.

设函数 $z = f(xy, yg(x))$, 其中 f 函数具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导且在 $x = 1$ 处取得极值 $g(1) = 1$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}|_{(1,1)}$

March 18

例题 29.35.

求函数 $f(x, y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值

例题 29.36.

求 $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$ 在椭圆域 $D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$ 上的最大值和最小值

March 19

例题 29.37.

交换二次积分的积分次序 ($a > 0$)

$$(1). \int_0^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}}^{3-x} f(x, y) dy$$

$$(2). \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{ay}} f(x, y) dx + \int_a^{2a} dy \int_0^{2a-y} dx$$

例题 29.38.

设 $f(x)$ 是连续函数, 则 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx$ 等价于:

- A. $\int_0^1 dx \int_0^{x-1} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$
- B. $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x, y) dy$
- C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$
- D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

March 20



例题 29.39.

设函数 $f(t)$ 连续, 则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^2 f(r^2) r dr$

- A. $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} f(x^2+y^2) dy$
- B. $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2+y^2) dy$
- C. $\int_0^2 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{x^2+y^2} f(x^2+y^2) dx$
- D. $\int_0^2 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x^2+y^2) dx$

例题 29.40.

计算二重积分

$$(1). \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (2x+3y)^2 d\sigma$$

$$(2). \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx$$

$$(3). \int_0^1 dy \int_y^1 \sqrt{x^2-y^2} dx$$

$$(4). \int_0^1 dy \int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^3} \right) dx$$

$$(5). \iint_D (xy^5 - 1) dx dy, D = \left\{ (x, y) \mid -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \sin x \leq y \leq 1 \right\}$$

$$(6). \iint_D x^2 y dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 是由双曲线 } x^2 - y^2 = 1 \text{ 以及直线 } y = 0, y = 1 \text{ 所围成的平面区域}$$

$$(7). \iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy, D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq x, x^2+y^2 \leq 2x \right\}$$

$$(8). \iint_D r^2 \sin \theta \sqrt{1-r^2 \cos 2\theta} dr d\theta, D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

March 21

引理 29.3.1 (估值定理)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n f(x) dx$$

其中 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续可导

$f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续可导 $\Rightarrow |f(x)| \leq M$, M 是 $|f(x)|$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值



$$0 \leq \int_0^1 x^n f(x) dx \leq \int_0^1 M x^n dx = \frac{M}{n+1}$$

夹逼准则:

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M}{n+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n f(x) dx = 0$$

$$\begin{cases} \sin x < x \\ \ln(1+x) < x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sin^n x f(x) dx = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln^n(1+x) f(x) dx = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 n x^n f(x) dx$$

其中 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续可导

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (n+1)x^n f(x) dx - \int_0^1 x^n f(x) dx \\ &= \int_0^1 f(x) d(x^{n+1}) - \int_0^1 x^n f(x) dx \\ &= f(x)x^{n+1} \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx \\ &= f(1) - \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} I &= f(1) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx = f(1) \end{aligned}$$



例题 29.41.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{n x^n}{1 + e^x} dx$$

解

$$\text{令: } f(x) = \frac{1}{1 + e^x}$$

lem :29.3.1

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{n x^n}{1 + e^x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 n x^n f(x) dx = f(1) = \frac{1}{1 + e}$$

例题 29.42.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right]$$



解

$$\begin{cases} x \rightarrow 0 & \sqrt{1+x^2} - 1 \sim \frac{1}{2}x^2 \\ x \rightarrow 0 & \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \sim x \end{cases}$$

$$f(x) = \ln x \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} I &= -\frac{f(x + \sqrt{1+x^2}) - f(1+x)}{x^2} \\ &= -\frac{1 + \sqrt{1+x^2} - x}{x^2} f'(\xi) \\ &= -\frac{1}{2} f'(\xi) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x^2} - x) = 1 \end{cases}$$

夹逼定理：

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(\xi) = 1$$

$$\text{综上, } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right] = -\frac{1}{2}$$

29.4 Week IV

March 22

例题 29.43.

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2 + \sin 2x}} dx$$

解

$$\begin{cases} I = A(\sin x + \cos x) \\ J = B(\cos x - \sin x) \\ I + J = \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{I+J}{\sqrt{1+(\sin x + \cos x)^2}} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1+(\sin x + \cos x)^2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{1+(\sin x + \cos x)^2}} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{3-(\sin x - \cos x)^2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{1+(\sin x + \cos x)^2}} dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[\arcsin \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{3}} - \ln \left(\sin x + \cos x + \sqrt{1+(\sin x + \cos x)^2} \right) \right] + C
 \end{aligned}$$

例题 29.44.

$$\int_{\frac{1}{6}}^{+\infty} \frac{1}{x} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \right] dx$$

解

$$\begin{cases} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \right] = 0, & x \geq 1 \\ \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \right] = 1, & \frac{1}{4} \leq x \leq 1 \\ \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \right] = 2, & \frac{1}{6} \leq x \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\int_{\frac{1}{6}}^{+\infty} \frac{1}{x} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \right] dx = \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{4}} \frac{2}{x} dx + \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{x} dx = 2 \ln 3$$

March 23

例题 29.45.

已知函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin x^2 \cos y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 求 $f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)$

解

$$\begin{cases} f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, 0) - f(x, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x)^2}{|\Delta x| \Delta x} \\ f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, y + \Delta y) - f(0, y)}{\Delta y} = 0 \end{cases}$$

综上, $f'_x(0, 0)$ 不存在, $f'_y(0, 0) = 0$ 

例题 29.46.

设 $z = e^{xy} + f(x+y, xy)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, 其中 $f(u, v)$ 有二阶连续偏导数

解

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 1 \\ \frac{\partial v}{\partial y} = y \\ \frac{\partial v}{\partial x} = x \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = y e^{xy} + f'_1(x+y, xy) + y f'_2(x+y, xy)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= e^{xy} + xye^{xy} \\ &+ f''_{11}(x+y, xy) + xf''_{12}(x+y, xy) \\ &+ f'_2(x+y, xy) + y [f''_{21}(x+y, xy) + xf''_{22}(x+y, xy)] \\ &= (1+xy)e^{xy} + f'_2(x+y, xy) + f''_{11}(x+y, xy) + xyf''_{22}(x+y, xy) + (x+y)f''_{12}(x+y, xy) \end{aligned}$$

March 24

例题 29.47.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^4} \prod_{k=1}^{2n} (n^2 + k^2)^{\frac{1}{n}}$$

解

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \ln \left(\prod_{k=1}^{2n} (n^2 + k^2) \right) - 4 \ln n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \ln n^{4n} \left[\prod_{k=1}^{2n} \left(1 + \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right) \right] - 4 \ln n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \ln \left[\prod_{k=1}^{2n} \left(1 + \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right) \right]} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \ln \left[1 + \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right]} \\ &= e^{\int_0^2 \ln(1+x^2) dx} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\int_0^2 \ln(1+x^2) dx &= x \ln(1+x^2) \Big|_{x=0}^{x=2} - \int_0^2 \left(2 - \frac{2}{1+x^2}\right) dx \\&= 2 \ln 5 - 4 + 2 \arctan 2 \\I &= 25e^{2\arctan 2-4}\end{aligned}$$

例题 29.48.

设连续函数 $z = f(x, y)$ 满足 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0$, 求 $dz|_{(0,1)}$

解

$$\begin{cases} f(0, 1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} f(x, y) \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} f(x, y) - 2x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow f(0, 1) = 1$$

函数 $z = f(x, y)$ 在 $(0, 1)$ 邻域内有定义, $z = f(x, y)$ 在 $(0, 1)$ 处全增量

$$\Delta z = f(x, y) - f(0, 1) = 2(x - 0) - (y - 1) + o(\sqrt{x^2 + (y-1)^2})$$

$z = f(x, y)$ 在 $(0, 1)$ 处可微, 且 $dz|_{(0,1)} = 2dx - dy$

March 25**引理 29.4.1 (特殊反常积分)**

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \begin{cases} p > 1 & \text{收敛} \\ p \leq 1 & \text{发散} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx \begin{cases} 0 < p < 1 & \text{收敛} \\ p \geq 1 & \text{发散} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p} dx \begin{cases} 0 < p < 1 & \text{收敛} \\ p \geq 1 & \text{发散} \end{cases}$$

例题 29.49.

反常积分 $\int_0^1 x^a (1-x)^b \ln x dx$ 收敛, 求 a, b 取值范围

解

可能的瑕点为 $x = 0$ 和 $x = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow 1^- \quad f(x) = x^a(1-x)^b \ln x \sim -(1-x)^{b+1} \Rightarrow \begin{cases} b \leq -2 & \text{瑕点且发散} \\ -2 < b < -1 & \text{瑕点且收敛} \\ b \geq -1 & \text{非瑕点} \end{cases} \\ x \rightarrow 0^+ \quad f(x) = x^a(1-x)^b \ln x \sim x^a \ln x \Rightarrow \begin{cases} a > 0 & \text{非瑕点} \\ -1 < a \leq 0 & \text{瑕点且收敛} \\ a \leq -1 & \text{瑕点且发散} \end{cases} \end{array} \right.$$

(1). $x = 1$ 和 $x = 0$ 均为瑕点

$$\begin{cases} -2 < b < -1 \\ -1 < a \leq 0 \end{cases}$$

(2). $x = 1$ 是瑕点, $x = 0$ 不是瑕点

$$\begin{cases} a > 0 \\ -2 < b < -1 \end{cases}$$

(3). $x = 0$ 是瑕点, $x = 1$ 不是瑕点

$$\begin{cases} -1 < a \leq 0 \\ b \geq -1 \end{cases}$$

例题 29.50.

$$\int \frac{x^2}{(x \cos x - \sin x)(x \sin x + \cos x)} dx$$

解

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x \cos x(x \cos x - \sin x) + x \sin x(x \sin x + \cos x)}{(x \cos x - \sin x)(x \sin x + \cos x)} dx \\ &= \int \frac{x \cos x}{x \sin x + \cos x} dx - \int \frac{-x \sin x}{x \cos x - \sin x} dx \\ &= \int \frac{(x \sin x + \cos x)'}{x \sin x + \cos x} dx - \int \frac{(x \cos x - \sin x)'}{x \cos x - \sin x} dx \\ &= \ln |x \sin x + \cos x| - \ln |x \cos x - \sin x| + C \\ &= \ln \left| \frac{x \sin x + \cos x}{x \cos x - \sin x} \right| + C \end{aligned}$$

March 26



例题 29.51.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x^2 + \frac{1}{2})^2} dx$$

解

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{4e^{-x^2}}{(2x^2 + 1)^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{2x} d\left(\frac{4x^2}{2x^2 + 1}\right) \\ &= \frac{e^{-x^2}}{2x} \frac{4x^2}{2x^2 + 1} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \\ &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{-x^2}}{2x^2 + 1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2}}{2x + \frac{1}{x}} = 0 \end{cases}$$

March 27

例题 29.52.

已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 5$, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

解

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots = 2 \\ \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1} = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} + \cdots = 5 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n = 3$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n} = 8$$

例题 29.53.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x(1 + \ln^2 x)} dx$$

解



$$\begin{cases} t = \frac{1}{x} \\ x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{1}{t^2} dt \end{cases} \Rightarrow I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan \frac{1}{t}}{t(1 + \ln^2 t)} dt$$

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{+\infty} \frac{\arctan \frac{1}{x}}{x(1 + \ln^2 x)} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x(1 + \ln^2 x)} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\arctan \frac{1}{x} + \arctan x}{x(1 + \ln^2 x)} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2x(1 + \ln^2 x)} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + \ln^2 x)} d(\ln x) \\ &= \frac{\pi}{2} \arctan(\ln x) \Big|_{x=0}^{x=+\infty} \\ &= \frac{\pi^2}{2} \\ I &= \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

March 28

例题 29.54.

$$\int \frac{2x^4}{1+x^6} dx$$

解

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^4 - 1}{1+x^6} dx + \int \frac{x^4 + 1}{1+x^6} dx \\ &= \int \frac{x^2 - 1}{1+x^4 - x^2} dx + \int \frac{x^4 - x^2 + 1}{1+x^6} dx + \int \frac{x^2}{1+x^4 - x^2} dx \\ &= \int \frac{x^2 - 1}{1+x^4 - x^2} dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+(x^3)^2} d(x^3) \\ &\quad \begin{cases} I_1 = \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+(x^3)^2} d(x^3) = \frac{1}{2} \arctan x^3 \\ I_2 = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \end{cases} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int \frac{x^2 - 1}{1 + x^4 - x^2} dx = \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} dx \\
 &= \int \frac{1}{(x + \frac{1}{x})^2 - 3} d(x + \frac{1}{x}) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x + \frac{1}{x} - \sqrt{3}}{x + \frac{1}{x} + \sqrt{3}} \right|
 \end{aligned}$$

$$\text{综上, } I = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x + \frac{1}{x} - \sqrt{3}}{x + \frac{1}{x} + \sqrt{3}} \right| + \arctan x + \frac{1}{3} \arctan x^3 + C$$

例题 29.55.

判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (1 - \cos \frac{\alpha}{n}) (\alpha > 0)$ 敛散性

解

$$n \rightarrow +\infty, 1 - \cos \frac{\alpha}{n} \sim \frac{\alpha^2}{2n^2}$$

比较判别法极限形式:

级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - \cos \frac{\alpha}{n}) (\alpha > 0)$ 和级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^2}{2n^2} (\alpha > 0)$ 敛散性相同, 绝对收敛

March 29

例题 29.56.

设 $u_n = (-1)^n \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$, 判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 和级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ 的敛散性

解(1). 判断交错级数 u_n 敛散性

$$\begin{cases} \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}) \text{ 单调递减} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{级数 } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ 收敛}$$

(2). 判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ 敛散性

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})}{\frac{1}{n}} = 1$$

比较判别法极限形式:



级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ 和级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ 同敛散性, 级数发散

例题 29.57.

已知 $y^2(x - y) = x^2$, 求 $\int \frac{1}{y^2} dx$

解

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = t \\ xt^2(1-t) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{t^2(1-t)} \\ y = \frac{1}{t(1-t)} \\ dx = \frac{3t^2 - 2t}{t^4(1-t)^2} dt \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{y^2} dx \\ &= \int \frac{3t^2 - 2t}{t^2} dt \\ &= 3t - 2 \ln |t| + C \\ &= \frac{3y}{x} - 2 \ln \left| \frac{y}{x} \right| + C \end{aligned}$$

March 30

引理 29.4.2 (对称积分变换)

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx$$



例题 29.58.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{1 + \cos x - \sin x} dx$$

解

lem : 29.4.2

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\cos^3 x}{1 + \cos x - \sin x} \\ f(-x) = \frac{\cos^3 x}{1 + \cos x + \sin x} \end{cases} \Rightarrow \{f(x) + f(-x) = \cos^2 x\}$$



$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{1 + \cos x - \sin x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

例题 29.59.

已知级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛, 求 α 取值范围

解

$$n \rightarrow +\infty, \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$$

p 级数敛散性

$$\begin{cases} \alpha - \frac{1}{2} > 1 \\ 2 - \alpha > 0 \\ 2 - \alpha \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2} < \alpha < 2$$

March 31

例题 29.60.

求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 的和函数

解

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 0$$

幂级数收敛域为 \mathbb{R} , 不妨设幂级数和函数为 $S(x)$

$$\begin{cases} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n!} x^{2n} \end{cases} \Rightarrow S(x) + S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$S(x) + S'(x) = e^x, S(0) = 0 \Rightarrow S(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



例题 29.61.

求二重积分 $\iint_D y^2 dx dy$ 和 $\iint_D (x + 2y) dx dy$, 其中 D 是由参数方程 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$

解

积分区域 D 是摆线, $y = y(x), x \in [0, 2\pi a]$

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

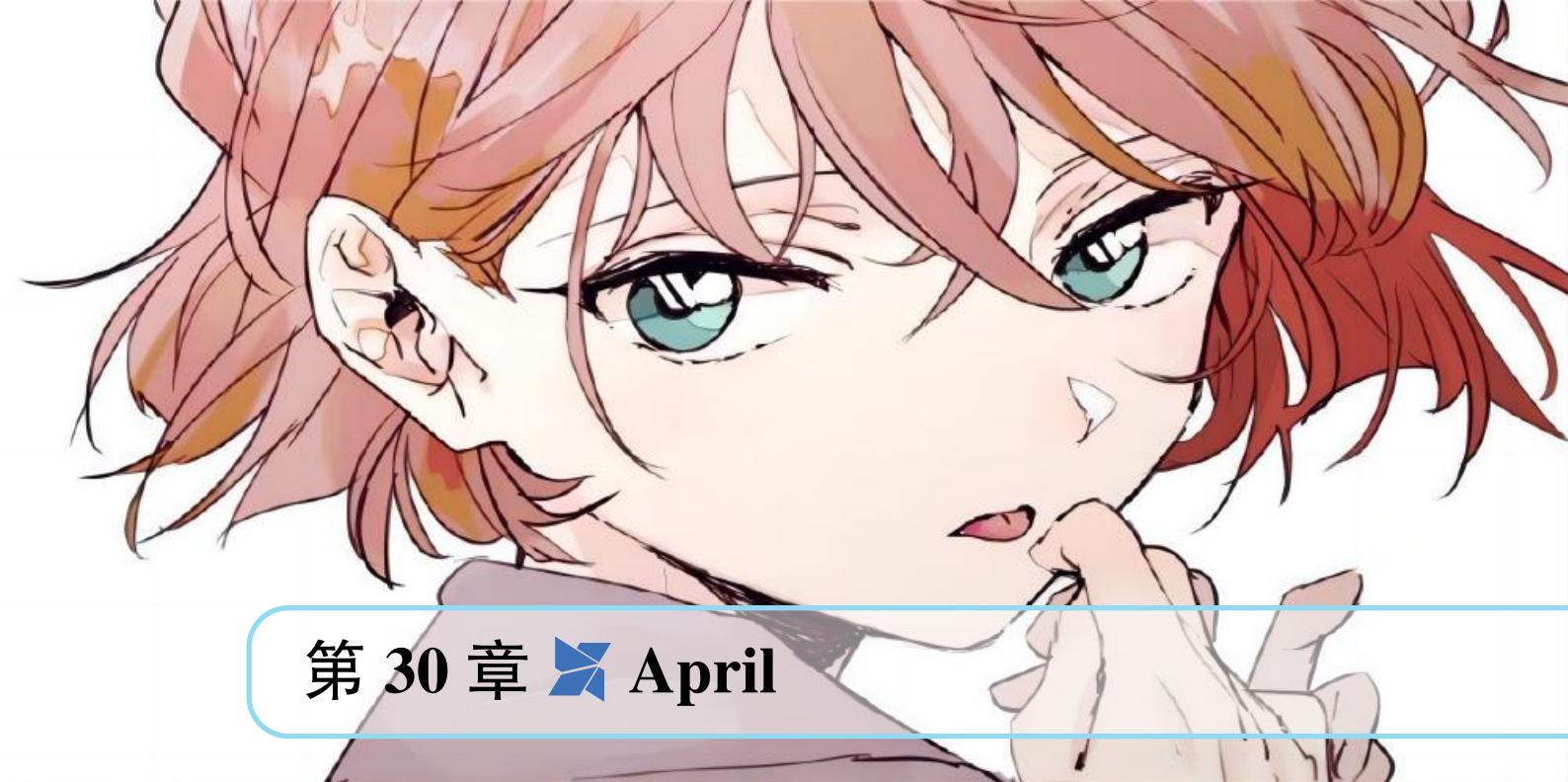
(1).

$$\begin{aligned} \iint_D y^2 dx dy &= \int_0^{2\pi a} dx \int_0^{y(x)} y^2 dy \\ &= \int_0^{2\pi a} \frac{1}{3} y^3(x) dx \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} a^3 (1 - \cos t)^3 (a - a \cos t) dt \\ &= \frac{2a^4}{3} \int_0^\pi (2 \sin^2 u)^4 du \\ &= \frac{4a^4}{3} \times 16 \times \frac{7}{8} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{35a^4 \pi}{12} \end{aligned}$$

(2).

$$\begin{aligned} \iint_D (x + 2y) dx dy &= \int_0^{2\pi a} dx \int_0^{y(x)} (x + 2y) dy \\ &= \int_0^{2\pi a} [y^2(x) + xy(x)] dx \\ &= \int_0^{2\pi} [y^2(t) + x(t)y(t)] (a - a \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} a^3 (1 - \cos t)^3 dt + \int_0^{2\pi} a^3 (1 - \cos t)^2 (t - \sin t) dt \\ &= 2a^3 \int_0^\pi (2 \sin^2 u)^3 du + a^3 \int_{-\pi}^\pi (1 + \cos u)^2 (u + \pi + \sin u) du \\ &= 4a^3 \times 8 \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \\ &\quad + 2a^3 \pi \int_0^\pi (1 + \cos u)^2 du \\ &= (5\pi + 3\pi^2)a^3 \end{aligned}$$





第 30 章 April

30.1 Week I

April 1

例题 30.1.

判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sin(n+k) \right]$ 敛散性

解

$$\text{设 } a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}, u_n < a_n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 部分和 } S_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$$

原级数绝对收敛。

例题 30.2.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2(\sec x - 1)} - \sqrt[3]{6(x - \sin x)}}{\int_0^{x^2} \arctan(e^{\sqrt{t}} - 1) dt}$$

解

对于变上限积分，当 $x \rightarrow 0$, $g(x) \rightarrow 0$, $h(x) \rightarrow 0$, 我们有：

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{g(x)} h(t) dt \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{G(x)} H(t) dt, x \rightarrow 0, f(x) \sim F(x), h(x) \sim H(x)$$



我们得到原极限等价于:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2(\sec x - 1)} - \sqrt[3]{6(x - \sin x)}}{\frac{2}{3}x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2(\sec x - 1)} - \sqrt{2\frac{1}{2}x^2} + \sqrt[3]{6\frac{1}{6}x^3} - \sqrt[3]{6(x - \sin x)}}{\frac{2}{3}x^3}$$

前一个极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2(\sec x - 1)} - \sqrt{2\frac{1}{2}x^2}}{\frac{2}{3}x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(\sec x - 1 - \frac{1}{2}x^2)}{\frac{2}{3}x^3(\sqrt{2(\sec x - 1)} + x)}$$

我们有: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2(\sec x - 1)} + x}{2x} = 1$

前一个极限:

$$I_1 = \frac{3}{2} \frac{1 - \cos x - \frac{1}{2}x^2 \cos x}{x^4 \cos x} = \frac{5}{16}$$

同理可得:

$$I_2 = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{2} \frac{\sqrt[3]{6\frac{x - \sin x}{x^3}} - 1}{x^2} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \frac{6(x - \sin x) - x^3}{x^5} = \frac{1}{40}$$

原极限为: $I = I_1 + I_2 = \frac{27}{80}$

April 2

例题 30.3.

级数 $\sum_{n=2}^{+\infty} [\sin \frac{1}{n} - k \ln(1 - \frac{1}{n})]$ 收敛, 求 k 的值

解

泰勒公式和级数的比较判别法极限形式

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{n} - k \ln(1 - \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - k \ln(1 - x)}{x}$$

分子利用泰勒展开式得到:

$$x \rightarrow 0, \sin x - k \ln(1 - x) \sim x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + kx + k \frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim (1 + k)x + o(x)$$

我们得到:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{n} - k \ln(1 - \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1 + k$$

当且仅当 $k = -1$ 时, 级数收敛, 因为当 $k \neq -1$ 时, 原级数敛散性和 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ 一致, 级数发散.



例题 30.4.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \right)^3 dx$$

解

原定积分:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{-\sin x}{\cos x} \right)^3 dx = - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x dx$$

令 $\tan x = t, x = \arctan t, dx = \frac{1}{1+t^2} dt, t \in [0, 1]$, 原定积分为:

$$I = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt^2 = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t}{1+t} dt = \frac{\ln 2 - 1}{2}$$

April 3

例题 30.5.

级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|, \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n, \sum_{n=1}^{+\infty} a_n a_{n+1}$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 敛散性

解

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n} \quad b_n = (-1)^n \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

 a_n 收敛, $|a_n|$ 发散; a_n 收敛, $(-1)^n a_n$ 发散; b_n 收敛, $b_n b_{n+1}$ 发散;

例题 30.6.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x - \cos x} dx$$

解

原定积分内有瑕点, 原积分等价于:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x - \cos x} dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x - \cos x} dx$$

我们有: $\int \frac{1}{\sin x - \cos x} dx = \ln \left| \frac{1 - \cos(x - \frac{\pi}{4})}{\sin(x - \frac{\pi}{4})} \right| + C$

我们可以得到原反常积分发散.

April 4



例题 30.7.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\cot x}{e^{-2x}} + \frac{1}{e^{-x} \sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

解

原极限等价于：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^x - \frac{1}{2} x^2 \sin 2x e^{2x} - \sin^2 x}{x^4} = -\frac{7}{6}$$

例题 30.8.

判断下列命题是否正确

(i). $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{2n+1} + u_{2n})$ 收敛, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ 收敛

(ii). $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 则 $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ 发散

解

(i). $u_n = (-1)^n$, 第一个排除

(ii). 正项级数比较判别法

April 5

例题 30.9.

$$(1 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n \sqrt{3}, \text{ 求 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

解

我们有：

$$(1 + \sqrt{3})^{n+1} = (1 + \sqrt{3})^n (1 + \sqrt{3}) = (a_n + b_n \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})$$

我们得到：

$$(a_n + 3b_n) + (a_n + b_n)\sqrt{3} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

我们化简得：

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{\frac{a_n}{b_n} + 3}{\frac{a_n}{b_n} + 1}$$

不妨设 $x_n = \frac{a_n}{b_n}$, 我们有 $x_{n+1} = 1 + \frac{2}{x_n + 1}$, $x_1 = 1$ 因为 $1 < x_1 < \sqrt{3}$, $x_n > 1$, 我们得到：

$$0 < |x_{n+1} - \sqrt{3}| = \left| 1 + \frac{2}{x_n + 1} - \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3} + 1} \right) \right| = \frac{2}{(x_n + 1)(\sqrt{3} + 1)} |x_n - \sqrt{3}|$$



化简得:

$$0 < |x_{n+1} - \sqrt{3}| < \frac{1}{\sqrt{3} + 1} |x_n - \sqrt{3}| = \frac{1}{(\sqrt{3} + 1)^{n-1}} a_1$$

夹逼定理得到: $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n - \sqrt{3}| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{3}$

例题 30.10.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}$$

解

令 $x = \sec t, t \in [1, \frac{\pi}{2}], dx = \tan t \sec t dt$, 我们有:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t \tan t}{\sec^2 t \tan t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 1$$

April 6

例题 30.11.

$$\int_0^1 \frac{x dx}{(2-x^2) \sqrt{1-x^2}}$$

解

令 $x = \sin t, t \in [0, \frac{\pi}{2}], dx = \cos t dt$, 我们有:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \cos t}{(2-\sin^2 t) \cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{2-\sin^2 t} dt = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \cos t}{\cos^2 t + 1} = -\arctan(\cos t)|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\arctan(\cos \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}$$

例题 30.12.

$y = x^2$ 与 $y = mx$ 围成的部分绕着 $y = mx (m > 0)$ 旋转一周得到的旋转体体积 V

解

$$V = \int_0^L \pi r^2 dl = \int_0^m \pi r^2 \sqrt{1+m^2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}} \int_0^m x^2 (m-x)^2 dx = \frac{m^5 \pi}{30 \sqrt{1+m^2}}$$

April 7

例题 30.13.

$f(x)$ 在 $(2, 4)$ 上二阶导数连续, $f(3) = 0$, 求证: $f''(\varepsilon) = 3 \int_2^4 f(x) dx$

解

设 $F(x) = \int_2^x f(x) dx$, 原命题转化为证明:

已知 $F(2) = 0, F'(3) = 0$, 求证 $F'''(\varepsilon) = 3F(4)$



$F(x)$ 在 $x = 3$ 处的泰勒展开式为:

$$F(x) = F(3) + F'(3)(x - 3) + \frac{F''(3)}{2}(x - 3)^2 + \frac{F'''(\varepsilon_1)}{6}(x - 3)^3$$

我们得到:

$$\begin{cases} F(2) = F(3) - F'(3) + \frac{F''(3)}{2} - \frac{F'''(\varepsilon_1)}{6}, \varepsilon_1 \in (2, 3) \\ F(4) = F(3) + F'(3) + \frac{F''(3)}{2} + \frac{F'''(\varepsilon_2)}{6}, \varepsilon_2 \in (3, 4) \end{cases}$$

$$\text{我们得到: } F(4) = \frac{F'''(\varepsilon_1) + F'''(\varepsilon_2)}{6}$$

由平均值定理得到:

$$\exists \varepsilon_3 \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2), s.t F'''(\varepsilon_3) = \frac{F'''(\varepsilon_1) + F'''(\varepsilon_2)}{2}$$

$$\text{我们得到: } F(4) = \frac{F'''(\varepsilon_3)}{3}, \text{ 证毕}$$

例题 30.14.

$f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 0$, 其反函数为 $g(x)$, 若 $\int_0^{f(x)} g(t)dt = x^2 e^x$, 求 $f(x)$

解

我们对 $\int_0^{f(x)} g(t)dt = x^2 e^x$ 左右两边同时对 x 求导:

$$g(f(x))f'(x) = (x^2 + 2x)e^x \Rightarrow f'(x) = (x + 2)e^x$$

我们得到: $f(x) = (x + 1)e^x + C, f(0) = 1 + C = 0, C = -1$

$$f(x) = (x + 1)e^x - 1$$

30.2 Week II

April 8

例题 30.15.

求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{2^n} (x+1)^{2n+1}$ 收敛区间

解

求解收敛半径的两种方法:

$$(i). \rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

$$(ii). \rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$\text{本题中采用第二种方法: } \rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \sqrt[2n+1]{\ln n} = \frac{1}{2}$$



此题中幂级数只有奇数项, 收敛半径 $R = \sqrt{\frac{1}{\rho}} = \sqrt{2}$
 原幂级数收敛区间: $(-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$

例题 30.16.

证明:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nx}{\sin x} \right)^2 dx = \frac{n\pi}{2}$$

解

我们不妨设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\sin nx}{\sin x})^2 dx$, 我们有:

$$a_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$a_{n+1} - a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(n+1)x - \sin^2 nx}{\sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx$$

我们令 $c_n = a_{n+1} - a_n, c_0 = \frac{\pi}{2}$

$$c_{n+1} - c_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+3)x - \sin(2n+1)x}{\sin x} dx$$

我们利用和差化积公式得到:

$$c_{n+1} - c_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin[(2n+2)x+x] - \sin[(2n+2)x-x]}{\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos(2n+2)x}{\sin x} dx = 0 \Rightarrow c_n = \frac{\pi}{2}$$

我们得到: a_n 是等差数列, $a_n = \frac{n\pi}{2}$

April 9

例题 30.17.

方程 $F(cx - az, cy - bz) = 0$ 确立了函数 $z = z(x, y)$, 求 $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y}$

解

隐函数求导法则: $G(x, y, z) = F(u, v), \begin{cases} u = cx - az \\ v = cy - bz \end{cases}$, 我们有:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{cF'_1}{aF'_1 + bF'_2} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{cF'_2}{aF'_1 + bF'_2} \\ a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = c \end{cases}$$



例题 30.18.

设函数 f, g 均可微, 且 $z = f[xy, \ln x + g(xy)]$, 求 $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = yf'_1 + (\frac{1}{x} + yg')f'_2 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = xf'_1 + xg'f'_2 \end{cases}$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = f'_2$$

April 10

例题 30.19.

$f'(x)$ 连续, $|f'(x)| \leq M$, $\int_0^1 f(x)dx = 0$, 证明:

$$\forall a \in [0, 1], \left| \int_0^a f(x)dx \right| \leq \frac{M}{8}$$

解

我们令: $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 原命题等价于:

$$|F''(x)| \leq M, F(0) = F(1) = 0, \forall a \in [0, 1], |F(x)| \leq \frac{M}{8}$$

利用泰勒反向展开:

$$\begin{cases} F(0) = F(x) + F'(x)(0-x) + \frac{F''(\varepsilon_1)}{2}(0-x)^2 & ① \\ F(1) = F(x) + F'(x)(1-x) + \frac{F''(\varepsilon_2)}{2}(1-x)^2 & ② \end{cases}$$

我们利用 $(1-x)① + x②$ 得到:

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{F''(\varepsilon_1)}{2}x^2(1-x) - \frac{F''(\varepsilon_2)}{2}x(1-x)^2 \\ |F(x)| &\leq \frac{M}{2}[x^2(1-x) + x(1-x)^2] = \frac{M}{8} \end{aligned}$$

例题 30.20.

求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x-1)^n$ 的收敛域

解

先求幂级数收敛半径:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + (-2)^n}{n}} = 3 \Rightarrow r = \frac{1}{3}$$



原幂级数中心点 $x = 1$, 收敛区间为 $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$, 我们验证端点值 $x = \frac{2}{3}, x = \frac{4}{3}$

当 $x = d\frac{2}{3}$ 时, 原幂级数为 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{(-3)^n n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n 3^n}$, 原级数收敛.

当 $x = d\frac{4}{3}$ 时, 原幂级数为 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n 3^n}$, 原级数发散.

幂级数收敛域为 $[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$

April 11

例题 30.21.

设幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 和 $\frac{1}{3}$, 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2}{b_n^2} x^n$ 收敛半径

解 由题意知:

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{3}{\sqrt{5}} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = 3 \end{cases}$$

后面幂级数收敛半径 $R = \frac{1}{\rho}$, 我们有:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}^2 b_n^2}{a_n^2 b_{n+1}^2} \right| = \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{5} \Rightarrow R = 5$$

(有些许问题)

例题 30.22.

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \text{计算 } f''_{xy}(0, 0) \text{ 和 } f''_{yx}(0, 0)$$

解

$$\begin{cases} f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0 \\ f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_x = \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} \\ f'_y = \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f''_{xy}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, y) - f'_x(0, 0)}{y} = -1 \\ f''_{yx}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'_y(x, 0) - f'_y(0, 0)}{x} = 1 \end{cases}$$

April 12



例题 30.23.

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $f(0) = f(1) = 0, \min_{x \in [0, 1]} \{f(x)\} = -1$, 证明:

$$\exists \varepsilon \in (0, 1), \text{ s.t. } f''(\varepsilon) \geq 8$$

解

$f(0) = f(1) = 0, \min_{x \in [0, 1]} \{f(x)\} = -1$, 由费马定理我们得到:

$$\exists x_0 \in (0, 1), f'(x_0) = 0$$

我们利用泰勒展开, $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的泰勒展开式:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\eta)}{2}(x - x_0)^2, \eta \in x \sim x_0$$

$$(1). \text{ 当 } x = 0 \text{ 时}, f(0) = -1 + \frac{f''(\eta_1)}{2}x_0^2 = 0 \Rightarrow f''(\eta_1) = \frac{2}{x_0^2}$$

$$(2). \text{ 当 } x = 1 \text{ 时}, f(1) = -1 + \frac{f''(\eta_2)}{2}(1 - x_0)^2 = 0 \Rightarrow f''(\eta_2) = \frac{2}{(1 - x_0)^2}$$

我们不妨记 $f''(\eta) = \max(f''(\eta_1), f''(\eta_2))$, 利用不等式的知识, 我们得到:

$$f''(\eta) \geq \frac{2}{(\frac{1}{2})^2} = 8$$

我们得到: $\exists \varepsilon = \eta \in (0, 1)$, 使得 $f''(\varepsilon) \geq 8$

例题 30.24.

设 m, n 均是正整数, 证明: $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 收敛性与 m, n 无关

解

$$\text{令 } f(x) = \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} = x^{-\frac{1}{n}} [\ln(1-x)]^{-\frac{2}{m}}$$

我们需要讨论 $x \rightarrow 0^+$ 和 $x \rightarrow 1^-$ 两个可能的瑕点

$$(i). \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = x^{\frac{2}{m} - \frac{1}{n}} = \begin{cases} 0, & \frac{2}{m} > \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{2}{m} = \frac{1}{n} \\ +\infty, & \frac{2}{m} < \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$(ii). \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

综合 (i)(ii), 我们知道 $x = 1$ 一定是 $f(x)$ 的瑕点, $x = 0$ 在一定情况下是 $f(x)$ 的瑕点.

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = I_1 + I_2$$

(1). 我们讨论 I_2 的收敛性, 我们比较 $f(x)$ 和 $\frac{1}{\sqrt[m]{1-x}}$:



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{\sqrt[m]{1-x}} = \sqrt[m]{\frac{\ln^2(1-x)}{\frac{1}{1-x}}} \stackrel{t=1-x}{\Rightarrow} \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt[m]{t \ln^2 t} = 0$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx < \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt[m]{1-x}} dx$$

后面的定积分收敛, I_2 收敛

(2). 我们讨论 I_1 的收敛性, 我们比较 $f(x)$ 和 $\frac{1}{\sqrt[m]{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{\sqrt[m]{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[m]{\ln^2(1-x)} = 0$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt[m]{x}} dx$$

后面的定积分收敛, I_1 收敛.

I 积分收敛, 与 m, n 的取值无关.

April 13

例题 30.25.

设数列 a_n 单调减少, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k (n = 1, 2, \dots)$ 无界, 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x-1)^n$ 收敛域

解

我们不难发现幂级数的中心点为 $x = 1$, 数列 a_n 单调减少, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \Rightarrow a_n$ 是正项级数.

(i). 当 $x = 0$ 时, 我们得到幂级数为 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$, 莱布尼兹判别法得到级数收敛, 由阿贝尔定理我们得到: $x \in (0, 2)$, 级数收敛.

(ii). 当 $x = 2$ 时, 我们得到幂级数为 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, 级数发散, 由阿贝尔定理我们得到: $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, 级数发散.

综合 (i)(ii), 我们的得到幂级数收敛域为 $[0, 2]$

例题 30.26.

判断函数 $f(x, y) = \begin{cases} y \arctan \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq 0 \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 处是否连续, 是否可微, 一阶偏导数是否连续

解

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} y \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} y \frac{\pi}{2} = 0 = f(0, 0)$$



(i). $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续.

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \arctan \frac{1}{|y|} = \frac{\pi}{2}$$

(ii). $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处偏导数为 $f'_x(0, 0) = 0, f'_y(0, 0) = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f'_x(0, 0)(x - 0) - f'_y(0, 0)(y - 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = y \frac{\arctan \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

(iii). $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.

公式法求 $f(x, y)$ 偏导数:

$$f'_x = y \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} (-x)(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} = -xy \frac{(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}}{1 + x^2 + y^2}$$

$$f'_y = \arctan \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - y^2 \frac{(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}}{1 + x^2 + y^2}$$

我们得到一阶偏导数在 $(0, 0)$ 处的极限:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} f'_x(x, 0) = 0 = f'_x(0, 0) \\ \lim_{y \rightarrow 0} f'_y(0, y) = \frac{\pi}{2} = f'_y(0, 0) \end{cases}$$

(iv). 原函数一阶偏导数在 $(0, 0)$ 处连续.

April 14

例题 30.27.

将 $f(x) = \frac{5x - 12}{x^2 + 5x - 6}$ 展开为 x 的幂级数

解

$$\frac{5x - 12}{x^2 + 5x - 6} = \frac{6}{x + 6} + \frac{1}{1 - x} = \frac{1}{1 + \frac{x}{6}} + \frac{1}{1 - x}$$

我们由常见幂级数展开式得到:

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{1 + x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, \quad -1 < x < 1$$

我们可以得到:

$$\frac{1}{1 + \frac{x}{6}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{6}\right)^n, \quad -1 < \frac{x}{6} < 1$$



我们可以得到:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{6}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{6^n}\right) x^n, -1 < x < 1$$

例题 30.28.

证明: $f'_x(x, y)$ 和 $f'_y(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续, $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微

解

由题意得:

$$\begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = f'_x(x_0, y_0) \Rightarrow f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + \alpha(x, y) \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = f'_y(x_0, y_0) \Rightarrow f(x_0, y) - f(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \beta(x, y) \end{cases}$$

我们要证明函数在 (x_0, y_0) 处可微, 我们只需要证明:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2})$$

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= (f(x, y) - f(x_0, y)) + (f(x_0, y) - f(x_0, y_0)) \\ &= f'_x(\varepsilon_1, y)(x - x_0) + f'_y(x, \varepsilon_2)(y - y_0) \\ &= [f'_x(\varepsilon_1, y) - f'_x(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)](x - x_0) \\ &\quad + [f'_y(x, \varepsilon_2) - f'_y(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)](y - y_0) \\ &= dz + \alpha_1(x, y) + \beta_1(x, y) \end{aligned}$$

我们有:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \alpha_1(x, y) = 0 \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \beta_1(x, y) = 0$$

证毕.

30.3 Week III

April 15

例题 30.29.

将函数 $f(x) = \ln(1 - x - 2x^2)$ 展开为 x 的幂级数, 并指出其收敛区间

解

$$\ln(1 - x - 2x^2) = \ln(1 + x) + \ln(1 - 2x)$$



我们根据:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, -1 < x \leq 1$$

得到上面式子的展开式:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, -1 < x \leq 1$$

$$\ln(1-2x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n}, -1 < -2x \leq 1$$

我们得到 $f(x)$ 的展开式为:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n - 2^n}{n} \right] x^n, -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}$$

函数 $f(x)$ 的收敛区间为 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

例题 30.30.

设 $f(x), g(x)$ 在 $x \in [0, 1]$ 上的导数连续, 且 $f(0) = 0, f'(x) \geq 0, g'(x) \geq 0$, 证明:

$$\forall a \in [0, 1], \int_0^a g(x)f'(x)dx + \int_0^1 f(x)g'(x)dx \geq f(a)g(1)$$

解

我们设 $F(x) = \int_0^x g(t)f'(t)dt + \int_0^1 f(t)g'(t)dt - f(x)g(1)$.

我们有:

$$F'(x) = g(x)f'(x) - g(1)f'(x) = f'(x)[g(x) - g(1)]$$

我们知道: $f'(x) \geq 0, g'(x) \geq 0 \Rightarrow g(x) \leq g(1), x \in [0, 1]$

我们得到: $F'(x) \leq 0 \Rightarrow F(x)$ 单调递减

$$F(x) \geq F(1) = \int_0^1 g(x)df(x) + \int_0^1 f(x)g'(x)dx - f(1)g(1) = -f(0)g(0) = 0$$

原命题得证, 证毕.

April 16

例题 30.31.

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且单调递减, 证明:

$$\forall \lambda \in (0, 1), \int_0^\lambda f(x)dx > \lambda \int_0^1 f(x)dx$$

解



我们构造: $F(x) = \frac{\int_0^x f(t)dt}{x}$

我们对 $F(x)$ 求导得到:

$$F'(x) = \frac{xf(x) - \int_0^x f(t)dt}{x^2}$$

我们令 $G(x) = xf(x) - \int_0^x f(t)dt$, 我们得到:

$$G'(x) = f(x) + xf'(x) - f(x) = xf'(x), x \in [0, 1]$$

我们已知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且单调递减, 我们可以得到 $f'(x) < 0, x \in (0, 1)$

我们得出: $G'(x) < 0, x \in (0, 1)$

$G(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, $G(x) < G(0) = 0 \Rightarrow F'(x) < 0, x \in (0, 1)$, $F(x)$ 单调递减 我们得到:

$$F(x) > F(1) \Rightarrow \frac{\int_0^x f(t)dt}{x} > \frac{\int_0^1 f(x)dx}{1}$$

即 $\forall \lambda \in (0, 1), \int_0^\lambda f(x)dx > \lambda \int_0^1 f(x)dx$

例题 30.32.

$z = (x^2 + y^2)f(x^2 + y^2), \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, f(1) = 0, f'(1) = 1$, 求 $f(x)$ 表达式

解

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2xf(x^2 + y^2) + 2x(x^2 + y^2)f'(x^2 + y^2) \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2yf(x^2 + y^2) + 2y(x^2 + y^2)f'(x^2 + y^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f(x^2 + y^2) + 4x^2f'(x^2 + y^2) + (6x^2 + 2y^2)f''(x^2 + y^2) + 4x^2(x^2 + y^2)f'''(x^2 + y^2) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2f(x^2 + y^2) + 4y^2f'(x^2 + y^2) + (6y^2 + 2x^2)f''(x^2 + y^2) + 4y^2(x^2 + y^2)f'''(x^2 + y^2) \end{cases}$$

我们可以得到:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4f(u) + 12uf'(u) + 4u^2f''(u) = 0, u = x^2 + y^2$$

问题转化为:

$$u^2f''(u) + 3uf'(u) + f(u) = 0 \Rightarrow (u^2f''(u) + 2uf'(u)) + (uf'(u) + f(u)) = [u^2f'(u) + uf(u)]' = 0$$

我们得到: $u^2f'(u) + uf(u) = C$, 又因为 $f(1) = 0, f'(1) = 1 \Rightarrow C = 1$

我们得到一个一阶线性微分方程: $uf'(u) + f(u) = \frac{1}{u}$

利用公式法, 我们得到:

$$(uf(u))' = \frac{1}{u} \Rightarrow uf(u) = \ln u + C_2 \Rightarrow uf(u) = \ln u$$

$$\text{我们得到: } f(x) = \frac{\ln x}{x}$$



April 17

例题 30.33.

将 $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数

解

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}, -1 < x^2 < 1$$

我们有:

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} dx \\ \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \\ f(0) = \frac{\pi}{4}, \text{ 我们有: } f(x) &= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, -1 < x < 1 \end{aligned}$$

例题 30.34.

微分方程 $y' = \frac{y(1-x)}{x}$ 通解

解

分离变量

原微分方程可以化为:

$$\begin{aligned} (i) \quad y \neq 0 \quad \frac{1}{y} dy &= \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx \\ (ii) \quad y = 0 \quad y'(x) &= 0, \text{ 满足条件} \end{aligned}$$

针对 (i), 我们同时求不定积分得到:

$$\ln|y| = \ln|x| - x + C_1 \Rightarrow \ln|y| = \ln|cxe^{-x}| \Rightarrow y = cxe^{-x}$$

综合 (i)(ii), 我们得到微分方程通解: $y = Cxe^{-x}, C \in \mathbb{R}$

April 18

例题 30.35.

方程 $x^3 + y^3 = 3axy (a > 0)$ 确定隐函数 $y = y(x)$, 求 $y = y(x)$ 的斜渐近线

解

$$\text{令 } t = \frac{y}{x} \rightarrow y = tx$$



我们得到:
$$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} & \text{当 } x \rightarrow \infty, t \rightarrow -1 \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$$

我们得到:

(i).

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow -1^-} t = -1 \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - ax) = \lim_{t \rightarrow -1^-} \left(\frac{3at^2}{1+t^3} + \frac{3at}{1+t^3} \right) = -a \end{aligned}$$

(ii).

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow -1^+} t = -1 \\ b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - ax) = \lim_{t \rightarrow -1^+} \left(\frac{3at^2}{1+t^3} + \frac{3at}{1+t^3} \right) = -a \end{aligned}$$

斜渐近线为: $y = -x - a$

例题 30.36.

已知函数 $y = y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y = \frac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha$, 当 $\Delta x \rightarrow 0$, α 是 Δx 的高阶无穷小, $y(0) = \pi$, 求 $y(1)$

解

我们由题意得到微分方程:

$$\frac{1}{y} dy = \frac{1}{1+x^2} dx \Rightarrow \ln|y| = \arctan x + C \Rightarrow y = C e^{\arctan x}$$

由 $y(0) = \pi$, $\Rightarrow C = \pi$, 我们得到 $y(x)$ 表达式: $y(x) = \pi e^{\arctan x} \Rightarrow y(1) = \pi e^{\frac{\pi}{4}}$

April 19

例题 30.37.

求幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)x^n$ 收敛域, 并求其和函数

解

(i). 先求幂级数收敛半径:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+3}{2n+1} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\rho} = 1$$

(ii). 验证两个端点

当 $x = \pm 1$ 时, 幂级数对应的级数发散.

我们得到原幂级数的收敛域为 $(-1, 1)$.

$$S(x) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 2x \left[\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \right]' + \frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2}, -1 < x < 1$$



例题 30.38.

微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{1}{2}(\frac{y}{x})^3$, 满足 $y|_{x=1} = 1$ 的特解

解

令 $z = \frac{y}{x}$, 我们得到: $y = xz \Rightarrow \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$

原微分方程可化为:

$$(z + x\frac{dz}{dx}) = z - \frac{1}{2}z^3 \text{ 满足 } z|_{x=1} = 1$$

我们可以得到: $-\frac{2}{z^3}dz = \frac{1}{x}dx \Rightarrow \frac{1}{z^2} = \ln x + c$

我们有 $z|_{x=1} = 1$, 得到: $1 + \ln x = \frac{1}{z^2} \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{1 + \ln x}$

我们得到: $\frac{dy}{dx}|_{(1,1)} = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt{1 + \ln x}}$

April 20

例题 30.39.

求微分方程 $(x+y)dx + (y-x)dy = 0$ 满足 $y(1) = -1$ 的特解

解

我们对微分方程进行一些简单的变形:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}$$

我们令 $z = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$

原微分方程可以化简为:

$$\frac{1}{x}dx = \frac{1-z}{1+z^2}dz \Rightarrow \ln|x| = \arctan z - \ln\sqrt{z^2+1} + C$$

即: $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \arctan\frac{y}{x} + C$, 由 $y(1) = -1$ 得到 $C = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}$

我们得到微分方程的特解为: $\ln\sqrt{x^2+y^2} - \arctan\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}$

例题 30.40.

$f(x, y)$ 连续, 且 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - xy}{x^2 + y^2} = 1$, 判断 $f(0,0)$ 是极大值还是极小值

解

极小值点, 理由如下: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - xy}{x^2 + y^2} = 1$, 我们可以得到在 $(0,0)$ 的一个去心邻域内,



我们有:

$$f(x, y) = xy + (x^2 + y^2)(1 + \alpha) = \frac{1}{2}(x + y)^2 + (x^2 + y^2)\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)$$

其中 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \alpha = 0$

我们得到在 $(0, 0)$ 的一个邻域内, $f(x, y) \geq 0$, $f(0, 0)$ 是极小值

April 21

例题 30.41.

求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - 1\right)x^{2n}$ 在区间 $(-1, 1)$ 内的和函数 $S(x)$

解

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} - \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$(i). \text{ 当 } x \neq 0, S(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{x} \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n} - \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$S(x) = \frac{\ln \frac{1-x}{1+x}}{2x} - \frac{1}{1-x^2}$$

$$(ii). \text{ 当 } x = 0, S(x) = 0.$$

$$\text{综上, } S(x) = \begin{cases} \frac{\ln \frac{1-x}{1+x}}{2x} - \frac{1}{1-x^2}, & 0 < |x| < 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

例题 30.42.

求微分方程 $(y + x^3)dx - 2xdy = 0$ 满足 $y|_{x=1} = \frac{6}{5}$ 的特解

解

$$\text{我们对微分方程化简: } y' - \frac{1}{2x}y = \frac{x}{2} \Rightarrow \left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2}$$

$$\text{我们得到: } y = \frac{x^3 + C\sqrt{x}}{5}, y|_{x=1} = \frac{6}{5} \Rightarrow C = 5$$

$$\text{原微分方程的解: } y = \frac{x^3 + 5\sqrt{x}}{5}$$

30.4 Week IV

April 22



例题 30.43.

求微分方程 $xy' + 2y = x \ln x$ 满足 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 的特解

解

原微分方程可化为: $y' + \frac{2}{x}y = \ln x \Rightarrow (x^2y)' = x^2 \ln x$

原微分方程的解为: $y = \frac{\int x^2 \ln x dx + C}{x^2} \Rightarrow y = \frac{x(3 \ln x - 1)}{9} + \frac{C}{x^2}$

我们由 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 得到: $y = \frac{x(3 \ln x - 1)}{9}$

例题 30.44.

$f(x, y) = x^4 + 2y^2 - 3x^2y$ 判断 $f(0, 0)$ 处极值情况

解

$f(0, 0)$ 不是极值点, 理由如下:

$$f(x, y) = (x^2 - \frac{3}{2}y)^2 - \frac{1}{4}y^2$$

(i). 当 $y = 0, f(x, y) \geq 0$

(ii). 当 $x^2 = \frac{3}{2}y, f(x, y) \leq 0$

April 23

例题 30.45.

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^x e^{-t^2} dt \right] dx$$

解

方法 1: 分部积分法

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^x e^{-t^2} dt \right] dx &= x \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^x e^{-t^2} dt \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx \\ &\stackrel{x \rightarrow +\infty}{\lim} \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^x e^{-t^2} dt}{\frac{1}{x}} - \frac{1}{2} d(e^{-x^2}) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

方法 2: 二重积分交换积分次序

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^x e^{-t^2} dt \right] dx = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt - \int_0^x e^{-t^2} dt \right] dx$$

我们得到:

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) dx = \int_0^{+\infty} dt \int_0^t e^{-t^2} dx = \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}$$



例题 30.46.

设 $F(x) = f(x)g(x)$, 其中函数 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足以下条件: $f'(x) = g(x), g'(x) = f'(x)$, 且 $f(0) = 0, f(x) + g(x) = 2e^x$

(i). 求 $F(x)$ 满足的一阶微分方程

(ii). 求 $F(x)$ 表达式

解

(i). 我们有:

$$F'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) = f^2(x) + g^2(x) = (f(x) + g(x))^2 - 2f(x)g(x)$$

我们得到 $F(x)$ 满足的微分方程为: $F'(x) + 2F(x) = 4e^{2x}$

(ii). 我们利用一阶线性微分方程公式得到:

$$(e^{2x}F(x))' = 4e^{4x} \Rightarrow F(x) = \frac{e^{4x} + C}{e^{2x}}$$

由 $f(0) = 0 \Rightarrow F(0) = 1 + C = 0 \Rightarrow C = -1, F(x) = e^{2x} - e^{-2x}$

April 24

例题 30.47.

求级数 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n^2 - 1)2^n}$

解

我们引入幂级数:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2 - 1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) x^n = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \right)$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} = x \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^x x^{n-2} dx \right) = x \int_0^x \left(\sum_{n=2}^{+\infty} x^{n-2} \right) dx = -x \ln(1-x)$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}}{x} = \frac{\sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^x x^n dx}{x} = \frac{\int_0^x \left(\sum_{n=2}^{+\infty} x^n \right) dx}{x} = -\frac{x}{2} - 1 - \frac{\ln(1-x)}{x}$$

原幂级数的和函数为:

$$S(x) = \frac{1}{2}(-x \ln(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{x}{2} + 1), -1 < x < 1$$

我们得到: $S(\frac{1}{2}) = \frac{5}{8} - \frac{3 \ln 2}{4}$



例题 30.48.

已知 $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2 + (2x)^n + x^{2n}} (x \geq 0)$, $g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^{2n+1}}{1 + x^{2n}}$, 求 $f(g(x))$

解

$$\text{我们易得到: } f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 2 \\ 2x, & \frac{1}{2} < x < 2 \\ 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} -x, & |x| > 1 \\ 0, & x = 1 \\ 1, & -1 \leq x < 1 \end{cases}.$$

我们可以得到:

$$f(g(x)) = \begin{cases} x^2, & x \leq -2 \\ -2x, & -2 < x < -1 \\ 2, & -1 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

April 25

例题 30.49.

已知 $y_1 = (1+x^2)^2 - \sqrt{1+x^2}$, $y_2 = (1+x^2)^2 + \sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个解, 求 $q(x)$

解

由题意得:

$$\begin{cases} y'_1 + p(x)y_1 = q(x) \\ y'_2 + p(x)y_2 = q(x) \end{cases} \Rightarrow (y_1 - y_2)' + p(x)(y_1 - y_2) = 0 \Rightarrow p(x) = -\frac{(y_1 - y_2)'}{y_1 - y_2}$$

我们得到: $p(x) = -\frac{x}{1+x^2}$

任意带入一个方程: $q(x) = y'_1 + p(x)y_1 = 3x(1+x^2)$

例题 30.50.

设 $z = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, $f'_y \neq 0$, 证明: 对任意的常数 k , 曲线 $f(x, y) = k$ 是直线的充分必要条件为

$$(f'_y)^2 f''_{xx} - 2f'_x f'_y f''_{xy} + (f'_x)^2 f''_{yy} = 0$$

解

$f(x, y) = k$ 为直线 $\Rightarrow f(x, y) = ax + by + c = k$

(i). 必要性

$f(x, y) = k$ 为直线 $\Rightarrow f''_{xx} = f''_{yy} = f''_{xy} = 0$, 我们可以得到:

$$(f'_y)^2 f''_{xx} - 2f'_x f'_y f''_{xy} + (f'_x)^2 f''_{yy} = 0$$



(ii). 充分性

我们记 $\begin{cases} f'_x = f'_1 \\ f'_y = f'_2 \\ f''_{xx} = f''_{11} \\ f''_{xy} = f''_{12} \\ f''_{yx} = f''_{21} \\ f''_{yy} = f''_{22} \end{cases}$, 我们将 $f(x, y) = k$ 对 x 求导:

$$f'_1 + f'_2 \frac{dy}{dx} = 0$$

再次对等式两边对 x 求导:

$$f''_{11} + f''_{12} \frac{dy}{dx} + (f''_{21} + f''_{22} \frac{dy}{dx}) \frac{dy}{dx} + f'_2 \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

若要证明 $f(x, y) = k$ 是直线, 我们只需要证明:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Rightarrow f''_{11} + f''_{12} \frac{dy}{dx} + (f''_{21} + f''_{22} \frac{dy}{dx}) \frac{dy}{dx} = 0$$

由隐函数求导公式: $\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_1}{f'_2}$, 我们化简上式:

$$f''_{11} + f''_{12} \left(-\frac{f'_1}{f'_2} \right) + \left(f''_{21} - f''_{22} \frac{f'_1}{f'_2} \right) \left(-\frac{f'_1}{f'_2} \right) = \frac{(f''_2)^2 f''_{11} - 2f'_1 f'_2 f''_{12} + (f'_1)^2 f''_{22}}{(f''_2)^2} = 0$$

令分子为 0 即可:

$$(f''_2)^2 f''_{11} - 2f'_1 f'_2 f''_{12} + (f'_1)^2 f''_{22} = 0 \Rightarrow (f'_y)^2 f''_{xx} - 2f'_x f'_y f''_{xy} + (f'_x)^2 f''_{yy} = 0$$

April 26

例题 30.51.判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ 敛散性

解

我们不妨记 $u_n = (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ 级数的部分和 $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$\begin{aligned} S_n &= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) - (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots \\ &+ (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{2} - \sqrt{1}) \end{aligned}$$

我们得到: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1 - \sqrt{2}$, 原级数收敛

例题 30.52.

判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^\alpha}$ 收敛性

解 我们有:

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ n \rightarrow +\infty, \quad \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} &\sim \frac{1}{2\sqrt{n}} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^\alpha} &\sim \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

我们可以得到:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^\alpha} \begin{cases} \text{收敛, } \alpha > \frac{1}{2} \\ \text{发散, } \alpha \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

April 27

例题 30.53.

设连续函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加, 下列说法正确的是:

- A. $\tan f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加
- B. $f'(x) > 0, x \in (-\infty, +\infty)$
- C. $\int_{-1}^x \frac{f(t)}{1+f^2(t)} dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加
- D. $\int_{-1}^{e^x} \frac{1}{1+f^2(t)} dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加

解

(i). 对于 $f(x) = x^3$: $f'(x) \geq 0, \tan f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不单调, A、B 错误

(ii). 令 $F(x) = \int_{-1}^x \frac{f(t)}{1+f^2(t)} dt, F'(x) = \frac{f(x)}{1+f^2(x)}$, $f(x)$ 正负性未知, 无法判断函数单调性, C 错误

(iii) 令 $F(x) = \int_{-1}^x \frac{1}{1+f^2(t)} dt, F'(x) = \frac{1}{1+f^2(x)} > 0, F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增.

正确答案: D

例题 30.54.

下列微分方程是以 $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x, (C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R})$ 为通解的微分方程为:

- A. $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$
- B. $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$
- C. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$
- D. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$



解

我们易得: $y = C_1 e^x + C_4 e^0 (A \cos 2x + B \sin 2x)$

我们可以得到原三阶微分方程对应的特征方程的三个根 $x_1 = 1, x_2 = 2i, x_3 = -2i$, 特征方程为: $(r - 1)(r^2 + 4) = 0 \Rightarrow r^3 - r^2 + 4r - 4 = 0$

我们得到微分方程表达式为: $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$, 故答案选 D

April 28

例题 30.55.

设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 连续可导, 证明:

$$\int_0^a dx \int_0^x \frac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} dy = \pi[f(a) - f(0)]$$

解

原二重积分等价于:

$$\begin{aligned} \int_0^a dy \int_y^a \frac{f'(y)}{\sqrt{(\frac{a-y}{2})^2 - (x - \frac{a+y}{2})^2}} dx &= \int_0^a f'(y) [\arcsin(\frac{2x-a-y}{a-y})] \Big|_y^a dy \\ &= \pi \int_0^a f'(y) dy = \pi[f(a) - f(0)] \end{aligned}$$

例题 30.56.

$f(x)$ 连续且为奇函数, 下列函数一定是偶函数的是:

- A. $\int_0^x du \int_a^u t f(t) dt$
- B. $\int_a^x du \int_0^u f(t) dt$
- C. $\int_0^x du \int_a^u f(t) dt$
- D. $\int_a^x du \int_0^u t f(t) dt$

解

(i). 对于 A、C, 我们交换二重积分的积分次序:

A: $\int_0^x du \int_a^0 t f(t) dt + \int_0^x du \int_0^u t f(t) dt = x \int_a^0 t f(t) dt + \int_0^x t^2 f(t) dt$, 前一个是奇函数, 后一个是偶函数

C: $\int_0^x du \int_a^u f(t) dt = \int_0^x du \int_a^0 f(t) dt + \int_0^x du \int_0^u f(t) dt$, 前一个是奇函数, 后一个是奇函数

(ii). 对于 B、D, 我们交换二重积分的积分次序:

B: $\int_a^0 du \int_0^u f(t) dt + \int_0^x du \int_0^u f(t) dt = \int_a^x t f(t) dt$, 奇函数

D: $\int_a^0 du \int_0^u t f(t) dt + \int_0^x du \int_0^u t f(t) dt = \int_a^x t^2 f(t) dt$, 偶函数



此题答案为: D

April 29

例题 30.57.

证明: $\int_0^1 dx \int_0^1 (xy)^{xy} dy = \int_0^1 x^x dx$

解

我们令 $xy = t, y = \frac{1}{x}t$, 我们得到原二重积分为: $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{x}t^t dt$.

我们交换二重积分的积分次序:

$$\int_0^1 dt \int_t^1 \frac{1}{x}t^t dx = - \int_0^1 t^t \ln t dt = - \int_0^1 x^x \ln x dx$$

我们只需要证明:

$$-\int_0^1 x^x \ln x dx = \int_0^1 x^x dx \Rightarrow \int_0^1 x^x (1 + \ln x) dx = \int_0^1 e^{x \ln x} d(x \ln x) = 0$$

证毕.

例题 30.58.

微分方程 $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(1 + \cos 2x)$ 的特解可以设为哪种形式:

- A. $Ae^{2x} + e^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$
- B. $Axe^{2x} + e^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$
- C. $Ae^{2x} + xe^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$
- D. $Axe^{2x} + xe^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$

解

原微分方程对应的特征方程为: $r^2 - 4r + 8 = 0 \Rightarrow r_1 = 2 + 2i, r_2 = 2 - 2i$

齐次微分方程的通解为: $e^{2x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$

对于方程: $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}$, 特解为: $C_1 e^{2x}$

对于方程: $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} \cos 2x$, 特解为: $xe^{2x}(C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x)$

我们得到方程的特解形式为: $y = C_1 e^{2x} + xe^{2x}(C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x)$, 故此答案选 C

April 30

例题 30.59.

$f(x)$ 连续且为偶函数, 下列函数一定是偶函数的是:

- A. $\int_0^x (x - t^2) f(t) dt$
- B. $\int_a^x f(x - t) dt$
- C. $\int_0^x (x - 2t) f(t) dt$
- D. $\int_a^x (x - 2t) f(t) dt$

解



令 $f(x) = 1$, 我们得到:

$$(i). \int_0^x (x-t^2)f(t)dt = \int_0^x (x-t^2)dt = x^2 - \frac{x^3}{3} \text{ 非奇非偶函数}$$

$$(ii). \int_a^x f(x-t)dt = \int_a^x dt = x-a, \text{ 当 } a=0 \text{ 时为奇函数}$$

$$(iii). \int_0^x (x-2t)f(t)dt = \int_0^x (x-2t)dt = -\frac{x^2}{2}, \text{ 偶函数}$$

$$(iv). \int_a^x (x-2t)f(t)dt = \int_a^x (x-2t)dt = -\frac{x^2}{2} - \frac{ax}{2} + a^2, \text{ 当 } a=0 \text{ 时为偶函数}$$

故答案为: C

例题 30.60.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x t^{-5} dt}{\int_1^x t^{-3} dt}$$

解

$$\text{原极限为: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4x^4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}$$





第 31 章 May

31.1 Week I

May 1

例题 31.1.

求二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$ 的通解

解

原微分方程对应的特征方程为: $r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 3$

齐次微分方程的通解为: $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$

我们设方程的特解为: $y^* = Ae^{2x} \Rightarrow A(4 - 8 + 3)e^{2x} = 2e^{2x} \Rightarrow A = -2$

我们得到原微分方程的通解为:

$$y = -2e^{2x} + C_1 e^x + C_2 e^{3x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

例题 31.2.

求微分方程 $y'' - 2y' - e^{2x} = 0$ 满足条件 $y(0) = 1, y'(0) = 1$ 的解

解

原微分方程对应的特征方程为: $r^2 - 2r = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = 2$

我们得到齐次微分方程的通解: $y = C_1 e^{2x} + C_2$

我们设微分方程的特解为:

$$y^* = Axe^{2x} \Rightarrow A(4 + 4x - 2 - 4x)e^{2x} = e^{2x} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

我们得到方程的解为: $y = C_1 e^{2x} + C_2 + \frac{1}{2}xe^{2x}$



又因为 $y(0) = 1, y'(0) = 1 \Rightarrow$, 我们得到:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 + \frac{1}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{4} \\ C_2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

原微分方程的解: $y = \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{3}{4}$

May 2

例题 31.3.

设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 连续, $f(x) > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1, \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+hx)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{x}}$, 求 $f(x)$

解

我们得到:

$$\lim_{h \rightarrow 0} e^{\frac{1}{h} \ln(1 + \frac{f(x+hx) - f(x)}{f(x)})} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{\frac{1}{h} \frac{f(x+hx) - f(x)}{f(x)}} = e^{\frac{1}{x}}$$

我们进而得到:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x}{f(x)} \frac{f(x+hx) - f(x)}{hx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x^2}$$

即: $\ln f(x) = -\frac{1}{x} + C$, 又因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, 两边同时取 $x \rightarrow +\infty$ 的极限:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{x} + C) \Rightarrow C = 0$$

我们得到: $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

例题 31.4.

判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{5^n - 3^n}$ 和级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 - 1}}$ 敛散性

解

采取抓大头的方式, 利用级数判别方法中的比较法的极限形式

(i). $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{4^n}{5^n - 3^n}\right)^n}{\left(\frac{4}{5}\right)^n} = 1 \Rightarrow$ 原级数和级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$ 同敛散性, 原级数收敛

(ii). $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^3 - 1}}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = 1 \Rightarrow$ 原级数和级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ 同敛散性, 原级数收敛

May 3



例题 31.5.

设函数 $f(x)$ 连续, 且对于任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$, 恒有 $f(x+1) = -f(x)$, 下面结论不正确的是:

- A. $f(x)$ 是以 2 为周期的函数
- B. $\int_0^x [f(t) - f(-t)]dt$ 是以 2 为周期的函数
- C. $\int_0^x f(t)dt - \frac{x}{2} \int_0^2 f(t)dt$ 是以 2 为周期的函数
- D. $f'(x)$ 是以 2 为周期的函数

解

$$\text{我们得到: } \begin{cases} f(x+1) + f(x) = 0 \\ f(x+2) + f(x+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x+2) = f(x)$$

我们得到: $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数, A 正确

我们由原函数和导函数周期性关系得到:

$$f(x) \text{ 周期函数}, \int_0^x f(t)dt \text{ 周期函数} \Leftrightarrow \int_0^T f(x)dx = 0$$

对于 B 选项, 我们发现 $g(x) = f(x) - f(-x)$, $g(x)$ 是奇函数

$g(x)$ 是周期函数, 且 $\int_{-1}^1 g(x)dx = 0 \Rightarrow \int_0^x g(t)dt$ 是周期函数

对于 C 选项, 我们得到: $\int_0^x [f(t) - \frac{\int_0^2 f(x)dx}{2}]dt$

我们只需要证明:

$$\int_0^2 [f(t) - \frac{\int_0^2 f(x)dx}{2}]dt = 0$$

不妨设 $\int_0^2 f(x)dx = A$, 我们有:

$$\text{左边} = \int_0^2 [f(t) - \frac{A}{2}]dt = \int_0^2 f(x)dx - A = 0 \Rightarrow \text{原命题得证}$$

对于 D 选项, 我们未知 $f(x)$ 是否可导, 故此题答案选 D

例题 31.6.

求微分方程 $y'' + y = 4 \sin x$ 的通解

解

特征方程为: $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = i, r_2 = -i$

齐次微分方程的通解为: $y = A \sin x + B \cos x$

非齐次微分方程特解: $y^* = x(C_1 \sin x + C_2 \cos x) \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = -2 \end{cases}$

原微分方程的通解为: $y = -2x \cos x + A \sin x + B \cos x, A, B \in \mathbb{R}$

May 4



例题 31.7.

求微分方程 $y'' + y = \sin x + x \cos 2x$ 的通解

解

特征方程为: $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = i, r_2 = -i$

齐次微分方程的通解为: $y = A \sin x + B \cos x$

非齐次微分方程特解:

$$y_1^* = x(C_1 \sin x + C_2 \cos x) \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y_1^* = -\frac{x}{2} \cos x$$

$$y_1^* = (Ax + B) \sin 2x + (Cx + D) \cos 2x \Rightarrow \begin{cases} C = -\frac{1}{3} \\ A = D = 0 \\ B = \frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow y_1^* = -\frac{x}{3} \cos 2x + \frac{4}{9} \sin 2x$$

原微分方程的通解为: $y = y_1^* + y_2^* + A \sin x + B \cos x, A, B \in \mathbb{R}$

例题 31.8.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{2x} du \int_0^{\sqrt{2ux-u^2}} \frac{\cos(t-u)^2}{\ln(1+x|x|)} dt$$

解

我们不难发现此题需要分左右极限分别来求:

$$I_{\text{左}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{- \iint_{D_1} \cos(t-u)^2 d\sigma}{-x^2}$$

由二元函数的积分中值定理:

$$\iint_{D_1} \cos(t-u)^2 d\sigma = S_{D_1} f(\varepsilon_1, \varphi_1), (\varepsilon_1, \varphi_1) \text{ 在以 } (0, x) \text{ 为半径, } x \text{ 为半径的圆内}$$

$$I_{\text{左}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2 \pi}{2}}{-x^2} \cos(\varepsilon_1 - \varphi_1)^2 = \frac{\pi}{2}$$

$$I_{\text{右}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\iint_{D_2} \cos(t-u)^2 d\sigma}{x^2}$$

由二元函数的积分中值定理:



$\iint_{D_2} \cos(t-u)^2 d\sigma = S_{D_2} f(\varepsilon_2, \varphi_2)$, $(\varepsilon_2, \varphi_2)$ 在以 $(0, x)$ 为半径, x 为半径的圆内

$$I_{\text{右}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2 \pi}{2}}{x^2} \cos(\varepsilon_2 - \varphi_2)^2 = \frac{\pi}{2}$$

综上所述: $I = \frac{\pi}{2}$

May 5

例题 31.9.

下列函数中原函数必为周期函数的是:

- A. $|\sin x|$
- B. $\sin^4 x$
- C. $\frac{1}{1 + \sin^2 x}$
- D. $\frac{\sin x}{1 + \sin^4 x}$

解

原函数为周期函数, 只需满足函数为周期函数, 且 $\int_0^T f(t) dt = 0$

对于四个选项: A, B, C 对应的 $f(t)$ 在一个周期中函数值大于 0, $\int_0^T f(t) dt > 0$

此题答案选 D

例题 31.10.

设 $y = \frac{1}{2}e^{2x} + (x - \frac{1}{3})e^x$ 是二阶常系数线性微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个特解, 求 a, b, c

- A. $a = -3, b = 2, c = -1$
- B. $a = 3, b = 2, c = -1$
- C. $a = -3, b = 2, c = 1$
- D. $a = 3, b = 2, c = 1$

解

我们可以得到特征方程的两根: $r_1 = 1, r_2 = 2 \Rightarrow$ 特征方程为: $r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow a = -3, b = 2$

我们将特解 $y^* = xe^x$ 代入微分方程, 得到: $c = -1$, 故此题选 A

May 6

例题 31.11.

设 $F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - a \cos x| dx$, 求 $F(a)$ 的最小值



解

$$F(a) = \sqrt{a^2 + 1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(x + \varphi)| dx, \text{ 其中 } \begin{cases} \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \\ \sin \varphi = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} \end{cases}$$

(1). $a > 0, \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$

$$\begin{aligned} \frac{F(a)}{\sqrt{a^2 + 1}} &= \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2} + \varphi} |\sin t| dt = 2 \int_0^{-\varphi} \sin t dt + \int_{-\varphi}^{\frac{\pi}{2} + \varphi} \sin t dt = 2 - \cos \varphi + \sin \varphi = 2 - \frac{a + 1}{\sqrt{a^2 + 1}} \\ F(a) &= 2\sqrt{a^2 + 1} - (a + 1) \\ F'(a) &= \frac{2a - \sqrt{a^2 + 1}}{\sqrt{a^2 + 1}} \\ \text{当 } x &= \frac{\sqrt{3}}{3}, F(a)_{min} = \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

(2). $a < 0, \varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\frac{F(a)}{\sqrt{a^2 + 1}} = \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2} + \varphi} |\sin t| dt = \cos \varphi + \sin \varphi = \frac{1 - a}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

$$F(a) = 1 - a, F(a) \geq 1, F(a)_{min} = 1$$

综上, $F(a)_{min} = \sqrt{3} - 1$ **例题 31.12.**设 $f(x)$ 连续且以 T 为周期, 则下列函数以 T 为周期的是:

- A. $\int_0^x f(t) dt$
- B. $\int_{-x}^0 f(t) dt$
- C. $\int_0^x f(t) dt - \int_{-x}^0 f(t) dt$
- D. $\int_0^x f(t) dt + \int_{-x}^0 f(t) dt$

解

我们知道如果原函数也为周期函数, 那么必有: $\int_0^T f(t) dt = 0$

对于 A, B 选项, 我们自然可以排除掉, 没有任何附加条件

对于 C, D 选项

$$\begin{aligned} C &\Rightarrow \int_0^x [f(t) - f(-t)] dt \text{ 奇函数} \Rightarrow \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t) - f(-t)] dt = 0 \\ D &\Rightarrow \int_0^x [f(t) + f(-t)] dt \text{ 偶函数} \end{aligned}$$

故此题答案选 C

May 7



例题 31.13.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^3)}$$

解

令 $x = \frac{1}{t}$, $t \in (0, +\infty)$, $dx = -\frac{1}{t^2}dt$, 原积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{(1+t^2)(1+t^3)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^2)(1+x^3)} dx \\ 2I &= \int_0^{+\infty} \frac{1+x^3}{(1+x^2)(1+x^3)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \\ I &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^3)} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

例题 31.14.

设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + 2 \int_0^x f(t)dt = x^2$, 求 $f(x)$

解

令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $F'(x) = f(x)$, 原微分方程等价于:

$$\begin{aligned} F'(x) + 2F(x) &= x^2 \Rightarrow [e^{2x}F(x)]' = x^2e^{2x} \\ e^{2x}F(x) &= \int x^2e^{2x}dx \Rightarrow e^{2x}F(x) = \frac{x^2e^{2x}}{2} - \frac{xe^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} + C \end{aligned}$$

我们得到:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + Ce^{-2x}$$

$$f(x) = F'(x) = x - \frac{1}{2} - 2Ce^{-2x}, f(0) = -\frac{1}{2} - 2C = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{4}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} + x - \frac{1}{2}$$

31.2 Week II

May 8

例题 31.15.

设连续函数 $f(x)$ 满足 $x \int_0^1 f(tx)dt = f(x) + x$, 求 $f(x)$

解



对于 $x \int_0^1 f(tx) dt$, 令 $u = tx, t = \frac{u}{x}, dt = \frac{du}{x}$, 原微分方程为:

$$\int_0^x f(u) du = f(x) + x$$

令 $F(x) = \int_0^x f(u) du = f(x) + x, F'(x) = f(x)$, 原微分方程等价于:

$$\begin{aligned} F(x) - F'(x) &= x \Rightarrow [e^{-x} F(x)]' = -xe^{-x} \\ e^{-x} F(x) &= \int (-xe^{-x}) dx = (x+1)e^{-x} + C \Rightarrow F(x) = Ce^x + x + 1 \\ f(x) = F'(x) &= Ce^x + 1, f(0) = 0 \Rightarrow C = -1 \\ f(x) &= 1 - e^x \end{aligned}$$

例题 31.16.

求抛物线 $y = x^2$ 和直线 $x - y - 2 = 0$ 之间的最短距离

解

方法一 (不太严谨):

设抛物线上任意一点坐标 $P(x_0, y_0)$, 点 P 到直线 $x - y - 2 = 0$ 的距离为:

$$\begin{aligned} d &= \frac{|x_0 - x_0^2 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{(x_0 - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}}{\sqrt{2}} \\ d_{min} &= \frac{7\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

方法二:

我们设抛物线上一点 P 坐标为 (x, y) , 直线 $x - y - 2 = 0$ 上一点 Q 坐标 (α, β) , 我们得到 $|PQ|^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$.

我们令 $f(x, y, \alpha, \beta, \lambda, \mu) = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + \lambda(y - x^2) + \mu(\alpha - \beta - 2)$

我们令:

$$\left\{ \begin{array}{l} f'_x = 2(x - \alpha) - 2\lambda x = 0 \\ f'_y = 2(y - \beta) + \lambda = 0 \\ f'_{\alpha} = -2(x - \alpha) + \mu = 0 \\ f'_{\beta} = -2(y - \beta) - \mu = 0 \\ f'_{\lambda} = y - x^2 = 0 \\ f'_{\mu} = \alpha - \beta - 2 = 0 \end{array} \right.$$



我们解得:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \\ \alpha = \frac{11}{8} \\ \beta = -\frac{5}{8} \\ \lambda = -\frac{7}{4} \\ \mu = -\frac{7}{4} \end{cases}$$

$$f(x, y, \alpha, \beta, \lambda, \mu)_{min} = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{11}{8}, -\frac{5}{8}, -\frac{7}{4}, -\frac{7}{4}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{8}$$

May 9

例题 31.17.

设 $f(x)$ 二阶可导, $f(-x) = -f(x)$, $f(x+1) = f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\sin(x-1)} = 1$

- A. $f''(99) \leq f'(100) \leq f(101)$
- B. $f(99) = f(100) < f'(101)$
- C. $f'(99) \leq f(100) < f''(101)$
- D. $f(99) < f'(100) = f''(100)$

解

由题意知道:

$$f(x), f'(x), f''(x) \text{ 周期为 } 1, f(x), f''(x) \text{ 是奇函数, 且 } f(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\sin(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 1$$

我们从而得到: $f(n) = 0, f'(n) = 1, f''(n) = 0$

此题答案选 B

例题 31.18.

设连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt + e^{-x} - 1$, 求 $f(x)$

解

原微分方程等价于:

$$\int_0^x f(t)dt = x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x t f(t)dt + e^{-x} - 1$$

对微分方程左右两边对 x 求导, 得到:

$$f(x) = \int_0^x f(t)dt - e^{-x}$$



我们令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt, f(x) = F'(x)$, 上式等价于:

$$\begin{aligned} F(x) - F'(x) &= e^{-x} \Rightarrow [e^{-x} F(x)]' = -e^{-2x} \\ F(x) &= Ce^x + \frac{1}{2}e^{-x} \end{aligned}$$

$$f(x) = F'(x) = Ce^x - \frac{1}{2}e^{-x}, f(0) = -1 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$$

May 10

例题 31.19.

设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$, 求 $f(x)$

解

对微分方程左右两边对 x 求导, 得到:

$$f'(x) = \cos x - \int_0^x f(t)dt$$

令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt, f(x) = F'(x)$, 上式等价于:

$$F'' + F = \cos x$$

特征方程为 $r^2 + 1 = 0, r_1 = i, r_2 = -i$, 方程通解为 $F(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

特解设为 $F(x) = x(A \cos x + B \sin x)$, 代入得到:

$$A = 0, B = \frac{1}{2}$$

$$F(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{x}{2} \sin x$$

$$f(x) = F'(x) = C_2 \cos x - C_1 \sin x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{x}{2} \cos x \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{x}{2} \cos x$$

例题 31.20.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$$

解

典型的区间再现

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan(\frac{\pi}{4} - x)) dx$$



$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 - \ln(1 + \tan x)) dx$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 dx = \frac{\ln 2}{4} \pi$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx = \frac{\ln 2}{8} \pi$$

May 11

例题 31.21.

设 $f(x)$ 是连续的正值函数, 且单调减少, 证明:

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx} \leq \frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}$$

解

原命题等价于:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 xf^2(x)dx \int_0^1 f(y)dy - \int_0^1 xf(x)dx \int_0^1 f^2(y)dy \leq 0 \\ I &= \iint_D [xf(x)f(y)(f(x) - f(y))] dxdy, D = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\} \end{aligned}$$

积分区域关于 $y = x$ 对称, 我们交换 x, y 位置, 得到

$$2I = \iint_D [f(x)f(y)(f(x) - f(y))(x - y)] dxdy, D = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$$

我们知道 $f(x)$ 单调递减, 且 $f(x) > 0$, 我们得到:

$$f(x)f(y) > 0, (x - y)(f(x) - f(y)) \leq 0 \Rightarrow I \leq 0, \text{ 证毕}$$

例题 31.22.

$$\iint_D \frac{1}{\arcsin \sqrt{x^2 + y^2}} dxdy$$

其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \geq y, x \geq 0, y \geq 0\}$

解

利用极坐标公式进行代换, $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 我们得到:

$$I = \iint_{D_1} \frac{r}{\arcsin r} drd\theta, \theta \in (0, \frac{\pi}{2}), r \in (\sin \theta, 1)$$



上面的积分可以化为:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\sin \theta}^1 \frac{r}{\arcsin r} dr = \int_0^1 dr \int_0^{\arcsin r} \frac{r}{\arcsin r} d\theta = \frac{1}{2}$$

$$\iint_D \frac{1}{\arcsin \sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \frac{1}{2}$$

May 12

例题 31.23.

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, $\int_0^1 f(x)dx = 1$, 证明:

$$\exists \xi \neq \eta \in (0, 1), \text{ s.t. } f(\xi) + 3f(\eta) = 4f(\xi)f(\eta)$$

解

我们令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 我们有:

$$F(0) = 0, F(1) = 1, F(x) \text{ 在 } [0, 1] \text{ 连续, 在 } (0, 1) \text{ 可导}$$

原命题转化为证明:

$$\exists \xi \neq \eta \in (0, 1), \text{ s.t. } F'(\xi) + 3F'(\eta) = 4F'(\xi)F'(\eta)$$

上面的式子我们进行一些变形:

$$\exists \xi \neq \eta \in (0, 1), \text{ s.t. } \frac{1}{F'(\eta)} + \frac{3}{F'(\xi)} = 4$$

$$F(x) \text{ 在 } [0, 1] \text{ 连续, } F(0) = 0, F(1) = 1, \exists c \in (0, 1) \text{ s.t. } F(c) = \frac{1}{4}.$$

由拉格朗日中值定理我们得到:

$$\begin{aligned} \exists \xi \in (0, c), \eta \in (c, 1), \text{ s.t. } & \left\{ \begin{array}{l} \frac{F(c) - F(0)}{c} = F'(\xi) \\ \frac{F(1) - F(c)}{1 - c} = F'(\eta) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{F'(\xi)} = 4c \\ \frac{1}{F'(\eta)} = \frac{4}{3}(1 - c) \end{array} \right. \\ & \frac{1}{F'(\xi)} + \frac{3}{F'(\eta)} = 4c + 4(1 - c) = 4 \end{aligned}$$

$$\exists \xi \neq \eta \in (0, 1), \text{ s.t. } f(\xi) + 3f(\eta) = 4f(\xi)f(\eta), \text{ 证毕}$$

例题 31.24.

函数 $\frac{|x|e^{\frac{1}{x-1}} \ln(x-1)^2}{x(x-1)(x-2)}$ 在下列哪个区间内无界:

- A. $(-\infty, 0)$
- B. $(0, 1)$
- C. $(1, 2)$



- D. $(2, +\infty)$

解

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x \ln(1-x)}{2ex} &= 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \ln(1-x)}{2ex} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2e^{\frac{1}{x-1}} \ln(1-x)}{1-x} &= 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2e^{\frac{1}{x-1}} \ln(x-1)}{1-x} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2e \ln(x-1)}{x-2} &= 2e \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x-1)}{(x-1)(x-2)} &= 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2 \ln(1-x)}{(x-1)(x-2)} = 0 \end{aligned}$$

答案:C

May 13

例题 31.25.

求 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$ 和 $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 1}} \left(1 + \frac{1}{xy}\right)^{\frac{y^2}{\sin \frac{2}{x}}}$

解

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1+x^2+y^2-1}{(x^2+y^2)(\sqrt{1+x^2+y^2}+1)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}+1} = \frac{1}{2} \\ I_2 &= \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 1}} e^{\frac{y^2}{\sin \frac{2}{x}}} \ln\left(1 + \frac{1}{xy}\right) \\ I_2 &= \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow 1}} e^{\frac{xy^2}{2} \cdot \frac{1}{xy}} = e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

例题 31.26.

$$\int_0^\pi (e^{-\cos x} - e^{\cos x}) dx$$

解

区间再现

原积分等价于:

$$I = \int_0^\pi (e^{\cos x} - e^{-\cos x}) dx$$

$$2I = 0 \Rightarrow I = 0$$



May 14

例题 31.27.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\arctan e^x) \sin^2 x dx$$

解

区间再现

原积分等价于:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan e^x \right) \sin^2 x dx$$

$$2I = \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{4}$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\arctan e^x) \sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{8}$$

例题 31.28.

设 $f(x) = \int_0^x f(x-t) \sin t dt + x$, 求 $f(x)$

解

我们有: $\int_0^x f(x-t) \sin t dt = \sin x \int_0^x f(t) \cos t dt - \cos x \int_0^x f(t) \sin t dt$

原微分方程等价于:

$$f(x) = \sin x \int_0^x f(t) \cos t dt - \cos x \int_0^x f(t) \sin t dt + x$$

两边对 x 求导得到:

$$f'(x) = 1 + \cos x \int_0^x f(t) \cos t dt + \sin x \int_0^x f(t) \sin t dt$$

再次两边对 x 求导得到:

$$f''(x) = f(x) + \cos x \int_0^x f(t) \sin t dt - \sin x \int_0^x f(t) \cos t dt \Rightarrow f''(x) = f(x) + x - f(x)$$

$$f''(x) = x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + C_1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{6}x^3 + C_1x + C_2$$

我们有: $f(0) = 0$, $f'(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 1$, $C_2 = 0$

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + x$$



31.3 Week III

May 15

例题 31.29.

下列函数在区间 $(0, 1)$ 内无界的是:

- A. $\int_0^x \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} dt$
- B. $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$
- C. $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1-t)^3}} dt$
- D. $\int_0^x \frac{1}{(t-1)^2} \sin \frac{1}{t-1} dt$

解

$$A \quad f(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} dt = e^{-\frac{1}{x}}$$

$$B \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$C \quad f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1-t)^3}} dt = \frac{2}{\sqrt{1-x}} - 2, \quad f(1) \rightarrow +\infty$$

$$D \quad f(x) = \int_0^x \frac{1}{(t-1)^2} \sin \frac{1}{t-1} dt = \cos \frac{1}{x-1} + \frac{\pi}{2} \text{ 有界}$$

答案:C

例题 31.30.

$$\iint_D \frac{x^3 \sin y \cos y e^{\sqrt{x^2+2}}}{\sqrt{x^2 \cos^2 y + 2} \sqrt{x^2+2}} dx dy$$

, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$

解



原二重积分可以化为：

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{D'} \frac{r^2 \sin \theta \cos \theta e^{\sqrt{r^2+2}}}{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + 2\sqrt{r^2+2}}} r dr d\theta, \text{ 其中 } D' = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq 1, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})\} \\
 &= \iint_{D''} \frac{xye^{\sqrt{x^2+y^2+2}}}{\sqrt{x^2+2}\sqrt{x^2+y^2+2}} dx dy \\
 &= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{ye^{\sqrt{x^2+y^2+2}}}{\sqrt{x^2+y^2+2}} dy \\
 &= e^{\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} dx - \int_0^1 \frac{xe^{\sqrt{x^2+2}}}{\sqrt{x^2+2}} dx \\
 &= e^{\sqrt{3}}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - e^{\sqrt{3}} + e^{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

May 16

例题 31.31.

已知函数 $f(x) = \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^\alpha}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界，求 α 取值范围：

- A. $(0, +\infty)$
- B. $(0, 3]$
- C. $(0, 2)$
- D. $(1, 3]$

解

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界，我们可以得到：

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ 和 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ 存在} \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^{3-\alpha}}{\alpha(\alpha-1)(1+x^2)} \\
 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^{3-\alpha}}{\alpha(\alpha-1)}
 \end{aligned}$$

我们得到：

$$\begin{cases} 3 - \alpha \geq 0 \\ 3 - \alpha \leq 2 \Rightarrow 1 < \alpha \leq 3 \\ \alpha \neq 1 \end{cases}$$

综上所述，答案:D



例题 31.32.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos(\frac{\pi}{4} - x) \cos x} dx$$

解

区间再现

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\pi}{4} - x}{\cos(\frac{\pi}{4} - x) \cos x} dx \\ 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\pi}{4}}{\cos(\frac{\pi}{4} - x) \cos x} dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x + \sin x \cos x} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d \tan x}{1 + \tan x} = \frac{\ln 2\sqrt{2}\pi}{4} \\ I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos(\frac{\pi}{4} - x) \cos x} dx = \frac{\ln 2\sqrt{2}\pi}{8} \end{aligned}$$

May 17

例题 31.33.

$$\iint_D \frac{1}{xy} dxdy, D = \{(r, \theta) | \frac{\cos \theta}{4} \leq r \leq \frac{\cos \theta}{2}, \frac{\sin \theta}{4} \leq r \leq \frac{\sin \theta}{2}\}$$

解

二重积分积分区域如下图所示:

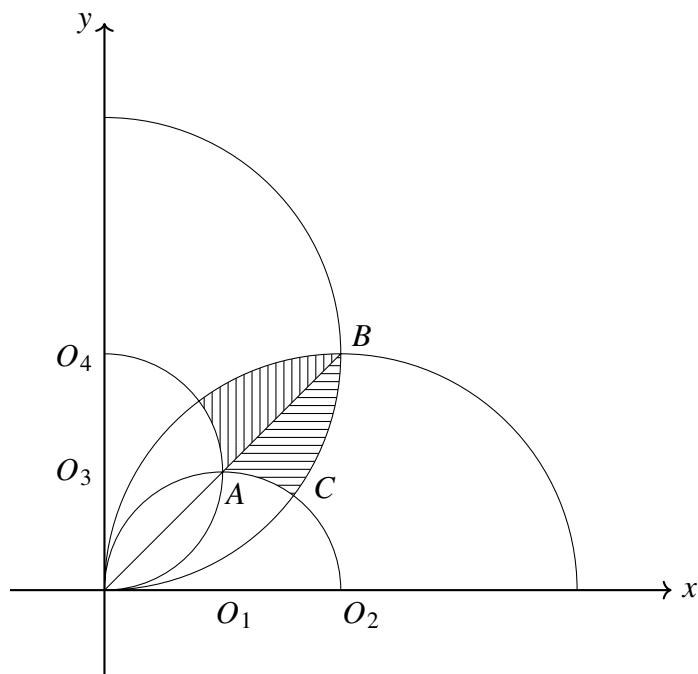


图 31.1: 二重积分区域示意图



$$I = 2 \iint_{D_{ACB}} \frac{1}{xy} dx dy = 2 \int_{\arctan \frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\frac{\cos \theta}{4}}^{\frac{\sin \theta}{2}} \frac{1}{r \sin \theta \cos \theta} dr$$

$$I = 2 \int_{\arctan \frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln 2 \tan \theta}{\sin \theta \cos \theta} d\theta = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln 2t}{t} dt = \ln^2 2$$

例题 31.34.

当 n 充分大时, $a - \frac{1}{n} < a_n < a + \frac{1}{n}$ 是数列 a_n 收敛于 a 的什么条件:

- A. 充分必要条件
- B. 必要条件但非充分条件
- C. 充分条件但非必要条件
- D. 既非充分也非必要条件

解

(i). 充分性:

$a - \frac{1}{n} < a_n < a + \frac{1}{n}$, 由夹逼定理得到:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a - \frac{1}{n}) < \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n < \lim_{n \rightarrow +\infty} (a + \frac{1}{n})$$

我们有: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a - \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a + \frac{1}{n}) = a$ 因此:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \Rightarrow \text{充分性成立}$$

(ii). 必要性

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_0 > 0, \text{ 当 } n > N_0, |a_n - a| < \varepsilon$$

我们得到:

$n > N_0, a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, 当 $\frac{1}{N_0 + 1} < \varepsilon$, 我们不能得到 $a - \frac{1}{n} < a_n < a + \frac{1}{n}$, 必要性不成立

答案:C

May 18

例题 31.35.

$$\iint_D |x^2 + y^2 - \sqrt{2}(x + y)| dx dy, D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$$

解

原二重积分等价于:

$$I = I_1 + 2I_2 = \iint_D [x^2 + y^2 - \sqrt{2}(x + y)] dx dy + 2 \iint_{D_1} [\sqrt{2}(x + y) - (x^2 + y^2)] dx dy$$



$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r(r^2 - \sqrt{2}r(\sin \theta + \cos \theta)) dr = \int_0^{2\pi} (4 - \frac{8\sqrt{2}}{3}(\sin \theta + \cos \theta)) d\theta = 8\pi$$

$$I_2 = \iint_{D_1} [\sqrt{2}(x+y) - (x^2 + y^2)] dx dy, D_1 : (x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (y - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 \leq 1$$

做变量替换: $\begin{cases} x - \frac{\sqrt{2}}{2} = R \cos \alpha \\ y - \frac{\sqrt{2}}{2} = R \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(R, \alpha)} \right| dR d\alpha = R dR d\alpha$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^1 (1 - R^2) R dR = \frac{\pi}{2}$$

$$I = I_1 + 2I_2 = 9\pi$$

例题 31.36.

设 $f(x)$ 可积, 则下列结论正确的是:

- A. 如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A$
- B. 如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A$
- C. 如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$
- D. 如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \frac{|f(t)|}{1+t^2} dt = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{|f(t)|}{1+t^2} dt = A$

解

针对此题, 我们需要区分几个概念:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 只要求在 x 邻域内有定义, 不要求 x 处有定义

$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = A$, $f(x)$ 单调, $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$

对于 A, 我们只能得到在 $x = 0$ 的邻域内的一组特殊的离散点满足极限的定义, 其余点未知, 我们举一个反例, $x_n = \frac{1}{n\pi}$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

对于 B, 我们举出一个反例 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$, $x_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$

对于 C, 不清楚 $f(x)$ 单调性, 举一个反例, $f(x) = \sin \pi x$

对于 D, 利用积分的几何意义知道 $g(x) = \int_0^x \frac{|f(t)|}{1+t^2} dt$ 单调递增

答案:D.

May 19



例题 31.37.

设 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 1$, $g(x, y) = f\left(xy, \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\right)$, 求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$

解

$$\text{我们令 } \begin{cases} u = xy \\ v = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \end{cases}$$

我们有:

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = y \frac{\partial f}{\partial u} + x \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = x \frac{\partial f}{\partial u} - y \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = y(y \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + x \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}) + \frac{\partial f}{\partial v} + x(y \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + x \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = x(x \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - y \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}) - \frac{\partial f}{\partial v} - y(x \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - y \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}) \end{cases}$$

我们得到:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = x^2 + y^2$$

例题 31.38.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x \arctan e^x}{1 + \cos^2 x} dx$$

解

区间再现

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x (\frac{\pi}{2} - \arctan e^x)}{1 + \cos^2 x} dx \\ 2I &= \frac{\pi}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \end{aligned}$$

$$\text{令 } J = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$J = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \Rightarrow 2J = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{2}$$



$$J = \frac{\pi^2}{4}, I = \frac{\pi}{2} J = \frac{\pi^3}{8}$$

May 20

例题 31.39.

$$\iint_D \frac{1}{3x^2 + y^2} dx dy$$

D 是由 $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 1 \\ x^2 + y^2 - xy = 2 \end{cases}$ 和直线 $\begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ y = 0 \end{cases}$ 围成

解

原二重积分等价于：

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{r_1}^{r_2} \frac{r}{3r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} dr, \text{ 其中 } \begin{cases} r_1 = \sqrt{\frac{1}{1 - \sin \theta \cos \theta}} \\ r_2 = \sqrt{\frac{2}{1 - \sin \theta \cos \theta}} \end{cases}$$

$$I = \frac{\ln 2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta} d\theta = \frac{\ln 2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3 + \tan^2 \theta} d\tan \theta$$

$$I = \frac{\ln 2}{2\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\tan \theta}{\sqrt{3}}\right) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi \ln 2}{8\sqrt{3}}$$

例题 31.40.

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$, 求证:

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n}$$

解

引理 31.3.1 (积分和求和)

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx$$

我们利用上面的式子, 对不等式的左边进行处理:

$$\text{左边: } \left| \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx - \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dx \right| = \left| \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} [f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)] dx \right|$$



由绝对值不等式得到:

$$\text{左边} \leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| [f(x) - f(\frac{k}{n})] \right| dx \leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} M \left(\frac{k}{n} - x \right) dx$$

$$\text{左边} \leq M \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n^2} = \frac{M}{2n} = \text{右边}$$

May 21

例题 31.41.

已知数列 $\{x_n\}$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = \int_0^1 e^{-x^2} dx$

- A. $\lim_{n \rightarrow +\infty} = 0$
- B. $\lim_{n \rightarrow +\infty} = \infty$
- C. $\lim_{n \rightarrow +\infty} = a (a \neq 0)$
- D. $\lim_{n \rightarrow +\infty}$ 不存在但不是 ∞

解

首先我们可以得到:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = a, a \in (0, 1)$$

我们由 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = a \Rightarrow |x_n| = a|x_{n+1}| < |x_{n+1}| \Rightarrow x_n$ 单调递增

我们假设 x_n 有上界

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = 1 \neq a \text{ 矛盾!!!}$$

答案:B

例题 31.42.

设 $f(x, y)$ 二阶偏导数连续, $f(1, y) = f(x, 1) = 0$, $\iint_D f(x, y) dxdy = a$, 其中 $D \in [0, 1] \times [0, 1]$, 求 $\iint_D xy f''_{xy}(x, y) d\sigma$

解



原二重积分可以化为：

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x dx \int_0^1 y df'_x(x, y) &= \int_0^1 x \left[y f'_x(x, y) \Big|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 f'_x(x, y) dy \right] dx \\
 &= - \int_0^1 x dx \int_0^1 f'_x(x, y) dy \\
 &= - \int_0^1 dy \int_0^1 x df(x, y) \\
 &= - \int_0^1 \left[x f(x, y) \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 f(x, y) dx \right] dy \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = a
 \end{aligned}$$

$$\iint_D xy f''_{xy}(x, y) d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = a$$

31.4 Week IV

May 22

例题 31.43.

设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx (n = 0, 1, 2, \dots)$

(1). 证明：数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2}, (n = 2, 3, \dots)$

(2). 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$

解

(1). 我们令 $x = \sin t, t \in [0, \frac{\pi}{2}], dx = \cos t dt$, 我们有：

$$\begin{aligned}
 a_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t dt \\
 a_0 &= \frac{\pi}{4}, a_1 = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

根据华里士公式，我们有：

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx &= \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1, & n \text{ 为大于 1 的奇数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数} \end{cases} \\
 a_n - a_{n-1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} t dt \\
 a_n - a_{n-1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -(1 - \sin t)^2 \sin^{n-1} t dt < 0 \Rightarrow a_n < a_{n-1} \Rightarrow \{a_n\} \text{ 单调递减}
 \end{aligned}$$



(i). 当 n 为奇数时, 我们有:

$$\begin{cases} a_n = \left(1 - \frac{n+1}{n+2}\right) \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1 \\ a_{n-2} = \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \frac{n}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1 \\ \quad \begin{cases} a_n = \frac{n-1}{n+2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1 \\ a_{n-2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1 \end{cases} \\ a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} \end{cases}$$

(ii). 当 n 为偶数数时, 我们有:

$$\begin{cases} a_n = \left(1 - \frac{n+1}{n+2}\right) \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ a_{n-2} = \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \frac{n}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ \quad \begin{cases} a_n = \frac{n-1}{n+2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ a_{n-2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} \end{cases}$$

综上所述, 数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2}$, ($n = 2, 3, \dots$)

(2). 我们不妨设 $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, ($n = 1, 2, \dots$)

$b_1 = \frac{4}{3\pi}$, 当 $n \geq 2$ 是, 我们有:

$$b_n b_{n-1} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \frac{n-1}{n+2}$$

不妨设 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$

$$A^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+2} = 1 \Rightarrow A = 1 (A > 0)$$

我们来严格证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$

原命题转换为:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{当 } n > N \text{ 时}, \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\int_0^1 (1-x)x^{n-1} \sqrt{1-x^2} dx < \varepsilon \int_0^1 x^{n-1} \sqrt{1-x^2} dx \Rightarrow \int_0^1 (1-x-\varepsilon)x^{n-1} \sqrt{1-x^2} dx < 0$$

$$\int_0^{1-\varepsilon} (1-x-\varepsilon)x^{n-1} \sqrt{1-x^2} dx < \int_{1-\varepsilon}^1 (x+\varepsilon-1)x^{n-1} \sqrt{1-x^2} dx$$



$$\text{左式} < (1 - \varepsilon)^{n-1} \int_0^1 x^{n-1} \sqrt{1-x^2} dx = P(1 - \varepsilon)^{n-1}$$

$$\text{右式} > \int_{1-\frac{\varepsilon}{2}}^1 (x + \varepsilon - 1) x^{n-1} \sqrt{1-x^2} dx > (1 - \frac{\varepsilon}{2})^{n-1} \int_{1-\frac{\varepsilon}{2}}^1 (x + \varepsilon - 1) \sqrt{1-x^2} dx > Q(1 - \frac{\varepsilon}{2})^{n-1}$$

其中 P, Q 均为与 n 无关的正数, 我们只需找到 N , 使得 $Q(1 - \frac{\varepsilon}{2})^{n-1} > P(1 - \varepsilon)^{n-1}$

$$n > [1 + \frac{\ln P - \ln Q}{\ln(1 - \frac{\varepsilon}{2}) - \ln(1 - \varepsilon)}]$$

综上, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = [1 + \frac{\ln P - \ln Q}{\ln(1 - \frac{\varepsilon}{2}) - \ln(1 - \varepsilon)}] + 1 > 0$, 当 $n > N$ 时, $|\frac{a_n}{a_{n-1}} - 1| < \epsilon$

注

(1). 我们可以得到:

$$a_{n+1} - a_n = \int_0^1 x^{n+1} \sqrt{1-x^2} dx - \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^1 (x-1)x^n \sqrt{1-x^2} dx < 0$$

我们可以得到数列 $\{a_n\}$ 单调递减.

我们还有:

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^1 x^{n-1} d(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{n-1}{3} \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1-x^2} (1-x^2) dx \\ &= \frac{n-1}{3} a_{n-2} - \frac{n-1}{3} a_n \\ a_n &= \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} \end{aligned}$$

(2). 我们由 (1) 知道, $\{a_n\}$ 单调递减且 $a_n > 0$, 我们得到:

$$\begin{cases} a_n < a_{n-1} \\ a_{n-1} < a_{n-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \\ \frac{a_n}{a_{n-2}} < \frac{a_n}{a_{n-1}} \end{cases}$$

我们由夹逼定理可以得到:

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_{n-2}} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$$



综上所述, 我们得到: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$

例题 31.44.

$xy' - (2x^2 + 1)y = x^2 (x \geq 1)$, 且 $y(1) = a$, 讨论 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$

解

我们得到微分方程:

$$y' - \left(2x + \frac{1}{x}\right)y = x \Rightarrow (e^{\int (-2x - \frac{1}{x}) dx} y)' = xe^{\int (2x + \frac{1}{x}) dx}$$

$$y = xe^{x^2} \left(\int_1^x e^{-t^2} dt + C \right)$$

$$\text{我们由: } y(1) = a \Rightarrow C = \frac{a}{e}$$

原问题转化为:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{x^2} \left(\int_1^x e^{-t^2} dt + \frac{a}{e} \right)$$

我们有:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

原极限可以写作:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{x^2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^1 e^{-t^2} dt + \frac{a}{e} \right)$$

$$(i). \text{ 当 } a = e \left(\int_0^1 e^{-t^2} dt - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)$$

洛必达法则:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{x^2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^1 e^{-t^2} dt + \frac{a}{e} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{-2x^2 - 1} = -\frac{1}{2}$$

$$(ii). \text{ 当 } a \neq e \left(\int_0^1 e^{-t^2} dt - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right), \text{ 极限不存在.}$$

May 23

例题 31.45.

已知当 n 充分大时, $|a_n| \leq |b_n| \leq |c_n|$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$

- A. $\lim_{n \rightarrow \infty} (|a_n| - b_n)$
- B. $\lim_{n \rightarrow \infty} (|b_n| - c_n)$
- C. $\lim_{n \rightarrow \infty} (|b_n| - c_n)$
- D. $\lim_{n \rightarrow \infty} (|b_n| - a_n)$



解

我们有: $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} |x_n| = A$

我们假设: $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} |c_n| = A$

我们得到: $\lim_{x \rightarrow \infty} |a_n| = A$

根据夹逼定理: $\lim_{x \rightarrow \infty} |b_n| = A$

我们已知的极限有 $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n, \lim_{x \rightarrow \infty} |a_n|, \lim_{x \rightarrow \infty} |b_n|, \lim_{x \rightarrow \infty} |c_n|$

答案:D.

例题 31.46.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + 3n})$$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + 3n} - \pi n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin^2\left(\frac{3n\pi}{\sqrt{n^2 + 3n} + n}\right) \\ &= \sin^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

May 24

例题 31.47.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \left[\frac{1}{n + \ln 1} + \frac{2}{n + \ln 2} + \cdots + \frac{n}{n + \ln n} \right]$$

引理 31.4.1 (斯特林公式)

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

注

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{n}(\ln \frac{1}{n} + \ln \frac{2}{n} + \cdots + \ln \frac{n}{n})} \\ &= e^{-\int_0^1 \ln x dx} \\ &= e \end{aligned}$$

解

我们不妨设 $b_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \left[\frac{1}{n + \ln 1} + \frac{2}{n + \ln 2} + \cdots + \frac{n}{n + \ln n} \right]$

$a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \left[\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n}{n} \right], c_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \left[\frac{1}{n + \ln n} + \frac{2}{n + \ln n} + \cdots + \frac{n}{n + \ln n} \right]$



我们得到:

$$c_n < b_n < a_n \Rightarrow \frac{n+1}{2(n+\ln n)} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} < b_n < \frac{n+1}{2n} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

我们有: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2(n+\ln n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$

对于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

我们可以知道: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$

我们得到: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{e}{2}$

由夹逼定理, 我们得到: $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{e}{2}$

例题 31.48.

$f(x) > 0, f(x)f''(x) \geq [f'(x)]^2, f(0) = 1$, 证明: $f(x) \geq e^{f'(0)x}$

解

这个题还有第一问: $f(x_1)f(x_2) \geq f^2(\frac{x_1+x_2}{2})$

我们由:

$f(x)f''(x) \geq [f'(x)]^2 \Rightarrow$ 可以构造出函数 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 单调递增

我们将 $f(x_1)f(x_2) \geq f^2(\frac{x_1+x_2}{2})$ 取对数得到:

$$\ln f(x_1) + \ln f(x_2) \geq 2 \ln f(\frac{x_1+x_2}{2})$$

我们构造函数 $g(x) = \ln f(x)$

原命题转化为: $\frac{g(x_1) + g(x_2)}{2} \geq g(\frac{x_1+x_2}{2})$

我们只需要证明: $g(x)$ 是凹函数, $g''(x) \geq 0$

我们有:

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}, g''(x) = \frac{f(x)f''(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)} \geq 0$$

$g(x)$ 为凹函数 $\Rightarrow \frac{g(x_1) + g(x_2)}{2} \geq g(\frac{x_1+x_2}{2})$

我们证明了: $f(x_1)f(x_2) \geq f^2(\frac{x_1+x_2}{2})$

$$g''(x) \geq 0 \Rightarrow g'(x) \geq g'(0) = \frac{f'(0)}{f(0)}$$

我们可以理解为: $g(x)$ 始终大于 $g(0)$ 处的切线

$$g(x) \geq g'(0)x + g(0) \Rightarrow \ln f(x) \geq f'(0)x \Rightarrow f(x) \geq e^{f'(0)x}$$

May 25



例题 31.49.

设 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明: $|f(x)| \leq \frac{1}{2} \int_a^b |f'(x)|dx$

解

我们可以得到:

$$f(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)tdt, \quad f(x) = -(f(b) - f(x)) = -\int_x^b f'(t)tdt$$

我们得到:

$$\begin{cases} |f(x)| = \left| \int_a^x f'(t)tdt \right| \leq \int_a^x |f'(t)|dt \\ |f(x)| = \left| \int_x^b f'(t)tdt \right| \leq \int_x^b |f'(t)|dt \end{cases} \Rightarrow 2|f(x)| \leq \int_a^b |f'(x)|dx$$

我们证明: $|f(x)| \leq \frac{1}{2} \int_a^b |f'(x)|dx$

例题 31.50.

$$\iint_D \ln |\sin(x-y)| dx dy, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq y \leq 2\pi\}$$

解

利用二重积分换元公式: $\begin{cases} u = y - x \\ v = x \end{cases} \Rightarrow dudv = dx dy, 0 \leq u \leq \pi - v, 0 \leq v \leq \pi$

我们得到原二重积分等价于:

$$I = \int_0^\pi du \int_0^{\pi-u} \ln(\sin u) dudv = \int_0^\pi (\pi - u) \ln(\sin u) du$$

利用区间再现公式:

$$2I = \pi \int_0^\pi \ln(\sin u) du \Rightarrow I = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u) du$$

$$I = -\frac{\ln 2\pi^2}{2}$$

引理 31.4.2 (区间再现例子)

- $\int_0^\pi \ln(\sin x) dx = \int_0^\pi \ln(\cos x) dx = -\frac{\ln 2\pi}{2}$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\tan x) dx = 0$



注

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx$$

我们有:

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x \cos x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2 dx \\ &= I - \frac{\ln 2\pi}{2} \\ I &= -\frac{\ln 2\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

May 26

例题 31.51.

设 $x_n = (1 + \frac{1}{n^2})(1 + \frac{2}{n^2}) \cdots (1 + \frac{n}{n^2})$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln(1+\frac{1}{n^2})} e^{\ln(1+\frac{2}{n^2})} \cdots e^{\ln(1+\frac{n}{n^2})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n^2}} e^{\frac{2}{n^2}} \cdots e^{\frac{n}{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n(n+1)}{2n^2}} \\ &= e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

引理 31.4.3 (不等式放缩)

- 球生不等式: $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$
- 球生不等式: $x \leq \tan x \leq \frac{4}{\pi}x, x \in [0, \frac{\pi}{4}]$
- 泰勒不等式: $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x, x \in [0, +\infty)$



我们利用不等式放缩：

$$\frac{k}{n^2+k} \leq \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2} \Rightarrow \frac{k}{n^2+n} \leq \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$$

我们得到：

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{1}{2}$$

由夹逼定理，我们得到： $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow I = e^{\frac{1}{2}}$

例题 31.52.

若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数，且满足 $\varphi(2) > \varphi(1), \varphi(2) > \int_2^3 \varphi(x) dx$ ，证明： $\exists \xi \in (1, 3), s.t. \varphi''(\xi) < 0$

解

我们有积分中值定理得到：

$$\exists \eta \in (2, 3), s.t. \int_2^3 \varphi(x) dx = \varphi(\eta)$$

我们由拉格朗日中值定理得到：

$$\begin{cases} \exists \xi_1 \in (1, 2), s.t. \frac{\varphi(2) - \varphi(1)}{2-1} = \varphi'(\xi_1) > 0 \\ \exists \xi_2 \in (2, \eta), s.t. \frac{\varphi(\eta) - \varphi(2)}{\eta-2} = \varphi'(\xi_2) < 0 \end{cases}$$

我们在区间 (ξ_1, ξ_2) 内使用拉格朗日中值定理得到：

$$\exists \xi_3 \in (\xi_1, \xi_2), s.t. \frac{\varphi(\xi_2) - \varphi(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} = \varphi'(\xi_3) < 0$$

综上所述，我们得到： $\exists \xi \in (1, 3), s.t. \varphi''(\xi) < 0$

May 27

例题 31.53.

设 $x_0 = 0, x_n = \frac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ ，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

解

我们有： $x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2}, x_n > 0$

我们使用数学归纳法来证明 x_n 单调递增： $(x_{n+1} > x_n)$

(1). 当 $n = 1$ 时， $x_2 > x_1$ 成立

(2). 当 $n \geq 1$ 时，假设 $n = k$ 时， $x_{k+1} > x_k$ ，我们有：

$$x_{k+1} = \frac{1+2x_k}{1+x_k} > x_k \Rightarrow 1+2x_k - x_k > 0$$



当 $n = k + 1$ 时:

$$x_{k+2} = \frac{1+2\frac{1+2x_k}{1+x_k}}{1+\frac{1+2x_k}{1+x_k}} = \frac{3+5x_k}{2+3x_k}$$

$$x_{k+2} - x_{k+1} = \frac{3+5x_k}{2+3x_k} - \frac{1+2x_k}{1+x_k} = \frac{1+2x_k - x_k^2}{(2+3x_k)(1+x_k)} > 0$$

我们证明: x_n 单调递增, 且 $x_n - 2x_n - 1 < 0 \Rightarrow |x_n| < 3$

$\{x_n\}$ 单调递增且有上界, 我们得到 x_n 极限必定存在, 我们不妨设:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = A (A > 0) \Rightarrow A = \frac{1+2A}{1+A} \Rightarrow A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

例题 31.54.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+1} x^2 \sin \frac{1}{x} dx$$

解

我们有:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = +\infty$$

我们有: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+1} x^2 \sin \frac{1}{x} dx = +\infty$

May 28

例题 31.55.

判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^5 - n + 2}}$ 和级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$ 敛散性

解

我们运用比较判别法的极限形式:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n+1}{\sqrt{n^5 - n + 2}}}{n^{-\frac{3}{2}}} = 1$$

原级数收敛.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}}{2n^{-\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}$$

原级数收敛.



例题 31.56.

$f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x)dx = A$, 求 $\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_x^y f(x)f(y)f(z)dz$

解

我们不妨设: $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $F(0) = 0$, $F(1) = A$, 原积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y)[F(y) - F(x)]dy \\ &= \int_0^1 f(x)dx \int_x^1 f(y)F(y)dy - \int_0^1 f(x)F(x)dx \int_x^1 f(y)dy \\ &= \int_0^1 f(x)\left[\frac{F^2(1)}{2} - \frac{F^2(x)}{2}\right]dx - \int_0^1 f(x)F(x)[F(1) - F(x)]dx \\ &= \frac{A^3}{2} - \frac{A^3}{6} - \frac{A^3}{2} + \frac{A^3}{3} \\ &= \frac{A^3}{6} \end{aligned}$$

May 29

例题 31.57.

判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2+(-1)^n}{n^2}$ 敛散性

解

我们不妨设: $a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{n^2}$, $b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{n^2}$

我们根据莱布尼茨判别法得到: a_n 收敛, b_n 收敛, 原级数收敛.

例题 31.58.

$$\iint_D \left| \frac{x+y}{2} - x^2 - y^2 \right| dx dy, D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

解

原二重积分可化为:

$$I = \iint_D \left| \frac{1}{8} - (x - \frac{1}{4})^2 - (y - \frac{1}{4})^2 \right| dx dy, D : \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$I = \iint_D (x^2 + y^2 - \frac{x+y}{2}) dx dy - 2 \iint_{D'} (x^2 + y^2 - \frac{x+y}{2}) dx dy$$

其中:

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}, D' = \{(x, y) | (x - \frac{1}{4})^2 + (y - \frac{1}{4})^2 \leq \frac{1}{8}\}$$



$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 [r^3 - \frac{r^2}{2}(\sin \theta + \cos \theta)] dr - 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{\sin \theta + \cos \theta}{2}} [r^3 - \frac{r^2}{2}(\sin \theta + \cos \theta)] dr$$

$$I = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{24} \int_0^\pi \sin^4 \theta d\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{64} = \frac{33\pi}{64}$$

May 30

例题 31.59.

设 $f(x, y)$ 在区域 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 上连续, $f(0, 0) = 0$, 且 $f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微, $f'_y(0, 0) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} dt \int_x^{\sqrt{t}} f(t, u) du}{1 - e^{-\frac{x^4}{4}}}$$

解

我们交换积分次序得到:

$$\begin{aligned} I &= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x du \int_0^{u^2} f(t, u) dt}{\frac{x^4}{4}} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} f(t, x) dt}{x^3} \end{aligned}$$

我们由积分中值定理得到:

$$\exists \xi \in (0, x^2), s.t. \int_0^{x^2} f(t, x) dt = x^2 f(\xi, x)$$

原极限可以化为:

$$I = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 f(\xi, x)}{x^3} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(\xi, x)}{x}$$

$f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 我们得到:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(0, 0) + f'_x(0, 0)\Delta x + f'_y(0, 0)\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$$

我们有:

$$f(\xi, x) = f(0, 0) + f'_x(0, 0)\xi + f'_y(0, 0)x + o(\sqrt{(\xi)^2 + x^2}) = f'_x(0, 0)\xi + x + o(\sqrt{\xi^2 + x^2})$$

我们知道:

$$0 < \xi < x^2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi}{x} = 0$$

$$0 < \sqrt{\xi^2 + x^2} < \sqrt{(x^2 + x^2)} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\xi^2 + x^2}}{x} = 0$$

我们得到原极限 $I = -1$



例题 31.60.

设 $f(x) = 1 - \cos x$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{\cos x})(1 - \sqrt[3]{\cos x})(1 - \sqrt[4]{\cos x})(1 - \sqrt[5]{\cos x})}{f\{f[f(x)]\}}$

解

我们有:

$$\begin{cases} x \rightarrow 0, \sqrt{\cos x} - 1 = \sqrt{1 + \cos x - 1} - 1 \sim \frac{1}{2}(\cos x - 1) \\ x \rightarrow 0, \sqrt[3]{\cos x} - 1 = \sqrt[3]{1 + \cos x - 1} - 1 \sim \frac{1}{3}(\cos x - 1) \\ x \rightarrow 0, \sqrt[4]{\cos x} - 1 = \sqrt[4]{1 + \cos x - 1} - 1 \sim \frac{1}{4}(\cos x - 1) \\ x \rightarrow 0, \sqrt[5]{\cos x} - 1 = \sqrt[5]{1 + \cos x - 1} - 1 \sim \frac{1}{5}(\cos x - 1) \end{cases}$$

原极限为:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{120}(1 - \cos x)^4}{\frac{1}{8}(1 - \cos x)^4} = \frac{1}{15}$$

May 31

例题 31.61.

$z(x, y) = \int_0^x dt \int_t^x f(t+y)g(yu)du$, f 和 g' 连续, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

解

我们交换积分次序:

$$z(x, y) = \int_0^x du \int_0^u f(t+y)g(yu)dt$$

我们得到:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = g(xy) \int_0^x f(t+y)dt$$

我们令 $t+y=u, t=u-y, dt=du$, 我们得到:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = g(xy) \int_y^{x+y} f(u)du$$

我们得到:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xg'(xy) \int_y^{x+y} f(t)dt + g(xy)[f(x+y) - f(y)]$$

例题 31.62.

$F(x) = \int_0^x e^{tx-t^2} dt$, 求 $F'(x)$



解

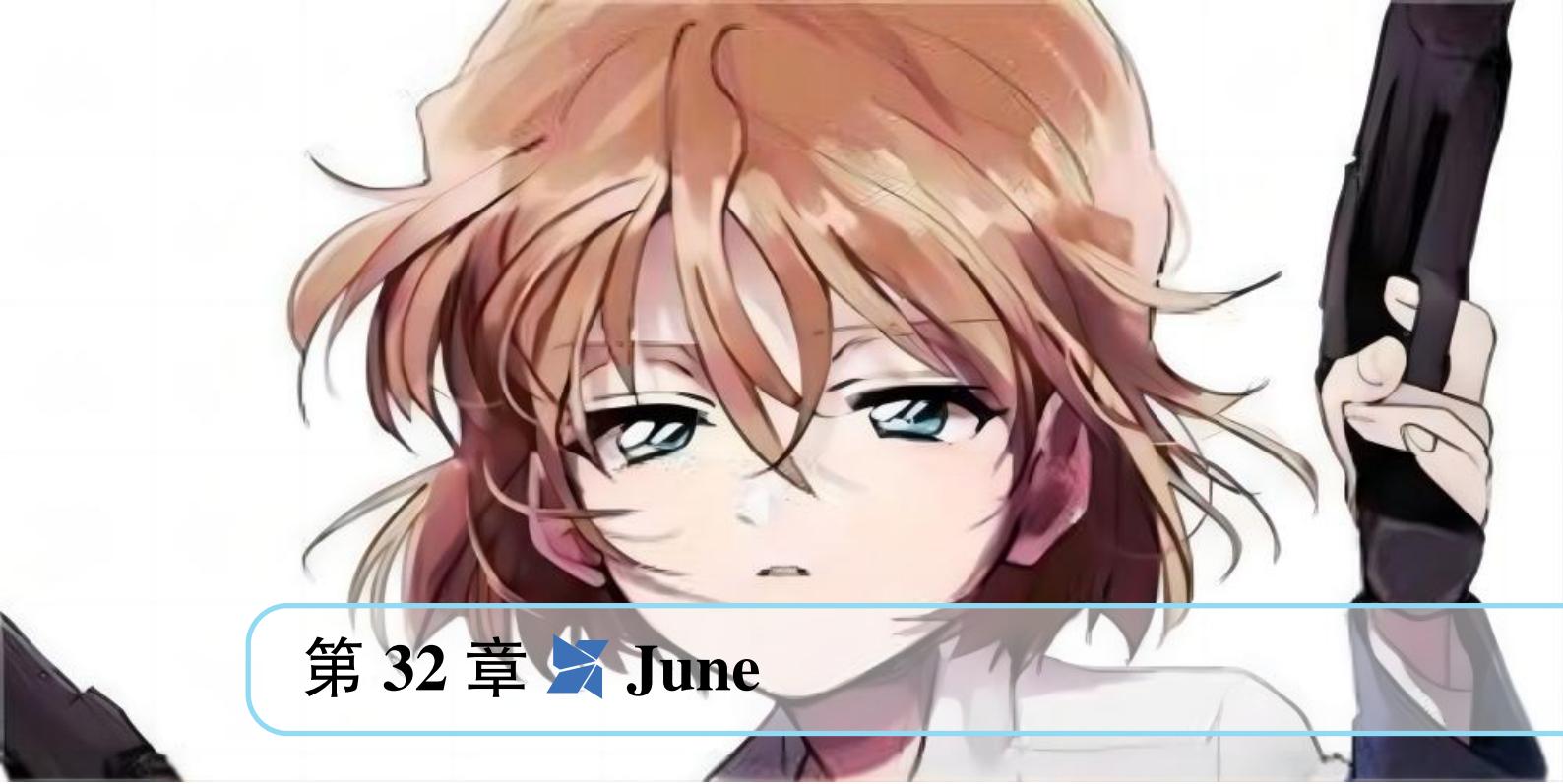
$$F(x) = \int_0^x e^{\frac{x^2}{4} - (t-\frac{x}{2})^2} dt = e^{\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{-(t-\frac{x}{2})^2} dt$$

令 $t - \frac{x}{2} = u, t = u + \frac{x}{2}, dt = du$, 我们得到:

$$F(x) = e^{\frac{x^2}{4}} \int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} e^{-u^2} du$$

$$F'(x) = \frac{x}{2} e^{\frac{x^2}{4}} \int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} e^{-u^2} du + e^{\frac{x^2}{4}} e^{-1 \cdot \frac{x^2}{4}} = \frac{x}{2} e^{\frac{x^2}{4}} \int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} e^{-u^2} du + 1$$





第 32 章 June

32.1 Week I

June 1

例题 32.1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\sin x) - x}{\arctan x - \arcsin x}$$

解

原极限等价于：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\sin x) - \sin x}{\arctan x - \arcsin x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\arctan x - \arcsin x}$$

$$I_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} \sin^3 x}{-\frac{1}{2} x^3} = -\frac{2}{3}$$

$$I_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6} x^3}{-\frac{1}{2} x^3} = \frac{1}{3}$$

$$I = I_1 + I_2 = -\frac{1}{3}$$

例题 32.2.

设 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 满足 $x_1 = y_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = \sin x_n, y_{n+1} = y_n^2$, 判断 x_n 和 y_n 的阶数

- A. $\{x_n\}$ 比 $\{y_n\}$ 高阶
- B. $\{y_n\}$ 比 $\{x_n\}$ 高阶



- C. $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 等价
- D. $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 同阶不等价

解

我们用数学归纳法来证明：

$$0 < y_n \leq x_n \leq \frac{1}{2}$$

(1). 当 $n = 1$ 时, 上式显然成立

(2). 假设当 $n = k$ 时上式成立

(3). 当 $n = k + 1$ 时:

$$x_{k+1} = \sin x_k < \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$y_{k+1} = y_k^2 < \frac{1}{2}$$

我们有 $x_k \geq \sin x_k \geq x_k^2 \geq y_k^2 \Rightarrow x_{k+1} \geq y_{k+1}$

我们得到:

$$\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} < \frac{\frac{1}{2}y_n}{\frac{2}{\pi}x_n} = \frac{\pi}{4} \frac{y_n}{x_n} < \left(\frac{\pi}{4}\right)^n$$

两边取极限, 由夹逼定理可以得到:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$$

June 2

例题 32.3.

$f(x)$ 可微, 且 $x = \int_0^x f(t)dt + \int_0^x t f(t-x)dt$, 求 $f(x)$

解

我们对方程后面部分 $\int_0^x t f(t-x)dt$ 进行换元, 得到:

$$\int_0^x t f(t-x)dt = x \int_{-x}^0 f(-t)dt + \int_{-x}^0 t f(t)dt$$

我们对方程两边对 x 求导, 得到:

$$f(x) + \int_0^x f(-t)dt = 1 \Rightarrow f'(x) + f(-x) = 0 \Leftrightarrow f'(-x) + f(x) = 0$$

我们继续对 x 求导得到:

$$f''(x) - f'(-x) = 0 \Rightarrow f''(x) + f(x) = 0$$

$$f(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x, f(0) = 1, f'(0) = -1 \Rightarrow c_1 = -1, c_2 = 1$$



$$f(x) = \cos x - \sin x$$

June 3

例题 32.4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1 - \sqrt[3]{1 - \sqrt{1-x}}} - 1}{(1+x)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}} - 1}$$

解

原极限等价于:

$$I = -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 - \sqrt{1-x}}}{x^{-\frac{2}{3}} \ln(1+x)} = -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} \sqrt[3]{1 + \sqrt{1-x}}} = -\frac{1}{4\sqrt[3]{2}}$$

例题 32.5.

$$y'' + ay' = f(x) (a > 0), f(+\infty) = b, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow +\infty} y''(x)$$

解

我们由 $y'' + ay' = f(x), a > 0$, 利用一阶线性微分方程通解公式得到:

$$y' = e^{-ax} \left(\int_0^x e^{at} f(t) dt + C \right)$$

我们得到:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y' = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{at} f(t) dt + C \right)}{e^{ax}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax} f(x)}{a e^{x-1}} = \frac{b}{a}$$

我们又有: $y'' + ay' = f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y'' = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ay'] = 0$$

June 4

例题 32.6.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3 + \sin x^2)^x - 3^{\sin x}}{x^3}$$

解

我们令 $f(x) = e^x$, 由拉格朗日中值定理得到:

$$\exists \xi \in (x \ln 3, x \ln(3 + x^2)), s.t. e^{x \ln(3 + x^2)} - e^{\sin x \ln 3} = e^\xi [x \ln(3 + \sin x^2) - \sin x \ln 3]$$



由夹逼定理得到:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln 3 = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(3 + x^2) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$$

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} e^x \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x \ln(3 + \sin x^2) - x \ln 3 + x \ln 3 - \sin x \ln 3]}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x \ln(3 + \sin x^2) - x \ln 3]}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln 3 - \sin x \ln 3}{x^3} \\ &= \frac{2 + \ln 3}{6} \end{aligned}$$

综上所述, 原极限 $I = \frac{2 + \ln 3}{6}$

例题 32.7.

求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^n$ 和函数

解

幂级数的收敛域:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = 1 \Rightarrow R = 1, \text{ 幂级数收敛域为 } (-1, 1)$$

原幂级数可化为:

$$\begin{aligned} S(x) &= x \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^{n-1} \\ &= x \sum_{n=1}^{+\infty} (x^{n+1})'' \\ &= x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n+1} \right)'' \\ &= x \left(\frac{x^2}{1-x} \right)'' \\ &= \frac{-2x}{(x-1)^3}, x \in (-1, 1) \end{aligned}$$

June 5

例题 32.8.

设 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 连续可导, $f'(x) \geq 0$, 证明:

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \right| \leq \frac{2}{n} [f(2\pi) - f(0)]$$

解



由分部积分法：

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \right| &= \frac{1}{n} \left| \int_0^{2\pi} f(x) d \cos nx \right| \\
 &= \frac{1}{n} \left| f(x) \cos nx \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(x) \cos nx dx \right| \\
 &\leq \frac{1}{n} [f(2\pi) - f(0)] + \left| \int_0^{2\pi} f'(x) \cos nx dx \right| \\
 &= \frac{1}{n} [f(2\pi) - f(0)] + \left| \int_0^{2\pi} f'(x) dx \right| \\
 &= \frac{2}{n} [f(2\pi) - f(0)]
 \end{aligned}$$

例题 32.9.

证明： $\left| \int_x^{x+1} \sin t^2 dt \right| \leq \frac{1}{x}$ ($x > 0$)

解

分部积分：

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2} \left| \int_x^{x+1} \frac{1}{t} d \cos t^2 \right| \\
 &= \frac{1}{2} \left| \frac{1}{t} \cos t^2 \Big|_x^{x+1} + \int_x^{x+1} \frac{1}{t^2} \cos t^2 dt \right| \\
 &\leq \frac{1}{2} \left[\left| \frac{1}{t} \cos t^2 \Big|_x^{x+1} \right| + \left| \int_x^{x+1} \frac{1}{t^2} dt \right| \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\cos x^2}{x} - \frac{\cos(x+1)^2}{x+1} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right] \\
 &\leq \frac{1}{x}
 \end{aligned}$$

June 6

例题 32.10.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x^x}{1 - x + \ln x}$$

解

原极限可以写作：

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - e^{x \ln x}}{1 - x + \ln(1+x-1)} \text{ (泰勒展开)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - (1+x(x-1))}{1 - x + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$



例题 32.11.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

解

原级数等价于：

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)!} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

June 7

例题 32.12.

设函数 $u = f(x, y, z)$ 有连续偏导数, 且 $z = z(x, y)$ 由方程 $xe^x - ye^y = ze^z$ 所确定, 求 du

解

我们得到关于 x, y, z 的方程 $F(x, y, z)$, 利用隐函数导数公式:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{(x+1)e^x}{(z+1)e^z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{(y+1)e^y}{(z+1)e^z}$$

我们得到:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = f_1 + f_3 \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 + f_3 \frac{(x+1)e^x}{(z+1)e^z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = f_2 + f_3 \frac{\partial z}{\partial y} = f_1 - f_3 \frac{(y+1)e^y}{(z+1)e^z} \end{cases}$$

$$du = \left(f_1 + f_3 \frac{(x+1)e^x}{(z+1)e^z} \right) dx + \left(f_1 - f_3 \frac{(y+1)e^y}{(z+1)e^z} \right) dy$$

例题 32.13.

设 $u = f(x, y, z), \varphi(x, y, z) = 0, y = \sin x$ 确定了函数 $u(x)$, 其中 f, φ 具有一阶偏导数, 且 $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$, 求 $\frac{du}{dx}$

解

复合函数偏导数:

$$\frac{du}{dx} = f_1 + f_2 \frac{dy}{dx} + f_3 \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x\varphi_1}{\varphi_3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{e^y\varphi_2}{\varphi_3}$$



我们最终得到 $\frac{du}{dx}$:

$$\frac{du}{dx} = f_1 + f_2 \cos x - f_3 \frac{2x\varphi_1 + e^{\sin x} \cos x \varphi_2}{\varphi_3}$$

32.2 Week II

June 8

例题 32.14.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{\sqrt{t}} dx \int_{x^2}^t \sin y^2 dy}{\left[\left(\frac{2}{\pi} \arctan \frac{x}{t^2} \right)^x - 1 \right] \int_0^t (e^{\sqrt{u}} - 1) du}$$

解

原极限可以化为:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^t dy \int_0^{\sqrt{t}} \sin y^2 dy}{[e^{x \ln(\frac{2}{\pi} \arctan \frac{x}{t^2})} - 1] \int_0^t (e^{\sqrt{u}} - 1) du} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^t \sqrt{y} \sin y^2 dy}{\int_0^t (e^{\sqrt{u}} - 1) du [e^{-\frac{x\pi}{2}} \arctan \frac{t^2}{x} - 1]} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^t \sqrt{y} \sin y^2 dy}{[e^{-\frac{2t^2}{\pi}} - 1] \int_0^t (e^{\sqrt{u}} - 1) du} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2}{7} t^{\frac{7}{2}}}{-\frac{4}{3\pi} t^{\frac{7}{2}}} \\ &= -\frac{3\pi}{14} \end{aligned}$$

例题 32.15.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2 [1 - \ln(e^x + \sin x)]}{x}$$

解



原极限可化为:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^2 [e^{\frac{2 \ln(1+x)}{x} - 2} + \ln(e^x + \sin x) - 1]}{x} \\ I_1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \ln(1+x)}{x} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1+x) - 2x}{x^2} = -1 \\ I_2 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+e^x + \sin x - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{x} = 2 \\ I &= e^2(I_1 + I_2) = e^2 \end{aligned}$$

June 9

例题 32.16.

$f(x)$ 二阶可导, $f(a) = f'(a) = f''(a) = f(b) = 0$, 证明:

$$\exists \xi \in (a, b), s.t. (\xi - a)^2 f''(\xi) - 2f(\xi) = 0$$

解

我们令 $g(x) = (x - a)^2, g'(x) = 2(x - a), g''(x) = 2$

原式等价于: $\exists \xi \in (a, b), s.t. g(\xi)f''(\xi) - g''(\xi)f(\xi) = 0$

我们构造辅助函数: $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$$F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

我们对分子继续求导:

$$(f'(x)g(x) - g'(x)f(x))' = f''(x)g(x) + f'(x)g'(x) - g''(x)f(x) - g'(x)f'(x) = f''(x)g(x) - g''(x)f(x)$$

此时 $F(x) = \frac{f(x)}{(x - a)^2}, \lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0$, 我们构造:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{(x - a)^2}, & x \in (a, b] \\ 0, & x = a \end{cases}$$

$F(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $F(a) = F(b) = 0$

我们在区间 (a, b) 上对 $F(x)$ 使用罗尔定理得到:

$$\exists c \in (a, b), s.t. F'(c) = 0 \Rightarrow (c - a)^2 f'(c) - 2(c - a)f(c) = 0$$

对于函数 $H(x) = (x - a)^2 f'(x) - 2(x - a)f(x)$, 我们有: $H(a) = H(c) = 0$

我们对 $H(x)$ 在区间 (a, c) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists \xi \in (a, c), s.t. H'(\xi) = 0 \Rightarrow (\xi - a)^2 f''(\xi) - 2f(\xi) = 0$$



例题 32.17.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$$

解

由拉格朗日中值定理:

$$e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} - e^{\frac{1}{2x} \ln(1+2x)} = e^{\xi} \left(\frac{1}{x} \ln(1+x) - \frac{1}{2x} \ln(1+2x) \right), \xi \in (\frac{1}{x} \ln(1+x), \frac{1}{2x} \ln(1+2x))$$

原极限可化为:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\xi} [\frac{1}{x} \ln(1+x) - \frac{1}{2x} \ln(1+2x)]}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\xi} \frac{2 \ln(1+x) - \ln(1+2x)}{2x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\xi} \frac{1}{2(1+x)(1+2x)} = \frac{e}{2} \end{aligned}$$

June 10

例题 32.18.

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上具有连续导数, $f(0) = f(2) = 0$, $M = \max_{x \in [0, 2]} \{|f(x)|\}$, 证明:

- (1). $\exists \xi \in (0, 2)$, s.t. $|f'(\xi)| \geq M$
- (2). $\forall x \in (0, 2)$, $|f'(x)| \leq M \rightarrow M = 0$

解

(1). 我们不妨假设 $|f(c)| = M$

- 当 $c = 0$ 或者 $c = 2$, 我们得到: $f(x) \equiv 0$, 我们得到: $M = 0, \exists \xi \in (0, 2)$, s.t. $|f'(\xi)| \geq M$
- 当 $c \in (0, 2)$, $|f(c)| = M$, 我们由拉格朗日中值定理得到:

$$\begin{cases} f(c) - f(0) = cf'(\xi_1), \xi_1 \in (0, c) \\ f(2) - f(c) = (2-c)f'(\xi_2), \xi_2 \in (c, 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |f'(\xi_1)| = \frac{M}{c}, \xi_1 \in (0, c) \\ |f'(\xi_2)| = \frac{M}{2-c}, \xi_2 \in (c, 2) \end{cases}$$

当 $c \in (0, 1]$, $|f'(\xi_1)| \geq M$; 当 $c \in (1, 2)$, $|f'(\xi_2)| \geq M$.(2). 我们不妨假设 $M > 0, |f(d)| = M, f(0) = f(2) = 0 \Rightarrow \exists \eta \in (0, 2)$, s.t. $f'(\eta) = 0$

我们得到:

$$\begin{cases} |f(d) - f(0)| = |\int_0^d f'(x)dx| \leq \int_0^c |f'(x)|dx \leq Md \\ |f(2) - f(d)| = |\int_d^2 f'(x)dx| \leq \int_d^2 |f'(x)|dx \leq M(2-d) \end{cases}$$

我们化简:

$$\begin{cases} M \leq Md \\ M \leq M(2-d) \end{cases} \Rightarrow M(1-d) = 0$$

当 $M = 0$ 时, $f(x) \equiv 0$ 

$$\text{当 } M \neq 0, \text{ 则 } d = 1, M = \begin{cases} |f(1) - f(0)| \leq \int_0^1 |f'(x)| dx \leq M \\ |f(2) - f(1)| \leq \int_1^2 |f'(x)| dx \leq M \end{cases}$$

此时当且仅当 $|f'(x)| \equiv M$ 时等号成立, 如果 $M \neq 0, f(2) \neq 0$, 矛盾

综上所述, $M = 0$

例题 32.19.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{x^2}{2} - \sqrt{1 + x^2}}{(\cos x - e^{x^2}) \sin x^2}$$

解

泰勒展开:

原极限可化为:

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{x^2}{2} - (1 + \frac{x^2}{2} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^4)}{x^2(1 - \frac{x^2}{2} - 1 - x^2)} = -\frac{1}{12}$$

June 11

例题 32.20.

证明方程 $x^n + x^{n-1} + \dots + x = 1 (n \geq 2)$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内有且仅有一个实数根, 记作 x_n , 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

解

设函数 $f(x) = x + x^2 + \dots + x^n - 1$, 我们有: $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} > 0 \Rightarrow f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 单调递增

$$f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2^n} < 0, f(1) = n - 1 > 0$$

根据零点定理, 我们得到 $f(x)$ 在区间 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内有且仅有一个零点.

我们可以得到 $\frac{1}{2} < x_n < 1$

我们知道: $f(x)$ 单调递增, 当 $x = x_n$ 时, 我们有:

$$x_n + x_n^2 + \dots + x_n^n - 1 = 0$$

假设 $x_{n+1} \geq x_n$, 我们得到:

$$x_{n+1} + x_{n+1}^2 + \dots + x_{n+1}^n + x_{n+1}^{n+1} - 1 > x_n + x_n^2 + \dots + x_n^n - 1 = 0$$

我们要求:

$$x_{n+1} + x_{n+1}^2 + \dots + x_{n+1}^{n+1} - 1 = 0 \Rightarrow x_n > x_{n+1}$$

$\{x_n\}$ 单调递减且有下界, $\{x_n\}$ 极限一定存在, 我们不妨设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = A$, 我们有:

$$\frac{A}{1-A} = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$



例题 32.21.

方程 $\cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x = 1 (n \geq 2)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{3})$ 的根 x_n , 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

解

我们令 $t = \cos x, x \in (\frac{1}{2}, 1)$, 原方程为:

$$t + t^2 + \cdots + t^n = 1 \text{ 在区间 } (\frac{1}{2}, 1) \text{ 内的根 } t_n$$

我们构造辅助函数: $F(t) = t + t^2 + \cdots + t^n - 1$, 我们有:

$$F(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2^n}, F(1) = n - 1 > 0, F'(x) = 1 + 2t + 3t^2 + \cdots + nt^{n-1} > 0$$

$F(t)$ 在区间 $(\frac{1}{2}, 1)$ 有且只有一个实数根 $t_n, \frac{1}{2} < t_n < 1$

上面的题已证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{\pi}{3}$

June 12

例题 32.22.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x^2 - 2(1 - \cos x) \sin x}{x^5}$$

解

泰勒展开:

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6), 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4), \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$$

原极限等价于:

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \frac{1}{6}x^7 - 2(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^5 + \frac{1}{144}x^7)}{x^5} = \frac{1}{4}$$

例题 32.23.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2\sqrt[n]{n} - 1)^n}{n^2}$$

解

原极限等价于:

$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x \ln(1+2x^{\frac{1}{x}}-2)}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)}}{x^2}$$

$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^{\frac{\ln x}{x}}}{x^2} = 1$$

June 13



例题 32.24.

设 $f'(0) = 0, f''(0)$ 存在, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f[\ln(1+x)]}{x^3}$

解

我们由拉格朗日中值定理得到:

$$\begin{aligned} f(x) - f(\ln(1+x)) &= f'(\xi)(x - \ln(1+x)), \quad \xi \in (\ln(1+x), x) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi}{x} &= 1, \quad (\text{夹逼定理}) \end{aligned}$$

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\xi)(x - \ln(1+x))}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\xi)}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\xi)}{\xi} \frac{\xi}{2x} \\ &= \frac{f''(0)}{2} \end{aligned}$$

例题 32.25.

求椭圆 $x^2 + 2xy + 3y^2 - 8y = 0$ 与直线 $x + y = 8$ 的最短距离

解

我们不妨设椭圆上任意一点 $P(x, y)$, 我们要求 $F(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - 8)^2$ 的最小值.

我们利用拉格朗日数乘法构造辅助函数:

$$F(x, y, \lambda) = \frac{1}{2}(x + y - 8)^2 + \lambda(x^2 + 2xy + 3y^2 - 8y)$$

我们令:

$$\begin{cases} F'_x = x + y - 8 + 2\lambda(x + y) = 0 \\ F'_y = x + y - 8 + 2\lambda(x + 3y - 4y) = 0 \\ F'_{\lambda} = x^2 + 2xy + 3y^2 - 8y = 0 \end{cases}$$

我们解得:

$$\begin{cases} x = 2 \pm 2\sqrt{2} \\ y = 2 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

我们得到两个驻点: $(2 + 2\sqrt{2}, 2)$ 和 $(2 - 2\sqrt{2}, 2)$

$$L(2 + 2\sqrt{2}, 2) = 2\sqrt{2} - 2, \quad L(2 - 2\sqrt{2}, 2) = 2\sqrt{2} + 2$$



综上所述, 距离最小值为 $2\sqrt{2} - 2$.

June 14

例题 32.26.

证明 $\tan x = x$ 在区间 $(n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2})$ 内存在实根 x_n , 并求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1} - x_n)$

解

我们令 $f(x) = \tan x - x, x \in (n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2})$, $f'(x) = \sec^2 x - 1 \geq 0 \Rightarrow f(x)$ 单调递增

$$f(n\pi) < 0, f(n\pi + \frac{\pi}{2}) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ 存在唯一零点 } x_n \in (n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2})$$

我们有: $x_{n+1} - x_n \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \tan x_{n+1} - \tan x_n \\ &= \tan(x_{n+1} - x_n)(1 + \tan x_{n+1} \tan x_n) \\ &= \tan(x_{n+1} - x_n)(1 + x_{n+1} x_n) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \tan(x_{n+1} - x_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{1 + x_{n+1} x_n} = 0 \end{aligned}$$

我们得到: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tan(x_{n+1} - x_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} - x_n = \pi$

例题 32.27.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x\sqrt{x}} (\sqrt{a} \arctan \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b} \arctan \sqrt{\frac{x}{b}})$$

解



原极限可化为：

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x\sqrt{x}} [\sqrt{a}(\arctan \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{x}{a}}) - \sqrt{b}(\arctan \sqrt{\frac{x}{b}} - \sqrt{\frac{x}{b}})] \\
 &= I_1 - I_2 \\
 I_1 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x\sqrt{x}} \sqrt{a}(\arctan \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{x}{a}}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-\sqrt{a}}{3} (\sqrt{\frac{x}{a}})^3}{x\sqrt{x}} \\
 &= -\frac{1}{3a} \\
 I_2 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x\sqrt{x}} \sqrt{b}(\arctan \sqrt{\frac{x}{b}} - \sqrt{\frac{x}{b}}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-\sqrt{b}}{3} (\sqrt{\frac{x}{b}})^3}{x\sqrt{x}} \\
 &= -\frac{1}{3b}
 \end{aligned}$$

综上所述：

$$I = \begin{cases} 0, & a = b \\ \frac{1}{3b} - \frac{1}{3a}, & a \neq b \end{cases}$$

32.3 Week III

June 15

例题 32.28.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x |\arcsin(\sin t)| dt}{x}$$

引理 32.3.1 (周期函数积分性质)

$$f(x) = \int_0^x |\sin t| dt$$

(i). 设 n 为正整数, 当 $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$, 证明: $2n \leq f(x) \leq 2(n+1)$

$$(ii). \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x |\sin t| dt}{x}$$

解

(i). 我们有:

$$\int_0^{n\pi} |\sin t| dt \leq f(x) \leq \int_0^{(n+1)\pi} |\sin t| dt$$



我们知道对于周期函数 $f(x)$, 我们有:

$$\int_0^{nT} f(t)dt = n \int_0^T f(t)dt \Rightarrow \begin{cases} \int_0^{n\pi} |\sin t|dt = 2n \\ \int_0^{(n+1)\pi} |\sin t|dt = 2(n+1) \end{cases}$$

我们得到: $2n \leq f(x) \leq 2(n+1)$

(ii). 当 $x \in (n\pi, (n+1)\pi)$ 时, 我们有:

$$\frac{\int_0^{n\pi} |\sin t|dt}{(n+1)\pi} \leq \frac{\int_0^x |\sin t|dt}{x} \leq \frac{\int_0^{(n+1)\pi} |\sin t|dt}{n\pi}$$

$$\begin{cases} \text{左边} = \frac{2n}{(n+1)\pi} \\ \text{右边} = \frac{2(n+1)}{n\pi} \end{cases}$$

两边同时取极限, 我们有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{左边} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{右边} = \frac{2}{\pi}$
由夹逼定理, 我们可以得到:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x |\sin t|dt}{x} = \frac{2}{\pi}$$

定理 32.3.1 (周期函数性质)

$f(x)$ 是周期函数, 我们有:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x} = \frac{\int_0^T f(x)dx}{T}$$



解

我们发现 $f(x) = |\arcsin(\sin x)|$ 是周期 $T = \pi$ 的周期函数, 且

$$\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (x - \frac{\pi}{2})dx = \frac{\pi^2}{4}$$

我们得到原极限等价于:

$$I = \frac{\int_0^T f(x)dx}{T} = \frac{\pi}{4}$$

例题 32.29.

设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(x-t)dt}{\int_0^x tf(t-x)dt}$

解

我们令: $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $F'(x) = f(x)$, $F(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x} = F'(0) = f(0)$$



原极限等价于:

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t) dt}{x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt + x f(x)}{\int_0^x f(t) dt}$$

$$I = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\frac{\int_0^x f(t) dt}{x}} = 2$$

June 16

例题 32.30.

$$f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$$

- (i). 证明: $\exists \xi \in (1, 2)$, s.t. $f(\xi) = (2 - \xi)e^{\xi^2}$
- (ii). 证明: $\exists \eta \in (1, 2)$, s.t. $f(2) = e^{\eta^2}\eta \ln 2$

解

(i). 我们构造辅助函数: $F(x) = (x - 2)f(x)$

我们有:

$$F'(x) = f(x) + (x - 2)f'(x), \quad f'(x) = e^{x^2}, \quad F(1) = F(2) = 0$$

我们对 $F(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上使用罗尔定理得到:

$$\exists \xi \in (1, 2), \text{ s.t. } F'(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) + (\xi - 2)f'(\xi) = 0$$

$$(ii). \text{ 原式子可以化为 } \frac{f(2) - f(1)}{\ln 2 - \ln 1} = \frac{e^{\eta^2}}{\frac{1}{\eta}}$$

我们构造辅助函数: $g(x) = \ln x$, $g'(x) = \frac{1}{x}$, 我们由柯西中值定理得到:

$$\exists \eta \in (1, 2), \text{ s.t. } \frac{f(2) - f(1)}{\ln 2 - \ln 1} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)} \Rightarrow f(2) = e^{\eta^2}\eta \ln 2$$

例题 32.31.

设函数 $f(x)$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{xt} \arctan(x-t)^2 dt}{\int_0^x t f(x-t) dt}$

解

我们得到: $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$

我们利用广义积分中值定理得到:

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x\xi} \int_0^x \arctan(x-t)^2 dt}{\int_0^x t f(x-t) dt}, \quad \xi \in (0, x)$$

我们再进行换元, 原极限等价于:

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x\xi} \int_0^x \arctan u^2 du}{x \int_0^x f(u) du - \int_0^x u f(u) du} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\int_0^x f(u) du}$$



$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{f(x)} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{f(x) - f(0)} = 1$$

June 17

例题 32.32.

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 二阶可导, $f(0) = 0, f(1) = 1$, 证明:

$$\exists \xi \in (0, 1), \text{ s.t. } \xi f''(\xi) + (1 + \xi) f'(\xi) = 1 + \xi$$

解

原命题等价于:

$$\exists \xi \in (0, 1), \text{ s.t. } f''(\xi) + \frac{1 + \xi}{\xi} [f'(\xi) - 1] = 0$$

我们构造辅助函数:

$$F(x) = [f'(x) - 1] e^{\int (1+\frac{1}{x}) dx} \Rightarrow F(x) = x e^x [f'(x) - 1]$$

我们有: $F(0) = 0$, 由拉格朗日中值定理得到:

$$\exists \eta \in (0, 1), \text{ s.t. } f'(\eta) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1 \Rightarrow F(\eta) = 0$$

我们对 $F(x)$ 在区间 $(0, \eta)$ 上使用罗尔定理, 可以得到:

$$\exists \xi \in (0, \eta), \text{ s.t. } F'(\xi) = e^\xi [\xi f''(\xi) + (1 + \xi) [f'(\xi) - 1]] = 0$$

综上所述, $\exists \xi \in (0, 1), \text{ s.t. } \xi f''(\xi) + (1 + \xi) f'(\xi) = 1 + \xi$

例题 32.33.

已知微分方程 $y' + y = f(x)$, 其中 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数, 证明: 该微分方程存在唯一的以 T 为周期的解

解

我们利用一阶微分方程通接公式得到:

$$y(x) = e^{-x} \left(\int_0^x e^t f(t) dt + C \right)$$



我们由此得到:

$$\begin{aligned}
 y(x+T) &= e^{-x-T} \left(\int_0^{x+T} e^t f(t) dt + C \right) \\
 &= e^{-x} \left(\int_0^{x+T} e^{t-T} f(t) dt + Ce^{-T} \right) \\
 &= e^{-x} \left(\int_{-T}^x e^t f(t) dt + Ce^{-T} \right) \\
 &= e^{-x} \left(\int_0^x e^t f(t) dt + Ce^{-T} + \int_{-T}^0 e^t f(t) dt \right) \\
 y(x) &= e^{-x} \left(\int_0^x e^t f(t) dt + C \right)
 \end{aligned}$$

如果 $y(x)$ 是周期函数, 我们可以得到:

$$C = Ce^{-T} + \int_{-T}^0 e^t f(t) dt \Rightarrow C = \frac{\int_0^T e^t f(t) dt}{e^T - 1}$$

当且仅当 $C = \frac{\int_0^T e^t f(t) dt}{e^T - 1}$ 时, $y(x)$ 为周期函数.

June 18

例题 32.34.

$f(x)$ 一阶连续可导, 且 $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} f(t) dt}{x^2 \int_0^x f(t) dt}$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xf(x^2)}{2x \int_0^x f(t) dt + x^2 f(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x^2)}{2 \int_0^x f(t) dt + xf(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4xf'(x)}{3f(x) + xf'(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4f'(x)}{\frac{3f(x)}{x} + f'(x)} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

例题 32.35.

设 $f(x)$ 满足 $f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$, $f'(0) = 2$, 求 $f(x)$

解

我们令 $x = y = 0 \Rightarrow f(0) = 0$



我们令 $y = \Delta x$, 我们有:

$$f(x + \Delta x) = \frac{f(x) + f(\Delta)}{1 - f(x)f(\Delta)}$$

又因为:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(\Delta x) - f(x)[1 - f(x)f(\Delta x)]}{[1 - f(x)f(\Delta x)]\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x)[1 + (f(x))^2]}{[1 - f(x)f(\Delta x)]\Delta x} \\ &= 2[1 + (f(x))^2] \end{aligned}$$

我们得到: $\frac{f'(x)}{1 + (f(x))^2} = 2 \Rightarrow \arctan f(x) = 2x + C, f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

综上所述, $f(x) = \tan(2x)$

June 19

例题 32.36.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x [\int_u^x u^2 \arctan(1 + tu) dt] du}{(\int_0^x \ln(1 + t) dt)^2}$$

解

我们对分子交换积分次序, 原极限等价于:

$$I = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x [\int_0^t u^2 \arctan(1 + tu) du] dt}{\frac{x^4}{4}}$$

利用洛必达法则:

$$I = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x u^2 \arctan(1 + xu) du}{x^3}$$

令 $xu = v, u = \frac{v}{x}, du = \frac{dv}{x}$, 原极限等价于:

$$I = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} v^2 \arctan(1 + v) dv}{x^6}$$

再次使用洛必达法则:

$$I = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^5 \arctan(1 + x^2)}{6x^5} = \frac{\pi}{12}$$

例题 32.37.

设 $f'(x)$ 在 $[0, 2]$ 连续, 证明: $|f(2)| \leq \frac{1}{2} |\int_0^2 f(x) dx| + \int_0^2 |f'(x)| dx$

解



我们由积分中值定理得到:

$$\exists \xi \in (0, 2), s.t. \int_0^2 f(x)dx = 2f(\xi) \Rightarrow \frac{1}{2} \left| \int_0^2 f(x)dx \right| = |f(\xi)|$$

原命题等价于:

$$|f(2)| - |f(\xi)| \leq \int_0^2 |f'(x)|dx$$

由绝对值三角不等式得到:

$$\text{左边} \leq |f(2) - f(\xi)| = \left| \int_{\xi}^2 f'(x)dx \right| \leq \int_{\xi}^2 |f'(x)|dx$$

我们有: $\xi \in (0, 2) \Rightarrow \int_{\xi}^2 |f(x)|dx \leq \int_0^2 |f(x)|dx$

综上, 我们得到 $|f(2)| \leq \frac{1}{2} \left| \int_0^2 f(x)dx \right| + \int_0^2 |f'(x)|dx$

June 20

例题 32.38.

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 证明: $\max_{0 \leq x \leq 1} \{|f(x)|\} \leq \int_0^1 [|f(x)| + |f'(x)|]$

解

我们不妨假设 $\exists \xi \in (0, 1), s.t. |f(x)|_{\max} = |f(\xi)|$, 原命题等价于:

$$f(\xi) - \int_0^1 |f(x)|dx \leq \int_0^1 |f'(x)|dx$$

我们由积分中值定理得到:

$$\exists \eta \in (0, 1), s.t. \int_0^1 |f(x)|dx = |f(\eta)|$$

命题等价于:

$$|f(\xi)| - |f(\eta)| \leq \int_0^1 |f'(x)|dx$$

$$\text{左边} \leq |f(\xi) - f(\eta)| = \left| \int_{\xi}^{\eta} f'(x)dx \right| \leq \int_{\xi}^{\eta} |f'(x)|dx \leq \text{右边}$$

综上所述, 我们得到: $\max_{0 \leq x \leq 1} \{|f(x)|\} \leq \int_0^1 [|f(x)| + |f'(x)|]$

例题 32.39.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x t |\sin t| dt}{x^2}$$

解

我们不妨假设 $x \in (n\pi, (n+1)\pi)$, 我们有:

$$\int_0^{n\pi} t |\sin t| dt < \int_0^x t |\sin t| dt < \int_0^{(n+1)\pi} t |\sin t| dt$$



我们由区间再现公式可以得到:

$$\int_0^{n\pi} t|\sin t|dt = \int_0^{n\pi} (n\pi - t)|\sin t|dt \Rightarrow \int_0^{n\pi} t|\sin t|dt = \pi n^2$$

同理我们可以得到:

$$\int_0^{(n+1)\pi} t|\sin t|dt = \pi(n+1)^2$$

我们得到: $\pi n^2 < \int_0^x t|\sin t|dt < \pi(n+1)^2$

我们有:

$$\frac{\pi n^2}{(n+1)^2 \pi^2} < \frac{\int_0^x t|\sin t|dt}{x^2} < \frac{\pi(n+1)^2}{n^2 \pi^2}$$

由夹逼定理可以得到, 原极限 $I = \frac{1}{\pi}$

June 21

例题 32.40.

已知 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \end{vmatrix}$, 求 $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 A_{ij}$

解

我们将行列式按照第一行展开得到:

$$|A| = A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}$$

我们发现: $A_{21} + A_{22} + A_{23} + A_{24}$ 其实就是将原行列式中第二行所有元素替换为 1 的新行列式的值, 根据行列式两行相同值为 0, 我们可以得到:

$$\begin{cases} A_{21} + A_{22} + A_{23} + A_{24} = 0 \\ A_{31} + A_{32} + A_{33} + A_{34} = 0 \\ A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = 0 \end{cases}$$

我们得到: $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 A_{ij} = |A|$

根据范德蒙行列式的求值公式:

$$|A| = (3-2)(4-2)(5-2)(4-3)(5-3)(5-4) = 12$$

综上所述, $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 A_{ij} = 12$



例题 32.41.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{x} \int_x^{x^2} (1 + \frac{1}{2t})^t \sin \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

解

我们利用广义积分中值定理和 $x \rightarrow 0, \sin x \sim x$, 原极限等价于:

$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \frac{1}{2\xi})^\xi \int_x^{x^2} \sin \frac{1}{\sqrt{t}} dt}{x}, \xi \in (x, x^2)$$

利用洛比达法则得到:

$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{2\xi})^\xi \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{\sqrt{x}}}{1} = I_1 I_2$$

由夹逼定理得到:

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}}, I_2 = 2 \Rightarrow I = 2e^{\frac{1}{2}}$$

32.4 Week IV

June 22

例题 32.42.

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & a+b & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & a+b & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a+b \end{vmatrix}$$

解

我们将行列式按照第一行展开后得到:

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}, D_1 = a+b, D_2 = a^2 + b^2 - ab$$

我们可以得到:

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2})$$

我们构造数列 $\{x_n\} = D_{n+2} - aD_{n+1}, x_1 = b^2 \Rightarrow x_n = b^{n+1}$



我们得到:

$$D_n - aD_{n-1} = b^n$$

同样我们可以得到:

$$D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2})$$

我们构造数列 $\{y_n\} = D_{n+2} - bD_{n+1}$, $y_1 = a^2 \Rightarrow y_n = a^{n+1}$

我们得到:

$$D_n - bD_{n-1} = a^n$$

我们有:

$$\begin{cases} D_n - aD_{n-1} = b^n \\ D_n - bD_{n-1} = a^n \end{cases} \Rightarrow (a - b)D_n = a^{n+1} - b^{n+1}$$

(1). 当 $a = b$ 时, 我们直接得到: $D_n - aD_{n-1} = a^n$, $D_1 = a + b$

我们有: $\{\frac{D_n}{a^n}\}$ 是首项为 2, 公差为 1 的等差数列, $D_n = (n+1)a^n$

(2). 当 $a \neq b$ 时, 我们得到: $D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$

综上所述, 我们得到:

$$D_n = \begin{cases} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} \\ (n+1)a^n \end{cases}$$

例题 32.43.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{x^2}$$

解

原极限等价于:

$$I = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x + x \ln(1 - \frac{\ln x}{x})}$$

$$I = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x \ln x) - x \ln x}{x}}$$

我们有: $\ln(1 + x) - x \sim -\frac{1}{2}x^2$

原极限 $I = 1$

June 23

例题 32.44.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \int_0^x e^{t^2} dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right)$$



解

原极限等价于:

$$I = \frac{\sin x + \sin x \int_0^x e^{t^2} - (e^x - 1)}{x^2}$$

我们利用泰勒展开可以得到:

$$I = \frac{x + o(x^2) + (x + o(x^2)) \int_0^x (1 + o(t)) dt - x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

例题 32.45.

$$A = \begin{pmatrix} a^n & (a+1)^n & \cdots & (a+n)^n \\ a^{n-1} & (a+1)^{n-1} & \cdots & (a+n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a+1 & \cdots & a+n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

求伴随矩阵 A^* 的所有元素之和

解

我们知道 A 的伴随矩阵 A^* 的所有元素之和为 A 的所有代数余子式的和, 我们可以得到:

$$\text{sum}(A^*) = \sum_{i,j \in n} A_{ij}$$

我们对每一行的代数余子式表示为原行列式对应行全换为 1 的新行列式的值, 我们得到:

$$\sum_{i,j \in n} A_{ij} = |A|$$

我们将 A 上下颠倒即可得到一个范德蒙行列式.

$$|A| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{n=1}^n n!$$

June 24

例题 32.46.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x) + \int_0^x t(1+t)^{\frac{1}{t}} dt} \right]$$

解

我们首先有:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t(1+t)^{\frac{1}{t}} dt}{x^2} = \frac{e}{2}$$



我们可以得到:

$$x \rightarrow 0, \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \sim x, \int_0^x t(1+t)^{\frac{1}{t}} dt \sim \frac{e}{2}x^2$$

原极限等价于: (泰勒展开)

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x + \frac{e-1}{2}x^2 + o(x^2) - x + o(x^2)}{x(x+o(x))} \right] = \frac{e-1}{2}$$

例题 32.47.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{n^2} \frac{n}{n^2 + j^2}$$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{n^2} \frac{1}{n} \frac{1}{1 + (\frac{j}{n})^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (\arctan n - \frac{\pi}{4}) \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

June 25

例题 32.48.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\sqrt{1 + \sin \frac{\pi k}{n}}}{n + \frac{1}{k}}$$

解

我们可以得到:

$$\frac{\sqrt{1 + \sin \frac{\pi k}{n}}}{n} \frac{n}{n+1} < \frac{\sqrt{1 + \sin \frac{\pi k}{n}}}{n + \frac{1}{k}} < \frac{\sqrt{1 + \sin \frac{\pi k}{n}}}{n+1}$$

我们得到:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\sqrt{1 + \sin \frac{\pi k}{n}}}{n + \frac{1}{k}} > \frac{n}{n+1} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\sqrt{1 + \sin \frac{\pi k}{n}}}{n} \\ \sum_{k=1}^{2n} \frac{\sqrt{1 + \sin \frac{\pi k}{n}}}{n + \frac{1}{k}} < \sum_{k=1}^{2n} \frac{\sqrt{1 + \sin \frac{\pi k}{n}}}{n} \end{cases}$$



↓↓

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\sqrt{1 + \sin \frac{\pi k}{n}}}{n + \frac{1}{k}} > \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} \int_0^2 \sqrt{1 + \sin \pi x} dx \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\sqrt{1 + \sin \frac{\pi k}{n}}}{n + \frac{1}{k}} < \int_0^2 \sqrt{1 + \sin \pi x} dx \end{array} \right.$$

我们由夹逼定理可以得到：

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \sqrt{1 + \sin \pi x} dx \\ &= \pi \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin x} dx \\ &= 2\pi \int_0^\pi |\sin x + \cos x| dx \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{3}{4}\pi} (\sin x + \cos x) dx - 2\pi \int_{\frac{3}{4}\pi}^\pi (\sin x + \cos x) dx \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

例题 32.49.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} + 1)e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + x^2 + x + 1} \right]$$

解

我们令 $t = \frac{1}{x}$, 原极限等价于：

$$I = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{(t^3 + \frac{1}{2}t^2 - t + 1)e^t - \sqrt{t^6 + t^5 + t^4 + 1}}{t^3} \right]$$

我们利用泰勒展开得到：

$$\begin{aligned} I &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{(t^3 + \frac{1}{2}t^2 - t + 1)e^t - \sqrt{t^6 + t^5 + t^4 + 1}}{t^3} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{(t^3 + \frac{1}{2}t^2 - t + 1)(1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3) - (1 + t^4 + t^5 + t^6)}{t^3} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{7}{6}t^3 + o(t^3)}{t^3} \\ &= \frac{7}{6} \end{aligned}$$

June 26



例题 32.50.

求 $\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 的整数部分

解

我们可以得到原和式等价于:

$$I = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{100}}$$

我们把这个理解为 100 个长方形面积之和, 我们有:

$$\begin{cases} I > \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \cdots + \int_{100}^{101} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^{101} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ I < 1 + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \cdots + \int_{99}^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 1 + \int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \end{cases}$$

我们可以得到:

$$2(\sqrt{101} - 1) < I < 1 + 2(\sqrt{100} - 1) \Rightarrow 18 < I < 19$$

综上所述, 原和式的整数部分为 18.

例题 32.51.

设 $f(x)$ 是满足 $\int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t-x)f(t)dt = \cos^4 x$ 的连续函数, 求 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的平均值

解

我们要求的是:

$$I = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx}{\frac{\pi}{2}}$$

我们对 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t-x)f(t)dt = \cos^4 x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上取定积分得到:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t-x)f(t)dt \right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = \frac{3}{16}\pi$$

我们交换积分次序可以得到:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt \int_0^t f(t-x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt \int_0^t f(u)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)F(t)dt = \frac{3}{16}\pi$$

其中 $F'(t) = f(t)$, 我们得到:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)F(t)dt = \frac{1}{2}F^2(x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}F^2(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{16}\pi$$

我们可以得到:

$$I = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \pm \sqrt{\frac{3}{2\pi}}$$

June 27



例题 32.52.

$$|A| = \begin{vmatrix} a + x_1 & a + x_1^2 & \cdots & a + x_1^n \\ a + x_2 & a + x_2^2 & \cdots & a + x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a + x_n & a + x_n^2 & \cdots & a + x_n^n \end{vmatrix} \quad (a \neq 0)$$



解

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} 1+a-a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+x_1 & a+x_1^2 & \cdots & a+x_1^n \\ a & a+x_2 & a+x_2^2 & \cdots & a+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a+x_n & a+x_n^2 & \cdots & a+x_n^n \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1+a-a & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ a & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ a & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1+a & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 0 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ a & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ a & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \\
 &= (1-a) \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} + (-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \\
 &= (1-a) \prod_{k=1}^n x_k \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) - a \prod_{k=1}^n (x_k - 1) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \\
 &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \left[(1-a) \prod_{k=1}^n x_k - a \prod_{k=1}^n (x_k - 1) \right]
 \end{aligned}$$



范德蒙行列式应用

求行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} a+x_1 & a+x_2 & \cdots & a+x_n \\ a^2+x_1^2 & a^2+x_2^2 & \cdots & a^2+x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n+x_1^n & a^n+x_2^n & \cdots & a^n+x_n^n \end{vmatrix} \quad (a \neq 0)$$

解

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+x_1 & a+x_2 & \cdots & a+x_n \\ a^2 & a^2+x_1^2 & a^2+x_2^2 & \cdots & a^2+x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n & a^n+x_1^n & a^n+x_2^n & \cdots & a^n+x_n^n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ a & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ a^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ a^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ a^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \\ &= 2 \prod_{k=1}^n x_k \prod_{1 < i \leq j < n} (x_j - x_i) - \prod_{k=1}^n (x_k - a) \prod_{1 < i \leq j < n} (x_j - x_i) \\ &= \prod_{1 < i \leq j < n} (x_j - x_i) \left[2 \prod_{k=1}^n x_k - \prod_{k=1}^n (x_k - a) \right] \end{aligned}$$

例题 32.53.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \left[\ln(1 + \sin^2 x) - 6(\sqrt[3]{2 - \cos x} - 1) \right]$$

解



我们利用泰勒展开:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \frac{x^3}{6})^2 - \frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{6})^4 - 6[\frac{1-\cos x}{3} - \frac{(1-\cos x)^2}{9}]}{x^4} \\ &= \frac{x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) - 2(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4) + o(x^4) + \frac{2}{3}\frac{1}{4}x^4 + o(x^4)}{x^4} \\ &= -\frac{7}{12} \end{aligned}$$

June 28

例题 32.54.

$$\int_0^1 x \arcsin 2\sqrt{x-x^2} dx$$

解

我们利用区间再现公式:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^1 \arcsin 2\sqrt{x-x^2} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \arcsin(\cos t) dt \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos t \arcsin(\cos t) dt + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \arcsin(\cos t) dt \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (\frac{\pi}{2} + t) \cos t dt + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - t) \cos t dt \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} (\frac{\pi}{2} - 1) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

例题 32.55.

设 $a_n \geq 0$, 且 $\{na_n\}$ 有界, 证明: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ 收敛

解

我们由 $\{na_n\}$ 收敛得出:

$$\forall M > 0, \exists N_0 > 0, \text{ 当 } n > N_0, na_n < M \Rightarrow a_n < \frac{n}{M} \Rightarrow a_n^2 < \frac{M^2}{n^2}$$

我们知道级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^2}{n^2}$ (M 为常数) 收敛, 我们通过比较判别法得出: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ 收敛.

June 29



例题 32.56.

A 是三阶矩阵, $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$, $a_{ij} = A_{ij}$, $a_{33} = 1$, 证明: A 是正交矩阵

解

我们由: $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$, $a_{ij} = A_{ij} \Rightarrow A^T = A^*$

我们有:

$$AA^T = AA^* = |A|E \Rightarrow |A|^2 = |A|^3 \Rightarrow |A| = 1 \text{ 或者 } 0$$

我们将 $|A|$ 按照第三行展开得到:

$$|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = a_{31}^2 + a_{32}^2 + 1 \geq 1$$

我们得到: $|A| = 1$

我们有: $AA^T = AA^* = E \Rightarrow A$ 是正交矩阵.

例题 32.57.

证明: $e^{\int_0^1 f(x)dx} \leq \int_0^1 e^{f(x)} dx$

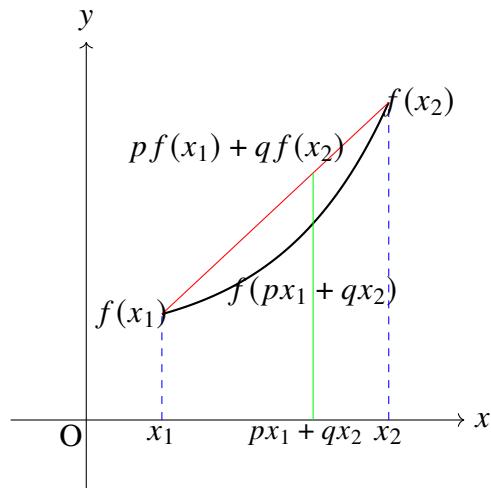


图 32.1: 凸函数性质

解**凹函数性质**

我们不妨假设 $f(x)$ 在 (a, b) 上是凹函数, 我们有以下的定理.

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b), x_1 < x_2 < \dots < x_n, \exists p_1, p_2, \dots, p_n > 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1, s.t. \sum_{i=1}^n p_i f(x_i) \geq f(\sum_{i=1}^n p_i x_i)$$

证明

(1). 当 $n = 1$ 时, 原命题显然成立.

(2). 当 $n = 2$ 时, 原命题等价于:

$$p + q = 1, f(px_1 + qx_2) \leq pf(x_1) + qf(x_2)$$

我们由 *Figure :32.1* 得到:

$$\begin{cases} px_1 + qx_2 > (p+q)x_1 = x_1 & px_1 + qx_2 \in (x_1, x_2) \\ px_1 + qx_2 < (p+q)x_2 = x_2 \end{cases}$$

$$\frac{l - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{px_1 + qx_2 - x_1}{x_2 - x_1} = q \Rightarrow l = qf(x_1) + (1-q)f(x_1) = pf(x_1) + qf(x_2)$$

(3). 假设当 $n = k$ 时, 我们有:

$$\sum_{i=1}^k p_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^k p_i x_i\right)$$

当 $n = k + 1$ 时, 我们有:

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1}) &= f((1-x_{k+1})[\frac{x_1}{1-p_{k+1}} + \frac{x_2}{1-p_{k+1}} + \cdots + \frac{x_k}{1-p_{k+1}} + p_{k+1}x_{k+1}]) \\ &\leq p_{k+1}f(x_{k+1}) + \frac{1}{1-p_{k+1}}f\left(\sum_{i=1}^k \frac{p_i}{1-p_{k+1}}x_i\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k+1} p_i f(x_i) \end{aligned}$$

原命题等价于:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\sum_{i=1}^n f(\frac{i}{n}) \frac{i}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} e^{f(\frac{i}{n})}$$

我们得到:

$$e^{\int_0^1 f(x) dx} \leq \int_0^1 e^{f(x)} dx$$

June 30



例题 32.58.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x \left(\frac{\arctan t}{t} \right) \frac{1}{\int_0^t \ln(1+u) du} \cot x dt$$

解

原极限等价于：

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \int_0^x \left(\frac{\arctan t}{t} \right) \frac{1}{\int_0^t \ln(1+u) du}}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \left(\frac{\arctan t}{t} \right) \frac{1}{\int_0^t \ln(1+u) du} dt}{x} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{\arctan x}{x})}{\int_0^x \ln(1+u) du}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2}{3}x^2}{\int_0^x \ln(1+u) du}} \\ &= e^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

例题 32.59.

 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 xf(x)dx = 1$, $\int_0^1 f(x)dx = 0$, 证明:

$$\exists \xi \in (0, 1), \text{ s.t. } |f(\xi)| \geq 4$$

解

我们由 $\int_0^1 xf(x)dx = 1$, $\int_0^1 f(x)dx = 0$ 得到:

$$\int_0^1 (x+a)f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 |x+a||f(x)| \geq 1$$

我们假设 $f(x) < 4$, 我们得到:

$$4 \int_0^1 |x+a|dx > 1$$

我们有:

$$4 \int_0^1 |x+a|dx = \begin{cases} 4a+2, & a \geq 0 \\ -4a-2, & a \leq -1 \\ 4a^2 + 4a + 2, & a \in (-1, 0) \end{cases}$$

我们要得出矛盾, 即令 $4 \int_0^1 |x+a|dx \leq 1$, 我们令 $a = -\frac{1}{2}$, $4 \int_0^1 |x+a|dx = 1$ 矛盾!!!

综上所述, 我们得到: $\exists \xi \in (0, 1), s.t. |f(\xi)| \geq 4$





第六部分

每日一题 II



第6部分目录

第33章July	446
33.1Week I.	446
33.2Week II.	455
33.3Week III	464
33.4Week IV	475
第34章August	487
34.1Week I.	487
34.2Week II.	496
34.3Week III	506
34.4Week IV	514
第35章September	524
35.1Week I.	524
35.2Week II.	530
35.3Week III	538
35.4Week IV	545
第36章October	558
36.1Week I.	558
36.2Week II.	566
36.3Week III	574
36.4Week IV	581
第37章November	588
37.1Week I.	588
37.2Week II.	591
37.3Week III	594
37.4Week IV	597
第38章December	602
38.1Week I.	602
38.2Week II.	605
38.3Week III	608
38.4Week IV	611





第 33 章 July

33.1 Week I

July 1

例题 33.1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})} \right]^{x^2 \ln x}$$

解

原极限等价于：

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2 \ln x \ln \left[1 + \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})} \right]} \\ I_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x \ln \left[1 + \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x \left(\frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x \left(\frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})}{\xi \ln(2x)} \right), \xi \in (x + \sqrt{x^2 - 1}, x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\xi} \frac{2x}{(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\xi} \end{aligned}$$

我们用夹逼定理： $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\xi} = \frac{1}{2}$

原极限 $I = e^{\frac{1}{2}}$

例题 33.2.

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 导函数连续, 且 $\int_0^1 x^2 f'(x) dx = 1$, 证明:

(1). $\exists \xi \in (0, 1), s.t. f'(\xi) = 3$

(2). $f(1) = \int_0^1 f(x) dx = 0 \rightarrow \exists \eta \in (0, 1), s.t. f'(\eta) = -\frac{6}{7}$

解

(1). 我们不妨设 $g(x) = x^2$, 我们有 $x \in (0, 1), g(x) > 0$, 我们根据第一积分中值定理得到:

$$\exists \xi \in (0, 1), s.t. \int_0^1 f'(x) g(x) dx = f'(\xi) \int_0^1 g(x) dx \Rightarrow \int x^2 f'(x) dx = f'(\xi) \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} f'(\xi) = 1$$

综上所述, 我们得到: $\exists \xi \in (0, 1), s.t. f'(\xi) = 3$

(2). 我们由 $\int_0^1 x^2 f'(x) dx = 1$ 得到:

$$\int_0^1 f(x) dx = x f(x)|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 x f'(x) dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 x f'(x) dx = 0$$

我们得到:

$$\begin{cases} \int_0^1 x f'(x) dx = 0 \\ \int_0^1 x^2 f'(x) dx = 1 \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 (x^2 - kx) f'(x) dx = 1$$

我们假设 $h(x) = x^2 - kx$, 我们不妨假设 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上恒有 $h(x) > 0$ 或者 $h(x) < 0$, 我们由第一积分中值定理得到:

$$\exists \eta \in (0, 1), s.t. \int_0^1 h(x) f'(x) dx = f'(\eta) \int_0^1 h(x) dx \Rightarrow f'(\eta) \int_0^1 (x^2 - kx) dx = 1 \Rightarrow f'(\eta) = \frac{6}{2-3k}$$

当 $k = 3$ 时, 我们有 $h(x) = x^2 - 3x$, 当 $x \in (0, 1), h(x) < 0$, 满足第一积分中值定理使用条件, 我们可以得到: $\exists \eta \in (0, 1), s.t. f'(\eta) = -\frac{6}{7}$

July 2

例题 33.3.

设 $f(x)$ 连续, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt \right]^{\frac{1}{(\tan x - x) \ln(1+x)}}$$

解



原极限等价于:

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{3 \int_0^{x^2} -\frac{1}{2} f(x^2 - t^2) d(x^2 - t^2)}{x^4}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\frac{3}{2} \int_0^{x^2} f(u) du}{x^4}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{3f(x^2)}{4x^2}} \\
 &= e^{\frac{3}{4}}
 \end{aligned}$$

例题 33.4.

设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上连续的周期为 1 的周期函数且满足 $0 \leq f(x) \leq 1$, $\int_0^1 f(x) dx = 1$, 证明:

$$x \in [0, 13], \int_0^{\sqrt{x}} f(t) dt + \int_0^{\sqrt{x+27}} f(t) dt + \int_0^{\sqrt{13-x}} f(t) dt \leq 11$$

解

我们由 $0 \leq f(x) \leq 1$ 得到:

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t) dt + \int_0^{\sqrt{x+27}} f(t) dt + \int_0^{\sqrt{13-x}} f(t) dt \leq \sqrt{x} + \sqrt{x+27} + \sqrt{13-x} = 1 \cdot \sqrt{x} + a \cdot \frac{1}{a} \sqrt{x+27} + b \cdot \frac{1}{b} \sqrt{13-x}$$

我们由柯西不等式得到:

$$1 \cdot \sqrt{x} + a \cdot \frac{1}{a} \sqrt{x+27} + b \cdot \frac{1}{b} \sqrt{13-x} \leq \sqrt{(1+a^2+b^2)(x+\frac{x+27}{a^2}+\frac{13-x}{b^2})}$$

我们需要满足:

$$\begin{cases} 1 + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 0 \\ (1+a^2+b^2)(\frac{27}{a^2} + \frac{13}{b^2}) = 121 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 2 \\ b^2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

我们可以得到原不等式取等号条件 $\frac{\sqrt{x}}{1} = \frac{\sqrt{x+27}}{2} = \frac{3\sqrt{13-x}}{2}$, 当且仅当 $x = 9$ 时等号成立.

当 $x = 9$ 时, 原不等式为:

$$\int_0^3 f(t) dt + \int_0^6 f(t) dt + \int_0^2 f(t) dt = 11 \int_0^1 f(t) dt = 11$$

综上所述, 等号成立条件为 $x = 9$, 原不等式成立.

July 3



例题 33.5.

设 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$, $f(x, y)$ 在 D 上连续, $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$, $\iint_D xy f(x, y) dx dy = 1$, 证明:

$$\exists (\xi, \eta) \in D, s.t. |f'(\xi, \eta)| \geq \frac{2}{4 \ln 2 + 3}$$

1.

解

我们由: $\iint_D f(x, y) dx dy = 0, \iint_D xy f(x, y) dx dy = 1$ 得到:

$$\iint_D (xy - k) f(x, y) dx dy = 1 \Rightarrow \iint_D |xy - k| |f(x, y)| dx dy \geq 1$$

我们由二重积分第一积分中值定理得到:

$$\exists (\xi, \eta) \in D, s.t. |f(\xi, \eta)| \iint_D |xy - k| dx dy = \iint_D |xy - k| |f(x, y)| dx dy \geq 1$$

我们得到:

$$\exists (\xi, \eta) \in D, s.t. |f(\xi, \eta)| \geq \frac{1}{\iint_D |xy - k| dx dy}$$

我们只需要找到 k 使得 $\iint_D |xy - k| dx dy = 2 \ln 2 + \frac{3}{2}$.

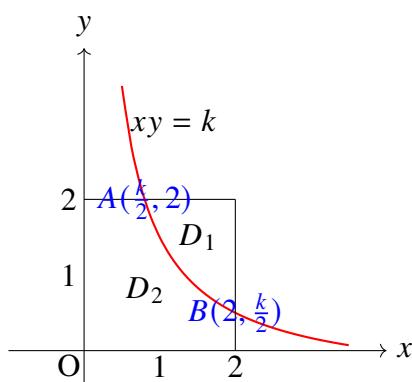


图 33.1: 积分区域图

原二重积分等价于：

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{D_1} (xy - k) dx dy + \iint_{D_2} (k - xy) dx dy \\
 &= \int_{\frac{k}{2}}^2 dx \int_{\frac{k}{x}}^2 (xy - k) dy + \int_0^{\frac{k}{2}} dx \int_0^2 (k - xy) dy + \int_{\frac{k}{2}}^2 dx \int_0^{\frac{k}{x}} (k - xy) dy \\
 &= \frac{3}{4}k^2 - 4k + 4 + \frac{3}{4}k^2 + k^2 \ln 2 - k^2 \ln \frac{k}{2} \\
 &= 2k^2 \ln 2 - k^2 \ln k + \frac{3}{2}k^2 + 4 - 4k
 \end{aligned}$$

我们得到：

$$\begin{cases} 2k^2 = 2 \\ \ln k = 0 \\ \frac{3}{2}k^2 + 4 - 4k = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow k = 1$$

综上所述，我们找到 $k = 1$ 使得上式成立，我们有： $\exists (\xi, \eta) \in D, s.t. |f'(\xi, \eta)| \geq \frac{2}{4 \ln 2 + 3}$

例题 33.6.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}}$$

解

原极限等价于：

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1)}{\ln x}} \\
 &\stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{(1 - \ln x)e^{\frac{\ln x}{x}}}{x(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1)}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{(1 - \ln x)e^{\frac{\ln x}{x}}}{\ln x}} \\
 &= e^{-1}
 \end{aligned}$$

注

- 如果 $f \sim g$, 我们有 $\ln f \sim \ln g$

July 4



例题 33.7.

已知 $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$, $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2}$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{\pi^2}{6}$

(1). 证明: $a_{2n} = \frac{1}{4}a_n + b_n (n = 1, 2, \dots)$

(2). $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{3}{4} \right)$

解

(1). 我们有:

$$\frac{1}{4}a_n = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2}$$

因此, 我们有:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}a_n + b_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} \\ &= a_{2n} \end{aligned}$$

(2). 原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{a_{2n} - a_n}{a_n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n(a_{2n} - a_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \\ &= \frac{6}{\pi^2} \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+k)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2} \right] \\ &= \frac{6}{\pi^2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+\frac{k}{n})^2} \\ &= \frac{6}{\pi^2} \left(-\frac{1}{1+x} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{\pi^2} \end{aligned}$$

注

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{24}$



例题 33.8.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - e^{-\frac{x^2}{2}}e^{2x}}{x^\alpha} = \beta \neq 0, \text{ 求 } \alpha, \beta$$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2e^{2x} + \frac{1}{24}x^4e^{4x} - (1 - \frac{1}{2}x^2e^{2x} + \frac{1}{8}x^4e^{4x})}{x^\alpha} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4e^{4x}}{x^\alpha} \\ &= \beta \end{aligned}$$

我们得到: $\alpha = 4, \beta = -\frac{1}{12}$

July 5

例题 33.9.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx (a > 0)$$

解

原积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\ln a + \ln \frac{x}{a}}{(\frac{x}{a})^2 + 1} d(\frac{x}{a}) \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\ln a + \ln u}{u^2 + 1} du \\ &= \frac{\ln a}{a} \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2 + 1} du + \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{u^2 + 1} du \\ &= I_1 + I_2 \\ I_1 &= \frac{\pi \ln a}{2a} \\ I_2 &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{u^2 + 1} du = \frac{1}{a} \int_{+\infty}^0 \frac{-\ln t}{(\frac{1}{t})^2 + 1} (-\frac{1}{t^2}) dt = -\frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 + 1} dt \Rightarrow I_2 = 0 \\ I &= I_1 + I_2 = \frac{\pi \ln a}{2a} \end{aligned}$$

 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 积分技巧

- 倒代换
- 分割为 $\int_0^1 f(x) dx + \int_1^{+\infty} f(x) dx$
- 利用正切三角换元法



例题 33.10.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^\alpha} = \beta \neq 0, \text{求 } \alpha, \beta$$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 2x - \cos^2 x \cos 2x}{(\cos x + \cos x \sqrt{\cos 2x}) x^\alpha} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos 2x \sin^2 x}{(\cos x + \cos x \sqrt{\cos 2x}) x^\alpha} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos 2x}{\cos x + \cos x \sqrt{\cos 2x}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} \\ &= \beta \end{aligned}$$

我们可以得到: $\alpha = 2, \beta = -\frac{1}{2}$

July 6

例题 33.11.

$$\text{设 } f(x) = \frac{1}{1+3x+9x^2}, \text{求 } f^{(100)}(0)$$

解

我们可以得到:

$$f(x) = \frac{1-3x}{(1-3x)(1+3x+9x^2)} = \frac{1}{1-(3x)^3} - 3x \frac{1}{1-(3x)^3}$$

我们将 $f(x)$ 在 $x=0$ 处泰勒展开得到:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{100} x^{100} + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(100)}}{100!}x^{100} + \cdots \end{array} \right. \Rightarrow f^{(100)}(0) = a_{100} 100!$$

我们有:

$$-1 < x < 1, 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n = \frac{1}{1-x}$$

我们得到:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (3x)^{3n} - \sum_{n=0}^{+\infty} (3x)^{3n+1}$$

我们得到: $a_{100} = -3^{100} \Rightarrow f^{(100)}(0) = -3^{100} 100!$ 

例题 33.12.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - e^{x^2 - 2x}}{x^2} = 2, \text{求 } a, b$$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - (1 + x^2 - 2x + \frac{1}{2}(x^2 - 2x)^2)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(b+2)x + (a-3)x^2}{x^2} \\ &= a-3 \end{aligned}$$

$$\text{我们得到: } \begin{cases} a-3=2 \\ b+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-2 \end{cases}$$

July 7

例题 33.13.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{n!x^n - \sin x \sin 2x \cdots \sin nx}{x^{n+2}}$$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= n! \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\sin x \sin 2x \cdots \sin nx}{n!x^n}}{x^2} \\ &= n! \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\sin x}{x} \frac{\sin 2x}{2x} \cdots \frac{\sin nx}{nx}}{x^2} \\ &= -n! \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{\sin x}{x} \frac{\sin 2x}{2x} \cdots \frac{\sin nx}{nx})}{x^2} \\ &= -n! \sum_{k=1}^n \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{\sin kx - kx}{kx})}{x^2} \\ &= n! \sum_{k=1}^n \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx - \sin kx}{kx^3} \\ &= n! \sum_{k=1}^n \left(\frac{k^2}{6}\right) \\ &= n! \frac{n(n+1)(2n+1)}{36} \\ &= \frac{n(2n+1)(n+1)!}{36} \end{aligned}$$



例题 33.14.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + ax^2 + bx^3}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^2, \text{求 } a, b$$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})+ax^2+bx^3-x}{x}+1)}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + ax^2 + bx^3 - x}{x^3}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) + ax^2 + bx^3 - x}{x^3}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(b - \frac{1}{6})x^3 + o(x^3) + ax^2}{x^3}} \\ &= e^2 \end{aligned}$$

我们得到: $\begin{cases} b - \frac{1}{6} = 2 \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{13}{6} \\ a = 0 \end{cases}$

注

$$x \rightarrow 0, x \sim \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

我们可以得到:

$$[\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^3 + \dots$$

我们可以得到: $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的泰勒展开式:

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

33.2 Week II

July 8



例题 33.15.

设 n 阶矩阵 A, B 满足 $AB + aA + bB + cE = O$, 其中 $ab \neq c$, 证明:

- (1). $A + bE$ 与 $B + aE$ 均为可逆矩阵
- (2). $AB = BA$

1.

解

(1). 我们由 $AB + aA + bB + cE = O$ 可以得到:

$$(A + bE)(B + aE) = (ab - c)E$$

我们得到:

$$\begin{cases} \frac{1}{ab - c}(A + bE)(B + aE) = E \\ (A + bE)\frac{1}{ab - c}(B + aE) = E \end{cases}$$

我们得到: $A + bE$ 与 $B + aE$ 均为可逆矩阵

(2). 我们可以得到:

$$\frac{1}{ab - c}(A + bE)(B + aE) = \frac{1}{ab - c}(B + aE)(A + bE)$$

我们化简一下:

$$\begin{cases} \text{左边} = AB + bB + aA + abE \\ \text{右边} = BA + aA + bB + abE \end{cases} \Rightarrow AB = BA$$

例题 33.16.

已知常数 $a > 0, bc \neq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^a \ln(1 + \frac{x}{b}) - x] = c$, 求 a, b, c

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + bx) - x^{a-1}}{x^a} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx - \frac{1}{2}b^2x^2 - x^{a-1}}{x^a} \\ &= c \end{aligned}$$

$$\text{我们得到: } \begin{cases} a - 1 = 1 \\ b = 1 \\ c = -\frac{1}{2}b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

July 9



例题 33.17.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left[\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{6n}} \frac{\sin y}{y} dy + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{3}{6n}} \frac{\sin y}{y} dy + \cdots + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{(2n-1)}{6n}} \frac{\sin y}{y} dy \right]$$

解

原极限等价于：

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2k-1}{6n}} \frac{\sin y}{y} dy \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \\ &= \int_0^1 \left[\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}x} \frac{\sin y}{y} dy \right] dx \\ &= - \int_0^{\frac{1}{3}} dy \int_0^{3y} \frac{\sin y}{y} dx \\ &= - \int_0^{\frac{1}{3}} 3 \sin y dy \\ &= 3\left(\cos \frac{1}{3} - 1\right) \end{aligned}$$

例题 33.18.

设 A 为 n 阶反对称矩阵, 证明: 对于任意向量 x , 均有 $x^T(A+E)x \geq 0$

解

我们有:

$$x^T(A+E)x = [x^T(A+E)x]^T = x^T(A^T+E)x = x^T(-A+E)x$$

$$x^T(A+E)x + x^T(A-E)x = 2x^TAx = 0 \Rightarrow x^T(A+E)x = x^TAx + x^TEx = x^Tx \geq 0$$

July 10

例题 33.19.

$$\frac{n^{s+1}}{s+1} < 1^s + 2^s + \cdots + n^s < \frac{(n+1)^{s+1}}{s+1} (s > 0)$$



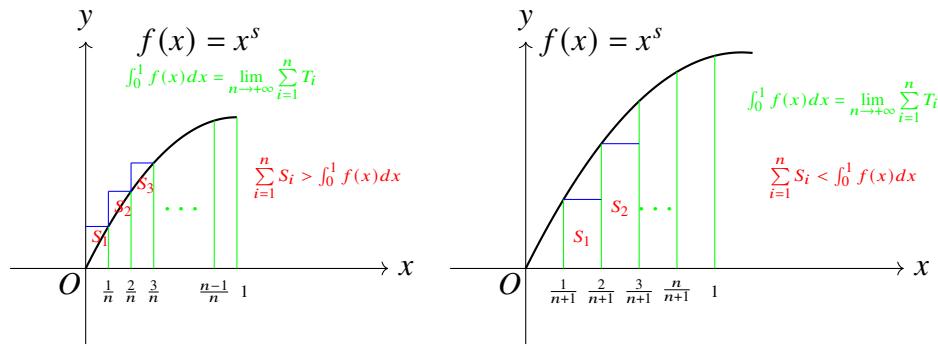


图 33.2: 积分和求和关系图

解

原不等式可以化为:

$$\begin{cases} \frac{1}{n}[(\frac{1}{n})^s + (\frac{2}{n})^s + \cdots + (\frac{n}{n})^s] > \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{n+1}[(\frac{1}{n+1})^s + (\frac{2}{n+1})^s + \cdots + (\frac{n}{n+1})^s] < \frac{1}{s+1} \end{cases}$$

如图 (a) 第一个不等式:

$$\text{左边} = \sum_{i=1}^n S_i > \int_0^1 x^s dx = \frac{1}{s+1} = \text{右边}$$

如图 (b) 第二个不等式:

$$\text{左边} = \sum_{i=1}^n S_i < \int_0^1 x^s dx = \frac{1}{s+1} = \text{右边}$$

例题 33.20.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^{p+1} + 2^{p+1} + \cdots + n^{p+1}}{n(1^p + 2^p + \cdots + n^p)} (p > 0)$$

解



原极限等价于：

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^{p+1} + \left(\frac{2}{n}\right)^{p+1} + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^{p+1}}{\left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^p} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^{p+1} + \left(\frac{2}{n}\right)^{p+1} + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^{p+1} \right]}{\frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^p \right]} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^{p+1}}{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p} \\
 &= \frac{\int_0^1 \frac{x^{p+2}}{p+2} dx}{\int_0^1 \frac{x^{p+1}}{p+1} dx} \\
 &= \frac{p+1}{p+2}
 \end{aligned}$$

July 11

例题 33.21.

已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求 A^{99}

解

我们将矩阵 A 相似对角化：

(1). 求矩阵 A 的特征值和特征向量

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -2 & \lambda + 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$

当 $\lambda_1 = 0$ 时, $(-A)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \xi_1 = (3, 2, 2)^T$

当 $\lambda_2 = -1$ 时, $(-E - A)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \xi_2 = (1, 1, 0)^T$



当 $\lambda_3 = -2$ 时, $(-2E - A)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \xi_3 = (1, 2, 0)^T$

存在可逆矩阵 $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, s.t. $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$, 其中 $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

我们得到:

$$A = P\Lambda P^{-1} \Rightarrow A^{99} = P\Lambda^{99}P^{-1}$$

上面的式子可以化为:

$$\begin{aligned} A^{99} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -2^{99} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2^{99} \\ 0 & -1 & -2^{100} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2^{99}-2 & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ 2^{100}-2 & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

例题 33.22.

设 3 阶实对称矩阵 A 特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, λ_1 的特征向量为 $\xi_1 = [0, 1, 1]^T$, 求 A

解

我们不妨设特征值 λ_2, λ_3 对应的特征向量为 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, 我们由实对称矩阵不同特征值对应的特征向量相互正交得到:

$$x_2 + x_3 = 0$$

我们不妨取 $\xi_2 = (1, 0, 0)^T, \xi_3 = (0, -1, 1)^T$ 作为特征值 λ_2, λ_3 的特征向量. 我们将 ξ_1, ξ_2, ξ_3 单位化得到:

$$\begin{cases} \eta_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T \\ \eta_2 = (1, 0, 0)^T \\ \eta_3 = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T \end{cases}$$



我们得到:

$$\exists \text{ 可逆矩阵 } P = [\eta_1, \eta_2, \eta_3], \text{ s.t. } P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{其中 } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

我们得到:

$$\begin{aligned} A &= P\Lambda P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

July 12

例题 33.23.

设 A 是任意的 $m \times n$ 矩阵, 证明: 方程组 $A^T Ax = A^T b$ 一定有解

解

我们知道非齐次方程组有解的充要条件为: $\text{rank}(A) = \text{rank}([A, b])$

在此题中, 我们需要证明:

$$\text{rank}(A^T A) = \text{rank}([A^T A, A^T b]) = \text{rank}(A^T [A, b])$$

显然, 我们由 $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$ 有:

$$\text{rank}(A^T A) \leq \text{rank}([A^T A, A^T b]) = \text{rank}(A^T [A, b]) \leq \text{rank}(A^T)$$

我们还有: $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T) = \text{rank}(AA^T) = \text{rank}(A^T A)$

因此我们得到:

$$\begin{cases} \text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A) \leq \text{rank}([A^T A, A^T b]) \\ \text{rank}([A^T A, A^T b]) \geq \text{rank}(A^T) = \text{rank}(A) = \text{rank}(A^T A) \end{cases} \Rightarrow \text{rank}(A^T A) = \text{rank}([A^T A, A^T b])$$

原方程组一定有解.



例题 33.24.

设 A 为 3 阶实对称矩阵, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha = (1, 0, 1)^T$ 是矩阵 A 特征值 3 的一个特征向量, 若 $r(3E - A) > 1$, 且 $A^2 - 4E + 3E = 0$, 下列选项错误的是:

- A. 矩阵 A 必可相似对角化
- B. 矩阵 B 不可以相似对角化
- C. 矩阵方程 $AX - XB = 0$ 有可逆解
- D. $r(3E - A) = 2$

解

- A. 我们由实对称矩阵必可相似对角化得到矩阵 A 一定可以相似对角化.
B. 矩阵 B 的三个特征值为 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 对于特征值 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1, n - r(E - B) = 1$, 不满足相似对角化条件.
C. 假设方程 $AX - XB = 0$ 存在可逆解, 我们有 $AXX^{-1} = XBX^{-1} \Rightarrow A = XBX^{-1}$, 我们可以得到: $A \sim B$, 我们有 $A \sim \Lambda$, 可以得到: $B \sim \Lambda$, 矛盾!!
D. 我们有: $A^2 - 4E + 3E = 0 \Rightarrow (A - 3E)(A - E) = 0$, 矩阵 A 的特征值有 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$, 对应 $r(3E - A) = 1$ 或者 2, 又因为 $r(3E - A) > 1 \Rightarrow r(3E - A) = 2$.

July 13

例题 33.25.

求 $f(x) = \sqrt{4x^2 + x} \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$ 的斜渐近线

解

我们不妨假设 $f(x)$ 的斜渐近线为 $y = ax + b$, 我们得到:

(1).

$$\begin{cases} a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) \end{cases}$$

我们得到:

$$\begin{cases} a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4 + \frac{1}{x}} \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2 \ln 2 \\ b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{4x^2 + x} \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) - 2 \ln 2x \right] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{4+t} \ln(2+t) - 2 \ln 2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(2+t)}{2\sqrt{4+t}} + \frac{\sqrt{4+t}}{t+2} \right) = \frac{\ln 2}{4} + 1 \end{cases}$$



(2).

$$\begin{cases} a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) \end{cases}$$

我们得到:

$$\begin{cases} a = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{4 + \frac{1}{x}} \ln(2 + \frac{1}{x}) = -2 \ln 2 \\ b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{4x^2 + x} \ln(2 + \frac{1}{x}) + 2 \ln 2x] = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{2 \ln 2 - \sqrt{4+t} \ln(2+t)}{t} = -\frac{\ln 2}{4} - 1 \end{cases}$$

综上所述, $f(x)$ 的斜渐近线为 $y = 2 \ln 2 x + \frac{\ln 2}{4} + 1$ 和 $y = -2 \ln 2 x - \frac{\ln 2}{4} - 1$ **注**

利用泰勒展开式来求渐近线.

 $f(x) = \sqrt{4x^2 + x} \ln(2 + \frac{1}{x})$, 我们利用泰勒展开式得到:

$$\begin{cases} x \rightarrow +\infty, f(x) \sim 2x \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} [\ln 2 + \ln(1 + \frac{1}{2x})] = 2x(1 + \frac{1}{8x})(\ln 2 + \frac{1}{2x}) = 2 \ln 2 x + \frac{\ln 2}{4} + 1 \\ x \rightarrow -\infty, f(x) \sim -2x \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} [\ln 2 + \ln(1 + \frac{1}{2x})] = -2x(1 + \frac{1}{8x})(\ln 2 + \frac{1}{2x}) = -2 \ln 2 x - \frac{\ln 2}{4} - 1 \end{cases}$$

例题 33.26.当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列无穷小量最高阶的是:

- A. $(1+x)^{x^2} - 1$
- B. $e^{x^4-2x} - 1$
- C. $\int_0^{x^2} \sin t^2 dt$
- D. $\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}$

解A. $e^{x^2 \ln(1+x)} - 1 \sim x^2 \ln(1+x) \sim x^3 \Rightarrow$ 最高阶3阶B. $e^{x^4-2x} - 1 \sim x^4 - x^2 \Rightarrow$ 最高阶4阶C. $\int_0^{x^2} \sin t^2 dt \sim \frac{x^6}{3} \Rightarrow$ 最高阶6阶D. $\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x} = 1 + \frac{1}{2}2x - \frac{1}{8}(2x)^2 - [1 + \frac{1}{3}3x - \frac{1}{27}(3x)^2] \sim \frac{1}{12}x^2 \Rightarrow$ 最高阶2阶

July 14

例题 33.27.求曲线 $y = \sqrt{x^4 - 3x^3 + 4}$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 方向的渐进二次曲线

解

$$\begin{aligned} \text{当 } x \rightarrow +\infty, f(x) &= x^2 \sqrt{1 + \frac{4 - 3x^3}{x^4}} \\ &= x^2 \left[1 + \frac{4 - 3x^3}{2x^4} - \frac{(4 - 3x^3)^2}{8x^8} \right] \\ &= x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{8} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

$$\text{原函数的渐近二次曲线为: } y = x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{8}$$

例题 33.28.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 n 个 n 维列向量, 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关的充要条件为:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^T \alpha_1 & \alpha_1^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T \alpha_n \\ \alpha_2^T \alpha_1 & \alpha_2^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T \alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^T \alpha_1 & \alpha_n^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T \alpha_n \end{vmatrix} \neq 0$$

解

我们不妨设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), A^T = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix}$, 我们可以得到:

$$|AA^T| = \begin{vmatrix} \alpha_1^T \alpha_1 & \alpha_1^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T \alpha_n \\ \alpha_2^T \alpha_1 & \alpha_2^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T \alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^T \alpha_1 & \alpha_n^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T \alpha_n \end{vmatrix} \Rightarrow |A|^2 = \begin{vmatrix} \alpha_1^T \alpha_1 & \alpha_1^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T \alpha_n \\ \alpha_2^T \alpha_1 & \alpha_2^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T \alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^T \alpha_1 & \alpha_n^T \alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T \alpha_n \end{vmatrix}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关等价于 $|A| \neq 0$, 证毕!

33.3 Week III

July 15



例题 33.29.

当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列无穷小量中最高阶的是:

- A. $\int_0^{1-\cos x} \frac{\sin t}{t} dt$
- B. $\int_0^x t \tan \sqrt{x^2 - t^2} dt$
- C. $\int_{\sin x}^{1-\sqrt{\cos x}} e^{xt} \ln(1 + t^3) dt$
- D. $\int_{\sin x}^x \sqrt{\sin^3 t} dt$

解

A. $\int_0^{1-\cos x} \frac{\sin t}{t} dt \sim \int_0^{\frac{1}{2}x^2} 1 dt \sim \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow$ 最高阶 2 阶

B. 我们进行换元 $u = x^2 - t^2$, $d(t^2) = -du$, 原积分等价于: $\int_0^{x^2} \frac{\tan \sqrt{u}}{2} du \sim \frac{1}{3}x^3 \Rightarrow$ 最高阶 3 阶

C. 我们可以得到原积分等价于: $\int_{\sin x}^{1-\sqrt{\cos x}} e^{xt} \ln(1 + t^3) dt = I_1 - I_2$

$$I_1 = \int_0^{1-\sqrt{\cos x}} e^{xt} \ln(1 + t^3) dt$$

$$I_2 = \int_0^{\sin x} e^{xt} \ln(1 + t^3) dt$$

由积分中值定理得到:

$$I_1 = e^{x\xi} \int_0^{1-\sqrt{\cos x}} \ln(1 + t^3) dt \sim \frac{1}{4^5} x^8 \Rightarrow$$
 最高阶 8 阶

$$I_2 = e^{x\xi} \int_0^{\sin x} \ln(1 + t^3) dt \sim \frac{1}{4} x^4 \Rightarrow$$
 最高阶 4 阶

$$\int_{\sin x}^{1-\sqrt{\cos x}} e^{xt} \ln(1 + t^3) dt \sim \frac{1}{4} x^4 \Rightarrow$$
 最高阶 4 阶

D. 由积分中值定理得到:

$$\int_{\sin x}^x \sqrt{\sin^3 t} dt = (x - \sin x) \sin^{\frac{3}{2}} \xi \sim \frac{1}{6} x^{\frac{9}{2}}, \quad \xi \in (\sin x, x) \Rightarrow$$
 最高阶 $\frac{9}{2}$ 阶

例题 33.30.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)}$$

解

我们可以得到: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

我们有:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots$$



我们不妨设 $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$, $T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, 我们有:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)} &= \frac{1}{2}(S-T) \\ &= \frac{1}{2}(-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n-1} + \cdots) - \frac{1}{2}(-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots) \\ &= -\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4} - 1) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

定理 33.3.1 (常用泰勒级数)

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R}$

- 欧拉公式: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

$$\begin{aligned}e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \cdots \\ &= [1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{2k} + \cdots] + i[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbb{R}$

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in \mathbb{R}$

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, x \in (-1, 1)$

- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, x \in (-1, 1)$

- $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+x} dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}, x \in (-1, 1]$

- $\ln(1-x) = - \int_0^x \frac{1}{1-x} dx = -[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots] = - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, x \in [-1, 1)$



命题 33.3.1 (扩展泰勒级数)

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}, x \in (-1, 1)$$

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, x \in [-1, 1]$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots, x \in (-1, 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^{2n}, x \in (-1, 1)$$

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}, x \in (-1, 1)$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbb{R}$$

命题 33.3.2 (常用数列和)

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \ln 2$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

July 16

例题 33.31.

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, A 的每行元素之和为 a , 且 $|A| = b$, 将 A 中的每个元素加 k 得到矩阵 $B = (a_{ij} + k)_{3 \times 3}$, 求 $|B|$

解



我们不妨设: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_{11} + k & a_{12} + k & a_{13} + k \\ a_{21} + k & a_{22} + k & a_{23} + k \\ a_{13} + k & a_{23} + k & a_{33} + k \end{bmatrix}$

我们有:

$$|A| = a \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = b \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned} |B| &= (a+3k) \begin{vmatrix} 1 & a_{12} + k & a_{13} + k \\ 1 & a_{22} + k & a_{23} + k \\ 1 & a_{23} + k & a_{33} + k \end{vmatrix} \\ &= (a+3k) \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} + k \\ 1 & a_{22} & a_{23} + k \\ 1 & a_{23} & a_{33} + k \end{vmatrix} + (a+3k) \begin{vmatrix} 1 & k & a_{13} + k \\ 1 & k & a_{23} + k \\ 1 & k & a_{33} + k \end{vmatrix} \\ &= (a+3k) \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + (a+3k) \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & k \\ 1 & a_{22} & k \\ 1 & a_{23} & k \end{vmatrix} \\ &= \frac{(a+3k)b}{a} \end{aligned}$$

例题 33.32.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n^2 - n + 1)}{2^n}$$

解

我们有:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, x \in (-1, 1) \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2}{3}$$

我们对 $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ 求导得到:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \\ \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)x^n = \frac{2}{(1-x)^3} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(-\frac{1}{2})^n = \frac{4}{9} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)(-\frac{1}{2})^n = \frac{16}{27} \end{array} \right.$$



原级数等价为：

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n^2 - n + 1)}{2^n} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n[(n+2)(n+1) - 4(n+1) + 3]}{2^n} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+2)(n+1)}{2^n} - 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{2^n} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \\
 &= \frac{16}{27} - 4 \frac{4}{9} + 3 \frac{2}{3} \\
 &= \frac{22}{27}
 \end{aligned}$$

July 17

例题 33.33.

设 A 是 3 阶矩阵，且满足 $|A - 2E| = |A - 3E| = |A - 4E| = 3$ ，求 $|A - E|$

解

我们不妨设： $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ，我们有：

$$|A - xE| = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - x & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - x \end{vmatrix} = -x^3 + bx^2 + cx + d$$

又因为： $|A - 2E| = |A - 3E| = |A - 4E| = 3$ ，我们不妨设 $|A - xE| = f(x) = -x^3 + bx^2 + cx + d$

我们可以得到： $f(x) = -(x-2)(x-3)(x-4) + 3$ ，因此： $f(1) = 9 \Rightarrow |A - E| = 9$

例题 33.34.

设 $f(x)$ 连续，且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1$ ， $\alpha(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\ln(1+t^4)}{f(t)} dt$ ， $\beta(x) = \int_0^{\sin x} \frac{\sqrt{1+t^3}-1}{f(t)} dt$ ，则当 $x \rightarrow 0^+$ 时， $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的：

- A. 等价无穷小
- B. 同阶但非等价无穷小
- C. 高阶无穷小
- D. 低阶无穷小



解

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\ln(1+t^4)}{f(t)} dt}{\int_0^{\sin x} \frac{\sqrt{1+t^3}-1}{f(t)} dt} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x^2)}{2\sqrt{x}f(\sqrt{x})}}{\cos x [\sqrt{1+(\sin x)^3} - 1]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin x)}{\sin x} \frac{\sqrt{x}}{f(\sqrt{x})} \frac{1}{x} \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的低阶无穷小.

July 18

例题 33.35.

证明: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 收敛, 并求其和

解

我们不妨设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, 我们可以得到:

$$x \rightarrow a_n \sim \ln n$$

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}}{(k+1)(k+2)} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(k+1)(k+2)} \\
 &= \frac{a_1}{2} - \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3} - \frac{a_2}{4} + \dots + \frac{a_n}{n+1} - \frac{a_n}{n+2} \\
 &= \frac{a_1}{2} + \frac{a_2 - a_1}{3} + \dots + \frac{a_n - a_{n-1}}{n+1} - \frac{a_n}{n+2} \\
 &= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)} - \frac{a_n}{n+2} \\
 &= 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{a_n}{n+2}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} - \frac{\ln n}{n+2}\right) = 1$$

原级数收敛, 其和 $S = 1$.

例题 33.36.

当 $x \rightarrow 0$ 时, $2 \arctan x - \ln \frac{1+x}{1-x}$ 是 x 的 n 阶无穷小, 求 n

解

利用泰勒展开式将函数展开:

$$\begin{cases} \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \rightarrow 0, f(x) &= 2 \arctan x - \ln(1+x) + \ln(1-x) \\ &= 2\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\ &= -\frac{4}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

综上所述, 我们可以得到: $n = 3$.

July 19

例题 33.37.

关于函数 $f(x, y) = \begin{cases} xy & xy \neq 0 \\ x & y = 0 \\ y & x = 0 \end{cases}$, 下列结论正确的是:

- A. $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,0)} = 1$
- B. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}|_{(0,0)} = 1$
- C. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$
- D. $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$

解

A. $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,0)} \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 1$

B. $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,y)} = \begin{cases} 1, & y = 0 \\ \text{不存在}, & y \neq 0 \end{cases}$

C. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$

D. $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \begin{cases} xy = 0, & x \neq 0 \\ y = 0, & x = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$



例题 33.38.

求幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{x^{2n+2}}{n+1}$ 和函数

解

我们先求收敛区间:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = x^2 < 1 \Rightarrow x \in (-1, 1)$$

我们对 $S(x)$ 求导得到:

$$S'(x) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1} = 2f(x)$$

我们再对 $f(x)$ 求导:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} x^{2n} \\ &= 1 + x \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} x^{2n-1} \right] \\ &= 1 + x \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} x^{2n} \right]' \\ &= 1 + x \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+2} \right]' \\ &= 1 + x \left[x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1} \right]' \\ &= 1 + x [xf(x)]' \\ &= 1 + x [f(x) + xf'(x)] \\ &= 1 + xf(x) + x^2 f'(x) \end{aligned}$$

我们得到:

$$f'(x) - \frac{x}{1-x^2} f(x) - \frac{1}{1-x^2} = 0$$

我们解出

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow S(x) = 2 \int_0^x f(x) dx + S(0) = (\arcsin x)^2$$

当 $x = \pm 1$ 时, 我们需要判断级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{1}{n+1}$ 的敛散性:



我们有:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \times 4 \leq 3^3 \\ 4 \times 6 \leq 5^2 \\ \dots \\ (2n-2) \times 2n \leq (2n)^2 \\ (2n) \times (2n+2) \leq (2n+1)^2 \end{array} \right. \Rightarrow [(2n)!!]^2 \leq (n+1)[(2n+1)!!]^2 \Rightarrow \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

我们得到: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{1}{n+1} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$, 由比较判别法可知, 级数收敛.

综上所述, 我们得到: $S(x) = (\arcsin x)^2$, $x \in [-1, 1]$

July 20

例题 33.39.

当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $(1+x)^{\frac{1}{x}} - (e + ax + bx^2)$ 是比 x^2 高阶的无穷小, 求 a, b

解

我们利用泰勒展开得到:

$$\begin{aligned} x \rightarrow 0^+, f(x) &= e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} - (e + ax + bx^2) \\ &= e\left(1 + \frac{\ln(1+x) - x}{x} + \frac{[\ln(1+x) - x]^2}{2x^2} + o(x^2)\right) - (e + ax + bx^2) \\ &= (-a - \frac{e}{2})x + (\frac{11e}{24} - b)x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

$$\text{我们得到: } \begin{cases} a = -\frac{e}{2} \\ b = \frac{11e}{24} \end{cases}$$

综上所述, 我们得到: $a = -\frac{e}{2}$, $b = \frac{11e}{24}$

例题 33.40.

设 $f(x)$ 二阶可导, $f(0) = 0$, 证明:

$$\exists \xi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \text{ s.t. } f''(\xi) = 3f'(\xi) \tan \xi + 2f(\xi)$$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = f(x) \cos^2 x$

我们得到: $F(-\frac{\pi}{2}) = F(0) = F(\frac{\pi}{2}) = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} G(x) = f'(x) \cos x - 2 \sin x f(x) \\ F'(x) = f'(x) \cos^2 x - 2 \sin x \cos x f(x) = \cos x G(x) \end{array} \right. \Rightarrow G'(x) = f''(x) \cos x - 3f'(x) \sin x - 2 \cos x f(x)$$



我们对 $F(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 和 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上使用罗尔定理得到:

$$\begin{cases} \exists \xi_1 \in (-\frac{\pi}{2}, 0), s.t. F'(\xi_1) = \xi_1 G(\xi_1) = 0 \\ \exists \xi_2 \in (0, \frac{\pi}{2}), s.t. F'(\xi_2) = \xi_2 G(\xi_2) = 0 \end{cases}$$

我们对 $G(x)$ 在 (ξ_1, ξ_2) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists \eta \in (\xi_1, \xi_2), s.t. G'(\eta) = f''(\eta) \cos \eta - 3f'(\eta) \sin \eta - 2 \cos \eta f(\eta) = 0 \Rightarrow f''(\eta) = 3f'(\eta) \tan \eta + 2f(\eta)$$

综上所述, 我们得到: $\exists \xi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), s.t. f''(\xi) = 3f'(\xi) \tan \xi + 2f(\xi)$.

July 21

例题 33.41.

设函数 $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$, 求 a, b, c

解

我们由泰勒展开式:

$$\begin{cases} \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^3) \end{cases}$$

我们可以得到:

$$\begin{aligned} x \rightarrow 0, f(x) &= \frac{\sin x}{1+x^2} \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6}\right)(1-x^2) \\ &= x - \frac{7}{6}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

我们得到: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -\frac{7}{6} \end{cases}$

例题 33.42.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(1+x)^{\frac{1}{x}}} - (1+x)^{\frac{e}{x}}}{x^2}$$

解



原极限等价于:

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{e \ln(1+x)}{x}} \frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} - e^{\frac{e \ln(1+x)}{x}} - 1}{x^2} \\
 &= e^{e+1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x}} - \frac{\ln(1+x)-x}{x} - 1}{x^2} \\
 &= e^{e+1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(\ln(1+x)-x)^2}{x^2}}{x^2} \\
 &= \frac{e^{e+1}}{8}
 \end{aligned}$$

33.4 Week IV

July 22

例题 33.43.

设函数 $f(x) = \sec x$ 在 $x = 0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $1 + ax + bx^2$, 求 a, b

解

我们有:

$$\sec x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \dots, \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

我们可以知道: $\begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$

例题 33.44.

设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 二阶导数连续, 证明:

$$\exists \xi \in [-1, 1], \text{ s.t. } \int_{-1}^1 x f(x) dx = \frac{2f'(\xi) + \xi f''(\xi)}{3}$$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = \int_0^x t f(t) dt, F(0) = F'(0) = 0$, 我们有:

$$\begin{cases} F'(x) = x f(x) \\ F''(x) = f(x) + x f'(x) \\ F'''(x) = 2f'(x) + x f''(x) \end{cases}$$

原命题等价于: $\exists \xi \in [-1, 1], \text{ s.t. } F(1) - F(-1) = \frac{1}{3}F'''(\xi)$



我们将 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处进行泰勒展开:

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2}x^2 + \frac{F'''(\xi)}{6}x^3, \quad \xi \in (0, x)$$

我们有:

$$\begin{cases} F(1) = \frac{F''(0)}{2} + \frac{F'''(\xi_1)}{6} \\ F(-1) = \frac{F''(0)}{2} - \frac{F'''(\xi_2)}{6} \end{cases} \Rightarrow F(1) - F(-1) = \frac{1}{3} \frac{F'''(\xi_1 + F'''(\xi_2))}{2}$$

我们由 $F'''(x)$ 连续, 由介值定理可以知道:

$$\exists \eta \in (-1, 1), s.t. \frac{F'''(\xi_1) + F'''(\xi_2)}{2} \Rightarrow \exists \xi \in [-1, 1], s.t. F(1) - F(-1) = \frac{1}{3} F'''(\eta)$$

综上所述, 我们得到: $\exists \xi \in [-1, 1], s.t. \int_{-1}^1 xf(x)dx = \frac{2f'(\xi) + \xi f''(\xi)}{3}$

July 23

例题 33.45.

函数 $f(x) = \frac{(x+1)|x-1|}{e^{\frac{1}{x-2}} \ln|x|}$ 的可去间断点个数

解

我们发现可能的间断点为 $x = 0, x = 1, x = -1, x = 2$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^{\frac{1}{2}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = e^{\frac{1}{2}} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\ln(-x)} = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ 是 } f(x) \text{ 的可去间断点}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2e \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\ln x} = 2e \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2e \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{\ln(-x)} = -2e \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ 不是 } f(x) \text{ 的可去间断点}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2e^{\frac{1}{3}} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1}{\ln(-x)} = -2e^{\frac{1}{3}} \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2e^{\frac{1}{3}} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1+x}{\ln(-x)} = -2e^{\frac{1}{3}} \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ 是 } f(x) \text{ 的可去间断点}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{3}{\ln 2} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{+\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{3}{\ln 2} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{0} = +\infty \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ 不是 } f(x) \text{ 的可去间断点}$$

综上所述, $f(x)$ 的可去间断点有两个, 分别为 $x = 0, x = -1$

例题 33.46.

设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, $f(x)$ 为连续函数, $\varphi(x)$ 有间断点, 下列命题正确的是:

- A. $f(x)[|\varphi(x)| + \varphi^2(x)]$ 必有间断点



- B. 若 $f(x)$ 单调, 则 $\frac{\varphi(x)}{|f(x)|}$ 必有间断点
- C. $\frac{\varphi(x)}{1+f^2(x)}$ 必有间断点
- D. $f(x)\varphi(x)$ 必有间断点

解

我们知道:

$$f(x) \text{ 有间断点} \Leftrightarrow |f(x)| \text{ 有间断点}, |f(x)| \text{ 有间断点} \Rightarrow f(x) \text{ 有间断点}$$

我们知道 $|\varphi(x)|$ 不一定有间断点, 令 $f(x) = 0 \Rightarrow f(x)g(x)$ 连续不存在间断点, 我们可以得到 A, D 错误.

我们知道 $f(x)$ 连续 $\Rightarrow |f(x)|$ 连续, 我们不妨假设: $\frac{\varphi(x)}{|f(x)|}$ 连续, 我们知道连续函数之积仍然是连续函数, 我们得到: $\varphi(x)$ 连续, 矛盾!!!

对于 C 选项, 我们同理假设 $\frac{\varphi(x)}{1+f^2(x)}$ 连续, 我们知道 $1+f^2(x)$ 连续, 我们得到: $\varphi(x)$ 连续, 矛盾!!!

July 24

例题 33.47.

设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 是 n 阶矩阵 A 的 m 个两两互异的特征值 ($m \leq n$), 对应的特征向量分别为 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$, 令 $\eta = \sum_{k=1}^m \xi_k$

证明: $\eta, A\eta, A^2\eta, \dots, A^{m-1}\eta$ 线性无关

解

我们由:

$$\begin{cases} A\xi_1 = \lambda_1\xi_1 \\ A\xi_2 = \lambda_2\xi_2 \\ \dots \\ A\xi_m = \lambda_m\xi_m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \eta = \sum_{k=1}^m \xi_k \\ A\eta = \sum_{k=1}^m \lambda_k \xi_k \\ A^2\eta = \sum_{k=1}^m \lambda_k^2 \xi_k \\ \dots \\ A^{m-1}\eta = \sum_{k=1}^m \lambda_k^{m-1} \xi_k \end{cases}$$



我们不妨假设矩阵 $C = [\eta, A\eta, \dots, A^{m-1}\eta]$, 我们有:

$$C = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m] \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \dots & \lambda_m^{m-1} \end{bmatrix}$$

我们可以知道 $C = DB$, 其中 D 为列满秩矩阵, B 为范德蒙矩阵.

我们有 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 两两互异, 我们得到 $|B| \neq 0$, B 为可逆矩阵, 我们得到: $r(C) = r(D), D = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m]$ 线性无关, 因此我们得到:

$\eta, A\eta, A^2\eta, \dots, A^{m-1}\eta$ 线性无关

例题 33.48.

设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n} + x^{2n}}}$, $f(x)$ 在其定义域内:

- A. 连续
- B. 有 1 个可去间断点
- C. 有 1 个跳跃间断点
- D. 有 1 个第二类间断点

解

我们首先得到:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 2 \\ 2\sqrt{2}, & x = 2 \\ x^2, & x > 2 \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $(-\infty, -2]$ 上没有定义, 在 $(-2, +\infty)$ 上有且仅有一个间断点 $x = 2$, 且为跳跃间断点.

July 25

例题 33.49.

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^{y^2}}{\sqrt{x}} \right) dy$$

解



原二重积分等价于：

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx - \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 \frac{e^{y^2}}{\sqrt{x}} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx - \int_0^1 2e^{y^2} dy + e^{y^2} \Big|_{y=0}^{y=1} \\
 &= \int_0^1 2e^{t^2} dt - \int_0^1 2e^{y^2} dy + e - 1 \\
 &= e - 1
 \end{aligned}$$

例题 33.50.

设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+2} - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$, 函数 $f(x)$:

- A. 仅有 1 个间断点
- B. 仅有 2 个间断点, 其中 1 个可去间断点, 1 个无穷间断点
- C. 仅有 2 个间断点, 2 个都是跳跃间断点
- D. 有 2 个跳跃间断点和 1 个可去间断点

解

我们可以知道：

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| > 1 \\ 0, & |x| = 0 \\ -1, & 0 < |x| < 1 \end{cases}$$

我们知道 $f(x)$ 有 3 个间断点, 其中 $x = 0$ 是可去间断点; $x = 1$ 和 $x = -1$ 是两个跳跃间断点。

July 26

例题 33.51.

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$$

解



原积分等价于：

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{\ln x} dx \int_a^b (\ln x) x^y dy \\
 &= \int_a^b dx \int_0^1 x^y dx \\
 &= \int_a^b \frac{1}{y+1} dy \\
 &= \ln \left| \frac{b+1}{a+1} \right|
 \end{aligned}$$

例题 33.52.

$$\int_0^1 \sin(\ln \frac{1}{x}) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$$

解

原积分等价于：

$$\begin{aligned}
 I &= - \int_0^1 \sin(\ln x) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \\
 &= - \int_0^1 \frac{\sin(\ln x)}{\ln x} dx \int_a^b (\ln x) x^y dy \\
 &= - \int_0^1 dx \int_a^b \sin(\ln x) x^y dy \\
 &= - \int_a^b dy \int_{-\infty}^0 e^{(y+1)t} \sin t dt \\
 &\quad \left. \begin{matrix} (y+1)e^{(y+1)t} & \cos t \\ e^{(y+1)t} & \sin t \end{matrix} \right|_{t=0}^{t=-\infty} dy \\
 &= \int_a^b \frac{1}{1 + (y+1)^2} dy \\
 &= \arctan(y+1) \Big|_{y=a}^{y=b} \\
 &= \arctan(b+1) - \arctan(a+1)
 \end{aligned}$$

July 27

例题 33.53.

设 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续，且 $\frac{f(x) - 2x}{e^{x-1} - 1} - \frac{1}{\ln x}$ 在 $x = 1$ 的某去心邻域有界，求 $f(1)$

解



我们由题意可得:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x) - 2x}{e^{x-1} - 1} - \frac{1}{\ln x} \right] (e^{x-1} - 1) = 0$$

上述极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[f(x) - 2x - \frac{e^{x-1} - 1}{\ln x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - 2x) - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

我们知道:

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - 2x] = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

综上所述, $f(1) = 3$.

例题 33.54.

设 α, β 均为 3 维单位列向量, $\alpha^T \beta = \frac{1}{2}$, $A = \alpha \beta^T + \beta \alpha^T$, 求二次型 $x^T A x$ 在正交变换下的标准型

解

我们由: $\alpha^T \beta = \frac{1}{2}$, $A = \alpha \beta^T + \beta \alpha^T$ 可以得到:

$$\begin{cases} A\alpha = \frac{1}{2}\alpha + \beta \\ A\beta = \alpha + \frac{1}{2}\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(\alpha + \beta) = \frac{3}{2}(\alpha + \beta) \\ A(\alpha - \beta) = -\frac{1}{2}(\alpha - \beta) \end{cases}$$

我们可以知道: 矩阵 A 有两个特征向量 $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

我们有 $r(\alpha \beta^T) = r(\beta \alpha^T) = 1 \Rightarrow r(A) \leq r(\alpha \beta^T) + r(\beta \alpha^T) = 2$

我们由 $r(A) \leq 2 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 0$

我们可得到 A 的三个特征值为 $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_3 = 0$.

综上所述, 二次型 $f = x^T A x$ 的标准型为 $f = \frac{3}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2$.

变式

$A = \alpha \beta^T$, 求二次型 $f = x^T A x$ 在正交变换下的标准型.

解

我们首先要求出二次型对应的矩阵 B , 我们有: $f^T = f \Rightarrow x^T A^T x = B^T$

我们得到: $B = \frac{A + A^T}{2} = \frac{\alpha \beta^T + \beta \alpha^T}{2}$

我们有:

$$\begin{cases} B\alpha = \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{2}\beta \\ B\beta = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(\alpha + \beta) = \frac{3}{4}(\alpha + \beta) \\ B(\alpha - \beta) = -\frac{1}{4}(\alpha - \beta) \end{cases}$$



我们可以知道: 矩阵 B 有两个特征向量 $\lambda_1 = \frac{3}{4}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$.

我们有 $r(\alpha\beta^T) = r(\beta\alpha^T) = 1 \Rightarrow r(B) \leq r(\alpha\beta^T) + r(\beta\alpha^T) = 2$

我们由 $r(B) \leq 2 \Rightarrow |B| = 0 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$

我们可得到 A 的三个特征值为 $\lambda_1 = \frac{3}{4}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$, $\lambda_3 = 0$.

综上所述, 二次型 $f = x^T Ax$ 的标准型为 $f = \frac{3}{4}y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2$.

July 28

例题 33.55.

已知函数 $f(x) = \frac{(x^2 + a^2)(x - 1)}{e^{\frac{1}{x}} + b}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有一个可去间断点和一个跳跃间断点, 求 a, b

解

我们发现 $f(x)$ 的间断点为 $x = 0$ 和 $x = \frac{1}{\ln(-b)}$, 我们有:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{a^2}{b} \end{cases} \quad a \neq 0 \Rightarrow x = 0 \text{ 是 } f(x) \text{ 跳跃间断点}$$

我们进而得到 $x = \frac{1}{\ln(-b)}$ 是 $f(x)$ 可去间断点, 我们得到:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \ln(-b)^+} f(x) = \frac{\ln^2(-b) + a^2}{-b} \lim_{x \rightarrow \ln(-b)^+} \frac{x-1}{x - \ln(-b)} = a \\ \lim_{x \rightarrow \ln(-b)^-} f(x) = \frac{\ln^2(-b) + a^2}{-b} \lim_{x \rightarrow \ln(-b)^-} \frac{x-1}{x - \ln(-b)} = a \end{cases} \Rightarrow b = -e$$

综上所述, $a \neq 0$, $b = -e$

例题 33.56.

$$\int \frac{x^2(\sqrt{1+x^2} - x)}{\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2} + 1)} e^x dx$$

解



原不定积分等价于：

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{(\sqrt{1+x^2} - x)(\sqrt{1+x^2} + 1)}{\sqrt{1+x^2}} e^x dx \\
 &= \int (\sqrt{x^2+1} - x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1) e^x dx \\
 &= \int (g(x) + g'(x)) e^x dx \\
 &= e^x g(x) + C \\
 &= e^x (\sqrt{x^2+1} - x) + C
 \end{aligned}$$

July 29

例题 33.57.

函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$, 判断 $x = 0$ 处连续性、可导性以及极值情况

解

首先判断连续性：

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 = f(0) \Rightarrow f(x) \text{ 在 } x = 0 \text{ 处连续}$$

可导性：

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{1}{2} = f'(0)$$

我们得到 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续可导，且导函数连续。

例题 33.58.

$A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 是实对称矩阵， A 的每行元素之和为 0，设 2, 3 是 A 的非零特征值，求 a_{11} 对应的代数余子式

解

我们可以知道矩阵 A 的三个特征值分别为 0, 2, 3，其中特征值 0 对应的特征向量为 $\xi_1 =$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

我们根据 A^* 和 A 特征值和特征向量之间的关系可以知道 A^* 的三个特征值分别为 6, 0, 0,



其中特征值 6 对应的特征向量为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

对于 A^* , 我们根据谱分解定理可以得到: $A^* = \sum_{i=1}^3 \lambda_i G_i = 6e_1^T e_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

综上所述: a_{11} 对应的代数余子式 $A_{11} = A_{11}^* = 2$.

July 30

例题 33.59.

下列函数在 $x = 0$ 处不可导的是:

- A. $\int_0^x (|t| + t) dt$
- B. $|x| [x + \int_0^{|x|} e^{t^2} dt]$
- C. $|\tan x - \sin x|$
- D. $\sin |x| + \cos |x|$

解

$$A. f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad f(x) \text{ 在 } x = 0 \text{ 处可导}$$

$$B. \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{cases} \quad f(x) \text{ 在 } x = 0 \text{ 处可导}$$

$$C. \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{cases} \quad f(x) \text{ 在 } x = 0 \text{ 处可导}$$

$$D. \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = -\infty \end{cases} \quad f(x) \text{ 在 } x = 0 \text{ 处不可导}$$

例题 33.60.

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 证明:

$$\exists \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in (a, b) (\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n), \text{ s.t. } f'(\xi_1) f'(\xi_2) \cdots f'(\xi_n) = \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right]^n$$

解

我们构造辅助函数 $F(x) = [f(x) - f(a)]^n$, $G(x) = [x - a]^n$, 我们有 $F(a) = G(a) = 0$



我们由柯西中值定理可以得到:

$$\exists \xi_1 \in (a, b), s.t. \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} \Rightarrow \frac{f'(\xi_1) [f(\xi_1) - f(a)]^{n-1}}{(\xi_1 - a)^{n-1}} = \frac{[f(b) - f(a)]^n}{(b - a)^n}$$

我们继续构造辅助函数 $H(x) = [f(x) - f(a)]^{n-1}$, $J(x) = [x - a]^{n-1}$, 我们有 $H(a) = J(a) = 0$

我们由柯西中值定理可以得到:

$$\exists \xi_2 \in (\xi_1, b), s.t. \frac{H'(\xi_2)}{J'(\xi_2)} = \frac{F(\xi_2) - F(a)}{G(\xi_2) - G(a)} \Rightarrow \frac{f'(\xi_2) [f(\xi_2) - f(a)]^{n-2}}{(\xi_2 - a)^{n-2}} = \frac{[f(\xi_1) - f(a)]^{n-1}}{(\xi_1 - a)^{n-1}}$$

.....

我们构造辅助函数 $P(x) = f(x) - f(a)$, $Q(x) = x - a$, 我们有 $P(a) = Q(a) = 0$ 我们由拉格朗日中值定理可以得到:

$$\exists \xi_n \in (\xi_{n-1}, b), s.t. f'(\xi_n) = \frac{f(\xi_{n-1}) - f(a)}{\xi_{n-1}}$$

我们将上面 n 个式子相乘可以得到:

$$f'(\xi_1) f'(\xi_2) \cdots f'(\xi_n) = \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right]^n$$

综上所述, 我们得到:

$$\text{存在互不相同的 } \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in (a, b), s.t. f'(\xi_1) f'(\xi_2) \cdots f'(\xi_n) = \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right]^n$$

July 31

例题 33.61.

已知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f[\varphi(x)] - f(0)}{\varphi(x)}$ 存在和 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导之间关系

1.

解

(1). 必要性

$f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = A \Rightarrow \lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} \frac{f[\varphi(x)] - f(0)}{\varphi(x)} = A$$

当 $\varphi(x) \equiv 0$ 时, 充分性不成立.

(2). 充分性

我们不妨取 $\varphi(x) = |x|$, 我们可以得到:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f[\varphi(x)] - f(0)}{\varphi(x)} = A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'_+(0)$$

充分性不成立.

综上所述, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f[\varphi(x)] - f(0)}{\varphi(x)}$ 存在是 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的既不充分也不必要条件.



例题 33.62.

设存在连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = 1 + \lambda \int_x^1 f(y)f(y-x)dy$, 证明: $\lambda \leq \frac{1}{2}$

解

我们对等式两边分别在区间 $[0, 1]$ 上取定积分得到:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &= 1 + \lambda \int_0^1 \left[\int_x^1 f(y)f(y-x)dy \right] dx \\ &= 1 + \lambda \int_0^1 \left[f(y) \int_0^y f(y-x)dx \right] dy \\ &= 1 + \lambda \int_0^1 \left[f(y) \int_0^y f(x)dx \right] dy \\ &= 1 + \lambda \int_0^1 \left[\int_0^y f(x)dx \right] d\left(\int_0^y f(x)dx\right) \\ &= 1 + \frac{\lambda}{2} \left[\int_0^1 f(x)dx \right]^2 \end{aligned}$$

我们不妨记 $A = \int_0^1 f(x)dx$, 我们可以得到:

$$A = 1 + \frac{\lambda}{2} A^2 \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上有实数根} \Rightarrow 1 - 2\lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda \leq \frac{1}{2}$$





第 34 章 August

34.1 Week I

August 1

例题 34.1.

已知 $f(x)$ 为奇函数, $f'_+(0)$ 存在和 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导关系

解

(1). 充分性

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

我们可以得到:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(-x) - f(0)}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-f(x) - f(0)}{-x} = A$$

我们得到:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = A$$

充分性成立

(2). 必要性

$$f(x) \text{ 在 } x = 0 \text{ 处可导} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = A$$

必要性成立

综上所述, $f'_+(0)$ 存在是 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的充要条件.



例题 34.2.

$$\int_0^1 dx \int_{1-x}^{2-x} e^{(x+y)^2} (\sin^2 x + \cos^2 y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} e^{(x+y)^2} (\sin^2 x + \cos^2 y) dy$$

解

我们画出二重积分的积分区域, 不难发现积分区域关于直线 $y = x$ 对称, 原二重积分等价于:

$$I = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{2-x} e^{(y+x)^2} (\sin^2 y + \cos^2 x) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} e^{(y+x)^2} (\sin^2 y + \cos^2 x) dy$$

我们得到:

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^1 dx \int_{1-x}^{2-x} 2e^{(x+y)^2} dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} 2e^{(x+y)^2} dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}}^{\frac{2}{\sin \theta + \cos \theta}} 2r e^{r^2(1+\sin 2\theta)} dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^4 - e}{1 + \sin 2\theta} d\theta \\ I &= \frac{e^4 - e}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 \theta}}{(1 + \tan \theta)^2} d\theta \\ &= \frac{e^4 - e}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx \\ &= \frac{e^4 - 4}{2} \end{aligned}$$

August 2

例题 34.3.

已知函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某邻域内可导, $f'(x_0) > 0$ 与 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某邻域内单调递增关系

解

(1). 充分性

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A > 0$$

我们可以得出, $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, $f(x) < f(x_0)$; $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, $f(x) > f(x_0)$, 并不能得出函数的单调性.

(2). 必要性

$f(x)$ 在某邻域内单调递增, 我们只能得出 $f'(x_0) \geq 0$

综上所述, $f'(x_0) > 0$ 是 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某邻域内单调递增的既不充分也不必要条件.



例题 34.4.

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t-1}}{t^n} dt \quad (n \geq 2), \text{ 求 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$$

解

我们令 $t = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $dt = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$, 我们可以得到:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} \cos^{2n} x \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-4} x dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} x dx \end{aligned}$$

由此我们可以得到:

$$\begin{cases} I_{n+1} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} x dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx \\ I_n = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-4} x dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} x dx \end{cases}$$

我们得到:

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-4} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} x dx}$$

我们计算:

$$\begin{aligned} J_{2n} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} x d(\sin x) \\ &= (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^{2n-2} x dx \\ &= (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} x dx - (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx \\ &= (2n-1)J_{2n-2} - (2n-1)J_{2n} \\ J_{2n} &= \frac{2n-2}{2n} J_{2n-2} \end{aligned}$$

我们得到:

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{J_{2n-2} - J_{2n}}{J_{2n-4} - J_{2n-2}} = \frac{\frac{2}{2n} J_{2n-2}}{\frac{2}{2n-2} J_{2n-4}} = \frac{n-1}{n} \frac{2n-4}{2n-2} = \frac{n-2}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-2}{n} = 1$$

August 3



例题 34.5.

设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某个邻域内有定义, 下列命题中正确的个数:

- A. 若 $f'(x_0)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续
- B. 若 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续
- C. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续
- D. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续

解

A. 导函数存在, 原函数连续, 正确

B. 左右导数存在, 我们得到:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = B \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

C、D 我们取 $f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, 此时 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$, 函数在

$x = x_0$ 处间断.

综上所述, 上述命题正确的个数为 2 个.

例题 34.6.

A 为 3 阶实对称矩阵, 特征值为 0, 1, 1, 且 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{bmatrix}$ 是 A 的两个不同的特征向量, 若 $A(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_2$, 求矩阵 A

解

(1). 我们可以得到:

α_1 是矩阵 A 特征值 0 对应的特征向量; α_2 是矩阵 A 特征值 1 对应的特征向量.

(2). 我们知道实对称矩阵不同特征值对应的特征向量是正交的 $\Rightarrow \alpha_1^T \alpha_2 = 0 \Rightarrow a = 1$

(3). 根据谱分解定理, 我们可以得到: $A = \sum_{i=1}^3 \lambda_i G_i$

我们发现矩阵 $A - E$ 更好求, 因为矩阵 $A - E$ 的特征值为 -1, 0, 0, 因此 $A - E = -G_1 = -e_1 e_1^T$,



我们得到:

$$\begin{cases} A = E - e_1 e_1^T \\ e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

August 4

例题 34.7.

设曲线 $y = f(x)$ 与 $y = \sqrt{\frac{(1+x^2)\sqrt{x}}{e^{x-1}}} + \arctan \frac{x^2-1}{\sqrt{1+x^2}}$ 在点 $(1, \sqrt{2})$ 处相切, 求 $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + 1 - \sqrt{2}]^{\frac{1}{\ln x}}$

解

原极限可以化为:

$$\begin{aligned} I &= e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(f(x) + 1 - \sqrt{2})}{\ln x}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{2}}{x - 1}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 1} f'(x)} \end{aligned}$$

我们有:

$$\begin{cases} g(x) = \sqrt{\frac{(1+x^2)\sqrt{x}}{e^{x-1}}} \\ h(x) = \arctan \frac{x^2-1}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases} \quad \begin{cases} \ln(g(x)) = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}\ln x + \ln(1+x^2) - x + 1] \\ h'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{g'(1)}{g(1)} = \frac{1}{2}[\frac{1}{2x} + \frac{2x}{1+x^2} - 1]|_{x=1} = \frac{1}{4} \\ g'(1) = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ h'(1) = \sqrt{2} \end{cases}$$

我们由 $f'(1) = g'(1) + h'(1) = \frac{5\sqrt{2}}{4}$, 我们得到原极限 $I = e^{\frac{5\sqrt{2}}{4}}$

例题 34.8.

求二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + mx_3)(2x_1 + 3x_2 + nx_3)$ 的正惯性指数

解



我们令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + mx_3 \\ y_2 = 2x_1 + 3x_2 + nx_3 \\ y_3 = ax_1 + bx_2 + cx_3 \end{cases}$ 可以得到二次型 $g(y_1, y_2, y_3) = y_1y_2$

我们再令 $\begin{cases} z_1 = y_1 + y_2 \\ z_2 = y_1 - y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$ 可以得到二次型 $h(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - z_2^2$

我们作的线性变换 $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & 3 & n \\ a & b & c \end{bmatrix}$ 和 $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 均为可逆线性变换, 二次型 f 和二次型 h 为合同二次型, 具有相同的正惯性指数和负惯性指数.

综上所述, 原二次型的正惯性指数为 1.

August 5

例题 34.9.

确定函数 $g(x) = |x^3 - x - \sin x|$ 不可导的点的个数

解

我们知道, 对于连续函数 $f(x)$, 当 $f(x) \neq 0$ 时, $f(x)$ 可导, $|f(x)|$ 也可导; 当 $f(x) = 0$ 时, 当且仅当 $f'(x) = 0$ 时, $|f(x)|$ 可导.

我们已知 $f(x) = x^3 - x - \sin x$ 在 $x \in \mathbb{R}$ 处处可导, 当 $f(x) \neq 0$ 时, $g(x) = |f(x)|$ 可导, 我们只需要关注 $f(x) = 0$ 处的导函数值是否为 0.

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - x - \sin x \\ f'(x) = 3x^2 - 1 - \cos x \\ f''(x) = 6x + \sin x \\ f'''(x) = 6 + \cos x > 0 \end{cases}$$

我们知道:

$f''(x)$ 单调递增, $f''(0) = 0$, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f''(x) < 0$; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f''(x) > 0$.

我们得到:

$f'(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减; 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增 $\Rightarrow f'(x)_{\min} = f'(0) = -2 < 0$

我们取 $a = -\frac{\pi}{2}$, $b = \frac{\pi}{2}$, 我们有: $\begin{cases} f'(a) = \frac{3}{4}\pi^2 - 1 > 0 \\ f'(b) = \frac{3}{4}\pi^2 - 1 > 0 \end{cases}$

我们得到: $\exists x_1 \in (a, 0)$, $x_2 \in (0, b)$, s.t. $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$

我们得到: $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, $f'(x) > 0$; $x \in (x_1, x_2)$, $f'(x) < 0$.



$f(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 单调递增; (x_1, x_2) 单调递减; $(x_2, +\infty)$ 单调递增, 其中 $x_1 < 0 < x_2$

我们有 $\begin{cases} f(a) < 0 \\ f(0) = 0 \\ f(b) > 0 \end{cases}$, 我们得到:

\exists 唯一的 $\xi_1 \in (a, 0), \xi_2 \in (0, b), s.t. f(\xi_1) = f(\xi_2) = f(0) = 0$

此时对应 $f'(x)$ 均不为 0, 我们可以得到 $g(x)$ 不可导的点有 3 个: $x = \xi_1, x = 0, x = \xi_2$.

例题 34.10.

设 A 为 n 阶矩阵, n 维列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, $\exists \beta_i, s.t. A\beta_i = \alpha_i (i = 1, 2, \dots, t)$, 分析下列命题正确的个数

- A. 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性无关
- B. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性无关
- C. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 均是方程组 $A^2x = 0$ 的解
- D. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 均是方程组 $A^2x = 0$ 的基础解系

解

(1). 我们令 $C = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t), B = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$, 我们有 $AB = C$

我们根据 $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$, 我们可以得到: $\text{rank}(A) \geq \text{rank}(C), \text{rank}(B) \geq \text{rank}(C) \Rightarrow \text{rank}(B) \geq t$, 又因为矩阵 B 有 t 列, $\text{rank}(B) \leq t$, 矩阵 B 是列满秩矩阵, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性无关

(2). 我们假设存在不全为 0 的数 $l_1, l_2, \dots, l_t, r_1, r_2, \dots, r_t$, 使得:

$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \dots + l_t\alpha_t + r_1\beta_1 + r_2\beta_2 + \dots + r_t\beta_t = 0$$

上面的式子同时左乘 A 得到:

$$r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \dots + r_t\alpha_t = 0$$

由于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 线性无关, 我们可以知道: $r_1 = r_2 = \dots = r_t = 0$.

原式子化为: \exists 不全为 0 的数 $l_1, l_2, \dots, l_t, s.t. l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \dots + l_t\alpha_t = 0$

由于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 线性无关, 我们可以知道: $l_1 = l_2 = \dots = l_t = 0$.

综上所述, 我们得到: $l_1 = l_2 = \dots = l_t = r_1 = r_2 = \dots = r_t = 0$, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性无关.

$$(3). \begin{cases} A\alpha_i = 0 \\ A\beta_i = \alpha_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(A\alpha_i) = 0 \\ A(A\alpha_i) = A\beta_i = 0 \end{cases}$$

我们可以得到: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 均是方程组 $A^2x = 0$ 的解

(4). 由 (2), (3) 可以知道 $A^2x = 0$ 至少存在 $2t$ 个线性无关的解, 我们可以推出 $n - \text{rank}(A^2) \geq$



$2t$, 我们有 $\text{ran}(AB) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n$, 结合起来我们有:

$$\begin{cases} n - \text{rank}(A^2) \geq 2t \\ \text{rank}(A^2) \geq 2(n-t) - n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{rank}(A^2) \leq n - 2t \\ \text{rank}(A^2) \geq n - 2t \end{cases} \Rightarrow \text{rank}(A^2) = n - 2t$$

方程组 $A^2x = 0$ 基础解析向量个数为 $r = n - \text{rank}(A^2) = 2t$, 因此向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 均是方程组 $A^2x = 0$ 的基础解系.

综上所述, 命题 (1), (2), (3), (4) 都是正确的, 命题正确个数为 4 个.

August 6

例题 34.11.

设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x^4 & x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$, 若 $y = f[g(x)]$, 求 $\frac{dy}{dx}|_{x=1}$ 和 $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$

解

我们令 $h(x) = f(g(x))$, 我们有:

$$h(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ x^4, & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow h'(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0 \\ 4x^3, & x \leq 0 \end{cases}$$

我们得到: $\begin{cases} h'(1) = 2 \\ h'(0) = 0 \end{cases}$

综上所述, 我们得到: $\frac{dy}{dx}|_{x=1} = 2$, $\frac{dy}{dx}|_{x=0} = 0$.

例题 34.12.

设 A 为 3 阶矩阵, α 为 3 维列向量, $A^2\alpha \neq 0$, $A^3\alpha = 0$, 下列说法错误的是:

- A. A 只有 0 特征值
- B. $r(A) = 2$
- C. A 能相似对角化
- D. A 不是对称矩阵

解

我们可以证明向量组 $(\alpha, A\alpha, A^2\alpha)$ 线性无关, 我们不妨假设存在不全为 0 的数 k_1, k_2, k_3 使得:

$$k_1\alpha + k_2A\alpha + k_3A^2\alpha = 0$$

我们有 $A^2\alpha \neq 0$, $A^3\alpha = 0$, 我们在上面式子两边左乘 A, A^2, A^3 得到:

$$\begin{cases} k_1A\alpha + k_2A^2\alpha = 0 \\ k_1A^2\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0$$



我们得到向量组 $(\alpha, A\alpha, A^2\alpha)$ 线性无关, 我们令 $P = (\alpha, A\alpha, A^2\alpha)$, 矩阵 P 为可逆矩阵, 我们得到:

$$AP = (A\alpha, A^2\alpha, 0) = (\alpha, A\alpha, A^2\alpha) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow AP = PB, \text{ 其中 } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

我们得到: $A = PBP^{-1}$, P 为可逆矩阵, A 与 B 相似

我们可以求出矩阵 B 只有 0 特征值, 且 $\text{rank}(B) = 2$, 不能相似对角化.

August 7

例题 34.13.

设 $\varphi(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 函数 $f(x)$ 可导, 求 $F(x) = f[\varphi(x)]$ 的导数

解

我们有 $\varphi'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0$, 我们可以得到:

$$F'(x) = \begin{cases} f'(x^3 \sin \frac{1}{x})(3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ f'(0)\varphi'(0) = 0, & x = 0 \end{cases}$$

↓

$$F'(x) = \begin{cases} f'(x^3 \sin \frac{1}{x})(3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

例题 34.14.

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上导函数连续, $f(0) = f(\frac{1}{2}) = f(1) = 0$, $|f'(x)| \leq M$, 求证:

$$\left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \frac{M}{8}$$

解

我们由绝对值不等式可以得到:

$$\left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \int_0^1 |f(x)| dx = \begin{cases} \int_0^1 \left| \int_0^x f'(t) dt \right| dx \leq \int_0^1 \int_0^x |f'(t)| dt dx \leq \int_0^1 \left| \int_0^x M dt \right| dx \\ \int_0^1 \left| \int_1^x f'(t) dt \right| dx \leq \int_0^1 \int_1^x |f'(t)| dt dx \leq \int_0^1 \left| \int_1^x M dt \right| dx \\ \int_0^1 \left| \int_{\frac{1}{2}}^x f'(t) dt \right| dx \leq \int_0^1 \int_{\frac{1}{2}}^x |f'(t)| dt dx \leq \int_0^1 \left| \int_{\frac{1}{2}}^x M dt \right| dx \end{cases}$$



我们将 $[0, 1]$ 区间分为 $[0, \frac{1}{4}], [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}], [\frac{3}{4}, 1]$, 我们可以得到:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)| dx &= \int_0^{\frac{1}{4}} |f(x)| dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} |f(x)| dx + \int_{\frac{3}{4}}^1 |f(x)| dx \\ &\leq \int_0^{\frac{1}{4}} \int_0^x M dt dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \int_{\frac{1}{2}}^x M dt dx + \int_{\frac{3}{4}}^1 \int_1^x M dt dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{4}} |Mx| dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} |Mx - \frac{M}{2}| dx + \int_{\frac{3}{4}}^1 |Mx - M| dx \\ &= \frac{M}{32} + \frac{M}{32} + \frac{M}{32} + \frac{M}{32} \\ &= \frac{M}{8} \end{aligned}$$

综上所述, 我们证明: $|\int_0^1 f(x) dx| \leq \frac{M}{8}$

34.2 Week II

August 8

例题 34.15.

设 A 是 n 阶矩阵, 下列说法错误的是:

- A. 对于任意的 n 维列向量 ξ , 有 $A\xi = 0$, 则 $A = 0$
- B. 对于任意的 n 维列向量 ξ , 有 $\xi^T A \xi = 0$, 则 $A = 0$
- C. 对于任意的 n 阶矩阵 B , 有 $AB = 0$, 则 $A = 0$
- D. 对于任意的 n 阶矩阵 B , 有 $B^T AB = 0$, 则 $A = 0$

解

(1). 我们可以知道矩阵 A 的零空间为 $N(A) = R^n$, 我们可以得到 A 的行空间 $R(A) = 0, A = 0$

(2). 当 A 为反对称矩阵时, 我们可以得到 $\xi^T A \xi = 0$

(3). 我们不妨取 $B = E$, 可以得到 $A = 0$, 矩阵 A 只能为零矩阵, 在 $A = 0$ 时, 任意的 n 阶矩阵 B 满足 $AB = 0$

(4). 同 (3), 取 $B = E$, 可以得到 $A = 0$, 矩阵 A 只能为零矩阵, 在 $A = 0$ 时, 任意的 n 阶矩阵 B 满足 $B^T AB = 0$



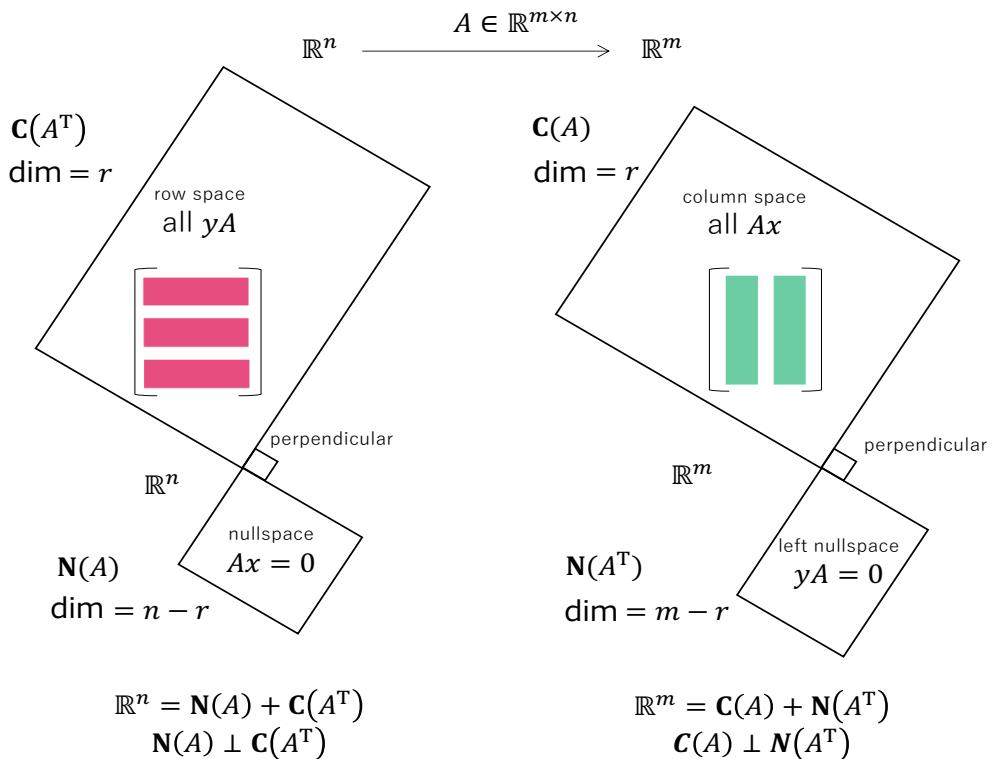


图 34.1: 四个子空间

例题 34.16.

设函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[(x+h)^2] - f(x^2+h)}{h} = 1$, $f(1) = 1$, 求 $f(x)$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[(x+h)^2] - f(x^2+h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[(x+h)^2] - f(x^2) + f(x^2) - f(x^2+h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[(x+h)^2] - f(x^2)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - f(x^2+h)}{h} \\
 &= [f(x^2)]' - f'(x^2) \\
 &= (2x-1)f'(x^2) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

我们得到:

$$f'(x^2) = \frac{1}{2x-1} \Rightarrow 2xf'(x^2) = \frac{2x}{2x-1} \Rightarrow f(x^2) = x + \frac{1}{2} \ln(2x-1) + C$$

我们由 $f(1) = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x^2) = x + \frac{1}{2} \ln(2x-1)$ 我们得到 $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2} \ln(2\sqrt{x}-1)$ 

August 9

例题 34.17.

$f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上导函数连续, $f(0) = f(1) = 0$, 证明:

$$\int_0^1 f^2(x) dx \leq \frac{1}{8} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx$$

定理 34.2.1 (积分形式柯西不等式)

$$\left[\int_a^b f(x)g(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx$$

我们知道 $\forall t \in \mathbb{R}$, 我们有:

$$[tf(x) - g(x)]^2 \geq 0 \Rightarrow t^2 f^2(x) - 2tf(x)g(x) + g^2(x) \geq 0$$

我们对上式子两边在区间 $[a, b]$ 上积分, 可以得到:

$$t^2 \int_a^b f^2(x) dx - 2t \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx \geq 0$$

我们可以得到一个关于 t 的一元二次方程方程:

$$At^2 + Bt + C \geq 0, \text{ 其中 } \begin{cases} A = \int_a^b f^2(x) dx \\ B = -2 \int_a^b f(x)g(x) dx \Rightarrow B^2 - 4AC \leq 0 \\ C = \int_a^b g^2(x) dx \end{cases}$$

我们得到:

$$4 \left[\int_a^b f(x)g(x) dx \right]^2 - 4 \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx \leq 0$$

$$\left[\int_a^b f(x)g(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx$$

**解**

我们知道: $\begin{cases} f(x) = \int_0^x f'(t) dt \\ f(x) = \int_1^x f'(t) dt \end{cases}$ 我们有:

$$\int_0^1 f^2(x) dx = \begin{cases} \int_0^1 [\int_0^x f'(t) dt]^2 dx \leq \int_0^1 [\int_0^x 1^2 dt \int_0^x |f'(t)|^2 dt] dx \\ \int_0^1 [\int_1^x f'(t) dt]^2 dx \leq \int_0^1 [\int_1^x 1^2 dt \int_0^x |f'(t)|^2 dt] dx \end{cases}$$



我们可以得到:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 f^2(x)dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} f^2(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f^2(x)dx \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^x f'(t)dt \right]^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\int_x^1 f'(t)dt \right]^2 dx \\
 &\leq \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^x 1^2 dt \int_0^x |f'(t)|^2 dt \right] dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\int_x^1 1^2 dt \int_x^1 |f'(t)|^2 dt \right] dx \\
 &\leq \int_0^{\frac{1}{2}} [x \int_0^x |f'(t)|^2 dt] dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 [(1-x) \int_x^1 |f'(t)|^2 dt] dx \\
 &= \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(t)|^2 dt \int_t^{\frac{1}{2}} x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(t)|^2 dt \int_{\frac{1}{2}}^t (1-x) dx \\
 &= \left(\frac{1}{8} - \frac{t^2}{2} \right) \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(t)|^2 dt + \left(t - \frac{t^2}{2} - \frac{3}{8} \right) \int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(t)|^2 dt \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(t)|^2 dt + \frac{1}{8} \int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(t)|^2 dt \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx
 \end{aligned}$$

例题 34.18.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) + \frac{1}{2} \right]^{\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}}$$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned}
 I &= e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \right)}{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2}} \\
 &= e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}}{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2}} \\
 &= e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}} \\
 &= e^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

August 10



例题 34.19.

设可导函数 $y = y(x)$ 由方程 $\sin x - \int_x^y \varphi(u)du = 0$ 所确定, 其中可导函数 $\varphi(u) > 0$, 且 $\varphi(0) = \varphi'(0) = 1$, 求 $y''(0)$

解

我们可以得到: 当 $x = 0$ 时, $\int_0^y \varphi(u)du = 0$, 且 $\varphi(u) > 0$, 我们得到 $y = 0$.

我们对方程 $\sin x - \int_x^y \varphi(u)du = 0$ 两边对 x 求导得到:

$$\begin{cases} \cos x - [\varphi(y)y' - \varphi(x)] = 0 \\ -\sin x - [\varphi'(y)y'^2 + \varphi(y)y'' - \varphi'(x)] = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - y'(0)\varphi(0) + \varphi(x) = 0 \\ -\varphi'(0)y'(0)^2 - y''(0)\varphi(0) + \varphi'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'(0) = 2 \\ y''(0) = -3 \end{cases}$$

例题 34.20.

设 $a_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$

$$(1). \text{ 证明: } \frac{1}{2(n+1)} \leq a_n \leq \frac{1}{2n} (n = 1, 2, \dots)$$

(2). 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{2n} - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \right]$ 绝对收敛

解

(1). 我们有:

$$\begin{cases} \frac{x^n}{1+x} \geq \frac{x^n}{2}, x \in (0, 1) \\ \frac{x^n}{1+x} = \frac{x}{1+x} x^{n-1} \leq \frac{x^{n-1}}{2}, x \in (0, 1) \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^n}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{2} dx$$

我们有:

$$\begin{cases} \int_0^1 \frac{x^n}{2} dx = \frac{x^{n+1}}{2(n+1)}|_0^1 = \frac{1}{2(n+1)} \\ \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{2} dx = \frac{x^n}{2n}|_0^1 = \frac{1}{2n} \end{cases}$$

我们证明了: $\frac{1}{2(n+1)} \leq a_n \leq \frac{1}{2n}, n = 1, 2, \dots$

(2). 我们不妨设 $b_n = \frac{1}{2n} - a_n = \frac{1}{2n} - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

我们由 (1) 可得: $|b_n| \leq \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{2n^2+4n} < \frac{1}{2n^2}$

我们知道级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2}$ 收敛, 由比较判别法我们可知级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛, 原级数绝对收敛.

August 11

例题 34.21.

设 $x = x(y)$ 是函数 $y = \ln x + e^x$ 的反函数, 求 $\frac{d^2x}{dy^2}$



解

$$\text{我们有: } \begin{cases} y = f(x) \\ x = g(y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = f'(x) \\ 1 = f'(x)g'(y) \end{cases} \Rightarrow g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\text{我们有: } f(x) = \ln x + e^x \Rightarrow f'(x) = e^x + \frac{1}{x}$$

$$\text{我们得到: } g'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{x}{1+xe^x}$$

我们有:

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{dx}{dx} \frac{dx}{dy} = \frac{x - x^3 e^x}{(1+xe^x)^3}$$

例题 34.22.

设 $a_0 = 1, a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{1}{n+1}(na_n + a_{n-1}) (n = 1, 2, 3 \dots)$, $S(x)$ 为幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的和函数

(1). 证明: 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径不小于 1

(2). 证明: $(1-x)S'(x) - xS(x) = 0, x \in (-1, 1)$, 并求出 $S(x)$ 的表达式

解

(1). 我们由 $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}(na_n + a_{n-1})$ 得到:

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n+1}(a_n - a_{n-1})$$

$$\text{我们不妨设 } b_n = a_n - a_{n-1} \Rightarrow b_{n+1} = -\frac{1}{n+1}b_n, b_1 = a_1 - a_0 = -1$$

我们有:

$$\begin{cases} b_n = -\frac{1}{n}b_{n-1} \\ b_{n-1} = -\frac{1}{n-1}b_{n-2} \\ \dots \\ b_2 = -\frac{1}{2}b_1 \\ b_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow b_n = \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$\text{我们由累加法可以得到: } a_n = \begin{cases} a_0 + \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}, & n \geq 1 \\ 1, & n = 0 \end{cases} \Rightarrow a_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

我们利用根值审敛法:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!})}{n}} = 1$$

我们得到级数的收敛半径: $r = \frac{1}{\rho} = 1$, 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径不小于 1.



(2). 我们有: $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, 我们得到:

$$\begin{cases} S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{cases}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} (na_n + a_{n-1}) \Rightarrow (n+1)a_{n+1} = na_n + a_{n-1} \Rightarrow (n+2)a_{n+2} = (n+1)a_{n+1} = a_n$$

我们得到:

$$\begin{aligned} (1-x)S'(x) - xS(x) &= (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+1)a_{n+1} + a_n] x^{n+1} \\ &= a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+1)a_{n+1} + a_n] x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2) a_{n+2} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+1)a_{n+1} + a_n] x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)a_{n+2} - (n+1)a_{n+1} - a_n] x^{n+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

我们得到:

$$(1-x)S'(x) - xS(x) = 0 \Rightarrow \frac{S'(x)}{S(x)} = \frac{x}{1-x} \Rightarrow S(x) = \frac{C_1}{e^x(1-x)}$$

我们有 $S(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 1$, 因此 $S(x) = \frac{1}{e^x(1-x)}$, $x \in (-1, 1)$

August 12

例题 34.23.

设 $y = y(x)$ 由 $e^y \sin t - y + 1 = 0$ 和 $x = \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=0}$

解

我们知道: 当 $t = 0$ 时, $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$, 我们由:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{6} + \frac{t^3}{24} + \dots \Rightarrow \begin{cases} x'(0) = \frac{1}{2} \\ x''(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$



我们由: $e^y \sin t - y + 1 = 0 \Rightarrow e^{y(t)} \sin t - y(t) + 1 = 0$ 得到:

$$\begin{cases} e^{y(t)} \cos t + y'(t)e^{y(t)} \sin t - y'(t) = 0 \\ y'(t)e^{y(t)} \cos t - e^{y(t)} \sin t + \{[y'(t)]^2 e^{y(t)} + y''(t)e^{y(t)}\} \sin x + \cos x [y'(t)e^{y(t)}] - y''(t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(0) = e \\ y''(0) = 2e^2 \end{cases}$$

我们由参数方程二阶导数公式:

$$\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=0} = \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{[x'(t)]^3}|_{t=0} = 8e^2 - \frac{8e}{3}$$

例题 34.24.

下列命题正确的是:

- A. 设 A 为 3 阶矩阵, 若 A 的特征值 $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$, 则 $r(A) = 2$
- B. 设 A 为 3 阶非零矩阵, 若 $A^2 = 0$, 则 $r(A) = 1$
- C. 设 A, B 为 3 阶矩阵, 若 A 与 B 等价, 则 $|A| = |B|$
- D. 设 A, B 为 3 阶实对称矩阵, 若 A 与 B 合同, 则 $|A| = |B|$

解

(A). 我们可以得到矩阵 $A \sim diag\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, 对角矩阵的秩和矩阵 A 的秩相同, $r(A) = 2$

(B). $A^2 = 0 \Rightarrow 2r(A) \leq 3 \Rightarrow r(A) = 1$

(C). A 与 B 等价 $\Rightarrow r(A) = r(B)$

(D). A 与 B 合同 $\Rightarrow A = P^TBP$

August 13

例题 34.25.

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2nx + x^2}{2n^2}\right)^{-n} & x \neq 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left[\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{n}{(n+n)^2} \right] & x = 0 \end{cases}$$

求 $\int f(x) dx$

解

当 $x \neq 0$ 时:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2nx + x^2}{2n^2}\right)^{-n} \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n) \frac{2nx + x^2}{2n^2}} \\ &= e^{-x} \end{aligned}$$



当 $x = 0$ 时:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left[\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{n}{(n+n)^2} \right] \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} + \frac{1}{(1+\frac{2}{n})^2} + \cdots + \frac{1}{(1+\frac{n}{n})^2} \right] \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx \\ &= 2(1 - \frac{1}{2}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

我们得到: $f(x) = e^{-x} \Rightarrow \int f(x) dx = -e^{-x} + C$

例题 34.26.

已知函数 $f(x) = x^2 \ln(1-x)$, 当 $n \geq 3$ 时, 求 $f^{(n)}(0)$

解

我们利用 $\ln(1-x)$ 的泰勒展开式:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots$$

我们可以得到:

$$f(x) = -x^3 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{3} - \cdots - \frac{x^n+2}{n} - \cdots$$

我们有:

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f''(0) = 0 \\ f^{(3)}(0) = -6 \Rightarrow f^{(n)}(0) = -\frac{n!}{n-2}, n \geq 3 \\ f^{(4)}(0) = -\frac{4!}{2} \\ \dots \dots \end{cases}$$

August 14

例题 34.27.

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, $f(0) = f(1) = -2$, 证明: $\exists \xi \in (0, 1)$, s.t. $f'(\xi) - f(\xi) = \xi$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = e^{-x} [f(x) + x + 1]$, 我们有:

$$F(0) = -1, F(1) = 0, F'(x) = e^{-x} [f'(x) - f(x) - x]$$



我们由积分中值定理可以得到:

$$\exists \eta \in (0, 1), s.t. \int_0^1 f(x)dx = f(\eta) \Rightarrow \exists \eta \in (0, 1), s.t. f(\eta) = 0$$

我们有:

$$F(\eta) = e^{-\eta} [f(\eta) + \eta + 1] = e^{-\eta} (\eta + 1) > 0$$

我们根据零点定理, 可知: $\exists \delta \in (0, \eta), s.t. F(\delta) = 0$.

我们对 $F(x)$ 在区间 $[\delta, 1]$ 上使用罗尔定理可以得到:

$$\exists \xi \in (\delta, 1), s.t. F'(\xi) = e^{-\xi} [f'(\xi) - f(\xi) - \xi] = 0 \Rightarrow f'(\xi) - f(\xi) = \xi$$

综上所述, 我们得到: $\exists \xi \in (0, 1), s.t. f'(\xi) - f(\xi) = \xi$

例题 34.28.

设数列 $\{u_n\}$ 满足 $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{u_n + 1}$ ($n = 1, 2, \dots$), 证明数列 $\{u_n\}$ 收敛, 并求其极限

解

我们有:

$$u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = \frac{5}{3}, u_4 = \frac{7}{4}, \dots (u_n > 0)$$

我们发现数列 $\{u_n\}$ 不是单调数列, 我们从奇数项和偶数项入手:

$$\begin{cases} u_{2k+2} = \frac{u_{2k+1} + 3}{u_{2k+1} + 1} = \frac{\frac{u_{2k+3}}{u_{2k+1}} + 3}{\frac{u_{2k+3}}{u_{2k+1}} + 1} = 2 - \frac{1}{u_{2k+2}} \\ u_{2k+1} = \frac{u_{2k} + 3}{u_{2k} + 1} = \frac{\frac{u_{2k-1} + 3}{u_{2k-1} + 1} + 3}{\frac{u_{2k-1} + 3}{u_{2k-1} + 1} + 1} = 2 - \frac{1}{u_{2k+1}} \end{cases} \Rightarrow f(x) = 2 - \frac{1}{x+2} \text{ 单调递增}$$

我们首先证明数列 $\{u_{2k-1}\}$ 极限存在:

(1). 当 $n = 1$ 时, $u_1 < u_3$.

(2). 当 $n = k$ 时, 假设 $u_{2k-1} < u_{2k+1}$

(3). 当 $n = k + 1$ 时, $u_{2k-1} < u_{2k+1} \Rightarrow f(u_{2k-1}) < f(u_{2k+1}) \Rightarrow u_{2k+1} < u_{2k+3}$

数列 $\{u_{2k-1}\}$, ($k = 1, 2, \dots$) 单调递增, 且 $u_{2k-1} < 2$

我们继续证明数列 $\{u_{2k}\}$ 极限存在:

(1). 当 $n = 1$ 时, $u_2 > u_4$.

(2). 当 $n = k$ 时, 假设 $u_{2k} > u_{2k+2}$

(3). 当 $n = k + 1$ 时, $u_{2k} > u_{2k+2} \Rightarrow f(u_{2k}) > f(u_{2k+2}) \Rightarrow u_{2k+2} < u_{2k+4}$

数列 $\{u_{2k}\}$, ($k = 1, 2, \dots$) 单调递减少, 且 $u_{2k} > \frac{3}{2}$

我们不妨假设:

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow +\infty} u_{2k-1} = A \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} u_{2k} = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{B+3}{B+1} \\ B = \frac{A+3}{A+1} \end{cases} \Rightarrow A = B = \sqrt{3}$$

我们可以得到:



- (1). $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0$, 当 $n = 2k - 1 > N_1$ 时, 我们有: $|u_{2k-1} - \sqrt{3}| < \varepsilon$.
 - (2). $\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 > 0$, 当 $n = 2k > N_2$ 时, 我们有: $|u_{2k} - \sqrt{3}| < \varepsilon$.
 - (3). 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 我们有: $|u_n - \sqrt{3}| < \varepsilon$.
- 综上所述, 我们证明数列 $\{u_n\}$ 收敛, 极限为 $\sqrt{3}$.

34.3 Week III

August 15

例题 34.29.

$$f(x) = \int_1^x \frac{\arctan t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}} \ln(1+t^2)} dt$$

求 $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} f(x) dx$

解

原定积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{f(x)}{2} d(\ln(1+x^2)) \\ &= \frac{f(x) \ln(1+x^2)}{2} \Big|_{x=0}^1 - \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{2} d(f(x)) \\ &= - \int_0^1 \frac{\arctan x}{2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta \cos \theta d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \theta \sin \theta \Big|_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta \\ &= -\frac{\sqrt{2}\pi}{16} + \frac{2-\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

例题 34.30.

设 $f(x) = \frac{1}{1+2x+4x^2}$, 求 $f^{(100)}(0)$

解

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1-2x}{(1-2x)(4x^2+2x+1)} = \frac{1-2x}{1-(2x)^3} \\ \frac{1}{1-(2x)^3} &= 1 + (2x)^3 + (2x)^6 + (2x)^9 + \cdots + (2x)^{3n} \end{aligned}$$



我们得到:

$$f(x) = (1 - 2x) \sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^{3n} - \sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^{3n+1}$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$\frac{f^{(100)}(0)}{100!}$ 是 $f(x)$ 中 x^{100} 前面的系数, 我们可以得到:

$$f^{(100)}(0) = -2^{100} \times 100!$$

August 16

例题 34.31.

证明:

$$\exists x_1, x_2, x_3 \in (0, 2) (x_1 < x_2 < x_3), s.t. \frac{1 - \ln(1 + x_1)}{(1 + x_1)^2}x_3 = \frac{1 - \ln(1 + x_2)}{(1 + x_2)^2}(2 - x_3)$$

解

我们构造辅助函数: $f(x) = \frac{\ln(1 + x)}{1 + x}$, 我们有:

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1 - \ln(1 + x)}{(1 + x)^2} \\ f(0) = 0 \\ f(2) = \frac{\ln 3}{3} \end{cases}$$

我们不妨假设 $\exists x_3 \in (0, 2), f(x_3) = A$, 我们分别在区间 $(0, x_3)$ 和区间 $(x_3, 2)$ 上使用拉格朗日中值定理可以得到:

$$\begin{cases} \exists x_1 \in (0, x_3), s.t. \frac{f(x_3) - f(0)}{x_3} = f'(x_1) = \frac{1 - \ln(1 + x_1)}{(1 + x_1)^2} \\ \exists x_2 \in (x_3, 2), s.t. \frac{f(2) - f(x_3)}{2 - x_3} = f'(x_2) = \frac{1 - \ln(1 + x_2)}{(1 + x_2)^2} \end{cases}$$

我们令 $f(x_3) - f(0) = f(2) - f(x_3) \Rightarrow A = f(2) - A \Rightarrow f(x_3) = A = \frac{f(2)}{2} = \frac{\ln 3}{6}$ 时, 我们可以得到:

$$\frac{1 - \ln(1 + x_1)}{(1 + x_1)^2}x_3 = \frac{1 - \ln(1 + x_2)}{(1 + x_2)^2}(2 - x_3)$$

综上所述, 我们可以得到: 在区间 $(0, 2)$ 内存在三个不同的点 x_1, x_2, x_3 , 使得 $\frac{1 - \ln(1 + x_1)}{(1 + x_1)^2}x_3 = \frac{1 - \ln(1 + x_2)}{(1 + x_2)^2}(2 - x_3)$



例题 34.32.

$$y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

(1). 证明: $(1-x^2)y^{(n+1)} - (2n+1)xy^{(n)} - n^2y^{(n-1)} = 0(n \geq 1)$

(2). 求 $y^{(n)}(0)$

解

(1). 我们对 $f(x)$ 求导可以得到:

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1+x f(x)}{1-x^2} \Rightarrow (1-x^2)f'(x) - x f(x) - 1 = 0$$

我们令 $g(x) = (1-x^2)f'(x) - x f(x) - 1$, 我们利用莱布尼兹公式可以得到:

$$g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k (1-x^2)^{(k)} f^{(n-k+1)}(x) - \sum_{k=0}^n C_n^k (x)^{(k)} f^{(n-k)} = 0$$

当 $k \geq 3$ 时, $(1-x^2)^{(k)} = 0$; 当 $k \geq 2$ 时, $x^{(k)} = 0$, 我们有:

$$g^{(n)}(x) = (1-x^2)f^{(n+1)}(x) - 2nx f^{(n)}(x) - n(n-1)f^{(n-1)}(x) - x f^{(n)}(x) - n f^{(n-1)}(x) = 0$$

我们得到:

$$(1-x^2)f^{(n+1)}(x) - (2n+1)xf^{(n)}(x) - n^2f^{(n-1)}(x) = 0$$

综上所述, 我们得到: $(1-x^2)y^{(n+1)} - (2n+1)xy^{(n)} - n^2y^{(n-1)} = 0(n \geq 1)$

(2). 我们将 $x=0$ 代入上面式子可以得到:

$$\begin{cases} y^{(n)} = (n-1)^2 y^{(n-2)} \\ y(0) = 0 \\ y^{(1)}(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow y^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数}, n = 2k (k = 0, 1, \dots) \\ (2k!!)^2, & n \text{ 为奇数}, n = 2k+1 (k = 0, 1, \dots) \end{cases}$$

August 17

例题 34.33.

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$$

求 $f(x)$ 的间断点, 并指出其类型

解

$$f(x) = e^{\lim_{t \rightarrow x} \frac{x}{\sin t - \sin x} \ln \left(1 + \frac{\sin t - \sin x}{\sin x} \right)} = e^{\frac{x}{\sin x}}$$

我们发现 $f(x)$ 的间断点为 $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.



(1). 当 $k = 0$ 时, 我们有:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = e \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ 是 } f(x) \text{ 可去间断点}$$

(2). 当 $k \neq 0$ 时, 我们有:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow k\pi^+} f(x) = +\infty \text{ 或者 } 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \text{ 或者 } +\infty \end{cases} \Rightarrow x = k\pi \text{ 是 } f(x) \text{ 无穷间断点}$$

例题 34.34.

证明:

$$\int_0^\pi x a^{\sin x} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\cos x} dx \geq \frac{\pi^3}{4}$$

解

我们由区间再现公式可以得到:

$$\begin{cases} I_1 = \int_0^\pi (\pi - t) a^{\sin t} dt \\ 2I_1 = \pi \int_0^\pi a^{\sin t} dt \\ I_1 = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\cos t} dt \end{cases}$$

我们可以得到原定积分等价于:(柯西不等式)

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\cos x} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\cos x} dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x) dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} g^2(x) dx \\ &\geq \pi \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x) dx \right]^2 \\ &= \frac{\pi^3}{4} \end{aligned}$$

August 18

例题 34.35.

设函数 $f(x) = \begin{cases} x|x| & x \leq 0, \\ x \ln x & x > 0, \end{cases}$, $x = 0$ 处 $f(x)$ 的可导性判断、 $x = 0$ 是否为 $f(x)$ 的极值点

解



当 $x = 0$ 时, 我们有 $f(0) = 0$, 且我们有:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Rightarrow f(x) \text{ 在 } x = 0 \text{ 处连续}$$

我们有:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -x = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ 在 } x = 0 \text{ 处不可导}$$

取 $\varepsilon \in (0, 1)$, 当 $x \in (-\varepsilon, 0)$ 时, $f(x) = -x^2 < f(0) = 0$; 当 $x \in (0, \varepsilon)$ 时, $f(x) = x \ln x < f(0) = 0$, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

例题 34.36.

$$f(x) = \prod_{n=1}^{100} \left(\tan \frac{\pi x^n}{4} - n \right), \text{ 求 } f'(1)$$

我们令 $g(x) = \prod_{n=2}^{100} \left(\tan \frac{\pi x^n}{4} - n \right)$, 我们得到:

$$\begin{aligned} f(x) &= (\tan \frac{\pi x}{4} - 1)g(x) \\ f'(x) &= \frac{\pi}{4 \cos^2 \frac{\pi x}{4}} g(x) + g'(x)(\tan \frac{\pi x}{4} - 1) \end{aligned}$$

$$f'(1) = \frac{\pi}{2} g(1) = \frac{\pi}{2} \times (1-2) \times (1-3) \cdots \times (1-100) = -\frac{\pi}{2} 99!$$

August 19

例题 34.37.

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x \cos \frac{1}{t} dt & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \text{ 求 } f'(0)$$

解



我们有: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$, 我们根据导数的定义可以得到:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos \frac{1}{t} dt}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\int_0^x t^2 d \sin \frac{1}{t}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[-t \sin \frac{1}{t} \Big|_{t=0}^x \right] + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x 2t \sin \frac{1}{t} dt}{x} \\ &= 0 + 2 \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

综上所述, 我们得到: $f'(0) = 0$

例题 34.38.

$f(x)$ 可导, 且满足 $x = \int_0^x f(t) dt + \int_0^x t f(t-x) dt$, 求 $f(x)$ 以及 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |f(x)|^6 dx$

解

我们令 $u = t - x, t = u + x$, 我们得到:

$$x = \int_0^x f(t) dt + \int_{-x}^0 (u+x) f(u) du \Rightarrow x = \int_0^x f(t) dt + \int_{-x}^0 u f(u) du + x \int_{-x}^0 f(u) du$$

我们对方程左右两边对 x 求导, 得到:

$$1 = f(x) - x f(-x) + \int_{-x}^0 f(u) du + x f(-x) \Rightarrow f(x) + \int_{-x}^0 f(u) du = 1$$

我们再求一次导数, 得到:

$$f'(x) + f(-x) = 0 \Rightarrow f''(x) - f'(-x) = 0 \Rightarrow f''(x) = f(x)$$

我们得到特征方程: $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$

我们不妨设 $f(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$

$$\text{我们有: } \begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$



我们得到:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |f(x)|^6 dx &= 8 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^6(x + \frac{\pi}{4}) dx \\
 &= 8 \int_0^\pi \cos^6 t dt \\
 &= 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 t dt \\
 &= 16 \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \\
 &= \frac{5\pi}{2}
 \end{aligned}$$

August 20

例题 34.39.

设函数 $f(x) = \int_{-1}^x t \ln |t| dt, x = 0$ 处 $f(x)$ 的可导性判断、 $x = 0$ 是否为 $f(x)$ 的极值点

解

我们有 $g(x) = x \ln |x|$ 在 $x = 0$ 处可去间断, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, 我们得到 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续
我们有:

$$\left\{
 \begin{array}{l}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\int_0^x t \ln t dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \Rightarrow f'(0) = 0 \\
 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\int_x^0 t \ln(-t) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) \ln(-x) = 0
 \end{array}
 \right.$$

当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f(x) > f(0)$; 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) > f(0)$, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取极小值.

例题 34.40.

函数 $f(x) = (x + 1)|x^2 - 1|$ 驻点和极值点个数

解

我们得到: $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 - x - 1, & |x| \geq 1 \\ x + 1 - x^2 - x^3, & |x| < 1 \end{cases}$, 我们对 $f(x)$ 求导得到:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x - 1, & x \leq -1 \\ 1 - 2x - 3x^2, & -1 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ 在 } x = -1 \text{ 处可导; 在 } x = 1 \text{ 处不可导}$$

$$f'(x) = \begin{cases} (3x - 1)(x + 1), & x \leq -1 \\ (1 - 3x)(x + 1), & -1 < x < 1 \\ (3x - 1)(x + 1), & x > 1 \end{cases}$$



我们发现:

$$\begin{cases} x \in (-\infty, -1), f'(x) > 0 \\ x \in (-1, \frac{1}{3}), f'(x) > 0 \\ x \in (\frac{1}{3}, 1), f'(x) < 0 \\ x \in (1, +\infty), f'(x) > 0 \end{cases}$$

在可导点处, $f(x)$ 有两个驻点 $x = -1$ 和 $x = \frac{1}{3}$; $f(x)$ 有一个极值点 $x = \frac{1}{3}$.

在不可导点 $x = 1$ 处, $x = 1$ 不是驻点, $x = 1$ 两侧导数值异号, $x = 1$ 是极值点.

综上所述, 我们得到 $f(x)$ 有 $x = -1$ 和 $x = \frac{1}{3}$ 两个驻点和 $x = \frac{1}{3}$ 和 $x = 1$ 两个极值点.

August 21

例题 34.41.

$f(x)$ 在 $x = 0$ 的某个邻域内二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x - x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2} \right] = \frac{1}{3}$, 求 $f(0)$, $f'(0)$ 和 $f''(0)$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + xf(x) + x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{x^2} \\ &= -\frac{1}{6} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{x^2} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

我们得到: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{x^2} = \frac{1}{2}$

我们得到:

$$\begin{cases} f(0) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = -1 \\ f'(0) = 0 \\ f''(0) = 1 \end{cases}$$

例题 34.42.

设 $f(x)$ 连续, 且 $x > 1$, $f(x) \left[\int_0^x f(t)dt + 1 \right] = \frac{xe^x}{2(1+x)^2}$, 求 $f(x)$

解

我们不妨设 $F(x) = \int_0^x f(t)dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$



我们构造辅助函数: $G(x) = [F(x) + 1]^2 \Rightarrow G'(x) = \frac{xe^x}{(1+x)^2}$

$$\text{我们可以得到: } \begin{cases} G(x) = \frac{e^x}{1+x} + C \\ G(0) = [F(0) + 1]^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow C = 0$$

我们得到:

$$\begin{cases} F(x) + 1 = \sqrt{\frac{e^x}{1+x}} \\ f(x) = F'(x) = \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

$$\text{综上所述, 我们得到: } f(x) = \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$$

34.4 Week IV

August 22

例题 34.43.

设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f'(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x) + f(x) - f(-x)}{|x|} = 1$, 下列说法正确的是:

- A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 极大值
- B. $f''(0) > 0$, $f(0)$ 是 $f(x)$ 极小值
- C. $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
- D. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极值点, $(0, f(0))$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x) + f(x) - f(-x)}{|x|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x) + [f(0) + f'(0)x + o(x)] - [f(0) - f'(0)x + o(x)]}{|x|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x) + 2f'(0)x + o(x)}{|x|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} \\ &= 1 \end{aligned}$$

我们得到: $f''(0) = 0$, 且 $x \in (-\xi, \xi)$, $f''(x) > 0$, 我们知道 $f'(x)$ 在 $x \in (-\xi, \xi)$ 上单调递增, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点, $(0, f(0))$ 不是函数 $f(x)$ 的拐点.



例题 34.44.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{t}{\cos \theta}} \frac{\sin(r^2 \sin \theta \cos \theta)}{\sin \theta} dr$$

解

原极限等价于：

$$\begin{aligned} I &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{t}{\cos \theta}} \frac{\sin(r^2 \sin \theta \cos \theta)}{r \sin \theta} r dr \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^t dx \int_0^x \frac{\sin(xy)}{y} dy}{t^3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{t^2} \frac{\sin u}{u} du}{3t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2t \sin(t^2)}{6t^3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

August 23

例题 34.45.

设 $f(x)$ 连续, 且 $f(x) \neq 0, f(1) = \sqrt{2}$

$$\forall x, y \in (-\infty, +\infty), f(x+y) - f(x) = \int_x^{x+y} \frac{t}{f(t)} (t^2 + 1) dt$$

求 $f(x)$

解

我们可以得到：

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} \frac{t}{f(t)} (t^2 + 1) dt}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)}{f(x + \Delta x)} [(x + \Delta x)^2 + 1] \\ &= \frac{x(x^2 + 1)}{f(x)} \end{aligned}$$

我们得到: $f'(x)f(x) = x^3 + x \Rightarrow [f^2(x)]' = 2x^3 + 2x$ 我们得到: $f^2(x) = \frac{x^4}{2} + x^2 + C, f(1) = \sqrt{2} \Rightarrow C = \frac{1}{2}$ 

我们得到: $f(x) = \sqrt{\frac{x^4}{2} + x^2 + \frac{1}{2}} = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{2}}$

例题 34.46.

设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 连续, 在 $(0, +\infty)$ 恒正, $x > 0$, $[f(x)]^3 \leq 3 \int_0^x f^2(t)dt$, 证明:

$$x \geq 0, f(x) \leq x$$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = \int_0^x f^2(t)dt$, $F'(x) = f^2(x)$

我们得到:

$$[F'(x)]^{\frac{3}{2}} \leq 3F(x) \Rightarrow F'(x) \leq 3^{\frac{2}{3}}[F(x)]^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{F'(x)}{[F(x)]^{\frac{2}{3}}} \leq 3^{\frac{2}{3}}$$

我们构造: $G(x) = F(x)^{\frac{1}{3}}$, $G'(x) = \frac{F'(x)}{3[F(x)]^{\frac{2}{3}}} \leq 3^{-\frac{1}{3}}$

我们得到: $G(x) \leq \int_0^x 3^{-\frac{1}{3}} = 3^{-\frac{1}{3}}x \Rightarrow F(x)^{\frac{1}{3}} \leq 3^{-\frac{1}{3}}x$

我们有:

$$F'(x) \leq 3^{\frac{2}{3}}[F(x)]^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f^2(x) \leq x^2 \Rightarrow f(x) \leq x$$

我们补充 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 综上所述, 我们得到: $x \geq 0$ 时, 均有 $f(x) \leq x$

August 24

例题 34.47.

$f(x) = \frac{x|x|}{1+x}$, 求 $f(x)$ 的凹凸区间和渐近线

解

我们有:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x}{(1+x)^2}, & x \geq 0 \\ -\frac{x^2 + 2x}{(1+x)^2}, & x < 0, \text{ 且 } x \neq -1 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} \frac{2}{(1+x)^3}, & x > 0 \\ -\frac{2}{(1+x)^3}, & x < 0, \text{ 且 } x \neq -1 \end{cases}$$

$f'(0) = 0$, 我们利用导数定义得到:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x)}{x} = -2 \end{cases} \Rightarrow f''(x) \text{ 在 } x = 0 \text{ 跳跃间断}$$

当 $x \in (0, +\infty)$, $f''(x) > 0$, 我们可以得到: $(0, +\infty)$ 是 $f(x)$ 的凹区间;

当 $x \in (-\infty, -1)$, $f''(x) > 0$, 我们可以得到: $(-\infty, -1)$ 是 $f(x)$ 的凹区间;

当 $x \in (-1, 0)$, $f''(x) < 0$, 我们可以得到: $(-1, 0)$ 是 $f(x)$ 的凸区间.

铅锤渐近线: $x = -1$; 无水平渐近线



斜渐近线:

(1).

$$\begin{cases} a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

(2).

$$\begin{cases} a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

综上所述, $f(x)$ 有三条渐近线, 铅锤渐近线 $x = -1$; 斜渐近线 $y = x - 1$ 和 $y = -x + 1$.

例题 34.48.

函数 $f(x)$ 具有二阶连续的导数, 曲线 $y = f(x)$ 既关于 y 轴对称也关于直线 $x = 1$ 对称, 求 $\int_{-2}^2 (x - 2024) f''(x) dx$

解

周期性、轴对称性、中心对称性

我们可以得到 $f(x)$ 是以 $T = 2$ 为周期的周期函数; 且 $f(x)$ 是偶函数, $f'(x)$ 是奇函数且为周期函数.

原定积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^2 (x - 2024) df'(x) \\ &= (x - 2024) f'(x) \Big|_{x=-2}^{x=2} - \int_{-2}^2 f'(x) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

August 25

例题 34.49.

设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} x + y & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & others \end{cases}$

(1). 求 $\max\{X, Y\}$ 的分布函数和概率密度

(2). 求 $\min\{X, Y\}$ 的分布函数和概率密度

解

例题 34.50.

曲线 $y = x(1 + \arcsin \frac{2}{x})$ 的斜渐近线



解

(1). $x \Rightarrow +\infty$

$$\begin{cases} a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \arctan \frac{2}{x}\right) \\ b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan \frac{2}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

(2). $x \Rightarrow -\infty$

$$\begin{cases} a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \arctan \frac{2}{x}\right) \\ b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \arctan \frac{2}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

综上所述, $f(x)$ 的斜渐近线方程为: $y = x + 2$

August 26

例题 34.51.

$$\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{x^2 - x + 1} dx$$

解

我们有: $\begin{cases} \sin \theta = \sqrt{x} \\ \cos \theta = \sqrt{1-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \arcsin \sqrt{x} = \theta \\ \arcsin \sqrt{1-x} = \frac{\pi}{2} - \theta \end{cases}$ 我们利用区间再现公式得到:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{1-x}}{x^2 - x + 1} dx \\ 2I &= \int_0^1 \frac{\pi}{2(x^2 - x + 1)} dx \\ I &= \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{\pi}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx \\ &= \frac{\pi}{4} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{\sqrt{3}\pi^2}{18} \end{aligned}$$

例题 34.52.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$$

解



我们利用区间再现公式得到：

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1 + \tan x}\right) dx \\ 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 dx \\ I &= \frac{\pi \ln 2}{8} \end{aligned}$$

August 27

例题 34.53.

$f(x) = \arctan x$, 求 $f^{(n)}(0)$, $n \in \{2k+1, k \in \mathbb{Z}^+\}$

解

我们利用泰勒展开式：

$$\begin{cases} (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} \\ f(x) = \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} \\ f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \dots \end{cases}$$

我们可以得到： $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} (n-1)!$

综上所述，我们得到： $f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} (n-1)!$, n 为奇数

例题 34.54.

设 $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & x < 0 \\ be^x & x \geq 0 \end{cases}$ 为可导函数，求 $\int f(\ln x) dx$

解

我们可以知道 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导：

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow b = 1$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = a \end{cases} \Rightarrow a = b = 1$$



我们令 $g(x) = f(\ln x)$, 我们得到: $g(x) = \begin{cases} 1 + \ln x, & x \in (0, 1) \\ x, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$

我们得到: $\int g(x) dx = \begin{cases} x \ln x + C \\ \frac{x^2 - 1}{2} + C \end{cases}$

August 28

例题 34.55.

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, $f(a) = a$, $\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$, 证明:

$$\exists \xi \in (a, b), \text{ s.t. } f'(\xi) = f(\xi) - \xi + 1$$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = \frac{f(x) - x}{e^x}$, 我们有: $F(a) = 0$

我们由 $\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ 得到:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b x dx \Rightarrow \int_a^b [f(x) - x] dx = 0 \Rightarrow \exists \theta \in (a, b), \text{ s.t. } f(\theta) = \theta$$

我们有:

$$\begin{cases} F'(x) = \frac{f'(x) - f(x) + x - 1}{e^x} \\ F(a) = F(\theta) = 0 \end{cases}$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a, θ) 上使用罗尔定理可以得到:

$$\exists \xi \in (a, \theta), \text{ s.t. } F'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = f(\xi) - \xi + 1$$

综上所述, 我们得到: $\exists \xi \in (a, b), \text{ s.t. } f'(\xi) = f(\xi) - \xi + 1$

例题 34.56.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x}{(1 + 2^x)(1 + \cos^2 x)} dx$$

解

我们可以得到:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2^x x \sin x}{(1 + 2^x)(1 + \cos^2 x)} dx \Rightarrow 2I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \Rightarrow I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$



我们利用区间再现公式得到:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \frac{(\pi - x) \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx \\ &= \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

August 29

例题 34.57.

$$\int_0^1 \frac{\arctan e^{2x-1}}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}} dx$$

解

我们利用区间再现公式:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\arctan e^{1-2x}}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}} dx \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}} dx \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 1}{\sin \theta + \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} \left[2 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4})} d(\theta + \frac{\pi}{4}) \right] \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \ln(\sqrt{2} + 1) \end{aligned}$$

例题 34.58.

求曲线 $y = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{1+x^2}$ 的渐近线所围区域的面积

解

我们由题意知: $f(x)$ 在 $x = 0$ 处无定义, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的铅垂渐近线.

我们知道 $x \Rightarrow +\infty, f(x) \Rightarrow +\infty$; 当 $x \Rightarrow -\infty, f(x) \Rightarrow +\infty$.

$$(1). \begin{cases} a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^t \sqrt{1+t^2} = 1 \\ b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t \sqrt{1+t^2} - 1}{t} = 1 \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $+\infty$ 处的渐近线为 $y = x + 1$

$$(2). \begin{cases} a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^-} -e^t \sqrt{1+t^2} = -1 \\ b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1 - e^t \sqrt{1+t^2}}{t} = -1 \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $-\infty$ 处的渐近线为 $y = -x - 1$



我们可以得到: $S = 1$

August 30

例题 34.59.

随机变量 X 服从分布 $X \sim E(1)$, 随机变量 Y 服从分布 $Y \sim B(1, \frac{1}{2})$, X, Y 相互独立, 随机变量 $Z = X - Y$, 求 $f_z(Z)$

解

例题 34.60.

设 $f(x)$ 是单调可导函数, $f(-\frac{\pi}{2}) = -f(\frac{\pi}{2})$, $g(x)$ 是 $f(x)$ 反函数

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{f(x)} g(t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \left(\frac{1}{1 + e^{-|t|}} + \frac{\sin t}{1 + e^{-\frac{\pi}{2}}} \right) \sin t dt$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

解

我们对上述等式两边对 x 求导可以得到:

$$g(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{\sin x}{1 + e^{-|x|}} + \frac{\sin^2 x}{1 + e^{-\frac{\pi}{2}}} \Rightarrow x f'(x) = \frac{\sin x}{1 + e^{-|x|}} + \frac{\sin^2 x}{1 + e^{-\frac{\pi}{2}}}$$

我们利用分部积分可以得到:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx &= x f(x) \Big|_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x f'(x) dx \\ &= -\frac{2}{1 + e^{-\frac{\pi}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 dx \\ &= \frac{-\pi}{2(1 + e^{-\frac{\pi}{2}})} \end{aligned}$$

August 31

例题 34.61.

设 $f(x) = \arctan x \cdot e^{ax}$, 且 $f'''(0) = 2$, 求 a^2

解

我们根据泰勒展开式:

$$\begin{cases} \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \\ e^{ax} = 1 + ax + \frac{(ax)^2}{2!} + \dots \end{cases} \Rightarrow f(x) = x + ax^2 + \left(\frac{a^2}{2} - \frac{1}{3} \right) x^3 + \dots$$



我们可以得到: $f'''(0) = 3a^2 - 2 = 2 \Rightarrow a^2 = \frac{4}{3}$

例题 34.62.

设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 的导函数连续, $f(0) = 0$, $|f'(x) - f(x)| \leq 1$, 证明: $|f(x)| \leq e^x - 1$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = e^{-x} f(x) \Rightarrow F'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x))$

我们由: $|f'(x) - f(x)| \leq 1 \Rightarrow |F'(x)| \leq e^{-x}$

我们对 $F(x)$ 在 $[0, x]$ ($x > 0$) 上求不定积分, 我们可以得到:

$$\begin{cases} -e^{-x} \leq F'(x) \leq e^{-x} \\ \int_0^x -e^{-t} dt \leq \int_0^x F'(t) dt \leq \int_0^x e^{-t} dt \end{cases} \Rightarrow \int_0^x |F'(t)| dt = |F(x)| - |F(0)| = e^{-x} |f(x)| \leq \left| \int_0^x e^{-t} dt \right| = 1 - e^{-x}$$

综上所述, 我们得到: $|f(x)| \leq e^x - 1$





第 35 章 September

35.1 Week I

September 1

例题 35.1.

求曲线 $y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$ ($x > 0$) 的斜渐近线

解

我们不妨设曲线的斜渐近线方程为: $y = ax + b$, 我们可以得到:

$$\begin{cases} a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} -\frac{\ln(t+1)}{t}} = e^{-1} \\ b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \frac{1}{2e} \end{cases}$$

综上所述, 曲线的斜渐近线方程为: $y = \frac{x}{e} + \frac{1}{2e}$

例题 35.2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$$

解



我们利用区间再现公式:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx \\
 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x \cos x) dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin x) dx - \frac{\pi \ln 2}{2} \\
 &= I - \frac{\pi \ln 2}{2} \\
 I &= \frac{\pi \ln 2}{2}
 \end{aligned}$$

September 2

例题 35.3.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \tan^n x} dx$$

解

原定积分等价于: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^n)(1+x^2)} dx$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^n)(1+x^2)} dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^n)(1+x^2)} dx \\
 2I &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\
 &= \frac{\pi}{2} \\
 I &= \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

例题 35.4.

设随即变量 (X, Y) 的联合概率密度为: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{21}{4}x^2y & x^2 \leq y \leq 1 \\ 0 & others \end{cases}$, 求 $P\{Y \geq 0.75 | X = 0.5\}$

解

September 3



例题 35.5.

设 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$ 在 $x = 0$ 的一个邻域内有二阶导数, 且 $g(0) = 0$,

$g'(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处

- A. 不连续
- B. 连续, 但 $f'(0)$ 不存在
- C. $f'(0)$ 存在, 但 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续
- D. $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续

解

(1). $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续性

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ 在 } x = 0 \text{ 处连续}$$

(2). $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续性

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{xg'(x) - g(x)}{x^2}, x \neq 0 \\ f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^2} = \frac{g''(0)}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg'(x) - g(x)}{x^2} = \frac{g''(0)}{2} = f'(0)$$

综上所述, 我们得到 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

例题 35.6.

设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, $a_n = \int_0^1 f(nx)dx$, 证明: $k > 0$ 时, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2}{n^k}$ 收敛

解

我们由 $a_n = \int_0^1 f(nx)dx \Rightarrow a_n = \frac{1}{n} \int_0^n f(x)dx$, 我们可以得到:

$$\begin{cases} a_n^2 = \frac{[\int_0^n f(x)dx]^2}{n^2} \leq \frac{\int_0^n [f(x)]^2 dx}{n} \text{ (积分形式柯西不等式)} \\ b = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n [f(x)]^2 dx = \int_0^{+\infty} f^2(x)dx \text{ 收敛} \end{cases}$$

我们得到:

$$\frac{a_n^2}{n^k} \leq \frac{\int_0^n [f(x)]^2 dx}{n^{1+k}} \leq \frac{b}{n^{1+k}}$$



我们已知级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b}{n^{1+k}}$ ($k > 0, b > 0$) 收敛, 我们根据比较判别法可以得到: 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2}{n^k}$ 收敛

September 4

例题 35.7.

已知方程 $x^5 - 5x + k = 0$ 有三个不同的实数根, 求 k 的取值范围

解

我们令 $f(x) = x^5 - 5x + k, f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$

$$\begin{cases} x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty), f'(x) > 0 \\ x \in (-1, 1), f'(x) < 0 \end{cases}$$

我们得到: $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递增; $(-1, 1)$ 上单调递减; $(1, +\infty)$ 上单调递增.

我们有: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$, $f(x)$ 有三个不同的实数根, 我们需要满足:

$$\begin{cases} f(-1) > 0 \\ f(1) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k + 4 > 0 \\ k - 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow k \in (-4, 4)$$

综上所述, 我们得到 k 的取值范围为 $(-4, 4)$.

例题 35.8.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)} dx$$

解

原定积分可以化为:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} dx \\ 2I &= \int_0^{+\infty} \frac{1+x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \\ I &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

September 5



例题 35.9.

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$$

解

原定积分可以化为：

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta}\right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1 + \tan \theta}\right) d\theta \\ 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 d\theta \\ &= \frac{\pi \ln 2}{4} \\ I &= \frac{\pi \ln 2}{8} \end{aligned}$$

例题 35.10.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_{\ln(1+x)}^x \frac{(1-2t)^{\frac{1}{t}}}{t^2} dt$$

解

我们利用第二积分中值定理可以得到：

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi}{x} &= 1 \\ I &= \lim_{x \rightarrow 0} (x - \ln(1+x)) \frac{(1-2\xi)^{\frac{1}{\xi}} \xi^2}{\xi^2}, \quad \xi \in (\ln(1+x), x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{\xi^2} \lim_{\xi \rightarrow 0} (1-2\xi)^{\frac{1}{\xi}} \\ &= \frac{e^{-2}}{2} \end{aligned}$$

September 6

例题 35.11.

已知 $f(x) = [x] \sin \pi x$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 求 $f'(x)$

解



(1).

$$x \in (n, n+1), (n \in \mathbb{Z}), [x] = n$$

我们得到:

$$f'(x) = n\pi \cos(\pi x), x \in (n, n+1), n \in \mathbb{Z}$$

(2). 当 $x = n, n \in \mathbb{Z}$ 时, 我们利用导数定义可以得到:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow n^+} \frac{n \sin \pi x}{x - n} \\ \lim_{x \rightarrow n^-} \frac{(n-1) \sin \pi x}{x - n} \end{cases} \Rightarrow f'(n) \text{ 不存在}$$

综上所述, 我们得到: $f'(x) = \begin{cases} [x] \cos \pi x, & x \neq n, n \in \mathbb{Z} \\ \text{不存在}, & x = n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

例题 35.12.

设函数 $f(x) = ax - b \ln x (a > 0)$ 有两个零点, 求 $\frac{b}{a}$ 的取值范围

解

我们首先得到 $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$, 我们有: $f'(x) = \frac{ax - b}{x}$.

- (1). 当 $b \leq 0$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 至多存在一个零点.
(2). 当 $b > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{b}{a}$.

$$\begin{cases} x \in (0, \frac{b}{a}), f'(x) < 0 \\ x \in (\frac{b}{a}, +\infty), f'(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x)_{min} = f(\frac{b}{a})$$

我们有:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$$

当且仅当 $f(\frac{b}{a}) < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个零点.

$$f(\frac{b}{a}) = b(1 - \ln \frac{b}{a}) < 0 \Rightarrow \frac{b}{a} > e$$

综上所述, 我们得到 $\frac{b}{a}$ 的取值范围为 $(e, +\infty)$.

September 7

例题 35.13.

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x + \sqrt{1 - x^2}} dx$$



解

原定积分可以化为:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} d\theta \\
 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \\
 I &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

例题 35.14.

$$\int_0^1 \frac{1}{x + \sqrt{1 - x^2}} dx$$

解

原定积分可以化为:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} d\theta \\
 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta \\
 &= \frac{\pi}{2} \\
 I &= \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

35.2 Week II

September 8

例题 35.15.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 + \sin \left(\pi \sqrt{1 + 4n^2} \right) \right]^n$$

解



原极限可以化为：

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 + \sin \left(\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2} + 2n} \right) \right]^n \\
 &= e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left[1 + \sin \left(\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2} + 2n} \right) \right]} \\
 &= e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \left(\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2} + 2n} \right)} \\
 &= e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi n}{\sqrt{1+4n^2} + 2n}} \\
 &= e^{\frac{\pi}{4}}
 \end{aligned}$$

例题 35.16.

设 $f_n(x) = \tan^n x (n = 1, 2, \dots)$, 且曲线 $y = \tan^n x$ 在点 $x = \frac{\pi}{4}$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(x_n, 0)$, 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n)$

解

我们先求切线方程：

$$\begin{cases} f(x) = \tan^n x \\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ f'(x) = n \tan^{n-1} x \sec^2 x \end{cases} \Rightarrow l : y - 1 = 2n\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x_n = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2n}$$

原极限可以化为：

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2n} \right) \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\tan(\frac{\pi}{4} - x))}{2x}} \\
 &= e^{-1}
 \end{aligned}$$

综上所述, 我们得到: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n) = e^{-1}$

September 9

例题 35.17.

设 A 是 3 阶实对称矩阵, 且不可逆

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot A = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 3 \\ -12 & -6 & 12 \end{bmatrix}$$

求 A

解



我们利用谱分解定理: $A = \sum_{i=1}^3 \lambda_i G_i$, $G_i = e_i e_i^T$

我们将上述方程两边取转置得到:

$$A^T \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -6 & -6 \\ 3 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A^T \xi_1 = 3\xi_1 \\ A^T \xi_2 = 6\xi_2 \end{cases}$$

我们知道矩阵 A^T 的两个特征值为 3, 6, 又因为矩阵 A 不可逆, 矩阵 A^T 的三个特征值分别为 0, 3, 6

$$\text{我们可以得到: } A^T = \sum_{i=1}^3 \lambda_i G_i = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{我们有 } A^T = A, \text{ 综上所述, 我们得到: } A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

例题 35.18.

已知方程 $\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = k$ 在区间 $(0, 1)$ 有实数根, 求 k 的取值范围

解

我们构造辅助函数: $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$, 我们有:

$$f'(x) = \frac{(1+x)\ln^2(1+x) - x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}, x \in (0, 1)$$

我们构造辅助函数: $g(x) = 2\ln x - \frac{x^2 - 1}{x}$, $x \in (1, 2)$

我们有:

$$\begin{cases} g'(x) = \frac{-(x-1)^2}{x^2} \leq 0 \\ g(x) \text{ 单调递减} \\ g(x) \leq g(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow 2\ln t \leq \frac{t^2 - 1}{t}, t \in (1, 2) \Rightarrow \ln^2(1+x) \leq \frac{x^2}{1+x}$$

我们得到: $f'(x) \leq 0$, $x \in (0, 1) \Rightarrow f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减.

我们有:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{\ln 2} - 1 \end{cases}$$

综上所述, k 的取值范围为: $(\frac{1}{\ln 2} - 1, \frac{1}{2})$



September 10

例题 35.19.

设 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$, 则下列关于 $y = \frac{\int_0^x f(t)dt}{x}$ 的命题正确的个数

- A. 有垂直渐近线
- B. 有水平渐近线
- C. 有斜渐近线
- D. 是有界函数

解

我们可以得到: $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续, 我们令 $g(x) = \frac{\int_0^x f(t)dt}{x}$
首先 $g(x)$ 在 $x = 0$ 处无定义, 我们可以得到:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow g(x) \text{ 没有垂直渐近线}$$

其次 $g(x)$ 在 ∞ 处水平渐近线:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) \text{ 在 } x \Rightarrow -\infty \text{ 时有水平渐近线 } y = 0$$

在 $x \Rightarrow +\infty$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{2x^2} = +\infty$, $g(x)$ 不存在斜渐近线, 且 $g(x)$ 为无界函数.

例题 35.20.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$$

解

原定积分可以化为:

$$\begin{aligned} I &= - \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt \\ &= -I \end{aligned}$$

$$I = 0$$

September 11



例题 35.21.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1-x^2+x^4)}{(1+x^2)\ln x} dx$$

解

原定积分可以化为：

$$\begin{aligned} I &= -\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t^4-t^2+1)}{(1+t^2)\ln t} dt + \int_0^{+\infty} \frac{4}{1+t^2} dt \\ &= -I + 2\pi \end{aligned}$$

$$I = \pi$$

例题 35.22.

已知函数 $f(x)$ 三阶可导，则下列命题中不是 $(0, f(0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点的必要条件的有：

- A. $\exists \delta > 0, f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 内单调下降, $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加
- B. $\exists \delta > 0, x \in (-\delta, \delta), f''(-x) = -f''(x)$
- C. $f''(0) = 0, f'''(0) \neq 0$

解

拐点是函数凹凸性发生改变的函数点，由函数 $f(x)$ 三阶可导，我们可以得到 $f''(x_0) = 0$ ，且有：

$$\begin{cases} f''(a) \cdot f''(b) < 0, a \in (x_0 - \xi, x_0), b \in (x_0, x_0 + \xi) \\ f'''(x_0) \text{ 符号不确定} \\ f(x) = x^3 \end{cases}$$

综上所述，上述三个命题都不正确。

September 12

例题 35.23.

下列命题正确的是：

- A. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = a$, 则 $f'(x_0) = a$
- B. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 不存在, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处不可导
- C. 若 $f'(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 则在 x_0 的某邻域内 $f'(x)$ 存在
- D. 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, $g(x)$ 在 $x = x_0$ 处不可导, 则 $f(x) \cdot g(x)$ 在 $x = x_0$ 处不可导

解

重要反例：



(1). 函数在某个点无定义, 但是这个点处导数极限存在

$$f(x) = \arctan \frac{1}{x}, f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

(2). 函数导函数在某点处可导, 但是导函数在该点处极限不存在

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & \end{cases}, f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & \end{cases}$$

例题 35.24.

证明不等式和求极限

$$(1). \text{ 证明: } \frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}, (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$(2). \text{ 求 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{i=1}^n \frac{n^2 + i}{n^2}$$

解

(1). 我们构造辅助函数: $f(x) = x - \ln(1 + x) - \frac{x^2}{2}, x \in (0, 1]$

我们有: $f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x} < 0, f(x) \text{ 在 } (0, 1] \text{ 上单调递减, 我们得到: } f(x) < f(x)_{max} = f(0) = 0$

我们得到: $f(x) < 0, x \in (0, 1] \Rightarrow \frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}, (n \in \mathbb{N}^*)$

(2). 我们由:

$$\begin{cases} \ln(1+x) < x, & x \in (0, 1] \\ \ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}, & x \in (0, 1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(1 + \frac{i}{n^2}) < \frac{i}{n^2} \\ \ln(1 + \frac{i}{n^2}) > \frac{i}{n^2} - \frac{i^2}{2n^4} \end{cases}$$

我们可以得到:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{i=1}^n \frac{n^2 + i}{n^2} &= e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} \ln(1 + \frac{i}{n^2})} \\ &e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i}{n^2} - \frac{i^2}{2n^4}} \leq I \leq e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i}{n^2}} \\ &e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4}} \leq I \leq e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n}} \end{aligned}$$

左边 = 右边 = $e^{\frac{1}{2}}$, 我们由夹逼定理可以得到原式子 $I = e^{\frac{1}{2}}$

September 13

例题 35.25.

设区域 $D_1 : \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}, D_2 : \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq r^2, (r > 0)\}$, 比较 $I = \iint_{D_1} (\cos x^2 + \sin y^2) dx dy, J = \iint_{D_1} \sqrt{2} dx dy, K = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_2} e^{x^2 - y^2} \cos(x+y) dx dy$ 大小

1.



解

我们首先可以得到: $J = \sqrt{2}$

我们根据轮换对称性:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1} \left(\cos x^2 + \sin y^2 \right) dx dy \\ &= \iint_{D_1} \left(\cos x^2 + \sin x^2 \right) dx dy \\ &= \iint_{D_1} \left(\sqrt{2} \sin\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right) \right) dx dy \\ &\in (1, \sqrt{2}) \end{aligned}$$

我们对于 K , 我们根据积分中值定理可以得到:

$$\begin{aligned} K &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} e^{\xi^2 - \eta^2} \cos(\xi + \eta) \iint_{D_2} 1 dx dy \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} e^{\xi^2 - \eta^2} \cos(\xi + \eta) \\ &= 1 \end{aligned}$$

综上所述, 我们得到: $\begin{cases} I \in (1, \sqrt{2}) \\ J = \sqrt{2} \quad \Rightarrow K < I < J \\ K = 1 \end{cases}$

例题 35.26.

证明: 若在区间 I 上 $f^{(n)}(x) \neq 0$, 则方程 $f(x) = 0$ 在 I 上最多 n 个实数根

解

我们利用反证法, 来证明: 方程 $f(x) = 0$ 在区间 I 上有超过 n 个实数根, 则 $f^{(n)}(x) = 0$ 在区间 I 上有解.

我们不妨假设 $\exists x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} \in I$, 且满足 $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_n) = f(x_{n+1}) = 0$.

我们对 $f(x)$ 在区间 $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_n, x_{n+1})$ 上使用罗尔定理:

$$\begin{cases} \exists \xi_1 \in (x_1, x_2), s.t. f'(\xi_1) = 0 \\ \exists \xi_2 \in (x_2, x_3), s.t. f'(\xi_2) = 0 \\ \dots \\ \exists \xi_n \in (x_n, x_{n+1}), s.t. f'(\xi_n) = 0 \end{cases}$$

我们以此类推, 我们可以得到: $\exists \eta_1, \eta_2 \in I, s.t. f^{(n-1)}(x) = 0$, 我们再次使用罗尔定理, 可以得到: $\exists \mu \in (\eta_1, \eta_2), s.t. f^{(n)}(\mu) = 0$

综上所述, 原命题的逆否命题成立, 原命题成立.



September 14

例题 35.27.

设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $(0, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0$, 下列命题正确的是:

- A. 若 $f(0) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ 存在
- B. 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2024$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 2024$
- C. 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$
- D. 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = 1$ 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t)dt = \infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 不存在

解

$$(A). f(x) = \sqrt{x}$$

$$(B). f(x) = 2024x + \sin x, f'(x) = 2024 + \cos x, \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \text{ 不存在}$$

$$(C). \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(x)dt}{x}$$

我们有:

$$\int_0^x f(t)dt < \int_0^x f(x)dt < \int_x^{2x} f(t)dt \Rightarrow \frac{\int_0^x f(t)dt}{x} < \frac{\int_0^x f(x)dt}{x} < \frac{\int_x^{2x} f(t)dt}{x}$$

$$\text{我们有: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_x^{2x} f(t)dt}{x} = 2 \end{cases}$$

$$\text{我们可以得到: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

(D). 我们假设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 不存在, 我们可以得到:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 1$$

例题 35.28.

讨论 $\int_0^{+\infty} \frac{x^m |\ln x|^n}{1+x^k} dx$ 的敛散性

解

我们可知函数可能的瑕点为 $x = 0, x = 1, x = +\infty$

(1). $x = 0$

当 $k \geq 0$ 时, $1+x^k$ 非零, 原反常积分敛散性等价于: $\int_0^{\frac{1}{2}} x^m |\ln x|^n dx$

$$\begin{cases} m > -1, \text{ 反常积分收敛} \\ m = -1, n < -1 \text{ 反常积分收敛} \end{cases}$$



当 $k < 0$ 时, 原反常积分敛散性等价于: $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{m-k} |\ln x|^n dx$

$$\begin{cases} m - k > -1, \text{ 反常积分收敛} \\ m - k = -1, n < -1, \text{ 反常积分收敛} \end{cases}$$

(2). $x = 1$

原反常积分敛散性等价于: $\int_{\frac{1}{2}}^1 |\ln x|^n dx$ 和 $\int_1^2 |\ln x|^n dx$ 收敛 $\Rightarrow n > -1$

(3). $x = +\infty$

当 $k \geq 0$ 时, 原反常积分敛散性等价于: $\int_2^{+\infty} x^{m-k} |\ln x|^n dx$

$$\begin{cases} m - k < -1, \text{ 反常积分收敛} \\ m - k = -1, n < -1, \text{ 反常积分收敛} \end{cases}$$

当 $k < 0$ 时, 原反常积分敛散性等价于: $\int_2^{+\infty} x^m |\ln x|^n dx$

$$\begin{cases} m < -1, \text{ 反常积分收敛} \\ m = -1, n < -1, \text{ 反常积分收敛} \end{cases}$$

综上所述, 我们得到: $\begin{cases} n > -1 \\ k < 0, k - 1 < m < -1 \quad \text{时, 原反常积分收敛} \\ k > 0, -1 < m < k - 1 \end{cases}$

35.3 Week III

September 15

例题 35.29.

函数 $y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$, 下列说法正确的是:

- A. 当 n 无论为偶数还是奇数时, 函数都取极值
- B. 当 n 无论为偶数还是奇数时, 函数都不取极值
- C. 当 n 为偶数时, 函数取极值; 当 n 为奇数时, 函数不取极值
- D. 当 n 为偶数时, 函数不取极值; 当 n 为奇数时, 函数取极值

解

我们对原函数求导, 可以得到:

$$f'(x) = -\frac{x^n}{n!} e^{-x}$$

(1). 当 n 为偶数时, $f'(x) \leq 0, f(x)$ 没有极值点

(2). 当 n 为奇数时, $x < 0$ 时, $f'(x) > 0; x > 0$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 在 $x = 0$ 处取极值.



例题 35.30.

设 $f(x)$ 连续, $g(x) = f(x) \cdot \int_0^x f(t)dt$ 单调不增, 证明: $f(x) \equiv 0$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = \frac{1}{2} (\int_0^x f(t)dt)^2$

我们有:

$$\begin{cases} F(0) = 0 \\ F'(x) = f(x) \int_0^x f(t)dt \text{ 单调不增} \\ F'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 0), F'(x) \geq 0 \\ x \in (0, +\infty), F'(x) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow F(x) \leq F(0) = 0$$

我们有: $F(x) = \frac{1}{2} (\int_0^x f(t)dt)^2 \geq 0 \Rightarrow F(x) = 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$

综上所述, 我们得到: $f(x) \equiv 0$

September 16

例题 35.31.

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上二阶可导, $f''(x) \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{xf'(x)} = \alpha > 0$, 且 $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, s.t. $f(x_0) < 0$, 证明: 方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上恰有两个实数根

解

我们可以得到:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \frac{1}{\alpha} > 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\frac{1}{\alpha} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists x_1 \in (0, +\infty), f(x_1) > 0 \\ \exists x_2 \in (-\infty, 0), f(x_2) > 0 \end{cases}$$

我们由 $f''(x) \neq 0$, 且 $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) > 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow f''(x) > 0$

我们可以得到 $f'(x)$ 单调递增, $\exists x_3 \in (-\infty, +\infty)$, s.t. $f'(x_3) = 0$.

我们可以得到 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_3)$ 上单调递减, $(x_3, +\infty)$ 上单调递增, 且 $\exists x_0$, s.t. $f(x_0) < 0$.

我们根据单调性可知 $f(x)$ 至多两个零点, 根据零点定理可知 $(-\infty, x_0)$ 和 $(x_0, +\infty)$ 上都有一个零点, 我们得到 $f(x)$ 有且仅有两个零点.

综上所述, 我们得到: 方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上恰有两个实数根

例题 35.32.

讨论 $\int_0^{+\infty} \frac{(1+x^p) \ln |\ln x|}{x^q} dx$ 的敛散性

解

我们可以找到函数可能的瑕点为 $x = 0, x = 1, x = +\infty$



(1). $x = 0$ 当 $p \geq 0$ 时, $1 + x^p$ 非零, 原反常积分敛散性等价于: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln |\ln x|}{x^q} dx$

$$\begin{cases} q < 1, \text{ 反常积分收敛} \\ q = 1, n < -1 \text{ 反常积分发散} \end{cases}$$

当 $p < 0$ 时, 原反常积分敛散性等价于: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln |\ln x|}{x^{q-p}} dx$

$$\begin{cases} q - p < 1, \text{ 反常积分收敛} \\ q - p = 1, \text{ 反常积分发散} \end{cases}$$

(2). $x = 1$ 原反常积分敛散性等价于: $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln |\ln x| dx$ 和 $\int_1^2 \ln |\ln x| dx$ 收敛(3). $x = +\infty$ 当 $p \leq 0$ 时, 原反常积分敛散性等价于: $\int_2^{+\infty} \frac{\ln |\ln x|}{x^q} dx$

$$\begin{cases} q > 1, \text{ 反常积分收敛} \\ q = 1, \text{ 反常积分发散} \end{cases}$$

当 $p > 0$ 时, 原反常积分敛散性等价于: $\int_2^{+\infty} \frac{\ln |\ln x|}{x^{q-p}} dx$

$$\begin{cases} q - p > 1, \text{ 反常积分收敛} \\ q - p = 1, \text{ 反常积分发散} \end{cases}$$

综上所述, 我们得到, 原反常积分一定发散.

September 17

例题 35.33.设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某个邻域内可导, $g(x)$ 在 $x = 0$ 的某个邻域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 0$, $f'(x) = \sin^2 x + \int_0^x g(x-t) dt$, 则下列命题正确的是:

- A. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点
- B. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点
- C. $(0, f(0))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点
- D. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0, f(0))$ 不是 $y = f(x)$ 的拐点

解我们首先可以得到: $g(0) = 0, g'(0) = 0$, 我们有:

$$\begin{cases} f''(x) = 2 \sin x \cos x + g(x) \\ f''(0) = 0 \\ f'''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x + g(x)}{x} = 2 \end{cases}$$



我们可以得到:

$$\begin{cases} x \in (-\xi, 0), f''(x) < 0 \\ x \in (0, \xi), f''(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) \text{ 在 } (-\xi, 0) \text{ 单调递减; } f'(x) \text{ 在 } (0, \xi) \text{ 单调递增} \Rightarrow f'(x) \geq f'(0) = 0$$

我们有: $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点; $(0, f(0))$ 是 $f(x)$ 的拐点.

例题 35.34.

设 X_1, X_2, \dots, X_9 是来自正态总体 X 的简单随机样本, $Y_1 = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_6}{6}$, $Y_2 = \frac{X_7 + X_8 + X_9}{3}$, $S^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^9 (X_i - Y_2)^2$, $Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S}$, 证明: $Z \sim t(2)$

解

September 18

例题 35.35.

设函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上可导, 且 $f'(x) > f(x) > 0$, 下列命题正确的是:

- A. $\frac{f(-2)}{f(-1)} > 1$
- B. $\frac{f(0)}{f(-1)} > e$
- C. $\frac{f(1)}{f(-1)} < e^2$
- D. $\frac{f(2)}{f(-1)} < e^3$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = \frac{f(x)}{e^x}$

我们有: $F'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} > 0$, $F(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上单调递增.

$$\begin{cases} F(-1) > F(-2) \\ F(0) > F(-1) \\ F(1) > F(-1) \\ F(2) > F(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{f(-2)}{f(-1)} < \frac{1}{e} \\ \frac{f(0)}{f(-1)} > e \\ \frac{f(1)}{f(-1)} > e^2 \\ \frac{f(2)}{f(-1)} > e^3 \end{cases}$$

例题 35.36.

$D = \left\{ (p, q) \mid \int_0^{+\infty} \frac{x^p |x-1|^q}{(x+1) \ln x \ln(x+2)} dx \text{ 收敛} \right\}$, 求 D 绕 q 轴旋转一周扫过的体积

解



我们可以找到函数可能的瑕点为 $x = 0, x = 1, x = +\infty$

(1). $x = 0$

原反常积分敛散性等价于: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^p}{\ln x} dx$

$$\begin{cases} p > -1, \text{ 反常积分收敛} \\ p \leq -1, \text{ 反常积分发散} \end{cases}$$

(2). $x = 1$

原反常积分敛散性等价于: $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{|x-1|^q}{\ln x} dx$ 和 $\int_1^2 \frac{|x-1|^q}{\ln x} dx$

$$\begin{cases} q-1 > -1, \text{ 反常积分收敛} \\ q-1 \leq -1, \text{ 反常积分发散} \end{cases}$$

(3). $x = +\infty$

原反常积分敛散性等价于: $\int_2^{+\infty} \frac{x^{p+q-1}}{\ln^2 x} dx$

$$\begin{cases} p+q-1 < -1, \text{ 反常积分收敛} \\ p+q-1 = -1, \text{ 反常积分收敛} \\ p+q-1 > -1, \text{ 反常积分发散} \end{cases}$$

综上所述, 我们得到 $\begin{cases} p > -1 \\ q > 0 \\ p+q \leq 0 \end{cases}$ 时, 原反常积分收敛.

我们可以得到: $D = \{(p, q) | -1 < p < 0, 0 < q < -p\}$, 我们可以得到:

$$V = \frac{2\pi}{3}$$

September 19

例题 35.37.

设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 下列哪些命题是 $\int_0^x f(t)dt$ 是以 T 为周期的周期函数的充分条件:

- A. $\int_0^T [f(t) - f(-t)] dt = 0$
- B. $f(-x) = f(x)$
- C. $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ 收敛

解

我们设 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 已知函数 $f(x)$ 为周期函数, $F(x)$ 为在周期函数等价于:

$$F(x) \text{ 为周期函数} \Leftrightarrow \int_0^T f(x)dx = 0$$

(1). $f(x) = 1, F(x) = x$

(2). $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx = 0$



$$(3). \int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n \int_{iT}^{(i+1)T} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} nA \text{ 收敛}$$

我们得到: $\int_0^T f(x) dx = A = 0$

例题 35.38.

设随机变量 X 和 Y 独立同分布, X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$, 令 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$, 求 $D(Z)$

解

September 20

例题 35.39.

已知常数 $k \geq \ln 2 - 1$, 证明: $(x-1)(x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1) \geq 0$

解

我们构造辅助函数: $f(x) = x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1, x > 0$

$$\text{我们有: } \begin{cases} f'(x) = \frac{x - 2 \ln x + 2k}{x} \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

我们不妨设 $g(x) = x - 2 \ln x + 2k$, $g(x)$ 与 $f'(x)$ 同号, $g'(x) = \frac{x-2}{x}$

我们可以得到:

$$\begin{cases} x \in (0, 2), g'(x) < 0 \\ x \in (2, +\infty), g'(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow g(x)_{min} = g(2) = 2 - 2 \ln 2 + 2k \geq 0$$

我们得到: $g(x) \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

我们得到:

$$\begin{cases} x \in (0, 1), f(x) < 0, x-1 < 0 \\ x \in (1, +\infty), f(x) > 0, x-1 > 0 \Rightarrow (x-1)f(x) \geq 0 \\ x = 1, f(x) = 0, x-1 = 0 \end{cases}$$

综上所述, 我们得到: $(x-1)(x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1) \geq 0$

例题 35.40.

求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)^3}{n(n+1)} x^n$ 的和函数 $S(x)$

解



我们不妨设 $a_n = \frac{(n-1)^3}{n(n+1)}$, 我们可以得到:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\rho}$$

我们得到幂级数的收敛区间为 $(-1, 1)$, 当 $x = \pm 1$ 时, 原级数发散, 因此原级数的收敛域为 $(-1, 1)$

我们有: $a_n = \frac{(n-1)^3}{n(n+1)} = \frac{n^3 - 3n^2 + 3n - 1}{n^2 + n} = n - 4 + \frac{8}{n+1} - \frac{1}{n}$

原级数可以等价于:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)^3}{n(n+1)} x^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)x^n - 5 \sum_{n=1}^{+\infty} x^n + 8 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= \left(\frac{x^2}{1-x} \right)' - \frac{5x}{1-x} + \frac{8}{x} [-\ln(1-x) - x] + \ln(1-x) \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} - 9 - \frac{5x}{1-x} - \frac{8 \ln(1-x)}{x} + \ln(1-x) \end{aligned}$$

综上所述, $S(x) = \frac{1}{(1-x)^2} - 9 - \frac{5x}{1-x} - \frac{8 \ln(1-x)}{x} + \ln(1-x), x \in (-1, 1)$

September 21

例题 35.41.

设 $f(x) = x[\frac{1}{x}]$, $[\frac{1}{x}]$ 表示不超过 $\frac{1}{x}$ 的最大整数, 求 $f(x)$ 的间断点并判断其类型

解

我们发现 $f(x)$ 可能的间断点在 $x = 0, \pm \frac{1}{n}$, 且 $x - 1 < [x] \leq x \Rightarrow \frac{1}{x} - 1 < [\frac{1}{x}] < \frac{1}{x}$

(1). 当在 $x = 0$ 处附近, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处无定义

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \in (1-x, 1) \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \in (1, 1-x) \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$$

$x = 0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点

(2). 当 $x = \frac{1}{n}$ 处附近:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{n}^+} f(x) = 1 - \frac{1}{n} \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{n}^-} f(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ 在 } x = \frac{1}{n} \text{ 跳跃间断}$$



(3). 当 $x = -\frac{1}{n}$ 处附近:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{n}^+} f(x) = 1 + \frac{1}{n} \\ \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{n}^-} f(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ 在 } x = \frac{1}{n} \text{ 跳跃间断}$$

综上所述, $f(x)$ 有且仅有一个可去间断点 $x = 0$, 有无数多个跳跃间断点 $x = \pm \frac{1}{n}$

例题 35.42.

设 $f(x, y)$ 在全平面上有连续的偏导数, 且 $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, 证明: $f(x, y)$ 为常数

解

我们构造辅助函数: $g(t) = f(tx, ty)$, 我们有:

$$\begin{cases} g'(t) = xf_1(tx, ty) + yf_2(tx, ty) \\ tg'(t) = txf_1(tx, ty) + tylf_2(tx, ty) \quad tg'(t) = 0 \\ x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

(1). 当 $t \neq 0$, 我们可以得到: $g'(t) = 0 \Rightarrow g(t) = C$

(2). 当 $t \neq 0$ 时, 我们由 $f(x, y)$ 在全平面上有连续的偏导数, 可以得到: $g'(t)$ 连续 $\Rightarrow g'(0) = 0$

综上所述, $g'(t) = 0 \Rightarrow g(t) = C \Rightarrow g(0) = g(1) \Rightarrow f(0, 0) = f(x, y) = C$, $f(x, y)$ 为常数.

35.4 Week IV

September 22

例题 35.43.

设函数 $f(x)$ 二阶可导, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $\forall x \geq 0$, $f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) \geq 0$, 证明:

$$f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x} (x \geq 0)$$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = e^{-3x}(f'(x) - 2f(x))$, 我们有:

$$\begin{cases} F'(x) = e^{-3x}(f''(x) - 5f'(x) + 6f(x)) \geq 0, x \geq 0 \\ F(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增} \\ F(x) \geq F(0) = -2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) - 2f(x) + 2e^{3x} \geq 0$$



我们构造辅助函数: $G(x) = e^{-2x}(f(x) + 2e^{3x})$, $x \geq 0$, 我们有:

$$\begin{cases} G'(x) = e^{-2x}(f'(x) - 2f(x) + 2e^{3x}), x \geq 0 \\ G'(x) \geq 0 \\ G(x) \geq G(0) = 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x}$$

综上所述, 我们证明: $f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x}$, ($x \geq 0$)

例题 35.44.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!(n+1)}$$

解

我们构造幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)} x^{2n+2}$, 我们设该幂级数的和函数为 $S(x)$

我们可以得到原和式为 $2S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, 我们需要求出幂级数的和函数 $S(x)$

我们不妨设 $a_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)}$, 我们可以得到:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \Rightarrow R^2 = 1$$

我们可以得到幂级数的收敛区间为 $(-1, 1)$, 我们对幂级数逐项求导可以得到:

$$S'(x) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1}$$

我们不妨设 $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1}$, 我们有: $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} x^{2n}$

我们对 $f'(x)$ 稍作变形:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} x^{2n} \\ &= x \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} x^{2n} \right]' \\ &= x \left[x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} x^{2n-1} \right) \right]' \\ &= x [xf(x) + x^2]' \end{aligned}$$

我们得到: $f'(x) - \frac{x}{1-x^2} f(x) = \frac{2x^2}{1-x^2}$

我们可以解得: $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - x + C$, $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

我们得到: $S'(x) = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - 2x$, $S(0) = 0 \Rightarrow S(x) = (\arcsin x)^2 - x^2$

我们得到原和式为: $I = 2S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi^2}{8} - 1$



September 23

例题 35.45.

$$\iint_D [x(1 - y^3) + y(1 + x^3)] \, dxdy$$

其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x + 2y\}$

解

我们根据轮换对称性, 可以得到:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D [x(1 - y^3) + y(1 + x^3)] \, dxdy \\ &= \iint_D [y(1 - x^3) + x(1 + y^3)] \, dxdy \\ &= \iint_D (x + y) \, dxdy \\ &= \iint_D (x - 1 + y - 1) \, dxdy + \iint_D 2 \, dxdy \\ &= 2S_D \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

例题 35.46.

设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx \, dx$, 证明:

$$a_n = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k} (n \geq 1)$$

解

我们可以得到:

$$\begin{cases} a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx \, dx \\ a_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin(n-1)x \, dx \end{cases} \Rightarrow a_{n-1} = a_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin x \cos nx \, dx$$



我们利用分部积分对 a_n 进行简化:

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx dx \\ &= -\frac{1}{n} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x d(\cos nx) \right) \\ &= -\frac{1}{n} \left(\cos^n x \cos nx \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin x \cos nx dx \right) \\ &= \frac{1}{n} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin x \cos nx dx \end{aligned}$$

我们可以得到:

$$a_n = \frac{1}{n} + a_{n-1} - a_n \Rightarrow a_n - \frac{a_{n-1}}{2} = \frac{1}{2n}$$

我们有: $a_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x dx = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_n - \frac{a_{n-1}}{2} = \frac{1}{2n} \end{cases} \Rightarrow \text{数列 } \{a_n\} \text{ 唯一}$$

我们不妨假设: $a_n = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}$, 下面用数学归纳法证明:

(1). 当 $n = 1$ 时, $a_1 = \frac{1}{2}$

(2). 当 $n = k$ 时, 我们有: $a_k = \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{i=1}^k \frac{2^i}{i}$

$$a_{k+1} = \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2}a_k = \frac{2^{k+1}}{2^{k+2}(k+1)} + \frac{1}{2^{k+2}} \sum_{i=1}^k \frac{2^i}{i} = \frac{1}{2^{k+2}} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{2^i}{i}$$

综上所述, 我们得到: $a_n = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}$, ($n \geq 1$)

September 24

例题 35.47.

设三元二次型 $f = x^T Ax$ 正定, 其中 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, A 为实对称矩阵, 则下列说法不正确的是:

- A. 仅在 $x = 0$ 处 f 取得最小值
- B. 齐次方程组 $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$ 只有零解



- C. 二阶偏导数矩阵 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}$ 是正定矩阵
- D. $\exists \alpha \in \mathbb{R}^3 \neq 0, s.t. A = \alpha \alpha^T \rightarrow f = (\alpha^T x)^2$

解

我们不妨假设 $f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$, 我们可以得到:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(1). 我们由 f 正定, 可以得到: $f \geq 0$, 当且仅当 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 时等号成立.

(2)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3 = 0 \\ 2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 + 2a_{23}x_3 = 0 \\ 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + 2a_{33}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{12} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{13} & 2a_{23} & 2a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2Ax = 0$$

矩阵 A 为正定矩阵 $\Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ 原方程组只有零解.

(3). 我们可以得到:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{12} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{13} & 2a_{23} & 2a_{33} \end{pmatrix} = 2A \text{ 正定}$$

(4) $|A| \neq 0 \Rightarrow \text{rank}(A) = 3$, 假设 $A = \alpha \alpha^T, \text{rank}(A) = 1$ 矛盾!!!

例题 35.48.

证明:

$$\left| \frac{\sin x - \sin y}{x - y} - \cos y \right| \leq \frac{1}{2} |x - y| (x \neq y)$$

解



我们利用带拉格朗日余项的泰勒公式将 $f(x) = \sin x$ 进行展开:

$$\sin x = \sin y + (x - y) \cos y + \frac{(x - y)^2}{2} \sin \xi, \xi \text{位于} x, y \text{之间}$$

我们可以得到:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin x - \sin y}{x - y} - \cos y \right| &= \left| \frac{\sin \xi}{2}(x - y) \right| \\ &\leq \frac{1}{2}|x - y| \end{aligned}$$

September 25

例题 35.49.

求幂级数 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2 + 3n + 4}{2^n(n+1)!} x^{2n}$ 的和函数 $S(x)$

解

我们可以将原级数化为: $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2 + 3n + 4}{(n+1)!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n$

我们设 $a_n = \frac{n^2 + 3n + 4}{(n+1)!}$, 我们可以得到:

$$a_n = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{2}{n!} + \frac{2}{(n+1)!}$$

我们先求出收敛半径:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0 \Rightarrow R = \infty$$

原级数可以化为:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2 + 3n + 4}{2^n(n+1)!} x^{2n} &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n \\ &= \frac{x^2}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n + \frac{4}{x^2} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n \\ &= \frac{x^2}{2} \left[e^{\frac{x^2}{2}} - 1 \right] + 2 \left[e^{\frac{x^2}{2}} - 1 - \frac{x^2}{2} \right] + \frac{4}{x^2} \left[e^{\frac{x^2}{2}} - 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} \right] \\ &= \frac{x^2 e^{\frac{x^2}{2}}}{2} + 2e^{\frac{x^2}{2}} + \frac{4e^{\frac{x^2}{2}}}{x^2} - 2x^2 - 4 - \frac{4}{x^2} \end{aligned}$$

综上所述, 我们得到: $S(x) = \begin{cases} \frac{x^2 e^{\frac{x^2}{2}}}{2} + 2e^{\frac{x^2}{2}} + \frac{4e^{\frac{x^2}{2}}}{x^2} - 2x^2 - 4 - \frac{4}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$



例题 35.50.

设线性方程组 $Ax = \alpha$ 有解, $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ 无解, 则下列结论正确的是:

- A. $r(B, \beta) = r(B) + 1$
- B. $r\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix} < r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + 1$
- C. $r[B^T(B, \beta)] > r(B^T B)$
- D. $r\left[(A^T, B^T)\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix}\right] = r\left[(A^T, B^T)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right]$

解

(1). 方程组 $Ax = \alpha$ 与 $Bx = \beta$ 无公共解, $r(B, \beta)$ 和 $r(B) + 1$ 可能相等, 也可能不等

(2). 方程组 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ 无解 $\Rightarrow r\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + 1$

(3). $\begin{cases} r[B^T(B, \beta)] \leq r(B^T) \\ r(B^T) = r(B) = r(BB^T) = r(B^TB) \end{cases} \Rightarrow r[B^T(B, \beta)] = r(B^TB)$
 $r[B^T(B, \beta)] = r(B^TB, B^T\beta) \geq r(B^TB)$

(4).

$$\begin{cases} r\left[(A^T, B^T)\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix}\right] \geq r\left[(A^T, B^T)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right] \\ r\left[(A^T, B^T)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right] = r(A^T, B^T) \\ r(A^T, B^T) \geq r\left[(A^T, B^T)\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix}\right] \end{cases} \Rightarrow r\left[(A^T, B^T)\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix}\right] = r\left[(A^T, B^T)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right]$$

September 26

例题 35.51.

已知 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\ln(3 \cos x)} - 3^{\ln x}}{x^k \ln x} = c (c \neq 0)$, 求 c, k

解



原极限可以化为:

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\ln(3 \cos x)} - 3^{\ln x}}{x^k \ln x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\ln x \ln(3 \cos x)} - e^{\ln 3 \ln x}}{x^k \ln x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\ln 3 \ln x} [e^{\ln(\cos x) \ln x} - 1]}{x^k \ln x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\ln 3} [\ln x \ln(\cos x)]}{x^k \ln x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^{2+\ln 3}}{2x^k} \\
 &= c
 \end{aligned}$$

我们可以得到: $\begin{cases} k = 2 + \ln 3 \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases}$

例题 35.52.

设 $f(x, y)$ 在 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 内具有连续的偏导数, 且在边界上取值为 0, 证明:

$$f(0, 0) = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2\pi} \iint_{D_1} \frac{x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}}{x^2 + y^2} dx dy$$

其中 ($D_1 = \{(x, y) | \xi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$)

解

我们利用极坐标代换:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta$$

我们得到: $r \frac{\partial f}{\partial r} = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$

原极限可以化为:

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2\pi} \iint_{D_1} \frac{\partial f}{\partial r} dr d\theta \\
 &= \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_\xi^1 \frac{\partial f}{\partial r} dr \\
 &= \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(\cos \theta, \sin \theta) - f(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta)] d\theta \\
 &= \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2\pi} (-2\pi) f(\xi \cos \alpha, \xi \sin \alpha), \alpha \in (0, 2\pi) \text{ (积分中值定理)} \\
 &= f(0, 0)
 \end{aligned}$$



September 27

例题 35.53.

设 $f(x)$ 二阶可导, $f(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$, 且 $f(x)f''(x) > [f'(x)]^2$, 下列命题一定成立的是:

- A. $e^{-x}f(x) \geq 1$
- B. $e^{-x}f(x) < 1$
- C. $\frac{\ln f(x)}{x} < 1$
- D. $\frac{\ln f(x)}{x} > 1$

解

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \quad \text{我们构造辅助函数: } F(x) = \ln f(x), \text{ 我们有:}$$

$$\begin{cases} F'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \\ F''(x) = \frac{f''(x)f(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2} > 0 \\ F(0) = 0 \\ F'(0) = 1 \end{cases}$$

我们将 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处进行泰勒展开得到:

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(\xi)}{2}x^2, F''(x) > 0 \Rightarrow F(x) \geq x \Rightarrow e^{-x}f(x) \geq 1$$

例题 35.54.

求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 x^n$ 的和函数 $S(x)$

解

首先求收敛域, 不妨设 $a_n = n^3$, 我们有:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \Rightarrow R = 1$$

当 $x = \pm 1$ 时, 原幂级数发散, 因此幂级数的收敛域为 $(-1, 1)$

我们已知幂级数: $G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}, x \in (-1, 1)$

我们可以得到:

$$\begin{cases} G'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(x-1)^2} \\ xG'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(x-1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [xG'(x)]' = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \\ x[xG'(x)]' = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \{x[xG'(x)]'\}' = \sum_{n=1}^{+\infty} n^3 x^{n-1} = x^2 \\ S(x) = x\{x[xG'(x)]'\}' = \frac{x^3}{(x-1)^4} \end{cases}$$



综上所述, 原幂级数的和函数 $S(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + x}{(x - 1)^4}$

September 28

例题 35.55.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+2)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+\sin x}} \right]$$

解

原极限可化为:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2(x+2)^{\frac{1}{x}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[(x+2)^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{x+\sin x}} \right] \\ &= 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[e^{\frac{\ln(x+2)}{x}} - e^{\frac{\ln x}{x+\sin x}} \right] \\ &= 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\xi} x \left[\frac{\ln(x+2)}{x} - \frac{\ln x}{x+\sin x} \right] (\text{拉格朗日中值定理}) \\ &= 2 \end{aligned}$$

例题 35.56.

设 A 为 n 阶方阵, β 为 n 维非零列向量, 且 $r\begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} < r\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix}$, 下列说法正确的是:

- A. $\begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ 必有非零解
- B. $\begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ 只有零解
- C. 方程组 $Ax = \beta$ 必无解
- D. 方程组 $Ax = \beta$ 必有解

解

$$\begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (A, \beta)v = 0$$

我们由: $r\begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} < r\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix}$ 得到:

(1). 当 $r\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix} = n + 1$ 时, $(A, \beta)v = 0$ 只有零解 $\Rightarrow \begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ 只有零解



(2). 当 $r \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix} < n + 1$ 时, $\begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ 必有非零解

以上两种情况我们都得到: $r \begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} < r \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} + 1 \Rightarrow r(A, \beta) = r(A)$, 我们可以得到:

方程组 $Ax = \beta$ 一定有解

September 29

例题 35.57.

设 $X \sim N(0, 1)$, 求 $E(X^4 e^X)$

解

例题 35.58.

设 $f(x)$ 为非负连续函数, $x > 0$, $\int_0^x f(x)f(x-t)dt = x^3$, 求 $f(x)$

解

我们不妨设 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $F(0) = 0$, 上述条件可化为:

$$\int_0^x f(x)f(x-t)dt = x^3 \Rightarrow f(x) \int_0^x f(t)dt = x^3 \Rightarrow F(x)F'(x) = x^3 \Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$$

$$f(x) = F'(x) = \sqrt{2}x$$

September 30

例题 35.59.

$a_{n+2} = \frac{2}{n+2}a_{n+1} + \frac{3}{(n+2)(n+1)}a_n$ ($n \geq 0$), $a_0 = 0, a_1 = 1$, 已知 $a_3 > a_4 > a_5$, 求幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$

解

我们利用数学归纳法证明 $\{a_n\}$ ($n \geq 3$) 单调递减:

(1). 当 $n = 3, 4, 5, a_3 > a_4 > a_5$

(2). 假设 $n = k$ ($k \geq 3$) 时, $a_{k+1} < a_k$, 我们有:

$$a_{k+2} = \frac{2}{k+2}a_{k+1} + \frac{3}{(k+2)(k+1)}a_k < \frac{2}{k+1}a_k + \frac{3}{(k+1)k}a_{k-1} = a_{k+1}$$

我们可以得到 $\{a_n\}$ ($n \geq 3$) 单调递减, $a_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ 存在

我们假设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A$ 存在, 我们有:

$$A = A \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n+2} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{(n+2)(n+1)} \Rightarrow A = 0 \Rightarrow \text{收敛域}(-\infty, +\infty)$$



我们可以得到:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = 2(n+1)a_{n+1} + 3a_n \Rightarrow (a_{n+2}x^{n+2})'' = 2(a_{n+1}x^{n+1})' + 3a_nx^n$$

我们得到:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+2}x^{n+2})'' = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+1}x^{n+1})' + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$$

我们进一步得到:

$$[S(x) - a_0 - a_1x]'' = 2[S(x) - a_0]' + 3S(x) \Rightarrow S''(x) = 2S'(x) + 3S(x), \begin{cases} S(0) = a_0 = 0 \\ S'(0) = a_1 = 1 \end{cases}$$

$$\text{我们可以得到: } S(x) = \frac{e^{3x} - e^{-x}}{4}$$

例题 35.60.

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 2$, $\int_0^1 f(x)dx = 1$

- (1). 证明: $\exists \xi \in (0, 1)$, s.t. $f'(\xi) = f(\xi) - 2\xi + 2$
- (2). 证明: $\exists \eta \in (0, 1)$, s.t. $f''(\eta) = 0$
- (3). 证明: $\exists \zeta \in (0, 1)$, s.t. $\int_0^\zeta f(t)dt + \zeta f(\zeta) = 2\zeta$
- (4). 证明: $\exists \mu \in (0, 1)$, s.t. $\mu f(\mu) = 2 \int_0^\mu f(t)dt$

解

我们由题意可得:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 2 \\ \int_0^1 f(x)dx = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 2 \\ \exists c \in (0, 1), \text{s.t. } f(c) = 1 \end{cases}$$

(1) 我们构造辅助函数: $F(x) = \frac{f(x) - 2x}{e^x}$, 我们可以得到:

$$\begin{cases} F(0) = 0 \\ \int_0^1 [f(x) - 2x] = 0 \\ F'(x) = e^{-x}[f'(x) - 2 - f(x) + 2x] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(0) = 0 \\ \exists c \in (0, 1), \text{s.t. } F(c) = 0 \text{ (积分中值定理)} \end{cases}$$

我们对 $F(x)$ 在 $(0, c)$ 上使用罗尔定理可以得到:

$$\exists \xi \in (0, c) \subset (0, 1), \text{s.t. } F'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = f(\xi) - 2\xi + 2$$

(2). 我们构造辅助函数: $G(x) = f(x) - 2x$, 我们可以得到:

$$\begin{cases} G(0) = 0 \\ G'(0) = 0 \\ \int_0^1 G(x)dx = 0 \Rightarrow \exists a \in (0, 1), \text{s.t. } G(a) = 0 \end{cases} \Rightarrow G(0) = G(d) = 0$$



我们对 $G(x)$ 在 $(0, a)$ 上使用罗尔定理得到:

$$\exists b \in (0, a), s.t. G'(b) = 0$$

我们对 $G'(x)$ 在 $(0, b)$ 上使用罗尔定理得到:

$$\exists \eta \in (0, b), s.t. G''(\eta) = 0 \Rightarrow f''(\eta) = 0$$

(3). 我们构造辅助函数: $H(x) = x \int_0^x f(t)dt - x^2$, 我们有:

$$\begin{cases} H(0) = H(1) = 0 \\ H'(x) = \int_0^x f(t)dt + xf(x) - 2x \end{cases}$$

我们对 $H(x)$ 在 $(0, 1)$ 上使用罗尔定理可以得到:

$$\exists \zeta \in (0, 1), s.t. H'(\zeta) = 0 \Rightarrow \int_0^\zeta f(t)dt + \zeta f(\zeta) = 2\zeta$$

(4). 我们构造辅助函数: $P(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}, & x \in (0, 1] \\ 1, & x = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = 1$

我们可以得到: $P(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $(0, 1)$ 上可导, 我们还可以得到:

$$\begin{cases} P(0) = P(1) = 1 \\ P'(x) = \frac{xf(x) - 2 \int_0^x f(t)dt}{x^3} \end{cases}$$

我们对 $P(x)$ 在 $(0, 1)$ 上使用罗尔定理可以得到:

$$\exists \mu \in (0, 1), s.t. P'(\mu) = 0 \Rightarrow \mu f(\mu) = 2 \int_0^\mu f(t)dt$$





第 36 章 October

36.1 Week I

October 1

例题 36.1.

设 $I = \int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos x^2 dx$, $J = \int_0^{\sqrt{\pi}} \cos x^2 dx$, $K = \int_0^{\pi} \sqrt{x} \cos x dx$, 比较 I, J, K 的大小

解

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos x^2 dx = \frac{\sin x^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{\pi}} = 0 \\J &= \int_0^{\sqrt{\pi}} \cos x^2 dx = \int_0^{\pi} \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} dt > 0 \\K &= \int_0^{\pi} \sqrt{x} \cos x dx < 0\end{aligned}$$

综上所述, 我们可以得到: $K < I < J$

例题 36.2.

已知曲线 $L: y = x^2 - 1 (-1 \leq x \leq 2)$, 方向从 $A(-1, 0)$ 到 $B(2, 3)$, 求 $\int_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$

解



$$\begin{aligned}
 \int_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} &= \int_{-1}^2 \frac{x^2 + 1}{x^2 + (x^2 - 1)^2} dx \\
 &= \int_{-1}^2 \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx \\
 &= \int_{-1}^2 \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} dx \\
 &= \int_{-1}^2 \frac{1}{1 + (x - \frac{1}{x})^2} d(x - \frac{1}{x}) \\
 &= \int_{-1}^{0^-} \frac{1}{1 + (x - \frac{1}{x})^2} d(x - \frac{1}{x}) + \int_{0^+}^2 \frac{1}{1 + (x - \frac{1}{x})^2} d(x - \frac{1}{x}) \\
 &= \arctan(x - \frac{1}{x}) \Big|_{x=-1}^{x=0^-} + \arctan(x - \frac{1}{x}) \Big|_{x=0^+}^{x=2} \\
 &= \arctan \frac{3}{2} + \pi
 \end{aligned}$$

October 2

例题 36.3.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \quad (x > 0), \text{ 求 } \int f(x) dx$$

解

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1] \\ x, & x \in (1, 2] \\ \frac{x^2}{2}, & x \in (2, +\infty) \end{cases} \Rightarrow \int f(x) dx = \begin{cases} x + C, & x \in (0, 1] \\ \frac{x^2 + 1}{2} + C, & x \in (1, 2] \\ \frac{x^3 + 7}{6} + C, & x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

例题 36.4.

$$f(x) \text{ 连续}, f(x+2) - f(x) = \sin x, \int_0^2 f(x) dx = 0, \text{ 求 } \int_1^3 f(x) dx$$

解



$$\begin{aligned}
 \int_1^3 f(x)dx &= \int_1^3 f(x)dx - \int_0^2 f(x)dx \\
 &= \int_2^3 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \\
 &= \int_0^1 f(x+2)dx - \int_0^1 f(x)dx \\
 &= \int_0^1 [f(x+2) - f(x)]dx \\
 &= \int_0^1 \sin x dx \\
 &= 1 - \cos 1
 \end{aligned}$$

注

构造辅助函数: $F(x) = \int_x^{x+2} f(t)dt$

$$\begin{cases} F'(x) = f(x+2) - f(x) = \sin x \\ F(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x) = -\cos x + 1 \\ F(1) = \int_1^3 f(x)dx = 1 - \cos 1 \end{cases}$$

October 3

例题 36.5.

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 1, f(1) = 0$, 证明:

- (1). $\exists \xi_1, \xi_2 \in (0, 1) (\xi_1 \neq \xi_2)$, s.t. $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = -2$
- (2). $\exists \eta, \zeta \in (0, 1) (\eta \neq \zeta)$, s.t. $f'(\eta)f'(\zeta) = 1$

解

(1). 取 $c = f(\frac{1}{2})$, 我们在 $(0, \frac{1}{2})$ 和 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上分别对 $f(x)$ 使用拉格朗日中值定理:

$$\begin{cases} \exists \xi_1 \in (0, \frac{1}{2}), \text{s.t. } 2(c-1) = f'(\xi_1) \\ \exists \xi_2 \in (\frac{1}{2}, 1), \text{s.t. } -2c = f'(\xi_2) \end{cases} \Rightarrow f(\xi_1) + f(\xi_2) = -2$$

(2). 构造辅助函数: $F(x) = f(x) - x$

$$\begin{cases} F(0) = f(0) = 1 > 0 \\ F(1) = f(1) - 1 = -1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{零点定理: } \exists c \in (0, 1), \text{s.t. } F(c) = f(c) - c = 0$$



对 $f(x)$ 分别在 $(0, c)$ 和 $(c, 1)$ 上使用拉格朗日中值定理:

$$\begin{cases} \exists \eta \in (0, c), s.t. \frac{f(c) - 1}{c - 1} = f'(\eta) \\ \exists \zeta \in (c, 1), s.t. \frac{-f(c)}{1 - c} = f'(\zeta) \end{cases} \Rightarrow f'(\eta)f'(\zeta) = \frac{c - 1}{c} \frac{-c}{1 - c} = 1$$

例题 36.6.

设 $f(x) = \int_{-1}^x t \cos t dt, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 则曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴所围成的图形面积为:

- A. $2 \int_0^1 x \sin x dx$
- B. $2 \int_0^1 x^2 \sin x dx$
- C. $2 \int_0^1 x \cos x dx$
- D. $2 \int_0^1 x^2 \cos x dx$

解

$f(x)$ 为偶函数, 且 $f'(x) = x \cos x, f(1) = f(-1) = 0$

$$\begin{cases} x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) & f'(x) < 0 \\ x \in (0, \frac{\pi}{2}) & f'(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) 在 (-\frac{\pi}{2}, 0) 上单调递减, 在 (0, \frac{\pi}{2}) 上单调递增$$

$$\begin{aligned} S &= \left| \int_{-1}^1 f(x) dx \right| \\ &= -2 \int_0^1 f(x) dx \\ &= -2 [xf(x)] \Big|_{x=-1}^{x=1} + 2 \int x f'(x) dx \\ &= 2 \int x^2 \cos x dx \end{aligned}$$

October 4

例题 36.7.

设 Γ 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = x + y$ 的交线, 从 z 轴正向往负向看去为逆时针, 计算积分 $\oint_{\Gamma} xz dx + x dy + \frac{y^2}{2} dz$

解

我们有:

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2k+1} x dx = \int_0^{2\pi} \cos^{2k+1} x dx = 0 (k = 0, 1, 2, \dots)$$



令 $\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \\ z = \sin \theta + \cos \theta \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$ 曲线积分:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left[\cos \theta (\sin \theta + \cos \theta) d(\cos \theta) + \cos \theta d(\sin \theta) + \frac{\sin^2 \theta}{2} d(\sin \theta + \cos \theta) \right] \\ &= \int_0^{2\pi} \cos \theta (\cos^2 \theta - 1) d\theta + \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta - 1) \sin \theta + \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 \theta) \cos \theta d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \pi \end{aligned}$$

例题 36.8.

$$\int \frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$$

解

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x)} dx \\ &= \int \frac{\sin x + \cos x}{(\sin x + \cos x)^2 (\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x)} dx \\ &= \int \frac{d(\sin x - \cos x)}{(1 + 2 \sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x)} \\ &= \int \frac{2d(\sin x - \cos x)}{[2 - (\sin x - \cos x)^2][1 + (\sin x - \cos x)^2]} \\ &= \int \frac{2du}{(2 - u^2)(1 + u^2)} \\ &= \frac{2}{3} \left[\int \frac{1}{2 - u^2} du + \int \frac{1}{1 + u^2} du \right] \\ &= \frac{2}{3} \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + u}{\sqrt{2} - u} \right| + \arctan u \right] \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \sin x - \cos x}{\sqrt{2} - \sin x + \cos x} \right| + \frac{2}{3} \arctan(\sin x - \cos x) + C \end{aligned}$$

October 5



例题 36.9.

$$F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt, \text{ 求 } F(x)$$

解

\Rightarrow $f(x) = e^{\sin x} \sin x, f(x)$ 为周期函数, 周期 $T = 2\pi$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt \\ &= \int_x^0 e^{\sin t} \sin t dt + \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt + \int_{2\pi}^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt \\ &= - \int_0^x e^{\sin t} \sin t dt + \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt + \int_0^x e^{\sin t} \sin t dt \\ &= \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt \\ &= \int_0^\pi (e^{\sin x} - e^{-\sin x}) \sin x dx > 0 \end{aligned}$$

综上所述, $F(x) = C > 0$

例题 36.10.

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $I = \int_0^1 f(x) dx \neq 0$, 证明:

$$\exists \xi, \eta \in (0, 1) (\xi \neq \eta), s.t. \frac{1}{f(\xi)} + \frac{1}{f(\eta)} = \frac{2}{I}$$

解

构造辅助函数: $F(x) = \int_0^x f(t) dt, F(0) = 0, F(1) = I \neq 0$

介值定理:

$$\exists c \in (0, 1), s.t. F(c) = \frac{I}{2}$$

$F(x)$ 在区间 $(0, c)$ 和 $(c, 1)$ 上使用拉格朗日中值定理:

$$\begin{cases} \exists \xi \in (0, c), s.t. \frac{F(c)}{c} = F'(\xi) = f(\xi) \\ \exists \eta \in (c, 1). s.t. \frac{F(1) - F(c)}{1 - c} = F'(\eta) = f(\eta) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{f(\xi)} + \frac{1}{f(\eta)} = \frac{2c}{I} + \frac{2(1 - c)}{I} = \frac{2}{I}$$

综上所述, 我们得到: $\exists \xi, \eta \in (0, 1) (\xi \neq \eta), s.t. \frac{1}{f(\xi)} + \frac{1}{f(\eta)} = \frac{2}{I}$

October 6



例题 36.11.

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 内可导, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ 存在, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的充分条件为:

- A $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在
- B $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x}$ 存在
- C $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处连续
- D $\int_0^x f(t)dt$ 在点 $x = 0$ 处可导

解

- A $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在
- B $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x}$ 存在 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ 存在
- C

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = k \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) \end{cases} \Rightarrow f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = k$$

- D $\int_0^x f(t)dt$ 在点 $x = 0$ 处可导 $\Rightarrow f(0)$ 存在

例题 36.12.

$$\int x \arctan x \cdot \ln(1+x^2) dx$$

解

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \arctan x \cdot \ln(1+x^2) d(x^2+1) \\ &= \frac{1}{2} (x^2+1) \arctan x \ln(x^2+1) - \frac{1}{2} \int (x^2+1) \left[\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{2x \arctan x}{1+x^2} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} (x^2+1) \arctan x \ln(x^2+1) - \frac{1}{2} \int \ln(x^2+1) dx - \int x \arctan x dx \\ &= \frac{1}{2} (x^2+1) \arctan x \ln(x^2+1) - \frac{1}{2} x \ln(x^2+1) + \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx - \frac{1}{2} x^2 \arctan x \\ &= \frac{x^2+1}{2} \arctan x \ln(x^2+1) - \frac{x}{2} \ln(x^2+1) - \frac{x^2}{2} \arctan x + \frac{2}{2} (x - \arctan x) + C \end{aligned}$$

October 7



例题 36.13.

设 $\Gamma = \begin{cases} x = 2\sqrt{1-y^2} \\ z = x + y \end{cases}$ ，从 z 轴正向往负向看去为逆时针，计算曲线积分

$$\int_{\Gamma} \frac{ydx + zd\gamma + xdz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

解

令 $\begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = \sin \theta \\ z = \sin \theta + 2 \cos \theta \\ \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$ 曲线积分：

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta d(2 \cos \theta) + (2 \cos \theta + \sin \theta) d(\sin \theta) + 2 \cos \theta d(2 \cos \theta + \sin \theta)}{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + (2 \cos \theta + \sin \theta)^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 + 6 \cos 2\theta - 3 \sin 2\theta}{3 \cos 2\theta + 2 \sin \theta + 5} d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2 + 6 \cos x - 3 \sin x}{3 \cos x + 2 \sin x + 5} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{A(3 \cos x + 2 \sin x + 5) + B(2 \cos x - 3 \sin x)}{3 \cos x + 2 \sin x + 5} dx \\ &= \frac{1}{4} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{12}{13} dx + \frac{11}{13} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2 \cos x - 3 \sin x}{3 \cos x + 2 \sin x + 5} dx - \frac{34}{13} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{3 \cos x + 2 \sin x + 5} dx \right] \\ &= \frac{6}{13}\pi + 0 - \frac{17}{26} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{3 \cos x + 2 \sin x + 5} dx \\ &= \frac{6}{13}\pi - \frac{17}{26} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t+1)^2 + 3} dt \quad (t = \tan \frac{x}{2}) \\ &= \frac{(36 - 17\sqrt{3})\pi}{78} \end{aligned}$$

例题 36.14.

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是以 T 为最小正周期的连续奇函数，下列函数中不是周期函数的个数：

- A. $\int_a^x f(t)dt$
- B. $\int_{-x}^a f(t)dt$
- C. $\int_{-x}^x t f(t)dt$
- D. $\int_{-x}^x t^2 f(t)dt$

解



$f(x)$ 是周期函数, 且为奇函数 $\begin{cases} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx = 0 \\ \int_0^{x+T} f(t) dt = \int_x^T f(t) dt \end{cases}$

- A. $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

$$\begin{cases} F(x+T) = \int_a^{x+T} f(t) dt \\ F(x+T) - F(x) = \int_x^{x+T} f(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx = 0 \end{cases}$$

- B. $F(x) = \int_{-x}^a f(t) dt$

$$\begin{cases} F(x+T) = \int_{-x-T}^a f(t) dt \\ F(x+T) - F(x) = \int_{-x-T}^{-x} f(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx = 0 \end{cases}$$

- C. $F(x) = \int_{-x}^x t f(t) dt$

$$\begin{cases} F(x+T) = \int_{-x-T}^{x+T} t f(t) dt \\ F(x+T) - F(x) = 2 \int_x^{x+T} t f(t) dt \neq 0 \end{cases}$$

- D. $F(x) = \int_{-x}^x t^2 f(t) dt = 0$

综上所述, 上述函数只有 C 不是周期函数, ABD 均为周期函数.

36.2 Week II

October 8

例题 36.15.

设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布, $X \sim N(1, 3^2)$, $Y \sim N(0, 4^2)$, 且满足 $\rho_{XY} = -\frac{1}{2}$, $Z = \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}$

(1). 求 $E(Z)$ 与 $D(Z)$

(2). 求 ρ_{XZ}

(3). 证明 X 与 Z 是否独立

解



例题 36.16.

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{xy}} dx dy, D = \{(x, y) | (\frac{x}{2} + \frac{y}{4})^2 \leq \frac{x}{6}, x, y \geq 0\}$$

解

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{2}{3}} dx \int_0^{4\sqrt{\frac{x}{6}}-2x} \frac{1}{\sqrt{xy}} dy \\ &= 2 \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{4\sqrt{\frac{x}{6}} - 2x} dx \\ &= 8\sqrt{6} \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{t - 3t^2} dt \quad (t = \sqrt{\frac{x}{6}}) \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \quad (6t - 1 = \sin \theta) \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{3} \end{aligned}$$

注

令

$$\begin{cases} \sqrt{x} = m \\ \sqrt{y} = n \end{cases} \quad D' = \{(m, n) | \frac{(m - \frac{1}{\sqrt{6}})^2}{2} + \frac{n^2}{4} = \frac{1}{12} (m, n > 0)\}$$

雅可比行列式: $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial m} & \frac{\partial x}{\partial n} \\ \frac{\partial y}{\partial m} & \frac{\partial y}{\partial n} \end{vmatrix} = 4mn$

$$dx dy = 4mndmdn \Rightarrow \iint_D \frac{1}{\sqrt{xy}} dx dy = \iint_{D'} 4dm dn$$

$$I = 4S_{D'} = 2ab\pi = 2\pi \times \frac{1}{\sqrt{6}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}$$

October 9

例题 36.17.

$$\int \frac{\sqrt{x-1} \arctan \sqrt{x-1}}{x} dx$$

解



令 $\begin{cases} \sqrt{x-1} = t \\ x = t^2 + 1 \\ dx = 2tdt \end{cases}$ 不定积分:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2t^2 \arctan t}{t^2 + 1} dt \\ &= 2 \int \arctan t dt - 2 \int \frac{\arctan t}{1+t^2} dt \\ &= 2t \arctan t - \ln(1+t^2) - (\arctan t)^2 \\ &= 2\sqrt{x-1} \arctan \sqrt{x-1} - \ln x - (\arctan \sqrt{x-1})^2 + C \end{aligned}$$

例题 36.18.

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足 $f(x) = f(x - \pi) + \sin x$, 且 $f(x) = x, x \in [0, \pi]$, 求

$$\int_{\pi}^{3\pi} f(x) dx$$

解

$$\begin{cases} f(x) = f(x - \pi) + \sin x, & x \in \mathbb{R} \\ f(x) = x, & x \in [0, \pi] \end{cases} \Rightarrow f(x) = x + \sin x - \pi, x \in [\pi, 2\pi)$$

我们有:

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{3\pi} f(x) dx &= \int_{\pi}^{3\pi} [f(x - \pi) + \sin x] dx \\ &= \int_{\pi}^{3\pi} f(x - \pi) dx \\ &= \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ &= \int_0^{\pi} x dx + \int_{\pi}^{2\pi} [x + \sin x - \pi] dx \\ &= \pi^2 - 2 \end{aligned}$$

October 10**例题 36.19.**

$$\int \frac{\cos^3 x - 2 \cos x}{1 + \sin^2 x + \sin^4 x} dx$$

解

令 $t = \sin x$ 不定积分为:

$$\begin{aligned} I &= - \int \frac{t^2 + 1}{1 + t^2 + t^4} dt \\ &= - \int \frac{1 + \frac{1}{t^2}}{1 + t^2 + \frac{1}{t^2}} dt \\ &= - \int \frac{d(t - \frac{1}{t})}{(t - \frac{1}{t})^2 + 3} \\ &= - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{t - \frac{1}{t}}{\sqrt{3}}\right) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\cos^2 x}{\sqrt{3} \sin x}\right) dx + C \end{aligned}$$

例题 36.20.

下列积分中, 与积分 $I = \int_0^1 \frac{1}{2} x e^{-\sqrt{x}} dx$ 值最接近的是

- A. $\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx$
- B. $\int_0^1 x e^{-x} dx$
- C. $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$
- D. $\int_0^1 x^4 e^{-x} dx$

解

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{1}{2} x e^{-\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 t^3 e^{-t} dt \\ &= \int_0^1 x^3 e^{-x} dx \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx > \int_0^1 x e^{-x} dx > \int_0^1 x^2 e^{-x} dx > \int_0^1 x^3 e^{-x} dx > \int_0^1 x^4 e^{-x} dx$$

$$\begin{cases} x^2 - x^3 > x^3 - x^4 \\ \int_0^1 (x^2 - x^3) e^{-x} dx > \int_0^1 (x^3 - x^4) e^{-x} dx \end{cases}$$

综上所述, 与积分 I 最近接的是 $\int_0^1 x^4 e^{-x} dx$

October 11



例题 36.21.

$$f(x) = \frac{(\sqrt[n]{x} - 1)^n}{x + 1}, \text{求 } f^{(n)}(1) (n \geq 2)$$

解

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x - 1)^n} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[n]{x} - 1)^n}{(x - 1)^n} = \frac{1}{2n^n}$$

$f(x)$ 在 $x = 1$ 处泰勒展开式:

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (x - 1)^k + o[(x - 1)^n]$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x - 1)^n} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (x - 1)^k + o[(x - 1)^n]}{(x - 1)^n}$$

上述极限存在, 我们可以得到: $f^{(k)} = 0 (k = 1, 2, \dots, n - 1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x - 1)^n} = \frac{f^{(n)}(1)}{n!} \Rightarrow f^{(n)}(1) = \frac{n!}{2n^n}$$

例题 36.22.

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶导数连续, $f(1) = f'(1) = 0$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 证明:

$$(1). \iint_D f(x) dx dy = \iint_D x^2 y f''(x) dx dy$$

$$(2). \exists \xi, \eta \in (0, 1), s.t. \xi^2 f''(\xi) = 2f'(\eta)(\xi - 1)$$

解

(1).

$$\begin{aligned} \text{Left} &= \iint_D f(x) dx dy \\ &= \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 dy \\ &= \int_0^1 f(x) dx \\ &= xf(x)|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 xf'(x) dx \\ &= - \int_0^1 xf'(x) dx \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{Right} &= \iint_D x^2 y f''(x) dx dy \\
 &= \int_0^1 x^2 f''(x) dx \int_0^1 y dy \\
 &= \int_0^1 \frac{x^2}{2} df'(x) \\
 &= \frac{x^2}{2} f'(x) \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 x f'(x) dx \\
 &= - \int_0^1 x f'(x) dx
 \end{aligned}$$

综上所述, Left = Right $\Rightarrow \iint_D f(x) dx dy = \iint_D x^2 y f''(x) dx dy$
 (2).

构造辅助函数 $g(x) = \int_0^x t^2 f''(t) dt - 2f(t)$, $g(0) = g(1) = 0$

罗尔定理:

$$\exists \xi \in (0, 1), s.t. g'(\xi) = 0 \Rightarrow \xi^2 f''(\xi) - 2f(\xi) = 0$$

拉格朗日中值定理:

$$\exists \eta \in (\xi, 1), s.t. f(\xi) - f(1) = f'(\eta)(\xi - 1)$$

综上所述, 我们得到: $\exists \xi, \eta \in (0, 1), s.t. \xi^2 f''(\xi) = 2f'(\eta)(\xi - 1)$

October 12

例题 36.23.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x \left(\arctan e^x + \int_0^x e^{t^2} dt \right)}{1 + \cos^2 x} dx$$

解

$$f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt, f(-x) = -f(x)$$



$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x \arctan e^x}{1 + \cos^2 x} dx \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x \arctan e^{-x}}{1 + \cos^2 x} dx \\
 2I &= \pi \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \\
 &= \pi \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \\
 4I &= \pi^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx \\
 4I &= \frac{\pi^3}{2} \\
 I &= \frac{\pi^3}{8}
 \end{aligned}$$

例题 36.24.

若 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(ax)}{x^n} dx$ 收敛, 求 n 的取值范围

解

暇点为 $x = 0$ 和 $x = +\infty$

$$(1). x = 0 \frac{\arctan(ax)}{x^n} \sim ax^{1-n} \text{ 收敛} \Rightarrow 1 - n > -1 \Rightarrow n < 2$$

$$(2). x = +\infty \frac{\arctan(ax)}{x^n} \sim \frac{\pi}{2} x^{-n} \text{ 收敛} \Rightarrow -n < -1 \Rightarrow n > 1$$

综上所述, $n \in (1, 2)$

October 13**例题 36.25.**

设 $0 < a < 1$, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin ax}{\sin x} dx$, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan ax}{\tan x} dx$, 比较 I_1 , I_2 和 $\frac{\pi a}{4}$ 的大小

解

构造辅助函数:

$$\begin{cases} f(x) = \sin(ax) - a \sin x, & f(0) = 0 \\ g(x) = \tan(ax) - a \tan x, & g(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = a[\cos(ax) - \cos x] > 0 \\ g'(x) = \frac{a[\cos^2 x - \cos^2(ax)]}{\cos^2 x \cos^2(ax)} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{\sin x} > a \\ \frac{\tan(ax)}{\tan x} < a \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 > \frac{\pi a}{4} \\ I_2 < \frac{\pi a}{4} \end{cases} \Rightarrow I_2 < \frac{\pi a}{4} < I_1$$



例题 36.26.

$$\iint_D \frac{\tan^3 x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$$

其中 $D = \{(x, y) | y \geq |x|, (x^2 + y^2)^3 \leq y^4\}$

解 D 关于 $x = 0$ 对称, 且 $f(x, y) = \frac{\tan^3 x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 满足 $f(x, y) = -f(-x, y)$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 0$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin \theta d\theta \int_0^{\sin^2 \theta} r dr \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^5 \theta d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta d\theta \\ &= \frac{43\sqrt{2}}{120} \end{aligned}$$

October 14

例题 36.27.

已知 $\int_1^{+\infty} \left(\frac{2x^2 + bx + a}{2x^2 + ax} - 1 \right) dx = 0$, 求 a, b

解

$$\int_1^{+\infty} \frac{(b-a)x + a}{2x^2 + ax} dx = 0 \text{ 收敛}$$

(1). $x = +\infty$, 假设 $a \neq b \Rightarrow \frac{(b-a)x + a}{2x^2 + ax} \sim \frac{1}{x}$ 发散, 我们得到: $a = b$

原积分等价于:

$$\int_1^{+\infty} \frac{a}{2x^2 + ax} dx = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{2x+a} \right) dx = 0 \Rightarrow \ln \left| \frac{x}{2x+a} \right|_{x=1}^{x=+\infty} = 0 \Rightarrow a = 0$$

例题 36.28.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{\ln(n+k)}{n + \frac{1}{k}} - \ln n \right]$$



解

夹逼准则:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\ln(n+k)}{n+1} - \ln n < I < \sum_{k=1}^n \frac{\ln(n+k)}{n} - \ln n$$

$$\begin{aligned}\text{Left} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\ln(n+k)}{n+1} - \ln n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [\ln(n+k) - \ln n] - \frac{\ln n}{n+1} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{k}{n}) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n+1} \\ &= \int_0^1 \ln(1+x) dx \\ &= 2 \ln 2 - 1 \\ \text{Right} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\ln(n+k)}{n} - \ln n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [\ln(n+k) - \ln n] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{k}{n}) \\ &= \int_0^1 \ln(1+x) dx \\ &= 2 \ln 2 - 1\end{aligned}$$

综上所述, 极限 $I = 2 \ln 2 - 1$

36.3 Week III

October 15

例题 36.29.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^4)}$$

解

倒代换:



$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{t^4}{(1+t^2)(1+t^4)} dt \\ 2I &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{\pi}{2} \\ I &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

例题 36.30.

设随机变量 $Y = \min\{|X|, 1\}$, 其中 X 为随机变量, 且密度函数为 $f(x) = \frac{k}{1+x^2}$ ($x \in \mathbb{R}, k \equiv C$), 下列说法不正确的是:

- A. $k = \frac{1}{\pi}$
- B. $E(X) = 0$
- C. Y 没有概率密度
- D. $E(Y) = \frac{\ln(2e^{\frac{\pi}{2}})}{\pi}$

解

October 16

例题 36.31.

求 $y = e^{-x} \sqrt{\sin x}$ ($0 \leq x < +\infty$) 绕 x 轴旋转一周的旋转体体积

解

我们可以得到:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{+\infty} \pi y^2 dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \pi e^{-2x} \sin x dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} A(1 + e^{-4\pi} + e^{-8\pi} + \cdots + e^{-4n\pi}) \\ &= \frac{A\pi}{1 - e^{-4\pi}} \\ A &= \int_0^\pi e^{-2x} \sin x dx = \frac{e^{-2\pi} + 1}{5} \\ V &= \frac{e^{-2\pi} + 1}{5(1 - e^{-4\pi})} = \frac{e^{2\pi}\pi}{5(e^{2\pi} - 1)} \end{aligned}$$

例题 36.32.

已知 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx$ 收敛, 求 α 的取值范围



解

原积分可能存在的瑕点为 $x = 0, x = +\infty$

$$(1). x = 0 \text{ 时}, \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} \sim x^{1-\alpha} \text{ 收敛} \Rightarrow 1 - \alpha > -1 \Rightarrow \alpha < 2$$

$$(2). x = +\infty \text{ 时}, \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} \sim x^{-\alpha} \text{ 收敛} \Rightarrow -\alpha < -1 \Rightarrow \alpha > 1$$

我们得到: $\alpha \in (1, 2)$

October 17

例题 36.33.

设随机变量 X, Y 相互独立, 且 $X \sim N(0, 1), Y \sim B(n, p), 0 < p < 1$, 且 $X + Y$ 的分布函数:

- A. 是连续函数
- B. 恰有 $n + 1$ 个间断点
- C. 恰有 1 个间断点
- D. 有无穷个间断点

解

例题 36.34.

微分方程 $\cos^4 x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \cos^2 x (1 - \sin x \cos x) \frac{dy}{dx} + y = e^{-\tan x}$, 求该微分方程在 $t = \tan x$ 变换下所得的 y 对 t 的微分方程, 并求出其通解

解

我们可以得到:

$$\begin{cases} t = \tan x \\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{(1+t^2)dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \frac{dy}{dx} = \frac{(1+t^2)^2 d^2y}{dt^2} - \frac{2t(1+t^2)dy}{dt} \end{cases}$$

我们可以得到原微分方程等价于:

$$\frac{d^2y}{(1+t^2)^2 dx^2} + \frac{2dy}{(1+t^2)dx} - \frac{2tdy}{(1+t^2)^2 dx} + y = e^{-t}$$

我们可以得到:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = e^{-t} \Rightarrow y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{-t}$$

我们得到特征方程: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$

$$\text{我们可以得到: } y = (C_1x + C_2)e^{-x} + y^* \Rightarrow y^* = Ax^2e^{-x} \Rightarrow y^* = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$$



综上所述, 微分方程的通解为: $y = (C_1x + C_2)e^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x}$

October 18

例题 36.35.

$$\iint_D \arcsin(2\sqrt{x-x^2}) dx dy, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

解

原二重积分可化为:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x \arcsin(2\sqrt{x-x^2}) dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arcsin(\cos \theta) \cos \theta (\sin \theta + 1)}{4} d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arcsin(\cos \theta) \cos \theta}{4} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cos \theta d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta d \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

例题 36.36.

设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+1} - x^2}{x^n + 1}, F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 下列说法正确的是:

- A. $f(x)$ 有 1 个间断点, $F(x)$ 有 1 个不可导点
- B. $f(x)$ 有 1 个间断点, $F(x)$ 有 2 个不可导点
- C. $f(x)$ 有 2 个间断点, $F(x)$ 有 1 个不可导点
- D. $f(x)$ 有 2 个间断点, $F(x)$ 有 2 个不可导点

解

$$\text{我们可以得到: } f(x) = \begin{cases} x, & x < -1 \\ -x^2, & -1 < x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $x = -1$ 处无定义, $x = -1$ 是可去间断点, $x = 1$ 是跳跃间断点.

$F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 处处连续, 仅在 $x = 1$ 处不可导.

October 19



例题 36.37.

$x \geq 0$, 连续函数 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 非负, 且满足方程 $\int_0^{x^2} f(t^2) f(t) dt = \frac{1}{2}(\sqrt{1+x^2} - 1), F(0) = 0$, 求 $f(x)$

解

我们设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 我们令 $x^2 = u$, 我们得到:

$$f(u) \int_0^u f(t) dt = \frac{1}{2}(\sqrt{1+u} - 1) \Rightarrow F'(x)F(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{1+x} - 1) \Rightarrow \frac{1}{2}[F^2(x)]' = \frac{1}{2}(\sqrt{1+x} - 1)$$

我们得到:

$$F^2(x) = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - x + C, F(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} F(x) = \sqrt{\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - x - \frac{2}{3}} \\ f'(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{2\sqrt{\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - x - \frac{2}{3}}} \end{cases}$$

例题 36.38.

证明:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

解

我们有:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)} + \cdots$$

$$\text{我们有: } f(x) = \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)} + \cdots$$

我们知道 $f(x)$ 有零点 $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots \Rightarrow f(x) = A(x - \pi)(x + \pi)(x - 2\pi)(x + 2\pi) \cdots$

我们有:

$$f(x) = A(x^2 - \pi^2)(x^2 - 4\pi^2) \cdots, \text{令 } x = 0, \text{我们有: } A(-\pi^2)(-4\pi^2) \cdots = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{(-\pi^2)(-4\pi^2) \cdots}$$

我们有:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)} + \cdots \\ (1 - \frac{x^2}{\pi^2})(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}) \cdots \end{cases} \Rightarrow x^2 \text{项系数相等} \Rightarrow -\frac{1}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{n^2 \pi^2}\right)$$

$$\text{我们可以得到: } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

October 20



例题 36.39.

设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上有连续的一阶导数, $f'(x) = \frac{1}{1+f^2(x)} \left[\sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})} \right]$, 证明:
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在

解

我们由: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - f(1) = \int_1^{+\infty} f'(x) dx \Rightarrow$ 我们只需要证明: $\int_1^{+\infty} f'(x) dx$ 收敛
 我们有:

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} f'(x) dx &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+f^2(x)} \left[\sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})} \right] dx \\ &\leq \int_1^{+\infty} \left[\sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})} \right] dx\end{aligned}$$

我们由拉格朗日中值定理得到:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \left(\frac{1}{x} - \ln(1+\frac{1}{x}) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{4}$$

我们由比较判别法可以得到: $\begin{cases} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \text{ 收敛}, p > 1 \\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} dx \text{ 收敛} \end{cases}$

综上所述, 我们得到: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在

例题 36.40.

函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 1$ 且满足等式:

$$f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1} \int_0^x f(t) dt = 0$$

(1). 求 $f'(x)$

(2). 证明: $x \geq 0, e^{-x} \leq f(x) \leq 1$

解

(1). 我们可以得到:

$$(x+1)f'(x) + (x+1)f(x) - \int_0^x f(t) dt = 0$$

我们对上式子求导可以得到:

$$(x+1)f''(x) + (x+2)f''(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x+1)e^x f'(x) = C \\ f'(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{(1+x)e^x}$$



(2). 我们有:

$$\begin{cases} F(x) = f(x) - 1 \\ G(x) = f(x) - e^{-x} \end{cases} \quad \Downarrow$$

$$\begin{cases} F'(x) = f'(x) = -\frac{1}{(1+x)e^x} < 0 \\ F(0) = 0 \\ G'(x) = f'(x) + e^{-x} = \frac{x}{(1+x)e^x} > 0 \\ G(0) = 0 \end{cases} \quad \Downarrow$$

$$\begin{cases} F(x) \text{ 单调递减} \\ F(x) \leq F(0) = 1 \\ G(x) \text{ 单调递增} \\ G(x) \geq G(0) \Rightarrow f(x) \geq e^{-x} \end{cases}$$

October 21

例题 36.41.

设 $f(x) = \int_{-1}^x (1 - |t|) dt (x \geq -1)$, 求曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴所围成的面积

解

我们可以得到 $f(x)$ 表达式:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)^2}{2}, & x \in [-1, 0] \\ \frac{2x - x^2 + 1}{2}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

我们可以得到:

$$S = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^{1+\sqrt{2}} f(x) dx = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} + \frac{2\sqrt{2}}{3} = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

例题 36.42.

设函数 $f(x)$ 连续, $f'(0)$ 存在, $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}$, 且 $f'(0) = \frac{1}{2}$, 求 $f(x)$

解

$$\text{我们有: } f(0) = \frac{2f(0)}{1-4f^2(0)} \Rightarrow f(0) = 0$$



我们利用导数定义:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) + f(\Delta x)}{1 - 4f(x)f(\Delta x)} - f(x)}{\Delta x} \\ &= (1 + 4f^2(x)) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta} \\ &= \frac{1 + 4f^2(x)}{2} \end{aligned}$$

我们可以得到微分方程的解:

$$\arctan[2f(x)] = x + C, f(0) = 0 \rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \tan x$$

36.4 Week IV

October 22

例题 36.43.

设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上具有二阶连续导数, $f(0) = f'(0) = 0, f''(0) = 1, \forall x > 0, u(x)$ 表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x, f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列等价无穷小不成立的是:

- A. $f(x) \sim \frac{x^2}{2}$
- B. $x \cdot f(u(x)) \sim \frac{u(x) \cdot f(x)}{2}$
- C. $\int_0^x u(t)dt \sim \frac{x^2}{4}$
- D. $\int_0^{f(x)} u(t)dt \sim \frac{x^4}{4}$

解

我们求出 $f(x)$ 在 $(x, f(x))$ 处的切线方程: $y - f(x) = f'(x)(x' - x)$

我们有:

$$u(x) = x' = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

我们利用泰勒展开式, 将 $f(x)$ 展开:

$$\begin{cases} f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) \\ f'(x) = f'(0) + f''(0)x + o(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\ f'(x) = x + o(x) \end{cases}$$

当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $f(x) \sim \frac{1}{2}x^2, u(x) \sim \frac{1}{2}x$



我们得到:

$$\begin{cases} x \cdot f(u(x)) \sim \frac{u(x) \cdot f(x)}{2} \\ \int_0^x u(t) dt \sim \frac{x^2}{4} \\ \int_0^{f(x)} u(t) dt \sim \frac{x^4}{16} \end{cases}$$

例题 36.44.

比较 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$ 的大小

解

我们不妨设: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} dx, J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$, 我们有:

$$\begin{aligned} I - J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{1+x^2} dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{1+(t+\frac{\pi}{4})^2} dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\sin t}{1+(t+\frac{\pi}{4})^2} dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{1+(t+\frac{\pi}{4})^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t \left[\frac{1}{1+(t+\frac{\pi}{4})^2} - \frac{1}{1+(\frac{\pi}{4}-t)^2} \right] dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\pi t \sin t}{[1+(t+\frac{\pi}{4})^2][1+(\frac{\pi}{4}-t)^2]} dt < 0 \end{aligned}$$

October 23

例题 36.45.

求曲线 $y = \frac{x^2}{1+x^2}$ 与其渐近线所围区域绕该渐近线旋转所得旋转体体积

解

我们可以得到 $f(x)$ 的渐近线为 $y = 1$, 因此我们有:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$



例题 36.46.

设 A 是 n 阶矩阵, A 的第 i 行第 j 列元素为 a_{ij} , 满足 $a_{ij} = i \cdot j$, 下列命题正确的是:

- A. $r(A) = 1$
- B. 矩阵 A 不可相似对角化
- C. 矩阵 A 的特征值之和为 $\sum_{k=1}^n k$
- D. 矩阵 A 的特征值之和为 $\sum_{k=1}^n k^2$

解

我们由: $a_{ij} = i \cdot j \rightarrow a_{ij} = a_{ji} = i \cdot j$, 即矩阵 A 为实对称矩阵, A 一定可以相似对角化

我们可以得到: $|A| \neq 0 \rightarrow r(A) = n$ 且矩阵 A 的特征值之和为 $\sum_{i=1}^n i^2$

October 24

例题 36.47.

$$\iint_D \frac{1}{x^4 + y^2} dx dy, D = \{(x, y) | y \geq x^2 + 1\}$$

解

原二重积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{x^2+1}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + y^2} dy \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \arctan\left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right) dx \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{t^2 + 1}\right) dt \\ &= \end{aligned}$$

例题 36.48.

$$\iint_D \frac{1}{x^4 + y^2} dx dy, D = \{(x, y) | x \geq 1, y \geq x^2\}$$

解

原二重积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{+\infty} dx \int_{x^2}^{+\infty} \frac{1}{x^4 + y^2} dy \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{\pi}{4x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$



October 25

例题 36.49.

曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = mx (m > 0)$ 在第一象限内所围成的图形绕该直线旋转所形成的旋转体的体积 V

解

我们设围成区域中任意一点 (x, y) , 我们有: $d = \frac{mx - y}{\sqrt{1 + m^2}}$

$$\begin{aligned} V &= \iint_S 2\pi d dx dy \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{1 + m^2}} \int_0^m dx \int_{x^2}^{mx} (mx - y) dy \\ &= \frac{\pi m^5}{30\sqrt{1 + m^2}} \end{aligned}$$

例题 36.50.

设函数 $f(x, y) = \begin{cases} (xy + a|x| + b\sqrt{|y|}) \arctan \frac{1}{|x| + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, 下列说法中正确的是:

- A. $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处的连续性和 a, b 的取值有关
- B. $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处偏导数存在的充要条件是 $ab = 0$
- C. $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微的充要条件是 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处偏导数存在
- D. $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极值点

解

October 26

例题 36.51.

设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f'(x) + f^2(x) \geq 0$, $f(0) = 1$, $f(x) \neq 0$, 证明: $f(x) \geq \frac{1}{x+1}$

解**例题 36.52.**

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $\int_0^1 f(x) dx = 0$

- A. 当 $f'(x) < 0$ 时, $f(\frac{1}{2}) < 0$



- B. 当 $f''(x) < 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$
- C. 当 $f'(x) > 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$
- D. 当 $f''(x) > 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

解

October 27

例题 36.53.

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{求曲线 } y = f(x) \text{ 在 } (-1, 2) \text{ 内存在水平切线的条数}$$

解

例题 36.54.

已知正值连续函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调减少, $\forall a, b (0 < a < b < 1)$, 下列结论不正确的是

- A. $a \int_0^b f(x) dx > b \int_0^a f(x) dx$
- B. $b \int_0^a f(x) dx > a \int_0^b f(x) dx$
- C. $a \int_0^b \sqrt{f(x)} dx < b \int_0^a \sqrt{f(x)} dx$
- D. $b \int_0^a \sqrt{f(x)} dx < a \int_0^b \sqrt{f(x)} dx$

解

October 28

例题 36.55.

设函数 $\varphi(x, y)$ 的全微分为 $dz = (2x - y^2 - 2y)dx + (-2xy - 2x + y^3 + 3y)dy$, $f(x, y)$ 连续, 且

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)} = -1$$

- A. 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极大值点
- B. 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值点
- C. 点 $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点
- D. 不能确定点 $(0, 0)$ 是否为 $f(x, y)$ 的极值点

解



例题 36.56.

求 $\int_L \frac{|y|}{x^2 + y^2 + z^2} ds$, 其中 $L : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = 2ax \quad (a > 0) \\ z \geq 0 \end{cases}$

解

October 29

例题 36.57.

设 $I_1 = \int_0^\pi \frac{x \sin^2 x}{1 + e^{\cos^2 x}} dx, I_2 = \int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{1 + e^{\cos^2 x}} dx, I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 + e^{\sin^2 x}} dx$, 比较 I_1, I_2, I_3 的大小

解

例题 36.58.

设 $f(u, v)$ 有一阶偏导数, $f(x, 1-x) = 1, f'_1(x, 1-x) = x$

(1). 设 $z(t) = f(\cos t, \sin t)$, 计算 $z'(0)$

(2). 证明: $f(u, v)$ 在单位圆周上至少存在两个不同的点满足方程: $v \frac{\partial f}{\partial u} = u \frac{\partial f}{\partial v}$

解

October 30

例题 36.59.

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续可导, $\int_0^1 f(x) dx = \frac{5}{2}, \int_0^1 x f(x) dx = \frac{3}{2}$, 证明: $\exists \xi \in (0, 1), s.t. f'(\xi) = 3$

解

例题 36.60.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^3 x)(1 - \cos^{17} x)}{\frac{x^2}{2} - \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)!} t^{2n+1} dt}$$

解

October 31



例题 36.61.

设偶函数 $f(t)$ 具有连续的导函数, 且满足 $f(t) = e^{4\pi t^2} + \iint_{x^2+y^2 \leq 4t^2} f\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\right) dx dy$, 求方程

$$\int_0^x \sqrt{1+4\pi t^2} dt + \int_{\cos x}^0 \frac{1+4\pi t^2}{f(t)} dt = 0 \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 内根的个数}$$

解

例题 36.62.

设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(0) = f(2) = 0, f(1) = a > 0$ 且 $f''(x) < 0$

- A. $\int_0^2 f(x) dx > a$
- B. $\int_0^2 f(x) dx < a$
- C. $\int_0^1 f(x) dx > \int_1^2 f(x) dx$
- D. $\int_0^1 f(x) dx < \int_1^2 f(x) dx$

解





第 37 章 November

37.1 Week I

November 1

例题 37.1.

设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 \sin x}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点处

- A. 不连续
- B. 连续但不可导
- C. 可导但不可微
- D. 可微

解

例题 37.2.

$$\iint_D \frac{1 - x^3 y^2}{(y + 2\sqrt{1 - x^2})^2} dx dy$$

其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, -y \leq x \leq y\}$

解

November 2



例题 37.3.

$$\iiint_{\Omega} (mx + ly + nz)^2 dv$$

其中 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 (a > 0)\}$

解

例题 37.4.

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上导函数连续, $f'(a) = f'(b)$, 证明:

$$\exists \xi \in (a, b), \text{ s.t. } f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}$$

解

November 3

例题 37.5.

下列函数在 $(0, 0)$ 点可微的是:

- A. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
- B. $g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
- C. $\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
- D. $\psi(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

解

例题 37.6.

已知 $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-c) = k$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$



解

November 4

例题 37.7.

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_{x+y}^1 \frac{\sin z}{z} dz$$

解

例题 37.8.

已知函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点的某邻域内有定义, 则 $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} f'_x(x, 0) = f'_x(0, 0) \\ \lim_{y \rightarrow 0} f'_y(0, y) = f'_y(0, 0) \end{cases}$ 和 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微关系

解

November 5

例题 37.9.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$$

 A 是 n 阶可逆矩阵 ($b \neq 0$), 求 A^{-1}

解

例题 37.10.

求微分方程 $y'' + (4x + e^{2y})(y')^3 = 0$ 的通解, 其中 $y' \neq 0$

解

November 6

例题 37.11.

设 $f(x)$ 二阶可导, $f^2(x) - f^2(y) = f(x+y) - f(x-y)$ (1) 证明: $f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$ (2) 若 $f''(1) = f(1) = 1$, 求 $f(x)$ 

解

例题 37.12.

$$z = \frac{x \cos(y-1) - (y-1) \cos x}{1 + \sin x + \sin(y-1)}$$

求 $\frac{\partial z}{\partial y}|_{(0,1)}$

解

November 7

例题 37.13.

已知 A 是正交矩阵, $A^* = A^T$ 和 $|A| = 1$ 关系

解

例题 37.14.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \sqrt{i}} \right)$$

解

37.2 Week II

November 8

例题 37.15.

已知 $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, 求 $f''_{xy}(0, 0) \cdot f''_{yx}(0, 0)$

解

例题 37.16.

设矩阵 $A = (a_{ij})$ 满足 $a_{ij} = A_{ij}$, $a_{11} = -1$, 求 $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的解



解

November 9

例题 37.17.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{\sqrt{x^3}} dx$$

解

例题 37.18.

方程 $x = e^{\sin^n x}$ ($n = 1, 2, \dots$)(1). 证明方程在 $(\frac{\pi}{2}, e)$ 内有唯一实数根(2). 计算 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin x_n}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n - \frac{\pi}{2}}}$

解

November 10

例题 37.19.

若 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$, $\begin{cases} z = \sin y & x = 0 \\ z = \sin x & y = 0 \end{cases}$, 求 $z(x, y)$

解

例题 37.20.

设矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ 满秩, 直线 $l_1 : \frac{x - a_1}{a_1 - a_2} = \frac{y - b_1}{b_1 - b_2} = \frac{z - c_1}{c_1 - c_2}$ 与直线 $l_2 : \frac{x - a_1}{a_2 - a_3} = \frac{y - b_1}{b_2 - b_3} = \frac{z - c_1}{c_2 - c_3}$ 关系

解

November 11



例题 37.21.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求 A^n

解

例题 37.22.

求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{(n+1)!} x^n$ 的和函数 $S(x)$

解

November 12

例题 37.23.

设可微函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial x} = -f(x, y)$, $f(0, \frac{\pi}{2}) = 1$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(0, y + \frac{1}{n})}{f(0, y)} \right]^n = e^{\cot y}$, 求 $f(x, y)$

解

例题 37.24.

 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 可微, $|f'(x)| < k f(x)$ ($0 < k < 1$)(1). $\exists \xi \in (-\infty, +\infty)$, s.t. $\ln f(\xi) = \xi$ (2). 设 $a_n = \ln f(a_{n-1})$ ($n = 1, 2, \dots$), 证明 $\{a_n\}$ 收敛

解

November 13

例题 37.25.

设 $f(x)$ 有连续一阶导数, $[xy - yf(x)]dx + [f(x) + y^2]dy = du(x, y)$, 且 $f(0) = -1$, 求 $u(x, y)$

解



例题 37.26.

$$(1). \int_0^{\ln 2} dy \int_{e^y}^2 \frac{e^{xy}}{x^x - 1} dx$$

$$(2). \int_0^1 dx \int_x^1 y dy \int_y^1 \sqrt{1+z^4} dz$$

解

November 14

例题 37.27.

$f(x)$ 在 $x = 0$ 处 $n+1$ 阶可导, $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0, f^{(n)}(0) = a$, 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^x - 1) - f(x)}{x^{n+1}}$$

解

例题 37.28.

函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z} + \frac{xyz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} = 1$ 确定, 求 $dz|_{(0,0)}$

解

37.3 Week III

November 15

例题 37.29.

设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有一阶连续导数

$$\forall \Sigma \in \mathbb{R}^3 (x > 0), \iint_{\Sigma} e^{-x} f(x) dy dz + y \sqrt{e^x - 1} f^2(x) dz dx = 0$$

求 $f(x)$

解

例题 37.30.

设 $f(t)$ 在 $[t, +\infty)$ 上有连续二阶导数, 且 $f(1) = 0, f'(1) = 1, z = (x^2 + y^2)f(x^2 + y^2)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, 求 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最大值



解

November 16

例题 37.31.

设 $u = f(x, y, z)$, $z = z(x, y)$ 是由方程 $\varphi(x + y, z) = 1$ 所确定的隐函数, 其中 f 和 φ 有二阶连续偏导数且 $\varphi_2 \neq 0$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, du , $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

解

例题 37.32.

设函数 $z = z(x, y)$ 的微分 $dz = (2x + 12y)dx + (12x + 4y)dy$ 且 $z(0, 0) = 0$, 求函数 $z = z(x, y)$ 在 $4x^2 + y^2 \leq 25$ 上的最大值

解

November 17

例题 37.33.

求累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) \rho d\rho$ 的等价形式

解

例题 37.34.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} \rho^2 d\rho + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy$$

解

November 18

例题 37.35.

$$\int_0^1 dy \int_y^1 \sqrt{2xy - y^2} dx$$

解

例题 37.36.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{2} - 1}{\sqrt[2n]{2n+1}} \left[\int_1^{\frac{1}{2^n}} e^{-y^2} dy + \int_1^{\frac{3}{2^n}} e^{-y^2} dy + \cdots + \int_1^{\frac{2n-1}{2^n}} e^{-y^2} dy \right]$$



解

November 19

例题 37.37.

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

其中 $D = [0, 1] \times [0, 1]$

解

例题 37.38.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{2 \sin \theta} [\sin \theta + \cos \theta \sqrt{1 + r^2 \sin^2 \theta}] r^2 dr$$

解

November 20

例题 37.39.

$$\begin{cases} I_1 = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma \\ I_2 = \iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma \\ I_3 = \iint_D (1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}) d\sigma \end{cases}$$

其中 $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq \frac{\pi}{2}\}$, 比较 I_1, I_2, I_3 的大小

解

例题 37.40.

$$\begin{cases} I_1 = \iint_D (2x^2 + \tan(xy^2)) dx dy \\ I_2 = \iint_D (x^2 y + 2 \tan(y^2)) dx dy \\ I_3 = \iint_D (|xy| + y^2) dx dy \end{cases}$$

其中 $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\}$, 比较 I_1, I_2, I_3 的大小

解

November 21



例题 37.41.

可微函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(x)dx$, 且 $f(0) = 1$, 求 $f(x)$

解

例题 37.42.

设 $f(x)$ 是可导函数, 且 $f(0) = 0, g(x) = \int_0^1 xf(tx)dt$ 满足方程 $f'(x) + g'(x) = x$, 则由曲线 $y = f(x), y = e^{-x}$ 及直线 $x = 0, x = 2$ 围成的平面图形的面积

解

37.4 Week IV

November 22

例题 37.43.

设函数 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f'(x) = f(1-x), f(0) = 1$, 求 $f(x)$

解

例题 37.44.

设函数 $f(x)$ 连续, $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + f(x)]^{\frac{1}{x^4}} = a (a > 0)$, 且

$$\forall x, h \in \mathbb{R}, f(x+h) = \int_x^{x+h} t [f(t+h) + t^2] dt + f(x)$$

求 $f(x)$ 表达式和常数 a

解

November 23

例题 37.45.

设 $f(x)$ 为 $[0, +\infty)$ 上的正值连续函数, 已知曲线 $y = \int_0^x f(u)du$ 和 x 轴及直线 $x = t (t > 0)$ 所围成区域绕 y 轴旋转所得体积与曲线 $y = f(x)$ 和两坐标轴及直线 $x = t (t > 0)$ 所围区域的面积之和为 t^2 , 求曲线 $y = f(x)$ 的方程

解



例题 37.46.

下列级数收敛的是:

- A. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$
- B. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n2^n}\right)$
- C. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n n^2 + e^n}{ne^n}$
- D. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^n}{3^n - 2^n}$

解

November 24

例题 37.47.

下列级数条件收敛的是:

- A. $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$
- B. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
- C. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n [(-1)^n + \ln n]}{n}$
- D. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$

解**例题 37.48.**

讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}$ 收敛性

解

November 25

例题 37.49.

已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$ 条件收敛, 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n^2$ 的收敛性

解

例题 37.50.

已知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则下列级数一定收敛的是:

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n}$
- B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$
- C. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$
- D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^3 + a_n^2}$

解

November 26

例题 37.51.

已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 下列四个级数一定收敛的个数:

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$
- B. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$
- C. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} - a_{2n-1})$
- D. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}^2 - a_n^2)$

解**例题 37.52.**

设 a_n 为曲线 $y = \sin x$, $(0 \leq x \leq n\pi)$ 与 x 轴所围区域绕 x 轴旋转所得到旋转体的体积, 求级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^2}{2a_{n+1}}$ 的和

解

November 27

例题 37.53.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{nt^{n-1}}{1 + e^{xt}} dt$$

求 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$



解

例题 37.54.

证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 收敛并求其和

解

November 28

例题 37.55.

设 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$, 其中 n 为正整数

(1). 若 $n \geq 2$, 计算 $I_n + I_{n-2}$

(2). 设 p 为实数, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n I_n^p$ 的绝对收敛性和条件收敛性

解

例题 37.56.

设幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{x^{2n+2}}{n+1}$

(1). 求该幂级数的收敛区间以及和函数

(2). 求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!} \frac{1}{n+1}$ 的和

(3). $2f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1 = \frac{\pi^2}{8} - 1$

解

November 29

例题 37.57.

设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续可微, λ 为实数, 证明: 当且仅当 $f(x)e^{\lambda x}$ 单调不减时, $f'(x) + \lambda f(x)$ 单调不减

解

例题 37.58.

$\Omega = \{(x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$, 求 $\iiint_{\Omega} (3x + 2y + z)^2 dv$

解



November 30

例题 37.59.

设曲线 $C : x^2 + y^2 = 2x$, 求 $\oint_C \frac{(x+y+1)^2}{(x-1)^2 + y^2} ds$

解

例题 37.60.

设曲面 Σ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = 2y$, 求 $\iint_{\Sigma} (x^2 + 2y^2 + 3z^2) dS$

解





第 38 章 December

38.1 Week I

December 1

例题 38.1.

计算曲线积分 $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + xy + y^2}$, 其中 L 为 $|x| + |y| = 1$, 其方向为逆时针方向

解

例题 38.2.

计算曲线积分 $I = \oint_L \left[\frac{4x-y}{4x^2+y^2} - \frac{y}{(x-1)^2+y^2} \right] dx + \left[\frac{x+y}{4x^2+y^2} + \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} \right] dy$, 其中 L 是 $x^2 + y^2 = 4$, 方向为逆时针方向

解

December 2

例题 38.3.

设 Ω 是由平面曲线 $\begin{cases} 4y^2 + z^2 = 4 \\ x = 0 \end{cases} \quad (z \geq 0)$ 绕 z 轴旋转一周形成的空间曲面, 取上侧, 计算曲面积分:



$$I = \iint_{\Omega} \frac{x^2 y dy dz + y^2 z dz dx + (z^2 + 1) dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + (\frac{z}{2})^2 + 3}}$$

解

例题 38.4.

设函数 $f(x, y, z)$ 在区域 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ 上具有连续一阶偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 计算:

$$\iiint_{\Omega} (x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}) dx dy dz$$

解

December 3

例题 38.5.

设 A 为三阶方阵, 并有可逆矩阵 $P = (p_1, p_2, p_3)$, $p_i (i = 1, 2, 3)$ 为三维列向量, 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1). 证明: p_1, p_2 是方程 $(E - A)x = 0$ 的解, p_3 是方程 $(E - A)x = -p_2$ 的解, 且 A 不可相似对角化

(2). 当 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 时, 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解

例题 38.6.

已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x f(x) + \sin x}{x^2} = 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \sin x}{x^2}$

解

December 4



例题 38.7.

设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内可导, 且 $f(0) + 3f'(0) = 1$, 求:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{\ln(1+x)} f(x+t)dt + [\sin x - \ln(1+x)] f(x)}{x^3}$$

解**例题 38.8.**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{(e^x - 1) \cos \sqrt{x}} \right)^{\frac{1}{(1+\sin x^2)^{\frac{1}{x}} - 1}}$$

解

December 5

例题 38.9.

设 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + \int_0^x (x-t)f(t)dt]^{\frac{1}{x \int_0^x f(x-t)dt}}$

解**例题 38.10.**

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上二阶导数连续, $f(1) \leq 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - |x|] = 0$, 证明:

- (1). $\exists \xi \in (1, +\infty)$, s.t. $f'(\xi) > 1$
- (2). $\exists \eta \in (-\infty, +\infty)$, s.t. $f''(\eta) = 0$

解

December 6

例题 38.11.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2x} |t-x| \sin t dt}{|x|^3}$$

解**例题 38.12.**

求使得 $\oint_L (2y^3 - 3y)dx - x^3 dy$ 的值最大的平面正向边界曲线 L

解

December 7

例题 38.13.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(1+x)^{\frac{1}{x}}} - (1+x)^{\frac{e}{x}}}{x^2}$$

解

例题 38.14.

设曲面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 与平面 $z = x$ 的交线为 L , 起点为 $A(0, 1, 0)$, 终点为 $B(0, -1, 0)$, 求

$$\oint_L (x + y - z) dx + |y| dz$$

解

38.2 Week II

December 8

例题 38.15.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

解

例题 38.16.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{n}{n^2 + n + \ln 1} + \frac{n}{n^2 + n + \ln 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + \ln n} \right]^n$$

解

December 9

例题 38.17.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n^2}} \right]^n$$

解



例题 38.18.

以下两个矩阵, 可以用同一个可逆矩阵 \mathbf{P} 相似对角化的是:

- A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- C. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- D. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

解

December 10

例题 38.19.

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上一阶可导, $f(0) = 0$, $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得最大值 M , $x_0 \in (0, 2)$, 且 $f'(x) \leq M$, 证明:

- (1). 当 $x \in [0, x_0]$ 时, 有 $f(x) = Mx$
- (2). $M = 0$

解**例题 38.20.**

设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 对任意的正整数, 满足 $a_n < b_n < a_{n+1}$, 则:

- A. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- B. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均发散, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$
- C. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 具有相同的敛散性
- D. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 具有不同的敛散性

解

December 11

例题 38.21.

若可逆线性变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Py}$ 可将二次型 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$ 化为规范型 $y_1^2 + y_2^2$, 同时将二次型 $g(x_1, x_2) = -x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$ 化为标准型 $k_1y_1^2 + k_2y_2^2$, 求可逆矩阵 \mathbf{P} 及 k_1, k_2 的值



解

例题 38.22.

设有数列 $\{x_n\}$, 已知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$, 求下列说法正确的个数:

- (1). $\{x_n\}$ 必收敛
- (2). 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 必收敛
- (3). 若 $\{x_n\}$ 有界, 则 $\{x_n\}$ 必收敛
- (4). 若 $\{x_{3n}\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 必收敛

解

December 12

例题 38.23.

设 $f(x)$ 有连续一阶导数, 且 $0 < f'(x) \leq \frac{\ln(2+x^2)}{2(1+x^2)}$, 数列 $x_0 = a, x_n = f(x_{n-1}) (n = 1, 2, \dots)$,

证明:

- (1). 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n$ 存在且是方程 $f(x) = x$ 的唯一实根
- (2). 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [f(x_n) - x_n]$ 收敛
- (3). 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - A|$ 绝对收敛, 其中 $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = A$

解

例题 38.24.

设 $f(x) = x + a \ln(1+x) + \frac{bx \sin x}{1+x^2}, g(x) = cx^3$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时是等价无穷小

- A. $a = 1, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{3}$
- B. $a = 1, b = -\frac{1}{2}, c = -\frac{1}{3}$
- C. $a = -1, b = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{3}$
- D. $a = -1, b = -\frac{1}{2}, c = -\frac{1}{3}$

解

December 13



例题 38.25.

设 $f(x)$ 为连续函数, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \ln(1+x)}{x^2} = 2$, $F(x) = \int_0^x t f(x-t) dt$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $F(x) - \frac{1}{2}x^2$ 与 bx^k 为等价无穷小, 其中常数 $b \neq 0, k$ 为正整数, 求 $k, b, f(0), f'(0)$

解

例题 38.26.

设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2e^{(n+1)x} + 1}{e^{nx} + x^n + 1}$, $f(x)$

- A. 仅有一个可去间断点
- B. 仅有一个跳跃间断点
- C. 有两个可去间断点
- D. 有两个跳跃间断点

解

December 14

例题 38.27.

下列命题成立的是:

- A. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f[\varphi(x)] - f(0)}{\varphi(x)}$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导
- B. 若 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f[\varphi(x)] - f(0)}{\varphi(x)} = f'(0)$
- C. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin x) - f(0)}{\sqrt{x^2}}$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导
- D. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sqrt[3]{x}) - f(0)}{\sqrt{x^2}}$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导

解

例题 38.28.

设 Σ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧, 求 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{dydz}{x} + \frac{dzdx}{y} + \frac{dxdy}{z}$

解

38.3 Week III

December 15



例题 38.29.

设 $f(x)$ 在 x_0 点可导, α_n, β_n 为趋于零的正项数列, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + \alpha_n) - f(x_0 - \beta_n)}{\alpha_n + \beta_n}$

解

例题 38.30.

设函数 $\varphi(x) = \int_0^{\sin x} f(tx^2) dt$, 其中 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(0) = 2$

- (1). 求 $\varphi'(x)$
- (2). 讨论 $\varphi'(x)$ 的连续性

解

December 16

例题 38.31.

设 $x = \int_0^1 e^{tu^2} du, y = y(t)$ 由方程 $t - \int_1^{y+t} e^{-u^2} du = 0$ 所确定, 求:

- (1). $\frac{dy}{dt} \Big|_{t=0}, \frac{d^2y}{dt^2} \Big|_{t=0}, \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0}, \frac{d^2x}{dt^2} \Big|_{t=0}$
- (2). $\frac{dy}{dx} \Big|_{t=0}, \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=0}$

解

例题 38.32.

设 $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sin x}{x^3} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ 处处连续, 求 $f''(0)$

- A. 0
- B. 不存在
- C. $\frac{1}{60}a$
- D. $-\frac{a}{10}$

解

December 17

例题 38.33.

设方程 $a^x = bx$ ($a > 1$) 有两个不同的实根, 求常数 a, b 应满足的关系式



解

例题 38.34.

设 $y(x)$ 满足 $y'' + 2ay' + b^2y = 0 (a > b > 0)$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$, 求 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$

解

December 18

例题 38.35.

设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty]$ 上二阶可导, 且 $f(0) = 0, f''(x) < 0$, 则当 $0 < a < x < b$ 时, 下面哪个选项正确:

- A. $af(x) > xf(a)$
- B. $bf(x) > xf(b)$
- C. $xf(x) < bf(b)$
- D. $xf(x) > af(a)$

解

例题 38.36.

设 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f(1) = 6, f'(1) = 0$, 且当 $x \geq 1, x^2f''(x) - 3xf'(x) - 5f(x) \geq 0$, 证明:
当 $x \geq 1$ 时, $f(x) \geq x^5 + \frac{5}{x}$

解

December 19

例题 38.37.

设 $f(x) = \int_0^x t|x-t|dt - \frac{x^2}{6}$, 求:

- (1). 函数 $f(x)$ 的极值和曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间和拐点
- (2). 曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴围成的区域的面积及绕 y 轴旋转所得旋转体的体积

解

例题 38.38.

求曲线 $y = e^{\frac{1}{x}} \sqrt{1+x^2}$ 的渐近线

解

December 20



例题 38.39.

设 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上二阶可导, 且 $|f(x)| \leq 1$, 又 $[f(0)]^2 + [f'(0)]^2 = 4$, 证明: $\exists \xi \in (-2, 2)$, s.t. $f''(\xi) + f(\xi) = 0$

解

例题 38.40.

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有 $n+1$ 阶导数, 且 $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0 (k = 0, 1, 2, \dots, n)$, 证明: $\exists \xi \in (a, b)$, s.t. $f^{(n+1)}(\xi) = f(\xi)$

解

December 21

例题 38.41.

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 证明:

- (1). $\exists \xi, \eta \in (0, 1)$, s.t. $[1 + \eta f(\eta)]f'(\xi) = f'(\eta) + f^2(\eta)$
- (2). $\exists \xi, \eta \in (0, 1), \xi < \eta$, s.t. $f'(xi) + f'(\eta) = 2$

解

例题 38.42.

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $f(1) > g(1), f(0) > g(0)$, $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx$, 证明: $\exists \xi \in (0, 1)$, s.t. $f''(\xi) > g''(\xi)$

解

38.4 Week IV

December 22

例题 38.43.

设 α 为正整数, 且反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} dx$ 收敛, 求 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} dx$

解



例题 38.44.

设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 连续且单调, $f(x+2) - f(x) = 4(x+2)$, $f(0) = 1$, $\int_1^9 f^{-1}(x)dx = \frac{28}{3}$, 其中 $f^{-1}(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数, 求 $\int_1^3 f(x)dx$

解

December 23

例题 38.45.

求曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = x$ 及 $y = 2$ 所围区域绕 $y = 2$ 旋转所得旋转体的体积

解**例题 38.46.**

设曲线 $y = \sin x (0 \leq x \leq n\pi, n = 1, 2, \dots)$ 和 x 轴围成的区域为 A , 区域 A 绕 y 轴旋转所得旋转体体积为 S_n

(1). 求 S_n (2). 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} [\frac{S_1}{n^3 + 1^3} + \frac{S_2}{n^3 + 2^3} + \dots + \frac{S_n}{n^3 + n^3}]$ **解**

December 24

例题 38.47.

设 $f(x), g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $\int_0^1 f(x)dx = 3 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx$, 证明:

$$\exists \xi, \eta \in (0, 1), \xi \neq \eta, \text{ s.t. } f'(\xi) = g'(\xi)[f(\eta) - f(\xi)]$$

解**例题 38.48.**

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有连续导数, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(a + \frac{k(b-a)}{n}) \right] = \frac{b-a}{2} [f(a) - f(b)]$$

解

December 25



例题 38.49.

设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续

$$(1). \text{ 证明 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi |f(x)| |\sin nx| dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(x) dx$$

$$(2). \text{ 求极限 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi |\sin nx| \ln(1+x) dx$$

解**例题 38.50.**

设函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+y)\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处

- A. 不连续
- B. 两个偏导数都不存在
- C. 两个偏导数存在但不可微
- D. 可微

解

December 26

例题 38.51.

$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ 是函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点可微的:

- A. 充分必要条件
- B. 必要条件但非充分条件
- C. 充分条件但非必要条件
- D. 既非充分也非必要条件

解**例题 38.52.**

设 $f_x(x_0, y_0)$ 存在, $f_y(x_0, y_0)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续, 证明: $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微

解

December 27



例题 38.53.

设 $u = u(\sqrt{x^2 + y^2})$ 具有连续的二阶偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + u = x^2 + y^2$, 试求函数 u 的表达式

解

例题 38.54.

设 $f(x, y)$ 有二阶连续导数, $g(x, y) = f(e^{xy}, x^2 + y^2)$ 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) + x + y - 1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = 0$, 证明: $g(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点取得极值, 判断此极值是极大值还是极小值, 并求出此极值

解

December 28

例题 38.55.

设区域 D 由 $x^2 + y^2 \leq 2x + 2y$ 所确定, 求 $\iint_D [x(1 - y^3) + y(1 + x^3)] d\sigma$

解

例题 38.56.

设 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$

(1). 计算 $b = \iint_D |xy - 1| d\sigma$

(2). 设 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 且 $\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$, $\iint_D xyf(x, y) d\sigma = 1$, 证明: $\exists (\xi, \eta) \in D$, s.t. $|f(\xi, \eta)| \geq \frac{1}{b}$

解

例题 38.57.

求 $I = \oint_L (y^2 + z^2) dx + (z^2 + x^2) dy + (x^2 + y^2) dz$, 其中 L 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2bx$ 与柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$ ($b > a > 0$) 的交线 ($z \geq 0$), L 的方向规定为沿 L 的方向运动时, 从 z 轴正往下看, 曲线 L 所围球面部分总在左边

解

December 29



例题 38.58.

设 $f(x)$ 有一阶连续导数, $(xy - yf(x))dx + (f(x) + y^2)dy = du(x, y)$, 其中 $f(0) = -1, u(0, 0) = 0$, 则函数 $u(x, y)$ 在条件 $xy = 1, x > 0$ 下最值情况:

- A. 最大值为 $\frac{5}{3}$
- B. 最大值为 5
- C. 最小值为 -3
- D. 最小值为 $\frac{1}{3}$

解**例题 38.59.**

设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, 区域 D 由不等式 $x^2 + y^2 \leq t^2 (t \geq 0), x \geq 0, y \geq 0$ 所确定, 且 $f(t) = 2 \iint_D [(x-1)^2 + (y+1)^2] f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy + \frac{t^4}{4} + t^2$, 求 $f(x)$

解**例题 38.60.**

设 $f(x, y)$ 连续, 且 $f(x, y) = x^2 - y^2 + \int_L \frac{yf(x, y)dx + xf(x, y)dy}{x^2 + y^2}$, 其中 L 是从点 $A(-1, 0)$ 到 $B(1, 0)$ 的上半圆周 $y = \sqrt{1 - x^2}$, 求 $f(x, y)$

解

December 30

例题 38.61.

设函数 $f(x)$ 满足 $xf'(x) - 3f(x) + 6x^2 = 0$, 且由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = 1$ 与 x 轴围成的平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积最小, 求 D 的面积

解**例题 38.62.**

下列级数中条件收敛的是:

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$
- B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \ln(1 + \frac{1}{n})$
- C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n [(-1)^n + \ln n]}{n}$



- D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$

解

例题 38.63.

已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 处的梯度 $\mathbf{grad} f(1, 1) = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, 求函数 $f(x, y)$ 在该点沿曲线 $e^{x-1} + xy = 2$ 在该点处切线方向 (与 y 轴正向夹角小于 $\frac{\pi}{2}$) 的方向导数

解

December 31

例题 38.64.

下列结论正确的是:

- A. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别是 R_1, R_2 , 则 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$ 的收敛半径为 $R = \min\{R_1, R_2\}$
- B. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R = 2$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{1}{2}$
- C. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n}$ 的收敛半径为 \sqrt{R}
- D. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛半径为 \sqrt{R}

解

例题 38.65.

设 $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 4a_{n-1} (n = 1, 2, 3, \dots)$

(1). 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

(2). 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ 的收敛域以及和函数

解

例题 38.66.

设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $\int_0^{+\infty} f^2(x) dx$ 收敛, 令 $a_n = \int_0^1 f(nx) dx$, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{n^\alpha} (\alpha > 0)$ 收敛

解



第七部分

Summary

第 7 部分目录

第 39 章 Summary

39.1 柯西收敛准则	618
39.2 双曲函数	618
39.3 两类欧拉积分	620
39.4 多项式函数极值点和拐点	621
39.5 阿达玛不等式	622
39.6 特殊曲线	626
39.7 谱分解定理	627
	630



第 39 章 Summary

39.1 柯西收敛准则

定理 39.1.1 (柯西收敛准则)

柯西极限存在准则，又称柯西收敛准则，给出某个式子（数列、数项级数、函数等）收敛的一个充分必要条件，主要应用在数列、数项级数、函数、反常积分、函数列和函数项级数等的收敛性判断中



命题 39.1.1 (柯西收敛准则：数列)

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \text{ s.t. } n, m > N, |a_n - a_m| < \varepsilon$$

满足条件的 $\{a_n\}$ 称为柯西序列，上述定理也可表述为：数列 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当 $\{a_n\}$ 是柯西序列



证明

(1). 必要性：

不妨设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \eta$ ，对于任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 $N_0 \in \mathbb{N}$ ，当 $n > N_0$ 时， $|a_n - \eta| < \frac{\varepsilon}{2}$ ，我们有：

$$\begin{cases} \forall n > N_0, \text{s.t. } |a_n - \eta| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall m > N_0, \text{s.t. } |a_m - \eta| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow |x_n - x_m| = |(x_n - \eta) - (x_m - \eta)| \leq |x_n - \eta| + |x_m - \eta| \leq \varepsilon$$

(2). 充分性：



命题 39.1.2 (柯西收敛准则: 数项级数)

数项级数收敛的充要条件:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \text{ s.t. } m > n > N, |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_m| < \varepsilon$$

证明

不妨设数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的部分和为 S_n , $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛当且仅当 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ 存在
数列的柯西收敛准则:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \text{ s.t. } n, m > N, |S_n - S_m| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_m| < \varepsilon$$

命题 39.1.3 (柯西收敛准则: 函数)

(1). $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 收敛的充要条件:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ s.t. } x_1, x_2 \in \dot{U}(x_0, \delta), |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

(2). $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 收敛的充要条件:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{ s.t. } |x_1|, |x_2| > |X|, |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

命题 39.1.4 (柯西收敛准则: 反常积分)**1. 无穷积分**

(1). $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的充要条件:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{ s.t. } q > p > X([p, q] \subset [a, +\infty)), \left| \int_p^q f(x)dx \right| < \varepsilon$$

(2). $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ 收敛的充要条件:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{ s.t. } p < q < -X([p, q] \subset (-\infty, a]), \left| \int_p^q f(x)dx \right| < \varepsilon$$

2. 暇积分

(1). $\int_a^b f(x)dx$ 收敛的充要条件:($x = a$ 是瑕点)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ s.t. } a < p < q < a + \delta([p, q] \subset [a, b]), \left| \int_p^q f(x)dx \right| < \varepsilon$$

(2). $\int_a^b f(x)dx$ 收敛的充要条件:($x = b$ 是瑕点)



$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ s.t. } b - \delta < p < q < b ([p, q] \subset [a, b]), \left| \int_p^q f(x) dx \right| < \varepsilon$$

命题 39.1.5 (柯西收敛准则: 函数列和函数项级数)

39.2 双曲函数

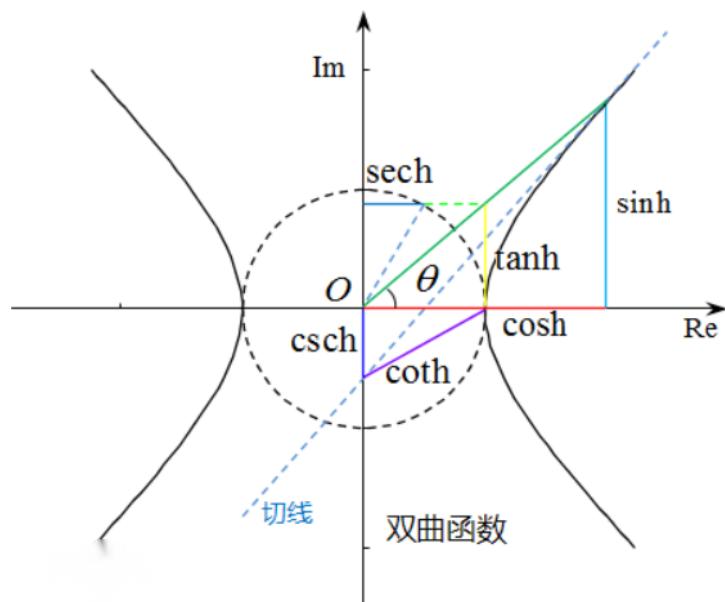


图 39.1: 双曲函数示意图

定义 39.2.1 (双曲函数)

双曲函数是一种类似于三角函数的一类函数, 基本的函数有双曲正弦函数和双曲余弦函数, 借由指数函数定义

1. 双曲正弦函数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

2. 双曲余弦函数

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty]$$

3. 双曲正切函数

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$$

恒等式:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 = 1$$

$$\sinh x = -i \sin ix, \quad \cosh x = \cos ix$$



$$\sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

定义 39.2.2 (反双曲函数)

1. 反双曲正弦函数

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad (\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

2. 反双曲余弦函数

$$\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad (\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

3. 反双曲正切函数

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad (\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$$

39.3 两类欧拉积分

定义 39.3.1 (Gamma 函数和 Beta 函数)

1. Gamma 函数 (欧拉第一类积分)

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = B(q, p)$$

$$B(a, b) = \left(\frac{x^a (1-x)^b}{a} \right) \Big|_0^1 + \frac{b-1}{a} \int_0^1 x^a (1-x)^{b-2} dx$$

$$B(a, b) = \frac{b-1}{a} \int_0^1 (x-1+1)x^{a-1}(1-x)^{b-2} dx$$

$$B(a, b) = \frac{b-1}{a} [B(a, b-1) - B(a, b)]$$

$$B(a, b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1)$$

特别的:

$$B(m, n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$$

2. Beta 函数 (第二类欧拉积分)



$$\Gamma(\alpha) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\ 2 \int_0^{+\infty} x^{2\alpha-1} e^{-x^2} dx \end{cases}$$

$$\Gamma(\alpha) = (-x^{\alpha-1} e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} + (\alpha - 1) \int_0^{+\infty} x^{\alpha-2} e^{-x} dx$$

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1) \quad (\alpha > 1)$$

有两个特别的 α , 分别是 $\alpha = \frac{1}{2}$ 和 $\alpha = 1$:

$$\begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1 & \alpha = 1 \\ \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} & \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

特别的

$$\Gamma(n+1) = n!$$

3. 两类积分之间的关系

转换公式:

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$



39.4 多项式函数极值点和拐点

定理 39.4.1 (代数基本定理)

任何一个一元 n 次复系数多项式, 都恰好有 n 个复根, 且可以表示为 n 个一次因式的乘积



推论 39.4.1 (曲线的极值点和拐点)

曲线上的可导点不可能同时是极值点和拐点, 不可导点可能同时是极值点和拐点



命题 39.4.1 (多项式函数极值点和拐点个数: 命题一)

多项式函数 $f(x) = (x-a)^n$ ($n > 1$), 当 n 为奇数时, $(a, 0)$ 是 $f(x)$ 的拐点, 当 n 为偶数时, $x=a$ 是 $f(x)$ 的极值点



证明

$$\begin{cases} f'(x) = n(x-a)^{n-1} \\ f''(x) = n(n-1)(x-a)^{n-2} \end{cases}$$



当 n 为偶数时, $f'(a) = 0$ 且

$$\exists \delta > 0, x \in (a - \delta, a), f'(x) < 0; x \in (a, a + \delta), f'(x) > 0$$

当 n 为偶数时, $x = a$ 是 $f(x)$ 的极值点

当 n 为奇数时, $f''(a) = 0$ 且

$$\exists \delta > 0, x \in (a - \delta, a), f''(x) < 0; x \in (a, a + \delta), f''(x) > 0$$

当 n 为奇数时, $(a, 0)$ 是 $f(x)$ 的拐点

命题 39.4.2 (多项式函数极值点和拐点个数: 命题二)

多项式函数 $f(x) = (x - a)^n g(x) (n > 1), g(a) \neq 0$, 当 n 为奇数时, $(a, 0)$ 是 $f(x)$ 的拐点, 当 n 为偶数时, $x = a$ 是 $f(x)$ 的极值点

证明

$$\begin{cases} f'(x) = (x - a)^{n-1} [ng(x) + (x - a)g'(x)] \\ f''(x) = (x - a)^{n-2} [n(n-1)g(x) + 2n(x-a)g'(x) + (x-a)^2g''(x)] \end{cases}$$

当 n 为偶数时, 不妨假设 $g(a) > 0$, 极限的保号性:

$$\exists \delta_1 > 0, s.t. x \in U(a, \delta_1), g(a) > 0$$

当 $x \in U(a, \delta_1), f(x) = (x - a)^n g(x) \geq f(a) = 0, x = a$ 是 $f(x)$ 的一个极值点

当 n 为奇数时, $x \rightarrow a, (x - a), (x - a)^2$ 是无穷小量, $g'(a), g''(a)$ 都是定值

$$\exists \delta_2 > 0, s.t. x \in U(a, \delta_2), 2n(x - a)g'(x) + (x - a)^2g''(x) \leq |n(n-1)g(x)|$$

$x \in U(a, \delta_2), [n(n-1)g(x) + 2n(x-a)g'(x) + (x-a)^2g''(x)] > 0, f''(x)$ 与 $(x - a)^{n-2}$ 符号相同

当 $x \in (a - \delta_2, a), f''(x) < 0; x \in (a, a + \delta_2), f''(x) > 0, (a, 0)$ 是 $f(x)$ 的一个拐点

命题 39.4.3 (多项式函数极值点和拐点个数: 命题三)

讨论多项式函数 $P_n(x) = \prod_{i=1}^k (x - a_i)^{p_i}$ 极值点和拐点个数, 其中满足:

$$p_i \in \mathbb{Z}^+, p_1 < p_2 < \dots < p_k, a_i \in \mathbb{R}$$



推论 39.4.2 (极值点和拐点个数)

假设 $P_n(x) = \prod_{i=1}^k (x - a_i)^{p_i}$, 其中 k_1 个 p_i 为奇数 (大于 1), k_2 个 p_i 为偶数, k_0 个 $p_i = 1$, 满足 $k_0 + k_1 + k_2 = k$

- $P_n(x)$ 的极值点个数 $k - 1 + k_2 = k_0 + k_1 + 2k_2 - 1$
- $P_n(x)$ 的拐点个数 $k + 2k_1 + k_2 - 2 = k_0 + 3k_1 + 2k_2 - 2$

证明

(1). 极值点个数

$P_n(x)$ 是多项式函数, 在 \mathbb{R} 上 n 阶可导

$$\begin{cases} P_n(x) \text{ 极值点满足: } P'_n(x) = 0 \\ P_n(x) \text{ 拐点满足: } P''_n(x) = 0 \end{cases}$$

$P(x)$ 有 k 个实数根, k 个实数根的重数分别为 p_1, p_2, \dots, p_k , 且 $\sum_{i=1}^k p_i = n$

不妨设 $\begin{cases} k_0 = N(p_i = 1) \\ k_1 = N(p_i \in \{2k+1, k \in \mathbb{Z}^+\}) \\ k_2 = N(p_i \in \{2k, k \in \mathbb{Z}^+\}) \end{cases}$

$$P'_n(x) = \prod_{i=1}^k (x - a_i)^{p_i-1} \left[\sum_{i=1}^k p_i \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (x - a_j) \right) \right]$$

当 $p_i \geq 2 (i = k_0 + 1, k_0 + 2, \dots, k)$ 时, $x = a_i$ 是 $P'_n(x)$ 的一个零点, 此类零点一共有 $k - k_0$ 个, $P'_n(x)$ 有 $p_i - 1$ 重根 a_i

$P'_n(x)$ 此类的零点个数为 $n_1 = \sum_{i=k_0+1}^k (p_i - 1) = n - k$

将 $P(x)$ 的 k 个零点按照从小到大排列: a_1, a_2, \dots, a_k

罗尔定理:

$$\exists \xi_i \in (a_i, a_{i+1}) (i = 1, 2, \dots, k-1), \text{ s.t. } P'(\xi_i) = 0$$

$P'_n(x)$ 此类的零点个数为 $n_1 = k - 1$ 个; $P'_n(x)$ 是 $n - 1$ 次多项式函数, 至多有 $n - 1$ 个复根, $P'_n(x)$ 有 $n - k + k - 1 = n - 1$ 个实数根, 其中前面 $n - k$ 个根中存在重根情况

推论 39.4.3 (多项式函数零点)

$P_n(x)$ 有 n 个实数根 (含重根), 那么 $P'_n(x), P''_n(x), \dots, P_n^{(n-1)}(x)$ 的根全部是实数

$P'_n(x)$ 的两类零点



$$P'_n(x) = \prod_{i=1}^k (x - a_i)^{p_i-1} f(x)$$

第一类零点:

pro 39.4.2: 当 p_i 为偶数, a_i 是 $P_n(x)$ 的极值点, 共有 k_2 个极值点

第二类零点:

$f(\xi_i) = 0 (\xi_i \in (a_i, a_{i+1}))$, 当 $x \in U(\xi_i, \delta)$ 时, 只有 $(x - \xi_i)$ 这一项符号改变, 因此 $x = \xi_i$ 是 $P_n(x)$ 极值点, 共有 $k - 1$ 个极值点

综上, $P_n(x)$ 的极值点个数为 $k - 1 + k_2 = k_0 + k_1 + 2k_2 - 1$

(2). 拐点个数

类比极值点个数的方法, 求 $P'_n(x)$ 极值点个数

$$P'_n(x) = \sum_{i=1}^k p_i [(x - a_1)^{p_1-1} (x - \xi_1) (x - a_2)^{p_2-1} \cdots (x - \xi_{k-1}) (x - a_k)^{p_k-1}]$$

$P'_n(x)$ 的极值点有两类:

- i. 第一类是 $P'_n(x)$ 相邻两个零点之间的点, 也是 $P''_n(x)$ 的极值点, 共有 $k_1 + k_2 + k - 2$ 个
- ii. 第二类是 $P'_n(x)$ 的部分零点, 也是 $P''_n(x)$ 的极值点, 当 $p_i - 1$ 为偶数, $x = a_i$ 是 $P''_n(x)$ 的极值点, 共有 k_1 个

综上, $P_n(x)$ 的拐点个数为 $k + 2k_1 + k_2 - 2$

39.5 阿达玛不等式

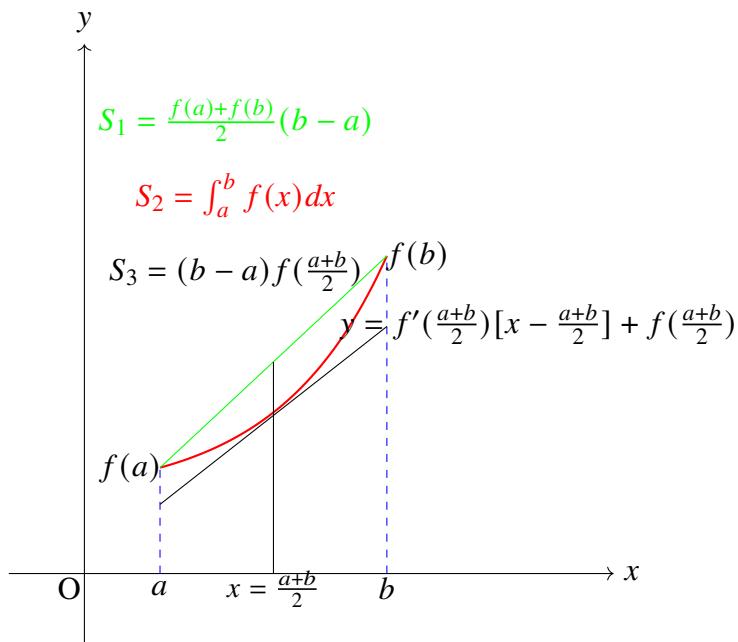


图 39.2: Hadamard 不等式

定理 39.5.1 (Hadamard 不等式)

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x) \geq 0$, 下面不等式成立:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq \frac{1}{2}[f(a) + f(b)]$$

证明

原不等式可以化为:

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t) dt \leq \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$

我们由图 39.2 可以发现:

不等式左边表示的是过 $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$ 的切线与 $x = a, x = b, y = 0$ 围成的图形的面积 S_3 ;

不等式中间表示的是 $f(x)$ 与 $x = a, x = b, y = 0$ 围成的曲边梯形的面积 S_2 ;

不等式右边表示的是直线 $x = a, x = b, y = 0$ 与直线 $y = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x - a) + f(a)$ 围成的梯形的面积 S_1 .

我们可以由图形上直观的看出三个面积的大小关系: $S_3 \leq S_2 \leq S_1$

对于左边的不等式, 我们将 $f(x)$ 在 $x = \frac{a+b}{2}$ 处展开得到:

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + f''(\xi)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$$



我们由 $f''(x) > 0$, 我们可以得到:

$$f(x) > f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$$

两边同时在 $[a, b]$ 内取定积分得到:

$$\int_a^b f(x) dx > \int_a^b \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \right] dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

对于右边的不等式, 我们构造辅助函数:

$$F(x) = \frac{x-a}{2}[f(x) + f(a)] - \int_a^x f(t) dt, F(a) = 0$$

$$\begin{cases} F'(x) = \frac{x-a}{2}f'(x) - \frac{f(x)-f(a)}{2} \\ F''(x) = \frac{x-a}{2}f''(x) \end{cases} \quad F'(0) = 0, F''(x) \geq 0 \Rightarrow F'(x) \geq 0$$

我们得到 $F'(x) \geq 0 \Rightarrow F(x)$ 单调递增, $F(x) \geq F(a) = 0$



39.6 特殊曲线

定义 39.6.1 (特殊曲线)

几类特殊曲线的面积、弧长、旋转体体积

1. 心形线 $r = a(1 + \cos \theta)$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 + \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta} d\theta = 8a$$

$$S = \int_0^{2\pi} a^2(1 + \cos \theta)^2 d\theta = 3\pi a^2$$

2. 摆线 $\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta} d\theta = 8a$$

$$S = \int_0^{2a\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos \theta)^2 d\theta = 3\pi a^2$$

3. 星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \cos^3 \theta \\ y = a \sin^3 \theta \end{cases}$

$$L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \sin \theta \cos \theta d\theta = 6a$$

$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \sin^4 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{3\pi}{8} a^2$$



4. 三叶玫瑰线 $\rho = a \cos 3\theta$ $\rho = a \sin 3\theta$

$$L = 6 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{a^2 \cos^2 3\theta + 9a^2 \sin^2 3\theta} d\theta = 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 8 \sin^2 t} dt$$

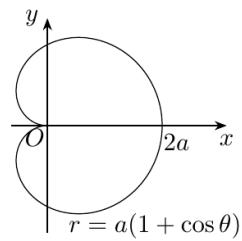
$$S = 3 \int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2 \cos^2 3\theta d\theta = \frac{\pi a^2}{4}$$

5. 伯努利双扭线 $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$

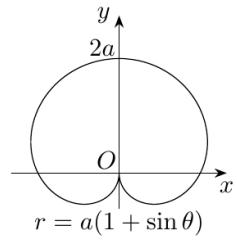
$$L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} a \sqrt{\frac{\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta}{\cos 2\theta}} d\theta = 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \theta + \cos^3 \theta}{\cos \theta}} d\theta$$

$$S = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\theta d\theta = a^2$$

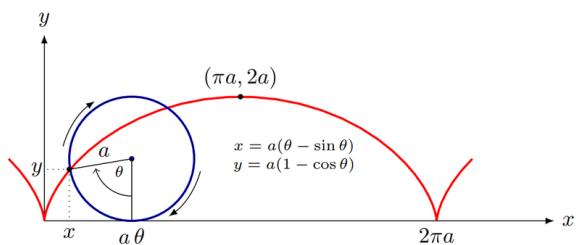




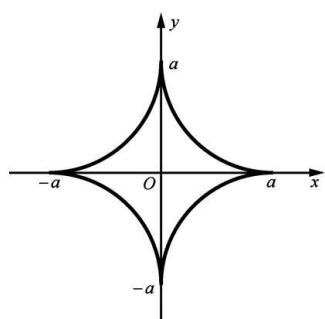
(a) 心形线



(a) 心形线



(b) 摆线



(c) 星形线

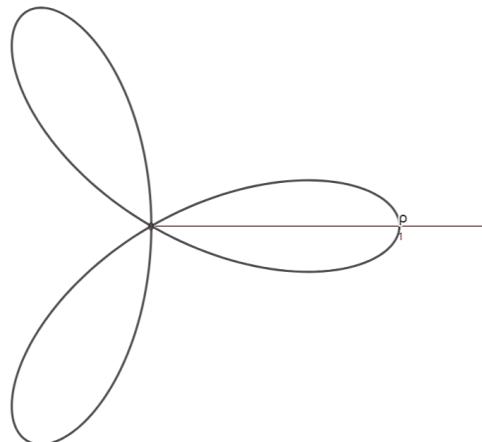
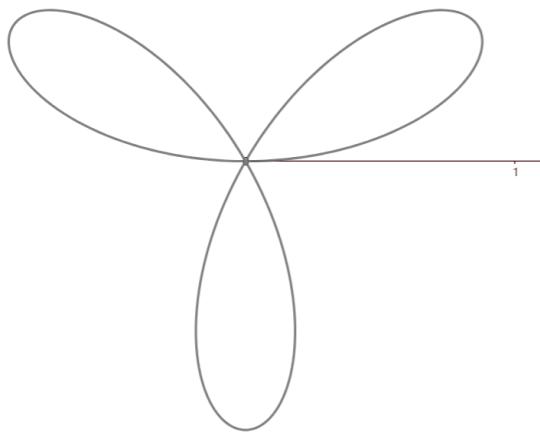
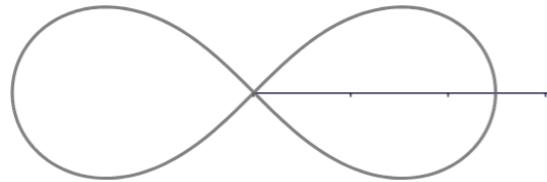
(d) 三叶玫瑰线 $\rho = a \cos 3\theta$ (e) 三叶玫瑰线 $\rho = a \sin 3\theta$ (f) 伯努利双扭线 $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$

图 39.3: 曲线图形



39.7 谱分解定理

定义 39.7.1 (代数重复度)

设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ 是矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的相异特征值, 其重数分别为 r_1, r_2, \dots, r_k , 称 r_i 为矩阵 A 的特征值 λ_i 的代数重复度

定义 39.7.2 (几何重复度)

齐次方程组 $Ax = \lambda_i x (i = 1, 2, \dots, k)$ 的解空间 V_{λ_i} 称为 A 的对应于特征值 λ_i 的特征空间, V_{λ_i} 的维数称为 A 的特征值 λ_i 的几何重复度

定义 39.7.3 (单纯矩阵)

若矩阵 A 的每一个特征值的代数重复度与几何重复度相等, 矩阵 A 为单纯矩阵

定义 39.7.4 (幂等矩阵)

若 A 为方阵, 且 $A^2 = A$, 称 A 为幂等矩阵

推论 39.7.1 (幂等矩阵 A 性质)

- A 的特征值只能为 0 或者 1
- A 一定可以相似对角化
- A 是单纯矩阵, 且其 Jordan 标准型为 $\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$, 其中 r 为 A 的秩
- $\text{rank}(A) = \text{tr}(A)$
- $Ax = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}(A)$

证明

(1). A 的特征值只能为 0 或者 1

不妨设 λ 是 A 的特征值

$$\begin{cases} Ax = \lambda x \\ A^2 = A \end{cases} \Rightarrow \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda \in \{0, 1\}$$

(2). A 一定可以相似对角化

$$\begin{cases} A + (I - A) = I \\ A(I - A) = O \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r(A) + r(I - A) \geq n \\ r(A) + r(I - A) \leq n \end{cases} \Rightarrow r(A) + r(I - A) = n$$



$$\begin{cases} (I - A)x = 0 \\ Ax = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{\lambda_1} = n - r(I - A) = r(A) \\ V_{\lambda_0} = n - r(A) = r(I - A) \end{cases} \Rightarrow V_{\lambda_1} + V_{\lambda_0} = n$$

A 有 n 个线性无关的特征向量 $\Leftrightarrow A$ 一定可以相似对角化

(3). A 可以相似对角化, 存在可逆矩阵 P , 满足

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} (\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 1)$$

$$(4). \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^k \lambda_i = r = \operatorname{rank}(A)$$

$$(5). Ax = x \Rightarrow x \in N(I - A) = R(A)$$

定理 39.7.1 (谱分解定理)

设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是单纯矩阵, 矩阵 A 有 k 个相异特征值 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, k)$, $\exists G_i \in \mathbb{R}^{n \times n} (i = 1, 2, \dots, k)$, 使得

$$A = \sum_{i=1}^k \lambda_i G_i$$

此式称为矩阵 A 的谱分解, G_1, G_2, \dots, G_k 称为 A 的族谱, 且满足以下性质:

- **幂等性:** $G_i^2 = G_i$
- **分离性:** $G_i G_j = 0 (i \neq j)$
- **可加性:** $\sum_{i=1}^k G_i = E_n$



证明

(1). 当 $k = n$ 时:

A 是单纯矩阵 $\Rightarrow A$ 可以相似对角化

$$\exists P (P^{-1}P = E), \text{ s.t. } P^{-1}AP = \Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

$$\text{不妨设 } P = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n), P^{-1} = \begin{bmatrix} \omega_1^T \\ \omega_2^T \\ \vdots \\ \omega_n^T \end{bmatrix}$$



$$A = P\Lambda P^{-1} = [\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^T \\ \omega_2^T \\ \vdots \\ \omega_n^T \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \nu_i \omega_i^T$$

令 $G_i = \nu_i \omega_i^T (i = 1, 2, \dots, n)$

$$\begin{cases} PP^{-1} = E_n \\ P^{-1}P = E_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_i^T \nu_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \\ \sum_{i=1}^n \nu_i \omega_i^T = \sum_{i=1}^n G_i = E_n \end{cases}$$

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, G_i G_j = \nu_i (\omega_i^T \nu_j) \omega_j^T$$

$$G_i G_j = \begin{cases} \nu_i \omega_i^T = G_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

(2). 当 $k < n$ 时:

A 是单纯矩阵 $\Rightarrow A$ 可以相似对角化, 矩阵 A 的 k 个特征值分别对应 $r_i (i = 1, 2, \dots, k)$ 个线性无关的特征向量

不妨设

$$\begin{cases} P = (\nu_{11}, \nu_{12}, \dots, \nu_{1r_1}, \nu_{21}, \nu_{22}, \dots, \nu_{2r_2}, \dots, \nu_{k1}, \nu_{k2}, \dots, \nu_{kr_k}) \\ P^{-1} = (\omega_{11}^T, \omega_{12}^T, \dots, \omega_{1r_1}^T, \omega_{21}^T, \omega_{22}^T, \dots, \omega_{2r_2}^T, \dots, \omega_{k1}^T, \omega_{k2}^T, \dots, \omega_{kr_k}^T) \end{cases}$$

$$P^{-1}AP = \Lambda \Rightarrow A = P\Lambda P^{-1} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \sum_{j=1}^{r_i} \nu_{ij} \omega_{ij}^T$$

$$\text{令 } G_i = \sum_{j=1}^{r_i} \nu_{ij} \omega_{ij}^T \Rightarrow A = \sum_{i=1}^k \lambda_i G_i$$

$$G_i G_j = \left(\sum_{p=1}^{r_i} \nu_{ip} \omega_{ip}^T \right) \left(\sum_{q=1}^{r_j} \nu_{jq} \omega_{jq}^T \right)$$

$$\begin{cases} P^{-1}P = E_n \\ PP^{-1} = E_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} \omega_{ij}^T \nu_{ij} = E_n \\ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} \nu_{ij} \omega_{ij}^T = \sum_{i=1}^k G_i = E_n \end{cases} \Rightarrow \omega_{ip}^T \nu_{jq} = \begin{cases} 1 & i = j, p = q \\ 0 & i \neq j \text{ or } p \neq q \end{cases}$$



$$G_i G_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ G_i & i = j \end{cases}$$

综上, A 是单纯矩阵 $\Rightarrow A = \sum_{i=1}^k \lambda_i G_i$

命题 39.7.1

矩阵 A 是单纯矩阵等价为存在 k 个矩阵 G_i , ($i = 1, 2, \dots, k$) 满足:

- $G_i G_j = \begin{cases} G_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

- $\sum_{i=1}^k G_i = E_n$

- $A = \sum_{i=1}^k \lambda_i G_i$

- $f(A)$ 为任意多项式

$$f(A) = \sum_{i=1}^k f(\lambda_i) G_i$$

- $A^m = \sum_{i=1}^k \lambda_i^m G_i$

证明

$$\begin{cases} G_i G_j = \begin{cases} G_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \\ \sum_{i=1}^k G_i = E_n \\ A = \sum_{i=1}^k \lambda_i G_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^m = \sum_{i=1}^k \lambda_i^m G_i \\ f(A) = \sum_{i=1}^k f(\lambda_i) G_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} G_i G_j = \begin{cases} G_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \\ \sum_{i=1}^k G_i = E_n \\ A = \sum_{i=1}^k \lambda_i G_i \end{cases} \Rightarrow A \text{ 可相似对角化}$$

矩阵 G_i ($i = 1, 2, \dots, k$) 为幂等矩阵, 不妨设 $\dim \mathbb{R}(G_i) = r_i$



$$r_i = \text{tr}(G_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^k r_i = \sum_{i=1}^k \text{tr}(G_i) = \text{tr}\left(\sum_{i=1}^k G_i\right) = \text{tr}(E_n) = n$$

取 X_i 为 $\mathbb{C}(G_i)$ 的基列构成的矩阵, $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ 是方阵, 且 G_i 的列向量都可以由 X_i 列向量线性表出

$$G_i = (X_i \beta_1, X_i \beta_2, \dots, X_i \beta_n) = X_i Y_i$$

$$XY = (X_1, X_2, \dots, X_k) \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_k \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^k X_i Y_i = \sum_{i=1}^k G_i = E_n$$

X, Y 均为可逆矩阵

$$YX = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_k \end{bmatrix} (X_1, X_2, \dots, X_k) = \begin{bmatrix} Y_1 X_1 & Y_1 X_2 & \cdots & Y_1 X_k \\ Y_2 X_1 & Y_2 X_2 & \cdots & Y_2 X_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ Y_k X_1 & Y_k X_2 & \cdots & Y_k X_k \end{bmatrix} = E_n = \begin{bmatrix} E_{r_1} & O & \cdots & O \\ O & E_{r_2} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & E_{r_k} \end{bmatrix}$$

$$Y_i X_j = \begin{cases} E_{r_i} & i = j \\ O & i \neq j \end{cases} \Rightarrow G_i X_j = \begin{cases} X_i & i = j \\ O & i \neq j \end{cases}$$



幂等矩阵性质:

$$\begin{aligned}
 AX &= \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i G_i \right) (X_1, X_2, \dots, X_k) \\
 &= \left[\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i G_i \right) X_1, \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i G_i \right) X_2, \dots, \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i G_i \right) X_k \right] \\
 &= (\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \dots, \lambda_k X_k) \\
 &= (X_1, X_2, \dots, X_k) \begin{bmatrix} \lambda_1 E_{r_1} & O & \cdots & O \\ O & \lambda_2 E_{r_2} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & \lambda_k E_{r_k} \end{bmatrix} \\
 &= X\Lambda \Rightarrow A = X\Lambda X^{-1}
 \end{aligned}$$

综上:

$$\begin{cases} G_i G_j = \begin{cases} G_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \\ \sum_{i=1}^k G_i = E_n \\ A = \sum_{i=1}^k \lambda_i G_i \end{cases} \Rightarrow A \text{ 是单纯矩阵}$$

推论 39.7.2 (谱族 G_i 推论)

- $AG_i = G_i A = \lambda_i G_i$

$$\begin{cases} AG_i = \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j G_j \right) G_i = \lambda_i G_i \\ G_i A = G_i \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j G_j \right) = \lambda_i G_i \end{cases} \Rightarrow AG_i = G_i A = \lambda_i G_i$$

- G_i 是唯一的, A 的族谱是唯一的
- $f(A) = f(\lambda_1)G_1 + f(\lambda_2)G_2 + \dots + f(\lambda_k)G_k$



定理 39.7.2 (谱分解唯一性)

不妨假设 F_1, F_2, \dots, F_k 满足:

$$\begin{cases} F_i F_j = 0 & i \neq j \\ F_i^2 = F_i \\ A = \sum_{i=1}^k \lambda_i F_i \\ \sum_{i=1}^k F_i = E_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} AG_i = G_i A = \lambda_i G_i \\ AF_i = F_i A = \lambda_i F_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AG_i F_j = \lambda_i G_i F_j \\ \lambda_i G_i F_j = G_i A F_j \Rightarrow G_i F_j = 0 (i \neq j) \\ G_i A F_j = \lambda_j G_i F_j \end{cases}$$

$$G_i = G_i \left(\sum_{j=1}^k F_j \right) = G_i F_i = \left(\sum_{j=1}^k G_j \right) F_i = F_i$$

综上, 矩阵 A 的谱分解是唯一的

