$\LaTeX$ Daily

Sun for morning, moon for night, and you forever.

作者：Lyshmily.Y & 木易

组织：Lyshmily.Y

时间：December 11, 2024

版本：V.1.0

邮箱：yjlpku.outlook.com & 845307723@qq.com

在没有结束前，总要做很多没有意义的事，这样才可以在未来某一天，用这些无意义的事去堵住那些讨厌的缺口

目录

目录 A

1 第 1 部分 * 每日一题 I

第 1 章 January 3
1.1 Week I 3
1.2 Week II 6
1.3 Week III 9
1.4 Week IV 11
第 2 章 February 17
2.1 Week I 17
2.2 Week II 20
2.3 Week III 23
2.4 Week IV 26
第 3 章 March 30
3.1 Week I 30
3.2 Week II 32
3.3 Week III 35
3.4 Week IV 39
第 4 章 April 43
4.1 Week I 43
4.2 Week II 45
4.3 Week III 47
4.4 Week IV 49

第 5 章 May 53
5.1 Week I 53
5.2 Week II 55
5.3 Week III 57
5.4 Week IV 60
第 6 章 June 65
6.1 Week I 65
6.2 Week II 67
6.3 Week III 69
6.4 Week IV 72

2 第 2 部分 * 每日一题 II

第 7 章 July 78
7.1 Week I 78
7.2 Week II 81
7.3 Week III 84
7.4 Week IV 88
第 8 章 August 92
8.1 Week I 92
8.2 Week II 94
8.3 Week III 98
8.4 Week IV 100
第 9 章 September 104
9.1 Week I 104
9.2 Week II 106
9.3 Week III 109
9.4 Week IV 111
第 10 章 October 116
10.1 Week I 116
10.2 Week II 119
10.3 Week III 122
10.4 Week IV 124
第 11 章 November 129
11.1 Week I 129
11.2 Week II 132
11.3 Week III 134
11.4 Week IV 137

第 12 章December 141

12.1Week I 141

12.2Week II 144

12.3Week III 147

12.4Week IV 149

第一部分

每日一题 I

第 1 部分目录

第 1 章 January 3
1.1 Week I 3
1.2 Week II 6
1.3 Week III 9
1.4 Week IV 11
第 2 章 February 17
2.1 Week I 17
2.2 Week II 20
2.3 Week III 23
2.4 Week IV 26
第 3 章 March 30
3.1 Week I 30
3.2 Week II 32
3.3 Week III 35
3.4 Week IV 39
第 4 章 April 43
4.1 Week I 43
4.2 Week II 45
4.3 Week III 47
4.4 Week IV 49
第 5 章 May 53
5.1 Week I 53
5.2 Week II 55
5.3 Week III 57
5.4 Week IV 60
第 6 章 June 65
6.1 Week I 65
6.2 Week II 67
6.3 Week III 69
6.4 Week IV 72

第 1 章 January

1.1 Week I

January 1

例题 1.1.

已知 $f(x+1)$ 的定义域为 $[0,a],(a>0)$, 求 $f(x)$ 定义域

例题 1.2.

已知 $f(x)=e^{x^2}, f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 并求出定义域

例题 1.3.

设

$$g(x)=\begin{cases}2-x & x\leq 0\\ x+2 & x>0\end{cases}$$

,

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ -x & x\geq 0\end{cases}$$

求 $g[f(x)]$

例题 1.4.

设函数

$$f(x)=\begin{cases}1-2x^2 & x<-1\\ x^3 & -1\le x\le 2\\ 12x-16 & x>2\end{cases}$$

求 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式

例题 1.5.

证明: 定义在 $[-a,a]$ 上的任意一个函数 $f(x)$ 都可以表示为一个奇函数和一个偶函数之和

例题 1.6.

判断函数 $f(x)=x\tan x\cdot e^{\sin x}$ 的奇偶性、单调性、周期性和有界性

例题 1.7.

函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界

- A. $(-1,0)$
- B. $(0,1)$
- C. $(1,2)$
- D. $(2,3)$

January 2

例题 1.8.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]$$

例题 1.9.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$$

January 3

例题 1.10.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$$

例题 1.11.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$$

January 4

例题 1.12.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$$

例题 1.13.

已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-\cos 2x}{ax^b}=1$, 求 a, b

January 5

例题 1.14.

已知 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$, 下列结论正确的个数为

- A. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$
- B. $\lim\limits_{x\to x_0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi}}=e$

- C. 当 $x \to x_0$ 时,$\sin\varphi(x) \sim \varphi(x)$
- D. 若 $\lim\limits_{u\to 0} f(u) = A$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = A$

例题 1.15.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x - \arctan x}{\sin x - \tan x}$$

January 6

例题 1.16.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{x}{\ln(1+x)}}{x}$$

例题 1.17.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}$$

January 7

例题 1.18.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos(\sin x)}{x^4}$$

例题 1.19.

$$\lim_{x\to +\infty} x^2\left[\arctan(x+1) - \arctan x\right]$$

1.2 Week II

January 8

例题 1.20.

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left[\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right]$$

例题 1.21.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right]$$

January 9

例题 1.22.

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x^2)}-\frac{1}{\ln(1+\tan^2 x)}\right]$$

例题 1.23.

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x^2)}-\frac{1}{\sin^2 x}\right]$$

January 10

例题 1.24.

$$\lim_{x\to 0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}$$

例题 1.25.

若 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e$, 求 k

January 11

例题 1.26.

若 $\lim_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=1$, 求 a,b

例题 1.27.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

January 12

例题 1.28.

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

例题 1.29.

$$\lim_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$$

January 13

例题 1.30.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$$

例题 1.31.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$$

January 14

例题 1.32.

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$$

例题 1.33.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}$$

1.3 Week III

January 15

例题 1.34.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$$

例题 1.35.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^n}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\right)^x$$

January 16

例题 1.36.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$$

例题 1.37.

$$\lim_{n\to\infty}n\left[e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}-1\right]$$

January 17

例题 1.38.

设 $a>0, a\neq 1$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})=\ln a$, 求 p

例题 1.39.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{\cos x})(1-\sqrt[3]{\cos x})\cdots(1-\sqrt[n]{\cos x})}{(1-\cos x)^{n-1}}$$

January 18

例题 1.40.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$$

例题 1.41.

已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$, 其中 k,c 为常数, 且 $c\neq 0$, 求 k,c

January 19

例题 1.42.

若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x^3}{x^4}-\dfrac{f(x)}{x^3}\right)=2$, $x\to 0$ 时,$f(x)$ 是 x 的:

- A. 等价无穷小
- B. 同阶但非等价无穷小
- C. 高阶无穷小
- D. 低阶无穷小

例题 1.43.

当 $x\to 0$ 时,$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 时等价无穷小, 求 k

January 20

例题 1.44.

当 $x\to 0^+$ 时, 与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量为:

- A. $1-e^{\sqrt{x}}$
- B. $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$
- C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$

- D. $1-\cos\sqrt{x}$

例题 1.45.

设 $\alpha_1 = x(\cos\sqrt{x}-1), \alpha_2 = \sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x}), \alpha_3 = \sqrt[3]{x+1}-1$, 当 $x \to 0^+$ 时, 以上 3 个无穷小量从低阶到高阶的排序为:

- A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
- B. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$
- C. $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3$
- D. $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$

January 21

例题 1.46.

函数 $f(x) = \dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的第一类间断点是:

- A. 0
- B. 1
- C. $-\dfrac{\pi}{2}$
- D. $\dfrac{\pi}{2}$

例题 1.47.

设函数 $f(x) = \dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$, 则 $f(x)$ 有

- A. 1 个可去间断点,1 个跳跃间断点
- B. 1 个可去间断点,1 个无穷间断点
- C. 2 个跳跃间断点
- D. 2 个无穷间断点

1.4 Week IV

January 22

例题 1.48.

函数 $f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为:

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

例题 1.49.

函数 $f(x)=\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为:

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

January 23

例题 1.50.

设函数 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$, 讨论函数的间断点, 其结论为:

- A. 不存在间断点
- B. 存在间断点 $x=1$
- C. 存在间断点 $x=0$
- D. 存在间断点 $x=-1$

例题 1.51.

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{h\to 0}\frac{f(h^2)}{h^2}=1$, 则:

- A. $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$ 存在
- B. $f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$ 存在
- C. $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在
- D. $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在

January 24

例题 1.52.

设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内有定义, 若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时, 恒有 $|f(x)|\le x^2$, 则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的:

- A. 间断点
- B. 连续而不可导的点
- C. 可导的点, 且 $f'(0)=0$
- D. 可导的点, 且 $f'(0)\neq 0$

例题 1.53.

设函数 $f(x)=\begin{cases} x^\alpha\cos\dfrac{1}{x^\beta}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$ $(\alpha>0,\beta>0)$, 若 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则:

- A. $\alpha-\beta>1$
- B. $0<\alpha-\beta\le 1$
- C. $\alpha-\beta>2$
- D. $0<\alpha-\beta\le 2$

January 25

例题 1.54.

曲线 $x+y+e^{2xy}=0$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线方程

例题 1.55.

(1). 设函数 $u(x),v(x)$ 可导, 利用导数定义证明:$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

(2). 设函数 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$ 可导,$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$, 写出 $f(x)$ 的求导公式

January 26

例题 1.56.

设函数 $f(x)=\begin{cases} \ln\sqrt{x} & x\ge 1 \\ 2x-1 & x<1 \end{cases}$,$y=f(f(x))$, 则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=e}$

例题 1.57.

设 $y=y(x)$ 是由方程 $xy+e^y=x+1$ 确定的隐函数, 则 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}$

January 27

例题 1.58.

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t-\ln(1+t) \\ y=t^3+t^2 \end{cases}$ 所确定, 则 $\frac{d^2y}{dx^2}$

例题 1.59.

设 $y=x^2 2^x$, 求 $y^{(n)}$

January 28

例题 1.60.

设 $y=\frac{1}{x^2-1}$, 求 $y^{(n)}$

例题 1.61.

已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数, 且 $f'(x)=[f(x)]^2$, 则当 n 为大于 2 的正整数时,$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是:

- A. $n![f(x)]^{n+1}$
- B. $n[f(x)]^{n+1}$
- C. $[f(x)^{2n}]$
- D. $n![f(x)]^{2n}$

January 29

例题 1.62.

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导, 且对任意 x_1,x_2, 当 $x_1>x_2$ 时, 都有 $f(x_1)>f(x_2)$, 则:

- A. 对任意 $x,f'(x)>0$

- B. 对任意 $x, f'(-x) \le 0$
- C. 函数 $f(-x)$ 单调增加
- D. 函数 $-f(-x)$ 单调增加

例题 1.63.

设 $f(x), g(x)$ 是恒大于零的可导函数, 且 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$, 当 $a < x < b$ 时, 有:

- A. $f(x)g(b) > f(b)g(x)$
- B. $f(x)g(a) > f(a)g(x)$
- C. $f(x)g(x) > f(b)g(b)$
- D. $f(x)g(x) > f(a)g(a)$

January 30

例题 1.64.

设 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = -1$, 其中 n 为大于 1 的整数, 则在点 $x = a$ 处:

- A. $f(x)$ 的导数存在, 且 $f'(a) \neq 0$
- B. $f(x)$ 取得极大值
- C. $f(x)$ 取得极小值
- D. $f(x)$ 是否取得极值与 n 的取值有关

例题 1.65.

设 $f(x)$ 的导数在 $x = a$ 处连续, 又 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{x-a} = -1$, 则:

- A. $x = a$ 是 $f(x)$ 的极小值点
- B. $x = a$ 是 $f(x)$ 的极大值点
- C. $(a, f(a))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
- D. $x = a$ 不是 $f(x)$ 的极值点,$(a, f(a))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

January 31

例题 1.66.

曲线 $y = (x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为:

例题 1.67.

已知函数 $y=f(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$, 若 $f'(x_0)=0(x_0\neq 0)$, 则:

- A. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
- B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
- C. $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点
- D. $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,$(x_0,f(x_0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

第 2 章 February

2.1 Week I

February 1

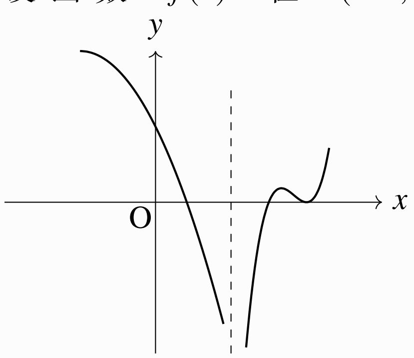
例题 2.1.

设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$ 且 $f'(0)=0$, 则:

- A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
- B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
- C. $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点
- D. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

例题 2.2.

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 其导函数图形如图所示, 则:



- A. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点
- B. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点

- C. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 1 个拐点
- D. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点

February 2

例题 2.3.

曲线 $y = x\ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$ $(x > 0)$ 的渐近线方程为:

例题 2.4.

曲线 $y = \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 渐近线的条数为:

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

February 3

例题 2.5.

设函数 $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$, 求

(1). 函数的增减区间及极值

(2). 函数图像的凹凸区间及拐点

(3). 渐近线

(4). 作出其图形

例题 2.6.

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内, 方程 $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$:

- A. 无实根
- B. 有且仅有一个实根
- C. 有且仅有两个实根

- D. 有无穷多个实根

February 4

例题 2.7.

函数 $f(x) = \ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为:

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

例题 2.8.

设 $f(x) = x^2(1-x)^2$, 则方程 $f''(x) = 0$ 在 $(0, 1)$ 上:

- A. 无实根
- B. 有且仅有一个实根
- C. 有且仅有两个实根
- D. 有且仅有三个实根

February 5

例题 2.9.

设常数 $k > 0$, 设函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点个数为:

- A. 3
- B. 2
- C. 1
- D. 0

例题 2.10.

证明: 当 $x > 0, \ln(1 + \frac{1}{x}) > \frac{1}{1+x}$

February 6

例题 2.11.

证明: $x > 0, \arctan x + \frac{1}{x} > \frac{\pi}{2}$

例题 2.12.

设 p, q 是大于 1 的常数, 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 证明: $\forall x > 0, \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q} \geq x$

February 7

例题 2.13.

设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续, 在 $(0,3)$ 内可导, 且 $f(0) + f(1) + f(2) = 3, f(3) = 1$, 证明:

$$\exists \xi \in (0,3),\ s.t.\ f'(\xi) = 0$$

例题 2.14.

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有二阶导数, 且 $f(a) = f(b) = 0, f'(a)f'(b) > 0$, 证明:

$$\exists \xi \in (a,b), \eta \in (a,b),\ s.t.\ f(\xi) = 0, f''(\eta) = 0$$

2.2 Week II

February 8

例题 2.15.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明:

(1). $\exists \xi \in (a,b),\ s.t.\ f'(\xi) + f(\xi) = 0$

(2). $\exists \eta \in (a,b),\ s.t.\ f'(\eta) - f(\eta) = 0$

(3). $\exists \zeta \in (a,b),\ s.t.\ f'(\zeta) + \lambda f(\zeta) = 0$

例题 2.16.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(1)=0$, 证明:

$$\exists \xi \in (0,1),\ s.t.\ \xi f'(\xi)+f(\xi)=0$$

February 9

例题 2.17.

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=\frac{1}{3}$, 证明:

$$\exists \xi \in \left(0,\frac{1}{2}\right), \eta \in \left(\frac{1}{2},1\right),\ s.t.\ f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$$

例题 2.18.

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 a,b 同号, 证明:

$$\exists \xi,\eta \in (a,b),\ s.t.\ abf'(\xi)=\eta^2 f'(\eta)$$

February 10

例题 2.19.

求下列的不定积分

(1). $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}dx$

(2). $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx$

例题 2.20.

求下列的不定积分

(1). $\displaystyle\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)}dx$

(2). $\displaystyle\int (1+\ln x)(\ln x+\ln\ln x)dx$

February 11

例题 2.21.

求下列的不定积分

(1). $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+x^3}dx$

(2). $\displaystyle\int \frac{1-x}{1+x^3}dx$

例题 2.22.

求下列的不定积分

(1). $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^3}$

(2). $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^3}dx$

February 12

例题 2.23.

已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2 x$, 求 $\int xf'(x)dx$

例题 2.24.

设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, 求 $\int f(x)dx$

February 13

例题 2.25.

$$\int \max(1,x^2)dx$$

例题 2.26.

设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x dx, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx, P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$

- A. $N<P<M$
- B. $M<P<N$
- C. $N<M<P$
- D. $P<M<N$

February 14

例题 2.27.

设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx, K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx$

- A. $M>N>K$
- B. $M>K>N$
- C. $K>M>N$
- D. $K>N>M$

例题 2.28.

设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}dx, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}dx$

- A. $I_1>I_2>1$
- B. $1>I_1>I_2$
- C. $I_2>I_1>1$
- D. $1>I_2>I_1$

2.3 Week III

February 15

例题 2.29.

$$\int_{-2}^{2}\left[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right]dx$$

例题 2.30.

$$\int_{-\pi}^{\pi}|x|[x^3+\sin^2 x]\cos^2 x dx$$

February 16

例题 2.31.

$$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx$$

例题 2.32.

$$\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$$

February 17

例题 2.33.

$$\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$$

February 18

例题 2.34.

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$$

例题 2.35.

已知函数 $f(x)=\int_1^x\sqrt{1+t^4}dt$, 则 $\int_0^1 x^2 f(x)dx$

February 19

例题 2.36.

已知 $f(x)$ 连续,$\int_0^x tf(x-t)dt = 1-\cos x$, 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

例题 2.37.

设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 2-x & 1 < x \le 2 \end{cases}$, 记 $F(x) = \int_0^x f(t)dt(0 \le x \le 2)$, 则有:

- A. $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} & 0 \le x \le 1 \\ 2x - \frac{x^2}{2} & 1 < x \le 2 \end{cases}$
- B. $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} & 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{3} + 2x - \frac{x^2}{2} & 1 < x \le 2 \end{cases}$
- C. $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} & 0 \le x \le 1 \\ -\frac{7}{6} + 2x - \frac{x^2}{2} & 1 < x \le 2 \end{cases}$
- D. $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} & 0 \le x \le 1 \\ \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^2}{2} & 1 < x \le 2 \end{cases}$

February 20

例题 2.38.

设 $x \ge -1$, 求 $\int_{-1}^x (1-|t|)dt$

例题 2.39.

设 $x = x(t)$ 由方程 $\sin t - \int_1^{x-t} e^{-u^2} du = 0$ 所确定, 试求 $\frac{d^2x}{dt^2}|_{t=0}$

February 21

例题 2.40.

设函数 $f(x)=\int_0^1|t(t-x)|dt(0<x<1)$, 求 $f(x)$ 的极值、单调区间及曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间

例题 2.41.

下列反常积分中发散的是:

- A. $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$
- B. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$
- C. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$
- D. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$

2.4 Week IV

February 22

例题 2.42.

$$\int_5^{+\infty}\frac{dx}{x^2-4x+3}$$

例题 2.43.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^{1+x}+e^{3-x}}$$

February 23

例题 2.44.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}dx$$

例题 2.45.

已知抛物线通过 x 轴上的两点 $A(1,0), B(3,0)$

(1). 求证: 两坐标轴与该抛物线所围图形的面积等于 x 轴与该抛物线所围图形的面积

(2). 计算上述两平面图形绕 x 轴旋转一周所产生的两个旋转体体积之比

February 24

例题 2.46.

求心形线 $r = a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ 所围图形的面积

例题 2.47.

已知平面区域 $D = \{(x,y)|0 \le y \le \dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}, x \ge 1\}$

(1). 求 D 的面积

(2). 求 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积

February 25

例题 2.48.

某水库的闸门形状为等腰梯形, 它的两条底边各长 $10m$ 和 $6m$, 高为 $20m$, 较长的底边与水面相齐, 求闸门的一侧所受水的压力

例题 2.49.

一个半径为 $R(m)$ 的球形贮水箱盛满了水, 如果把箱中的水从顶部全部抽出, 需要作的功

February 26

例题 2.50.

方程 $(xy^2+x)dx + (y-x^2y)dy = 0$ 的通解

例题 2.51.

方程 $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$ 的通解

February 27

例题 2.52.

方程 $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$ 满足条件 $y|_{x=1} = 0$ 的特解

例题 2.53.

方程 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x + y^4}$ 的通解

February 28

例题 2.54.

$$\int \frac{x\ln x + x\ln^2 x}{2 + x\ln x}dx$$

例题 2.55.

$$\int \frac{\sin 2x \sin^2 x}{2 + \cos^4 x}dx$$

February 29

例题 2.56.

$$\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx$$

例题 2.57.

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x(1+\sin^2 x)}dx$$

第 3 章 March

3.1 Week I

March 1

例题 3.1.

$$\int \frac{1}{\cos^3 x} dx$$

例题 3.2.

$$\int \frac{2+x}{(1+x^2)^2} dx$$

March 2

例题 3.3.

$$\int \frac{\arcsin \sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx$$

例题 3.4.

$$\int e^x \arcsin \sqrt{1-e^{2x}} dx$$

March 3

例题 3.5.

已知 $f(\ln x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$, 求 $\int f(x)dx$

例题 3.6.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x \cos^2 x dx$$

March 4

例题 3.7.

$$\int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx$$

例题 3.8.

$$\int_0^2 x\sqrt{2x - x^2} dx$$

March 5

例题 3.9.

$$\int_0^1 x(1 - x^4)^{\frac{3}{2}} dx$$

例题 3.10.

$$\int_1^2 (x-1)^2(x-2)^2 dx$$

March 6

例题 3.11.

$$\int_{-2}^{2} x\ln(1+e^x)dx$$

例题 3.12.

设 D 是由曲线 $xy+1=0$ 与直线 $y+x=0$ 及 $y=2$ 围成的有界区域, 求 D 的面积

March 7

例题 3.13.

设 D 是由曲线 $y=x^2$ 与 $y=x$ 围成的有界区域, 求区域 D 分别绕直线 $y=0, x=0, x=1, x=2$ 旋转所得旋转体的体积

例题 3.14.

方程 $y''+4y'+4y=e^{-2x}$ 满足条件 $y(0)=1, y'(0)=0$ 的特解

3.2 Week II

March 8

例题 3.15.

具有特解 $y_1=e^{-x}, y_2=2xe^{-x}, y_3=3e^x$ 的三阶常系数线性齐次方程为:

- A. $y'''-y''-y'+y=0$
- B. $y'''+y''-y'-y=0$
- C. $y'''-6y''+11y'-6y=0$
- D. $y'''-2y''-y'+2y=0$

例题 3.16.

方程 $y''-2y'=xe^{2x}$ 的特解形式为:

- A. $y=axe^{2x}$
- B. $y=(ax+b)e^{2x}$
- C. $y=x(ax+b)e^{2x}$

- D. $y = x^2(ax+b)e^{2x}$

March 9

例题 3.17.

方程 $y'' + y = e^x + 1 + \sin x$ 的特解形式为:

- A. $ae^x + b + c\sin x$
- B. $ae^x + b + c\cos x + d\sin x$
- C. $ae^x + b + x(c\cos x + d\sin x)$
- D. $y = ae^x + b + cx\sin x$

例题 3.18.

设函数 $f(x)$ 具有一阶连续导数, 且满足 $f(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f'(t)dt + x^2$, 求 $f(x)$ 表达式

March 10

例题 3.19.

设 L 是一条平面曲线, 其上任意一点 $P(x,y)(x > 0)$ 到坐标原点的距离恒等于该点处切线在 y 轴上的截距, 且 L 经过 $(\frac{1}{2},0)$, 求曲线 L 的渐近线方程为

例题 3.20.

二元函数 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处:

- A. 不连续
- B. 两个偏导数都不存在
- C. 偏导数存在但不可微
- D. 可微

March 11

例题 3.21.

二元函数 $f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处两个偏导数 $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ 存在, 是 $f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续的:

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 不充分不必要条件

例题 3.22.

已知 $f(x, y) = \sin\sqrt{x^4 + y^4}$

- A. $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$ 都存在
- B. $f'_x(0,0)$ 不存在, $f'_y(0,0)$ 存在
- C. $f'_x(0,0)$ 存在, $f'_y(0,0)$ 不存在
- D. $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$ 都不存在

March 12

例题 3.23.

设 $f(x, y) = \dfrac{2x + y^2}{1 + y^2\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$, 求 $df(0,0)$

例题 3.24.

已知 $dF(x, y) = xye^x dx + (f(x) + y^2)dy$, 且 $f(x)$ 有连续一阶导数, $f(x) = 0$, 求 $F(x, y)$

March 13

例题 3.25.

设函数 $f(x, y)$ 可微, 且对于任意 x, y 都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} > 0, \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} < 0$, 则下列结论正确的是:

- A. $f(1,1) > f(0,0)$
- B. $f(-1,1) > f(0,0)$
- C. $f(-1,-1) > f(0,0)$
- D. $f(1,-1) > f(0,0)$

例题 3.26.

设 $z=(x+e^y)^x$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)}$

March 14

例题 3.27.

设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z+y\ln z-\arctan(2xy)=1$ 确定, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,2)}$

例题 3.28.

设 $f(x,y,z)=e^x+y^2z$, 其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x+y+z+xyz=0$ 所确定的隐函数, 求 $f'_x(0,1,-1)$

3.3 Week III

March 15

例题 3.29.

设 $z=xyf(\frac{y}{x})$, 其中 $f(u)$ 可导, 求 $xz'_x+yz'_y$

例题 3.30.

设 $z=e^{xy}+f(x+y,xy)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, 其中 $f(u,v)$ 有二阶连续偏导数

March 16

例题 3.31.

已知 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取得极小值

- A. $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$
- B. $f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0)-(f''_{xy}(x_0,y_0))^2>0$, 且 $f''_{xx}(x_0,y_0)>0$
- C. $f(x_0,y)$ 在 y_0 处取得极大值
- D. $f(x,y_0)$ 在 x_0 处取得极小值

例题 3.32.

设函数 $f(x), g(x)$ 均有二阶连续导数, 满足 $f(0) > 0, g(0) < 0$, 且 $f'(0) = g'(0) = 0$, 则函数 $z = f(x)g(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件

- A. $f''(0) < 0, g''(0) > 0$
- B. $f''(0) < 0, g''(0) < 0$
- C. $f''(0) > 0, g''(0) > 0$
- D. $f''(0) > 0, g''(0) < 0$

March 17

例题 3.33.

已知函数 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = (ay - x^2)dx + (ax - y^2)dy, (a > 0)$, 函数 $f(x, y)$

- A. 无极值点
- B. 点 (a, a) 为极小值点
- C. 点 (a, a) 为极大值点
- D. 是否有极值点与 a 的取值有关

例题 3.34.

设函数 $z = f(xy, yg(x))$, 其中 f 函数具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导且在 $x = 1$ 处取得极值 $g(1) = 1$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}|_{(1,1)}$

March 18

例题 3.35.

求函数 $f(x, y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值

例题 3.36.

求 $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$ 在椭圆域 $D = \left\{(x, y)|x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\right\}$ 上的最大值和最小值

March 19

例题 3.37.

交换二次积分的积分次序 $(a>0)$

(1). $\displaystyle\int_0^2 dx\int_{\frac{x^2}{4}}^{3-x} f(x,y)dy$

(2). $\displaystyle\int_0^a dy\int_0^{\sqrt{ay}} f(x,y)dx+\int_a^{2a} dy\int_0^{2a-y} dx$

例题 3.38.

设 $f(x)$ 是连续函数, 则 $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$ 等价于:

- A. $\int_0^1 dx\int_0^{x-1} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$
- B. $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)dy$
- C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$
- D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

March 20

例题 3.39.

设函数 $f(t)$ 连续, 则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{2\cos\theta}^2 f(r^2)rdr$

- A. $\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)dy$
- B. $\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2+y^2)dy$
- C. $\int_0^2 dy\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)dx$
- D. $\int_0^2 dy\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x^2+y^2)dx$

例题 3.40.

计算二重积分

(1). $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(2x+3y)^2 d\sigma$

(2). $\displaystyle\int_{\frac14}^{\frac12} dy\int_{\frac12}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}}dx+\int_{\frac12}^{1} dy\int_y^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}}dx$

(3). $\displaystyle\int_0^1 dy\int_y^1\sqrt{x^2-y^2}dx$

(4). $\int_0^1 dy \int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^3}\right) dx$

(5). $\iint_D \left(xy^5 - 1\right) dxdy, D = \left\{(x,y) | -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \sin x \le y \le 1\right\}$

(6). $\iint_D x^2 y dxdy$, 其中 D 是由双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 以及直线 $y = 0, y = 1$ 所围成的平面区域

(7). $\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dxdy, D = \{(x,y) | 0 \le y \le x, x^2 + y^2 \le 2x\}$

(8). $\iint_D r^2 \sin\theta \sqrt{1 - r^2\cos 2\theta} dr d\theta, D = \left\{(r,\theta) | 0 \le r \le \sec\theta, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\right\}$

March 21

引理 3.3.1 (估值定理)

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n f(x) dx$$

其中 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导 $\Rightarrow |f(x)| \le M$, M 是 $|f(x)|$ 在 $[0,1]$ 上的最大值

$$0 \le \int_0^1 x^n f(x) dx \le \int_0^1 M x^n dx = \frac{M}{n+1}$$

夹逼准则:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M}{n+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n f(x) dx = 0$$

$$\begin{cases} \sin x < x \\ \ln(1+x) < x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \sin^n x f(x) dx = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln^n(1+x) f(x) dx = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n x^n f(x) dx$$

其中 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 (n+1)x^n f(x)dx - \int_0^1 x^n f(x)dx \\
&= \int_0^1 f(x)d(x^{n+1}) - \int_0^1 x^n f(x)dx \\
&= f(x)x^{n+1}\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 x^{n+1} f'(x)dx \\
&= f(1) - \int_0^1 x^{n+1} f'(x)dx
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{n\to+\infty} I = f(1) - \lim_{n\to oo} \int_0^1 x^{n+1} f'(x)dx = f(1)
$$

例题 3.41.

$$
\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{nx^n}{1+e^x}dx
$$

例题 3.42.

$$
\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right]
$$

3.4 Week IV

March 22

例题 3.43.

$$
\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}dx
$$

例题 3.44.

$$
\int_{\frac{1}{6}}^{+\infty} \frac{1}{x}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]dx
$$

March 23

例题 3.45.

已知函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin x^2\cos y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 求 $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$

例题 3.46.

设 $z=e^{xy}+f(x+y,xy)$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, 其中 $f(u,v)$ 有二阶连续偏导数

March 24

例题 3.47.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^4}\prod_{k=1}^{2n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$$

例题 3.48.

设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$, 求 $dz|_{(0,1)}$

March 25

引理 3.4.1 (特殊反常积分)

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\begin{cases}p>1 & \text{收敛}\\ p\leq 1 & \text{发散}\end{cases}$$

$$\int_0^1\frac{1}{x^p}dx\begin{cases}0<p<1 & \text{收敛}\\ p\geq 1 & \text{发散}\end{cases}$$

$$\int_0^1\frac{\ln x}{x^p}dx\begin{cases}0<p<1 & \text{收敛}\\ p\geq 1 & \text{发散}\end{cases}$$

例题 3.49.

反常积分 $\int_0^1 x^a(1-x)^b \ln x dx$ 收敛, 求 a, b 取值范围

例题 3.50.

$$\int \frac{x^2}{(x\cos x - \sin x)(x\sin x + \cos x)}dx$$

March 26

例题 3.51.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x^2+\frac{1}{2})^2}dx$$

March 27

例题 3.52.

已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = 2,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1} = 5$, 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$

例题 3.53.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x(1+\ln^2 x)}dx$$

March 28

例题 3.54.

$$\int \frac{2x^4}{1+x^6}dx$$

例题 3.55.

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(1-\cos\frac{\alpha}{n})(\alpha > 0)$ 敛散性

March 29

例题 3.56.

设 $u_n=(-1)^n\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n^2$ 的敛散性

例题 3.57.

已知 $y^2(x-y)=x^2$, 求 $\int\frac{1}{y^2}dx$

March 30

引理 3.4.2 (对称积分变换)

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\,dx$$

例题 3.58.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{1+\cos x-\sin x}dx$$

例题 3.59.

已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛, 求 α 取值范围

March 31

例题 3.60.

求级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 的和函数

例题 3.61.

求二重积分 $\iint\limits_D y^2dxdy$ 和 $\iint\limits_D(x+2y)dxdy$, 其中 D 是由参数方程 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$,$t\in[0,2\pi]$

第 4 章 April

4.1 Week I

April 1

例题 4.1.

判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sin(n+k)\right]$ 敛散性

例题 4.2.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{2(\sec x-1)}-\sqrt[3]{6(x-\sin x)}}{\int_0^{x^2}\arctan(e^{\sqrt{t}}-1)dt}$$

April 2

例题 4.3.

级数 $\sum_{n=2}^{+\infty}[sin\frac{1}{n}-k\ln(1-\frac{1}{n})]$ 收敛, 求 k 的值

例题 4.4.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^3dx$$

April 3

例题 4.5.

级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$、$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n a_{n+1}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 敛散性

例题 4.6.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x - \cos x} dx$$

April 4

例题 4.7.

$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{\cot x}{e^{-2x}} + \frac{1}{e^{-x} \sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

例题 4.8.

判断下列命题是否正确

(i). $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (u_{2n+1} + u_{2n})$ 收敛, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ 收敛

(ii). $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ 发散

April 5

例题 4.9.

$(1 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n \sqrt{3}$, 求 $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n}$

例题 4.10.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}$$

April 6

例题 4.11.

$$\int_0^1 \frac{x dx}{(2 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}$$

例题 4.12.

$y=x^2$ 与 $y=mx$ 围成的部分绕着 $y=mx(m>0)$ 旋转一周得到的旋转体体积 V

April 7

例题 4.13.

$f(x)$ 在 $(2,4)$ 上二阶导数连续,$f(3)=0$, 求证: $f''(\varepsilon)=3\int_2^4 f(x)dx$

例题 4.14.

$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, $f(0)=0$, 其反函数为 $g(x)$, 若 $\int_0^{f(x)} g(t)dt = x^2e^x$, 求 $f(x)$

4.2 Week II

April 8

例题 4.15.

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{2^n}(x+1)^{2n+1}$ 收敛区间

例题 4.16.

证明:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx=\frac{n\pi}{2}$$

April 9

例题 4.17.

方程 $F(cx-az,cy-bz)=0$ 确立了函数 $z=z(x,y)$, 求 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}$

例题 4.18.

设函数 f,g 均可微, 且 $z=f\left[xy,\ln x+g(xy)\right]$, 求 $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}$

April 10

例题 4.19.

$f'(x)$ 连续, $|f'(x)| \leq M$, $\int_0^1 f(x)dx = 0$, 证明:

$$\forall a \in [0,1], \left|\int_0^a f(x)dx\right| \leq \frac{M}{8}$$

例题 4.20.

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x-1)^n$ 的收敛域

April 11

例题 4.21.

设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 和 $\frac{1}{3}$, 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2}{b_n^2} x^n$ 收敛半径

例题 4.22.

$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, 计算 $f''_{xy}(0,0)$ 和 $f''_{yx}(0,0)$

April 12

例题 4.23.

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $f(0) = f(1) = 0, \min\limits_{x\in[0,1]}\{f(x)\} = -1$, 证明:

$$\exists \varepsilon \in (0,1),\ s.t.\ f''(\varepsilon) \geq 8$$

例题 4.24.

设 m,n 均是正整数, 证明: $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 收敛性与 m,n 无关

April 13

例题 4.25.

设数列 a_n 单调减少, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0, S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k (n = 1, 2 \dots)$ 无界, 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n (x-1)^n$ 收敛域

例题 4.26.

判断函数 $f(x,y) = \begin{cases} y \arctan \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处是否连续, 是否可微, 一阶偏导数是否连续

April 14

例题 4.27.

将 $f(x) = \dfrac{5x-12}{x^2+5x-6}$ 展开为 x 的幂级数

例题 4.28.

证明: $f_x'(x,y)$ 和 $f_y'(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续, $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微

4.3 Week III

April 15

例题 4.29.

将函数 $f(x) = \ln(1-x-2x^2)$ 展开为 x 的幂级数, 并指出其收敛区间

例题 4.30.

设 $f(x), g(x)$ 在 $x \in [0,1]$ 上的导数连续, 且 $f(0) = 0, f'(x) \geq 0, g'(x) \geq 0$, 证明:

$$\forall a \in [0,1], \int_0^a g(x) f'(x) dx + \int_0^1 f(x) g'(x) dx \geq f(a) g(1)$$

April 16

例题 4.31.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调递减, 证明:

$$\forall \lambda \in (0,1), \int_0^{\lambda} f(x)dx > \lambda \int_0^1 f(x)dx$$

例题 4.32.

$z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2), \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, f(1)=0, f'(1)=1$, 求 $f(x)$ 表达式

April 17

例题 4.33.

将 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数

例题 4.34.

微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 通解

April 18

例题 4.35.

方程 $x^3+y^3=3axy(a>0)$ 确定隐函数 $y=y(x)$, 求 $y=y(x)$ 的斜渐近线

例题 4.36.

已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$, 当 $\Delta x\to 0, \alpha$ 是 Δx 的高阶无穷小, $y(0)=\pi$, 求 $y(1)$

April 19

例题 4.37.

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2n+1)x^n$ 收敛域, 并求其和函数

例题 4.38.

微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{1}{2}(\frac{y}{x})^3$, 满足 $y\big|_{x=1} = 1$ 的特解

April 20

例题 4.39.

求微分方程 $(x+y)dx + (y-x)dy = 0$ 满足 $y(1) = -1$ 的特解

例题 4.40.

$f(x,y)$ 连续, 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-xy}{x^2+y^2} = 1$, 判断 $f(0,0)$ 是极大值还是极小值

April 21

例题 4.41.

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{2n+1} - 1)x^{2n}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)$

例题 4.42.

求微分方程 $(y+x^3)dx - 2xdy = 0$ 满足 $y\big|_{x=1} = \frac{6}{5}$ 的特解

4.4 Week IV

April 22

例题 4.43.

求微分方程 $xy' + 2y = x\ln x$ 满足 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 的特解

例题 4.44.

$f(x,y) = x^4 + 2y^2 - 3x^2y$ 判断 $f(0,0)$ 处极值情况

April 23

例题 4.45.

$$\int_0^{+\infty}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^x e^{-t^2}dt\right]dx$$

例题 4.46.

设 $F(x)=f(x)g(x)$, 其中函数 $f(x),g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足以下条件: $f'(x)=g(x),g'(x)=f'(x)$, 且 $f(0)=0,f(x)+g(x)=2e^x$

(i). 求 $F(x)$ 满足的一阶微分方程

(ii). 求 $F(x)$ 表达式

April 24

例题 4.47.

求级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$

例题 4.48.

已知 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}(x\geq 0),g(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$, 求 $f(g(x))$

April 25

例题 4.49.

已知 $y_1=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2},y_2=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解, 求 $q(x)$

例题 4.50.

设 $z=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,$f'_y\neq 0$, 证明: 对任意的常数 k, 曲线 $f(x,y)=k$ 是直线的充分必要条件为

$$(f'_y)^2f''_{xx}-2f'_xf'_yf''_{xy}+(f'_x)^2f''_{yy}=0$$

April 26

例题 4.51.

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$ 敛散性

例题 4.52.

判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^\alpha}$ 敛散性

April 27

例题 4.53.

设连续函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加, 下列说法正确的是:

- A. $\tan f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加
- B. $f'(x) > 0, x \in (-\infty,+\infty)$
- C. $\int_{-1}^{x} \frac{f(t)}{1+f^2(t)}dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加
- D. $\int_{-1}^{e^x} \frac{1}{1+f^2(t)}dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加

例题 4.54.

下列微分方程是以 $y = C_1e^x + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x, (C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R})$ 为通解的微分方程为:

- A. $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$
- B. $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$
- C. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$
- D. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$

April 28

例题 4.55.

设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 连续可导, 证明:

$$\int_0^a dx \int_0^x \frac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dy = \pi[f(a)-f(0)]$$

例题 4.56.

$f(x)$ 连续且为奇函数, 下列函数一定是偶函数的是:

- A. $\int_0^x du \int_a^u tf(t)dt$
- B. $\int_a^x du \int_0^u f(t)dt$
- C. $\int_0^x du \int_a^u f(t)dt$
- D. $\int_a^x du \int_0^u tf(t)dt$

April 29

例题 4.57.

证明: $\int_0^1 dx \int_0^1 (xy)^{xy} dy = \int_0^1 x^x dx$

例题 4.58.

微分方程 $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(1 + \cos 2x)$ 的特解可以设为哪种形式:

- A. $Ae^{2x} + e^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$
- B. $Axe^{2x} + e^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$
- C. $Ae^{2x} + xe^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$
- D. $Axe^{2x} + xe^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$

April 30

例题 4.59.

$f(x)$ 连续且为偶函数, 下列函数一定是偶函数的是:

- A. $\int_0^x (x - t^2) f(t) dt$
- B. $\int_a^x f(x - t) dt$
- C. $\int_0^x (x - 2t) f(t) dt$
- D. $\int_a^x (x - 2t) f(t) dt$

例题 4.60.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\int_1^x t^{-5} dt}{\int_1^x t^{-3} dt}$$

第 5 章 May

5.1 Week I

May 1

例题 5.1.

求二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$ 的通解

例题 5.2.

求微分方程 $y'' - 2y' - e^{2x} = 0$ 满足条件 $y(0) = 1, y'(0) = 1$ 的解

May 2

例题 5.3.

设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 连续,$f(x) > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{x}}$, 求 $f(x)$

例题 5.4.

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{4^n}{5^n - 3^n}$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^3 - 1}}$ 敛散性

May 3

例题 5.5.

设函数 $f(x)$ 连续, 且对于任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$, 恒有 $f(x+1) = -f(x)$, 下面结论不正确的是:

- A. $f(x)$ 是以 2 为周期的函数
- B. $\int_0^x [f(t) - f(-t)]dt$ 是以 2 为周期的函数
- C. $\int_0^x f(t)dt - \frac{x}{2}\int_0^2 f(t)dt$ 是以 2 为周期的函数
- D. $f'(x)$ 是以 2 为周期的函数

例题 5.6.

求微分方程 $y'' + y = 4\sin x$ 的通解

May 4

例题 5.7.

求微分方程 $y'' + y = \sin x + x\cos 2x$ 的通解

例题 5.8.

$$\lim_{x\to 0}\int_0^{2x} du \int_0^{\sqrt{2ux-u^2}} \frac{cos(t-u)^2}{\ln(1+x|x|)}dt$$

May 5

例题 5.9.

下列函数中原函数必为周期函数的是:

- A. $|\sin x|$
- B. $\sin^4 x$
- C. $\dfrac{1}{1+\sin^2 x}$
- D. $\dfrac{\sin x}{1+\sin^4 x}$

例题 5.10.

设 $y = \frac{1}{2}e^{2x} + (x - \frac{1}{3})e^x$ 是二阶常系数线性微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个特解, 求 a, b, c

- A. $a = -3, b = 2, c = -1$
- B. $a = 3, b = 2, c = -1$

- C. $a = -3, b = 2, c = 1$
- D. $a = 3, b = 2, c = 1$

May 6

例题 5.11.

设 $F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin x - a\cos x\right| dx$, 求 $F(a)$ 的最小值

例题 5.12.

设 $f(x)$ 连续且以 T 为周期, 则下列函数以 T 为周期的是:

- A. $\int_0^x f(t)dt$
- B. $\int_{-x}^0 f(t)dt$
- C. $\int_0^x f(t)dt - \int_{-x}^0 f(t)dt$
- D. $\int_0^x f(t)dt + \int_{-x}^0 f(t)dt$

May 7

例题 5.13.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^3)}$$

例题 5.14.

设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + 2\int_0^x f(t)dt = x^2$, 求 $f(x)$

5.2 Week II

May 8

例题 5.15.

设连续函数 $f(x)$ 满足 $x\int_0^1 f(tx)dt = f(x) + x$, 求 $f(x)$

例题 5.16.

求抛物线 $y = x^2$ 和直线 $x - y - 2 = 0$ 之间的最短距离

May 9

例题 5.17.

设 $f(x)$ 二阶可导, $f(-x)=-f(x), f(x+1)=f(x), x\in(-\infty,+\infty)$, 且 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{\sin(x-1)}=1$

- A. $f''(99)\le f'(100)\le f(101)$
- B. $f(99)=f(100)<f'(101)$
- C. $f'(99)\le f(100)<f''(101)$
- D. $f(99)<f'(100)=f''(100)$

例题 5.18.

设连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x(x-t)f(t)dt+e^{-x}-1$, 求 $f(x)$

May 10

例题 5.19.

设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)dt$, 求 $f(x)$

例题 5.20.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$$

May 11

例题 5.21.

设 $f(x)$ 是连续的正值函数, 且单调减少, 证明:

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx}\le\frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}$$

例题 5.22.

$$\iint\limits_D\frac{1}{\arcsin\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1, x^2+y^2\ge y, x\ge 0, y\ge 0\}$

May 12

例题 5.23.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 在 $(0,1)$ 内可导, $\int_0^1 f(x)dx=1$, 证明:

$$\exists \xi \neq \eta \in (0,1),\ s.t.\ f(\xi)+3f(\eta)=4f(\xi)f(\eta)$$

例题 5.24.

函数 $\dfrac{|x|e^{\frac{1}{x-1}}\ln(x-1)^2}{x(x-1)(x-2)}$ 在下列哪个区间内无界:

- A. $(-\infty,0)$
- B. $(0,1)$
- C. $(1,2)$
- D. $(2,+\infty)$

May 13

例题 5.25.

求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$ 和 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to 1}}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{\frac{y^2}{\sin\frac{2}{x}}}$

例题 5.26.

$$\int_0^{\pi}\left(e^{-\cos x}-e^{\cos x}\right)dx$$

May 14

例题 5.27.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\arctan e^x)\sin^2 x dx$$

例题 5.28.

设 $f(x)=\int_0^x f(x-t)\sin t dt+x$, 求 $f(x)$

5.3 Week III

May 15

例题 5.29.

下列函数在区间 (0, 1) 内无界的是:

- A. $\int_0^x \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} dt$
- B. $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$
- C. $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1-t)^3}} dt$
- D. $\int_0^x \frac{1}{(t-1)^2} \sin \frac{1}{t-1} dt$

例题 5.30.

$$\iint_D \frac{x^3 \sin y \cos y e^{\sqrt{x^2+2}}}{\sqrt{x^2 \cos^2 y + 2\sqrt{x^2+2}}} dxdy$$

, 其中 $D = \{(x, y) | \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$

May 16

例题 5.31.

已知函数 $f(x) = \frac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{x^\alpha}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界, 求 α 取值范围:

- A. $(0, +\infty)$
- B. $(0, 3]$
- C. $(0, 2)$
- D. $(1, 3]$

例题 5.32.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos(\frac{\pi}{4} - x) \cos x} dx$$

May 17

例题 5.33.

$$\iint_D \frac{1}{xy} dxdy, D = \{(r, \theta) | \frac{\cos\theta}{4} \leq r \leq \frac{\cos\theta}{2}, \frac{\sin\theta}{4} \leq r \leq \frac{\sin\theta}{2}\}$$

例题 5.34.

当 n 充分大时, $a-\dfrac{1}{n}<a_n<a+\dfrac{1}{n}$ 是数列 a_n 收敛于 a 的什么条件:

- A. 充分必要条件
- B. 必要条件但非充分条件
- C. 充分条件但非必要条件
- D. 既非充分也非必要条件

May 18

例题 5.35.

$$\iint_D \left|x^2+y^2-\sqrt{2}(x+y)\right|dxdy, D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 4\}$$

例题 5.36.

设 $f(x)$ 可积, 则下列结论正确的是:

- A. 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=0$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=A$, 则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=A$
- B. 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=0$, 且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=A$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=A$
- C. 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)=A$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$
- D. 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n \dfrac{|f(t)|}{1+t^2}dt=A$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x \dfrac{|f(t)|}{1+t^2}dt=A$

May 19

例题 5.37.

设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1, g(x,y)=f\left(xy,\frac{1}{2}(x^2-y^2)\right)$, 求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$

例题 5.38.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\sin x\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx$$

May 20

例题 5.39.

$$\iint\limits_{D} \frac{1}{3x^2+y^2} dxdy$$

D 是由 $\begin{cases} x^2+y^2-xy=1 \\ x^2+y^2-xy=2 \end{cases}$ 和直线 $\begin{cases} y=\sqrt{3}x \\ y=0 \end{cases}$ 围成

例题 5.40.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$, 求证:

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) \right| \leq \frac{M}{2n}$$

May 21

例题 5.41.

已知数列 $\{x_n\}$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = \int_0^1 e^{-x^2}dx$

- A. $\lim\limits_{n\to+\infty} = 0$
- B. $\lim\limits_{n\to+\infty} = \infty$
- C. $\lim\limits_{n\to+\infty} = a(a \neq 0)$
- D. $\lim\limits_{n\to+\infty}$ 不存在但不是 ∞

例题 5.42.

设 $f(x,y)$ 二阶偏导数连续, $f(1,y)=f(x,1)=0$, $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = a$, 其中 $D \in [0,1]\times[0,1]$, 求 $\iint\limits_{D} xyf''_{xy}(x,y)d\sigma$

5.4 Week IV

May 22

例题 5.43.

设 $a_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx (n=0,1,2,\cdots)$

(1). 证明: 数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2}a_{n-2}, (n=2,3,\cdots)$

(2). 求 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$

注

(1). 我们可以得到:

$$a_{n+1}-a_n=\int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x^2}dx-\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^1 (x-1)x^n\sqrt{1-x^2}dx<0$$

我们可以得到数列 $\{a_n\}$ 单调递减.

我们还有:

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^1 x^{n-1}d(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}(1-x^2)dx \\
&= \frac{n-1}{3}a_{n-2}-\frac{n-1}{3}a_n \\
a_n &= \frac{n-1}{n+2}a_{n-2}
\end{aligned}$$

(2). 我们由 (1) 知道,$\{a_n\}$ 单调递减且 $a_n>0$, 我们得到:

$$\begin{cases} a_n < a_{n-1} \\ a_{n-1} < a_{n-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \\ \frac{a_n}{a_{n-2}} < \frac{a_n}{a_{n-1}} \end{cases}$$

我们由夹逼定理可以得到:

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n-2}}=1 \\ \lim_{n\to+\infty}1=1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=1$$

综上所述, 我们得到: $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=1$

例题 5.44.

$xy'-(2x^2+1)y=x^2(x\geq 1)$, 且 $y(1)=a$, 讨论 $\lim_{x\to+\infty}y(x)$

May 23

例题 5.45.

已知当 n 充分大时, $|a_n| \le |b_n| \le |c_n|$, 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} |c_n|$

- A. $\lim_{n\to\infty} (|a_n| - b_n)$
- B. $\lim_{n\to\infty} (|b_n| - c_n)$
- C. $\lim_{n\to\infty} (|b_n| - c_n)$
- D. $\lim_{n\to\infty} (|b_n| - a_n)$

例题 5.46.

$$\lim_{n\to+\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+3n})$$

May 24

例题 5.47.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\left[\frac{1}{n+\ln 1}+\frac{2}{n+\ln 2}+\cdots+\frac{n}{n+\ln n}\right]$$

引理 5.4.1 (斯特林公式)

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$$

注

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} &= \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{n}(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n})} \\
&= e^{-\int_0^1 \ln x dx} \\
&= e
\end{aligned}$$

例题 5.48.

$f(x) > 0, f(x)f''(x) \ge [f'(x)]^2, f(0) = 1$, 证明: $f(x) \ge e^{f'(0)x}$

May 25

例题 5.49.

设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)=f(b)=0$, 证明: $|f(x)|\le\frac{1}{2}\int_a^b|f'(x)|dx$

例题 5.50.

$$\iint_D \ln|sin(x-y)|dxdy, D=\{(x,y)|0\le x\le y\le 2\pi\}$$

May 26

例题 5.51.

设 $x_n=(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

例题 5.52.

若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数, 且满足 $\varphi(2)>\varphi(1),\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)dx$, 证明: $\exists\xi\in(1,3)$, $s.t.\ \varphi''(x)<0$

May 27

例题 5.53.

设 $x_0=0,x_n=\dfrac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$

例题 5.54.

$$\lim_{n\to+\infty}\int_n^{n+1}x^2\sin\frac{1}{x}dx$$

May 28

例题 5.55.

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n+1}{\sqrt{n^5-n+2}}$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$ 敛散性

例题 5.56.

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x)dx=A$, 求 $\int_0^1dx\int_x^1dy\int_x^y f(x)f(y)f(z)dz$

May 29

例题 5.57.

判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2+(-1)^n}{n^2}$ 敛散性

例题 5.58.

$$\iint_D \left|\frac{x+y}{2}-x^2-y^2\right|dxdy, D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$$

May 30

例题 5.59.

设 $f(x,y)$ 在区域 $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$ 上连续, $f(0,0)=0$, 且 $f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, $f_y'(0,0)=1$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}dt\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)du}{1-e^{-\frac{x^4}{4}}}$$

例题 5.60.

设 $f(x)=1-\cos x$, 求 $\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{\cos x})(1-\sqrt[3]{\cos x})(1-\sqrt[4]{\cos x})(1-\sqrt[5]{\cos x})}{f\{f[f(x)]\}}$

May 31

例题 5.61.

$z(x,y)=\int_0^x dt\int_t^x f(t+y)g(yu)du$, f 和 g' 连续, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

例题 5.62.

$F(x)=\int_0^x e^{tx-t^2}dt$, 求 $F'(x)$

第 6 章 June

6.1 Week I

June 1

例题 6.1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin x)-x}{\arctan x-\arcsin x}$$

例题 6.2.

设 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足 $x_1=y_1=\dfrac{1}{2}, x_{n+1}=\sin x_n, y_{n+1}=y_n^2$, 判断 x_n 和 y_n 的阶数

- A.$\{x_n\}$ 比 $\{y_n\}$ 高阶
- B.$\{y_n\}$ 比 $\{x_n\}$ 高阶
- C.$\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 等价
- D.$\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 同阶不等价

June 2

例题 6.3.

$f(x)$ 可微, 且 $x=\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t-x)dt$, 求 $f(x)$

June 3

例题 6.4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1-\sqrt[3]{1-\sqrt{1-x}}}-1}{(1+x)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}-1}$$

例题 6.5.

$y''+ay'=f(x)(a>0), f(+\infty)=b$, 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}y''(x)$

June 4

例题 6.6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3+\sin x^2)^x-3^{\sin x}}{x^3}$$

例题 6.7.

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n(n+1)x^n$ 和函数

June 5

例题 6.8.

设 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 连续可导, $f'(x)\geq 0$, 证明:

$$\left|\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx dx\right|\leq\frac{2}{n}[f(2\pi)-f(0)]$$

例题 6.9.

证明: $\left|\int_x^{x+1}\sin t^2 dt\right|\leq\frac{1}{x}(x>0)$

June 6

例题 6.10.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}$$

例题 6.11.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

June 7

例题 6.12.

设函数 $u = f(x, y, x)$ 有连续偏导数, 且 $z = z(x, y)$ 由方程 $xe^x - ye^y = ze^z$ 所确定, 求 du

例题 6.13.

设 $u = f(x, y, z), \varphi(x, y, z) = 0, y = \sin x$ 确定了函数 $u(x)$, 其中 f, φ 具有一阶偏导数, 且 $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$, 求 $\frac{du}{dx}$

6.2 Week II

June 8

例题 6.14.

$$\lim_{t \to 0^+} \lim_{x \to +\infty} \frac{\int_0^{\sqrt{t}} dx \int_{x^2}^{t} \sin y^2 dy}{\left[\left(\frac{2}{\pi} \arctan \frac{x}{t^2} \right)^x - 1 \right] \int_0^t (e^{\sqrt{u}} - 1) du}$$

例题 6.15.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2[1 - \ln(e^x + \sin x)]}{x}$$

June 9

例题 6.16.

$f(x)$ 二阶可导, $f(a) = f'(a) = f''(a) = f(b) = 0$, 证明:

$$\exists \xi \in (a, b),\ s.t.\ (\xi - a)^2 f''(\xi) - 2f(\xi) = 0$$

例题 6.17.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$$

June 10

例题 6.18.

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数, $f(0)=f(2)=0, M=\max\limits_{x\in[0,2]}\{|f(x)|\}$, 证明:
(1). $\exists\xi\in(0,2),\ s.t.\ |f'(\xi)|\geq M$
(2). $\forall x\in(0,2), |f'(x)|\leq M\to M=0$

例题 6.19.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x^2}{2}-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$$

June 11

例题 6.20.

证明方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1(n\geq 2)$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 内有且仅有一个实数根, 记作 x_n, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$

例题 6.21.

方程 $\cos x+\cos^2 x+\cdots+\cos^n x=1(n\geq 2)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{3})$ 的根 x_n, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$

June 12

例题 6.22.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x^2-2(1-\cos x)\sin x}{x^5}$$

例题 6.23.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(2\sqrt[n]{n}-1)^n}{n^2}$$

June 13

例题 6.24.

设 $f'(0)=0, f''(0)$ 存在, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f[\ln(1+x)]}{x^3}$

例题 6.25.

求椭圆 $x^2+2xy+3y^2-8y=0$ 与直线 $x+y=8$ 的最短距离

June 14

例题 6.26.

证明 $\tan x = x$ 在区间 $(n\pi, n\pi+\dfrac{\pi}{2})$ 内存在实根 x_n, 并求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)$

例题 6.27.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x\sqrt{x}}(\sqrt{a}\arctan\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{b}\arctan\sqrt{\frac{x}{b}})$$

6.3 Week III

June 15

例题 6.28.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\left|\arcsin(\sin t)\right|dt}{x}$$

引理 6.3.1 (周期函数积分性质)

$f(x)=\int_0^x|\sin t|dt$

(i). 设 n 为正整数, 当 $n\pi\le x\le(n+1)\pi$, 证明: $2n\le f(x)\le 2(n+1)$

(ii). 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x|\sin t|dt}{x}$

定理 6.3.1 (周期函数性质)

$f(x)$ 是周期函数, 我们有:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\frac{\int_0^T f(x)dx}{T}$$

例题 6.29.

设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\int_0^x f(x-t)dt}{\int_0^x tf(t-x)dt}$

June 16

例题 6.30.

$$f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$$

(i). 证明: $\exists \xi \in (1,2),\ s.t. f(\xi) = (2-\xi)e^{\xi^2}$

(ii). 证明: $\exists \eta \in (1,2),\ s.t. f(2) = e^{\eta^2}\eta \ln 2$

例题 6.31.

设函数 $f(x)$ 连续, 且 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 2$, 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x e^{xt}\arctan(x-t)^2 dt}{\int_0^x tf(x-t)dt}$

June 17

例题 6.32.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导, $f(0)=0, f(1)=1$, 证明:

$$\exists \xi \in (0,1),\ s.t. \xi f''(\xi) + (1+\xi)f'(\xi) = 1+\xi$$

例题 6.33.

已知微分方程 $y' + y = f(x)$, 其中 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数, 证明: 该微分方程存在唯一的以 T 为周期的解

June 18

例题 6.34.

$f(x)$ 一阶连续可导, 且 $f(0)=0, f'(0) \neq 0$, 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^{x^2} f(t)dt}{x^2\int_0^x f(t)dt}$

例题 6.35.

设 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$, $f'(0)=2$, 求 $f(x)$

June 19

例题 6.36.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x[\int_u^x u^2\arctan(1+tu)dt]du}{(\int_0^x\ln(1+t)dt)^2}$$

例题 6.37.

设 $f'(x)$ 在 $[0,2]$ 连续, 证明: $\left|f(2)\right|\le\frac{1}{2}\left|\int_0^2 f(x)dx\right|+\int_0^2\left|f'(x)\right|dx$

June 20

例题 6.38.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明: $\max\limits_{0\le x\le1}\{|f(x)|\}\le\int_0^1[|f(x)|+|f'(x)|]$

例题 6.39.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t\left|\sin t\right|dt}{x^2}$$

June 21

例题 6.40.

已知 $|A|=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\\2^2&3^2&4^2&5^2\\2^3&3^3&4^3&5^3\end{vmatrix}$, 求 $\sum\limits_{i=1}^4\sum\limits_{j=1}^4 A_{ij}$

例题 6.41.

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x}\int_x^{x^2}(1+\frac{1}{2t})^t\sin\frac{1}{\sqrt{t}}dt$$

6.4 Week IV

June 22

例题 6.42.

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & a+b & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & a+b & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a+b \end{vmatrix}$$

例题 6.43.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{x^2}$$

June 23

例题 6.44.

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2} dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right)$$

例题 6.45.

$$A = \begin{pmatrix} a^n & (a+1)^n & \cdots & (a+n)^n \\ a^{n-1} & (a+1)^{n-1} & \cdots & (a+n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a+1 & \cdots & a+n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

求伴随矩阵 A^* 的所有元素之和

June 24

例题 6.46.

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)+\int_0^x t(1+t)^{\frac{1}{t}}dt}\right]$$

例题 6.47.

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+j^2}$$

June 25

例题 6.48.

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}$$

例题 6.49.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x^3-x^2+\frac{x}{2}+1)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+x^2+x+1}\right]$$

June 26

例题 6.50.

求 $\sum\limits_{n=1}^{100}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 的整数部分

例题 6.51.

设 $f(x)$ 是满足 $\int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t-x)f(t)dt=\cos^4 x$ 的连续函数, 求 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的平均值

June 27

例题 6.52.

$$|A|=\begin{vmatrix} a+x_1 & a+x_1^2 & \cdots & a+x_1^n \\ a+x_2 & a+x_2^2 & \cdots & a+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+x_n & a+x_n^2 & \cdots & a+x_n^n \end{vmatrix}(a\neq 0)$$

范德蒙行列式应用

求行列式:

$$|A|=\begin{vmatrix} a+x_1 & a+x_2 & \cdots & a+x_n \\ a^2+x_1^2 & a^2+x_2^2 & \cdots & a^2+x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n+x_1^n & a^n+x_2^n & \cdots & a^n+x_n^n \end{vmatrix}(a\neq 0)$$

例题 6.53.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left[\ln(1+\sin^2 x)-6(\sqrt[3]{2-\cos x}-1)\right]$$

June 28

例题 6.54.

$$\int_0^1 x\arcsin 2\sqrt{x-x^2}dx$$

例题 6.55.

设 $a_n\geq 0$, 且 $\{na_n\}$ 有界, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n^2$ 收敛

June 29

例题 6.56.

A 是三阶矩阵, $\forall i,j\in\{1,2,3\}, a_{ij}=A_{ij}, a_{33}=1$, 证明: A 是正交矩阵

例题 6.57.

证明: $e^{\int_0^1 f(x)dx} \le \int_0^1 e^{f(x)}dx$

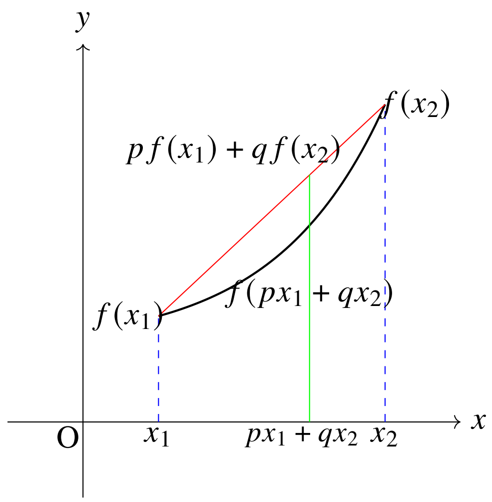


图 6.1: 凹函数性质

June 30

例题 6.58.

$$\lim_{x\to 0}\int_0^x \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^{\frac{1}{\int_0^t \ln(1+u)du}} \cot x dt$$

例题 6.59.

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 xf(x)dx = 1, \int_0^1 f(x)dx = 0$, 证明:

$$\exists \xi \in (0,1),\ s.t. \left|f(\xi)\right| \ge 4$$

第二部分

每日一题 II

第 2 部分目录

第 7 章 July 78
7.1 Week I 78
7.2 Week II 81
7.3 Week III 84
7.4 Week IV 88
第 8 章 August 92
8.1 Week I 92
8.2 Week II 94
8.3 Week III 98
8.4 Week IV 100
第 9 章 September 104
9.1 Week I 104
9.2 Week II 106
9.3 Week III 109
9.4 Week IV 111
第 10 章October 116
10.1Week I 116
10.2Week II 119
10.3Week III 122
10.4Week IV 124
第 11 章November 129
11.1Week I 129
11.2Week II 132
11.3Week III 134
11.4Week IV 137
第 12 章December 141
12.1Week I 141
12.2Week II 144
12.3Week III 147
12.4Week IV 149

第 7 章 July

7.1 Week I

July 1

例题 7.1.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}\right]^{x^2\ln x}$$

例题 7.2.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 导函数连续, 且 $\int_0^1 x^2 f'(x)dx = 1$, 证明:

(1). $\exists\xi\in(0,1)$, $s.t. f'(\xi)=3$

(2). $f(1)=\int_0^1 f(x)dx = 0 \longrightarrow \exists\eta\in(0,1)$, $s.t.\ f'(\eta) = -\dfrac{6}{7}$

July 2

例题 7.3.

设 $f(x)$ 连续, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0}\left[1+\int_0^x tf(x^2-t^2)dt\right]^{\frac{1}{(\tan x - x)\ln(1+x)}}$$

例题 7.4.

设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的周期为 1 的周期函数且满足 $0 \le f(x) \le 1$, $\int_0^1 f(x)dx = 1$, 证明:

$$x \in [0,13],\ \int_0^{\sqrt{x}} f(t)dt + \int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)dt + \int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)dt \le 11$$

July 3

例题 7.5.

设 $D = \{(x,y)|0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\}$, $f(x,y)$ 在 D 上连续, $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = 0$, $\iint\limits_D xyf(x,y)dxdy = 1$, 证明:

$$\exists(\xi,\eta) \in D,\ s.t. \left|f'(\xi,\eta)\right| \ge \frac{2}{4\ln 2 + 3}$$

1.

例题 7.6.

$$\lim_{x\to+\infty} (x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}}$$

July 4

例题 7.7.

已知 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{\pi^2}{6}$

(1). 证明: $a_{2n} = \frac{1}{4}a_n + b_n (n = 1, 2, \cdots)$

(2). $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{3}{4}\right)$

注

- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$
- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{24}$

例题 7.8.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(xe^x)-e^{-\frac{x^2}{2}e^{2x}}}{x^\alpha}=\beta\neq 0, \text{求 } \alpha,\beta$$

July 5

例题 7.9.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}dx(a>0)$$

$\int_0^{+\infty} f(x)dx$ **积分技巧**

- 倒代换
- 分割为 $\int_0^1 f(x)+\int_1^{+\infty} f(x)dx$
- 利用正切三角换元法

例题 7.10.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^\alpha}=\beta\neq 0, \text{求 } \alpha,\beta$$

July 6

例题 7.11.

设 $f(x)=\dfrac{1}{1+3x+9x^2}$, 求 $f^{(100)}(0)$

例题 7.12.

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-e^{x^2-2x}}{x^2}=2, \text{求 } a,b$$

July 7

例题 7.13.

$$\lim_{x\to 0}\frac{n!x^n-\sin x\sin 2x\cdots\sin nx}{x^{n+2}}$$

例题 7.14.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})+ax^2+bx^3}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^2, \text{求 } a,b$$

注

$x\to 0,\ x\sim\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

我们可以得到:

$$[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^3+\cdots$$

我们可以得到: $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的泰勒展开式:

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

7.2 Week II

July 8

例题 7.15.

设 n 阶矩阵 A,B 满足 $AB+aA+bB+cE=O$, 其中 $ab\neq c$, 证明:

(1). $A+bE$ 与 $B+aE$ 均为可逆矩阵

(2). $AB=BA$

1.

例题 7.16.

已知常数 $a>0, bc\neq 0$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[x^a\ln(1+\frac{x}{b})-x]=c$, 求 a,b,c

July 9

例题 7.17.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{6n}}\frac{\sin y}{y}dy+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{3}{6n}}\frac{\sin y}{y}dy+\cdots+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{(2n-1)}{6n}}\frac{\sin y}{y}dy\right]$$

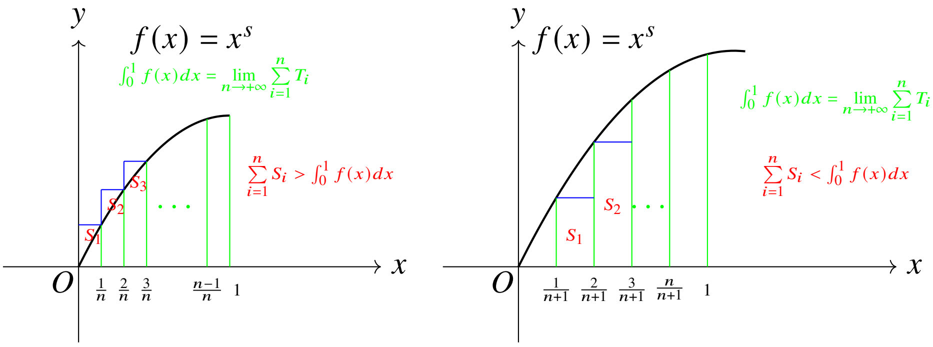
例题 7.18.

设 A 为 n 阶反对称矩阵, 证明: 对于任意向量 x, 均有 $x^T(A+E)x \geq 0$

July 10

例题 7.19.

$$\frac{n^{s+1}}{s+1} < 1^s + 2^s + \cdots + n^s < \frac{(n+1)^{s+1}}{s+1}(s>0)$$



(a) 定积分定义示意图 α　　(b) 定积分定义示意图 β

图 7.1: 积分和求和关系图

例题 7.20.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^{p+1}+2^{p+1}+\cdots+n^{p+1}}{n(1^p+2^p+\cdots+n^p)}(p>0)$$

July 11

例题 7.21.

已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求 A^{99}

例题 7.22.

设 3 阶实对称矩阵 A 特征值为 $\lambda_1=-1, \lambda_2=\lambda_3=1, \lambda_1$ 的特征向量为 $\xi_1=[0,1,1]^T$, 求 A

July 12

例题 7.23.

设 A 是任意的 $m \times n$ 矩阵, 证明: 方程组 $A^TAx = A^Tb$ 一定有解

例题 7.24.

设 A 为 3 阶实对称矩阵, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha = (1, 0, 1)^T$ 是矩阵 A 特征值 3 的一个特征向量, 若 $r(3E - A) > 1$, 且 $A^2 - 4E + 3E = 0$, 下列选项错误的是:

- A. 矩阵 A 必可相似对角化
- B. 矩阵 B 不可以相似对角化
- C. 矩阵方程 $AX - XB = 0$ 有可逆解
- D. $r(3E - A) = 2$

July 13

例题 7.25.

求 $f(x) = \sqrt{4x^2 + x}\ln(2 + \frac{1}{x})$ 的斜渐近线

例题 7.26.

当 $x \to 0$ 时, 下列无穷小量最高阶的是:

- A. $(1 + x)^{x^2} - 1$
- B. $e^{x^4 - 2x} - 1$
- C. $\int_0^{x^2} \sin t^2 dt$
- D. $\sqrt{1 + 2x} - \sqrt[3]{1 + 3x}$

July 14

例题 7.27.

求曲线 $y = \sqrt{x^4 - 3x^3 + 4}$ 在 $x \to +\infty$ 方向的渐进二次曲线

例题 7.28.

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 个 n 维列向量, 证明: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关的充要条件为:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{vmatrix} \neq 0$$

7.3 Week III

July 15

例题 7.29.

当 $x \to 0^+$ 时, 下列无穷小量中最高阶的是:

- A. $\int_0^{1-\cos x} \frac{\sin t}{t} dt$
- B. $\int_0^x t\tan\sqrt{x^2-t^2}dt$
- C. $\int_{\sin x}^{1-\sqrt{\cos x}} e^{xt}\ln(1+t^3)dt$
- D. $\int_{\sin x}^{x} \sqrt{\sin^3 t}dt$

例题 7.30.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)}$$

定理 7.3.1 (常用泰勒级数)

- $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}$$
- 欧拉公式: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \cdots \\ &= [1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^k\theta^{2k}}{2k} + \cdots] + i[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^k\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\theta^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

- $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \ x \in \mathbb{R}$$
- $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ x \in \mathbb{R}$$
- $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \ x \in (-1, 1)$$
- $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, \ x \in (-1, 1)$$
- $$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+x} dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}, \ x \in (-1, 1]$$
- $$\ln(1-x) = -\int_0^x \frac{1}{1-x} dx = -[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots] = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \ x \in [-1, 1)$$

命题 7.3.1 (扩展泰勒级数)

- $$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}, \ x \in (-1, 1)$$
- $$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \ x \in [-1, 1]$$
- $$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots, \ x \in (-1, 1)$$
- $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^{2n}, \ x \in (-1, 1)$$
- $$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}, \ x \in (-1, 1)$$
- $$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ x \in \mathbb{R}$$
- $$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \ x \in \mathbb{R}$$

命题 7.3.2 (常用数列和)

- $$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$$
- $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}=\ln 2$$
- $$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

July 16

例题 7.31.

设 $A=(a_{ij})_{3\times3}$, A 的每行元素之和为 a, 且 $|A|=b$, 将 A 中的每个元素加 k 得到矩阵 $B=(a_{ij}+k)_{3\times3}$, 求 $|B|$

例题 7.32.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$$

July 17

例题 7.33.

设 A 是 3 阶矩阵, 且满足 $|A-2E|=|A-3E|=|A-4E|=3$, 求 $|A-E|$

例题 7.34.

设 $f(x)$ 连续, 且 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=1, \alpha(x)=\int_0^{\sqrt{x}}\frac{\ln(1+t^4)}{f(t)}dt, \beta(x)=\int_0^{\sin x}\frac{\sqrt{1+t^3}-1}{f(t)}dt$, 则当 $x\to0^+$ 时, $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的:

- A. 等价无穷小
- B. 同阶但非等价无穷小
- C. 高阶无穷小
- D. 低阶无穷小

July 18

例题 7.35.

证明: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 收敛, 并求其和

例题 7.36.

当 $x\to 0$ 时, $2\arctan x-\ln\frac{1+x}{1-x}$ 是 x 的 n 阶无穷小, 求 n

July 19

例题 7.37.

关于函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy & xy\neq 0 \\ x & y=0 \\ y & x=0 \end{cases}$, 下列结论正确的是:

- A. $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=1$
- B. $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big|_{(0,0)}=1$
- C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$
- D. $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$

例题 7.38.

求幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{x^{2n+2}}{n+1}$ 和函数

July 20

例题 7.39.

当 $x\to 0^+$ 时, $(1+x)^{\frac{1}{x}}-(e+ax+bx^2)$ 是比 x^2 高阶的无穷小, 求 a,b

例题 7.40.

设 $f(x)$ 二阶可导, $f(0)=0$, 证明:

$$\exists\xi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\ s.t.\ f''(\xi)=3f'(\xi)\tan\xi+2f(\xi)$$

July 21

例题 7.41.

设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$, 求 a,b,c

例题 7.42.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{(1+x)^{\frac{1}{x}}}-(1+x)^{\frac{e}{x}}}{x^2}$$

7.4 Week IV

July 22

例题 7.43.

设函数 $f(x)=\sec x$ 在 $x=0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $1+ax+bx^2$, 求 a,b

例题 7.44.

设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 二阶导数连续, 证明:

$$\exists\xi\in[-1,1],\ s.t.\ \int_{-1}^{1}xf(x)dx=\frac{2f'(\xi)+\xi f''(\xi)}{3}$$

July 23

例题 7.45.

函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)|x-1|}{e^{\frac{1}{x-2}}\ln|x|}$ 的可去间断点个数

例题 7.46.

设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,$f(x)$ 为连续函数,$\varphi(x)$ 有间断点, 下列命题正确的是:

- A. $f(x)[|\varphi(x)|+\varphi^2(x)]$ 必有间断点
- B. 若 $f(x)$ 单调, 则 $\dfrac{\varphi(x)}{|f(x)|}$ 必有间断点
- C. $\dfrac{\varphi(x)}{1+f^2(x)}$ 必有间断点
- D. $f(x)\varphi(x)$ 必有间断点

July 24

例题 7.47.

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是 n 阶矩阵 A 的 m 个两两互异的特征值 $(m\le n)$, 对应的特征向量分别为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$, 令 $\eta=\sum\limits_{k=1}^{m}\xi_k$

证明: $\eta,A\eta,A^2\eta,\cdots,A^{m-1}\eta$ 线性无关

例题 7.48.

设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n}+x^{2n}}}$, $f(x)$ 在其定义域内:

- A. 连续
- B. 有 1 个可去间断点
- C. 有 1 个跳跃间断点
- D. 有 1 个第二类间断点

July 25

例题 7.49.

$$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{e^{y^2}}{\sqrt{x}}\right)dy$$

例题 7.50.

设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$, 函数 $f(x)$:

- A. 仅有 1 个间断点
- B. 仅有 2 个间断点, 其中 1 个可去间断点, 1 个无穷间断点
- C. 仅有 2 个间断点, 2 个都是跳跃间断点
- D. 有 2 个跳跃间断点和 1 个可去间断点

July 26

例题 7.51.

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$$

例题 7.52.

$$\int_0^1 \sin(\ln\frac{1}{x})\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$$

July 27

例题 7.53.

设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 且 $\dfrac{f(x)-2x}{e^{x-1}-1}-\dfrac{1}{\ln x}$ 在 $x=1$ 的某去心邻域有界, 求 $f(1)$

例题 7.54.

设 α,β 均为 3 维单位列向量, $\alpha^T\beta=\dfrac{1}{2}, A=\alpha\beta^T+\beta\alpha^T$, 求二次型 x^TAx 在正交变换下的标准型

变式

$A=\alpha\beta^T$, 求二次型 $f=x^TAx$ 在正交变换下的标准型.

July 28

例题 7.55.

已知函数 $f(x)=\dfrac{(x^2+a^2)(x-1)}{e^{\frac{1}{x}}+b}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有一个可去间断点和一个跳跃间断点, 求 a,b

例题 7.56.

$$\int \frac{x^2(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}+1)}e^x dx$$

July 29

例题 7.57.

函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$, 判断 $x=0$ 处连续性、可导性以及极值情况

例题 7.58.

$A=(a_{ij})_{3\times3}$ 是实对称矩阵, A 的每行元素之和为 0, 设 2, 3 是 A 的非零特征值, 求 a_{11} 对应的代数余子式

July 30

例题 7.59.

下列函数在 $x=0$ 处不可导的是:

- A. $\int_0^x(|t|+t)dt$
- B. $|x|[x+\int_0^{|x|}e^{t^2}dt]$
- C. $|\tan x-\sin x|$
- D. $\sin|x|+\cos|x|$

例题 7.60.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 证明:

$$\exists\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\in(a,b)(\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_n),\ s.t.\ f'(\xi_1)f'(\xi_2)\cdots f'(\xi_n)=\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]^n$$

July 31

例题 7.61.

已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有定义, 且 $\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)=0$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f[\varphi(x)]-f(0)}{\varphi(x)}$ 存在和 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导之间关系

1.

例题 7.62.

设存在连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=1+\lambda\int_x^1f(y)f(y-x)dy$, 证明: $\lambda\le\dfrac{1}{2}$

第 8 章 August

8.1 Week I

August 1

例题 8.1.

已知 $f(x)$ 为奇函数, $f'_+(0)$ 存在和 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导关系

例题 8.2.

$$\int_0^1 dx \int_{1-x}^{2-x} e^{(x+y)^2}(\sin^2 x+\cos^2 y)dy+\int_1^2 dx \int_0^{2-x} e^{(x+y)^2}(\sin^2 x+\cos^2 y)dy$$

August 2

例题 8.3.

已知函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内可导, $f'(x_0)>0$ 与 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内单调递增关系

例题 8.4.

$I_n=\int_1^{+\infty}\dfrac{\sqrt{t-1}}{t^n}dt\ (n\geq 2)$, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{I_{n+1}}{I_n}$

August 3

例题 8.5.

设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某个邻域内有定义, 下列命题中正确的个数:

- A. 若 $f'(x_0)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续
- B. 若 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续
- C. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续
- D. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续

例题 8.6.

A 为 3 阶实对称矩阵, 特征值为 $0,1,1$, 且 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\a\\0\end{bmatrix}, \alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\a\end{bmatrix}$ 是 A 的两个不同的特征向量, 若 $A(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_2$, 求矩阵 A

August 4

例题 8.7.

设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sqrt{\dfrac{(1+x^2)\sqrt{x}}{e^{x-1}}}+\arctan\dfrac{x^2-1}{\sqrt{1+x^2}}$ 在点 $(1,\sqrt{2})$ 处相切, 求 $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)+1-\sqrt{2}]^{\frac{1}{\ln x}}$

例题 8.8.

求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2+mx_3)(2x_1+3x_2+nx_3)$ 的正惯性指数

August 5

例题 8.9.

确定函数 $g(x)=\left|x^3-x-\sin x\right|$ 不可导的点的个数

例题 8.10.

设 A 为 n 阶矩阵, n 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是方程组 $Ax=0$ 的基础解系, $\exists\beta_i$, $s.t.\ A\beta_i=\alpha_i(i=1,2,\cdots,t)$, 分析下列命题正确的个数

- A. 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性无关
- B. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性无关
- C. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 均是方程组 $A^2x=0$ 的解

- D. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 均是方程组 $A^2x = 0$ 的基础解系

August 6

例题 8.11.

设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x^4 & x < 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$, 若 $y = f[g(x)]$, 求 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1}$ 和 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$

例题 8.12.

设 A 为 3 阶矩阵, α 为 3 维列向量, $A^2\alpha \neq 0, A^3\alpha = 0$, 下列说法错误的是:

- A. A 只有 0 特征值
- B. $r(A) = 2$
- C. A 能相似对角化
- D. A 不是对称矩阵

August 7

例题 8.13.

设 $\varphi(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 函数 $f(x)$ 可导, 求 $F(x) = f[\varphi(x)]$ 的导数

例题 8.14.

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上导函数连续, $f(0) = f(\frac{1}{2}) = f(1) = 0, |f'(x)| \leq M$, 求证:

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \leq \frac{M}{8}$$

8.2 Week II

August 8

例题 8.15.

设 A 是 n 阶矩阵, 下列说法错误的是:

- A. 对于任意的 n 维列向量 ξ, 有 $A\xi = 0$, 则 $A = 0$
- B. 对于任意的 n 维列向量 ξ, 有 $\xi^T A\xi = 0$, 则 $A = 0$
- C. 对于任意的 n 阶矩阵 B, 有 $AB = 0$, 则 $A = 0$
- D. 对于任意的 n 阶矩阵 B, 有 $B^T AB = 0$, 则 $A = 0$

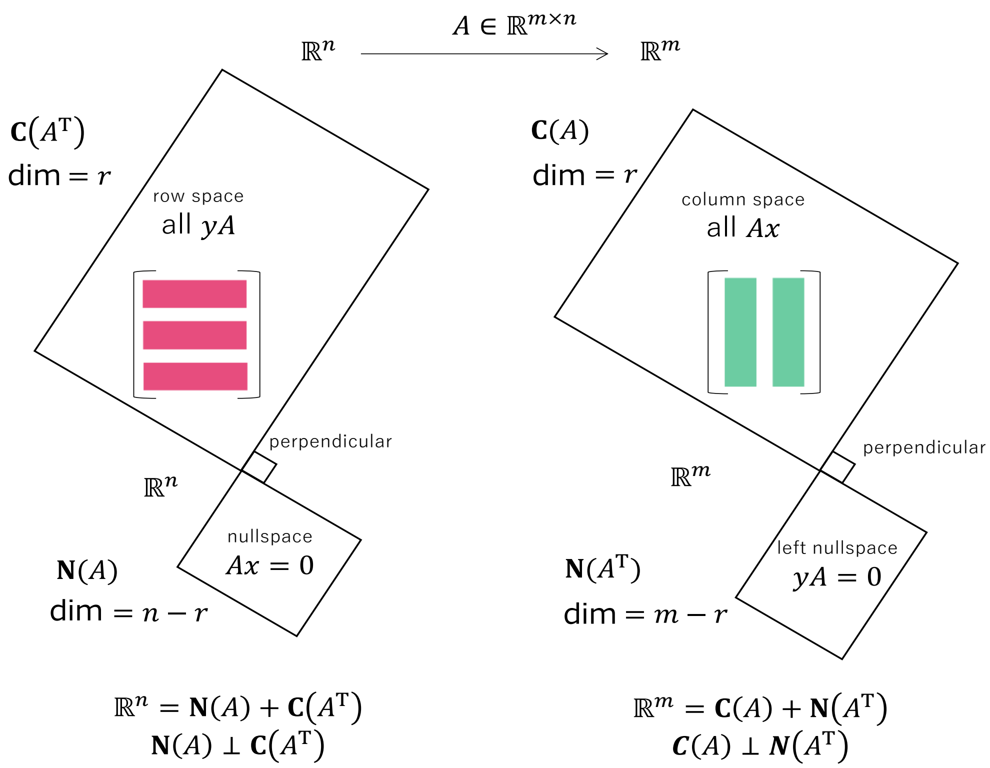


图 8.1: 四个子空间

例题 8.16.

设函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f[(x+h)^2] - f(x^2+h)}{h} = 1, f(1) = 1$, 求 $f(x)$

August 9

例题 8.17.

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上导函数连续, $f(0) = f(1) = 0$, 证明:

$$\int_0^1 f^2(x)dx \le \frac{1}{8}\int_0^1 [f'(x)]^2 dx$$

定理 8.2.1 (积分形式柯西不等式)

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$$

我们知道 $\forall t \in \mathbb{R}$, 我们有:

$$[tf(x)-g(x)]^2 \ge 0 \Rightarrow t^2f^2(x)-2tf(x)g(x)+g^2(x) \ge 0$$

我们对上式子两边在区间 $[a,b]$ 上积分, 可以得到:

$$t^2\int_a^b f^2(x)dx - 2t\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \ge 0$$

我们可以得到一个关于 t 的一元二次方程方程:

$$At^2+Bt+C \ge 0, \text{其中} \begin{cases} A=\int_a^b f^2(x)dx \\ B=-2\int_a^b f(x)g(x)dx \\ C=\int_a^b g^2(x)dx \end{cases} \Rightarrow B^2-4AC \le 0$$

我们得到:

$$4\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 - 4\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx \le 0$$

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$$

例题 8.18.

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+\frac{1}{2}\right]^{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}$$

August 10

例题 8.19.

设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin x-\int_x^y \varphi(u)du=0$ 所确定, 其中可导函数 $\varphi(u)>0$, 且 $\varphi(0)=\varphi'(0)=1$, 求 $y''(0)$

例题 8.20.

设 $a_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$

(1). 证明: $\frac{1}{2(n+1)} \le a_n \le \frac{1}{2n}(n=1,2,\cdots)$

(2). 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{2n}-\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\right]$ 绝对收敛

August 11

例题 8.21.

设 $x=x(y)$ 是函数 $y=\ln x+e^x$ 的反函数, 求 $\dfrac{d^2x}{dy^2}$

例题 8.22.

设 $a_0=1, a_1=0, a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})(n=1,2,3\cdots)$, $S(x)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的和函数

(1). 证明: 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的收敛半径不小于 1

(2). 证明: $(1-x)S'(x)-xS(x)=0, x\in(-1,1)$, 并求出 $S(x)$ 的表达式

August 12

例题 8.23.

设 $y=y(x)$ 由 $e^y\sin t-y+1=0$ 和 $x=\begin{cases}\dfrac{e^t-1}{t} & t\neq 0\\ 1 & t=0\end{cases}$ 所确定, 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}|_{t=0}$

例题 8.24.

下列命题正确的是:

- A. 设 A 为 3 阶矩阵, 若 A 的特征值 $\lambda_1\neq 0, \lambda_2\neq 0, \lambda_3=0$, 则 $r(A)=2$
- B. 设 A 为 3 阶非零矩阵, 若 $A^2=0$, 则 $r(A)=1$
- C. 设 A, B 为 3 阶矩阵, 若 A 与 B 等价, 则 $|A|=|B|$
- D. 设 A, B 为 3 阶实对称矩阵, 若 A 与 B 合同, 则 $|A|=|B|$

August 13

例题 8.25.

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{2nx+x^2}{2n^2}\right)^{-n} & x\neq 0\\ \lim\limits_{n\to+\infty}2\left[\dfrac{n}{(n+1)^2}+\dfrac{n}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{n}{(n+n)^2}\right] & x=0\end{cases}$$

求 $\int f(x)dx$

例题 8.26.

已知函数 $f(x) = x^2 \ln(1-x)$, 当 $n \geq 3$ 时, 求 $f^{(n)}(0)$

August 14

例题 8.27.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $f(0) = f(1) = -2$, 证明: $\exists \xi \in (0,1)$, $s.t.\ f'(\xi) - f(\xi) = \xi$

例题 8.28.

设数列 $\{u_n\}$ 满足 $u_1 = 1, u_{n+1} = \dfrac{u_n+3}{u_n+1}(n = 1,2,\cdots)$, 证明数列 $\{u_n\}$ 收敛, 并求其极限

8.3 Week III

August 15

例题 8.29.

$$f(x) = \int_1^x \frac{\arctan t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}} \ln(1+t^2)} dt$$

求 $\int_0^1 \dfrac{x}{1+x^2} f(x) dx$

例题 8.30.

设 $f(x) = \dfrac{1}{1+2x+4x^2}$, 求 $f^{(100)}(0)$

August 16

例题 8.31.

证明:

$$\exists x_1, x_2, x_3 \in (0,2)(x_1 < x_2 < x_3),\ s.t.\ \frac{1-\ln(1+x_1)}{(1+x_1)^2} x_3 = \frac{1-\ln(1+x_2)}{(1+x_2)^2}(2-x_3)$$

例题 8.32.

$$y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

(1). 证明: $(1-x^2)y^{(n+1)} - (2n+1)xy^{(n)} - n^2y^{(n-1)} = 0(n \geq 1)$
(2). 求 $y^{(n)}(0)$

August 17

例题 8.33.

$$f(x) = \lim_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$$

求 $f(x)$ 的间断点, 并指出其类型

例题 8.34.

证明:

$$\int_0^{\pi} x a^{\sin x} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\cos x} dx \geq \frac{\pi^3}{4}$$

August 18

例题 8.35.

设函数 $f(x) = \begin{cases} x|x| & x \leq 0, \\ x\ln x & x > 0, \end{cases}$,$x=0$ 处 $f(x)$ 的可导性判断、$x=0$ 是否为 $f(x)$ 的极值点

例题 8.36.

$f(x) = \prod_{n=1}^{100}\left(\tan\frac{\pi x^n}{4} - n\right)$, 求 $f'(1)$

我们令 $g(x) = \prod_{n=2}^{100}\left(\tan\frac{\pi x^n}{4} - n\right)$, 我们得到:

$$f(x) = (\tan\frac{\pi x}{4} - 1)g(x)$$

$$f'(x) = \frac{\pi}{4\cos^2\frac{\pi x}{4}}g(x) + g'(x)(\tan\frac{\pi x}{4} - 1)$$

$$f'(1) = \frac{\pi}{2}g(1) = \frac{\pi}{2}\times(1-2)\times(1-3)\cdots\times(1-100) = -\frac{\pi}{2}99!$$

August 19

例题 8.37.

$$f(x)=\begin{cases}\int_0^x \cos\frac{1}{t}dt & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}, 求\ f'(0)$$

例题 8.38.

$f(x)$ 可导, 且满足 $x=\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t-x)dt$, 求 $f(x)$ 以及 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left|f(x)\right|^6dx$

August 20

例题 8.39.

设函数 $f(x)=\int_{-1}^x t\ln|t|dt, x=0$ 处 $f(x)$ 的可导性判断、$x=0$ 是否为 $f(x)$ 的极值点

例题 8.40.

函数 $f(x)=(x+1)\left|x^2-1\right|$ 驻点和极值点个数

August 21

例题 8.41.

$f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内二阶可导, 且 $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right]=\frac{1}{3}$, 求 $f(0), f'(0)$ 和 $f''(0)$

例题 8.42.

设 $f(x)$ 连续, 且 $x>1, f(x)\left[\int_0^x f(t)dt+1\right]=\frac{xe^x}{2(1+x)^2}$, 求 $f(x)$

8.4 Week IV

August 22

例题 8.43.

设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f'(0)=0, \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)+f(x)-f(-x)}{|x|}=1$, 下列说法正确的是:

- A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 极大值
- B. $f''(0)>0, f(0)$ 是 $f(x)$ 极小值

- C. $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
- D. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极值点, $(0, f(0))$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

例题 8.44.

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{t}{\cos\theta}} \frac{\sin(r^2 \sin\theta\cos\theta)}{\sin\theta} dr$$

August 23

例题 8.45.

设 $f(x)$ 连续, 且 $f(x) \neq 0, f(1) = \sqrt{2}$

$$\forall x, y \in (-\infty, +\infty), f(x+y) - f(x) = \int_x^{x+y} \frac{t}{f(t)}(t^2+1)dt$$

求 $f(x)$

例题 8.46.

设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 连续, 在 $(0, +\infty)$ 恒正, $x > 0, [f(x)]^3 \leq 3\int_0^x f^2(t)dt$, 证明:

$$x \geq 0, f(x) \leq x$$

August 24

例题 8.47.

$f(x) = \dfrac{x|x|}{1+x}$, 求 $f(x)$ 的凹凸区间和渐近线

例题 8.48.

函数 $f(x)$ 具有二阶连续的导数, 曲线 $y = f(x)$ 既关于 y 轴对称也关于直线 $x = 1$ 对称, 求 $\int_{-2}^{2}(x-2024)f''(x)dx$

August 25

例题 8.49.

设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} x+y & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1 \\ 0 & others \end{cases}$

(1). 求 $\max\{X,Y\}$ 的分布函数和概率密度

(2). 求 $\min\{X,Y\}$ 的分布函数和概率密度

例题 8.50.

曲线 $y=x(1+\arcsin\frac{2}{x})$ 的斜渐近线

August 26

例题 8.51.

$$\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{x^2-x+1}dx$$

例题 8.52.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$$

August 27

例题 8.53.

$f(x)=\arctan x$, 求 $f^{(n)}(0), n\in\{2k+1, k\in\mathbb{Z}^+\}$

例题 8.54.

设 $f(x)=\begin{cases} ax+1 & x<0 \\ be^x & x\ge 0 \end{cases}$ 为可导函数, 求 $\int f(\ln x)dx$

August 28

例题 8.55.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, $f(a)=a$, $\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$, 证明:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1$$

例题 8.56.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x}{(1+2^x)(1+\cos^2 x)} dx$$

August 29

例题 8.57.

$$\int_0^1 \frac{\arctan e^{2x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} dx$$

例题 8.58.

求曲线 $y = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+x^2}$ 的渐近线所围区域的面积

August 30

例题 8.59.

随机变量 X 服从分布 $X \sim E(1)$, 随机变量 Y 服从分布 $Y \sim B(1, \dfrac{1}{2})$, X, Y 相互独立, 随机变量 $Z = X - Y$, 求 $f_z(Z)$

例题 8.60.

设 $f(x)$ 是单调可导函数,$f(-\dfrac{\pi}{2}) = -f(\dfrac{\pi}{2})$, $g(x)$ 是 $f(x)$ 反函数

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{f(x)} g(t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \left(\frac{1}{1+e^{-|t|}} + \frac{\sin t}{1+e^{-\frac{\pi}{2}}}\right) \sin t dt$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

August 31

例题 8.61.

设 $f(x) = \arctan x \cdot e^{ax}$, 且 $f'''(0) = 2$, 求 a^2

例题 8.62.

设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 的导函数连续,$f(0) = 0$, $\left|f'(x) - f(x)\right| \le 1$, 证明: $|f(x)| \le e^x - 1$

第 9 章 September

9.1 Week I

September 1

例题 9.1.

求曲线 $y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}(x>0)$ 的斜渐近线

例题 9.2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx$$

September 2

例题 9.3.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^n x}dx$$

例题 9.4.

设随即变量 (X,Y) 的联合概率密度为: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{21}{4}x^2y & x^2\le y\le 1\\ 0 & others\end{cases}$, 求 $P\{Y\ge 0.75|X=0.5\}$

September 3

例题 9.5.

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$, 其中 $g(x)$ 在 $x=0$ 的一个邻域内有二阶导数, 且 $g(0)=0$, $g'(0)=0$, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处

- A. 不连续
- B. 连续, 但 $f'(0)$ 不存在
- C. $f'(0)$ 存在, 但 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续
- D. $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

例题 9.6.

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, $a_n=\int_0^1 f(nx)dx$, 证明: $k>0$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n^2}{n^k}$ 收敛

September 4

例题 9.7.

已知方程 $x^5-5x+k=0$ 有三个不同的实数根, 求 k 的取值范围

例题 9.8.

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)}dx$$

September 5

例题 9.9.

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$$

例题 9.10.

$$\lim_{x\to 0}\int_{\ln(1+x)}^{x}\frac{(1-2t)^{\frac{1}{t}}}{t^2}dt$$

September 6

例题 9.11.

已知 $f(x)=[x]\sin\pi x$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 求 $f'(x)$

例题 9.12.

设函数 $f(x)=ax-b\ln x(a>0)$ 有两个零点, 求 $\frac{b}{a}$ 的取值范围

September 7

例题 9.13.

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x+\sqrt{1-x^2}}dx$$

例题 9.14.

$$\int_0^1 \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}dx$$

9.2 Week II

September 8

例题 9.15.

$$\lim_{n\to+\infty}\left[1+\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right)\right]^n$$

例题 9.16.

设 $f_n(x)=\tan^n x(n=1,2,\cdots)$, 且曲线 $y=\tan^n x$ 在点 $x=\frac{\pi}{4}$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(x_n,0)$, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n)$

September 9

例题 9.17.

设 A 是 3 阶实对称矩阵, 且不可逆

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot A = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 3 \\ -12 & -6 & 12 \end{bmatrix}$$

求 A

例题 9.18.

已知方程 $\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} = k$ 在区间 $(0,1)$ 有实数根, 求 k 的取值范围

September 10

例题 9.19.

设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$, 则下列关于 $y = \dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}$ 的命题正确的个数

- A. 有垂直渐近线
- B. 有水平渐近线
- C. 有斜渐近线
- D. 是有界函数

例题 9.20.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$$

September 11

例题 9.21.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1-x^2+x^4)}{(1+x^2)\ln x} dx$$

例题 9.22.

已知函数 $f(x)$ 三阶可导, 则下列命题中不是 $(0, f(0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点的必要条件的有:

- A. $\exists\delta>0$, $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调下降,$f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加
- B. $\exists\delta>0, x\in(-\delta,\delta)$, $f''(-x)=-f''(x)$
- C. $f''(0)=0, f'''(0)\neq 0$

September 12

例题 9.23.

下列命题正确的是:

- A. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=a$, 则 $f'(x_0)=a$
- B. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 不存在, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处不可导
- C. 若 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续, 则在 x_0 的某邻域内 $f'(x)$ 存在
- D. 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导,$g(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导, 则 $f(x)\cdot g(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导

例题 9.24.

证明不等式和求极限

(1). 证明: $\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$, $(n\in\mathbb{N}^*)$

(2). 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{n^2+i}{n^2}$

September 13

例题 9.25.

设区域 $D_1:\{(x,y)|0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1\}$,$D_2:\{(x,y)|x^2+y^2\leq r^2,\ (r>0)\}$, 比较 $I=\iint\limits_{D_1}(\cos x^2+\sin y^2)\,dxdy$, $J=\iint\limits_{D_1}\sqrt{2}dxdy$, $K=\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{D_2}e^{x^2-y^2}\cos(x+y)dxdy$ 大小

1.

例题 9.26.

证明: 若在区间 I 上 $f^{(n)}(x)\neq 0$, 则方程 $f(x)=0$ 在 I 上最多 n 个实数根

September 14

例题 9.27.

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $(0,+\infty)$ 上 $f'(x)>0$, 下列命题正确的是:

- A. 若 $f(0)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在
- B. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2024$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=2024$
- C. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=1$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$
- D. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=1$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt=\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在

例题 9.28.

讨论 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x^m|\ln x|^n}{1+x^k}dx$ 的敛散性

9.3 Week III

September 15

例题 9.29.

函数 $y=\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$, 下列说法正确的是:

- A. 当 n 无论为偶数还是奇数时, 函数都取极值
- B. 当 n 无论为偶数还是奇数时, 函数都不取极值
- C. 当 n 为偶数时, 函数取极值; 当 n 为奇数时, 函数不取极值
- D. 当 n 为偶数时, 函数不取极值; 当 n 为奇数时, 函数取极值

例题 9.30.

设 $f(x)$ 连续, $g(x)=f(x)\cdot\int_0^x f(t)dt$ 单调不增, 证明: $f(x)\equiv0$

September 16

例题 9.31.

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导, $f''(x)\neq0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{xf'(x)}=\alpha>0$, 且 $\exists x_0\in\mathbb{R}$, $s.t.\ f(x_0)<0$, 证明: 方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上恰有两个实数根

例题 9.32.

讨论 $\int_0^{+\infty} \frac{(1+x^p)\ln|\ln x|}{x^q}dx$ 的敛散性

September 17

例题 9.33.

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内可导,$g(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=0$, $f'(x)=\sin^2 x+\int_0^x g(x-t)dt$, 则下列命题正确的是:

- A. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点
- B. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点
- C. $(0,f(0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点
- D. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0,f(0))$ 不是 $y=f(x)$ 的拐点

例题 9.34.

设 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 是来自正态总体 X 的简单随机样本,$Y_1=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_6}{6}$, $Y_2=\frac{X_7+X_8+X_9}{3}$, $S^2=\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{9}(X_i-Y_2)^2$, $Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}$, 证明: $Z\sim t(2)$

September 18

例题 9.35.

设函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上可导, 且 $f'(x)>f(x)>0$, 下列命题正确的是:

- A. $\frac{f(-2)}{f(-1)}>1$
- B. $\frac{f(0)}{f(-1)}>e$
- C. $\frac{f(1)}{f(-1)}<e^2$
- D. $\frac{f(2)}{f(-1)}<e^3$

例题 9.36.

$D=\left\{(p,q)\middle|\int_0^{+\infty}\frac{x^p|x-1|^q}{(x+1)\ln x\ln(x+2)}dx \quad 收敛\right\}$, 求 D 绕 q 轴旋转一周扫过的体积

September 19

例题 9.37.

设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 下列哪些命题是 $\int_0^x f(t)dt$ 是以 T 为周期的周期函数的充分条件:

- A. $\int_0^T [f(t)-f(-t)]\,dt=0$
- B. $f(-x)=f(x)$
- C. $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ 收敛

例题 9.38.

设随机变量 X 和 Y 独立同分布,X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2} & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$, 令 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$, 求 $D(Z)$

September 20

例题 9.39.

已知常数 $k\geq \ln 2-1$, 证明: $(x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)\geq 0$

例题 9.40.

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(n-1)^3}{n(n+1)}x^n$ 的和函数 $S(x)$

September 21

例题 9.41.

设 $f(x)=x[\frac{1}{x}]$, $[\frac{1}{x}]$ 表示不超过 $\frac{1}{x}$ 的最大整数, 求 $f(x)$ 的间断点并判断其类型

例题 9.42.

设 $f(x,y)$ 在全平面上有连续的偏导数, 且 $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$, 证明: $f(x,y)$ 为常数

9.4 Week IV

September 22

例题 9.43.

设函数 $f(x)$ 二阶可导, $f(0)=1, f'(0)=0, \forall x \geq 0, f''(x)-5f'(x)+6f(x) \geq 0$, 证明:

$$f(x) \geq 3e^{2x}-2e^{3x}(x \geq 0)$$

例题 9.44.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!(n+1)}$$

September 23

例题 9.45.

$$\iint_D \left[x(1-y^3)+y(1+x^3)\right] dxdy$$

其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2 \leq 2x+2y\}$

例题 9.46.

设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx dx$, 证明:

$$a_n=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}(n \geq 1)$$

September 24

例题 9.47.

设三元二次型 $f=x^TAx$ 正定, 其中 $x=(x_1,x_2,x_3)^T$, A 为实对称矩阵, 则下列说法不正确的是:

- A. 仅在 $x=0$ 处 f 取得最小值
- B. 齐次方程组 $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3}=0 \end{cases}$ 只有零解

- C. 二阶偏导数矩阵 $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{3\times 3} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}$ 是正定矩阵
- D. $\exists \alpha \in \mathbb{R}^3 \neq 0,\ s.t.\ A = \alpha\alpha^T \rightarrow f = (\alpha^T x)^2$

例题 9.48.

证明:

$$\left|\frac{\sin x - \sin y}{x - y} - \cos y\right| \leq \frac{1}{2}\left|x - y\right| (x \neq y)$$

September 25

例题 9.49.

求幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{n^2 + 3n + 4}{2^n (n+1)!} x^{2n}$ 的和函数 $S(x)$

例题 9.50.

设线性方程组 $Ax = \alpha$ 有解, $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ 无解, 则下列结论正确的是:

- A. $r(B, \beta) = r(B) + 1$
- B. $r\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix} < r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + 1$
- C. $r\left[B^T (B, \beta)\right] > r(B^T B)$
- D. $r\left[(A^T, B^T)\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix}\right] = r\left[(A^T, B^T)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right]$

September 26

例题 9.51.

已知 $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^{\ln(3\cos x)} - 3^{\ln x}}{x^k \ln x} = c (c \neq 0)$, 求 c, k

例题 9.52.

设 $f(x,y)$ 在 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$ 内具有连续的偏导数, 且在边界上取值为 0, 证明:

$$f(0,0)=\lim_{\xi\to 0^+}\frac{-1}{2\pi}\iint_{D_1}\frac{x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}}{x^2+y^2}dxdy$$

其中 $(D_1=\{(x,y)|\xi^2\le x^2+y^2\le 1\})$

September 27

例题 9.53.

设 $f(x)$ 二阶可导, $f(x)>0, \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=1$, 且 $f(x)f''(x)>[f'(x)]^2$, 下列命题一定成立的是:

- A. $e^{-x}f(x)\ge 1$
- B. $e^{-x}f(x)<1$
- C. $\frac{\ln f(x)}{x}<1$
- D. $\frac{\ln f(x)}{x}>1$

例题 9.54.

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^3x^n$ 的和函数 $S(x)$

September 28

例题 9.55.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x+2)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+\sin x}}\right]$$

例题 9.56.

设 A 为 n 阶方阵, β 为 n 维非零列向量, 且 $r\begin{pmatrix}A^T\\ \beta^T\end{pmatrix}<r\begin{pmatrix}A^T & 0\\ \beta^T & 1\end{pmatrix}$, 下列说法正确的是:

- A. $\begin{pmatrix}A & \beta\\ \beta^T & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0$ 必有非零解

- B. $\begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ 只有零解
- C. 方程组 $Ax = \beta$ 必无解
- D. 方程组 $Ax = \beta$ 必有解

September 29

例题 9.57.

设 $X \sim N(0,1)$, 求 $E(X^4e^X)$

例题 9.58.

设 $f(x)$ 为非负连续函数, $x > 0$, $\int_0^x f(x)f(x-t)dt = x^3$, 求 $f(x)$

September 30

例题 9.59.

$a_{n+2} = \dfrac{2}{n+2}a_{n+1} + \dfrac{3}{(n+2)(n+1)}a_n (n \geq 0), a_0 = 0, a_1 = 1$, 已知 $a_3 > a_4 > a_5$, 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$

例题 9.60.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = 2$, $\int_0^1 f(x)dx = 1$

(1). 证明: $\exists \xi \in (0,1)$, $s.t.\ f'(\xi) = f(\xi) - 2\xi + 2$

(2). 证明: $\exists \eta \in (0,1)$, $s.t.\ f''(\eta) = 0$

(3). 证明: $\exists \zeta \in (0,1)$, $s.t.\ \int_0^\zeta f(t)dt + \zeta f(\zeta) = 2\zeta$

(4). 证明: $\exists \mu \in (0,1)$, $s.t.\ \mu f(\mu) = 2\int_0^\mu f(t)dt$

第 10 章 October

10.1 Week I

October 1

例题 10.1.

设 $I=\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos x^2dx,\ J=\int_0^{\sqrt{\pi}}\cos x^2dx,\ K=\int_0^{\pi}\sqrt{x}\cos x dx$, 比较 I,J,K 的大小

例题 10.2.

已知曲线 $L: y=x^2-1(-1\le x\le 2)$, 方向从 $A(-1,0)$ 到 $B(2,3)$, 求 $\int_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$

October 2

例题 10.3.

$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\ (x>0)$, 求 $\int f(x)dx$

例题 10.4.

$f(x)$ 连续,$f(x+2)-f(x)=\sin x,\ \int_0^2 f(x)dx=0$, 求 $\int_1^3 f(x)dx$

注

构造辅助函数: $F(x)=\int_x^{x+2} f(t)dt$

$$\begin{cases} F'(x)=f(x+2)-f(x)=\sin x \\ F(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x)=-\cos x+1 \\ F(1)=\int_1^3 f(x)dx=1-\cos 1 \end{cases}$$

October 3

例题 10.5.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=1, f(1)=0$, 证明:

(1). $\exists \xi_1, \xi_2 \in (0,1)(\xi_1 \neq \xi_2),\ s.t.\ f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=-2$

(2). $\exists \eta, \zeta \in (0,1)(\eta \neq \zeta),\ s.t.\ f'(\eta)f'(\zeta)=1$

例题 10.6.

设 $f(x)=\int_{-1}^{x} t\cos t dt, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 则曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的图形面积为:

- A. $2\int_0^1 x\sin x dx$
- B. $2\int_0^1 x^2 \sin x dx$
- C. $2\int_0^1 x\cos x dx$
- D. $2\int_0^1 x^2 \cos x dx$

October 4

例题 10.7.

设 Γ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线, 从 z 轴正向往负向看去为逆时针, 计算积分 $\oint_{\Gamma} xzdx+xdy+\frac{y^2}{2}dz$

例题 10.8.

$$\int \frac{1}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$$

October 5

例题 10.9.

$F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t dt$, 求 $F(x)$

例题 10.10.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $I=\int_0^1 f(x)dx\neq 0$, 证明:

$$\exists \xi,\eta\in(0,1)(\xi\neq\eta),\ s.t.\ \frac{1}{f(\xi)}+\frac{1}{f(\eta)}=\frac{2}{I}$$

October 6

例题 10.11.

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义, 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内可导, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 存在,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分条件为:

- A $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在
- B $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}$ 存在
- C $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续
- D $\int_0^x f(t)dt$ 在点 $x=0$ 处可导

例题 10.12.

$$\int x\arctan x\cdot\ln(1+x^2)dx$$

October 7

例题 10.13.

设 $\Gamma=\begin{cases} x=2\sqrt{1-y^2} \\ z=x+y \end{cases}$, 从 z 轴正向往负向看去为逆时针, 计算曲线积分 $\int_\Gamma \frac{ydx+zdy+xdz}{x^2+y^2+z^2}$

例题 10.14.

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是以 T 为最小正周期的连续奇函数, 下列函数中不是周期函数的个数:

- A. $\int_a^x f(t)dt$
- B. $\int_{-x}^a f(t)dt$
- C. $\int_{-x}^x tf(t)dt$
- D. $\int_{-x}^x t^2 f(t)dt$

10.2 Week II

October 8

例题 10.15.

设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布,$X \sim N(1,3^2), Y \sim N(0,4^2)$, 且满足 $\rho_{XY} = -\frac{1}{2}, Z = \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}$

(1). 求 $E(Z)$ 与 $D(Z)$

(2). 求 ρ_{XZ}

(3). 证明 X 与 Z 是否独立

例题 10.16.

$$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{xy}}dxdy, D = \{(x,y)|(\frac{x}{2}+\frac{y}{4})^2 \le \frac{x}{6}, x, y \ge 0\}$$

注

令

$$\begin{cases} \sqrt{x} = m \\ \sqrt{y} = n \end{cases} \qquad D' = \{(m,n)|\frac{(m-\frac{1}{\sqrt{6}})^2}{2} + \frac{n^2}{4} = \frac{1}{12}(m,n>0)\}$$

雅可比行列式: $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial m} & \frac{\partial x}{\partial n} \\ \frac{\partial y}{\partial m} & \frac{\partial y}{\partial n} \end{vmatrix} = 4mn$

$$dxdy = 4mndmdn \Rightarrow \iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{xy}}dxdy = \iint\limits_{D'} 4dmdn$$

$$I = 4S_{D'} = 2ab\pi = 2\pi \times \frac{1}{\sqrt{6}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}$$

October 9

例题 10.17.

$$\int \frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}dx$$

例题 10.18.

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足 $f(x) = f(x-\pi) + \sin x$, 且 $f(x) = x, x \in [0,\pi)$, 求 $\int_{\pi}^{3\pi} f(x)dx$

October 10

例题 10.19.

$$\int \frac{\cos^3 x - 2\cos x}{1 + \sin^2 x + \sin^4 x}dx$$

例题 10.20.

下列积分中, 与积分 $I = \int_0^1 \frac{1}{2}xe^{-\sqrt{x}}dx$ 值最接近的是

- A. $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$
- B. $\int_0^1 xe^{-x}dx$
- C. $\int_0^1 x^2e^{-x}dx$
- D. $\int_0^1 x^4e^{-x}dx$

October 11

例题 10.21.

$f(x) = \dfrac{(\sqrt[n]{x}-1)^n}{x+1}$, 求 $f^{(n)}(1)(n \geq 2)$

例题 10.22.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶导数连续, $f(1)=f'(1)=0, D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$, 证明:

(1). $\iint\limits_D f(x)dxdy=\iint\limits_D x^2yf''(x)dxdy$

(2). $\exists\xi,\eta\in(0,1),\ s.t.\ \xi^2f''(\xi)=2f'(\eta)(\xi-1)$

October 12

例题 10.23.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\left(\arctan e^x+\int_0^x e^{t^2}dt\right)}{1+\cos^2 x}dx$$

例题 10.24.

若 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(ax)}{x^n}dx$ 收敛, 求 n 的取值范围

October 13

例题 10.25.

设 $0<a<1, I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin ax}{\sin x}dx,\ I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan ax}{\tan x}dx$, 比较 I_1, I_2 和 $\frac{\pi a}{4}$ 的大小

例题 10.26.

$$\iint\limits_D\frac{\tan^3 x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

其中 $D=\{(x,y)|y\ge|x|,(x^2+y^2)^3\le y^4\}$

October 14

例题 10.27.

已知 $\int_1^{+\infty}\left(\frac{2x^2+bx+a}{2x^2+ax}-1\right)dx=0$, 求 a,b

例题 10.28.

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)}{n+\frac{1}{k}}-\ln n\right]$$

10.3 Week III

October 15

例题 10.29.

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^4)}$$

例题 10.30.

设随机变量 $Y=min\{|X|,1\}$, 其中 X 为随机变量, 且密度函数为 $f(x)=\dfrac{k}{1+x^2}(x\in\mathbb{R},k\equiv C)$, 下列说法不正确的是:

- A. $k=\dfrac{1}{\pi}$
- B. $E(X)=0$
- C. Y 没有概率密度
- D. $E(Y)=\dfrac{\ln(2e^{\frac{\pi}{2}})}{\pi}$

October 16

例题 10.31.

求 $y=e^{-x}\sqrt{\sin x}(0\le x<+\infty)$ 绕 x 轴旋转一周的旋转体体积

例题 10.32.

已知 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^{\alpha}}dx$ 收敛, 求 α 的取值范围

October 17

例题 10.33.

设随机变量 X,Y 相互独立, 且 $X\sim N(0,1),Y\sim B(n,p),0<p<1$, 且 $X+Y$ 的分布函数:

- A. 是连续函数
- B. 恰有 $n+1$ 个间断点

- C. 恰有 1 个间断点
- D. 有无穷个间断点

例题 10.34.

微分方程 $\cos^4 x\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\cos^2 x(1-\sin x\cos x)\dfrac{dy}{dx}+y=e^{-\tan x}$, 求该微分方程在 $t=\tan x$ 变换下所得的 y 对 t 的微分方程, 并求出其通解

October 18

例题 10.35.

$$\iint\limits_D \arcsin(2\sqrt{x-x^2})dxdy, D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le x\}$$

例题 10.36.

设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^{n+1}-x^2}{x^n+1}$,$F(x)=\int_0^x f(t)dt$, 下列说法正确的是:

- A. $f(x)$ 有 1 个间断点,$F(x)$ 有 1 个不可导点
- B. $f(x)$ 有 1 个间断点,$F(x)$ 有 2 个不可导点
- C. $f(x)$ 有 2 个间断点,$F(x)$ 有 1 个不可导点
- D. $f(x)$ 有 2 个间断点,$F(x)$ 有 2 个不可导点

October 19

例题 10.37.

$x\ge 0$, 连续函数 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 非负, 且满足方程 $\int_0^{x^2} f(x^2)f(t)dt=\dfrac{1}{2}(\sqrt{1+x^2}-1)$, $F(0)=0$, 求 $f(x)$

例题 10.38.

证明:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

October 20

例题 10.39.

设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有连续的一阶导数, $f'(x)=\dfrac{1}{1+f^2(x)}\left[\sqrt{\dfrac{1}{x}}-\sqrt{\ln(1+\dfrac{1}{x})}\right]$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在

例题 10.40.

函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, $f(0)=1$ 且满足等式:

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0$$

(1). 求 $f'(x)$

(2). 证明: $x\geq 0, e^{-x}\leq f(x)\leq 1$

October 21

例题 10.41.

设 $f(x)=\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt(x\geq -1)$, 求曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的面积

例题 10.42.

设函数 $f(x)$ 连续, $f'(0)$ 存在, $\forall x,y\in\mathbb{R}, f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}$, 且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$, 求 $f(x)$

10.4 Week IV

October 22

例题 10.43.

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上具有二阶连续导数, $f(0)=f'(0)=0, f''(0)=1, \forall x>0, u(x)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距, 当 $x\to 0^+$ 时, 下列等价无穷小不成立的是:

- A. $f(x)\sim\dfrac{x^2}{2}$
- B. $x\cdot f(u(x))\sim\dfrac{u(x)\cdot f(x)}{2}$
- C. $\int_0^x u(t)dt\sim\dfrac{x^2}{4}$

- D. $\int_0^{f(x)} u(t)dt \sim \dfrac{x^4}{4}$

例题 10.44.

比较 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{1+x^2}dx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{1+x^2}dx$ 的大小

October 23

例题 10.45.

求曲线 $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ 与其渐近线所围区域绕该渐近线旋转所得旋转体体积

例题 10.46.

设 A 是 n 阶矩阵, A 的第 i 行第 j 列元素为 a_{ij}, 满足 $a_{ij} = i \cdot j$, 下列命题正确的是:

- A. $r(A) = 1$
- B. 矩阵 A 不可相似对角化
- C. 矩阵 A 的特征值之和为 $\sum\limits_{k=1}^{n} k$
- D. 矩阵 A 的特征值之和为 $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$

October 24

例题 10.47.

$$\iint\limits_D \frac{1}{x^4+y^2}dxdy, D = \{(x,y)|y \geq x^2+1\}$$

例题 10.48.

$$\iint\limits_D \frac{1}{x^4+y^2}dxdy, D = \{(x,y)|x \geq 1, y \geq x^2\}$$

October 25

例题 10.49.

曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = mx(m > 0)$ 在第一象限内所围成的图形绕该直线旋转所形成的旋转体的体积 V

例题 10.50.

设函数 $f(x, y) = \begin{cases} (xy + a|x| + b\sqrt{|y|}) \arctan \dfrac{1}{|x| + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$，下列说法中正确的是:

- A. $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处的连续性和 a, b 的取值有关
- B. $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处偏导数存在的充要条件是 $ab = 0$
- C. $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微的充要条件是 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处偏导数存在
- D. $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极值点

October 26

例题 10.51.

设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f'(x) + f^2(x) \geq 0, f(0) = 1, f(x) \neq 0$, 证明: $f(x) \geq \dfrac{1}{x+1}$

例题 10.52.

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $\int_0^1 f(x)dx = 0$

- A. 当 $f'(x) < 0$ 时,$f(\frac{1}{2}) < 0$
- B. 当 $f''(x) < 0$ 时,$f(\frac{1}{2}) < 0$
- C. 当 $f'(x) > 0$ 时,$f(\frac{1}{2}) < 0$
- D. 当 $f''(x) > 0$ 时,$f(\frac{1}{2}) < 0$

October 27

例题 10.53.

$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求曲线 $y = f(x)$ 在 $(-1, 2)$ 内存在水平切线的条数

例题 10.54.

已知正值连续函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调减少,$\forall a,b(0<a<b<1)$, 下列结论不正确的是

- A. $a\int_0^b f(x)dx > b\int_0^a f(x)dx$
- B. $b\int_0^a f(x)dx > a\int_0^b f(x)dx$
- C. $a\int_0^b \sqrt{f(x)}dx < b\int_0^a \sqrt{f(x)}dx$
- D. $b\int_0^a \sqrt{f(x)}dx < a\int_0^b \sqrt{f(x)}dx$

October 28

例题 10.55.

设函数 $\varphi(x,y)$ 的全微分为 $dz=(2x-y^2-2y)dx+(-2xy-2x+y^3+3y)dy$,$f(x,y)$ 连续, 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{\varphi(x,y)}=-1$

- A. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点
- B. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点
- C. 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点
- D. 不能确定点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点

例题 10.56.

求 $\int_L \dfrac{|y|}{x^2+y^2+z^2}ds$, 其中 $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^2+y^2=2ax \qquad (a>0) \\ a\geq 0 \end{cases}$

October 29

例题 10.57.

设 $I_1=\int_0^\pi \dfrac{x\sin^2 x}{1+e^{\cos^2 x}}dx$,$I_2=\int_0^\pi \dfrac{\sin^2 x}{1+e^{\cos^2 x}}dx$, $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^2 x}{1+e^{\sin^2 x}}dx$, 比较 I_1,I_2,I_3 的大小

例题 10.58.

设 $f(u,v)$ 有一阶偏导数,$f(x,1-x)=1$, $f_1'(x,1-x)=x$

(1). 设 $z(t)=f(\cos t,\sin t)$, 计算 $z'(0)$

(2). 证明: $f(u,v)$ 在单位圆周上至少存在两个不同的点满足方程: $v\dfrac{\partial f}{\partial u}=u\dfrac{\partial f}{\partial v}$

October 30

例题 10.59.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续可导,$\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{2}$, $\int_0^1 xf(x)dx=\frac{3}{2}$, 证明: $\exists\xi\in(0,1)$, $s.t.\ f'(\xi)=3$

例题 10.60.

$$\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos^3x)(1-\cos^{17}x)}{\frac{x^2}{2}-\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)!}t^{2n+1}dt}$$

October 31

例题 10.61.

设偶函数 $f(t)$ 具有连续的导函数, 且满足 $f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\le4t^2}f(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2})dxdy$, 求方程 $\int_0^x\sqrt{1+4\pi t^2}dt+\int_{\cos x}^0\frac{1+4\pi t^2}{f(t)}dt=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内根的个数

例题 10.62.

设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=f(2)=0, f(1)=a>0$ 且 $f''(x)<0$

- A. $\int_0^2 f(x)dx>a$
- B. $\int_0^2 f(x)dx<a$
- C. $\int_0^1 f(x)dx>\int_1^2 f(x)dx$
- D. $\int_0^1 f(x)dx<\int_1^2 f(x)dx$

第 11 章 November

11.1 Week I

November 1

例题 11.1.

设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2\sin x}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处

- A. 不连续
- B. 连续但不可导
- C. 可导但不可微
- D. 可微

例题 11.2.

$$\iint\limits_D \frac{1-x^3y^2}{(y+2\sqrt{1-x^2})^2}dxdy$$

其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1,-y\leq x\leq y\}$

November 2

例题 11.3.

$$\iiint\limits_{\Omega}(mx+ly+nz)^2dv$$

其中 $\Omega=\{(x,y,x)|x^2+y^2+z^2\leq a^2(a>0)\}$

例题 11.4.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上导函数连续,$f'(a)=f'(b)$, 证明:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$$

November 3

例题 11.5.

下列函数在 $(0,0)$ 点可微的是:

- A. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$
- B. $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$
- C. $\varphi(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$
- D. $\psi(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

例题 11.6.

已知 $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-c)=k$

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^3&b^3&c^3&d^3\\a^4&b^4&c^4&d^4\end{vmatrix}$$

November 4

例题 11.7.

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_{x+y}^1 \frac{\sin z}{z} dz$$

例题 11.8.

已知函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的某邻域内有定义, 则 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} f_x'(x,0) = f_x'(0,0) \\ \lim\limits_{y\to 0} f_y'(0,y) = f_y'(0,0) \end{cases}$ 和 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微关系

November 5

例题 11.9.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$$

A 是 n 阶可逆矩阵 $(b \neq 0)$, 求 A^{-1}

例题 11.10.

求微分方程 $y'' + (4x + e^{2y})(y')^3 = 0$ 的通解, 其中 $y' \neq 0$

November 6

例题 11.11.

设 $f(x)$ 二阶可导, $f^2(x) - f^2(y) = f(x+y) - f(x-y)$

(1) 证明: $f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$

(2) 若 $f''(1) = f(1) = 1$, 求 $f(x)$

例题 11.12.

$$z = \frac{x\cos(y-1) - (y-1)\cos x}{1 + \sin x + \sin(y-1)}$$

求 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)}$

November 7

例题 11.13.

已知 A 是正交矩阵, $A^* = A^T$ 和 $|A| = 1$ 关系

例题 11.14.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{i}}\right)$$

11.2 Week II

November 8

例题 11.15.

已知 $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, 求 $f''_{xy}(0,0) \cdot f''_{yx}(0,0)$

例题 11.16.

设矩阵 $A = (a_{ij})$ 满足 $a_{ij} = A_{ij}, a_{11} = -1$, 求 $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的解

November 9

例题 11.17.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{\sqrt{x^3}} dx$$

例题 11.18.

方程 $x = e^{\sin^n x}(n = 1, 2, \cdots)$

(1). 证明方程在 $(\frac{\pi}{2}, e)$ 内有唯一实数根

(2). 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n - \frac{\pi}{2}}}$

November 10

例题 11.19.

若 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1, \begin{cases} z = \sin y & x = 0 \\ z = \sin x & y = 0 \end{cases}$, 求 $z(x, y)$

例题 11.20.

设矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ 满秩, 直线 $l_1 : \dfrac{x-a_1}{a_1-a_2} = \dfrac{y-b_1}{b_1-b_2} = \dfrac{z-c_1}{c_1-c_2}$ 与直线 $l_2 : \dfrac{x-a_1}{a_2-a_3} = \dfrac{y-b_1}{b_2-b_3} = \dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$ 关系

November 11

例题 11.21.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求 A^n

例题 11.22.

求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{(n+1)!} x^n$ 的和函数 $S(x)$

November 12

例题 11.23.

设可微函数 $f(x, y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -f(x, y), f(0, \dfrac{\pi}{2}) = 1$, 且 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{f(0, y+\frac{1}{n})}{f(0, y)}\right]^n = e^{\cot y}$, 求 $f(x, y)$

例题 11.24.

$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可微, $|f'(x)| < kf(x)(0<k<1)$

(1). $\exists\xi \in (-\infty,+\infty)$, $s.t.$ $\ln f(\xi)=\xi$

(2). 设 $a_n = \ln f(a_{n-1})(n=1,2,\cdots)$, 证明 $\{a_n\}$ 收敛

November 13

例题 11.25.

设 $f(x)$ 有连续一阶导数,$[xy-yf(x)]dx+[f(x)+y^2]dy = du(x,y)$, 且 $f(0)=-1$, 求 $u(x,y)$

例题 11.26.

(1). $\displaystyle\int_0^{\ln 2} dy \int_{e^y}^{2} \frac{e^{xy}}{x^x-1}dx$

(2). $\displaystyle\int_0^1 dx \int_x^1 ydy \int_y^1 \sqrt{1+z^4}dz$

November 14

例题 11.27.

$f(x)$ 在 $x=0$ 处 $n+1$ 阶可导, $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0, f^{(n)}(0)=a$, 求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(e^x-1)-f(x)}{x^{n+1}}$

例题 11.28.

函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z}+\dfrac{xyz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}=1$ 确定, 求 $dz\big|_{(0,0)}$

11.3 Week III

November 15

例题 11.29.

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有一阶连续导数

$$\forall\Sigma \in \mathbb{R}^3(x>0), \oiint_\Sigma e^{-x}f(x)dydz + y\sqrt{e^x-1}f^2(x)dzdx = 0$$

求 $f(x)$

例题 11.30.

设 $f(t)$ 在 $[t,+\infty)$ 上有连续二阶导数, 且 $f(1)=0, f'(1)=1, z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, 求 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最大值

November 16

例题 11.31.

设 $u=f(x,y,z), z=z(x,y)$ 是由方程 $\varphi(x+y,z)=1$ 所确定的隐函数, 其中 f 和 φ 有二阶连续偏导数且 $\varphi_2\neq 0$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, du, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$

例题 11.32.

设函数 $z=z(x,y)$ 的微分 $dz=(2x+12y)dx+(12x+4y)dy$ 且 $z(0,0)=0$, 求函数 $z=z(x,y)$ 在 $4x^2+y^2\leq 25$ 上的最大值

November 17

例题 11.33.

求累次积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$ 的等价形式

例题 11.34.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} \rho^2 d\rho + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dy$$

November 18

例题 11.35.

$$\int_0^1 dy \int_y^1 \sqrt{2xy-y^2}dx$$

例题 11.36.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{2n+1}}\left[\int_1^{\frac{1}{2n}}e^{-y^2}dy+\int_1^{\frac{3}{2n}}e^{-y^2}dy+\cdots+\int_1^{\frac{2n-1}{2n}}e^{-y^2}dy\right]$$

November 19

例题 11.37.

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

其中 $D=[0,1]\times[0,1]$

例题 11.38.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\left[\sin\theta+\cos\theta\sqrt{1+r^2\sin^2\theta}\right]r^2dr$$

November 20

例题 11.39.

$$\begin{cases} I_1=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}d\sigma \\ I_2=\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}d\sigma \\ I_3=\iint\limits_D(1-\cos\sqrt{x^2+y^2})d\sigma \end{cases}$$

其中 $D=\{(x,y)||x|+|y|\le\frac{\pi}{2}\}$, 比较 I_1,I_2,I_3 的大小

例题 11.40.

$$\begin{cases} I_1=\iint\limits_D(2x^2+\tan(xy^2))dxdy \\ I_2=\iint\limits_D(x^2y+2\tan(y^2))dxdy \\ I_3=\iint\limits_D(|xy|+y^2)dxdy \end{cases}$$

其中 $D=\{(x,y)||x|+|y|\le 1\}$, 比较 I_1,I_2,I_3 的大小

November 21

例题 11.41.

可微函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(x)dx$, 且 $f(0) = 1$, 求 $f(x)$

例题 11.42.

设 $f(x)$ 是可导函数, 且 $f(0) = 0, g(x) = \int_0^1 xf(tx)dt$ 满足方程 $f'(x) + g'(x) = x$, 则由曲线 $y = f(x), y = e^{-x}$ 及直线 $x = 0, x = 2$ 围成的平面图形的面积

11.4 Week IV

November 22

例题 11.43.

设函数 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f'(x) = f(1-x), f(0) = 1$, 求 $f(x)$

例题 11.44.

设函数 $f(x)$ 连续, $\lim\limits_{x\to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{x^4}} = a(a > 0)$, 且

$$\forall x, h \in \mathbb{R}, f(x+h) = \int_x^{x+h} t\left[f(t+h) + t^2\right]dt + f(x)$$

求 $f(x)$ 表达式和常数 a

November 23

例题 11.45.

设 $f(x)$ 为 $[0, +\infty)$ 上的正值连续函数, 已知曲线 $y = \int_0^x f(u)du$ 和 x 轴及直线 $x = t(t > 0)$ 所围成区域绕 y 轴旋转所得体积与曲线 $y = f(x)$ 和两坐标轴及直线 $x = t(t > 0)$ 所围区域的面积之和为 t^2, 求曲线 $y = f(x)$ 的方程

例题 11.46.

下列级数收敛的是:

- A. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{\ln(n!)}$
- B. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (2 - \dfrac{1}{n})^n \ln(1 + \dfrac{1}{n2^n})$
- C. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-2)^n n^2 + e^n}{ne^n}$

- D. $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n e^n}{3^n-2^n}$

November 24

例题 11.47.

下列级数条件收敛的是:

- A. $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$
- B. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})$
- C. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left[(-1)^n+\ln n\right]}{n}$
- D. $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$

例题 11.48.

讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}$ 敛散性

November 25

例题 11.49.

已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 条件收敛, 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n a_n^2$ 的敛散性

例题 11.50.

已知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 则下列级数一定收敛的是:

- A. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a_n}{n}$
- B. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$
- C. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$
- D. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^3+a_n^2}$

November 26

例题 11.51.

已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 下列四个级数一定收敛的个数:

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$
- B. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$
- C. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n}-a_{2n-1})$
- D. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}^2-a_n^2)$

例题 11.52.

设 a_n 为曲线 $y=\sin x, (0\le x\le n\pi)$ 与 x 轴所围区域绕 x 轴旋转所得到旋转体的体积, 求级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\pi^2}{2a_{n+1}}$ 的和

November 27

例题 11.53.

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{nt^{n-1}}{1+e^{xt}}dt$$

求 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$

例题 11.54.

证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 收敛并求其和

November 28

例题 11.55.

设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$, 其中 n 为正整数

(1). 若 $n\ge 2$, 计算 I_n+I_{n-2}

(2). 设 p 为实数, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n I_n^p$ 的绝对收敛性和条件收敛性

例题 11.56.

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{x^{2n+2}}{n+1}$

(1). 求该幂级数的收敛区间以及和函数

(2). 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!} \frac{1}{n+1}$ 的和

(3). $2f(\frac{1}{\sqrt{2}}) - 1 = \frac{\pi^2}{8} - 1$

November 29

例题 11.57.

设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续可微,λ 为实数, 证明: 当且仅当 $f(x)e^{\lambda x}$ 单调不减时,$f'(x) + \lambda f(x)$ 单调不减

例题 11.58.

$\Omega = \{(x, y, z)|\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$, 求 $\iiint\limits_{\Omega} (3x + 2y + z)^2 dv$

November 30

例题 11.59.

设曲线 $C : x^2 + y^2 = 2x$, 求 $\oint_C \frac{(x + y + 1)^2}{(x - 1)^2 + y^2} ds$

例题 11.60.

设曲面 Σ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = 2y$, 求 $\oiint\limits_{\Sigma} (x^2 + 2y^2 + 3z^2) dS$

第 12 章 December

12.1 Week I

December 1

例题 12.1.

计算曲线积分 $I=\oint_L \dfrac{xdy-ydx}{x^2+xy+y^2}$, 其中 L 为 $|x|+|y|=1$, 其方向为逆时针方向

例题 12.2.

计算曲线积分 $I=\oint_L \left[\dfrac{4x-y}{4x^2+y^2}-\dfrac{y}{(x-1)^2+y^2}\right]dx+\left[\dfrac{x+y}{4x^2+y^2}+\dfrac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\right]dy$, 其中 L 是 $x^2+y^2=4$, 方向为逆时针方向

December 2

例题 12.3.

设 Ω 是由平面曲线 $\begin{cases}4y^2+z^2=4\\x=0\end{cases}$ $(z\geq 0)$ 绕 z 轴旋转一周形成的空间曲面, 取上侧, 计算曲面积分:

$$I=\iint\limits_{\Omega}\frac{x^2ydydz+y^2zdzdx+(z^2+1)dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+(\frac{z}{2})^2+3}}$$

例题 12.4.

设函数 $f(x,y,z)$ 在区域 $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1\}$ 上具有连续一阶偏导数, 且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 计算:

$$\iiint\limits_{\Omega}(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z})dxdydz$$

December 3

例题 12.5.

设 A 为三阶方阵, 并有可逆矩阵 $P=(p_1,p_2,p_3)$, $p_i(i=1,2,3)$ 为三维列向量, 使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(1). 证明: p_1,p_2 是方程 $(E-A)x=0$ 的解, p_3 是方程 $(E-A)x=-p_2$ 的解, 且 A 不可相似对角化

(2). 当 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-1&-2\\-1&1&2\end{pmatrix}$ 时, 求可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

例题 12.6.

已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x f(x)+\sin x}{x^2}=1$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+\sin x}{x^2}$

December 4

例题 12.7.

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内可导, 且 $f(0)+3f'(0)=1$, 求:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_x^{\ln(1+x)}f(x+t)dt+[\sin x-\ln(1+x)]f(x)}{x^3}$$

例题 12.8.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{(e^x-1)\cos\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{(1+\sin x^2)^{\frac{1}{x}}-1}}$$

December 5

例题 12.9.

设 $f(x)$ 连续, 且 $f(0)\neq 0$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\int_0^x (x-t)f(t)dt\right]^{\frac{1}{x\int_0^x f(x-t)dt}}$

例题 12.10.

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶导数连续, $f(1)\leq 0$, $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-|x|]=0$, 证明:

(1). $\exists\xi\in(1,+\infty),\ s.t.\ f'(\xi)>1$

(2). $\exists\eta\in(-\infty,+\infty),\ s.t.\ f''(\eta)=0$

December 6

例题 12.11.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{2x}|t-x|\sin t\,dt}{|x|^3}$$

例题 12.12.

求使得 $\oint_L (2y^3-3y)dx-x^3dy$ 的值最大的平面正向边界曲线 L

December 7

例题 12.13.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{(1+x)^{\frac{1}{x}}}-(1+x)^{\frac{e}{x}}}{x^2}$$

例题 12.14.

设曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与平面 $z=x$ 的交线为 L, 起点为 $A(0,1,0)$, 终点为 $B(0,-1,0)$, 求 $\oint_L (x+y-z)dx+|y|dz$

12.2 Week II

December 8

例题 12.15.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\ln(1+\frac{k}{n^2})$$

例题 12.16.

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n}{n^2+n+\ln 1}+\frac{n}{n^2+n+\ln 2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+\ln n}\right]^n$$

December 9

例题 12.17.

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right]^n$$

例题 12.18.

以下两个矩阵, 可以用同一个可逆矩阵 $\mathbf{P}$ 相似对角化的是:

- A. $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$
- B. $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$
- C. $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$
- D. $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

December 10

例题 12.19.

设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上一阶可导, $f(0)=0$, $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得最大值 $M, x_0\in(0,2)$, 且 $f'(x)\le M$, 证明:

(1). 当 $x \in [0, x_0]$ 时, 有 $f(x) = Mx$
(2). $M = 0$

例题 12.20.

设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 对任意的正整数, 满足 $a_n < b_n < a_{n+1}$, 则:

- A. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- B. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均发散, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$
- C. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 具有相同的敛散性
- D. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 具有不同的敛散性

December 11

例题 12.21.

若可逆线性变换 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ 可将二次型 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$ 化为规范型 $y_1^2 + y_2^2$, 同时将二次型 $g(x_1, x_2) = -x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$ 化为标准型 $k_1y_1^2 + k_2y_2^2$, 求可逆矩阵 $\mathbf{P}$ 及 k_1, k_2 的值

例题 12.22.

设有数列 $\{x_n\}$, 已知 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$, 求下列说法正确的个数:

- (1). $\{x_n\}$ 必收敛
- (2). 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 必收敛
- (3). 若 $\{x_n\}$ 有界, 则 $\{x_n\}$ 必收敛
- (4). 若 $\{x_{3n}\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 必收敛

December 12

例题 12.23.

设 $f(x)$ 有连续一阶导数, 且 $0 < f'(x) \le \dfrac{\ln(2+x^2)}{2(1+x^2)}$, 数列 $x_0 = a, x_n = f(x_{n-1})(n = 1, 2, \cdots)$, 证明:

(1). 极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n$ 存在且是方程 $f(x) = x$ 的唯一实根

(2). 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [f(x_n) - x_n]$ 收敛

(3). 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [x_n - A]$ 绝对收敛, 其中 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = A$

例题 12.24.

设 $f(x)=x+a\ln(1+x)+\dfrac{bx\sin x}{1+x^2}$, $g(x)=cx^3$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小

- A. $a=1, b=-\frac{1}{2}, c=\frac{1}{3}$
- B. $a=1, b=-\frac{1}{2}, c=-\frac{1}{3}$
- C. $a=-1, b=\frac{1}{2}, c=-\frac{1}{3}$
- D. $a=-1, b=-\frac{1}{2}, c=-\frac{1}{3}$

December 13

例题 12.25.

设 $f(x)$ 为连续函数,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\ln(1+x)}{x^2}=2$, $F(x)=\int_0^x tf(x-t)dt$, 当 $x\to 0$ 时, $F(x)-\frac{1}{2}x^2$ 与 bx^k 为等价无穷小, 其中常数 $b\neq 0$,k 为正整数, 求 $k, b, f(0), f'(0)$

例题 12.26.

设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2e^{(n+1)x}+1}{e^{nx}+x^n+1}$, $f(x)$

- A. 仅有一个可去间断点
- B. 仅有一个跳跃间断点
- C. 有两个可去间断点
- D. 有两个跳跃间断点

December 14

例题 12.27.

下列命题成立的是:

- A. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f[\varphi(x)]-f(0)}{\varphi(x)}$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导
- B. 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f[\varphi(x)]-f(0)}{\varphi(x)}=f'(0)$
- C. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)-f(0)}{\sqrt{x^2}}$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导
- D. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sqrt[3]{x})-f(0)}{\sqrt{x^2}}$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

例题 12.28.

设 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧, 求 $\oiint\limits_{\Sigma} \frac{dydz}{x}+\frac{dzdx}{y}+\frac{dxdy}{z}$

12.3 Week III

December 15

例题 12.29.

设 $f(x)$ 在 x_0 点可导,α_n,β_n 为趋于零的正项数列, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}$

例题 12.30.

设函数 $\varphi(x)=\int_0^{\sin x} f(tx^2)dt$, 其中 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(0)=2$

(1). 求 $\varphi'(x)$

(2). 讨论 $\varphi'(x)$ 的连续性

December 16

例题 12.31.

设 $x=\int_0^1 e^{tu^2}du, y=y(t)$ 由方程 $t-\int_1^{y+t} e^{-u^2}du=0$ 所确定, 求:

(1). $\frac{dy}{dt}\Big|_{t=0}, \frac{d^2y}{dt^2}\Big|_{t=0}, \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}, \frac{d^2x}{dt^2}\Big|_{t=0}$

(2). $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=0}, \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}$

例题 12.32.

设 $f(x)=\begin{cases}\frac{x-\sin x}{x^3} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 处处连续, 求 $f''(0)$

- A. 0
- B. 不存在
- C. $\frac{1}{60}$
- D. $-\frac{a}{10}$

December 17

例题 12.33.

设方程 $a^x = bx(a > 1)$ 有两个不同的实根, 求常数 a, b 应满足的关系式

例题 12.34.

设 $y(x)$ 满足 $y'' + 2ay' + b^2y = 0(a > b > 0), y(0) = 1, y'(0) = 1$, 求 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$

December 18

例题 12.35.

设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty]$ 上二阶可导, 且 $f(0) = 0, f''(x) < 0$, 则当 $0 < a < x < b$ 时, 下面哪个选项正确:

- A. $af(x) > xf(a)$
- B. $bf(x) > xf(b)$
- C. $xf(x) < bf(b)$
- D. $xf(x) > af(a)$

例题 12.36.

设 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f(1) = 6, f'(1) = 0$, 且当 $x \geq 1, x^2f''(x) - 3xf'(x) - 5f(x) \geq 0$, 证明: 当 $x \geq 1$ 时, $f(x) \geq x^5 + \frac{5}{x}$

December 19

例题 12.37.

设 $f(x) = \int_0^x t|x - t|dt - \frac{x^2}{6}$, 求:
(1). 函数 $f(x)$ 的极值和曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间和拐点
(2). 曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴围成的区域的面积及绕 y 轴旋转所得旋转体的体积

例题 12.38.

求曲线 $y = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1 + x^2}$ 的渐近线

December 20

例题 12.39.

设 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上二阶可导, 且 $|f(x)| \le 1$, 又 $[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$, 证明: $\exists\xi\in(-2,2)$, $s.t.\ f''(\xi)+f(\xi)=0$

例题 12.40.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 $n+1$ 阶导数, 且 $f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0(k=0,1,2,\cdots,n)$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.\ f^{(n+1)}(\xi)=f(\xi)$

December 21

例题 12.41.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$, 证明:

(1). $\exists\xi,\eta\in(0,1)$, $s.t.\ [1+\eta f(\eta)]f'(\xi)=f'(\eta)+f^2(\eta)$

(2). $\exists\xi,\eta\in(0,1),\xi<\eta$, $s.t.\ f'(xi)+f'(\eta)=2$

例题 12.42.

设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $f(1)>g(1), f(0)>g(0)$, $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 g(x)dx$, 证明: $\exists\xi\in(0,1)$, $s.t.\ f''(\xi)>g''(\xi)$

12.4 Week IV

December 22

例题 12.43.

设 α 为正整数, 且反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$ 收敛, 求 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$

例题 12.44.

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续且单调, $f(x+2)-f(x)=4(x+2), f(0)=1$, $\int_1^9 f^{-1}(x)dx=\frac{28}{3}$, 其中 $f^{-1}(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数, 求 $\int_1^3 f(x)dx$

December 23

例题 12.45.

求曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 与直线 $y=x$ 及 $y=2$ 所围区域绕 $y=2$ 旋转所得旋转体的体积

例题 12.46.

设曲线 $y=\sin x(0\le x\le n\pi, n=1,2,\cdots)$ 和 x 轴围成的区域为 A, 区域 A 绕 y 轴旋转所得旋转体体积为 S_n

(1). 求 S_n

(2). 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{S_1}{n^3+1^3}+\dfrac{S_2}{n^3+2^3}+\cdots+\dfrac{S_n}{n^3+n^3}]$

December 24

例题 12.47.

设 $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx$, 证明:

$$\exists\xi,\eta\in(0,1),\xi\neq\eta,\ s.t.\ f'(\xi)=g'(\xi)[f(\eta)-f(\xi)]$$

例题 12.48.

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有连续导数, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}n[\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f(a+\frac{k(b-a)}{n})]=\frac{b-a}{2}[f(a)-f(b)]$$

December 25

例题 12.49.

设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续

(1). 证明 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi f(x)|\sin nx|dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(x)dx$

(2). 求极限 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi|\sin nx|\ln(1+x)dx$

例题 12.50.

设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x+y)\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, 则 $f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处

- A. 不连续
- B. 两个偏导数都不存在
- C. 两个偏导数存在但不可微
- D. 可微

December 26

例题 12.51.

$\lim\limits_{x\to 0 y\to 0}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 是函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微的:

- A. 充分必要条件
- B. 必要条件但非充分条件
- C. 充分条件但非必要条件
- D. 既非充分也非必要条件

例题 12.52.

设 $f_x(x_0,y_0)$ 存在,$f_y(x_0,y_0)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续, 证明: $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微

December 27

例题 12.53.

设 $u=u(\sqrt{x^2+y^2})$ 具有连续的二阶偏导数, 且满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+u=x^2+y^2$, 试求函数 u 的表达式

例题 12.54.

设 $f(x,y)$ 有二阶连续导数,$g(x,y)=f(e^{xy},x^2+y^2)$ 且 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)+x+y-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0$, 证明: $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点取得极值, 判断此极值是极大值还是极小值, 并求出此极值

December 28

例题 12.55.

设区域 D 由 $x^2+y^2\le 2x+2y$ 所确定, 求 $\iint\limits_D [x(1-y^3)+y(1+x^3)]d\sigma$

例题 12.56.

设 $D=\{(x,y)|0\le x\le 2,0\le y\le 2\}$
(1). 计算 $b=\iint\limits_D |xy-1|d\sigma$
(2). 设 $f(x,y)$ 在 D 上连续, 且 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=0,\iint\limits_D xyf(x,y)d\sigma=1$, 证明: $\exists(\xi,\eta)\in D,\ s.t.\ |f(\xi,\eta)|\ge\frac{1}{b}$

例题 12.57.

求 $I=\oint\limits_L (y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$, 其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=2bx$ 与柱面 $x^2+y^2=2ax(b>a>0)$ 的交线 $(z\ge 0)$, L 的方向规定为沿 L 的方向运动时, 从 z 轴正往下看, 曲线 L 所围球面部分总在左边

December 29

例题 12.58.

设 $f(x)$ 有一阶连续导数,$(xy-yf(x))dx+(f(x)+y^2)dy=du(x,y)$,其中 $f(0)=-1,u(0,0)=0$, 则函数 $u(x,y)$ 在条件 $xy=1,x>0$ 下最值情况:

- A. 最大值为 $\frac{5}{3}$
- B. 最大值为 5
- C. 最小值为 -3
- D. 最小值为 $\frac{1}{3}$

例题 12.59.

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, 区域 D 由不等式 $x^2+y^2\le t^2(t\ge 0),x\ge 0,y\ge 0$ 所确定, 且 $f(t)=2\iint\limits_D [(x-1)^2+(y+1)^2]f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy+\frac{t^4}{4}+t^2$, 求 $f(x)$

例题 12.60.

设 $f(x,y)$ 连续, 且 $f(x,y)=x^2-y^2+\int\limits_L \frac{yf(x,y)dx+xf(x,y)dy}{x^2+y^2}$, 其中 L 是从点 $A(-1,0)$ 到 $B(1,0)$ 的上半圆周 $y=\sqrt{1-x^2}$, 求 $f(x,y)$

December 30

例题 12.61.

设函数 $f(x)$ 满足 $xf'(x)-3f(x)+6x^2=0$, 且由曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=1$ 与 x 轴围成的平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积最小, 求 D 的面积

例题 12.62.

下列级数中条件收敛的是:

- A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$
- B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\ln(1+\dfrac{1}{n})$
- C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n[(-1)^n+\ln n]}{n}$
- D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$

例题 12.63.

已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处的梯度 $\mathbf{grad}f(1,1)=2i-j$, 求函数 $f(x,y)$ 在该点沿曲线 $e^{x-1}+xy=2$ 在该点处切线方向 (与 y 轴正向夹角小于 $\frac{\pi}{2}$) 的方向导数

December 31

例题 12.64.

下列结论正确的是:

- A. 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n, \sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别是 R_1,R_2, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n$ 的收敛半径为 $R=\min\{R_1,R_2\}$
- B. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $R=2$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}|=\dfrac{1}{2}$
- C. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}$ 的收敛半径为 $\sqrt{R}$
- D. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ 的收敛半径为 $\sqrt{R}$

例题 12.65.

设 $a_0=0,a_1=1,a_{n+1}=3a_n+4a_{n-1}(n=1,2,3,\cdots)$

(1). 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

(2). 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n!}x^n$ 的收敛域以及和函数

例题 12.66.

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $\int_0^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛, 令 $a_n = \int_0^1 f(nx)dx$, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{n^\alpha}(\alpha > 0)$ 收敛