LaTeX main

Sun for morning, moon for night, and you forever.

作者：Lyshmily.Y & 木易

组织：Lyshmily.Y

时间：September 27, 2024

版本：V.1.0

邮箱：yjlpku.outlook.com & 845307723@qq.com

在没有结束前，总要做很多没有意义的事，这样才可以在未来某一天，用这些无意义的事去堵住那些讨厌的缺口

目录

4 第 4 部分 * 概率论

5 第 5 部分 * 每日一题 I

第一部分

高数 (上)

第 1 部分目录

第 1 章 预备知识

内容提要

- 函数定义和性质
- 基本不等式
- 柯西不等式
- 三角函数和反三角函数
- 特殊函数

1.1 函数

定义 1.1.1 (函数)

1. 函数定义:

X, Y 是给定的两个集合, 若对于任意 $x \in X$, 存在法则 f, 使得唯一的 $y = f(x)$ 满足 $y \in Y$, 则称 f 为从 X 到 Y 的一个函数, 记为 $f : X \to Y$, 其中 X 称为定义域, $f(x)(x \in X)$ 称为值域

2. 函数的三要素: 定义域、对应法则和值域

定义 1.1.2 (函数的基本性质)

1. 单射: 若对于任意 $x_1, x_2 \in X$, 若 $x_1 \neq x_2$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$
2. 满射: 若对于任意 $y \in Y$, 存在 $x \in X$, 使得 $f(x) = y$
3. 双射: 若 f 既是单射又是满射

定义 1.1.3 (函数基本运算)

1. 基本四则运算
2. 复合运算
3. 反函数运算

性质 1. 函数四大性质

- 有界性
- 奇偶性: $\begin{cases} 奇函数: f(-x) = -f(-x) \\ 偶函数: f(-x) = f(x) \end{cases}$
- 周期性: $f(x+T) = f(x)$
- 单调性: $\forall x_1, x_2 \in I(x_1 \neq x_2)$, $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > (<)0$, $f(x)$ 单调递增 (减)

推论 1.1.1 (奇偶性推论)

任意一个定义在 $[-l, l]$ 上的函数 $f(x)$ 均可以写成一个奇函数和一个偶函数的和 $f(x) = h(x) + g(x)$, 其中 $h(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ 是偶函数, $g(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ 是奇函数

推论 1.1.2 (周期性、中心对称性、轴对称性)

(1). $f(x)$ 有对称中心 (a, c), 且关于直线 $x = b$ 轴对称, 我们可以推出 $f(x)$ 的一个周期 $T = 4|b-a|$.

(2). $f(x)$ 有两个对称中心 (a, c) 和 (b, c), 我们可以推出 $f(x)$ 的一个周期 $T = 2|b-a|$.

(3). $f(x)$ 有两个对称轴直线 $x = a$ 和直线 $x = b$, 我们可以推出 $f(x)$ 的一个周期 $T = 2|b-a|$.

证明

(1).

$$\begin{cases} f(2a-x) + f(x) = 2c \\ f(2b-x) = f(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(2a-x) + f(2b-x) = 2c \\ f(2a-2b+x) + f(x) = 2c \end{cases} \rightarrow f(x) = f(x+4a-4b)$$

(2).

$$\begin{cases} f(2a-x) = f(2b-x) \\ f(2a-2b+x) = f(x) \end{cases} \rightarrow f(x) = f(x+2a-2b)$$

(3).

$$\begin{cases} f(2a-x) = f(x) \\ f(2b-x) = f(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(2a-x) = f(2b-x) \\ f(2a-2b+x) = f(x) \end{cases} \rightarrow f(x) = f(x+2a-2b)$$

1.1.1 初等函数

定义 1.1.4 (初等函数)

初等函数是指可以用有限次基本初等函数和有限次代数运算得到的函数, 六种基本初等函数:

1. 常数函数: $y = C$
2. 幂函数: $y = x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}^*$
3. 指数函数: $y = a^x, a > 0, a \neq 1$
4. 对数函数: $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$
5. 三角函数: $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$
6. 反三角函数: $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \cot^{-1}(x), y = \sec^{-1}(x), y = \csc^{-1}(x)$

1.1.2 三角函数和反三角函数

定理 1.1.1 (积化和差 & 和差化积 & 倍角公式)

积化和差公式:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$

和差化积公式:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

倍角公式:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

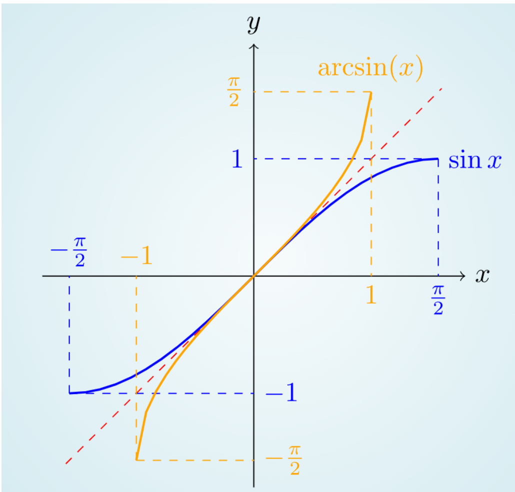
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \qquad \cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

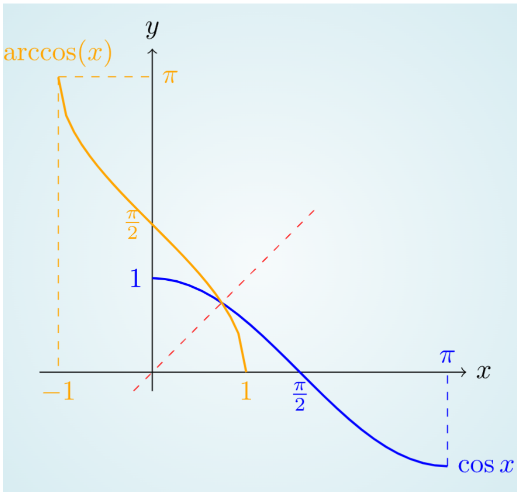
$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

定义 1.1.5 (反三角函数)

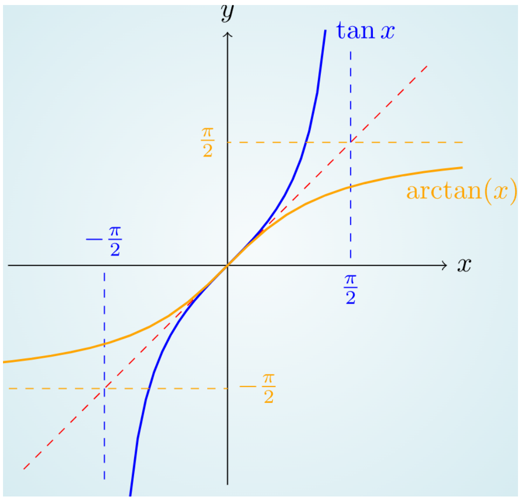
1. $\arcsin x$ 的定义域为 $[-1,1]$, 值域为 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$
2. $\arccos x$ 的定义域为 $[-1,1]$, 值域为 $[0,\pi]$
3. $\arctan x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 值域为 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$



(a) arcsin(x) & sin(x)



(b) arccos(x) & cos(x)



(c) arctan(x) & tan(x)

图 1.1: 反三角函数图像

1.1.3 特殊函数

定义 1.1.6 (特殊函数)

1. 阶乘函数:

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1, (2n)!! = 2^n \cdot n!, 0! = 1$$

2. 二项式系数:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i}$$

3. 绝对值函数:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

4. 符号函数:

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

5. 取整函数:

$$f(x) = [x], x-1 < [x] \leq x, \lim_{x\to 0^+} = 0, \lim_{x\to 0^-} = -1$$

6. 分段函数:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in D_1 \\ f_2(x) & x \in D_2 \\ \ldots \end{cases}$$

7. 黎曼函数:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & p, q \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q} \in (0,1) \\ 0 & x \notin \mathbb{Q}, x = 0, 1 \end{cases}$$

8. 狄利克雷函数:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

定理 1.1.2 (平均值不等式 $a_i > 0$)

平方平均值:

$$Q_n = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}{n}}$$

算术平均值:

$$A_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$$

几何平均值:

$$G_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

调和平均值:

$$H_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i}}$$

平均值不等式:

$$Q_n \geq A_n \geq G_n \geq H_n, \text{当且仅当} a_1 = a_2 = \cdots = a_n \text{等号成立}$$

定理 1.1.3 (柯西不等式)

二维形式:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2, \text{当且仅当} ad = bc \text{时等号成立}$$

n 维形式:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right), \text{当且仅当} \frac{a_i}{b_i} = c \text{时等号成立}$$

向量形式:

$$(\alpha, \beta)^2 \leq (\alpha, \alpha)(\beta, \beta)$$

定理 1.1.4 (重要不等式)

1. $\sin x < x < \tan x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$ $\arctan x < x < \arcsin x, x \in [0, 1]$
2. $\frac{2}{\pi} x < \sin x < x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$ $x < \tan x < \frac{4}{\pi} x, x \in (0, \frac{\pi}{4})$
3. $e^x \geq x + 1, x \in \mathbb{R}$ $x - 1 \geq \ln x, x \in (0, +\infty)$
4. $\frac{1}{1+x} < \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$

定理 1.1.5 (重要公式)

1. $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$
2. $(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ $(a^3 + b^3) = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

3. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$
4. $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-1}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}), n \in \{2k+1 | k \in \mathbb{N}\}$

1.2 函数的表示方法

1.2.1 显式表达

定义 1.2.1 (显示表达)

$y = f(x)$ 初等函数都是显性表达

1.2.2 隐式表达

定义 1.2.2 (隐式表达)

$f(x, y) = 0$ 一般不能用 x 表示 y, 也不能用 y 表示 x

1.2.3 极坐标

定义 1.2.3 (极坐标)

极坐标系是平面直角坐标系的一种推广, 它是由一个原点 O 和一个射线 Ox 组成的, 其中 O 称为极点, Ox 称为极轴, 任意一点 P 到极点 O 的距离 r 叫做点 P 的极径, 点 P 到极轴的角 θ 叫做点 P 的极角, 记为 $P(r, \theta)$

定义 1.2.4 (重要极坐标方程)

1. 圆方程: $r = a, r = a\sin\theta, r = a\cos\theta$
2. 心形线方程: $r = a(1 \pm \cos\theta), r = a(1 \pm \sin\theta)$
3. 阿基米德螺线方程: $r = a\theta$
4. 三叶玫瑰线方程: $r = a\sin 3\theta, r = a\cos 3\theta$
5. 伯努利双扭线方程: $r^2 = a^2\cos 2\theta, r^2 = a^2\sin 2\theta$

1.2.4 参数方程

定义 1.2.5 (参数方程)

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

定义 1.2.6 (重要参数方程)

1. 摆线方程: $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$
2. 星形线方程: $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$

♣

注

- 双曲函数和反双曲函数的定义和性质 **def** : 39.1.1
- 常见曲线极坐标和参数方程 **def** : 39.2.1

第 2 章 数列极限

内容提要

- 数列极限定义和性质
- 夹逼准则
- 归结原理
- 单调有界准则

2.1 数列极限

定义 2.1.1 (数列极限) 设 x_n 是一数列, 若存在常数 a, $\forall \epsilon > 0, \exists N_0 > 0$, 当 $n > N_0$ 时, $|x_n - a| < \epsilon$ 恒成立, 常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限或者说数列 $\{x_n\}$ 趋近于 a

推论 2.1.1 (唯一性) 若极限存在, 则极限唯一

推论 2.1.2 (有界性) 若数列 $\{x_n\}$ 的极限 a 存在, 则数列 $\{x_n\}$ 有界

推论 2.1.3 (保号性) 若数列 $\{x_n\}$ 的极限 $a > 0(a < 0)$, 则存在正整数 N_0, 当 $n > N_0$ 时, $x_n > 0(x_n < 0)$, 取 $\epsilon = \pm a$ 即可

注

- 若数列的任意子列发散, 数列极限不存在
- 若数列的任意两个子列极限存在但不相等, 数列极限不存在

推论 2.1.4 (数列极限)

- 如果数列从某项起有 $x_n \geq 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $a \geq 0$
- 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |A|$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \to \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1, & a \neq 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \text{不一定存在}, & a = 0 \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = a \to \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty, & |a| > 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0, & |a| < 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \text{不确定}, & |a| = 1 \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$存在且$x_n > 0 \to \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$

2.2 数列极限计算

2.2.1 定义法

定义 2.2.1 (极限的四则运算)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}, b \neq 0$

2.2.2 归结原理

定义 2.2.2 (归结原理)

设函数 $f(x)$ 在去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$ 上有定义, 那么 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ 的充分必要条件是: 对与一切序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathring{U}(a,\delta)$, 只要 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 就有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$

2.2.3 夹逼准则

定义 2.2.3 (夹逼准则)

设数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 满足 $x_n \leq y_n \leq z_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, 条件可变为 $n > N_0$ 时, $x_n \leq y_n \leq z_n$(有限无关性)

推论 2.2.1 (夹逼准则)

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_1^n + u_2^n + u_3^n + \cdots + u_m^n} = \max\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$

证明

令 $a = \max\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$

$$a^n \le u_1^n + u_2^n + u_3^n + \cdots + u_m^n \le ma^n$$

夹逼准则:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(ma^n)} = a = \max\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$$

2.2.4 单调有界准则

定义 2.2.4 (单调有界准则)

单调有界数列必有极限 **the** : 39.6.1

2.3 Exercise

命题 2.3.1

设 $x_1 = a \ge 0, y_1 = b \ge 0, a \le b, x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} (n = 1, 2, \cdots)$, 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$

解

$x_1 = a \ge 0, y_1 = b \ge 0, x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$

数学归纳法:

$$x_n \ge 0, y_n \ge 0$$

基本不等式:

$$\frac{x_n + y_n}{2} \ge \sqrt{x_n y_n} \Rightarrow y_{n+1} \ge x_{n+1}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \ge \sqrt{x_n x_n} = x_n \\ y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} \le \dfrac{y_n + y_n}{2} = y_n \end{cases}$$

$\{x_n\}$ 单调递增,$\{y_n\}$ 单调递减, $x_1 \le x_n \le y_n \le y_1$

$\{x_n\},\{y_n\}$ 单调且有界, 数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 均有极限

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a = \sqrt{ab} \\ b = \dfrac{a+b}{2}\end{cases} \Rightarrow a = b$$

综上所述, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$

命题 2.3.2

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$, 且 $|q| < 1$, 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

解

考虑数列 $\{|a_n|\}$:

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q \\ |\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - q| \ge ||\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| - |q||\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\forall\varepsilon > 0, \exists M > 0, n > M, |\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - q| < \varepsilon \\ \forall\varepsilon > 0, \exists M > 0, n > M, ||\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| - |q|| < \varepsilon\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| = |q|$$

取 $\varepsilon > 0, \varepsilon + |q| < 1$

$$\exists N > 0, n > N, |\frac{a_{n+1}}{a_n} - |q|| < \varepsilon \Rightarrow n > N, |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < \varepsilon + |q| < 1$$

$$\begin{cases}|a_n| \ge 0 \\ |a_n| = |\dfrac{a_n}{a_{n-1}}|\cdots|\dfrac{a_{N+2}}{a_{N+1}}| \cdot |a_{N+1}| < (|q| + \varepsilon)^{n-N-1} \cdot |a_{N+1}|\end{cases}$$

夹逼准则:

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (|q| + \varepsilon)^{n-N-1} \cdot |a_{N+1}| = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = 0 \\ \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0, n > N, |a_n| < \varepsilon\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$$

综上所述, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

命题 2.3.3

设 $f_n(x) = 1 - (1 - \cos x)^n (n = 1, 2, \cdots)$

(1). 证明: 方程 $f_n(x) = \dfrac{1}{2}$ 在 $(0, \dfrac{\pi}{2})$ 内有且只有一个实数根 x_n

(2). 设 $x_n \in (0, \dfrac{\pi}{2})$, 满足 $f_n(x) = \dfrac{1}{2}$, 证明:

$$\arccos\frac{1}{n} < x_n < \frac{\pi}{2}, \text{且} \lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$$

解

构造辅助函数: $G_n(x) = \dfrac{1}{2} - (1 - \cos x)^n$

(1).

$$G'_n(x) = -n\sin x(1 - \cos x)^{n-1}$$

$x \in (0, \frac{\pi}{2}), G_n'(x) < 0, G_n(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 单调递减

$$G_n(0) = \frac{1}{2} > 0 G_n(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0$$

零点定理: $\exists!\, x_n \in (0, \frac{\pi}{2}),\ s.t.\ G_n(x_n) = 0$

(2).

$$\begin{cases} G_n(\arccos\frac{1}{n}) = \frac{1}{2} - (1 - \frac{1}{n})^n \\ G_n(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2} < 0 \end{cases}$$

构造辅助函数: $h(x) = \frac{1}{2} - e^{x\ln(1-\frac{1}{x})}, x \geq 2$

$$\begin{cases} p(x) = \ln(1 - \frac{1}{x}) + \frac{1}{x-1}, x \geq 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = 0 \\ p'(x) = \frac{-1}{x(x-1)^2} < 0 \end{cases} \Rightarrow h'(x) = -e^{x\ln(1-\frac{1}{x})}\left[\ln(1 - \frac{1}{x}) + \frac{1}{x-1}\right] < 0$$

$G_n(\arccos\frac{1}{n})$ 单调递减, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(\arccos\frac{1}{n}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} > 0$ 零点定理:

$$\exists! x_n \in (\arccos\frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}),\ s.t.\ f(x_n) = \frac{1}{2}$$

夹逼定理:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \arccos\frac{1}{n} = \frac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$$

命题 2.3.4

设 $x_1 > 0$, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = \ln(e^{x_n} - 1) - \ln x_n$, 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在并求其值

解

$$x_{n+1} = \ln(e^{x_n} - 1) - \ln x_n \Rightarrow e^{x_{n+1}} = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n}$$

构造辅助函数: $f(x) = e^x - x - 1, f'(x) = e^x - 1$

$$\begin{cases} x > 0, f'(x) > 0 \\ f(x) > f(0) = 0 \\ \frac{e^x - 1}{x} > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 = \ln(\frac{e^{x_1} - 1}{x_1}) > 0 \end{cases}$$

数学归纳法: $x_n > 0$, 数列 $\{x_n\}$ 有下界

拉格朗日中值定理:

$$e^{x_{n+1}} = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = e^{\xi}, \xi \in (0, x_n) \Rightarrow x_{n+1} = \xi < x_n$$

数列 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界, 单调有界准则: 数列 $\{x_n\}$ 极限必定存在

不妨设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$:

$$e^a = \frac{e^a - 1}{a} \Rightarrow a = 0$$

综上所述, 数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 其值为 0

命题 2.3.5

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $|f'(x)| < 1$, 当 $x \in [a,b]$ 时, 有 $a < f(x) < b$,$F(x) = \dfrac{x + f(x)}{2}$, 证明:

(1). $\exists!\ x^* \in (a,b),\ s.t.\ F(x^*) = x^*$

(2). 对 $x_0 \in [a,b]$, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = F(x_n)(n = 0,1,2,\cdots)$, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x^*$

解

(1).

构造辅助函数: $G(x) = F(x) - x = \dfrac{f(x) - x}{2}$, $G'(x) = \dfrac{f'(x) - 1}{2}$

$$|f'(x)| < 1 \Rightarrow G'(x) < 0 \Rightarrow G(x)\text{单调递减}$$

$$\begin{cases} G(a) = \frac{f(a)-a}{2} > 0 \\ G(b) = \frac{f(b)-b}{2} < 0 \end{cases} \Rightarrow G(a)G(b) < 0$$

零点定理:

$$\exists!\ x^* \in (a,b),\ s.t.\ G(x^*) = 0 \Rightarrow \exists!\ x^* \in (a,b),\ s.t.\ F(x^*) = x^*$$

(2).

$$F'(x) = \frac{1 + f'(x)}{2} \geq 0 \Rightarrow F(x)\text{单调递增}$$

(i). $x_0 = x^*$,$x_n = x^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x^*$

(ii). $x_0 > x^*$, $G(x^*) > G(x_0) \Rightarrow F(x_0) < x_0 \Rightarrow x_1 < x_0$

1. 当 $n = 1$ 时, $x_1 < x_0$
2. 假设当 $n = k(k \geq 1)$ 时, $x_k < x_{k-1}$ 成立
3. 当 $n = k + 1$ 时, $F(x_k) < F(x_{k-1}) \Rightarrow x_{k+1} < x_k$

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2} \\ x_1 \in [a,b] \\ f(x_n) \in (a,b) \end{cases} \Rightarrow x_n \in [a,b]$$

数列 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界, 极限必定存在

不妨设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$

$$A=\frac{A+f(A)}{2}\Rightarrow F(A)=A\Rightarrow A=x^*$$

(iii). $x_0<x^*, G(x^*)<G(x_0)\Rightarrow F(x_0)>x_0\Rightarrow x_1>x_0$

1. 当 $n=1$ 时, $x_1>x_0$
2. 假设当 $n=k(k\geq 1)$ 时, $x_k>x_{k-1}$ 成立
3. 当 $n=k+1$ 时, $F(x_k)>F(x_{k-1})\Rightarrow x_{k+1}>x_k$

$$\begin{cases} x_{n+1}=\frac{x_n+f(x_n)}{2} \\ x_1\in[a,b] \\ f(x_n)\in(a,b)\end{cases}\Rightarrow x_n\in[a,b]$$

数列 $\{x_n\}$ 单调递增且有上界, 极限必定存在

不妨设 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=A$

$$A=\frac{A+f(A)}{2}\Rightarrow F(A)=A\Rightarrow A=x^*$$

综上所述, $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x^*$

命题 2.3.6

(1). 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数, 证明:

$$f(k+1)\leq\int_k^{k+1}f(x)dx\leq f(k),\ k=1,2,\cdots$$

(2). 证明: $\ln(1+n)\leq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\leq 1+\ln n$, 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}$

解

(1).

$f(x)$ 单调减少且非负:

$$0\leq f(k+1)\leq f(x)\leq f(k),\ x\in[k,k+1]$$

不等式在 $[k,k+1]$ 上同时求定积分:

$$\int_k^{k+1}f(k+1)dx\leq\int_k^{k+1}f(x)dx\leq\int_k^{k+1}f(k)dx\Rightarrow f(k+1)\leq\int_k^{k+1}f(x)dx\leq f(k)$$

(2).

构造辅助函数 $f(x)=\frac{1}{x}$, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减且非负:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\le\int_1^2\frac{1}{x}dx\le 1 \\ \frac{1}{3}\le\int_2^3\frac{1}{x}dx\le\frac{1}{2} \\ \cdots \\ \frac{1}{n}\le\int_{n-1}^n\frac{1}{x}dx\le\frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n+1}\le\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx\le\frac{1}{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\le\int_1^{n+1}\frac{1}{x}=\ln(1+n)\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \\ \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\le\int_1^n\frac{1}{x}=\ln n \\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\le 1+\ln n \end{cases}$$

$$\ln(1+n)\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\le 1+\ln n$$

夹逼定理:

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+n)}{\ln n}=1 \\ \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\ln n}{\ln n}=1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1$$

命题 2.3.7

设 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续, 且 $\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to b^-}f(x)=-\infty$, 证明: $f(x)$ 在 (a,b) 内有最大值

解

取 $M=f(\frac{a+b}{2})$

极限定义:

$$\begin{cases} \exists a<c<\frac{a+b}{2}, x\in(a,c),\ s.t.\ f(x)\le f(\frac{a+b}{2}) \\ \exists\frac{a+b}{2}<d<b, x\in(d,b),\ s.t.\ f(x)\le f(\frac{a+b}{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \exists\xi\in[c,d],\forall x\in[c,d], f(\xi)\ge f(x) \\ f(\xi)\ge f(\frac{a+b}{2}) \\ x\in(a,c], f(x)<f(\frac{a+b}{2})\le f(\xi) \\ x\in[d,b), f(x)<f(\frac{a+b}{2})\le f(\xi) \end{cases}$$

综上所述, $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有最大值 $f(\xi)$

引理 2.3.1 (不单调数列极限)

1. 压缩映射原理: 从定义出发, 证明: $|x_n-a|$ 极限为 0
2. 柯西列: $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_{n+1}-x_n)$, 证明这个级数收敛即可证明出数列 $\{x_n\}$ 极限存在
3. 奇数项和偶数项极限存在且相等: $\lim_{n\to\infty}x_{2n}=\lim_{n\to\infty}x_{2n-1}=A$

命题 2.3.8

设 $2x_1=1, 2x_{n+1}=1-x_n^2$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

解

$$x_1=\frac{1}{2}, x_2=\frac{3}{8}, x_3=\frac{55}{128} \Rightarrow x_1>x_3>x_2$$

数列 $\{x_n\}$ 不单调, 不能使用单调有界准则来判断

$$\begin{cases} x_{n+1}=\dfrac{1-x_n^2}{2} \\ x_1=\dfrac{1}{2}\in(0,1) \\ x\in(0,1), 1-x^2\in(0,1) \end{cases} \Rightarrow x_n\in(0,\frac{1}{2})$$

压缩映射原理

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a(a>0)$, 对 $2x_{n+1}=1-x_n^2$ 两边同时取极限:

$$2a=1-a^2 \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1-a^2}{2} \\ a=\sqrt{2}-1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
|x_{n+1}-a| &= |\frac{1-x_n^2}{2}-\frac{1-a^2}{2}| \\
&= |\frac{x_n^2-a^2}{2}| = \frac{(x_n+a)}{2}|x_n-a| \\
&\le \frac{2\sqrt{2}-1}{4}|x_{n-1}-a| \\
&\le \cdots \\
&\le (\frac{2\sqrt{2}-1}{4})^{n-1}|x_1-a|
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} 0=\lim_{n\to\infty}(\frac{2\sqrt{2}-1}{4})^{n-1}=0$$

夹逼定理: $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-a|=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a=\sqrt{2}-1$

柯西列

构造无穷级数: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x_{n+1}-x_n)$

$$
\begin{aligned}
|x_{n+1}-x_n| &= \left|\frac{x_n^2-x_{n-1}^2}{2}\right| = \frac{x_n+x_{n-1}}{2}|x_n-x_{n-1}| \\
&\leq \frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}| \\
&\leq \cdots \\
&\leq \frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|
\end{aligned}
$$

级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛

比较判别法:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|x_{n+1}-x_n|\text{收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}(x_{n+1}-x_n)\text{收敛}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)=A\\ \lim\limits_{n\to+\infty}x_{n+1}-x_1=A\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a\\ 2a=1-a^2\\ a>0\end{cases} \Rightarrow a=\sqrt{2}-1$$

命题 2.3.9

设 $x_1=1, x_n=1+\frac{1}{1+x_{n-1}}, (n=1,2,\cdots)$, 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求出此极限

解

$$x_1=1, x_2=\frac{3}{2}, x_3=\frac{7}{5}, x_4=\frac{17}{12} \Rightarrow \begin{cases}x_1<x_3\\ x_2>x_4\\ x_n>0\\ x_n\in(1,2)\end{cases}$$

1. 当 $n=1, x_1<x_3, x_2>x_4$
2. 假设 $n=k$ 时, $x_{2k-1}<x_{2k+1}, x_{2k}>x_{2k+2}$
3. 当 $n=k+1$ 时:

$$\begin{cases}x_{2k+3}=1+\frac{1}{1+x_{2k+2}}>1+\frac{1}{1+x_{2k}}=x_{2k+1}\\ x_{2k+4}=1+\frac{1}{1+x_{2k+3}}<1+\frac{1}{1+x_{2k+1}}=x_{2k+2}\end{cases}$$

$\{x_{2k-1}\}$ 单调递增且有上界，$\{x_{2k}\}$ 单调递减且有下界

单调有界准则:

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = A(A>0) \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = B(B>0)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A = 1+\dfrac{1}{1+B} \\ B = 1+\dfrac{1}{1+A}\end{cases} \Rightarrow A = B = \sqrt{2}$$

命题 2.3.10

设 $x_1 = 1, 2x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n^2 + \dfrac{1}{n^2}}, (n = 1, 2, \cdots)$, 证明极限数列 $\{x_n\}$ 收敛.

解

$$\begin{cases}x_1 = 1 \\ 2x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n^2 + \dfrac{1}{n^2}}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_{n+1} > x_n \\ x_n \geq 1\end{cases}$$

令

$$\begin{cases}a = \sqrt{x_n^2 + \frac{1}{n^2}} \\ b = x_n\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a^2 - b^2 = \dfrac{1}{n^2} \\ a + b > 2\end{cases}$$

$$\begin{aligned}x_{n+1} - x_n &= \frac{\sqrt{x_n^2 + \frac{1}{n^2}} - x_n}{2} \\ &= \frac{a-b}{2} \\ &= \frac{a^2-b^2}{2(a+b)} \\ &< \frac{1}{4n^2}\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(x_{n+1} - x_n) < \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2}$$

级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{4n^2}$ 收敛

比较判别法:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(x_{n+1} - x_n)\text{收敛} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_1 = A$$

综上所述, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在

命题 2.3.11

设 $x_0 = 1, x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n^3 + 4}, (n = 0, 1, 2, \cdots)$, 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在并求出此极限

解

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n^3+4} \end{cases} \Rightarrow x_n \in (0,1)$$

$$\begin{aligned}
|x_{n+1}-x_n| &= |\frac{1}{x_n^3+4} - \frac{1}{x_{n-1}^3+4}| \\
&= \frac{|x_n^3 - x_{n-1}^3|}{(x_n^3+4)(x_{n-1}^3+4)} \\
&= \frac{|x_n^2+x_{n-1}^2+x_nx_{n-1}|}{(x_n^3+4)(x_{n-1}^3+4)}|x_n-x_{n-1}| \\
&< \frac{3}{16}|x_n-x_{n-1}| \\
&< \cdots \\
&< (\frac{3}{16})^n|x_1-x_0|
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n-x_{n-1}| < \sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{3}{16})^n|x_1-x_0|$$

级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\frac{3}{16})^n|x_1-x_0|$ 收敛

比较判别法:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n-x_{n-1}|\text{收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}|x_n-x_{n-1}|\text{收敛} \lim_{n\to\infty} x_n - x_0\text{存在}$$

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A(A>0)$:

$$A = \frac{1}{A^3+4} \Rightarrow A^4+4A-1=0$$

A 是方程 $x^4+4x-1=0$ 的唯一正根

第 3 章 函数极限和连续

内容提要

- 函数极限定义和性质
- 无穷小概念和比阶
- 洛必达法则
- 连续和间断

3.1 函数极限

定义 3.1.1 (函数极限)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义, 如果存在常数 A, 对于任意给定的正数 ϵ, 总存在正数 δ, 使得当 x 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \epsilon$, 那么常数 A 是当 x 趋于 x_0 时函数 $f(x)$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \xi > 0, x \in (x_0 - \xi, x_0) \cup (x_0, x_0 + \xi), |f(x) - A| < \epsilon \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

定义 3.1.2 (单侧极限)

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左 (右) 邻域内有定义, 如果存在常数 A, 对于任意给定的正数 ϵ, 总存在正数 δ, 使得当 x 满足不等式 $0 < x - x_0 < \delta (0 < x_0 - x < \delta)$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \epsilon$, 那么常数 A 是当 x 趋于 x_0 时函数 $f(x)$ 的左 (右) 极限, 记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A(\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A)$

定义 3.1.3 (无穷远极限)

无穷远处极限 (双侧, 单侧只取一边): $f(x)$ 在 $(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$ 上有定义, $\forall\epsilon>0,\exists A>0$, 当 $|x|>A$ 时, $|f(x)-l|<\epsilon$, 我们称 l 是当 x 趋于无穷远时函数 $f(x)$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l$

定义 3.1.4 (极限发散)

1. 震荡发散: $\lim\limits_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})$ 反复震荡
2. 左右极限存在但不相等: $\lim\limits_{x\to 0}[x]$
3. 广义收敛: $f(x)$ 在 $x=a$ 的去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$ 上有定义, $\forall X>0,\exists\delta>0$, 当 $0<|x-a|<\delta$ 时, $|f(x)|>X$, 则称 $f(x)$ 在 $x=a$ 处广义收敛

性质 1. 唯一性

若极限存在, 则极限唯一

性质 1. 局部有界性

若函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\exists M>0,\delta>0,\ s.t.\ x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x-0+\delta),|f(x)|\le M$

性质 1. 局部保号性

若函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>(<)0,\exists\delta>0,\ s.t.\ x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x-0+\delta),f(x)>(<)0$

3.2 函数极限计算

3.2.1 无穷小 (大) 概念和比阶

定义 3.2.1 (无穷小 (大))

1. 无穷小: 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义, 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, 那么称函数 $f(x)$ 是当 x 趋于 x_0 时的无穷小
2. 无穷大: 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义, 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, 那么称函数 $f(x)$ 是当 x 趋于 x_0 时的无穷大

定义 3.2.2 (无穷小比阶)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

1. 等价无穷小: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, 记作 $f(x) \sim g(x)$
2. 同阶无穷小: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = k(k \neq 0)$, 记作 $f(x) \approx g(x)$
3. 高阶无穷小: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, 记作 $f(x) = o(g(x))$
4. 低阶无穷小: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$, 记作 $g(x) = O(f(x))$

推论 3.2.1 (等价无穷小)

1. $x \to 0, x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(x+1) \sim e^x - 1$
2. $x \to 0, \sin x \sim x - \dfrac{x^3}{6}, \arcsin x \sim x + \dfrac{x^3}{6}, \tan x \sim x + \dfrac{x^3}{3}, \arctan x \sim x - \dfrac{x^3}{3}, \cos x \sim 1 - \dfrac{x^2}{2}$
3. $x \to 0, (1+x)^a - 1 \sim ax, a^x - 1 \sim x\ln a$

定理 3.2.1 (洛必达法则)

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $x = a$ 的某去心邻域内可导 (a 可以为 ∞, 邻域也可以是单侧的), 且 $g'(a) \neq 0$, 满足:(1) 或 (2)

(1). $\dfrac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

(2). $\dfrac{\infty}{\infty}$: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$

如果 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$($l$ 可以是实数或者 ∞) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = l$

证明

构造辅助函数:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x = x_0 \\ f(x) & x \in \mathring{U}(x_0) \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} 0 & x = x_0 \\ g(x) & x \in \mathring{U}(x_0) \end{cases}$$

$F(x), G(x)$ 在 $[x_0, x]$ 上连续, 在 (x_0, x) 内可导, 且 $G'(x) \neq 0$

柯西中值定理:

$$\exists \xi \in (x_0, x),\ s.t. \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(xi)}{G'(\xi)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

定理 3.2.2 (广义洛必达定理)

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 上可导, 满足:

(1). $g'(x) \neq 0$

(2). $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$

(3). $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$($A$为有限数或 $\pm\infty$)

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$

证明

首先考虑 $x \to x_0^-$:

(1). 当 A 为常数时:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ s.t.\ x \in (x_0 - \delta, x_0), \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \text{取定} x_1 \in (x_0 - \delta, x_0)$$

$x \in (x_1, x)$, 柯西中值定理:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} - A\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$x \in [x_1, x_0)$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| &= \left|\frac{g(x)-g(x_1)}{g(x)}\left[\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} - A\right] + \frac{f(x_1)-Ag(x_1)}{g(x)}\right| \\ &\leq \left|1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}\right|\left|\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} - A\right| + \left|\frac{f(x_1)-Ag(x_1)}{g(x)}\right| \\ &\leq \left(1 + \left|\frac{g(x_1)}{g(x)}\right|\right)\left|\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} - A\right| + \left|\frac{f(x_1)-Ag(x_1)}{g(x)}\right|\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x_1)}{g(x)} = 0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x_1)-Ag(x_1)}{g(x)} = 0 \end{cases}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_2 \in (x_1, x_0), \forall x \in (x_2, x_0),\ s.t. \left|\frac{g(x_1)}{g(x)}\right| < 1 \text{且} \left|\frac{f(x_1)-Ag(x_1)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

此时, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 = x_0 - x_2, \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0), \left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - A\right| < 2 \cdot \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

(2). 当 A 为 ∞ 时: $\left|\dfrac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}\right| = \left|\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| > M$

取 $M = 1 \to |f(x) - f(x_1)| > |g(x) - g(x_1)| \to \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$

$x \to x_0^+$ 的情况类似

3.3 连续和间断

定义 3.3.1 (连续点)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0, \delta)$ 内有定义，如果 $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，那么称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续

定义 3.3.2 (间断点)

第一类间断点：

1. 可去间断点：$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)(f(x_0)$ 可以无定义)
2. 跳跃间断点：$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

第二类间断点：$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ 至少有一个不存在

1. 震荡间断点：$\lim_{x \to x_0} f(x)$ 震荡不存在
2. 无穷间断点：$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$
3. 其他第二类间断点

第 4 章 一元微分学

内容提要

- 导数和微分
- 基本求导公式
- 高阶导数
- 泰勒公式
- 函数单调性和凹凸性
- 极值点和拐点
- 渐近线
- 曲率和曲率半径

4.1 一元微分学概念

定义 4.1.1 (导数)

设 $y=f(x)$ 定义在区间 I 上，自变量在 $x=x_0$ 处增加一个增量 Δx 时，其中 $x_0\in I, x_0+\Delta\in I$，函数值的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，那么称此极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$ 或 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$ 或 $\dfrac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$

定义 4.1.2 (导数的几何意义)

函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 是函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的切线的斜率

定理 4.1.1 (导数存在充要条件)

函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导的充要条件是：函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 存在且相等

定义 4.1.3 (微分)

设 $y=f(x)$ 定义在区间 I 上, 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导, 那么函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微分为 $dy=f'(x_0)dx$, 其中 dx 是自变量 x 的增量, dy 是因变量 y 的增量

4.2 一元微分学计算

定理 4.2.1 (基本求导公式)

1. $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$
2. $(a^x)'=a^x\ln a$　　$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$
3. $(e^x)'=e^x$　　$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
4. $(\sin x)'=\cos x$　　$(\cos x)'=-\sin x$
5. $(\tan x)'=\sec^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
6. $(\sec x)'=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}=\tan x\sec x$
7. $(\csc x)'=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}=-\cot x\csc x$
8. $(\cot x)'=-\csc^2 x$
9. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\arctan x)'=\dfrac{1}{x^2+1}$
12. $\left(\ln(x+\sqrt{x^2+a})\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$
13. $\left(\ln(x+\sqrt{x^2-a})\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a}}$

定理 4.2.2 (导数四则运算)

1. 和差法则: $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$
2. 积法则: $[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
3. 商法则: $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
4. 复合函数求导: $F[G(x)]'=F[G(x)]'\cdot G'(x)$

定理 4.2.3 (高阶导数)

1. $\sin^{(n)} x = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$　　$\sin^{(n)}(ax+b) = a^n \sin(ax+b+\frac{n\pi}{2})$
2. $\cos^{(n)} x = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$　　$\cos^{(n)}(ax+b) = a^n \cos(ax+b+\frac{n\pi}{2})$
3. $[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$　　$[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$
4. $(\frac{1}{ax+b})^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$
5. 莱布尼茨公式: $(uv)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{i}{n}u^{(i)}v^{(n-i)}$

定理 4.2.4 (泰勒公式)

1. 欧拉公式: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
2. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$
3. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{2n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$
4. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{2n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$
5. $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!}x^{2n-1}, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
6. $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}, x \in (-1, 1)$
7. $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}, x \in (-1, 1)$
8. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots, x \in (-1, 1]$
9. $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \cdots, x \in [-1, 1)$
10. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$

定理 4.2.5 (特殊函数导函数)

1. 隐函数导数:

$$F(x,y) = 0 \Rightarrow F'(x,y) \cdot y' = 0$$

2. 指对数函数求导:

$$\ln y = \ln f(x) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad y = a^{f(x)} \Rightarrow y = e^{f(x)\ln a}$$

3. 反函数导数: $x=\varphi(y), y=f(x)$ 记 $x_y'=\varphi'(y), y_x'=f'(x)$

(1). 一阶导数: $x_y' y_x' = 1 \Rightarrow \varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$

(2). 二阶导数: $x_{yy}''=-\dfrac{y_{xx}''}{(y_x')^3}$ $\qquad y_{xx}''=-\dfrac{x_{yy}''}{(x_y')^3}$

4. 参数方程导数: $x=x(t), y=y(t)$

(1). 一阶导数: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$

(2). 二阶导数: $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{dy}{dx}}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dx}}{dt}\cdot\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dx}{dx}\left[\dfrac{d^2y}{dt^2}\cdot\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{d^2x}{dt^2}\cdot\dfrac{dy}{dt}\right]$

4.3 一元微分学应用

4.3.1 几何应用

定义 4.3.1 (函数图像要点)

1. 定义域 (间断点)
2. 奇偶性
3. 渐近线 (铅垂、水平、斜)

Points

(1).

$$\begin{cases} \text{水平渐近线: } \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a \Rightarrow y=a \\ \text{铅垂渐近线: } \lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty \Rightarrow x=a \\ \text{斜渐近线: } \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)-ax=b \Rightarrow y=ax+b \end{cases}$$

(2). 在同一个趋向方向中水平渐近线和斜渐进线只能有一个

(3). 间断点处看铅垂渐近线, $\pm\infty$ 处看水平渐近线和斜渐近线

4. 单调性和极值
5. 凹凸性和拐点

4.3.2 函数单调性 & 凹凸性 & 极值点 & 拐点

定义 4.3.2 (单调性)

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是严格单调递增的; $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是严格单调递减的
2. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(x_1) \le f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调不减的; $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(x_1) \ge f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调不增的

♣

定义 4.3.3 (凹凸性)

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义

1. $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是凹的
2. $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是凸的
3. $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > (<) \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) (\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是凸 (凹) 的

♣

定义 4.3.4 (极值点)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义, $\forall x \in \mathring{U}(x_0)$, 均有 $f(x) \le (\ge) f(x_0)$, 称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极 (大) 值

♣

定义 4.3.5 (驻点)

一阶导数为 0 的点称为驻点, 对于多元函数, 驻点是一阶偏导数都为 0 的点

♣

定理 4.3.1 (极值点判别)

第一充分条件: $f(x)$ 在 x_0 处连续, 且在 $\mathring{U}(x_0)$ 内可导

$$\begin{cases} x \in (x_0-\delta, x_0), f'(x) > 0; x \in (x_0, x_0+\delta), f'(x) < 0 & f(x_0) = \max\limits_{x \in U(x_0)} \{f(x)\} \\ x \in (x_0-\delta, x_0), f'(x) < 0; x \in (x_0, x_0+\delta), f'(x) > 0 & f(x_0) = \min\limits_{x \in U(x_0)} \{f(x)\} \\ x \in (x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta), f'(x) \le (\ge) 0 \end{cases}$$

第二充分条件: $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导, 且 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \ne 0$

$$\begin{cases} f''(x_0) > 0 & f(x_0) = \min\limits_{x \in U(x_0)} \{f(x)\} \\ f''(x_0) < 0 & f(x_0) = \max\limits_{x \in U(x_0)} \{f(x)\} \end{cases}$$

第三充分条件: $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导, 且 $f^{(m)}(x_0) = 0 (m = 1, 2, \cdots, n-1), f^{(n)}(x_0) \ne$

$0, n \in \{2k|k \in \mathbb{N}^+\}$

$$\begin{cases} f^{(n)}(x_0) > 0 & f(x_0) = \min\limits_{x \in U(x_0)} \{f(x)\} \\ f^{(n)}(x_0) < 0 & f(x_0) = \max\limits_{x \in U(x_0)} \{f(x)\} \end{cases}$$

定义 4.3.6 (拐点)

连续函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, x_0 是区间的内点, 当函数 $f(x)$ 经过点 $(x_0, f(x_0))$ 时, 函数的凹凸性发生改变, 称 $(x_0, f(x_0))$ 是函数 $f(x)$ 的拐点

定理 4.3.2 (拐点判别)

第一充分条件: $f(x)$ 在 x_0 处连续, 且在 $\mathring{U}(x_0)$ 内二阶可导

$$\begin{cases} x \in (x_0 - \delta, x_0), f''(x) < (>)0 \\ x \in (x_0, x_0 + \delta), f''(x) > (<)0 \end{cases}$$

第二充分条件: $f(x)$ 在 x_0 处三阶可导

$$\begin{cases} f''(x_0) = 0 \\ f'''(x_0) \neq 0 \end{cases}$$

第三充分条件: $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导

$$\begin{cases} f^{(m)}(x_0) = 0 & m = 1, 2, \cdots, n-1 \\ f^{(n)}(x_0) \neq 0 & n \in \{2k+1|k \in \mathbb{N}^+\} \end{cases}$$

定理 4.3.3 (多项式函数极值点和拐点个数)

假设 $P_n(x) = \prod\limits_{i=1}^{k}(x - a_i)^{p_i}$, 其中 k_1 个 p_i 为奇数 (大于 1), k_2 个 p_i 为偶数, k_0 个 $p_i = 1$, 满足 $k_0 + k_1 + k_2 = k$

- $P_n(x)$ 的极值点个数: $k - 1 + k_2 = k_0 + k_1 + 2k_2 - 1$
- $P_n(x)$ 的拐点个数: $k + 2k_1 + k_2 - 2 = k_0 + 3k_1 + 2k_2 - 2$

多项式函数极值点和拐点 **the** :39.5.1

注

- 驻点是导数为 0 的点, 不一定是极值点
- 极值点导数可能存在, 也可能不存在
- 极值点导数存在时, 导数值为 0
- 拐点处二阶导数可能存在, 也可能不存在
- 拐点二阶导数存在时, 二阶导数值为 0

定义 4.3.7 (曲率和曲率半径)

设 $y(x)$ 二阶可导, 则曲线 $y=y(x)$ 在其上点 (x_0,y_0) 处的曲率公式表示为:

$$k=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

曲率半径:

$$R=\frac{1}{k}=\frac{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

♣

曲率半径推导

不妨设曲线上的任意一点 $C(x_0,f(x_0))$, 点 C 的曲率圆半径为 R, 曲率圆是 C 点和周围两个点 $A(x_0-\delta,f(x_0-\delta))$, $B(x_0+\delta,f(x_0+\delta))$ 的外接圆, 且 A,B 无线靠近 C

正弦定理:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{abc}{R}$$

ΔABC 的面积:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\mathbf{det}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\right|$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}=(\delta,f(x_0)-f(x_0))\\ \boldsymbol{b}=(\delta,f(x_0+\delta)-f(x_0))\\ \boldsymbol{c}=(2\delta,f(x_0+\delta)-f(x_0-\delta))\end{cases}$$

$$\begin{cases}S=\dfrac{\sqrt{\delta^2+[f(x_0)-f(x_0-\delta)]^2}\sqrt{\delta^2+[f(x_0+\delta)-f(x_0)]^2}\sqrt{4\delta^2+[f(x_0+\delta)-f(x_0-\delta)]^2}}{4R}\\ S=\left|\delta\left[f(x_0+\delta)+f(x_0-\delta)-2f(x_0)\right]\right|\end{cases}$$

$$R=\lim_{\delta\to0}\frac{\sqrt{1+\left[\frac{f(x_0+\delta)-f(x_0)}{\delta}\right]^2}\sqrt{1+\left[\frac{f(x_0)-f(x_0-\delta)}{\delta}\right]^2}\sqrt{4+\left[\frac{f(x_0+\delta)-f(x_0-\delta)}{2\delta}\right]^2}}{\left|\dfrac{f(x_0+\delta)+f(x_0-\delta)-2f(x_0)}{\delta^2}\right|}$$

$R=\dfrac{\left[1+[f'(x_0)]^2\right]^{\frac{3}{2}}}{f''(x_0)}$, R 越大, 曲线越平坦, R 越小, 曲线越陡峭.

4.3.3 物理应用

定义 4.3.8 (相关变化率)

$$y = y(x)\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

第 5 章 中值定理

内容提要

- 介值定理
- 零点定理
- 费马定理
- 罗尔定理
- 拉格朗日中值定理
- 柯西中值定理
- 积分中值定理
- 达布定理

5.1 介值定理 & 零点定理

定理 5.1.1 (有界和最值定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 有: $m \le f(x) \le M$

其中 m, M 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值

定理 5.1.2 (介值定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 有: $m \le f(x) \le M$

其中 m, M 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值

$\forall \mu \in [m, M], \exists \xi \in [a,b],\ s.t.\ f(\xi) = \mu$

定理 5.1.3 (平均值定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 有: $m \le f(x) \le M$

其中 m, M 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值

当 $a \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le b, \exists \xi \in [a,b],\ s.t.\ f(\xi) = \dfrac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$

定理 5.1.4 (零点定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)f(b)<0, \exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f(\xi)=0$

5.2 费马定理

定理 5.2.1 (费马定理)

$f(x)$ 在 x_0 处可导, 且 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 极值点, 有: $f'(x_0)=0$

证明: 不妨设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取极大值

极值点的定义:

$$\begin{cases} f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0 \\ f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}\geq 0 \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导, $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f(x_0)=0$

5.3 罗尔定理

定理 5.3.1 (罗尔定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a)=f(b)$, 则 $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)=0$

证明:

最值定理: $m\leq f(x)\leq M$

(1). $m=M$ 时,$f(x)=C\Rightarrow f'(x)=0$

(2). $m<M$ 时, $f(a)=f(b)$, 在区间 (a,b) 中至少存在一个最值 (最大值或者最小值)

不妨假在 $x=\xi$ 时,$f(\xi)$ 取得最值, 此时 $x=\xi$ 一定是 $f(x)$ 极值点

费马定理: $f'(\xi)=0$

5.4 拉格朗日中值定理

定理 5.4.1 (拉格朗日中值定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 则 $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$

证明: 构造辅助函数 $g(x)=f(x)(b-a)-[f(b)-f(a)]x$

$$g(a)=g(b)=bf(a)-af(b)$$

罗尔定理:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ g'(\xi)=0$$

$$f'(\xi)(b-a)=f(b)-f(a)\Leftrightarrow\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

5.5 柯西中值定理

定理 5.5.1 (柯西中值定理)

$f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $g'(x)\neq 0,\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.$ $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

证明: 构造辅助函数 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$

$$F(a)=F(b)=\frac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}$$

罗尔定理:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ F'(\xi)=0$$

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)\Leftrightarrow\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

5.6 泰勒公式

定理 5.6.1 (泰勒公式)

(1). 带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内 $n+1$ 阶导数存在, 对邻域内任意一点 x, 有:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

(2). 带佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式

设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导, 则存在 x_0 的一个邻域, 对于该邻域内任意一点 x, 有:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

5.7 积分中值定理

定理 5.7.1 (积分中值定理)

(1). 一元函数积分中值定理

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.$ $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

证明: 构造函数 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$
拉格朗日中值定理:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ F'(\xi)=\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}\Rightarrow\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$$

(2). 二元函数积分中值定理
$f(x,y)$ 在 D 上连续, 则 $\exists(\xi,\eta)\in D,\ s.t.\ \iint_D f(x,y)dxdy=S_D f(\xi,\eta)$
(3). 广义积分中值定理
$f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $g(x)$ 不变号, 有:

$$\exists\xi\in[a,b],\ s.t.\ \int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

设 $f(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 连续,$g(x,y)$ 平面有界闭区域 D 可积且不变号, 有:

$$\exists(\xi,\eta)\in D,\ s.t.\ \iint\limits_D f(x,y)g(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)d\sigma$$

注
构造函数: $F(x)=\int_a^x f(t)g(t)dt,\ G(x)=\int_a^x g(t)dt, F'(x)=f(x)g(x), G'(x)=g(x)$
柯西中值定理:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}\Rightarrow\frac{f(\xi)g(\xi)}{g(\xi)}=\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

$$f(\xi)\int_a^b g(x)dx=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

5.8 达布定理

定理 5.8.1
1. 导数零点定理
$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'_+(a)f'_-(b)<0$, 则 $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)=0$
证明: 不妨假设 $f_+(a)>0,\ f'_-(b)<0$
极限定义:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0\\ \lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x)>f(a)\\ f(x)>f(b)\end{cases}$$

$f(x)$ 一定在 (a,b) 内取得最大值, 费马定理: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)=0$

2. 导数介值定理 (达布定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'_+(a)\neq f'_-(b), \forall\eta\in(f'_+(a),f'_-(b)), \exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)=\eta$

证明: 不妨假设 $f_+(a)=m, f'_-(b)=M(M>m)$

$g(x)=f(x)-\eta x,\ g'(x)=f'(x)-\eta$

$g'_+(a)=f'_+(a)-\eta<0\ g'_-(b)=f'_-(b)-\eta>0$

极限的保号性:

$$\begin{cases}\exists\delta_1>0,\ s.t.\ g(x)<g(a),\ x\in(a,a+\delta_1)\\ \exists\delta_2>0,\ s.t.\ g(x)<g(b),\ x\in(b-\delta_2,b)\end{cases}$$

$g(x)$ 是连续可导函数, 费马定理: $g(x)$ 最小值一定在 (a,b) 内取得, 且 $g'(\xi)=0\rightarrow f'(\xi)-\eta=0$

综上所述: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)=\eta$

5.9 Exercise

5.9.1 零点问题

命题 5.9.1

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 且 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx=0$, 证明: $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有两个零点

解

令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$:

$$F'(x)=f(x),\ F(0)=F(1)=0$$

$$\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 xdF(x)=xF(x)|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 F(x)dx=0\Rightarrow\int_0^1 F(x)dx=0$$

积分中值定理:

$$\exists c\in(0,1),\ s.t.\ F(c)=\int_0^1 xf(x)dx=0$$

$F(0)=F(c)=F(1)=0$, 罗尔定理:

$$\begin{cases}\exists\xi_1\in(0,c),\ s.t.F'(\xi_1)=f(\xi_1)=0\\ \exists\xi_2\in(c,1),\ s.t.F'(\xi_2)=f(\xi_2)=0\end{cases}$$

综上所述: $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有两个零点

命题 5.9.2

假设某 n 次多项式 $P_n(x)$ 的一切根均为实数根, 证明: $P_n'(x), P_n''(x), \cdots, P_n^{n-1}(x)$ 也仅有实根

解

不妨设:

$$P_n(x) = A(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}\cdots(x-x_k)^{r_k}, (r_1+r_2+\cdots+r_k=n, r_i \geq 1)$$

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= r_1A(x-x_1)^{r_1-1}(x-x_2)^{r_2}+\cdots(x-x_k)^{r_k} \\ &+ r_2A(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2-1}\cdots(x-x_k)^{r_k} \\ &+ \cdots \\ &+ r_kA(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}\cdots(x-x_k)^{r_k-1} \\ &= A(x-x_1)^{r_1-1}(x-x_2)^{r_2-1}\cdots(x-x_k)^{r_k-1}f(x) \end{aligned}$$

$$f(x) = r_1(x-x_2)\cdots(x-x_k)+\cdots+r_k(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})$$

$x_i(r_i>2)$ 是 $P_n'(x)$ 的实数根, x_i 根的重数 r_i-1
此类实数根个数:

$$n_1 = \sum_{i=1}^{k}(r_i-1) = n-k$$

$f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_k)=0$, 罗尔定理:

$$\exists \xi_i \in (x_i, x_{i+1}),\ s.t.\ f'(\xi_1)=0$$

此类实数根个数:

$$n_2 \geq k-1$$

$P_n'(x)$ 至少存在 $n_1+n_2 \geq n-1$ 个实数零点, $P_n'(x)$ 至多有 $n-1$ 个实数根, $P_n'(x)$ 的根全为实数根

对于 $P_n''(x), \cdots, P_n^{n-1}(x)$, 同理可证

命题 5.9.3

设 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 二阶可导, $f(0)=0, f(1)=1, f(4)=2$, 证明: $\exists \xi \in (0,4),\ s.t.\ f''(\xi) = -\dfrac{1}{3}$

解

构造辅助函数:

$$F(x) = f(x)+\frac{x^2}{6}-\frac{7x}{6} \Rightarrow F(0)=F(1)=F(4)=0$$

$F(0)=F(1)=F(4)=0$, 罗尔定理:

$$\begin{cases}\exists\xi_1\in(0,1),\ s.t.\ F'(\xi_1)=f'(\xi_1)+\dfrac{\xi_1}{3}-\dfrac{7}{6}=0\\ \exists\xi_2\in(1,4),\ s.t.\ F'(\xi_2)=f'(\xi_2)+\dfrac{\xi_2}{3}-\dfrac{7}{6}=0\end{cases}$$

$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$, 罗尔定理:

$$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2),\ s.t.\ F''(\xi)=f''(\xi)+\frac{1}{3}=0\Rightarrow f''(\xi)=-\frac{1}{3}$$

综上所述,$\exists\xi\in(0,4),\ s.t.\ f''(\xi)=-\dfrac{1}{3}$

泰勒展开

$f(x)$ 在 $x=1$ 处的泰勒展开式:

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-1)^2$$

令 $x=0$,$x=4$:

$$\begin{cases}f(0)=f(1)-f'(1)+\dfrac{1}{2}f''(\xi_1)=0,\ \xi_1\in(0,1)\\ f(4)=f(1)+3f'(1)+\dfrac{9}{2}f''(\xi_2)=2,\ \xi_2\in(1,4)\end{cases}$$

消去 $f'(1)$:

$$3f''(\xi_1)+9f''(\xi_2)=-4$$

(i). 当 $f''(\xi_1)=f''(\xi_2)$ 时, $f''(\xi_1)=f''(\xi_2)=-\dfrac{1}{3}$, 命题成立

(ii). 当 $f''(\xi_1)\neq f''(\xi_2)$, 不妨设 $f''(\xi_1)<f''(\xi_2)$:

$$\begin{cases}3f''(\xi_1)+9f''(\xi_2)=-4<12f''(\xi_2)\\ 3f''(\xi_1)+9f''(\xi_2)=-4>12f''(\xi_1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f''(\xi_2)>-\dfrac{1}{3}\\ f''(\xi_1)<-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

达布定理: $\exists\xi_3\in(\xi_1,\xi_2),\ s.t.\ f''(\xi_3)=-\dfrac{1}{3}$

综上所述: $\exists\xi\in(0,4),\ s.t.\ f''(\xi)=-\dfrac{1}{3}$

命题 5.9.4

设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 在 $(0,2)$ 内三阶可导, 且 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=2$, $f(1)=1$, $f(2)=6$, 证明: $\exists\xi\in(0,2),\ s.t.\ f^{(3)}(\xi)=9$

解

构造辅助函数:

$$F(x) = f(x) - \frac{3}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x$$

$F(0) = F(1) = F(2) = 0$, 罗尔定理:

$$\begin{cases} \exists \xi_1 \in (0,1),\ s.t.\ F'(\xi_1) = f'(\xi_1) - \frac{9}{2}\xi_1^2 + 5\xi_1 - 2 = 0 \\ \exists \xi_2 \in (1,2),\ s.t.\ F'(\xi_2) = f'(\xi_2) - \frac{9}{2}\xi_2^2 + 5\xi_2 - 2 = 0 \end{cases}$$

$F'(0) = F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$, 罗尔定理:

$$\begin{cases} \exists \eta_1 \in (0,\xi_1),\ s.t.\ F''(\eta_1) = f''(\eta_1) - 9\eta_1 + 5 = 0 \\ \exists \eta_2 \in (\xi_1,\xi_2),\ s.t.\ F''(\eta_2) = f''(\eta_2) - 9\eta_2 + 5 = 0 \end{cases}$$

$F''(\eta_1) = F''(\eta_2) = 0$, 罗尔定理:

$$\exists \xi \in (\eta_1,\eta_2),\ s.t.\ F^{(3)}(\xi) = f^{(3)}(\xi) - 9 = 0$$

综上所述, $\exists \xi \in (0,2),\ s.t.\ f^{(3)}(\xi) = 9$

命题 5.9.5

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, $f(0) = 0, f(1) = 1, \int_0^1 f(x)dx = 1$, 证明: $\exists \eta \in (0,1),\ s.t.\ f''(\eta) < -2$

解

构造辅助函数:

$$F(x) = f(x) + 3x^2 - 4x, F(0) = F(1) = 0$$

$\int_0^1 F(x) = 0$, 积分中值定理:

$$\exists c \in (0,1),\ s.t.\ F(c) = 0$$

$F(0) = F(c) = F(1) = 0$, 罗尔定理:

$$\begin{cases} \exists \xi_1 \in (0,c),\ s.t.\ F'(\xi_1) = f'(\xi_1) + 6\xi_1 - 4 = 0 \\ \exists \xi_2 \in (c,1),\ s.t.\ F'(\xi_2) = f'(\xi_2) + 6\xi_2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$, 罗尔定理:

$$\exists \xi \in (\xi_1,\xi_2),\ s.t.\ F''(\xi) = f''(\xi) + 6 = 0$$

综上所述, $\exists \xi \in (0,1),\ s.t.\ f''(\xi) = -6 < -2$

命题 5.9.6

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导,$f(0)=f(1)=0,[f(x)]_{min}=-1$, 证明: $\exists\xi\in(0,1)$, $s.t.\ f''(\xi)\geq 8$

解

构造辅助函数: $F(x)=f(x)-4x^2+4x$

$$[f(x)]_{min}=-1\Rightarrow\exists c\in(0,1).\ s.t.\ f(c)=-1$$

(1). $c=\dfrac{1}{2}, F(\dfrac{1}{2})=0$

(2). $c\in(0,\dfrac{1}{2})$

$$\begin{cases}F(c)=f(c)-4c^2+4c=-(2c-1)^2<0\\ F(\dfrac{1}{2})=f(\dfrac{1}{2})+1\geq 0\end{cases}$$

零点定理: $\exists c_1\in(c,\frac{1}{2})$, $s.t.\ F(c_1)=0$

(3). $c\in(\dfrac{1}{2},1)$

$$\begin{cases}F(c)=f(c)-4c^2+4c=-(2c-1)^2<0\\ F(\dfrac{1}{2})=f(\dfrac{1}{2})+1\geq 0\end{cases}$$

零点定理: $\exists c_2\in(\frac{1}{2},c)$, $s.t.\ F(c_2)=0$

综上: $\exists\eta\in(0,1)$, $s.t.\ F(\eta)=0$

$F(0)=F(\eta)=F(1)=0$, 罗尔定理:

$$\begin{cases}\exists\xi_1\in(0,\eta),\ s.t.\ F'(\xi_1)=f'(\xi_1)-8\xi_1+4=0\\ \exists\xi_2\in(\eta,1),\ s.t.\ F'(\xi_2)=f'(\xi_2)-8\xi_1+4=0\end{cases}$$

$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$, 罗尔定理:

$$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2),\ s.t.\ F''(\xi)=f''(\xi)-8=0$$

综上所述, $\exists\xi\in(0,1)$, $s.t.\ f''(\xi)=8\geq 8$

泰勒展开

$[f(x)]_{min}=-1$, 且 $f(0)=f(1)=0\Rightarrow f(x)$ 一定在 $(0,1)$ 内部取的最小值

不妨设 $f(c)=-1$, 费马定理: $f'(c)=0$

$f(x)$ 在 $x=c$ 处泰勒展开式:

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2$$

令 $x = 0$ 和 $x = 1$:

$$\begin{cases} f(0) = f(c) - f'(c)c + \dfrac{f''(\xi_1)}{2}c^2 = 0 \\ f(1) = f(c) + f'(c)(1-c) + \dfrac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2 = 0 \end{cases}$$

$f(c) = -1, f'(c) = 0$:

$$f''(\xi_1) = \frac{2}{c^2}, f''(\xi_2) = \frac{2}{1-c^2}$$

$$\begin{cases} c \in (0, \frac{1}{2}], f'(\xi_1) \geq 8 \\ c \in (\frac{1}{2}, 1), f''(\xi_2) \geq 8 \end{cases}$$

综上所述, $\exists \xi \in (0,1)$, $s.t.\ f''(\xi) \geq 8$

命题 5.9.7

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内二阶可导,$f(a) = g(a), f(b) = g(b)$, 且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 (a,b) 内存在相等的最大值, 证明: $\exists \xi \in (a,b)$, $s.t.\ f''(\xi) = g''(\xi)$

解

构造辅助函数: $F(x) = f(x) - g(x), F(a) = F(b) = 0$

不妨设 $f(x), g(x)$ 分别在 x_1, x_2 处取得最大值 $a \Rightarrow f(x_1) = g(x_2) = a$

(1). $x_1 = x_2 \Rightarrow F(x_1) = F(x_2) = 0$

(2). $x_1 < x_2$

$$\begin{cases} F(x_1) = f(x_1) - g(x_1) \geq 0 \\ F(x_2) = f(x_2) - g(x_2) \leq 0 \end{cases}$$

$$\exists x_3 \in [x_1, x_2]\ s.t.\ F(x_3) = 0$$

(3). $x_1 > x_2$

$$\begin{cases} F(x_1) = f(x_1) - g(x_1) \leq 0 \\ F(x_2) = f(x_2) - g(x_2) \geq 0 \end{cases}$$

$$\exists x_4 \in [x_2, x_1],\ s.t.\ F(x_4) = 0$$

综上: $\exists \eta \in (a,b)$, $s.t.\ F(\eta) = 0$

$F(a)=F(\eta)=F(b)=0$, 罗尔定理:

$$\begin{cases}\exists\xi_1\in(a,\eta),\ s.t.\ F'(\xi_1)=f'(\xi_1)-g'(\xi_1)=0\\ \exists\xi_2\in(\eta,b),\ s.t.\ F'(\xi_2)=f'(\xi_2)-g'(\xi_2)=0\end{cases}$$

$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$, 罗尔定理:

$$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2),\ s.t.\ F''(\xi)=f''(\xi)-g''(\xi)=0$$

综上所述,$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f''(\xi)=g''(\xi)$

命题 5.9.8

设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 三阶连续可导,$f(-1)=0, f'(0)=0, f(1)=1$, 证明: $\exists\xi\in(-1,1),\ s.t.\ f^{(3)}(\xi)=3$

解

构造辅助函数: $F(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^3-\left(\frac{1}{2}-f(0)\right)x^2-f(0)$

$$F(-1)=F(0)=F(1)=0, F'(0)=0$$

$F(-1)=F(0)=F(1)=0$, 罗尔定理:

$$\begin{cases}\exists\xi_1\in(-1,0),\ s.t.\ F'(\xi_1)=f'(\xi_1)-\frac{3}{2}\xi_1^2-(1-2f(0))\,\xi_1=0\\ \exists\xi_2\in(0,1),\ s.t.\ F'(\xi_2)=f'(\xi_2)-\frac{3}{2}\xi_2^2-(1-2f(0))\,\xi_2=0\end{cases}$$

$F'(\xi_1)=F'(0)=F'(\xi_2)=0$, 罗尔定理:

$$\begin{cases}\exists\eta_1\in(\xi_1,0),\ s.t.\ F''(\eta_1)=f''(\eta_1)-3\eta_1+2f(0)-1=0\\ \exists\eta_2\in(0,\xi_2),\ s.t.\ F''(\eta_2)=f''(\eta_2)-3\eta_2+2f(0)-1=0\end{cases}$$

$F''(\eta_1)=F''(\eta_2)$, 罗尔定理:

$$\exists\xi\in(\eta_1,\eta_2),\ s.t.\ F^{(3)}(\xi)=f^{(3)}(\xi)-3=0\Rightarrow f^{(3)}(\xi)=3$$

综上所述,$\exists\xi\in(-1,1),\ s.t.\ f^{(3)}(\xi)=3$

泰勒展开

$f(x)$ 在 $x=0$ 处泰勒展开式:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(\xi)}{6}x^3$$

令 $x=1$ 和 $x=-1$, 且 $f'(0)=0$

$$\begin{cases} f(1)=f(0)+\dfrac{f''(0)}{2}+\dfrac{f'''(\xi_1)}{6}=1 \\ f(-1)=f(0)+\dfrac{f''(0)}{2}-\dfrac{f'''(\xi_2)}{6}=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{6}=1$$

不妨设 $f'''(x)$ 在 $[-1,1]$ 上最大值 M, 最小值 m:

$$\frac{m}{6}\le\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{6}\le\frac{M}{6}\Rightarrow m\le 3\le M$$

介值定理: $\exists\xi\in(-1,1),\ s.t.\ f'''(\xi)=3$

5.9.2 复合函数零点问题

命题 5.9.9

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,(a,b) 内可导,$f(a)=f(b)=0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ 2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

解

构造辅助函数: $F(x)=x^2f(x)$

$F(a)=F(b)=0$, 罗尔定理:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ F'(\xi)=2\xi f(\xi)+\xi^2f'(\xi)=0$$

(1). 当 $\xi\ne 0\Rightarrow 2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

(2). 当 $\xi=0, F(a)=F(0)=F(b)=0$

$F(a)=F(0)=F(b)=0$, 罗尔定理:

$$\begin{cases} \exists\xi_1\in(a,0),\ s.t.\ F'(\xi_1)=2\xi_1f(\xi_1)+\xi_1^2f'(\xi_1)=0 \\ \exists\xi_2\in(0,b),\ s.t.\ F'(\xi_2)=2\xi_2f(\xi_2)+\xi_2^2f'(\xi_2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2f(\xi_1)+\xi_1f'(\xi_1)=0,\ \xi_1\in(a,0) \\ 2f(\xi_2)+\xi_2f'(\xi_2)=0,\ \xi_2\in(0,b) \end{cases}$$

综上所述,$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ 2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

命题 5.9.10

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,(a,b) 内可导,$f(a)=f(b)=0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

解

构造辅助函数: $F(x)=xf(x)$

$F(a)=F(b)=0$, 罗尔定理:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ F'(\xi)=f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$$

综上所述, $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

命题 5.9.11

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,(a,b) 内可导,$a>0, f(a)=0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$

解

构造辅助函数: $F(x)=(x-b)^a f(x)$

$F(a)=F(b)=0$, 罗尔定理:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ F'(\xi)=a(\xi-b)^{a-1}f(\xi)+(\xi-b)^a f'(\xi)=0\Rightarrow af(\xi)+(\xi-b)f'(\xi)=0$$

综上所述,$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$

命题 5.9.12

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,(a,b) 内可导,$f(a)=f(b)=0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)+f^2(\xi)=0$

解

构造辅助函数: $F(x)=f(x)e^{\int_a^x f(t)dt}$

$F(a)=F(b)=0$, 罗尔定理:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ F'(\xi)=e^{\int_a^\xi f(t)dt}(f'(\xi)+f^2(\xi))=0$$

综上,$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)+f^2(\xi)=0$

5.9.3 罗尔定理 & 费马定理

命题 5.9.13

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,$(0,1)$ 内可导,$f(0)=1, f(1)=\dfrac{1}{2}$, 证明: $\exists\xi\in(0,1),\ s.t.\ f'(\xi)+f^2(\xi)=0$

解

(1). $f(x)$ 在 $[0,1]$ 无零点

构造辅助函数: $F(x)=-\dfrac{1}{f(x)}+x$

$F(0)=F(1)=-1$, 罗尔定理:

$$\exists\xi\in(0,1),\ s.t.\ F'(\xi)=\frac{f'(\xi)+f^2(\xi)}{f^2(\xi)}=0$$

(2). $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上至少两个零点, $f(x_1)=f(x_2)=\cdots=0$

构造辅助函数: $F(x)=f(x)e^{\int_a^x f(t)dt}$

$F(x_1)=F(x_2)=0$, 罗尔定理:

$$\exists\xi\in(x_1,x_2),\ s.t.\ F'(\xi)=e^{\int_a^\xi f(t)dt}(f'(\xi)+f^2(\xi))=0$$

(3). $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上只有一个零点,$f(x_0)=0$

费马定理: $f'(x_0)=0$

$$\exists x_0\in(0,1),\ s.t.\ f'(x_0)+f^2(x_0)=0$$

综上, $\exists\xi\in(0,1),\ s.t.\ f'(\xi)+f^2(\xi)=0$

命题 5.9.14

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,(a,b) 内可导, 且 $\exists c\in(a,b),\ s.t.\ f'(c)=0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$

解

构造辅助函数: $F(x)=[f(x)-f(a)]\,e^{\frac{x}{a-b}}$

$$F'(x)=e^{\frac{x}{a-b}}\left[f'(x)+\frac{f(x)-f(a)}{a-b}\right]\Rightarrow\begin{cases}F(a)=0\\F(c)=[f(c)-f(a)]e^{\frac{c}{a-b}}\\F'(c)=-e^{\frac{c}{a-b}}\dfrac{f(c)-f(a)}{b-a}\end{cases}$$

(1). $f(a)=f(c)\Rightarrow F(a)=F(c)=0$

罗尔定理:

$$\exists\xi\in(a,c),\ s.t.\ F'(\xi)=e^{\frac{\xi}{a-b}}[f(\xi)-\frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}]=0\Rightarrow f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$$

(2). $f(a)\neq f(c)$, 不妨设 $f(a)>f(c)$:

$$F(a)=0,\ F(c)<0,\ F'(c)>0$$

$F(x)$ 在区间 $[a,c]$ 上的最小值一定在区间内, 不妨设 $F(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得最小值

费马定理: $F'(x_0)=0$

$$\exists x_0\in(a,c),\ s.t.\ f'(x_0)=\frac{f(x_0)-f(a)}{b-a}$$

综上所述,$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$

命题 5.9.15

$f(x)$ 在 $[-2,2]$ 二阶可导,$|f(x)|<1,[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$, 证明: $\exists\xi\in(-2,2)$, $s.t.\ f(\xi)+f''(\xi)=0$

解

构造辅助函数:

$$F(x)=[f(x)]^2+[f'(x)]^2\Rightarrow\begin{cases}F'(x)=2f(x)f'(x)+2f'(x)f''(x)=2f'(x)\left[f(x)+f''(x)\right]\\F(0)=4\end{cases}$$

拉格朗日中值定理:

$$\begin{cases}\exists\xi_1\in(-2,0),\ s.t.\ \dfrac{f(0)-f(-2)}{2}=f'(\xi_1)\\\exists\xi_2\in(0,2),\ s.t.\ \dfrac{f(2)-f(0)}{2}=f'(\xi_2)\\|f(x)|<1\\-1<f(x)<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'(\xi_1)\in(-1,1)\\f'(\xi_2)\in(-1,1)\\F(\xi_1)=[f(\xi_1)]^2+[f'(\xi_1)]^2<2\\F(\xi_2)=[f(\xi_2)]^2+[f'(\xi_2)]^2<2\end{cases}$$

$F(\xi_1)<2,F(\xi_2)<2,F(0)=4\Rightarrow F(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 的最大值一定在区间内部取得, 不妨设 $x=\xi$ 处 $F(x)_{\max}=F(\xi)\geq F(0)=4$

费马定理: $F'(\xi)=2f'(\xi)\left[f(\xi)+f''(\xi)\right]=0$

(i). $f'(\xi)=0,F(\xi)=[f(\xi)]^2+[f'(\xi)]^2<1$, 矛盾

(ii). $f(\xi)+f''(\xi)=0$, 满足 $F(\xi)\geq4$

综上所述, $\exists\xi\in(-2,2)$, $s.t.\ f(\xi)+f''(\xi)=0$

命题 5.9.16

设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 二阶可导,$2f(0)=\int_0^2f(x)dx=f(2)+f(3)$, 证明: $\exists\xi\in(0,3)$, $s.t.\ f''(\xi)-2f'(\xi)=0$

解

构造辅助函数: $F(x)=e^{-2x}f'(x)$

$$F'(x)=e^{-2x}[f''(x)-2f'(x)]$$

积分中值定理:

$$\exists\xi_1\in(0,2),\ s.t.\ \int_0^2f(x)dx=2f(\xi_1)=2f(0)\Rightarrow\exists\xi_1\in(0,2),\ s.t.\ f(\xi_1)=f(0)$$

$f(0)=f(\xi_1)$, 罗尔定理:

$$\exists\eta_1\in(0,\xi_1),\ s.t.\ f'(\eta_1)=0$$

介值定理:

$$\exists\xi_2\in(2,3),\ s.t.\ f(2)+f(3)=2f(\xi_2)\Rightarrow f(\xi_2)=f(\xi_1)$$

$f(\xi_1)=f(\xi_2)$, 罗尔定理:

$$\exists\eta_2\in(\xi_1,\xi_2),\ s.t.\ f'(\eta_2)=0$$

$f'(\eta_1)=f'(\eta_2)=0\Rightarrow F(\eta_1)=F(\eta_2)=0$, 罗尔定理:

$$\exists\xi\in(\eta_1,\eta_2),\ s.t.\ F'(\xi)=e^{-2\xi}[f''(\xi)-2f'(\xi)]=0$$

综上所述,$\exists\xi\in(0,3)$, $s.t.\ f''(\xi)-2f'(\xi)=0$

5.9.4 原函数、导函数、高阶导数关系

命题 5.9.17

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导,$f(a)=f(b)=0$,$f'_+(a)f'_-(b)>0$ 证明: $\exists\xi\in(a,b)$,$s.t.f''(\xi)=f(\xi)$ ♠

解

构造辅助函数: $\begin{cases}F(x)=e^{-x}[f(x)+f'(x)]\\G(x)=e^xf(x)\end{cases}$

$$\begin{cases}F'(x)=e^{-x}[f''(x)-f(x)]\\G(a)=G(b)=0\end{cases}$$

$f'_+(a)f'_-(b)>0$, 不妨设 $f'_+(a)>0, f'_-(b)>0$:

$$\begin{cases}f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0\\f'_-(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in(a,a+\sigma_1),f(x)>f(a)=0\\x\in(b-\sigma_2,b),f(x)<f(b)=0\end{cases}$$

零点定理: $\exists c\in(a,b)$, $s.t.\ f(c)=0\Rightarrow f(a)=f(c)=f(b)=0$

$G(a)=G(c)=G(b)=0$, 罗尔定理:

$$\begin{cases}\exists x_1\in(a,c),\ s.t.\ G'(x_1)=e^{x_1}(f(x_1)+f'(x_1))=0\\\exists x_2\in(c,b),\ s.t.\ G'(x_2)=e^{x_2}(f(x_2)+f'(x_2))=0\end{cases}\Rightarrow\exists x_1\in(a,c),x_2\in(c,b),\ s.t.\ F(x_1)=F(x_2)=0$$

$F(x_1)=F(x_2)=0$, 罗尔定理:

$$\exists\xi\in(x_1,x_2),\ s.t.\ F'(\xi)=e^{-\xi}[f''(\xi)-f(\xi)]=0\Rightarrow f''(\xi)=f(\xi)$$

综上所述,$\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.\ f''(\xi)=f(\xi)$

命题 5.9.18

设 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 二阶可导,$f''(x)\neq f(x)$, 证明: $\exists\xi\in(0,2\pi)$, $s.t.\ \tan\xi=\dfrac{2f'(\xi)}{f(\xi)-f''(\xi)}$ ♠

解

构造辅助函数:

$$F(x)=f(x)\sin x\Rightarrow\begin{cases}F'(x)=f(x)\cos x+f'(x)\sin x\\ F''(x)=-f(x)\sin x+f'(x)\sin x+f'(x)\cos x+f''(x)\sin x\end{cases}$$

$F(0)=F(\pi)=F(2\pi)=0$, 罗尔定理:

$$\begin{cases}\exists x_1\in(0,\pi),\ s.t.\ F'(x_1)=f'(x_1)\sin x_1+f(x_1)\cos x_1=0\\ \exists x_2\in(\pi,2\pi),\ s.t.\ F'(x_2)=f'(x_2)\sin x_2+f(x_2)\cos x_2=0\end{cases}$$

$F'(x_1)=F'(x_2)=0$, 罗尔定理:

$$\exists\xi\in(x_1,x_2),\ s.t.\ F''(\xi)=[f''(\xi)-f(\xi)]\sin\xi+2f'(\xi)\cos\xi=0$$

$f''(x)\neq f(x)\Rightarrow\tan\xi=\dfrac{2f'(\xi)}{f(\xi)-f''(\xi)}$

综上所述,$\exists\xi\in(0,2\pi),\ s.t.\ \tan\xi=\dfrac{2f'(\xi)}{f(\xi)-f''(\xi)}$

命题 5.9.19

设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 二阶可导, 证明: $\forall a>0,\exists c\in(2a,4a),\ s.t.\ f(4a)-2f(3a)+f(2a)=a^2f''(c)$

解

构造辅助函数: $F(x)=f(x+a)-f(x)$

$$\exists c\in(2a,4a),\ s.t.\ F(3a)-F(2a)=a^2f''(c)$$

拉格朗日中值定理:

$$\exists\xi\in(2a,3a),\ s.t.\ F(3a)-F(2a)=aF'(\xi)=a[f'(\xi+a)-f'(\xi)]$$

拉格朗日中值定理:

$$\exists c\in(\xi,\xi+a)\subset(3a,4a),\ s.t.\ f'(\xi+a)-f'(\xi)=af''(c)$$

综上:

$$\forall a>0,\exists c\in(2a,4a),\ s.t.\ f(4a)-2f(3a)+f(2a)=a^2f''(c)$$

5.9.5 复合函数构造问题

命题 5.9.20

设 $f(x)$ 在 $[\frac{3}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi]$ 可导,$f(\frac{3}{4}\pi)=f(\frac{7}{4}\pi)=0$, 证明: $\exists\xi\in(\frac{3}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi),\ s.t.\ f'(\xi)+f(\xi)=\cos\xi$

解

构造辅助函数: $F(x)=e^x\left[f(x)-\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right]$

$F(\frac{3\pi}{4})=F(\frac{7\pi}{4})=0$, 罗尔定理:

$$\exists\xi\in(\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}),\ s.t.\ F'(\xi)=e^{\xi}\left[f'(\xi)+f(\xi)-\cos\xi\right]=0$$

综上所述,$\exists\xi\in(\frac{3}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi),\ s.t.\ f'(\xi)+f(\xi)=\cos\xi$

命题 5.9.21

设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 可导, 证明: $\exists\xi\in(1,2),\ s.t.\ \xi f'(\xi)-f(\xi)=f(2)-2f(1)$

解

构造辅助函数:

$$F(x)=\frac{f(x)+f(2)-2f(1)}{x}\Rightarrow\begin{cases}F(1)=F(2)=f(2)-f(1)\\F'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)-f(2)+2f(1)}{x^2}\end{cases}$$

$F(1)=F(2)=0$, 罗尔定理:

$$\exists\xi\in(0,1),\ s.t.\ F'(\xi)=0\Rightarrow\xi f'(\xi)-f(\xi)-f(2)+2f(1)=0$$

综上所述: $\exists\xi\in(1,2),\ s.t.\ \xi f'(\xi)-f(\xi)=f(2)-2f(1)$

柯西中值定理

构造辅助函数:

$$\begin{cases}F(x)=\dfrac{f(x)}{x}\\G(x)=\dfrac{1}{x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}\\G'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\end{cases}$$

柯西中值定理:

$$\exists\xi\in(1,2),\ s.t.\frac{F(2)-F(1)}{G(2)-G(1)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

$$\begin{cases}\dfrac{F(2)-F(1)}{G(2)-G(1)}=2f(1)-f(2)\\\dfrac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=f(\xi)-\xi f'(\xi)\end{cases}\Rightarrow\exists\xi\in(1,2),\ s.t.\ \xi f'(\xi)-f(\xi)=f(2)-2f(1)$$

综上所述: $\exists\xi\in(1,2),\ s.t.\ \xi f'(\xi)-f(\xi)=f(2)-2f(1)$

命题 5.9.22

设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,(a,b) 内可导,$g'(x)\neq 0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.$ $\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

解

构造辅助函数: $F(x)=[f(x)-f(a)][g(x)-g(b)]$

$$F'(x)=f'(x)[g(x)-g(b)]+g'(x)[f(x)-f(a)]$$

$F(a)=F(b)=0$ 上使用罗尔定理:

$\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.$ $F'(\xi)=f'(\xi)[g(\xi)-g(b)]+g'(\xi)[f(\xi)-f(a)]\Rightarrow\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

综上所述: $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.$ $\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

命题 5.9.23

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导,$f(0)=0,\forall x\in(0,1),f(x)>0$, 证明: $\exists\xi\in(0,1)$, $s.t.$ $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

解

构造辅助函数: $F(x)=f(x)f(1-x)$

$$F'(x)=f'(x)f(1-x)-f(x)f'(1-x)$$

$F(0)=F(1)=0$, 罗尔定理:

$$\exists\xi\in(0,1),\ s.t.\ F'(\xi)=f'(\xi)f(1-\xi)-f(\xi)f'(1-\xi)\Rightarrow\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$

综上所述: $\exists\xi\in(0,1)$, $s.t.$ $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

命题 5.9.24

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导,$f(0)=0,\forall x\in(0,1),f(x)>0$, 证明: $\forall a>0,\exists\xi\in(0,1)$, $s.t.$ $a\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

解

构造辅助函数: $F(x)=f^a(x)f(1-x)$

$$F'(x) = af^{a-1}(x)f'(x)f(1-x) - f^a(x)f'(1-x) = f^{a-1}(x)[af'(x)f(1-x) - f(x)f'(1-x)]$$

$F(0) = F(1) = 0$, 罗尔定理:

$$\exists \xi \in (0,1),\ s.t.\ F'(\xi) = f^{a-1}(\xi)[af'(\xi)f(1-\xi) - f(\xi)f'(1-\xi)] = 0$$

$$\forall x \in (0,1),\ f(x) > 0 \Rightarrow f^{a-1}(\xi) > 0$$

$$af'(\xi)f(1-\xi) - f(\xi)f'(1-\xi) = 0 \Rightarrow a\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$

综上所述: $\forall a > 0, \exists \xi \in (0,1),\ s.t.\ a\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

命题 5.9.25

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导,$f(a) = 0, \forall x \in (a,b], f(x) > 0$, 证明: $\forall m,n > 0, \exists \lambda, \mu \in (0,1),\ s.t.\ \dfrac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} = \dfrac{mf'(\mu)}{nf(\mu)}$

解

构造辅助函数: $F(x) = f^m(x)f^n(a+b-x)$

$$F'(x) = mf^{m-1}(x)f'(x)f^n(a+b-x) - nf^m(x)f^{n-1}(a+b-x)$$

$F(a) = F(b) = 0$, 罗尔定理:

$$\exists \xi \in (a,b),\ s.t.\ F'(\xi) = 0 \Rightarrow mf'(\xi)f(a+b-\xi) = nf(\xi)f'(a+b-\xi)$$

$$\exists \xi \in (a,b),\ s.t.\ \frac{mf'(\xi)}{nf(\xi)} = \frac{f'(a+b-\xi)}{f(a+b-\xi)}$$

取 $\lambda = a+b-\xi, \mu = \xi$:

$$\forall m,n > 0, \exists \lambda, \mu \in (0,1),\ s.t.\ \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} = \frac{mf'(\mu)}{nf(\mu)}$$

命题 5.9.26

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导,$g''(x) \neq 0, g(a) = g(b) = f(a) = f(b) = 0$, 证明: $\exists \xi \in (a,b),\ s.t.\ \dfrac{f(\xi)}{g(\xi)} = \dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

解

构造辅助函数: $F(x) = f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$

$$F'(x)=f''(x)g(x)+f'(x)g'(x)-f'(x)g'(x)-f(x)g''(x)=f''(x)g(x)-f(x)g''(x)$$

$F(a)=F(b)=0$, 罗尔定理:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ F'(\xi)=0\Rightarrow f''(\xi)g(\xi)-f(\xi)g''(\xi)=0$$

综上所述: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ \dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

命题 5.9.27

设 $f(x)$ 二阶可导,$f(1)>0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$, 证明: $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有两个根.

解

构造辅助函数: $F(x)=f(x)f'(x)$

$$F'(x)=f(x)f''(x)+[f'(x)]^2$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0\to\begin{cases}f(0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0\\\exists\xi>0,\ x\in(0,\xi),f(x)<0\end{cases}$$

零点定理:

$$\exists c\in(0,1),\ s.t.\ f(c)=0$$

$f(0)=f(c)=0$, 罗尔定理:

$$\exists\eta\in(0,c),\ s.t.\ f'(\eta)=0$$

$F(0)=F(\eta)=F(c)=0$, 罗尔定理:

$$\begin{cases}\exists x_1\in(0,\eta),\ s.t.\ F'(x_1)=0\Rightarrow f(x_1)f''(x_1)+[f'(x_1)]^2=0\\\exists x_2\in(\eta,c),\ s.t.\ F'(x_2)=0\Rightarrow f(x_2)f''(x_2)+[f'(x_2)]^2=0\end{cases}$$

综上所述: $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有两个根 $x_1\in(0,\eta)$, $x_2\in(\eta,c)$

命题 5.9.28

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导,$f'(a)=f'(b)=0,f(x)>0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f(\xi)f''(\xi)-[f'(\xi)]^2=0$

解

构造辅助函数: $F(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$$F'(x) = \frac{f''(x)f(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)}$$

$F(a) = F(b) = 0$, 罗尔定理:

$$\exists \xi \in (a, b),\ s.t.\ F'(\xi) = 0 \Rightarrow f''(\xi)f(\xi) - [f'(\xi)]^2 = 0$$

综上所述: $\exists \xi \in (a, b),\ s.t.\ f(\xi)f''(\xi) - [f'(\xi)]^2 = 0$

命题 5.9.29

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 二阶可导,$f'(a) = f'(b) = 0, f(x) > 0$, 证明: $\exists \xi \in (a, b),\ s.t.\ f(\xi)f''(\xi) - 2[f'(\xi)]^2 = 0$

解

构造辅助函数: $F(x) = \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$

$$F'(x) = \frac{f''(x)f(x) - 2[f'(x)]^2}{f^3(x)}$$

$F(a) = F(b) = 0$, 罗尔定理:

$$\exists \xi \in (a, b),\ s.t.\ F'(\xi) = 0 \Rightarrow f''(\xi)f(\xi) - 2[f'(\xi)]^2 = 0$$

综上所述: $\exists \xi \in (a, b),\ s.t.\ f(\xi)f''(\xi) - 2[f'(\xi)]^2 = 0$

5.9.6 拉格朗日中值定理 & 柯西中值定理

命题 5.9.30

设 $a, b > 0$, 证明: $\exists \xi \in (a, b).\ s.t.\ ae^b - be^a = (1 - \xi)e^{\xi}(a - b)$

解

构造辅助函数: $f(x) = \dfrac{e^x}{x}, g(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{(x-1)e^x}{x^2} \\ g'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \end{cases}$$

柯西中值定理:

$$\exists \xi \in (a, b),\ s.t.\ \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{ae^b-be^a}{a-b} \\ \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = (1-\xi)e^{\xi} \end{cases}$$

综上所述: $\exists\xi \in (a,b).\ s.t.\ ae^b - be^a = (1-\xi)e^{\xi}(a-b)$

命题 5.9.31

设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 可导, 证明: $\exists\xi \in (1,2),\ s.t.\ f(2)-f(1) = \frac{1}{2}\xi^2 f'(\xi)$ ♠

解

构造辅助函数: $g(x) = \dfrac{1}{x}$
柯西中值定理:

$$\exists\xi \in (1,2),\ s.t.\ \frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

我们有:

$$\begin{cases} \dfrac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)} = -2[f(2)-f(1)] \\ \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = -\xi^2 f'(\xi) \end{cases} \Rightarrow f(2)-f(1) = \frac{1}{2}\xi^2 f'(\xi)$$

综上所述: $\exists\xi \in (1,2),\ s.t.\ f(2)-f(1) = \frac{1}{2}\xi^2 f'(\xi)$

命题 5.9.32

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,(a,b) 可导, 证明: $\exists\xi \in (1,2),\ s.t.\ 2\xi[f(b)-f(a)] = (b^2-a^2)f'(\xi)$ ♠

解

构造辅助函数: $g(x) = x^2$
柯西中值定理:

$$\exists\xi \in (1,2),\ s.t.\ \frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

我们有:

$$\begin{cases} \dfrac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2} \\ \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f'(\xi)}{2\xi} \end{cases} \Rightarrow 2\xi[f(b)-f(a)] = (b^2-a^2)f'(\xi)$$

综上所述: $\exists\xi \in (1,2),\ s.t.\ 2\xi[f(b)-f(a)] = (b^2-a^2)f'(\xi)$

5.9.7 双中值问题

命题 5.9.33

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导,$f(a)=f(b)=1$, 证明: $\exists\xi_1,\xi_2\in(a,b),\ s.t.\ e^{\xi_2-\xi_1}[f'(\xi_2)+f(\xi_2)]=1$

解

构造辅助函数: $F(x)=e^x f(x)$

$$F'(x)=e^x[f'(x)+f(x)]$$

拉格朗日中值定理:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)\Rightarrow\frac{e^b f(b)-e^a f(a)}{b-a}=e^\xi[f(\xi)+f'(\xi)]$$

$$f(a)=f(b)=1\Rightarrow\frac{e^b f(b)-e^a f(a)}{b-a}=\frac{e^b-e^a}{b-a}$$

构造辅助函数: $g(x)=e^x$

拉格朗日中值定理:

$$\exists\eta\in(a,b),\ s.t.\ \frac{e^b-e^a}{b-a}=g'(\eta)=e^\eta$$

$$e^\eta=e^\xi[f(\xi)+f'(\xi)]$$

取 $\xi_1=\eta,\xi_2=\xi\rightarrow\exists\xi_1,\xi_2\in(a,b),\ s.t.\ e^{\xi_2-\xi_1}[f'(\xi_2)+f(\xi_2)]=1$

注

取 $\xi_1=\xi_2\rightarrow\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(x)+f(x)-1=0$

构造辅助函数: $F(x)=e^x[f(x)-1]$

$$F'(x)=e^x[f'(x)+f(x)-1]$$

$F(a)=F(b)=0$, 罗尔定理:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ F'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)+f(\xi)-1=0$$

综上所述: $\exists\xi_1=\xi_2\in(a,b),\ s.t.\ e^{\xi_2-\xi_1}[f'(\xi_2)+f(\xi_2)]=1$

命题 5.9.34

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,(a,b) 可导, 且 $a>0$, 证明: $\exists\xi,\eta\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)=(a+b)\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$

解

构造辅助函数: $g(x) = x^2$

柯西中值定理:

$$\exists \eta \in (a,b),\ s.t.\ \frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2} = \frac{f'(\eta)}{2\eta} \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = (a+b)\frac{f'(\eta)}{2\eta}$$

拉格朗日中值定理:

$$\exists \xi \in (a,b),\ s.t.\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

综上所述: $\exists \xi, \eta \in (a,b),\ s.t.\ f'(\xi) = (a+b)\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$

注

令 $\xi = \eta \to \exists \sigma,\ s.t.\ f'(\sigma)[1 - \dfrac{a+b}{2\sigma}] = 0$

取 $\sigma = \dfrac{a+b}{2}$ 证毕

命题 5.9.35

设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 连续,$(1,2)$ 可导, 且 $f'(x) \neq 0$, 证明: $\exists \xi, \eta, \gamma \in (1,2),\ s.t.\ \dfrac{f'(\gamma)}{f'(\xi)} = \dfrac{\xi}{\eta}$

解

构造辅助函数: $g(x) = \ln x$

柯西中值定理:

$$\exists \xi \in (1,2),\ s.t.\ \frac{f(2)-f(1)}{\ln 2 - \ln 1} = \xi f'(\xi)$$

拉格朗日中值定理:

$$\exists \gamma \in (1,2),\ s.t.\ \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = f'(\gamma)$$

$$\frac{f'(\gamma)}{f'(\xi)} = \xi \ln 2$$

综上所述: 取 $\xi, \gamma \in (1,2), \eta = \dfrac{1}{\ln 2} \in (1,2),\ s.t.\ \dfrac{f'(\gamma)}{f'(\xi)} = \dfrac{\xi}{\eta}$

注

取 $\xi = \gamma = \eta \in (a,b),\ s.t.\ \dfrac{f'(\gamma)}{f'(\xi)} = \dfrac{\xi}{\eta} = 1$ 恒成立

命题 5.9.36

设 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 二阶连续可导,$f'(0)=0$, 证明: $\exists\xi,\eta,\omega\in(0,\frac{\pi}{2}),\ s.t.\ f'(\xi)=\frac{\pi}{2}\eta\cdot\sin 2\xi\cdot f''(\omega)$

解

$$\frac{f'(\xi)}{\sin 2\xi}=\frac{\pi}{2}\eta f''(\omega)$$

拉格朗日中值定理:

$$\begin{cases}\exists\eta\in(0,\frac{\pi}{2}),\ s.t.\ f(\frac{\pi}{2})-f(0)=\frac{\pi}{2}f'(\eta)\\ \exists\omega\in(0,\eta),\ s.t.\ f'(\eta)=f'(\eta)-f'(0)=\eta f''(\omega)\\ f'(0)=0\end{cases}\Rightarrow\frac{\pi}{2}\eta f''(\omega)=f(\frac{\pi}{2})-f(0)$$

构造辅助函数: $g(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$

柯西中值定理:

$$\exists\xi\in(0,\frac{\pi}{2}),\ s.t.\ \frac{f(\frac{\pi}{2})-f(0)}{g(\frac{\pi}{2})-g(0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\Rightarrow f(\frac{\pi}{2})-f(0)=\frac{f'(\xi)}{\sin 2\xi}$$

综上所述: $\exists\xi,\eta,\omega\in(0,\frac{\pi}{2}),\ s.t.\ f'(\xi)=\frac{\pi}{2}\eta\cdot\sin 2\xi\cdot f''(\omega)$

命题 5.9.37

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续,$(0,1)$ 可导,$f(0)=0,f(1)=1$, 证明:

(1). $\exists c\in(0,1),\ s.t.\ f(c)=1-c$

(2). $\exists\xi,\eta\in(0,1)(\xi\neq\eta)\ s.t.\ f'(\xi)f'(\eta)=1$

解

(1). 构造辅助函数: $F(x)=f(x)+x-1$

$$F(0)=f(0)-1=-1<0,F(1)=f(1)=1>0$$

零点定理:

$$\exists c\in(0,1),\ s.t.\ F(c)=0\Rightarrow f(c)=1-c$$

(2).

拉格朗日中值定理:

$$\begin{cases}\exists\xi\in(0,c),\ s.t.\ \frac{F(c)-F(0)}{c}=F'(\xi)\\ \exists\eta\in(c,1),\ s.t.\ \frac{F(1)-F(c)}{1-c}=F'(\eta)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'(\xi)=\frac{1-c}{c}\\ f'(\eta)=\frac{c}{1-c}\\ f'(\xi)f'(\eta)=1\end{cases}$$

综上所述: $\exists \xi, \eta \in (0,1)(\xi \neq \eta),\ s.t.\ f'(\xi)f'(\eta) = 1$

命题 5.9.38

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续,$(0,1)$ 可导,$f(0)=0, f(1)=1$, 证明:

(1). $\exists c \in (0,1),\ s.t.\ f(c) = \frac{1}{2}$

(2). $\exists \xi, \eta \in (0,1)(\xi \neq \eta),\ s.t.\ \frac{1}{f'(\xi)} + \frac{1}{f'(\eta)} = 2$

解

(1).

$f(0)=0, f(1)=1$, 介值定理:

$$\exists c \in (0,1),\ s.t.\ f(c) = \frac{1}{2}$$

(2). 拉格朗日中值定理:

$$\begin{cases} \exists \xi \in (0,c),\ s.t.\ \dfrac{f(c)-f(0)}{c} = f'(\xi) \\ \exists \eta \in (\frac{1}{2},1),\ s.t.\ \dfrac{f(1)-f(c)}{1-c} = f'(\eta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(\xi) = \dfrac{1}{2c} \\ f'(\eta) = \dfrac{1}{2-2c} \\ \dfrac{1}{f'(\xi)} + \dfrac{1}{f'(\eta)} = 2 \end{cases}$$

综上所述: $\exists \xi, \eta \in (0,1)(\xi \neq \eta),\ s.t.\ \frac{1}{f'(\xi)} + \frac{1}{f'(\eta)} = 2$

命题 5.9.39

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导,$f(0)=0,\ f(1)=1$,$\lambda_i (i=1,2,\cdots,n)$ 均为正数, 证明: 存在互不相等的 $\xi_i \in (0,1),\ s.t.\ \frac{\lambda_1}{f'(\xi_1)} + \frac{\lambda_2}{f'(\xi_2)} + \cdots + \frac{\lambda_n}{f'(\xi_n)} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$

解

$f(0)=0, f(1)=1$, 介值定理:

$\exists x_1, x_2, \cdots, x_{n-1} \in (0,1)$ 满足:

$$\begin{cases} f(x_0) = f(0) = 0 \\ f(x_1) = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} \\ f(x_2) = \dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} \\ \cdots\cdots \\ f(x_{n-1}) = \dfrac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{n-1}}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} \\ f(x_n) = f(1) = 1 \end{cases}$$

拉格朗日中值定理:

$\exists \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)(i = 1, 2, \cdots, n)$, $s.t.$ $\dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i) \Rightarrow x_i - x_{i-1} = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{f'(\xi_i)}$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = 1 \\ f(x_i) - f(x_{i-1}) = \dfrac{\lambda_i}{\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j} \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{f'(\xi_i)} = \dfrac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda_i}{f'(\xi_i)} \end{cases} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{f'(\xi_i)} = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j$$

综上所述: 存在互不相等的 $\xi_i \in (0, 1)$, $s.t.$ $\dfrac{\lambda_1}{f'(\xi_1)} + \dfrac{\lambda_2}{f'(\xi_2)} + \cdots + \dfrac{\lambda_n}{f'(\xi_n)} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$

命题 5.9.40

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 可导,$f(0) = 0, f(1) = 1$, 证明: 存在互不相等的 $\xi_i \in (0, 1)$, $s.t.$ $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{f'(\xi_i)} = n$

♠

解

$f(0) = 0, f(1) = 1$, 介值定理:

$\exists x_1, x_2, \cdots, x_{n-1} \in (0, 1)$ 满足:

$$\begin{cases} f(x_0) = f(0) = 0 \\ f(x_1) = \dfrac{1}{n} \\ f(x_2) = \dfrac{2}{n} \\ \cdots\cdots \\ f(x_{n-1}) = \dfrac{n-1}{n} \\ f(x_n) = f(1) = 1 \end{cases}$$

拉格朗日中值定理:

$\exists \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)(i = 1, 2, \cdots, n)$, $s.t.$ $\dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i) \Rightarrow x_i - x_{i-1} = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{f'(\xi_i)}$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = 1 \\ f(x_i) - f(x_{i-1}) = \dfrac{1}{n} \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{f'(\xi_i)} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{f'(\xi_i)} \end{cases} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{f'(\xi_i)} = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j$$

综上所述, 我们得到: 存在互不相等的 $\xi_i \in (0,1)$, $s.t.\ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f'(\xi_i)} = n$

命题 5.9.41

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导,$f(0)=0$, $f(1)=1$, 证明: $\xi,\eta \in (0,1)(\xi \neq \eta)$, $s.t.\ \frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a+b(a,b>0)$

解

$f(0)=0$, $f(1)=1$ 介值定理:

$$\exists c \in (0,1),\ s.t.\ f(c) = \frac{a}{a+b}$$

拉格朗日中值定理:

$$\begin{cases} \exists \xi \in (0,c),\ s.t.\ \dfrac{f(c)-f(0)}{c} = f'(\xi) \\ \exists \eta \in (c,1),\ s.t.\ \dfrac{f(1)-f(c)}{1-c} = f'(\eta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{f'(\xi)} = \dfrac{(a+b)c}{a} \\ \dfrac{1}{f'(\eta)} = \dfrac{(1-c)(a+b)}{b} \\ \dfrac{a}{f'(\xi)} + \dfrac{b}{f'(\eta)} = (a+b)c + (1-c)(a+b) = a+b \end{cases}$$

综上所述: $\xi,\eta \in (0,1)(\xi \neq \eta)$, $s.t.\ \frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a+b$

命题 5.9.42

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导,$f(0)=0, f(1)=\frac{1}{4}$, 证明: $\xi,\eta \in (0,1)(\xi \neq \eta)$, $s.t.\ f'(\xi)+f'(\eta) = \eta-\xi$

解

构造辅助函数: $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^2, h(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$

$c \in (0,1)$, 拉格朗日中值定理:

$$\begin{cases} \exists \xi \in (0,c),\ s.t.\ \dfrac{g(c)-g(0)}{c} \\ \exists \eta \in (c,1),\ s.t.\ \dfrac{h(1)-h(c)}{1-c} = h'(\eta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(\xi)+\xi = \dfrac{2f(c)+c^2}{2c} \\ f'(\eta)-\eta = \dfrac{c^2-2f(c)-2f(1)}{2-2c} \end{cases}$$

令 $c = \frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} f'(\xi)+\xi = 2f(c)+c^2 \\ f'(\eta)-\eta = c^2-2f(c)-2f(1) \end{cases} \Rightarrow f'(\xi)+\xi+f'(\eta)-\eta = 2c^2-2f(1) = 0$$

综上所述: $\xi \in (0,\frac{1}{2}), \eta \in (\frac{1}{2},1)$, $s.t.\ f'(\xi)+f'(\eta) = \eta-\xi$

命题 5.9.43

设 $f(x) \in \mathbb{R}[0,1]$, $\int_0^1 f(x)dx \neq 0$, 证明: 存在互异的三个数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in [0,1]$, 满足下列不等式:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)dx &= \left[\frac{1}{1+\xi_1^2}\int_0^{\xi_1} f(x)dx + f(\xi_1)\arctan\xi_1\right]\xi_3 \\ &= \left[\frac{1}{1+\xi_2^2}\int_0^{\xi_2} f(x)dx + f(\xi_2)\arctan\xi_2\right](1-\xi_3)\end{aligned}$$

解

构造辅助函数:

$$F(x) = \arctan x\int_0^x f(t)dt \to \begin{cases} F(0) = 0 \\ F(1) = \dfrac{\pi}{4}\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \end{cases}$$

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2}\int_0^x f(t)dt + f(x)\arctan x$$

等价命题:

$$\text{存在互异的三个数}\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in [0,1],\ s.t.\ \frac{1}{2}F(1) = F'(\xi_1)\xi_3 = F'(\xi_2)(1-\xi_3)$$

介值定理:

$$\exists c \in (0,1),\ s.t. F(c) = \frac{1}{2}F(1)$$

拉格朗日中值定理:

$$\begin{cases} \exists x_1 \in (0,c),\ s.t.\ \dfrac{F(c)-F(0)}{c} = F'(x_1) \\ \exists x_2 \in (c,1),\ s.t.\ \dfrac{F(1)-F(c)}{1-c} = F'(x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}F(1) = cF'(x_1) \\ \dfrac{1}{2}F(1) = (1-c)F'(x_2) \end{cases}$$

取 $c = \xi_3, \xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2$, 证毕

综上所述: 存在互异的三个数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in [0,1]$, 满足下列不等式:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)dx &= \left[\frac{1}{1+\xi_1^2}\int_0^{\xi_1} f(x)dx + f(\xi_1)\arctan\xi_1\right]\xi_3 \\ &= \left[\frac{1}{1+\xi_2^2}\int_0^{\xi_2} f(x)dx + f(\xi_2)\arctan\xi_2\right](1-\xi_3)\end{aligned}$$

命题 5.9.44

设 $f(x), g(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $\int_0^1 f(x)dx = 3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx$, 证明: 存在两个不同的点 $\xi, \eta \in (0,1)$, $s.t.\ f'(\xi) = g'(\xi)[f(\eta) - f(\xi)]$

解

$$\int_0^1 f(x)dx = 3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx \Rightarrow \int_0^{\frac{2}{3}} f(x)dx = 2\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx$$

积分中值定理:

$$\begin{cases} \exists x_1 \in (0,\dfrac{2}{3}),\ s.t.\ \displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}} f(x)dx = \dfrac{2}{3}f(x_1) \\ \exists x_2 \in (\dfrac{2}{3},1),\ s.t.\ \displaystyle\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx = \dfrac{1}{3}f(x_2) \end{cases} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

构造辅助函数: $F(x) = [f(x) - f(x_1)]e^{g(x)}$

$$F'(x) = e^{g(x)}\left[f'(x) + g'(x)[f(x) - f(x_1)]\right]$$

$F(x_1) = F(x_2) = 0$, 罗尔定理:

$$\exists\xi \in (x_1,x_2),\ s.t.\ F'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) + g'(\xi)[f(\xi) - f(x_1)]$$

令 $\eta = x_1, \exists\xi \in (x_1,x_2),\ s.t.\ f'(\xi) = g'(\xi)[f(\eta) - f(\xi)]$

综上所述: $\exists\xi,\eta \in (0,1),\ s.t.\ f'(\xi) = g'(\xi)[f(\eta) - f(\xi)]$

5.9.8 泰勒公式

命题 5.9.45

设 $f(x)$ 二阶连续可导,$f''(x) \neq 0$, 若 $f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)(0 < \theta < 1)$, 证明: $\lim\limits_{h\to 0}\theta = \dfrac{1}{2}$

解

$f(x)$ 在 $x = x_0$ 处泰勒展开式:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2, \xi \in (x_0 \sim x)$$

令 $x_0 = x, x = x_0 + h$:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{f''(\xi)}{2}h^2 \to f'(x+\theta h) - f'(x) = \frac{f''(\xi)}{2}h$$

拉格朗日中值定理:

$$\exists\eta \in (x, x+\theta h),\ s.t.\ f'(x+\theta h) - f'(x) = \theta hf''(\eta) \Rightarrow \theta = \frac{f''(\eta)}{2f''(\xi)}$$

$$\lim_{h\to 0}\theta = \lim_{h\to 0}\frac{f''(\eta)}{2f''(\xi)} = \frac{1}{2}$$

综上所述: $\lim\limits_{h\to 0}\theta = \dfrac{1}{2}$

命题 5.9.46

设 $f(x)$ 有 $n+1$ 阶导数, 若 $f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\dfrac{f''(a)}{2}h^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n(0<\theta<1)$, 且 $f^{(n+1)}(a)\neq 0$

证明: $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$

解

$f(x)$ 在 $x=a$ 处泰勒展开式:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\xi\in(a\sim x)$$

令 $x=a+h$:

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1},\xi\in(a\sim x)$$

$$\frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}\to f^{(n)}(a+\theta h)-f^{(n)}(a)=\frac{f^{n+1}(\xi)}{n+1}h,\xi\in(a\sim a+h)$$

拉格朗日中值定理:

$$\exists\eta\in(a\sim a+h),\ s.t.\ f^{(n)}(a+\theta h)-f^{(n)}(a)=\theta hf^{(n+1)}(\eta)\Rightarrow\theta=\frac{1}{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{f^{(n+1)}(\eta)}$$

$$\lim_{h\to 0}\theta=\lim_{h\to 0}\frac{1}{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{f^{(n+1)}(\eta)}=\frac{1}{n+1}$$

命题 5.9.47

设 $f(x)$ 有 n 阶连续导数,$f^{(k)}(x_0)=0(k=2,3,\cdots,n-1)$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0+\theta h)$, 其中 $\theta\in(0,1)$, 证明: $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$

解

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处泰勒展开式:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\xi\in(x_0\sim x)$$

令 $x=x_0+h$:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1},\xi\in(x_0\sim x)$$

$f^{(k)}(x_0)=0(k=2,3,\cdots,n-1)$:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n\Rightarrow f'(x_0+\theta h)-f'(x_0)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^{n-1}$$

$f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处泰勒展开式:

$$f'(x)=f'(x_0)+f''(x_0)(x-x_0)+\frac{f'''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}+\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1},\eta\in(x_0\sim x)$$

令 $x=x_0+\theta h$:

$$f'(x_0+\theta h)=f'(x_0)+f''(x_0)\theta h+\frac{f'''(x_0)}{2}(\theta h)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-2)!}(\theta h)^{n-2}+\frac{f^{(n)}(\eta)}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1},\eta\in(x_0\sim x)$$

$f^{(k)}(x_0)=0(k=2,3,\cdots,n-1)$:

$$f'(x_0+\theta h)=f'(x_0)+\frac{f^{(n)}(\eta)}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1}\Rightarrow\theta^{n-1}=\frac{f^{(n)}(\xi)}{nf^{(n)}(\eta)}$$

$$\theta^{n-1}=\frac{f^{(n)}\xi}{nf^{(n)}(\eta)}\Rightarrow\lim_{h\to0}\theta^{n-1}=\frac{1}{n}$$

综上所述: $\lim\limits_{h\to0}\theta=\dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$

命题 5.9.48

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的邻域内四阶可导,$|f^{(4)}(x)|\le M(M>0)$, 证明: 对此邻域上任意一个不同于 x_0 的点 a:

$$\left|f''(x_0)-\frac{f(a)+f(b)-2f(x_0)}{(a-x_0)^2}\right|\le\frac{M}{12}(a-x_0)^2,\ a+b=2x_0$$

♠

解

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 的泰勒展开式:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f^{(3)}(x_0)}{6}(x-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(\xi)}{24}(x-x_0)^4,\xi\in(x_0\sim x)$$

令 $x=a,x=b$:

$$\begin{cases}f(a)=f(x_0)+f'(x_0)(a-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2}(a-x_0)^2+\dfrac{f^{(3)}(x_0)}{6}(a-x_0)^3+\dfrac{f^{(4)}(\xi_1)}{24}(a-x_0)^4\\ f(b)=f(x_0)+f'(x_0)(b-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2}(b-x_0)^2+\dfrac{f^{(3)}(x_0)}{6}(b-x_0)^3+\dfrac{f^{(4)}(\xi_2)}{24}(b-x_0)^4\end{cases}$$

$a+b=2x_0$:

$$f(a)+f(b)-2f(x_0)=2f''(x_0)(a-x_0)^2+\frac{[f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)]}{24}(a-x_0)^4$$

$$\left|f''(x_0)-\frac{f(a)+f(b)-2f(x_0)}{(a-x_0)^2}\right|=\left|\frac{[f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)]}{24}(a-x_0)^2\right|\le\frac{M}{12}(a-x_0)^2$$

综上所述:

$$\left|f''(x_0)-\frac{f(a)+f(b)-2f(x_0)}{(a-x_0)^2}\right|\le\frac{M}{12}(a-x_0)^2,\ a+b=2x_0$$

命题 5.9.49

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 三阶连续可导, 证明:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f(b)=f(a)+f'(\frac{a+b}{2})(b-a)+\frac{(b-a)^3}{24}f^{(3)}(\xi)$$

解

$f(x)$ 在 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 的泰勒展开式:

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\frac{a+b}{2})}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2+\frac{f^{(3)}(\xi)}{6}(x-\frac{a+b}{2})^3,\xi\in(x,\frac{a+b}{2})$$

令 $x=a,x=b$:

$$\begin{cases}f(a)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(\frac{a-b}{2})+\frac{f''(\frac{a+b}{2})}{2}(\frac{a-b}{2})^2+\frac{f^{(3)}(\xi_1)}{6}(\frac{a-b}{2})^3, & \xi_1\in(a,\frac{a+b}{2})\\ f(b)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(\frac{b-a}{2})+\frac{f''(\frac{a+b}{2})}{2}(\frac{b-a}{2})^2+\frac{f^{(3)}(\xi_2)}{6}(\frac{b-a}{2})^3, & \xi_2\in(\frac{a+b}{2},b)\end{cases}$$

$f(b)-f(a)$:

$$f(b)=f(a)+f'(\frac{a+b}{2})(b-a)+\frac{(b-a)^3}{24}[2f^{(3)}(\xi_1)+2f^{(3)}(\xi_2)]$$

介值定理:

$$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2),\ s.t.\ f^{(3)}(\xi)=\frac{f^{(3)}(\xi_1)+f^{(3)}(\xi_2)}{2}$$

综上所述:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f(b)=f(a)+f'(\frac{a+b}{2})(b-a)+\frac{(b-a)^3}{24}f^{(3)}(\xi)$$

命题 5.9.50

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶连续可导, 证明:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f(a)-2f(\frac{a+b}{2})+f(b)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$$

解

$f(x)$ 在 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 处泰勒展开式:

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\xi)}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2,\ \xi\in(x\sim\frac{a+b}{2})$$

令 $x=a,x=b$:

$$\begin{cases}f(a)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(\frac{a-b}{2})+\frac{f''(\xi_1)}{2}(\frac{a-b}{2})^2, & \xi_1\in(a,\frac{a+b}{2})\\ f(b)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(\frac{b-a}{2})+\frac{f''(\xi_2)}{2}(\frac{b-a}{2})^2, & \xi_2\in(\frac{a+b}{2},b)\end{cases}$$

$f(a)+f(b)$:

$$f(b)+f(a)=2f(\frac{a+b}{2})+\frac{(b-a)^2}{8}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]$$

介值定理:

$$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2),\ s.t.\ f''(\xi)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$$

综上所述:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f(a)-2f(\frac{a+b}{2})+f(b)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$$

命题 5.9.51

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 $n(n\geq 2)$ 阶可导, 满足 $f^{(i)}(a)=f^{(i)}(b)=0(i=1,2,\cdots,n-1)$, 证明:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ |f^{(n)}(\xi)|\geq\frac{2^{n-1}n!}{(b-a)^n}|f(b)-f(a)|$$

解

$f(x)$ 在 $x=a$ 和 $x=b$ 处的泰勒展开式:

$$\begin{cases} f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\dfrac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!}(x-a)^n, & \xi_1\in(a,x)\\ f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\cdots+\dfrac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!}(x-b)^{n-1}+\dfrac{f^{(n)}(\xi_2)}{n!}(x-b)^n, & \xi_2\in(x,b)\end{cases}$$

令 $x=\dfrac{a+b}{2}$, 且 $f^{(i)}(a)=f^{(i)}(b)=0(i=1,2,\cdots,n-1)$:

$$\begin{cases} f(\frac{a+b}{2})=f(a)+\dfrac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!}(\dfrac{b-a}{2})^n\\ f(\frac{a+b}{2})=f(b)+\dfrac{f^{(n)}(\xi_2)}{n!}(\dfrac{a-b}{2})^n\end{cases}\Rightarrow f(b)-f(a)=\frac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!}(\frac{b-a}{2})^n-\frac{f^{(n)}(\xi_2)}{n!}(\frac{a-b}{2})^n$$

$$\frac{2^{n-1}n!|f(b)-f(a)|}{(b-a)^n}=\frac{|(-1)^nf^{(n)}(\xi_2)+f^{(n)}(\xi_1)|}{2}\leq\frac{|f^{(n)}(\xi_2)|+|f^{(n)}(\xi_1)|}{2}$$

介值定理:

$$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2),\ s.t.\ |f^{(n)}(\xi)|=\frac{|f^{(n)}(\xi_1)|+|f^{(n)}(\xi_2)|}{2}$$

综上所述:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ |f^{(n)}(\xi)|\geq\frac{2^{n-1}n!}{(b-a)^n}|f(b)-f(a)|$$

命题 5.9.52

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导, 且 $|f(x)|\leq a,|f''(x)|\leq b$, 证明: $|f'(x)|\leq 2a+b$

解

$f(x)$ 在 x_0 处泰勒展开式:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(\xi)(x-x_0)^2,\xi\in(x\sim x_0)$$

令 $x_0=x,x=0,x=1$:

$$\begin{cases} f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+f''(\xi_1)(0-x)^2, & \xi_1\in(0,x) \\ f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+f''(\xi_2)(1-x)^2, & \xi_2\in(x,1) \end{cases}$$

$f(1)-f(0)$:

$$f'(x)=f(0)-f(1)+f''(\xi_2)(1-x)^2-f''(\xi_1)x^2$$

绝对值三角不等式:

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= |f(0)-f(1)+f''(\xi_2)(1-x)^2-f''(\xi_1)x^2| \\ &\le |f(0)|+|f(1)|+|f''(\xi_2)|(1-x)^2+|f''(\xi_1)|x^2 \\ &\le 2a+b\left[x^2+(1-x)^2\right] \\ &\le 2a+b \end{aligned}$$

综上所述: $|f'(x)|\le 2a+b$

命题 5.9.53

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 三阶可导, 且 $f(x)$ 和 $f^{(3)}(x)$ 有界, 证明: $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上也有界

解

不妨设 $|f(x)|\le a,|f^{(3)}(x)|\le b$

1. $f''(x)$ 有界

(1). 当 $x>1$ 时,$f(x)$ 在 x_0 处泰勒展开式:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f^{(3)}(\xi)}{6}(x-x_0)^3,\xi\in(x_0,x)$$

令 $x_0=x,x=x_0+1$:

$$\begin{cases} f(x+1)=f(x)+f'(x)+\dfrac{f''(x)}{2}+\dfrac{f^{(3)}(\xi_1)}{6}, & \xi_1\in(x,x+1) \\ f(x-1)=f(x)-f'(x)+\dfrac{f''(x)}{2}-\dfrac{f^{(3)}(\xi_2)}{6}, & \xi_2\in(x-1,x) \end{cases}$$

$f(x+1)+f(x-1)$:

$$\begin{aligned} |f''(x)| &= \left|f(x+1)+f(x-1)-2f(x)+\frac{f^{(3)}(\xi_1)-f^{(3)}(\xi_2)}{6}\right| \\ &\le |f(x+1)|+|f(x-1)|+2|f(x)|+\frac{1}{6}\left[|f^{(3)}(\xi_1)|+|f^{(3)}(\xi_2)|\right] \\ &\le 4a+\frac{b}{3} \end{aligned}$$

(2). 当 $0 < x \le 1$ 时:

$$\begin{aligned} |f''(x)| &= |f''(x) - f''(2) + f''(2)| \\ &\le |f''(x) - f''(2)| + |f''(2)| \\ &\le |(x-2)f^{(3)}(\xi_3)| + |f''(2)| \\ &\le 2b + 4a + \frac{b}{3} \end{aligned}$$

综上所述: $f''(x)$ 有界, 记 $|f''(x)| < c$

2. $f'(x)$ 有界

(1). 当 $x > 1$ 时, $f(x)$ 在 x_0 处泰勒展开式:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2$$

令 $x = x_0 + 1, x_0 = x$:

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{f''(\xi_1)}{2}$$

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= |f(x+1) - f(x) - \frac{f''(\xi_4)}{2}| \\ &\le |f(x+1)| + |f(x)| + \frac{|f''(\xi_4)|}{2} \\ &\le 2a + \frac{c}{2} \end{aligned}$$

(2). 当 $0 < x \le 1$ 时:

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= |f'(x) - f'(2) + f'(2)| \\ &\le |f'(x) - f'(2)| + |f'(2)| \\ &\le |(x-2)f''(\xi)| + |f'(2)| \\ &\le 2c + 2a + \frac{c}{2} \end{aligned}$$

综上所述: $f'(x)$ 有界

命题 5.9.54

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 二阶可导, 记 $M_i = max|f^{(i)}(x)|(i = 0, 1, 2)$, 证明: $M_1^2 \le 4M_0M_2$

解

$f(x)$ 在 $x = x_0$ 处泰勒展开式:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2, \xi \in (x \sim x_0)$$

令 $x = x_0 + h, x_0 = x$:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2$$

绝对值三角不等式:

$$\begin{aligned}|f'(x)| &= \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{f''(\xi)}{2}h\right| \\ &\le \frac{|f(x+h)|+|f(x)|}{|h|}+\frac{|f''(\xi)|}{2}|h| \\ &\le \frac{2M_0}{|h|}+\frac{M_2}{2}|h|\end{aligned}$$

$$\forall x,h,\ s.t.|f'(x)| \le \frac{2M_0}{|h|}+\frac{M_2}{2}|h| \Rightarrow M_1 < \min\{\frac{2M_0}{|h|}+\frac{M_2}{2}|h|\}$$

平均值不等式:

$$\frac{2M_0}{|h|}+\frac{M_2}{2}|h| \ge 2\sqrt{M_0M_2} \Rightarrow M_1^2 \le 4M_0M_2$$

综上所述: $M_1^2 \le 4M_0M_2$

命题 5.9.55

$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 二阶可导, 记 $M_i = max|f^{(i)}(x)|(i=0,1,2)$, 证明: $M_1^2 \le 2M_0M_2$

解

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处泰勒展开式:

$$f(x) = f(x_0)+f'(x)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2, \xi \in (x \sim x_0)$$

令 $x = x_0+h, x = x_0-h$:

$$\begin{cases} f(x+h) = f(x)+f'(x)h+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}h^2 \\ f(x-h) = f(x)-f'(x)h+\dfrac{f''(\xi_2)}{2}h^2 \end{cases}$$

两式相减:

$$f(x+h)-f(x-h) = 2f'(x)h+\frac{f''(\xi_1)-f''(\xi_2)}{2}h^2$$

绝对值三角不等式:

$$\begin{aligned}|f'(x)| &= \left|\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}+\frac{f''(\xi_1)-f''(\xi_2)}{4}h\right| \\ &\le \frac{|f(x+h)|+|f(x)|}{|2h|}+\frac{|f''(\xi_1)+f''(\xi_2)|}{4}|h| \\ &\le \frac{M_0}{|h|}+\frac{M_2}{2}|h|\end{aligned}$$

$$\forall x,h,\ s.t.|f'(x)| \le \frac{M_0}{|h|}+\frac{M_2}{2}|h| \Rightarrow M_1 < \min\{\frac{M_0}{|h|}+\frac{M_2}{2}|h|\}$$

平均值不等式:

$$\frac{M_0}{|h|}+\frac{M_2}{2}|h| \ge \sqrt{2M_0M_2} \Rightarrow M_1^2 \le 2M_0M_2$$

综上所述: $M_1^2 \le 2M_0M_2$

5.9.9 广义罗尔定理

命题 5.9.56

1. $f(x)$ 在 (a,b) 内可导, 且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = A$, 证明: $\exists\xi \in (a,b),\ s.t.\ f'(\xi) = 0$
2. $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可导, 且 $f(0) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, 证明: $\exists\xi \in (0,+\infty),\ s.t.\ f'(\xi) = 0$

3.$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可导, 且 $0 \le f(x) \le \dfrac{x}{1+x^2}$, 证明: $\exists\xi > 0,\ s.t.\ f'(\xi) = \dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$

4.$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可导,$f(0) = 1$, 且 $|f(x)| \le e^{-x}$, 证明: $\exists\xi > 0,\ s.t.\ f'(\xi) + e^{-\xi} = 0$

解

1. 构造辅助函数: $g(x) = \begin{cases} A, & x = a \\ f(x), & x \in (a,b) \\ A, & x = b \end{cases}$

$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导

$g(a) = g(b) = A$, 罗尔定理:

$$\exists\xi \in (a,b),\ s.t.\ g'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = 0$$

综上所述: $\exists\xi \in (a,b),\ s.t.\ f'(\xi) = 0$

2. 构造辅助函数: $g(x) = \begin{cases} f(tanx), & x \in [0,\frac{\pi}{2}) \\ A, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$g(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续,$(0,\frac{\pi}{2})$ 上可导

$g(0) = g(\frac{\pi}{2}) = A$, 罗尔定理:

$$\exists\eta \in (0,\frac{\pi}{2}),\ s.t.\ f'(\tan\eta) = 0 \Rightarrow \exists\xi \in (0,+\infty),\ s.t. f'(\xi) = 0$$

综上所述: $\exists\xi \in (0,+\infty),\ s.t.\ f'(\xi) = 0$

3. 构造辅助函数: $g(x) = f(x) - \dfrac{x}{1+x^2}$

$0 \le f(x) \le \dfrac{x}{1+x^2}$

夹逼定理:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$:

$$\exists \xi \in (0,+\infty),\ s.t.\ g'(\xi)=0 \Rightarrow f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$$

4. 构造辅助函数: $g(x)=f(x)-e^{-x}$

$$g'(x)=f'(x)+e^{-x},\ g(0)=0$$

夹逼定理: $0\le |f(x)|\le e^{-x}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x)=0$$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$:

$$\exists \xi \in (0,+\infty),\ s.t.\ g'(\xi)=0 \Rightarrow f'(\xi)+e^{-\xi}=0$$

命题 5.9.57

$f(x)$ 在 (a,b) 上三阶可导, 证明:

$$\exists \xi \in (a,b),\ s.t.\ f(b)=f(a)+\frac{f'(a)+f'(b)}{2}(b-a)-\frac{(b-a)^3}{12}f^{(3)}(\xi)$$

解

构造辅助函数:

$$\begin{cases} g(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f'(x)+f'(a)}{2}(x-a) \\ h(x)=(x-a)^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'(x)=\dfrac{f'(x)-f'(a)}{2}-\dfrac{f''(x)}{2}(x-a) \\ g''(x)=-\dfrac{f^{(3)}(x)}{2}(x-a) \\ g(a)=g'(a)=g''(a)=0 \end{cases}$$

柯西中值定理:

$$\exists \xi_1 \in (a,b),\ s.t.\ \frac{g(b)-g(a)}{h(b)-h(a)}=\frac{g'(\xi_1)}{h'(\xi_1)}=\frac{g'(\xi_1)-g'(a)}{h'(\xi_1)-h'(a)}$$

柯西中值定理:

$$\exists \xi_2 \in (a,\xi_1),\ s.t.\ \frac{g'(\xi_1)-g'(a)}{h'(\xi_1)-h'(a)}=\frac{g''(\xi_2)}{h''(\xi_2)}$$

$$\frac{g(b)-g(a)}{h(b)-h(a)}=\frac{g''(\xi_2)}{h''(\xi_2)} \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)-\dfrac{f'(b)+f'(a)}{2}(b-a)}{(b-a)^3}=-\frac{f^{(3)}(\xi_2)(\xi_2-a)}{12(\xi_2-a)}=-\frac{f^{(3)}(\xi_2)}{12}$$

综上所述: $\exists \xi=\xi_2 \in (a,b),\ s.t.\ f(b)=f(a)+\dfrac{f'(a)+f'(b)}{2}(b-a)-\dfrac{(b-a)^3}{12}f^{(3)}(\xi)$

命题 5.9.58

$f(x)$ 在 (a,b) 上三阶可导, 证明:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ \int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{4}\left[f(a)+3f(\frac{a+2b}{3})\right]+\frac{(b-a)^4}{216}f^{(3)}(\xi)$$

解

构造辅助函数:

$$\begin{cases}g(x)=\int_a^x f(t)dt-\frac{x-a}{4}\left[f(a)+3f(\frac{a+2x}{3})\right]\\ h(x)=(x-a)^4\end{cases}$$

$$\begin{cases}g'(x)=f(x)-\frac{x-a}{2}f'(\frac{a+2x}{3})-\frac{1}{4}\left[f(a)+3f(\frac{a+2x}{3})\right]\\ g''(x)=f'(x)-f'(\frac{a+2x}{3})-\frac{x-a}{3}f''(\frac{a+2x}{3})\\ g^{(3)}(x)=f''(x)-f''(\frac{a+2x}{3})-\frac{2(x-a)}{9}f^{(3)}(\frac{a+2x}{3})\\ g(a)=g'(a)=g''(a)=g^{(3)}(a)=0\end{cases}$$

柯西中值定理:

$$\exists\xi_1\in(a,b),\ s.t.\ \frac{g(b)-g(a)}{h(b)-h(a)}=\frac{g'(\xi_1)}{h'(\xi_1)}=\frac{g'(\xi_1)-g'(a)}{h'(\xi_1)-h'(a)}$$

柯西中值定理:

$$\exists\xi_2\in(a,\xi_1),\ s.t.\ \frac{g'(\xi_1)-g'(a)}{h'(\xi_1)-h'(a)}=\frac{g''(\xi_2)}{h''(\xi_2)}$$

柯西中值定理:

$$\exists\xi_3\in(a,\xi_2),\ s.t.\ \frac{g''(\xi_2)-g''(a)}{h''(\xi_2)-h''(a)}=\frac{g^{(3)}(\xi_3)}{h^{(3)}(\xi_3)}$$

$$\frac{\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{4}\left[f(a)+3f(\frac{a+2b}{3})\right]}{(b-a)^4}=\frac{f''(\xi_3)-f''(\frac{a+2\xi_3}{3})-\frac{2(\xi_3-a)}{9}f^{(3)}(\frac{a+2\xi_3}{3})}{24(\xi_3-a)}$$

拉格朗日中值定理:

$$\exists\xi_4\in(\frac{a+2\xi_3}{3},\xi_3),\ s.t.\ f''(\xi_3)-f''(\frac{a+2\xi_3}{3})=f^{(3)}(\xi_4)\frac{\xi_3-a}{3}$$

$$\frac{\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{4}\left[f(a)+3f(\frac{a+2b}{3})\right]}{(b-a)^4}=\frac{3f^{(3)}(\xi_4)-2f^{(3)}(\frac{a+2\xi_3}{3})}{216}$$

命题 5.9.59

设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, 且 $f(x)$ 在区间 $[a_1, a_n]$ 上二阶可导, $c \in [a_1, a_n]$, $f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_n) = 0$, 证明:

$$\exists \xi \in (a_1, a_n),\ s.t.\ f(c) = \frac{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

解

命题 5.9.60

$f(x)$ 在 (a, b) 上二阶可导, 证明:

$$\forall c \in (a,b), \exists \xi \in (a,b),\ s.t.\ \frac{f''(\xi)}{2} = \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(a-b)(c-b)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$$

解

第 6 章 一元积分学

内容提要

- ❏ 不定积分
- ❏ 定积分
- ❏ 变限积分
- ❏ 反常积分
- ❏ 积分方法
- ❏ 积分应用

6.1 不定积分

定义 6.1.1 (不定积分)

$\forall x \in I$, 对于可导函数 $F(x)$, 均有 $F'(x) = f(x)$, 我们称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 记为 $\int f(x)dx = F(x) + C$ 是 $f(x)$ 的原函数

定理 6.1.1 (原函数存在定理 (充分条件))

连续函数 $f(x)$ 必存在原函数 $F(x)$

证明

1. 构造函数 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, 证明 $F'(x) = f(x)$

2. $\forall x \in (a,b), F'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} = \lim\limits_{\xi \to x} f(\xi) = f(x)$

定理 6.1.2 (达布定理 (必要条件))

1. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数 $F(x)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有介值性
2. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数 $F(x)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必无第一类间断点
3. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数 $F(x)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必无无穷间断点

6.1.1 不定积分计算

定理 6.1.3 (常用不定积分)

1. 基础不定积分

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C, \alpha \neq -1$ $\begin{cases} \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}+C \\ \int \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}+C \end{cases}$
2. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C$
3. $\int e^x dx = e^x + C$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\int \cos x dx = \sin x + C$ $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$
5. $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$ $\begin{cases} \int \frac{1}{\cos x}dx = \int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \\ \int \frac{1}{\sin x}dx = \int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C \end{cases}$
6. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$ $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$
7. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$ $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$
8. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C, |x|>|a|$
9. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$
10. $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$ $\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+C$
11. $\int \sqrt{x^2\pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})+C$
12. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

2. 扩展不定积分

1. $\begin{cases} \int \sin^n x dx, & n=2,3,4,5 \\ \int \cos^n x dx, & n=2,3,4,5 \end{cases}$
2. $\begin{cases} \int \frac{1}{\sin^n x}dx, & n=2,3,4,5 \\ \int \frac{1}{\cos^n x}dx, & n=2,3,4,5 \end{cases}$
3. $\int \frac{1}{x^n+1}dx, n=3,4,6$

推论 6.1.1 (扩展不定积分)

命题 6.1.1

$$\int \sin^2 x dx \qquad \int \cos^2 x dx$$

解

$$\begin{cases}\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C \\ \int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C\end{cases}$$

命题 6.1.2

$$\int \sin^3 x dx \qquad \int \cos^3 x dx$$

解

$$\begin{cases}\int \sin^3 x dx = \int (\cos^2 x - 1) d(\cos x) = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C \\ \int \cos^3 x dx = \int (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C\end{cases}$$

命题 6.1.3

$$\int \sin^4 x dx \qquad \int \cos^4 x dx$$

解

$$\begin{cases}\int \sin^4 x dx = \int \frac{\cos^2 2x - 2\cos 2x + 1}{4} dx = \frac{\sin 4x}{32} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3}{8} + C \\ \int \cos^4 x dx = \int \frac{\cos^2 2x - 2\cos 2x + 1}{4} dx = \frac{\sin 4x}{32} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3}{8} + C\end{cases}$$

命题 6.1.4

$$\int \sin^5 x dx \qquad \int \cos^5 x dx$$

解

$$\begin{cases}\int \sin^5 x dx = -\int (1-\cos^2 x)^2 d(\cos x) = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{2\cos^3 x}{3} - \cos x + C \\ \int \cos^5 x dx = \int (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x) = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2\sin^3 x}{3} + \sin x + C\end{cases}$$

命题 6.1.5

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

解

$$\begin{cases} \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \end{cases}$$

命题 6.1.6

$$\int \frac{1}{\sin^3 x} dx \qquad \int \frac{1}{\cos^3 x} dx$$

解

$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{1}{\sin^4 x} d\cos x \\ &= -\int \frac{1}{(1-t^2)^2} dt \\ &= \int \left[\frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{C}{t-1} + \frac{D}{(t-1)^2} \right] dx \end{aligned}$$

令 $f(x) = A(t-1)^2(t+1) + B(t-1)^2 + C(t+1)^2(t-1) + D(t+1)^2 = -1$:

$$\begin{cases} f(0) = A + B - C + D = -1 \\ f(-1) = 4B = -1 \\ f(1) = 4D = -1 \\ f(2) = 3A + B + 9C + 9D = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{4} \\ B = -\frac{1}{4} \\ C = \frac{1}{4} \\ D = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \left[-\frac{1}{4(t+1)} - \frac{1}{4(t+1)^2} + \frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4(t-1)^2} \right] dt \\ &= -\frac{ln|t+1|}{4} + \frac{1}{4(t+1)} + \frac{ln|t-1|}{4} + \frac{1}{4(t-1)} \\ &= \frac{1}{4} ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} \end{aligned}$$

综上所述:

$$\begin{cases} \int \frac{1}{\sin^3 x} dx = \frac{1}{4} ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + C \\ \int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \frac{1}{4} ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) - \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + C \end{cases}$$

命题 6.1.7

$$\int \frac{1}{\sin^4 x} dx \qquad \int \frac{1}{\cos^4 x} dx$$

解

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^4 x}dx \\
&= \int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^4 x}d\tan x \\
&= -\frac{1}{3\tan^3 x}-\frac{1}{\tan x}+C \\
J &= \int \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^4 x}dx \\
&= \int (1+\tan^2 x)d\tan x \\
&= \tan x-\frac{\tan^3 x}{3}+C
\end{aligned}
$$

综上所述:

$$
\begin{cases}
\int \frac{1}{\sin^4 x}dx=-\frac{1}{3\tan^3 x}-\frac{1}{\tan x}+C \\
\int \frac{1}{\cos^4 x}dx=\tan x-\frac{\tan^3 x}{3}+C
\end{cases}
$$

命题 6.1.8

$$
\int \frac{1}{\sin^5 x}dx \qquad \int \frac{1}{\cos^5 x}dx
$$

♠

解

$$
\begin{aligned}
I &= -\int \frac{1}{\sin^6 x}d\cos x \\
&= \int \frac{1}{(t^2-1)^3}dt \\
&= \int \left[\frac{A}{t+1}+\frac{B}{(t+1)^2}+\frac{C}{(t+1)^3}+\frac{D}{t-1}+\frac{E}{(t-1)^2}+\frac{F}{(t-1)^3}\right]dx
\end{aligned}
$$

令:

$$
f(x)=A(t-1)^3(t+1)^2+B(t-1)^3(t+1)+C(t-1)^3+D(t+1)^3(t-1)^2+E(t+1)^3(t-1)+F(t+1)^3=1
$$

$$
\begin{cases}
A+D=0 \\
-A+B+D+E=0 \\
f(0)=-A-B-C+D-E+F=1 \\
f(-1)=-8C=1 \\
f(1)=8F=1 \\
f(2)=9A+3B+C+27D+27E+27F=1
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
A=-\frac{3}{16} \\
B=-\frac{3}{16} \\
C=-\frac{1}{8} \\
D=\frac{3}{16} \\
E=-\frac{3}{16} \\
F=\frac{1}{8}
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
I &= \int\left[-\frac{1}{8(t+1)}-\frac{3}{16(t+1)^2}-\frac{1}{8(t+1)^3}+\frac{3}{16(t-1)}-\frac{3}{16(t-1)^2}+\frac{1}{8(t-1)^3}\right]dx \\
&= -\frac{3ln|t+1|}{16}+\frac{3}{16(t+1)}+\frac{1}{16(t+1)^2}+\frac{3ln|t-1|}{16}+\frac{3}{16(t-1)}-\frac{1}{16(t-1)^2} \\
&= \frac{3}{16}ln\left(|\frac{1-t}{1+t}|\right)+\frac{6t^3-10t}{16(t^2-1)^2} \\
&= \frac{3}{16}ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)+\frac{3\cos^3 x-5\cos x}{8\sin^4 x}+C
\end{aligned}
$$

综上所述:

$$
\begin{cases}
\int \frac{1}{\sin^5 x}dx=\frac{3}{16}ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)+\frac{3\cos^3 x-5\cos x}{8\sin^4 x}+C \\
\int \frac{1}{\cos^5 x}dx=\frac{3}{16}ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)-\frac{3\sin^3 x-5\sin x}{8\cos^4 x}+C
\end{cases}
$$

命题 6.1.9

$$\int\frac{1}{x^n+1}dx, n=3,4,6$$

解

(i).

$$
\begin{aligned}
\int\frac{1}{x^3+1}dx &= \int\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}dx \\
&= \int\frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right]dx \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\int\frac{2x-1-3}{x^2-x+1}dx \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}dx \\
&= \frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C
\end{aligned}
$$

(ii).

$$
\begin{aligned}
\int\frac{1}{x^4+1}dx &= \int\frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}dx \\
&= \int\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx+\int\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{x+\sqrt{2}}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}dx-\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{x-\sqrt{2}}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x+1)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x+1)+C
\end{aligned}
$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^6+1}dx &= \int \frac{1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}dx \\
&= \int \frac{1}{(x^2+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)}dx \\
&= \int \left[\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{Ex+F}{x^2+\sqrt{3}x+1}\right]dx \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+1}dx+\frac{1}{6\sqrt{3}}\int \left[\frac{3x+2\sqrt{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1}-\frac{3x-2\sqrt{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right]dx \\
&= \frac{1}{3}\arctan x+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right| \\
&+ \frac{1}{12}\int \left[\frac{1}{(x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2}^2)}+\frac{1}{(x-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2}^2)}\right]dx \\
&= \frac{1}{3}\arctan x+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right|+\frac{1}{6}\left[\arctan(2x+\sqrt{3})+\arctan(2x-\sqrt{3})\right]+C
\end{aligned}
$$

定义 6.1.2 (积分方法)

1. 第一换元法 (凑微分): $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(u)du$
2. 第二换元法: $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$
3. 三角换元法: $\sqrt{a^2-x2} \to t = a\sin x$, $\sqrt{a^2+x^2} \to t = a\tan x$
4. 万能公式: $\int R(\sin x,\cos x)dx \to t = \tan\frac{x}{2} \to \begin{cases} \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$

$$
\begin{cases}
R(\sin x,\cos x) = -R(-\sin x,\cos x) \longrightarrow t = \cos x \\
R(\sin x,\cos x) = -R(\sin x,-\cos x) \longrightarrow t = \sin x \\
R(\sin x,\cos x) = R(-\sin x,-\cos x) \longrightarrow t = \tan x
\end{cases}
$$

5. 分部积分法:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

6. 组合积分法:

$$
\begin{cases}
\int f(x)dx = I + A\int g(x)dx \\
\int g(x)dx = J + B\int f(x)dx
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
\int [f(x)+g(x)]dx = I \\
\int [f(x)-g(x)]dx = J
\end{cases}
$$

7. 递归积分法 (分部积分推广):

$$I_n = f(x) + I_{n-1}$$

表 6.1: 分部积分表格

u各阶导数	u	u'	u''	$u^{(3)}$	$\cdots$	$u^{(n+1)}$
$v^{(n+1)}$的各阶原函数	$v^{(n+1)}$	$v^{(n)}$	v^{n-1}	v^{n-2}	$\cdots$	v

定理 6.1.4 (分部积分: 表格法)

$$\begin{aligned}\int uv^{(n+1)}dx &= uv^{(n)} - \int v^n u' dx \\ &= uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \int v^{(n-1)}u''dx \\ &= uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \int v^{(n-2)}u^{(3)}dx \\ &= uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}vdx\end{aligned}$$

定理 6.1.5 (组合积分)

命题 6.1.10

$$\begin{cases} I = \int e^{ax}\sin(bx)dx \\ J = \int e^{ax}\cos(bx)dx \end{cases}$$

解

分部积分公式

$$\begin{cases} I = -\dfrac{1}{b}e^{ax}\cos(bx) + \dfrac{1}{b}\int e^{ax}\cos(bx)dx \\ J = \dfrac{1}{b}e^{ax}\sin(bx) - \dfrac{1}{b}\int e^{ax}\sin(bx)dx \end{cases} \to \begin{cases} I = -\dfrac{1}{b}e^{ax}\cos(bx) + \dfrac{1}{b}J \\ J = \dfrac{1}{b}e^{ax}\sin(bx) - \dfrac{1}{b}I \end{cases}$$

$$\begin{cases} I = \dfrac{ae^{ax}\sin(bx) - be^{ax}\cos(bx)}{a^2+b^2} = \dfrac{\begin{vmatrix} (e^{ax})' & (\sin(bx))' \\ e^{ax} & \sin(bx) \end{vmatrix}}{a^2+b^2} \\ J = \dfrac{ae^{ax}\cos(bx) + be^{ax}\sin(bx)}{a^2+b^2} = \dfrac{\begin{vmatrix} (e^{ax})' & (\cos(bx))' \\ e^{ax} & \cos(bx) \end{vmatrix}}{a^2+b^2} \end{cases}$$

定理 6.1.6 (递归积分)

命题 6.1.11

$$I_n = \int \frac{1}{\cos^n x}dx$$

解

分部积分:

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{1}{\cos^{n-2} x} d\tan x \\ &= \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} - \int \tan x d(\frac{1}{\cos^{n-2} x}) \\ &= \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} - (n-2)\int \frac{\sin^2 x}{\cos^n x} dx \\ &= \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} - (n-2)I_n + (n-2)\int \frac{1}{\cos^{n-2} x} dx \\ &= \tan x \sec^{n-2} x - (n-2)I_n + (n-2)I_{n-2} \\ I_n &= \frac{1}{n+1}\tan x \sec^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} I_0 = x + C_0 \\ I_1 = \int \frac{1}{\cos x} dx = \ln|\sec x + \tan x| + C_1 \end{cases}$$

命题 6.1.12

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx$$

♠

解

分部积分:

$$\begin{aligned} I_{n-1} &= \int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x d(\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}) \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2(n-1)\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^n} dx \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2(n-1)(I_{n-1} - a^2 I_n) \\ I_n &= \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{(2n-3)I_{n-1}}{2(n-1)a^2}, n = 2, 3, \cdots \end{aligned}$$

其中 $I_1 = \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C_1, a > 0$

命题 6.1.13

$$I_n = \int \tan^n x dx$$

♠

解

$$\begin{cases} 1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ d(\tan x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I_n &= \int \tan^n x dx \\ I_n + I_{n-2} &= \int \tan^n x dx + \int \tan^{n-2} x dx \\ &= \int \tan^{n-2} x(1+\tan^2 x)dx \\ &= \int \tan^{n-2} x d(\tan x) \\ &= \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x, n=2,3\cdots \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{cases} I_0 = x + C_0 \\ I_1 = \int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C_1 \end{cases}$$

命题 6.1.14

$$I_n = \int \ln^n x dx$$

解

分部积分:

$$\begin{aligned} I_n &= \int \ln^n x dx \\ &= x\ln^n x - \int x d(\ln^n x) \\ &= x\ln^n x - n\int \ln^{n-1} x dx \\ &= x\ln^n x - nI_{n-1} \\ I_n &= x\ln^n x - nI_{n-1}, n=2,3,\cdots \end{aligned}$$

其中: $I_1 = \int \ln x dx = x\ln x - x + C_1$

定理 6.1.7 (唯一因式分解定理 (有理积分))

有理函数指的是分子、分母都是 x 的多项式的分式 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, 其中 (m > n)

$$\begin{cases} p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, a_n \neq 0 \\ p(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^n, b_m \neq 0 \end{cases}$$

在实数范围内,任意实系数多项式 $q(x)$ 都可以分解为:

$$q(x) = b_m(x-a_1)^{r_1}\cdots(x-a_k)^{r_k}(x^2+b_1x+c_1)^{s_1}\cdots(x^2+b_lx+c_l)^{s_l}$$

其中 $r_1+\cdots+r_k+2(s_1+\cdots+s_l)=m$

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{A_{1,1}}{x-a_1}+\cdots+\frac{A_{1,r_1}}{(x-a_1)^{r_1}}\\ &+\cdots+\\ &\frac{A_{k,1}}{x-a_k}+\cdots+\frac{A_{k,r_k}}{(x-a_k)^{r_k}}\\ &+\frac{M_{1,1}x+N_{1,1}}{x^2+b_1x+c_1}+\cdots+\frac{M_{1,s_1}x+N_{1,s_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{s_1}}\\ &+\cdots+\\ &\frac{M_{l,1}x+N_{l,1}}{x^2+b_lx+c_l}+\cdots+\frac{M_{l,s_l}x+N_{l,s_l}}{(x^2+b_lx+c_l)^{s_l}}\end{aligned}$$

只需要求解两种不定积分:

$$\begin{cases} I=\int\frac{1}{(x-a)^k}dx\\ J=\int\frac{mx+n}{(x^2+bx+c)^k}, c-\frac{b^2}{4}>0\end{cases}$$

第一个不定积分:

$$I=\int\frac{1}{(x-a)^k}dx=\begin{cases}\ln(x-a), & k=1\\ \frac{1}{1-k}(x-a)^{1-k}, & k>1\end{cases}$$

第二个不定积分:

$$J=\int\frac{mx+n}{(x^2+bx+c)^k}$$

令 $t=x+\frac{b}{2}, a^2=c-\frac{b^2}{4}$:

$$\begin{aligned}J &= \int\frac{m(t-\frac{b}{2})+n}{(t^2+a^2)}dt\\ &= \frac{m}{2}\int\frac{2t}{(t^2+a^2)^k}dt+(n-\frac{mb}{2})\int\frac{1}{(t^2+a^2)^k}dt\\ &= \frac{m}{2}\int\frac{1}{(t^2+a^2)^k}d(t^2+a^2)+(n-\frac{mb}{2})\int\frac{1}{(t^2+a^2)^k}dt\\ &= \frac{m}{2}P+(n-\frac{mb}{2})Q\end{aligned}$$

其中

$$P=\begin{cases}\ln(t^2+a^2), & k=1\\ \dfrac{1}{1-k}\dfrac{1}{(t^2+a^2)^{1-k}}, & k>1\end{cases}$$

关于不定积分 Q, 递归积分 **pro** :6.1.12

综上所述: 有理分式一定存在原函数

6.2 定积分

定义 6.2.1 (定积分)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 在 (a,b) 上任取 $n-1$ 个分点 $x_i(i=1,2,3,\cdots,n-1)$, 定义 $x_0=a,x_n=b$, 且满足 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$, 记 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1},k=1,2,\cdots,n$, 任取一点 $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$, 记 $\lambda=\max\{\Delta x_k\}$, 当 $\lambda\to 0$ 时, 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$ 存在且与分点 x_i 和 ξ_k 的取法无关, 则称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 记 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分

任取 x_i: 变为将区间 $[a,b]$ 分为 n 个小区间, 且每个小区间的长度为 Δx_k, 且 $\Delta x_k\to 0$, 且 ξ_k 为每个小区间的右端点, $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(a+\frac{b-a}{n}i)\frac{b-a}{n}$

定理 6.2.1 (定积分存在定理)

1. 必要条件: 区间有界, 函数有界
2. 充分条件:

(1). $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

(2). $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 且只有有限个间断点, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

定理 6.2.2 (牛顿莱布尼茨公式)

$f(x)$ 是 $[a,b]$ 上连续函数, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=F(x)|_a^b=F(b)-F(a)$

定理 6.2.3 (对称函数积分)

(1). $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上连续, 我们有:

1. $f(x)$ 是奇函数

$$\int_{-l}^{l}f(x)dx=0$$

2. $f(x)$ 是偶函数

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_{0}^{l} f(x)dx$$

(2). $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续:

1. $f(a+b-x) = -f(x)$, 称 $f(x)$ 关于 $x = \frac{a+b}{2}$ 奇对称

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = 0$$

2. $f(a+b-x) = f(x)$, 称 $f(x)$ 关于 $x = \frac{a+b}{2}$ 偶对称

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = 2\int_{a}^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = 2\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)dx$$

(3). $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且:

1. $f(a+b-x) = f(x)$, $f(x)$ 关于 $\frac{a+b}{2}$ 对称
2. $g(a+b-x) + g(x) = A$, A 为常数

$$\int_{a}^{b} f(x)g(x)dx = \frac{A}{2}\int_{a}^{b} f(x)dx = A\int_{a}^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = A\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)dx$$

(3). $f(x), g(x)$ 在 $[\frac{1}{a}, a]$ 上连续, 且:

1. $f(x) = f(\frac{1}{x})$
2. $g(x) + g(\frac{1}{a}) = A$, A 为常数

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a} f(x)g(x)dx = \frac{A}{2}\int_{\frac{1}{a}}^{a} f(x)dx = A\int_{\frac{1}{a}}^{1} f(x)dx = A\int_{1}^{a} f(x)dx$$

定理 6.2.4 (华里士公式)

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1, n \in \{2k+1 | k \in \mathbb{N}\} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, n \in \{2k+2 | k \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

递归积分法, 需要证明两个部分:

(1). $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$

区间再现公式: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$

(2). 分部积分: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d(-\cos x) \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} dx \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x) \sin^{n-2} dx \\
&= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \\
I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2}
\end{aligned}$$

其中:

$$\begin{cases} I_0 = \dfrac{\pi}{2} \\ I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1 \end{cases}$$

(i). 当 $n \in \{2k+1 | k \in \mathbb{N}\}$ 时:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2} I_{n-4} = \cdots = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3} I_1 = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1$$

(ii). 当 $n \in \{2k+2 | k \in \mathbb{N}\}$ 时:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2} I_{n-4} = \cdots = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2} I_0 = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

推论 6.2.1 (华里士公式推论)

$$\int_0^{\pi} \sin^n x dx = \begin{cases} 2\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3}\cdot 1, n \in \{2k+1 | k \in \mathbb{N}\} \\ 2\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, n \in \{2k+2 | k \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \cos^n x dx = \begin{cases} 0, n \in \{2k+1 | k \in \mathbb{N}\} \\ 2\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, n \in \{2k+2 | k \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^n x dx = \int_0^{2\pi} \cos^n x dx = \begin{cases} 0, n \in \{2k+1 | k \in \mathbb{N}\} \\ 4\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, n \in \{2k+2 | k \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

命题 6.2.1

$$\int_0^1 x^k \ln^m x, k > 0, m \in \mathbb{N}$$

命题 6.2.2

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n+1}$$

6.3 变限积分

定义 6.3.1 (变限积分)

$x \in [a,b], \forall x \in [a,b]$, 积分 $\int_a^x f(t)dt$ 都有一个确定的值, 我们将这个关于 x 的函数 $\int_a^x f(t)dt$ 称作变限积分

推论 6.3.1 (变限积分)

1. $f(x)$ 可积, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 一定连续
2. $f(x)$ 连续, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 一定可导, 且 $F'(x) = f(x)$
3. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有唯一跳跃间断点 x_0, 则 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $x = x_0$ 处不可导
4. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有唯一可去间断点 x_0, 则 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $x = x_0$ 处可导, 且 $F'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

定理 6.3.1 (变限积分的导数)

$f(x)$ 是连续函数, 则 $\left[\int_{\phi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt\right]' = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\phi(x)]\phi'(x)$

推论 6.3.2 (变上限积分奇偶性和周期性与原函数关系)

$f(x)$ 连续,$f(x)$ 与 $\int_a^x f(t)dt$ 之间的关系

(1). 如果 $f(x)$ 是奇函数,$\int_a^x f(t)dt$ 是偶函数

(2). 如果 $f(x)$ 是偶函数,$\int_a^x f(t)dt$ 是奇函数当且仅当 $a = 0$ 时成立.

(3). 如果 $f(x)$ 是周期函数,$\int_a^x f(t)dt$是周期函数与 $\int_0^T f(t)dt = 0$等价

证明

令: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

(i). 必要性: $F(x+T) - F(x) = \int_x^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt = 0$

(ii). 充分性: $\int_0^T f(t)dt = 0 \Leftrightarrow F(x+T) - F(x) = 0$

6.4 反常积分

定义 6.4.1 (反常积分)

1. 积分区间无界: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)dx$
2. 被积函数无界: $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$

反常积分敛散性判别

定理 6.4.1 (比较判别法)

1. 无穷区间: $f(x), g(x)$ 连续, 且 $0leqf(x) \leq g(x)$
   1. 若 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛
   2. 若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散
2. 无穷函数: $f(x), g(x)$ 在 $(a, b]$ 连续, 瑕点为 $x = a$, 且 $0 \leq f(x) \leq g(x)$
   1. 若 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛
   2. 若 $\int_a^b f(x)dx$ 发散, 则 $\int_a^b g(x)dx$ 发散

定理 6.4.2 (比较判别法的极限形式)

1. 无穷区间: $f(x), g(x)$ 连续, 且 $g(x) > 0, f(x) \geq 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lambda$
   1. $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq \infty$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同敛散
   2. $\lambda = 0$, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛
   3. $\lambda = \infty$, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散
2. 无穷函数: $f(x), g(x)$ 在 $(a, b]$ 连续, 瑕点为 $x = a$, 且 $g(x) > 0, f(x) \geq 0$, $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lambda$
   1. $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq \infty$, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 同敛散
   2. $\lambda = 0$, 则 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 收敛
   3. $\lambda = \infty$, 则 $\int_a^b g(x)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 发散

推论 6.4.1 (p 级数判别法)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx \begin{cases} 收敛, & 0 < p < 1 \\ 发散, & p \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx \begin{cases} 收敛, & p > 1 \\ 发散, & p \leq 1 \end{cases}$$

6.5 一元积分学应用

6.5.1 几何应用

6.5.1.1 平面图形面积

定义 6.5.1 (定积分几何意义)

(i). 直角坐标 $y = f(x)$

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

S 表示的是由 $y = 0, y = f(x)$ 和 $x = a, x = b$ 四条直线围成的平面图形的面积

(ii). 极坐标 $r = r_1(\theta)$ 与 $r = r_2(\theta)$

$$S = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left|[r_1(\theta)]^2 - [r_2(\theta)]^2\right| d\theta$$

S 表示的是由 $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2$ 和 $r = r_1(\theta), r = r_2\theta$ 四条曲线围成的平面图形的面积

(iii). 参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$$

S 表示的是由 $t = \alpha, t = \beta$ 和 $x = x(t), y = y(t)$ 四条曲线围成的平面图形的面积

6.5.1.2 平面曲线弧长

定理 6.5.1 (平面曲线的弧长)

(i). 直角坐标 $y = f(x)$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx$$

(ii). 极坐标 $r = r(\theta)$

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2}d\theta$$

(iii). 参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt$$

6.5.1.3 旋转体体积

定理 6.5.2 (旋转体体积)

(i). 绕 x 轴旋转

$y = f(x)$ 与 $x = a, x = b$ 围成的几何图形绕 x 轴旋转得到的几何体体积 V:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

(ii). 绕 y 轴旋转

$y = f(x)$ 与 $x = a, x = b$ 围成的几何图形绕 y 轴旋转得到的几何体体积 V:

$$V = 2\pi \int_a^b x|f(x)|dx$$

(iii). 绕任意直线 $L_0 : Ax + By + C = 0$ 旋转

$$\begin{cases} V = \pi \int_{l_1}^{l_2} r^2 dl \\ r = \dfrac{|Ax + Bf(x) + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ dl = \dfrac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|} \\ \boldsymbol{n} = (dx, dy) \\ \boldsymbol{l} = (B, -A) \end{cases} \Rightarrow V = \frac{\pi}{(A^2 + B^2)^{\frac{3}{2}}} \int_a^b [Ax + Bf(x) + C]^2 \left|Af'(x) - B\right| dx$$

(iv). 平面区域 D 绕直线 $L_0 : Ax + By + C = 0$

$$V = 2\pi \iint\limits_{(x,y)\in D} r d\sigma = 2\pi \iint\limits_{(x,y)\in D} \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} d\sigma$$

6.5.1.4 旋转曲面侧面积

定理 6.5.3 (曲线绕 x 轴旋转得到的曲面的侧面积)

(i). 直角坐标

$$S = 2\pi \int_a^b |y(x)|\sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx$$

(ii). 参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |y(t)|\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt$$

(iii). 极坐标

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |r \sin\theta| \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta$$

6.5.1.5 函数平均值和形心坐标

定理 6.5.4 (平均值和形心坐标)

(i). 平均值

$$\overline{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

(ii). 形心坐标

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{\iint x d\sigma}{\iint d\sigma} = \dfrac{\int_a^b x f(x)dx}{\int_a^b f(x)dx} \\ \overline{y} = \dfrac{\iint y d\sigma}{\iint d\sigma} = \dfrac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx} \end{cases}$$

6.5.2 物理应用

6.5.2.1 变力做功

定义 6.5.2 (变力做功)

1. $dW = F ds$
2. $W = \int_a^b F ds$

6.5.2.2 抽水做功

定义 6.5.3 (抽水做功)

1. 建立坐标系
2. 确立横截面积表达式
3. $W = \rho g \int_a^b x A(x) dx$

6.5.2.3 水压力

定义 6.5.4 (水中受到的压力)

1. 建立坐标系
2. 建立横截面积表达式: $S = (f(x) - h(x))dx$
3. $F = \rho g \int_a^b x(f(x) - h(x))dx$

积分训练

命题 6.5.1

$$\int \frac{x\sin x}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}dx$$

解

令 $f(x) = \dfrac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}$

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int f(x)dx \\
&= \int -\frac{d\cos x}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \int -\frac{du}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&\overset{u=\tan t}{=\!=\!=} \int (-\cos t)dt \\
&= -\sin t + C \\
&\overset{\sin t=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}}{=\!=\!=\!=} -\frac{\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} + C
\end{aligned}$$

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned}
I &= \int xd(F(x)) \\
&= xF(x) - \int F(x)dx \\
&= -\frac{x\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} + \int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx \\
&= -\frac{x\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} + \int \frac{d\sin x}{\sqrt{2-\sin^2 x}} \\
&= \arcsin(\frac{\sin x}{\sqrt{2}}) - \frac{x\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} + C
\end{aligned}$$

命题 6.5.2

$$\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

解

我们令 $f(x)=\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int f(x)dx \\
&= \int -\arccos x d(\arccos x) \\
&= -\frac{1}{2}(\arccos x)^2 + C
\end{aligned}
$$

原不定积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \int x^3 d(F(x)) \\
&= x^3F(x) - \int F(x)dx \\
&= -\frac{x^3}{2}(\arccos x)^2 - \frac{1}{2}\int (\arccos x)^2 dx \\
&\xlongequal[x=\cos u]{u=\arccos x} -\frac{x^3}{2}(\arccos x)^2 + \frac{1}{2}\int u^2 \sin u du \\
&\xlongequal{\text{分部积分}} -\frac{x^3}{2}(\arccos x)^2 - \frac{u^2}{2}\cos u + u\sin u + \cos u + C \\
&\xlongequal[\sin u=\sqrt{1-x^2}]{u=\arccos x} -\frac{x^3}{2}(\arccos x)^2 - \frac{x(\arccos x)^2}{2} + \sqrt{1-x^2}\arccos x + x + C
\end{aligned}
$$

命题 6.5.3

$$\int \frac{x+\sin x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}dx$$

解

原不定积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{xd\tan x+\tan xdx}{(x\tan x+1)^2} \\
&= \int \frac{dx\tan x}{(x\tan x+1)^2} \\
&= -\frac{1}{x\tan x+1} + C
\end{aligned}
$$

命题 6.5.4

$$\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx$$

解

我们令: $f(x)=\dfrac{h(x)}{x-\ln x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{h'(x)(x-\ln x)-h(x)(1-\frac{1}{x})}{(x-\ln x)^2} \\ &= \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2} \end{aligned}$$

当 $h(x)=x$ 时,$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{(x-lnx)^2}$, 原不定积分为: $I=\dfrac{x}{x-\ln x}+C$

命题 6.5.5

$\int \dfrac{x\cos x}{(x+\cos x)^2}dx$

解

我们令: $f(x)=\dfrac{h(x)}{x+\cos x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{h'(x)(x+\cos x)-h(x)(1-\sin x)}{(x+\cos x)^2} \\ &= \frac{x\cos x}{(x+\cos x)^2} \end{aligned}$$

当 $h(x)=\sin x+1$ 时,$f'(x)=\dfrac{x\cos x}{(x+\cos x)^2}$, 原不定积分为: $I=\dfrac{\sin x+1}{x+\cos x}+C$

命题 6.5.6

$\int \dfrac{\cos^2 x-x^2\sin x}{(x+\cos x)^2}dx$

解

我们令: $f(x)=\dfrac{h(x)}{x+\cos x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{h'(x)(x+\cos x)-h(x)(1-\sin x)}{(x+\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos^2 x-x^2\sin x}{(x+\cos x)^2} \end{aligned}$$

当 $h(x)=x\cos x$ 时,$f'(x)=\dfrac{x\cos x}{(x+\cos x)^2}$, 原不定积分为: $I=\dfrac{x\cos x}{x+\cos x}+C$

命题 6.5.7

$\int \dfrac{x\sin x+\cos x}{x^2+\cos^2 x}dx$

解

原不定积分等价为:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{x\sin x+\cos x}{x^2}}{1+\left(\frac{\cos x}{x}\right)^2}dx \\ &= -\int \frac{d\frac{\cos x}{x}}{1+\left(\frac{\cos x}{x}\right)^2} \\ &= -\arctan(\frac{\cos x}{x})+C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = -\arctan(\frac{\cos x}{x}) + C$

命题 6.5.8

$\int \frac{e^x(x-1)}{x^2+e^{2x}}dx$

解

原不定积分等价为:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\frac{e^x(x-1)}{x^2}}{1+\left(\frac{e^x}{x}\right)^2}dx \\ &= -\int \frac{d\frac{e^x}{x}}{1+\left(\frac{e^x}{x}\right)^2} \\ &= -\arctan(\frac{e^x}{x})+C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = -\arctan(\frac{e^x}{x}) + C$

命题 6.5.9

$\int e^{\sec x}(\tan x - \sin x)dx$

解

我们令: $f(x) = h(x)e^{\sec x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(x)e^{\sec x} + h(x)e^{\sec x}\frac{\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{h'(x)\cos^2 x + h(x)\sin x}{\cos^2 x}e^{\sec x} \\ &= (\tan x - \sin x)e^{\sec x} \end{aligned}$$

当 $h(x) = \cos x$ 时,$f'(x) = (\tan x - \sin x)e^{\sec x}$, 原不定积分为: $I = \cos x e^{\sec x} + C$

命题 6.5.10

$\int e^{\frac{1}{x}}(2x-1)dx$

解

我们令: $f(x)=h(x)e^{\frac{1}{x}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(x)e^{\frac{1}{x}}-h(x)e^{\sec x}\frac{1}{x^2} \\ &= \frac{h'(x)x^2-h(x)}{x^2}e^{\sec x} \\ &= (2x-1)e^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

当 $h(x)=x^2$ 时,$f'(x)=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$, 原不定积分为: $I=x^2e^{\frac{1}{x}}+C$

命题 6.5.11

$\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx$

解

我们令: $f(x)=h(x)\frac{e^{\sin x}}{\cos x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left[h(x)e^{\sin x}\cos x+h'(x)e^{\sin x}\right]\cos x+h(x)e^{\sin x}\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{e^{\sin x}}{\cos^2 x}\left[h(x)\cos^2 x+h'(x)\cos x+h(x)\sin x\right] \\ &= e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

当 $h(x)=x\cos x-1$ 时,$f'(x)=e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}$, 原不定积分为: $I=\frac{(x\cos x-1)e^{\sin x}}{\cos x}+C$

命题 6.5.12

$\int e^{x^3}(10x-9x^7)dx$

解

我们令: $f(x)=h(x)e^{x^3}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x^3}\left(h'(x)+3x^2h(x)\right) \\ &= e^{x^3}(10x-9x^7) \end{aligned}$$

当 $h(x)=5x^2-3x^5$ 时,$f'(x)=e^{x^3}(10x-9x^7)$, 原不定积分为: $I=e^{x^3}(5x^2-3x^5)+C$

命题 6.5.13

$\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$

解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned} I &\xlongequal[x=u^2+1]{u=\sqrt{x-1}} \int \frac{2u}{(u^2+1)u}du \\ &= 2\arctan u + C \\ &= 2\arctan\sqrt{x-1} + C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = 2\arctan\sqrt{x-1} + C$

命题 6.5.14

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x-1}}dx$$

解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned} I &\xlongequal[x=u^2+1]{u=\sqrt{x-1}} \int \frac{2u}{(u^2+1)+u}du \\ &= \int \frac{2u}{u^2+u+1}du - \int \frac{1}{\frac{3}{4}+(u+\frac{1}{2})^2}du \\ &= \ln(u^2+u+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}} + C \\ &= \ln(x+\sqrt{x-1}) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = \ln(x+\sqrt{x-1}) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{3}} + C$

命题 6.5.15

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{2x-1}}dx$$

解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned} I &\xlongequal[x=\frac{u^2+1}{2}]{u=\sqrt{2x-1}} \int \frac{4}{(u^2+1)^2}du \\ &\xlongequal{u=\tan t} \int 4\cos^2 t dt \\ &= 2t + \sin 2t \\ &= 2t + \frac{2\tan t}{1+\tan^2 t} \\ &= 2\arctan u + \frac{2u}{1+u^2} \\ &= 2\arctan\sqrt{2x-1} + \frac{\sqrt{2x-1}}{x} + C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = 2\arctan\sqrt{2x-1} + \frac{\sqrt{2x-1}}{x} + C$

命题 6.5.16

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{x^3}dx$$

解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned}
I &\xlongequal[t=\sqrt{1-x}]{x=1-t^2} \int \frac{2t^2}{(t^2-1)^3}dt \\
&\xlongequal[t=\sec u]{u=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)} \int \frac{2\cos^2 u}{\sin^5 u}du \\
&= \int \frac{2}{\sin^5 u}du - \int \frac{2}{\sin^3 u}du
\end{aligned}$$

我们有:

$$\begin{cases}
\int \frac{1}{\sin^3 x}dx = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + C \\
\int \frac{1}{\sin^5 x}dx = \frac{3}{16}\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + \frac{3\cos^3 x - 5\cos x}{8\sin^4 x} + C
\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{3}{8}\ln\left(\frac{1-\cos u}{1+\cos u}\right) + \frac{3\cos^3 u - 5\cos u}{4\sin^4 u} - \frac{1}{2}ln\left(\frac{1-\cos u}{1+\cos u}\right) + \frac{\cos u}{\sin^2 u} \\
&= -\frac{1}{8}\ln\left(\frac{1-\cos u}{1+\cos u}\right) - \frac{\cos^3 u + \cos u}{4\sin^4 u} \\
&= -\frac{1}{8}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) - \frac{t^3+t}{4(t^2-1)^2} \\
&= -\frac{1}{8}\ln\left(\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right) - \frac{(2-x)\sqrt{1-x}}{4x^2} + C
\end{aligned}$$

原不定积分为: $I = -\frac{1}{8}\ln\left(\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right) - \frac{(2-x)\sqrt{1-x}}{4x^2} + C$

命题 6.5.17

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$$

解

原不定积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{x(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{2}dx \\
&= \int \frac{x\sqrt{x+1}}{2}dx - \int \frac{x\sqrt{x-1}}{2}dx \\
&= I_1 - I_2 \\
I_1 &\xlongequal[u=\sqrt{x+1}]{x=u^2-1} \int (u^2-1)u^2du \\
&= \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \\
I_2 &\xlongequal[t=\sqrt{x-1}]{x=t^2+1} \int (t^2+1)t^2dt \\
&= \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} \\
I &= \frac{(x+1)^2\sqrt{x+1}}{5} - \frac{(x+1)\sqrt{x+1}}{3} - \frac{(x-1)^2\sqrt{x-1}}{5} - \frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{3} + C
\end{aligned}
$$

原不定积分为: $I = \frac{(x+1)^2\sqrt{x+1}}{5} - \frac{(x+1)\sqrt{x+1}}{3} - \frac{(x-1)^2\sqrt{x-1}}{5} - \frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{3} + C$

命题 6.5.18

$\int \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{2}}dx$

♠

解

原不定积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2-2}dx \\
&= \int \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{2\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= \int \frac{1}{2\sqrt{1-x}}dx + \int \frac{1}{2\sqrt{1+x}}dx - \int \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin x + C
\end{aligned}
$$

原不定积分为: $I = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin x + C$

命题 6.5.19

$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$

♠

解

原不定积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I &\xlongequal[x=\frac{t^2-1}{t^2+1}]{t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \int \frac{4t^2}{(t^2+1)^2}dt \\
&\xlongequal{t=\tan u} \int 4\sin^2 u du \\
&= 2u-\sin 2u \\
&= 2u-\frac{2\tan u}{1+\tan^2 u}+C \\
&= 2\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt{1-x^2}+C
\end{aligned}
$$

原不定积分为: $I=2\arctan\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}-\sqrt{1-x^2}+C$

命题 6.5.20

$\int x\sqrt{\dfrac{x}{3-x}}dx$

解

原不定积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I &\xlongequal[x=\frac{3t^2}{t^2+1}]{t=\sqrt{\frac{x}{3-x}}} \int \frac{18t^4}{(t^2+1)^3}dt \\
&\xlongequal{t=\tan u} \int 18\sin^4 u du \\
&= \int \frac{9(1-2\cos 2u+\cos^2 2u)}{2}du \\
&= \int \left(\frac{27}{4}+\frac{9}{4}\cos 4u-9\cos 2u\right)du \\
&= \frac{27}{4}u+\frac{9}{16}\sin 4u-\frac{9}{2}\sin 2u \\
&\xlongequal[\sin 2u=\frac{2t}{1+t^2}]{\cos 2u=\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{27}{4}\arctan\sqrt{\frac{x}{3-x}}-\frac{(9+2x)\sqrt{3x-x^2}}{4}+C
\end{aligned}
$$

原不定积分为: $I=\dfrac{27}{4}\arctan\sqrt{\dfrac{x}{3-x}}-\dfrac{(9+2x)\sqrt{3x-x^2}}{4}+C$

命题 6.5.21

$\int \sqrt{\dfrac{x}{1+x}}dx$

解

原不定积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I \xlongequal[x=\frac{t^2}{1-t^2}]{t=\sqrt{\frac{x}{1+x}}} & \int \frac{2t^2}{(t^2-1)^2}dt \\
\xlongequal{t=\sec u} & \int \frac{2}{\sin^3 u}du \\
= & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos u}{1+\cos u}\right) - \frac{\cos u}{\sin^2 u} + C \\
= & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) - \frac{t}{1-t^2} + C \\
= & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}\right) + \sqrt{x+x^2} + C
\end{aligned}
$$

原不定积分为: $I = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}\right) + \sqrt{x+x^2} + C$

命题 6.5.22

$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$

解

原不定积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I \xlongequal[x=\frac{t^2+1}{t^2-1}]{t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} & \int -\frac{4t^2}{(t^2-1)^2}dt \\
\xlongequal{t=\sec u} & \int -\frac{4}{\sin^3 u}du \\
= & \ln\left(\frac{1+\cos u}{1-\cos u}\right) + \frac{2\cos u}{\sin^2 u} + C \\
= & \ln\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right) + \sqrt{x^2-1} + C
\end{aligned}
$$

原不定积分为: $I = \ln\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right) + \sqrt{x^2-1} + C$

命题 6.5.23

$\int \sqrt{x(x+2)}dx$

解

原不定积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I & \xlongequal[x=u-1]{u=x+1} \int \sqrt{u^2-1}du \\
&= \frac{u\sqrt{u^2-1}}{2} - \frac{\ln|u+\sqrt{u^2-1}|}{2} + C \\
&= \frac{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}{2} - \frac{\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}|}{2} + C
\end{aligned}
$$

原不定积分为: $I = \frac{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}{2} - \frac{\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}|}{2} + C$

命题 6.5.24

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{-x^2+2x+3}}dx$$

♠

解

原不定积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I & \xlongequal[x=2\sin\theta+1]{\sin\theta=\frac{x-1}{2}} \int (2\sin\theta+1)^2 d\theta \\
&= 3\theta - \sin 2\theta - 4\cos\theta + C \\
&= 3\arcsin\frac{x-1}{2} - \frac{(x+3)\sqrt{-x^2+2x+3}}{2} + C
\end{aligned}
$$

原不定积分为: $I = 3\arcsin\frac{x-1}{2} - \frac{(x+3)sqrt{-x^2+2x+3}}{2} + C$

命题 6.5.25

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx$$

♠

解

原不定积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I & \xlongequal[x=\arctan u]{\tan x=u} \int \frac{2u}{u^4+1}du \\
&= \int \frac{1}{(u^2)^2+1}d(u^2) \\
&= \arctan u^2 + C \\
&= \arctan(tan^2 x) + C
\end{aligned}
$$

原不定积分为: $I = \arctan(tan^2 x) + C$

命题 6.5.26

$$\int \frac{e^{\sin x}\sin 2x}{\sin^4(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})}dx$$

♠

解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{8e^{\sin x}\sin x}{(1+\sin x)^2} d\sin x \\ &\xlongequal[x=\arcsin u]{\sin x=u} \int \frac{8e^u u}{(1+u)^2} du \\ &= \frac{8e^u}{1+u} + C \\ &= \frac{8e^{\sin x}}{1+\sin x} + C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = \dfrac{8e^{\sin x}}{1+\sin x} + C$

命题 6.5.27

$$\int \frac{1}{\sin^2 x + \sin 2x} dx$$

解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\tan^2 x + 2\tan x} d\tan x \\ &= \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\tan x + 2}\right) d\tan x \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tan x}{\tan x + 2}\right| + C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\tan x}{\tan x + 2}\right| + C$

命题 6.5.28

$$\int \frac{\sin x}{\cos x + 2\sin x} dx$$

解

原不定积分等价于: $I = \dfrac{A(\cos x + 2\sin x) + B(2\cos x - \sin x)}{\cos x + 2\sin x}$

我们有: $\begin{cases} A + 2B = 0 \\ 2A - B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{2}{5} \\ B = -\dfrac{1}{5} \end{cases}$

原不定积分等价为:

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{5} - \frac{2\cos x - \sin x}{5(\cos x + 2\sin x)} \\ &= \frac{2x}{5} - \frac{\ln|\cos x + 2\sin x|}{5} + C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = \dfrac{2x}{5} - \dfrac{\ln|\cos x + 2\sin x|}{5} + C$

第二部分

高数 (下)

第 2 部分目录

第 7 章 多元函数微分

内容提要

- ❑ 连续、偏导、可微、全微分
- ❑ 链式法则
- ❑ 隐函数存在定理
- ❑ 多元函数极值和最值
- ❑ 拉格朗日数乘法

7.1 多元函数微分概念

定义 7.1.1 (邻域)

1. δ 邻域: 设 $P_0(x_0, y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点, $U(P_0, \delta)$ 表示以 P_0 为中心, 半径为 δ 的圆盘, 即 $U(P_0, \delta) = \{(x, y) | \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$
2. 去心 δ 邻域: $\mathring{U}(P_0, \delta) = \{(x, y) | 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$

♣

定义 7.1.2 (多元函数极限)

设函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上有定义, $P_0(x_0, y_0) \in D$ 或为区域 D 边界上的一点, 如果对于任意给定的正数 ε, 总存 $\delta > 0$, 使得当点 $P(x, y) \in D$ 且 $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ 时, 对应的函数值 $f(x, y)$ 都满足不等式 $|f(x, y) - A| < \varepsilon$, 那么称函数 $f(x, y)$ 当 $(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时的极限为 A, 记为 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$

♣

定义 7.1.3 (连续)

设函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上有定义, $P_0(x_0, y_0) \in D$ 或为区域 D 边界上的一点, 如果 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, 那么称函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续, 如果函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上每一点都连续, 那么称函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上连续

♣

定义 7.1.4 (偏导数)

设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 邻域内有定义, 若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在, 我们将这记作 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数, 记作:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \qquad z'_x\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

类似地, 可以定义 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数, 记作:

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \qquad z'_y\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

对偏导数进一步求偏导数, 可以得到高阶偏导数: $f''_{xx}(x,y), f''_{yy}(x,y), f''_{xy}(x,y), f''_{yx}(x,y)$ ♣

定义 7.1.5 (可微)

函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表示为:

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho) \qquad \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

其中 A,B 只与 x,y 相关, 称 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微,$A\Delta x+B\Delta y$ 是 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全微分.

$$dz=A\Delta x+B\Delta y=Adx+Bdy$$

1. 可微必要条件: $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微 $\Rightarrow$ $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处偏导数必定存在
   且 $\begin{cases}A=\dfrac{\partial z}{\partial x}\\ B=\dfrac{\partial z}{\partial y}\end{cases}$
2. 可微充分条件: $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处偏导数连续 $\Rightarrow$ $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微 ♣

定义 7.1.6 (偏导数连续性)

$$\begin{cases}f'_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}f'_x(x,y_0)\\ f'_y(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\lim\limits_{y\to y_0}f'_y(x_0,y)\end{cases}$$

如果这两个极限相等, 就称偏导数在此点连续 ♣

7.2 链式法则

定义 7.2.1 (链式法则)

$$z=f(u,v),u=\varphi(x,y),v=\phi(x,y)$$

偏导数:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

高阶偏导数:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right]\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right]\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right]\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right]\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right]\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right]\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right]\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right]\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$$

综上所述, 我们有:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}(\frac{\partial u}{\partial x})^2+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}(\frac{\partial v}{\partial x})^2+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}(\frac{\partial u}{\partial y})^2+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}(\frac{\partial v}{\partial y})^2+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$$

♣

定义 7.2.2 (全微分形式不变性)

设 $z=f(x,y), x=x(u,v), y=y(u,v)$, 如果 $f(u,v), u(x,y), v(x,y)$ 分别有连续偏导数, 则复合函数 $z=f(u,v)$ 在 (x,y) 处的全微分:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$$

7.3 隐函数存在定理

定理 7.3.1 (隐函数存在定理 1)

如果函数 $F(x,y)$ 满足一下条件:

1. $F(x_0,y_0)=0$
2. $F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某一个邻域内具有连续偏导数
3. $F'(x_0,y_0)\neq 0$

那么方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 的某一个邻域内能够确定唯一的连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$, 满足 $F(x,f(x))=0$ 且 $y_0=y(x_0)$, 且有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}$$

定理 7.3.2 (隐函数存在定理 2)

如果函数 $F(x,y,z)$ 满足一下条件:

1. $F(x_0,y_0,z_0)=0$
2. $F(x,y,z)$ 在 (x_0,y_0,z_0) 的某一个邻域内具有连续偏导数
3. $F'(x_0,y_0,z_0)\neq 0$

那么方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某一个邻域内能够确定唯一的连续且具有连续导数的函数 $z=f(x,y)$, 满足 $F(x,y,z(x,y))=0$ 且 $z_0=z(x_0,y_0)$, 且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}\qquad\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

7.4 多元函数极值和最值

定义 7.4.1 (多元函数极值和最值)

极值

设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处有定义

1. 如果存在邻域 $U(P_0,\delta)$, 使得对于任意 $(x,y)\in U(P_0,\delta)$, 都有 $f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$, 那么称 $f(x_0,y_0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的一个极大值

2. 如果存在邻域 $U(P_0,\delta)$, 使得对于任意 $(x,y)\in U(P_0,\delta)$, 都有 $f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$, 那么

称 $f(x_0, y_0)$ 是函数 $f(x, y)$ 的一个极小值

最值

1. 如果对于区域 D 上的任意 (x, y)，都有 $f(x, y) \le f(x_0, y_0)$，那么称 $f(x_0, y_0)$ 是函数 $f(x, y)$ 的一个最大值

2. 如果对于区域 D 上的任意 (x, y)，都有 $f(x, y) \ge f(x_0, y_0)$，那么称 $f(x_0, y_0)$ 是函数 $f(x, y)$ 的一个最小值

无条件极值

定义 7.4.2 (多元函数极值)

二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取极值的必要条件:

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$$

二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取极值的充分条件:

$$\begin{cases} f''_{xx}(x_0, y_0) = A \\ f''_{xy}(x_0, y_0) = B \\ f''_{yy}(x_0, y_0) = C \end{cases} \qquad \Delta = AC - B^2 \Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0, \begin{cases} A > 0, & \min \\ A < 0, & \max \end{cases} \\ \Delta < 0, \text{非极值} \\ \Delta = 0, \text{方法失效} \end{cases}$$

条件极值

定义 7.4.3 (拉格朗日数乘法)

求目标函数 $u = f(x, y, z)$ 在条件 $\begin{cases} g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 下的最值

构造辅助函数: $F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z)$

令

$$\begin{cases} F'_x = f'_x + \lambda g'_x + \mu h'_x = 0 \\ F'_y = f'_y + \lambda g'_y + \mu h'_y = 0 \\ F'_z = f'_z + \lambda g'_z + \mu h'_z = 0 \\ F'_\lambda = g(x, y, z) = 0 \\ F'_\mu = h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

得到所有的备选点 P_i，计算 $f(P_i)$ 得到最大值和最小值.

注

1. 在不封闭曲线上求最值, 可以用拉格朗日数乘法, 但是要注意边界条件
2. 闭区域上多元函数的最值, 分为两部分, 第一部分是在区域内部求最值, 第二部分是在区域边界求最值; 前者利用驻点, 后者利用拉格朗日数乘法, 两者结合求最值

第 8 章 二重积分

内容提要

- 二重积分定义
- 积分次序
- 极坐标和直角坐标下的二重积分
- 变量替换

8.1 二重积分概念和性质

定义 8.1.1 (二重积分)

$f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数, 将有界闭区域 D 任意分割为 n 个小闭区域

$$D=\bigcup_{i=1}^{n} D_i$$

$\Delta\sigma_i$ 是 D_i 的面积, 任取 $(\varepsilon_i,\eta_i)\in D_i$, 作乘积 $f(\varepsilon_i,\eta_i)\sigma_i$, 并求和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i,\eta_i)\sigma_i$, 当 $\lim\limits_{n\to+\infty}\{\lambda|\lambda=\max\{d_i(i=1,2,\cdots,n)\}, d_i\text{是}D_i\text{区域的直径}\}=0$ 时, 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i,\eta_i)\sigma_i$ 存在, 且与 D 的分割方法和 (ε_i,η_i) 的取法无关, 那么称此极限为 $f(x,y)$ 在区域 D 上的二重积分, 记作 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i,\eta_i)\sigma_i$$

其中 $f(x,y)$ 称为被积函数, $f(x,y)ds$ 称为被积表达式, x,y 是积分变量, D 是积分区域

二重积分的几何意义

二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 表示区域 D 上以 $f(x,y)$ 为曲顶的曲顶柱体的体积

推论 8.1.1

(1). $\iint\limits_D 1d\sigma = \iint\limits_D d\sigma = S_D, S_D$ 是 D 的面积

(2). $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上可积, $f(x,y)$ 在 D 上必有界

(3). 积分的线性性质

$$\iint\limits_D [k_1 f(x,y) + k_2 g(x,y)]\, d\sigma = k_1 \iint\limits_D f(x,y)d\sigma + k_2 \iint\limits_D g(x,y)d\sigma$$

(4). 积分的可加性

设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 内可积, 且 $D_1 \cup D_2 = D, D_1 \cap D_2 = \emptyset$

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$$

(5). 积分的保号性设 $f(x,y), g(x,y)$ 在有界闭区域 D 内可积, 且 $f(x,y) \le g(x,y)$

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le \iint\limits_D g(x,y)d\sigma \Rightarrow \left|\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\right| = \iint\limits_D \left|f(x,y)\right|d\sigma$$

(6). 估值定理

设 M, m 分别是 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 内的最大值和最小值

$$mS_D \le \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le MS_D$$

(7). 中值定理

设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 内连续

$$\exists(\xi,\eta) \in D,\ s.t. \iint\limits_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)S_D$$

8.2 二重积分的对称性

定理 8.2.1 (对称性)

1. 普通对称性

(i). 区域 D 关于 $x = a$ 对称, 我们有:

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma, & f(2a-x) = f(x) \\ 0, & f(2a-x) = -f(x) \end{cases}$$

特别的, 当 $a=0$ 时, 我们有:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & f(-x)=f(x)\\ 0, & f(-x)=-f(x)\end{cases}$$

(ii). 区域 D 关于 $y=b$ 对称, 我们有:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & f(x,2b-y)=f(x,y)\\ 0, & f(x,2b-y)=-f(x,y)\end{cases}$$

特别的, 当 $b=0$ 时, 我们有:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & f(x,-y)=f(x,y)\\ 0, & f(x,-y)=-f(x,y)\end{cases}$$

2. 轮换对称性

区域 D 关于 $x=y$ 对称, 我们有:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(y,x)d\sigma=\frac{1}{2}\iint_D [f(x,y)+f(y,x)]\,d\sigma$$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & f(x,y)=f(y,x)\\ 0, & f(x,y)=-f(y,x)\end{cases}$$

3. 区域 D 关于原点对称, 我们有:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & f(-x,-y)=f(x,y)\\ 0, & f(-x,-y)=-f(x,y)\end{cases}$$

8.3 二重积分计算

定义 8.3.1 (直角坐标系)

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}\int_a^b dx\int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)dy\\ \int_a^b dy\int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)dx\end{cases}$$

定义 8.3.2 (极坐标系)

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{D'} rf(r\cos\theta,r\sin\theta)drd\theta$$

定义 8.3.3 (换元法)

令 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$，是 (x,y) 面到 (u,v) 面的一对一映射，且 $x = x(u,v), y = y(u,v)$ 有一阶连续偏导数

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix} \right\|$$

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_{uv}} f\left[x(u,v), y(u,v)\right] \cdot Jdudv$$

♣

变量替换

$$d\sigma_1 = dudv \qquad d\sigma_2 = |l \times m|$$

$$\begin{cases} x(u,v+dv) - x(u,v) = x'_v dv \\ x(u+du,v) - x(u,v) = x'_u du \\ y(u,v+dv) - y(u,v) = x'_v dv \\ y(u+du,v) - y(u,v) = y'_u du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l = (x'_u du, y'_u du) \\ m = (x'_v dv, y'_v dv) \end{cases}$$

$$d\sigma_2 = (x'_u y'_v - x'_v y'_u)dvdu = \left\| \begin{matrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{matrix} \right\| d\sigma_1$$

Example

例题 8.1.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

证明

$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy$

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \\
&= \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr \\
&= \frac{\pi}{4} \\
I &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}
\end{aligned}
$$

例题 8.2.

$$\int_0^a f(x)dx \int_0^a \frac{1}{f(x)} dx \geq a^2$$

证明

$$I = \int_0^a f(x)dx \int_0^a \frac{1}{f(x)} dx = \iint\limits_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le a}} \frac{f(x)}{f(y)} dxdy$$

$$
\begin{aligned}
2I &= \iint\limits_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le a}} \frac{f(x)}{f(y)} dxdy + \iint\limits_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le a}} \frac{f(y)}{f(x)} dxdy \\
&\geq \iint\limits_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le a}} 2dxdy \\
&= 2a^2 \\
I &\geq a^2
\end{aligned}
$$

第 9 章 常微分方程

内容提要

- ❑ 微分方程概念、解和通解
- ❑ 一阶微分方程
- ❑ 伯努利方程
- ❑ (非) 齐次二阶常系数线性微分方程
- ❑ 欧拉方程
- ❑ 高阶线性微分方程

定义 9.0.1 (微分方程及其阶)

表示未知函数及其导数 (或者微分) 与自变量之间关系的方程称为微分方程, 一般写为:

$$F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0\text{或}y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$$

微分方程中未知函数的最高阶导数的阶数称为**微分方程的阶**.

定义 9.0.2 (常微分方程)

未知函数是一元函数的微分方程称为**常微分方程**.

定义 9.0.3 (线性微分方程)

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x)$$

形如上述的微分方程称为 n 阶**线性微分方程**, 其中 $a_k(x)(k=0,1,2,\cdots,n)$ 都是自变量 x 的函数, $a_k(x)\neq 0$, 当 $a_k(x)(k=0,1,2,\cdots,n)$ 都是常数时, 又称方程为 n 阶**常系数线性微分方程**; 若右端 $f(x)\equiv 0$, 则称方程为 n 阶**齐次线性微分方程**, 否则称其为 n 阶**非齐次线性微分方程**.

定义 9.0.4 (微分方程的解和通解)

- 若将函数代入微分方程, 使方程成为恒等式, 则该函数称为**微分方程的解**, 微分方程解的图形称为积分曲线
- 若微分方程的解中含有的独立常数的个数等于微分方程的阶数, 则该解称为微分方程的**通解**.

♣

定义 9.0.5 (初始条件和特解)

确定通解中常数的条件就是**初始条件**, 如 $y(x_0) = a_0, y'(x_0) = a_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$, 其中 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 为 n 个给定的数, 确定通解中的常数后, 解就成为**特解**.

♣

9.1 一阶微分方程

9.1.1 可分离变量型微分方程

9.1.1.1 直接可分离

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y) = f(x)g(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

9.1.1.2 换元后可分离

$$\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c) \Rightarrow \begin{cases} u = ax+by+c \\ \dfrac{du}{dx} = a + b\dfrac{dy}{dx} \\ \dfrac{du}{dx} = a + bf(u) \end{cases} \Rightarrow \int \frac{du}{a+bf(u)} = \int dx$$

注

- 在换元过程中, 可能会因为定义域问题漏掉某些解, 这些解称为奇解.
- 非线性微分方程的所有解等于通解和奇解的并集; 线性微分方程的所有解等于通解, 没有奇解.

9.1.2 齐次型微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(\frac{y}{x})\Rightarrow\begin{cases}u=\dfrac{y}{x}\\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d(ux)}{x}=u+x\dfrac{du}{dx}\\ u+x\dfrac{du}{dx}=\varphi(u)\end{cases}\Rightarrow\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}$$

9.1.3 一阶线性微分方程

定义 9.1.1 (一阶线性微分方程)

$$y'+p(x)y=q(x),p(x)\text{和}q(x)\text{是已知的连续函数}$$

定理 9.1.1 (一阶线性微分方程解)

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+C\right]$$

注

$$\begin{aligned}&e^{\int p(x)dx}y'+p(x)e^{\int p(x)dx}=q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\\&\left[e^{\int p(x)dx}y\right]'=q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\\&e^{\int p(x)dx}y=\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}+C\\&y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}+C\right]\end{aligned}$$

9.1.4 伯努利方程

定义 9.1.2 (伯努利方程)

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n$$

定理 9.1.2

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}=q(x)\Rightarrow\begin{cases}z=y^{1-n}\\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{1-n}y^{-n}\dfrac{dy}{dx}\end{cases}\Rightarrow(1-n)\frac{dz}{dx}+p(x)z=q(x)$$

我们可以得到:

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x)\Rightarrow z=e^{-\int(1-n)p(x)dx}\left[e^{\int(1-n)p(x)dx}\cdot q(x)+C\right]$$

9.1.5 二阶可降阶微分方程

定义 9.1.3 (二阶可降阶微分方程)

1. $y''=f(y,y')\Leftrightarrow F(y,y',y'')=0$

我们令: $p=y'$, 则

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p'p\Rightarrow p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$$

2. $y''=f(x,y')\Leftrightarrow F(x,y',y'')=0$

我们令: $p(x)=y'$, 则

$$y''=\frac{dp}{dx}\Rightarrow\frac{dp}{dx}=f(x,p)$$

9.2 高阶线性微分方程

9.2.1 二阶常系数线性微分方程

定义 9.2.1 (二阶常系数线性微分方程)

二阶常系数齐次微分方程:

$$y''+py'+py=0$$

二阶常系数非齐次微分方程:

$$y''+py'+py=f(x)$$

定理 9.2.1 (二阶常系数齐次线性微分方程解)

对于二阶常系数齐次 x 线性微分方程:

特征方程: $\lambda^2+p\lambda+q=0$

- 当方程有两个不同的实数根 λ_1,λ_2, 微分方程通解:

$$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$$

- 当方程有两个相同的实根 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, 微分方程通解:

$$y=C_1+C_2xe^{\lambda x}$$

- 当方程有两个不同的虚根 $\lambda_1=\alpha+i\beta,\lambda_2=\alpha-i\beta$, 微分方程通解:

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

定理 9.2.2 (二阶常系数非齐次线性微分方程解)

对于二阶常系数非齐次线性微分方程:

$$y'' + py' + py = f(x)$$

通解为二阶常系数齐次线性微分方程的通解加上特解: $y_0 = y^* + y$

1. 当 $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ 时, 特解 y^*:

$$y^* = e^{\alpha x} x^k Q_n(x)$$

- 当 α 不是特征方程的根,$k = 0$
- 当 α 是特征方程的一个根,$k = 1$
- 当 α 是特征方程的重根,$k = 2$

2. 当 $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + P_m(x)\sin\beta x)$ 时, 特解 y^*:

$$y^* = e^{\alpha x} x^k (Q_l^{(1)}(x)\cos\beta x + Q_l^{(2)}(x)\sin\beta x), \quad l = max\{m, n\}$$

- 当 $\alpha \pm i\beta$ 不是特征方程的根,$k = 0$
- 当 $\alpha \pm i\beta$ 是特征方程的根,$k = 1$

9.2.2 欧拉方程

定义 9.2.2 (欧拉方程)

形如以下形式的微分方程:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + px\frac{dy}{dx} + qy = f(x)$$

1. 当 $x > 0$ 时, 令 $x = e^t, t = \ln x$; $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

原微分方程可化为:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = f(e^t)$$

2. 当 $x < 0$ 时, 令 $x = -e^t, t = \ln(-x)$; $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

原微分方程可化为:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = f(-e^t)$$

9.2.3 高阶常系数齐次线性微分方程

定义 9.2.3 (高阶常系数齐次线性微分方程)

$n(n \geq 3)$ 阶常系数齐次线性微分方程称为高阶常系数齐次线性微分方程。

命题 9.2.1 (n 阶常系数线性微分方程解)

特征方程:

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = 0$$

1. r 是单实数根, 通解包含 Ce^{rx}
2. r 是 k 重实数根, 通解包含 $(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \cdots + C_kx^{k-1})e^{rx}$
3. r 是单复根, 通解包括 $e^{rx}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$
4. r 是二重复根, 通解包括 $e^{rx}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x + C_3x\cos\beta x + C_4x\sin\beta x)$

第 10 章 无穷级数

内容提要

- 常数项级数
- 敛散性判别
- 收敛域和收敛半径
- 函数项级数
- 幂级数
- 和函数和函数展开式
- 傅里叶级数

10.1 常数项级数

定义 10.1.1 (级数定义)

给定一个无穷数列 $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$, 将其各项相加得到 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

我们将 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 称为无穷级数, 简称为级数, 其中 u_n 是无穷级数的通项, 如果 u_n 是常数项, 则称为常数项级数; 如果 u_n 是函数, 则称为函数项级数

定义 10.1.2 (级数敛散性)

级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的敛散性研究:

引入 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$, 我们称 S_n 是无穷级数的部分和, 我们定义:

(1). 当 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$ 时, 我们称级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛.

(2). 当 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \infty$ 或者不存在时, 我们称级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散.

推论 10.1.1

(1). 当 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛时, 我们有: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (必要条件)

(2). 当 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛时, 且这两个级数的和分别为 $S, T, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\alpha u_n + \beta v_n)$ 收敛, 且级数和为 $\alpha S + \beta T$

(3). 改变级数任意有限项, 不会改变该级数的敛散性

(4). 收敛级数的任意项加括号所得到的新级数仍收敛, 且其和不变

10.2 敛散性判别

10.2.1 正项级数判别

(1). 定义法

定理 10.2.1 (收敛原则)

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow S_n$ 有界

证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 是正项级数,$u_n \geq 0, S_n$ 单调递增

S_n 有界, 单调有界准则: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ 存在, 原级数收敛

(2). 比较判别法

定理 10.2.2 (比较判别法)

两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$, 若从某一项起满足 $u_n \leq v_n$:

若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 发散

若 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛

(3). 比较判别法的极限形式

定理 10.2.3 (比较判别法的极限形式)

两个正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n (v_n \neq 0)$, 且 $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = A$

(i). $A = 0$, 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛,$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛

(ii). $0 < A < +\infty$,$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 有相同的敛散性

(iii). $A = +\infty$, 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 发散,$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散

(4). 比值判别法 (达朗贝尔判别法)

定理 10.2.4 (比值判别法)

正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, 且 $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

(i). $\rho < 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛

(ii). $\rho > 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散

(iii). $\rho = 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 敛散性不确定

(5). 根值判别法 (柯西判别法)

定理 10.2.5 (根值判别法)

正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, 且 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

(i). $\rho < 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛

(ii). $\rho > 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散

(iii). $\rho = 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 敛散性不确定

(6). 积分判别法

定理 10.2.6 (积分判别法)

正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, 若存在在 $[1,+\infty)$ 上单调减少的非负函数 $f(x)$, 使得 $u_n = f(n)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 敛散性相同

10.2.2 交错级数判别

定理 10.2.7 (莱布尼茨判别法)

u_n 单调不增且 $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛

10.2.3 一般项级数判别

定义 10.2.1

$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 是原级数的绝对值级数

(i). 如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 收敛, 称其**绝对收敛**

(ii). 如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 发散, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 称其**条件收敛**

10.2.4 常见级数敛散性推论

推论 10.2.1

设 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n, \sum_{n=1}^{+\infty} v_n, \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ 是任意项级数

$$\begin{cases} v_n = \dfrac{u_n + |u_n|}{2} \\ w_n = \dfrac{|u_n| - u_n}{2} \end{cases}$$

(1). a, b, c 是非零常数, 且 $au_n + bv_n + cw_n = 0$, 在 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n, \sum_{n=1}^{+\infty} v_n, \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ 中只要有两个级数收敛, 另一个级数必收敛

(2). 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 收敛 $\Rightarrow$ 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛; 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow$ 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 发散

(3). 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ 收敛 $\Rightarrow$ 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n}$ 绝对收敛 $\quad |\frac{u_n}{n}| \le \frac{1}{2}(u^2 + \frac{1}{n^2})$

(4). 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ 收敛性不确定 $u_n = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$

(5). 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n$ 收敛性不确定 $u_n = (-1)^n\dfrac{1}{n}$

(6). 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{u_n}{n}$ 收敛性不确定 $u_n = (-1)^n\dfrac{1}{\ln n}$

(7). 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛; 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{2n}$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{2n-1}$ 收敛性不确定

10.3 函数项级数

定义 10.3.1 (函数项级数)

设函数列 $\{u_n(x)\}$ 定义在区间 I 上, 称

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\ldots$$

为定义在区间 I 上的 **函数项级数**, 记作 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$, 当 x 取确定的值 x_0 时, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 成为常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$

定义 10.3.2 (收敛点和发散点)

(1). 若给定 $x_0 \in I$, 有 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$ 收敛, 则称 $x = x_0$ 是函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的**收敛点**

(2). 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$ 发散, 则称 $x = x_0$ 是函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的**发散点**

定义 10.3.3 (收敛域)

函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的所有收敛点的集合称为函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的 **收敛域**

10.3.1 幂级数

定义 10.3.4 (幂级数)

若 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ 的一般项 $u_n(x)$ 是 x 的 n 次幂函数, 则称 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ 为**幂级数**

标准形式:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \ldots$$

一般形式:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \ldots$$

其中 $a_n(n = 0, 1, 2\cdots)$ 为**幂级数的系数**

10.3.2 幂级数收敛域

定理 10.3.1 (阿贝尔定理)

阿贝尔定理

当幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_1(x_1 \neq 0)$ 处收敛时, $\forall x < |x_1|$, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 都收敛

当幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_2(x_2 \neq 0)$ 处发散时, $\forall x > |x_2|$, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 都发散

定理 10.3.2 (收敛域和收敛半径)

(1). 不缺项幂级数 (**充分条件**):

$$\lim_{n \to +\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \rho$$

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}, \rho \neq 0 \\ 0, \rho = \infty \\ \infty, \rho = 0 \end{cases}$$

区间 $(-R, R)$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛区间; 幂级数的收敛域为 $(-R, R)$ or $[-R, R]$ or $(-R, R]$ or $[-R, R)$

(2). 缺项幂级数或一般项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$, 利用正项级数判别法中的比值判别法 (**充分条

件):

$$\rho(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|<1\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n(x)}<1\end{cases}\quad\Rightarrow x\in(a,b)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(a)\text{和}\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(b)\text{敛散性}$$

(3). 对级数提出或者乘以因式 $(x-x_0)^k$ 或者平移, 收敛半径不变

(4). 对级数逐项求导, 收敛半径不变, 收敛域可能缩小

(5). 对级数逐项积分, 收敛半径不变, 收敛域可能扩大

10.3.3 幂级数求和函数

定义 10.3.5 (幂级数的和函数)

在幂级数收敛域上, 记 $S(x)$ 是幂级数的和函数:

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$$

定理 10.3.3 (运算法则)

幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 R_a 和 R_b, 且 $R_a\neq R_b$

(i).

$$k\sum_{n=0}^{n}a_nx^n=\sum_{n=0}^{n}ka_nx^n,|x|<R_a$$

(ii).

$$\sum_{n=0}^{n}a_nx^n\pm\sum_{n=0}^{n}b_nx^n=\sum_{n=0}^{n}(a_n\pm b_n)x^n,|x|<\min\{R_a,R_b\}$$

(iii).

$$\sum_{n=0}^{n}a_nx^n\sum_{n=0}^{n}b_nx^n=\sum_{n=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}\right)x^n$$

推论 10.3.1

(i). 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上连续

(ii). 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上可积分, 且有逐项积分公式, 收敛半径

不变，收敛域可能变大

$$\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} (x \in I)$$

(iii). 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 $(-R, R)$ 上可导，且有逐项求导公式，收敛半径不变，收敛域可能变小

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} (|x| < R)$$

10.3.4 重要展开式

定理 10.3.4

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, -\infty < x < +\infty$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, -1 < x < 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, -1 < x \le 1$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, -\infty < x < +\infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, -\infty < x < +\infty$$

$$\tan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, -1 \le x \le 1$$

$$
\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots \\
&= \begin{cases} x\in(-1,1), & \alpha\le -1 \\ x\in(-1,1], & -1<\alpha<0 \\ x\in[-1,1], & \alpha>0 \ \&\ \alpha\notin\mathbb{N}_+ \\ x\in(-\infty,+\infty), & \alpha\in\mathbb{N}_+ \end{cases}
\end{aligned}
$$

10.3.5 函数展开成幂级数

定义 10.3.6

泰勒级数: $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处存在任意阶导数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

麦克劳林级数: $f(x)$ 在点 $x=0$ 处存在任意阶导数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

10.4 傅里叶级数

定义 10.4.1 (傅里叶级数)

考虑到三角函数是周期函数, 任意一个以 2π 为周期的函数 $f(x)$, 能写成一系列三角函数 $\sin(nx)$ 和 $\cos(nx)$ 的线性组合:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$$

$f(x)$ 三角函数分解被称为傅里叶级数或傅里叶展开, 也被称为三角级数

10.4.1 三角函数集 Γ 的归一正交性

定义 10.4.2 (内积、正交和范数)

考虑 $[-\pi,\pi]$ 上的函数 $f(x)$ 构成的无限维空间, 我们希望用正交的向量组来表示一般的向量 (函数), 我们定义函数内积、正交和范数概念

(1). 内积

$$\forall f,g\in V,(f\cdot g)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$$

(2). 正交

$$\forall f,g\in V,(f\cdot g)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx=0\Rightarrow f\perp g$$

(3). 范数

$$\forall f\in V,\| f \|=\left(\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

定义 10.4.3 (三角函数集 Γ 的归一正交性)

定义在 $[-\pi,\pi]$ 上的函数空间中存在一系列范数为 1 且正交的向量组, 考虑 $[-\pi,\pi]$ 上的三角函数组

$$\Gamma=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\cdots,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\cdots\right\}$$

$$\forall f\in\Gamma,\| f \|=1,\forall f,g\in\Gamma,f\cdot g=0\Rightarrow f\perp g$$

不妨设

$$\begin{cases}f_1=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin mx\\ f_2=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\end{cases}\qquad\begin{cases}g_1=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos mx\\ g_2=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\end{cases}$$

$$\begin{cases}\| f_1 \|=\left(\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nxdx\right)^{\frac{1}{2}}=1\\ \| g_1 \|=\left(\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mxdx\right)^{\frac{1}{2}}=1\end{cases}\qquad\begin{cases}f_1\cdot g_1=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos mxdx=0\\ f_1\cdot f_2=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nxdx=0(m\neq n)\\ g_1\cdot g_2=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nxdx=0(m\neq n)\end{cases}$$

10.4.2 周期函数的傅里叶级数

定理 10.4.1 (周期为 2π 函数的傅里叶级数)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$$

三角函数分解, a_n, b_n 是傅里叶级数系数:

$$\begin{cases}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos^2 nx dx \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin^2 nx dx\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\end{cases}$$

记作: 2π **周期函数** $f(x)$ **的傅里叶级数**

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$$

定理 10.4.2 (周期为 2π 奇偶函数的傅里叶级数)

(1). $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 为奇函数, 傅里叶级数为**正弦级数**:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx \Rightarrow b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

(2). $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 为偶函数, 傅里叶级数为**余弦级数**:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx \Rightarrow a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

10.4.3 任意对称区间中的傅里叶展开

定义 10.4.4 (任意对称区间中的傅里叶展开)

设 $f(x)$ 定义域为 $[-l,l]$, 令 $y = \frac{x\pi}{l}, y \in [-\pi,\pi]$

$$g(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos ny + b_n\sin ny) \Rightarrow f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x)$$

傅里叶系数:

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx, & n = 0,1,2,\cdots \\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx, & n = 1,2,\cdots\end{cases}$$

10.4.4 周期延拓

定义 10.4.5 (周期延拓)

(1). 周期延拓: $[-\pi,\pi] \to (-\infty,+\infty)$

(2). 奇延拓: $[0,\pi] \to [-\pi,\pi]$ 且 $f(x)$ 为奇函数, 正弦级数

(3). 偶延拓: $[0,\pi] \to [-\pi,\pi]$ 且 $f(x)$ 为偶函数, 余弦级数

10.4.5 逐点收敛性理论

定理 10.4.3 (狄利克雷收敛定理)

$f(x)$ 以 $2l$ 为周期的可积函数, 在 $[-l,l]$ 上 $f(x)$ 满足条件:

(1). 连续或者只有有限个第一类间断点

(2). 至多有有限个极值点

$f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-l,l]$ 上处处收敛, 其和函数 $S(x)$ 满足

$$S(x)=\begin{cases} f(x), & x\text{为连续点} \\ \dfrac{f(x_-)+f(x_+)}{2}, & x\text{为间断点} \\ \dfrac{f(-l_+)+f(l_-)}{2}, & x=\pm l \end{cases}$$

定理 10.4.4 (帕塞瓦尔公式)

$f(x)$ 是 2π 周期函数, $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 有界可积, 傅里叶系数满足:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$$

推论 10.4.1 (常见级数和)

(1). $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=e$

(2). $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

(3). $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}=\ln 2$

(4). $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n}=2$

(5). $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}=\frac{e+e^{-1}}{2}$

(6). $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$

(7). $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n+2}{(2n+1)!}=\sin 1+\cos 1$

第 11 章 空间解析几何

11.1 向量代数

定义 11.1.1 (向量代数)

(1). 方向角: 非零向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 与 x,y,z 轴所成夹角 α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角

(2). 方向余弦: $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦, $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$

$$\begin{cases} \cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \cos\beta=\dfrac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \cos\gamma=\dfrac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases}$$

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$

(3). 夹角

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

(4). 投影

$$\mathbf{Prj}_b\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

(5). 叉积

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin \theta$$

11.2 空间平面和直线

11.2.1 平面

定义 11.2.1 (平面方程)

假设平面的法向量 $\boldsymbol{n} = (A, B.C)$

(1). 一般式

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

(2). 点法式

$$A(x - x_0) + B(y - y_0 + C(z - z_0) = 0$$

(3). 截距式, 平面过 $(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$ 三点

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

(4). 三点式 $P_i(x_i, y_i, x_i)(i = 1, 2, 3)$ 不共线

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \end{vmatrix} = 0$$

11.2.2 直线

定义 11.2.2 (直线方程)

假设直线的方向向量 $\boldsymbol{\tau}=(l,m,n)$, $P(x_0,y_0,z_0)$ 是直线上的一点

(1). 一般式

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=0, & \boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1) \\ A_2x+B_2y+C_2z=0, & \boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2) \\ \boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2 \end{cases}$$

(2). 点向式

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

(3). 参数式

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}$$

(4). 两点式

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_2}=\frac{y-y_0}{y_1-y_2}=\frac{z-z_0}{z_1-z_2}$$

定理 11.2.1 (位置关系)

(1). 点到直线的距离公式

点 $M(x,y,z)$ 到直线 $L:\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ 的距离

$$d=\frac{|\boldsymbol{\tau}\times\overrightarrow{M_0M}|}{|\boldsymbol{\tau}|}=\frac{\left\|\begin{matrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ l & m & n\\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\end{matrix}\right\|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

二维平面:

$$d=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

(2). 点到平面距离公式

点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离, $P(x,y,z)$ 是平面上任意一点

$$d=|\mathbf{Prj}_n\overrightarrow{P_0P}|=\frac{|A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(3). 直线和直线

设 $\boldsymbol{\tau}_1(l_1,m_1,n_1),\boldsymbol{\tau}_2(l_2,m_2,n_2)$ 分别是 L_1,L_2 的方向向量

$$\begin{cases}L_1\perp L_2\Leftrightarrow\boldsymbol{\tau}_1\perp\boldsymbol{\tau}_2\Leftrightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0\\ L_1\parallel L_2\Leftrightarrow\boldsymbol{\tau}_1\parallel\boldsymbol{\tau}_2\Leftrightarrow\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}\end{cases}$$

L_1,L_2 的夹角 $\theta=\arccos\dfrac{|\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2|}{|\boldsymbol{\tau}_1||\boldsymbol{\tau}_2|},\theta\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$

(4). 平面和平面

设 $\boldsymbol{n}_1(A_1,B_1,C_1),\boldsymbol{n}_2(A_2,B_2,C_2)$ 分别是 π_1,π_2 的法向量

$$\begin{cases}\pi_1\perp\pi_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0\\ \pi_1\parallel\pi_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\parallel\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\end{cases}$$

π_1,π_2 的夹角 $\theta=\arcsin\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|},\theta\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$

11.3 空间曲面和曲线

定义 11.3.1 (空间曲面)

(1). 一般式

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$$

(2). 参数方程式

$$\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\\ z=h(t)\end{cases},t\in[\alpha,\beta]$$

(3). 空间曲线在坐标面的投影

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}H(x,y)=0\\ z=0\end{cases}$$

定义 11.3.2 (空间曲面)

(1). 一般曲面方程

$$F(x, y, z) = 0$$

(2). 二次曲面

(a). 椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

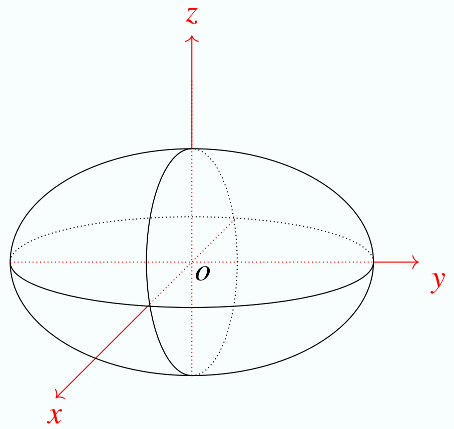


图 11.1: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(b). 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

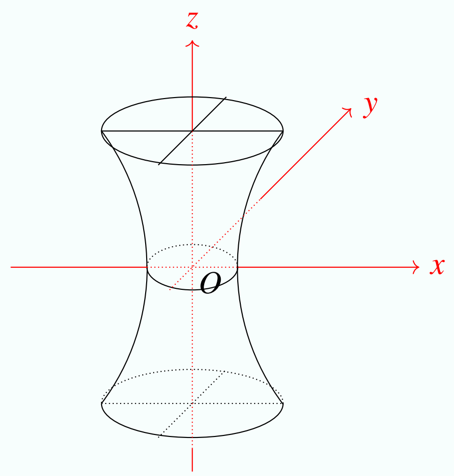


图 11.2: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

(c). 双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

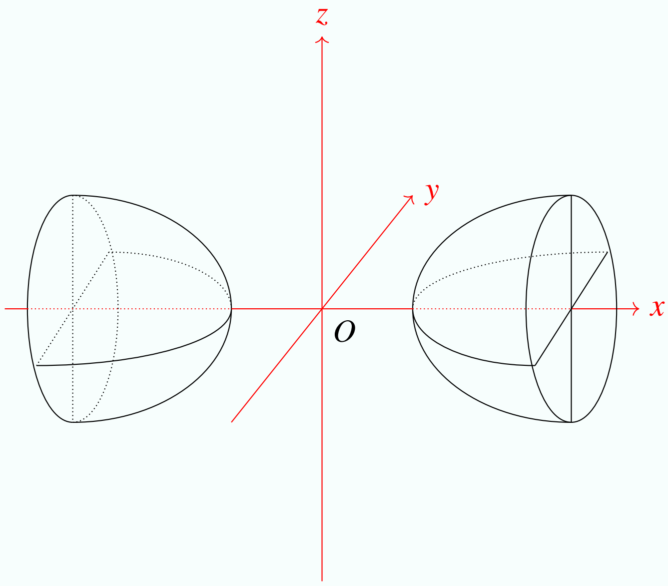


图 11.3: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

(d). 椭圆抛物面 $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z(p, q > 0)$

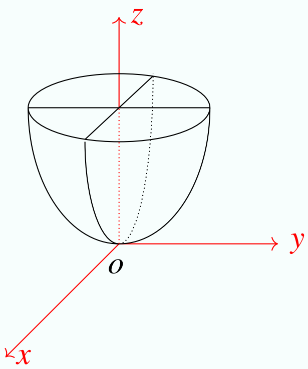


图 11.4: $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z(p, q > 0)$

(f). 椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$

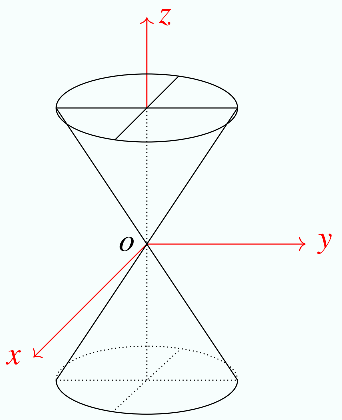


图 11.5: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

(g). 双曲抛物面 $-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z(p,q>0)$

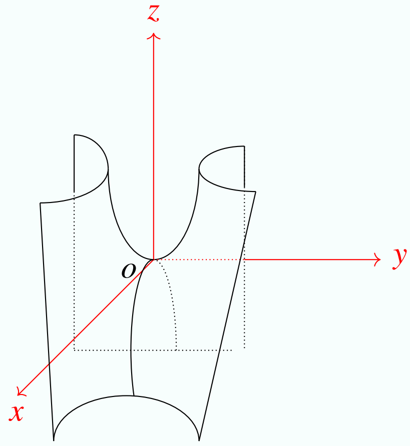


图 11.6: $-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z(p,q>0)$

(h). 双曲抛物面 $z=xy$

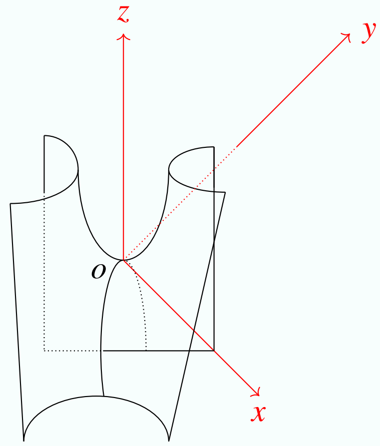


图 11.7: $z=xy$

(i). 椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

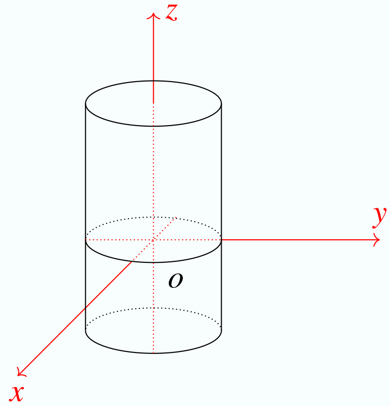


图 11.8: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

(j). 双曲柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

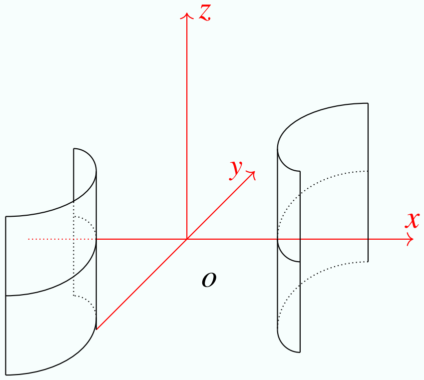


图 11.9: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

(k). 抛物柱面 $y=ax^2$

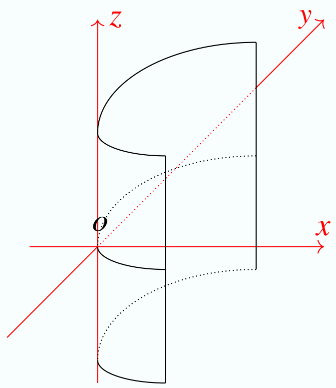


图 11.10: $y=ax^2$

(3). 旋转曲面

曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 绕直线 $L:\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ 旋转一周形成的旋转曲面,

直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{\tau}=(l,m,n)$

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 是曲线 Γ 上任意一点, $P(x,y,z)$ 是 M_1 绕直线 L 旋转一周形成的纬圆上异于 M_1 的一点:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\tau}\perp\overrightarrow{M_1P}\\|\overrightarrow{M_1M_0}|=|\overrightarrow{PM_0}|\\F(x_1,y_1,z_1)=0\\G(x_1,y_1,z_1)=0\end{cases}$$

♣

11.3.1 空间曲线的切线和法平面

定义 11.3.3 (曲线切线和法平面)

(1). 参数方程

$$\begin{cases}x=f(t)\\y=g(t)\\z=h(t)\end{cases},t\in[\alpha,\beta]$$

在 $t=t_0$ 时, 点 $P_0(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$ 处切线的方向向量 $\boldsymbol{n}=(f'(t_0),g'(t_0),h'(t_0))$

切线方程

$$\frac{x-x_0}{f'(t_0)}=\frac{y-y_0}{g'(t_0)}=\frac{z-z_0}{h'(t_0)}$$

法平面方程

$$f'(t_0)(x-x_0)+g'(t_0)(y-y_0)+h'(t_0)(z-z_0)=0$$

(2). 一般式

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$

点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处切线的方向向量

$$\boldsymbol{\tau}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\F'_x&F'_y&F'_z\\G'_x&G'_y&G'_z\end{vmatrix}=(A,B,C)$$

切线方程

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$$

法平面方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

11.3.2 空间曲面的切平面和法线

定义 11.3.4

(1). $F(x,y,z)=0$, 点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处切平面法向量 $\boldsymbol{n}=\{F_x'(x_0,y_0,z_0),F_y'(x_0,y_0,z_0),F_z'(x_0,y_0,z_0)\}$

切平面方程

$$F_x'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z'(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程

$$\frac{x-x_0}{F_x'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(x_0,y_0,z_0)}$$

(2). $z=f(x,y)$, 点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处切平面法向量 $\boldsymbol{n}=\{f_x'(x_0,y_0),f_y'(x_0,y_0),-1\}$

切平面方程

$$f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

法线方程

$$\frac{x-x_0}{f_x'(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

11.4 场论初步

11.4.1 方向导数

定义 11.4.1 (方向导数)

设三元函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某空间邻域内 $U\subset R^3$ 有定义,l 是从 P_0 出发的一条射线,$P(x,y,z)$ 为 l 上且在 U 中的任意一点:

$$\begin{cases} x-x_0=\Delta x=t\cos\alpha \\ y-y_0=\Delta y=t\cos\beta \\ z-z_0=\Delta z=t\cos\gamma \end{cases}$$

$t=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$ 表示 $|PP_0|$, 如果下面极限存在:

$$\lim\lim_{t\to 0}\frac{u(P)-u(P_0)}{t}=\lim\lim_{t\to 0}\frac{u(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-u(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

我们将此极限称为 $u=f(x,y,z)$ 在 P_0 处沿着 l 的方向导数, 记作 $\frac{\partial u}{\partial l}|_{P_0}$

定理 11.4.1 (方向导数计算公式)

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}|_{P_0}=u'_x\cos\alpha+u'_y\cos\beta+u'_z\cos\gamma$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦

11.4.2 梯度

定义 11.4.2 (梯度)

设三元函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处具有一阶偏导数, 定义下面为 $u=u(x,y,z)$ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的梯度:

$$\boldsymbol{guad}\ u|_{P_0}=(u'_x(P_0),u'_y(P_0),u'_z(P_0))$$

梯度和方向导数之间的关系:

$$\frac{\partial u}{\partial l}|_{P_0}=\boldsymbol{guad}\ u|_{P_0}\cdot\boldsymbol{l}=\left|\boldsymbol{guad}\ u|_{P_0}\right||l|\cos\theta$$

11.4.3 散度和旋度

定义 11.4.3 (散度和旋度)

设向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$

散度

$$div\ \boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

旋度

$$rot\ \boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

第 12 章 三重积分

12.1 三重积分定义和性质

定义 12.1.1 (三重积分)

设 $f(x,y,z)$ 是空间有界闭区域 Ω 上的有界函数, 将 Ω 任意分为 n 个小闭区域

$$\Delta v_1, \Delta v_2, \cdots, \Delta v_n$$

其中 Δv_i 表示第 i 个小闭区域, 也表示第 i 个小闭区域的体积, 在每一个 Δv_i 中任意取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i), 作乘积 $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 并求和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$, 如果当 $\lim\limits_{n\to+\infty} \{\lambda | \lambda = \max\{\Delta v_i \text{的直径}, i = 1, 2, \cdots, n\}\} = 0$ 时, 求和的极限总是存在, 与 Δv_i 的分法以及点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无关, 称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上的三重积分, 记作 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$$

其中 $f(x,y,z)$ 称为被积函数, Ω 称为积分区域, $f(x,y,z)dv$ 称为被积表达式, dv 称为体积微元, x, y, z 称为积分变量, $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$ 称为积分和

物理意义

设一物体占有 $Oxyz$ 上闭区域 Ω, 在点 (x,y,z) 处的密度为 $\rho(x,y,z)$, 假定 $\rho(x,y,z)$ 在 Ω 上连续, 物体质量 $M = \iiint\limits_{\Omega} \rho(x,y,z)dv$

推论 12.1.1

(1). 当 $f(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上连续时, 三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$ 一定存在; 当 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上可积, $f(x,y,z)$ 在 Ω 上必有界

(2). $\iint\limits_{\Omega} 1dv = \iiint\limits_{\Omega} dv = V$, V 是 Ω 的体积

(3). 积分线性性质

$$\iiint\limits_{\Omega} [k_1 f(x,y,z) \pm k_2 g(x,y,z)]\, dv = k_1 \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv \pm k_2 \iiint\limits_{\Omega} g(x,y,z)dv$$

(4). 积分的可加性

设 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上可积, 且 $\Omega_1 \cap \Omega_2 =, \Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv + \iiint\limits_{\Omega_2} f(x,y,z)dv$$

(5). 积分保号性

设 $f(x,y,z)$ 和 $g(x,y,z)$ 在 Ω 上可积, 且在 Ω 上, $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv \le \iiint\limits_{\Omega} g(x,y,z)dv \Rightarrow \left|\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv\right| \le \iiint\limits_{\Omega} \left|f(x,y,z)\right|dv$$

(6). 估值定理

设 M, m 分别是 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上的最大值和最小值, V 是 Ω 的体积

$$mV \le \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv \le MV$$

(7). 中值定理

设 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上连续, V 是 Ω 的体积

$$\exists(\xi,\eta,\zeta) \in \Omega,\ s.t. \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = f(\xi,\eta,\zeta)V$$

12.2 三重积分对称性

定义 12.2.1 (普通对称性)

(1). Ω 关于平面 xoz 对称

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \begin{cases} 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv, & f(x,y,z)=f(x,-y,z) \\ 0, & f(x,y,z)=-f(x,-y,z) \end{cases}$$

(2). Ω 关于平面 yoz 对称

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \begin{cases} 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv, & f(x,y,z)=f(-x,y,z) \\ 0, & f(x,y,z)=-f(-x,y,z) \end{cases}$$

(3). Ω 关于平面 xoy 对称

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \begin{cases} 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv, & f(x,y,z)=f(x,y,-z) \\ 0, & f(x,y,z)=-f(x,y,-z) \end{cases}$$

定义 12.2.2 (轮换对称性)

若将 x,y,z 任意两个交换位置后，积分区域 Ω 保持不变

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x)dv = \iiint\limits_{\Omega} f(y)dv = \iiint\limits_{\Omega} f(z)dv$$

12.3 三重积分计算方法

定义 12.3.1 (直角坐标系)

(1). 先一后二

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iint\limits_{D_{xy}} d\sigma \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

一般用于空间区域 Ω 无侧面或者侧面为柱面，转化为二重积分，积分区域为空间区域 Ω 在 $xoy(yoz,xoz)$ 平面的投影

(2). 先二后一

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \int_a^b dz \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)d\sigma$$

适用于旋转体，旋转曲面方程 $z=z(x,y)$

定义 12.3.2 (换元法)

令 $\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$，且 $(x,y,z) \to (u,v,w)$ 是一一映射，$x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$ 有一阶连续偏导数

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \left\|\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{matrix}\right\| \neq 0$$

$$\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_{uvw}} f\left[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right]\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

♣

定义 12.3.3 (柱面坐标系)

令 $\begin{cases} x = r\cos\theta, & \theta \in [0,2\pi] \\ y = r\sin\theta, & \theta \in [0,2\pi] \\ z = z \end{cases}$，且 $(x,y,z) \to (r,\theta,z)$ 是一一映射，$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$ 有一阶连续偏导数

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = \left\|\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| = r$$

$$\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{\Omega_{r\theta z}} drd\theta \int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} rf(r\cos\theta, r\sin\theta, z)dz$$

♣

定义 12.3.4 (球面坐标系)

令 $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, & \theta \in [0,2\pi] \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, & \theta \in [0,2\pi] \\ z = r\cos\varphi, & \varphi \in [0,\pi] \end{cases}$，且 $(x,y,z) \to (r,\theta,\varphi)$ 是一一映射，$x = r\sin\varphi\cos\theta, y = r\sin\varphi\sin\theta, z = r\cos\varphi$ 有一阶连续偏导数

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right| = \left\|\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \sin\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\cos\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{matrix}\right\| = r^2\sin\varphi$$

$$\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_{r\varphi\theta}} r^2\sin\varphi f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)drd\theta d\varphi$$

12.4 三重积分应用

定理 12.4.1 (重心公式)

对于空间物体, 体密度 $\rho(x,y,z)$, Ω 是物体所占的空间区域, 重心 $O(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{\iiint\limits_{\Omega} x\rho(x,y,z)dv}{\iiint\limits_{\Omega} \rho(x,y,z)dv} \\ \overline{y} = \dfrac{\iiint\limits_{\Omega} y\rho(x,y,z)dv}{\iiint\limits_{\Omega} \rho(x,y,z)dv} \\ \overline{z} = \dfrac{\iiint\limits_{\Omega} z\rho(x,y,z)dv}{\iiint\limits_{\Omega} \rho(x,y,z)dv} \end{cases}$$

当密度函数为 $\rho(x,y,z)$ 为常数, 重心就是形心

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{\iiint\limits_{\Omega} xdv}{\iiint\limits_{\Omega} dv} \\ \overline{y} = \dfrac{\iiint\limits_{\Omega} ydv}{\iiint\limits_{\Omega} dv} \\ \overline{z} = \dfrac{\iiint\limits_{\Omega} zdv}{\iiint\limits_{\Omega} dv} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \iiint\limits_{\Omega} xdv = \overline{x}\cdot V \\ \iiint\limits_{\Omega} ydv = \overline{y}\cdot V \\ \iiint\limits_{\Omega} zdv = \overline{z}\cdot V \end{cases}$$

定理 12.4.2 (转动惯量 $I = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i r_i^2$)

对于空间物体, 体密度 $\rho(x,y,z)$, Ω 是物体所占的空间区域

(1). x 轴

$$I_x = \iint\limits_{\Omega} (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dv$$

(2). y 轴

$$I_y = \iint\limits_{\Omega} (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)dv$$

(3). z 轴

$$I_z = \iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dv$$

(4). 原点 O

$$I_O = \iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dv$$

定理 12.4.3 (万有引力 $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$)

对于空间物体, 体密度 $\rho(x, y, z)$, Ω 是物体所占的空间区域, 计算该物体对物体外一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处质量为 m 的质点的引力 $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$

$$\begin{aligned}
F_x &= Gm \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \cos\alpha dv \\
&= Gm \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)(x - x_0)}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\
F_y &= Gm \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{(y - y_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \cos\beta dv \\
&= Gm \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)(y - y_0)}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\
F_z &= Gm \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{(z - z_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \cos\gamma dv \\
&= Gm \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)(z - z_0)}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

第 13 章 第一型曲线和曲面积分

13.1 第一型曲线积分

13.1.1 第一型曲线积分定义和性质

定义 13.1.1 (第一型曲线积分)

设 L 是 xoy 平面内一条光滑曲线弧, 函数 $f(x,y)$ 在 L 上有界, 在 L 上任意插入一系列的点 $M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}$ 将 L 分成 n 小段, 设第 i 段的弧长为 Δs_i, 在第 i 段上任意取一点 (ζ_i, η_i), 作乘积 $f(\zeta_i, \eta_i)\Delta s_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 并求和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\zeta_i, \eta_i)\Delta s_i$, 当 $\lim\limits_{n\to+\infty} \{\lambda|\lambda = \max\{\Delta s_i\}, i = 1, 2, \cdots, n\} = 0$ 时, 求和极限存在, 且与 Δs_i 的分法以及 (ζ_i, η_i) 的取法无关, 称此极限为函数 $f(x,y)$ 在曲线 L 上对弧长的曲线积分或第一型曲线积分, 记作 $\int_L f(x,y)ds$

$$\int_L f(x,y)ds = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i, \eta_i)\Delta s_i$$

其中 $f(x,y)$ 称为被积函数, $f(x,y)ds$ 称为被积表达式, x, y 是积分变量, L 是积分弧

对于函数 $f(x,y,z)$ 在空间曲线 Γ 上的第一型曲线积分

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i$$

推论 13.1.1

(1). $\displaystyle\int_\Gamma ds = l_\Gamma$, 其中 l_Γ 是 Γ 的长度

(2). 设 $f(x,y,z)$ 在 Γ 上可积, 其在 Γ 上必有界

(3). 积分线性性质

$$\int_\Gamma [k_1 f(x,y,z) + k_2 g(x,y,z)]\, ds = k_1 \int_\Gamma f(x,y,z) ds + k_2 \int_\Gamma g(x,y,z) ds$$

(4). 积分可加性

设 $f(x,y,z)$ 在 Γ 上可积, 且 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset, \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$

$$\int_\Gamma f(x,y,z) ds = \int_{\Gamma_1} f(x,y,z) ds + \int_{\Gamma_2} f(x,y,z) ds$$

(5). 积分保号性

设 $f(x,y,z), g(x,y,z)$ 在 Γ 上可积, 且在 Γ 上 $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$

$$\int_\Gamma f(x,y,z) ds \le \int_\Gamma g(x,y,z) ds \Rightarrow \left| \int_\Gamma f(x,y,z) ds \right| \le \int_\Gamma |f(x,y,z)| ds$$

(6). 估值定理设 M, m 分别是 $f(x,y,z)$ 在 Γ 上的最大值和最小值, l_Γ 的长度

$$m l_\Gamma \le \int_\Gamma f(x,y,z) ds \le M l_\Gamma$$

(7). 中值定理

设 $f(x,y,z)$ 在 Γ 上连续, l_Γ 是 Γ 的长度

$$\exists (\xi, \eta, \zeta) \in \Gamma,\ s.t. \int_\Gamma f(x,y,z) ds = f(\xi,\eta,\zeta) l_\Gamma$$

13.1.2 第一型曲线积分的对称性

定义 13.1.2 (普通对称性)

(1). Γ 关于平面 xoz 对称

$$\int_\Gamma f(x,y,z) ds = \begin{cases} 2\int_{\Gamma_1} f(x,y,z) ds, & f(x,y,z) = f(x,-y,z) \\ 0, & f(x,y,z) = -f(x,-y,z) \end{cases}$$

(2). Γ 关于平面 yoz 对称

$$\int_\Gamma f(x,y,z) ds = \begin{cases} 2\int_{\Gamma_1} f(x,y,z) ds, & f(x,y,z) = f(-x,y,z) \\ 0, & f(x,y,z) = -f(-x,y,z) \end{cases}$$

(3). Γ 关于平面 xoy 对称

$$\int_\Gamma f(x,y,z) ds = \begin{cases} 2\int_{\Gamma_1} f(x,y,z) ds, & f(x,y,z) = f(x,y,-z) \\ 0, & f(x,y,z) = -f(x,y,-z) \end{cases}$$

定义 13.1.3 (轮换对称性)

若将 x, y, z 任意两个交换位置后, 积分区域 Γ 保持不变

$$\int_\Gamma f(x)ds = \int_\Gamma f(y)ds = \int_\Gamma f(z)ds$$

13.1.3 第一型曲线积分计算

定理 13.1.1 (平面曲线)

(1). $L: y = f(x), x \in [a, b]$

$$\int_L f(x, y)ds = \int_a^b f(x, y)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

(2). $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$

$$\int_L f(x, y)ds = \int_\alpha^\beta f\left[x(t), y(t)\right]\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt$$

(3). $L: r = r(\theta), \theta \in [\theta_1, \theta_2]$

$$\int_L f(x, y)ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2}d\theta$$

定理 13.1.2 (空间曲线)

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta] \Rightarrow ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}dt$$

$$\int_\Gamma f(x, y, z)ds = \int_\alpha^\beta f\left[x(t), y(t), z(t)\right]\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}dt$$

13.2 第一型曲面积分

13.2.1 第一型曲面积分定义和性质

定义 13.2.1 (第一型曲面积分)

设 L 是 xoy 平面内一条光滑曲线弧, 函数 $f(x,y)$ 在 L 上有界, 在 L 上任意插入一系列的点 $M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}$ 将 L 分成 n 小段, 设第 i 段的弧长为 Δs_i, 在第 i 段上任意取一点 (ζ_i, η_i), 作乘积 $f(\zeta_i,\eta_i)\Delta s_i(i = 1,2,\cdots,n)$, 并求和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\zeta_i,\eta_i)\Delta s_i$, 当 $\lim\limits_{n\to+\infty}\{\lambda|\lambda = \max\{\Delta s_i\}, i = 1,2,\cdots,n\} = 0$ 时, 求和极限存在, 且与 Δs_i 的分法以及 (ζ_i,η_i) 的取法无关, 称此极限为函数 $f(x,y)$ 在曲线 L 上对弧长的曲线积分或第一型曲线积分, 记作 $\int_L f(x,y)ds$

$$\int_L f(x,y)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i,\eta_i)\Delta s_i$$

其中 $f(x,y)$ 称为被积函数, $f(x,y)ds$ 称为被积表达式, x, y 是积分变量, L 是积分弧

对于函数 $f(x,y,z)$ 在空间曲线 Γ 上的第一型曲线积分

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

定理 13.2.1

$$z = f(x,y) \quad F(x,y,z) = 0$$

我们将曲面 Σ 投影到任意一个平面, 这里以 xoy 为例,$dS = \sqrt{1 + (z_x')^2 + (z_y')^2}d\sigma$

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z)\sqrt{1 + (z_x')^2 + (z_y')^2}d\sigma$$

13.2.2 第一型曲面积分的对称性

13.2.3 第一型曲面积分计算

13.3 第一型曲线积分和曲面积分应用

1. 曲线长度和曲面面积
2. 重心

定理 13.3.1 (重心公式)

(1). 光滑曲线, 对于光滑曲线 Γ, 线密度 $\rho(x,y,z)$, 重心 $O(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$

$$\begin{cases} \overline{x}=\dfrac{\int_\Gamma x\rho(x,y,z)ds}{\int_\Gamma \rho(x,y,z)ds} \\ \overline{y}=\dfrac{\int_\Gamma y\rho(x,y,z)ds}{\int_\Gamma \rho(x,y,z)ds} \\ \overline{z}=\dfrac{\int_\Gamma z\rho(x,y,z)ds}{\int_\Gamma \rho(x,y,z)ds} \end{cases}$$

当密度函数为 $\rho(x,y,z)$ 为常数, 重心就是形心

$$\begin{cases} \overline{x}=\dfrac{\int_\Gamma xds}{\int_\Gamma ds} \\ \overline{y}=\dfrac{\int_\Gamma yds}{\int_\Gamma ds} \\ \overline{z}=\dfrac{\int_\Gamma zds}{\int_\Gamma ds} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_\Gamma xds=\overline{x}\cdot l_\Gamma \\ \int_\Gamma yds=\overline{y}\cdot l_\Gamma \\ \int_\Gamma zds=\overline{z}\cdot l_\Gamma \end{cases}$$

(2). 光滑曲面, 对于光滑曲面 Σ, 曲面密度 $\rho(x,y,z)$, 重心 $O(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$

$$\begin{cases} \overline{x}=\dfrac{\int_\Sigma x\rho(x,y,z)dS}{\int_\Sigma \rho(x,y,z)dS} \\ \overline{y}=\dfrac{\int_\Sigma y\rho(x,y,z)dS}{\int_\Sigma \rho(x,y,z)dS} \\ \overline{z}=\dfrac{\int_\Sigma z\rho(x,y,z)dS}{\int_\Sigma \rho(x,y,z)dS} \end{cases}$$

当密度函数为 $\rho(x,y,z)$ 为常数, 重心就是形心

$$\begin{cases} \overline{x}=\dfrac{\int_\Sigma xdS}{\int_\Sigma dS} \\ \overline{y}=\dfrac{\int_\Sigma ydS}{\int_\Sigma dS} \\ \overline{z}=\dfrac{\int_\Sigma zdS}{\int_\Sigma dS} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_\Sigma xdS=\overline{x}\cdot S_\Sigma \\ \int_\Sigma ydS=\overline{y}\cdot S_\Sigma \\ \int_\Sigma zdS=\overline{z}\cdot S_\Sigma \end{cases}$$

3. 转动惯量

定义 13.3.1 (转动惯量: $I=mr^2$)

(1). 光滑曲线, 对于光滑曲线 Γ, 线密度 $\rho(x,y,z)$

对 x 轴: $I_x=\int\limits_L (y^2+z^2)\rho(x,y,z)ds$

对 y 轴: $I_y=\int\limits_L (x^2+z^2)\rho(x,y,z)ds$

对 z 轴: $I_z = \int\limits_L (x^2+y^2)\rho(x,y,z)ds$

对坐标原点 O: $I_O = \int\limits_L (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)ds$

(2). 光滑曲面, 对于光滑曲线 Σ, 面密度 $\rho(x,y,z)$

对 x 轴: $I_x = \iint\limits_\Sigma (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dS$

对 y 轴: $I_y = \iint\limits_\Sigma (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dS$

对 z 轴: $I_z = \iint\limits_\Sigma (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dS$

对坐标原点 O: $I_O = \iint\limits_\Sigma (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)dS$

4. 万有引力

定义 13.3.2 (引力公式: $F = \dfrac{GMm}{r^2}$)

(1). 光滑曲线, 对于光滑曲线 Γ, 线密度 $\rho(x,y,z)$

$$F_x = Gm\int\limits_\Gamma \frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}ds$$

$$F_y = Gm\int\limits_\Gamma \frac{\rho(x,y,z)(y-y_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}ds$$

$$F_z = Gm\int\limits_\Gamma \frac{\rho(x,y,z)(z-z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}ds$$

(2). 光滑曲面, 对于光滑曲面 Σ, 面密度 $\rho(x,y,z)$

$$F_x = Gm\iint\limits_\Sigma \frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}dS$$

$$F_y = Gm\iint\limits_\Sigma \frac{\rho(x,y,z)(y-y_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}dS$$

$$F_z = Gm\iint\limits_\Sigma \frac{\rho(x,y,z)(z-z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}dS$$

第 14 章 第二型曲线和曲面积分

14.1 第二型曲线积分

定义 14.1.1 (第二型曲线积分)

物理意义: 变力沿曲线做功

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad \int_\Gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

14.1.1 格林公式

定理 14.1.1

格林公式: (第二型曲线积分 $\to$ 二重积分)

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma$$

前提条件: L 取正向, 左手在内侧,L 闭合. 一般适用于平面曲线

14.1.2 斯托克斯公式

定理 14.1.2 (斯托克斯公式)

斯托克斯公式: (第二型曲线积分 $\to$ 第一型曲面积分)

$$\oint_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

14.2 第二型曲面积分

定义 14.2.1 (第二型曲面积分)

物理意义: 向量场通过一个曲面的通量

$$\iint\limits_{\Omega} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$$

14.2.1 高斯公式

定理 14.2.1 (高斯公式)

高斯公式: (第二型曲面积分 $\longrightarrow$ 三重积分)

$$\iint\limits_{\Omega} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy = \iiint\limits_{\Omega} (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dv$$

第三部分

线代

第 3 部分目录

第 15 章 行列式

15.1 定义

定义 15.1.1

行列式的定义:

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

♣

(i). 几何定义

n 阶行列式 D_n 的几何意义是 n 维空间中由 n 阶行列式中的 n 个向量围成的 n 维空间体的体积. 比较特别的有:

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = S$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = V$$

(ii). 逆序数法定义

n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

(iii). 行列式展开定理

余子式和代数余子式

行列式中任意一项 a_{ij} 所在行和列去掉后的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式 M_{ij}

行列式中任意一项 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

行列式按照某一行或者某一列展开:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} \end{cases}$$

15.2 性质

推论 15.2.1

行列式的性质:

性质 1 行列互换, 行列式的值不变, 即**行列等价**, 我们有 $|A| = |A^T|$

性质 2 行列式中某行或者某列元素全为 0, 行列式的值为 0, 我们有 $|A| = 0$

性质 3 行列式某行或者某列有公因子 $k(k \neq 0)$, 我们得到下面的式子:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 4 行列式某一行或者某一列元素均为两个元素之和, 我们可以拆成两个行列式之和,

我们得到:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5 行列式两行或者两列互换, 行列式的值相反.

性质 6 行列式中两行或者两列成比例, 行列式的值为 0.

性质 7 行列式中某一行加上另一行的 k 倍, 行列式的值不变.

15.3 几类特殊的行列式

定义 15.3.1

(i). 上三角行列式和下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

(ii). 副三角行列式

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \dots a_{n1}$$

(iii). 拉普拉斯展开式

设 A 为 m 阶矩阵,B 为 n 阶矩阵, 则:

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$$

(iiii). 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)$$

15.4 常见行列式计算技巧

定理 15.4.1

技巧方法

1. 所有行或者所有列之和相等

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} \xrightarrow[{[1]+\sum_{i=2}^{n}[i]}]{} [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \dots & b \\ 1 & a & b & \dots & b \\ 1 & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \dots & a \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2,3,\dots n]{\text{ⓝ}-\text{①}}$$

$$[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

有几个特别的例子:

$$\begin{vmatrix} b & b & \dots & b & a \\ b & b & \dots & a & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & a & \dots & b & b \\ a & b & \dots & b & b \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

(i). 当 $a=0, b=1$ 时,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)$$

(ii). 当 $a=2, b=1$ 时,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix} = n+1$$

(ii). 当 $a=x$ 时,

$$\begin{vmatrix} x & b & b & \dots & b \\ b & x & b & \dots & b \\ b & b & x & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \dots & x \end{vmatrix} = [x+(n-1)b](x-b)^{n-1}$$

2. 递推式

简单来说, 就是 n 阶行列式按照某行或者某列一次展开得到的 $n-1$ 阶行列式和原来有相同的结构, 我们可以利用上下阶行列式的关系找出递推公式.

$$D = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

(i). 归纳法

$D_1 = 1 - a$

$D_2 = (-1)^{2+1}(-a)a + D_1$

$D_3 = (-1)^{3+1}(-a)a^2 + D_2$

$D_4 = (-1)^{4+1}(-a)a^3 + D_3$

$D_4 = a^4 - a^3 + a^2 - a + 1$

(ii). 递推法

$D_4 = (-1)^{4+1}(-a)a^3 + D_3$

$D_3 = (-1)^{3+1}(-a)a^2 + D_2$

$D_2 = (-1)^{2+1}(-a)a + D_1$

$D_1 = 1 - a$

$D_4 = a^4 - a^3 + a^2 - a + 1$

第 16 章 矩阵

16.1 矩阵的定义和运算

定义 16.1.1 (矩阵的定义和运算)

1. 矩阵的定义

由 $m \times n$ 个数 a_{ij} $(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$ 排成的 m 行 n 列的矩形表格

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为一个 $m \times n$ 矩阵, 简记作 A 或者 $(a_{ij})_{m\times n}(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$, 当 $m = n$ 时, 称 A 为 n 阶方阵或者 n 阶矩阵.

2. 矩阵的运算

(i). 加减

$$C = A \pm B = (a_{ij})_{m\times n} \pm (b_{ij})_{m\times n} = (c_{ij})_{m\times n}$$

其中,$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$

(ii). 数乘

$$kA = k(a_{ij})_{m\times n} = (ka_{ij})_{m\times n}$$

特别的, 我们有: $|kA| = k^n|A|$, $k \geq 2$

(iii). 矩阵乘法

设 A 是 $m \times s$ 矩阵,B 是 $s \times n$ 矩阵, 矩阵 A, B 可以相乘 (必须满足左乘矩阵的列数和右乘

矩阵的行数相等), 乘积 AB 是 $m\times n$ 矩阵, 记 $C=AB=(c_{ij})_{m\times n}$, 我们有:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj},(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

(iiii). 矩阵转置

将 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的行列互换得到的 $n\times m$ 矩阵称为 A 的转置矩阵, 记作 A_T, 我们有:

$$A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

关于矩阵转置, 我们有几个常用的结论:

- $(A^T)^T=A$
- $(kA)^T=k(A)^T$
- $(A+B)^T=A^T+B^T$
- $(AB)^T=B^TA^T$
- 当 $m=n$ 时,$|A^T|=|A|$

(iv). 矩阵的幂

A 是 n 阶方阵,$A^m=\overbrace{AA\cdots A}^{m个}$ 称为 A 的 m 次幂

关于矩阵的幂, 我们需要注意:

- $(A\pm B)^2=A^2+b^2\pm AB\pm BA$
- $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$
- $(AB)^m=\overbrace{(AB)(AB)\cdots(AB)}^{m个}$
- 当 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 时,$f(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_nA^n$

(v). 方阵乘积行列式

A,B 是同阶方阵, 我们有 $|AB|=|A||B|$

定义 16.1.2 (向量的内积和正交)

1. 内积和模

设 $\alpha=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T,\beta=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^T$, 则称:

$$\alpha^T\beta=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nB_n$$

为向量 α,β 的内积, 记作 $(\alpha,\beta)\Rightarrow(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta$

$\|\alpha\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$ 称为向量 α 的模, 特别的当 $\|\alpha\|=1$ 时, 称 α 为单位向量.

2. 正交

当 $\alpha^T\beta=0$ 时, 称向量 α,β 是正交向量

3. 标准正交向量组

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 满足:

$$\alpha_i^T\alpha_j=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$$

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是标准或单位正交向量.

4. 施密特正交化

线性无关的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的标准正交化公式:

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\cdots\cdots$$

$$\beta_n=\alpha_n-\frac{(\alpha_n,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_n,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_n,\beta_{n-1})}{(\beta_{n-1},\beta_{n-1})}\beta_{n-1}$$

得到的 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是正交向量组, 我们将 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 单位化得到:

$$\eta_1=\frac{\beta_1}{||\beta_1||},\ \eta_2=\frac{\beta_2}{||\beta_2||},\ \cdots,\ \eta_n=\frac{\beta_n}{||\beta_n||}$$

则 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是一个标准正交向量组.

定义 16.1.3 (重要矩阵)

(1). 零矩阵

所有元素均为 0 的矩阵, 记作 O

(2). 单位矩阵

主对角线元素均为 1, 其余元素全为 0 的 n 阶方阵, 称为 n 阶单位矩阵, 记作 E 或 I

(3). 数量矩阵

数 k 和单位矩阵乘积得到的矩阵被称为数量矩阵

(4). 对角矩阵

非主对角线元素均为 0 的矩阵称为对角矩阵

(5). 上 (下) 三角矩阵

当 $i>(<)j$ 时,$a_{ij}=0$ 的矩阵称为上 (下) 三角矩阵

(6). 对称矩阵

满足条件 $A^T=A$ 的矩阵称为对称矩阵, $A^T=A\Leftrightarrow a_{ij}=a_{ji}$

(7). 反对称矩阵

满足条件 $A^T=-A$ 的矩阵称为对称矩阵, $A^T=A \Leftrightarrow \begin{cases} a_{ij}=-a_{ji}, i\neq j \\ a_{ii}=0 \end{cases}$

(8). 正交矩阵

设 A 是 n 阶方阵, 满足 $A^TA=E$, 我们称 A 是正交矩阵.

A 是正交矩阵 $\Leftrightarrow A^TA=E \Leftrightarrow A^T=A^{-1} \Leftrightarrow A$ 的行 (列) 向量组是标准正交向量组

(9). 分块矩阵

$$A=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} B_1, & B_2, & \cdots, & B_n \end{bmatrix}$$

特别的, 我们有: $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} A^n & O \\ O & B^n \end{bmatrix}$

16.2 矩阵的逆和伴随矩阵

定义 16.2.1 (矩阵的逆和伴随矩阵)

1. 逆矩阵

A, B 是 n 阶方阵,E 是 n 阶单位矩阵, 若 $AB=BA=E$, 则称 A 是可逆矩阵, 并称 B 是 A 的逆矩阵, 且逆矩阵唯一, 我们将 A 的逆矩阵记作 A^{-1}

矩阵 A 可逆的充要条件为: $|A|\neq 0$, 且当 $|A|\neq 0$ 时, 我们有:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

(i). 逆矩阵的性质和公式

- $(A^{-1})^{-1}=A$
- AB可逆, $(AB)^{-1}=B^{-1}A_{-1}$
- 当$k\neq 0, (kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$
- $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$
- A^T可逆, $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

2. 伴随矩阵

将行列式 $|A|$ 的 n^2 个元素的代数余子式按照如下的形式排列成的矩阵称为 A 的伴随矩

阵, 记作 A^*.

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

我们有

$$AA^* = A^*A = |A|E \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

(i). 伴随矩阵的性质和公式

- 对于任意n阶方阵, 我们有$|A^*| = |A|^{n-1}$
- 当$|A| \neq 0$, $A^* = |A|A^{-1}$, $A = |A|(A^*)^{-1}$
- 我们已知$AA^* = A^*A = |A|E$, 将A替换为A^*, A^T, A^{-1}仍然成立

16.3 初等变换和初等矩阵

定义 16.3.1 (初等变换和初等矩阵)

1. 初等变换

(1). 用一个非零常数乘以矩阵的某一行 (列)

(2). 互换矩阵中的某两行 (列) 的位置

(3). 将矩阵的某一行 (列) 的 k 倍加到另一行 (列)

2. 初等矩阵

由单位矩阵经过一次初等变换后得到的矩阵被称为初等矩阵.

(1).$E_i(k)$ 表示 E 的第 i 行 (列) 乘 k 倍

(2).E_{ij} 表示 E 的第 i 行 (列) 与第 j 行 (列) 互换位置

(3).$E_{ij}(k)$ 表示 E 的第 j 行 (列) 的 k 倍加到第 i 行 (列)

3. 初等矩阵的性质和公式

(1). 对任意一个矩阵进行初等变换, 我们可以理解为用对应的初等矩阵左乘或者右乘原矩阵 (行变换为左乘, 列变换为右乘)

(2). 初等矩阵都是可逆矩阵

(3).可逆矩阵可以表示为有限个初等矩阵的乘积, 若A为可逆矩阵, 存在初等矩阵$P_1, P_2, \cdots, P_s$, s.t.$A = P_1P_2\cdots P_s$

(4). 初等变换不会改变矩阵的秩

设 A 是 $m \times n$ 矩阵,P, Q 分别是 m, n 阶可逆矩阵, 我们有

$$r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ)$$

总结

求解逆矩阵的方法:

1. 利用伴随矩阵和原矩阵的关系: $AA^* = A^*A = |A|E$, 求解 $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$
2. 利用高斯-若尔当型解法, 利用初等行 (列) 变换, 来求解逆矩阵:

$$\begin{bmatrix} A & E \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} E & A^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{bmatrix} E \\ A^{-1} \end{bmatrix}$$

16.4 等价矩阵和矩阵的秩

定义 16.4.1 (等价矩阵和矩阵的秩)

1. 等价矩阵

设 A, B 均为 $m \times n$ 矩阵, 若存在可逆矩阵 $P_{m\times m}, Q_{n\times n}$, 使得 $PAQ = B$, 则称 A, B 是等价矩阵, 我们记作 $A \cong B$

我们不难发现, 矩阵 A, B 等价的充要条件为: $rank(A) = rank(B)$, 对于任意矩阵 $A_{m\times n}$, 存在可逆矩阵 P, Q, 使得: $PAQ = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$, 后者称为 A 的等价标准型, 且 $r = rank(A)$

2. 矩阵的秩

设 A 是 $m \times n$ 矩阵,A 中最高阶非零子式的阶数称为矩阵 A 的秩, 记作 $r(A)$.

这也等价于存在 k 阶子式子不为零, 任意 $k+1$ 阶子式子全为零, 我们记 $r(A) = k$.

特别的, 对于方阵而言:

$$r(A_{n\times n}) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A\text{可逆}$$

3. 有关秩的重要结论

设 A 是 $m \times n$ 矩阵,B 是满足有关矩阵运算要求的矩阵, 我们有

- $0 \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$
- $r(kA) = r(A), k \neq 0$
- $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$
- $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$
- $r(A^*) = \begin{cases} n, r(A) = n \\ 1, r(A) = n-1 \\ 0, r(A) < n-1 \end{cases}$ 其中A为n阶方阵.

证明

(1). $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$

我们假设 $A_{m\times n}$, $B_{n\times s}$

我们不妨将 B, C 按行写成行向量形式:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}, \ C = AB = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \cdots + a_{1n}\beta_n \\ a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{2n}\beta_n \\ \vdots \\ a_{m1}\beta_1 + a_{m2}\beta_2 + \cdots + a_{mn}\beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$$

我们可以得到: AB的行向量都可以由B的行向量线性表出.

$$r(AB) \leq r(B)$$

同理, 我们不妨将 A, C 按列写成列向量形式

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \cdots, & \alpha_n \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix}, \ C = AB = \begin{bmatrix} \gamma_1, & \gamma_2, & \cdots, & \gamma_s \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \cdots, & \alpha_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns}\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}b_{11}\alpha_1 + b_{21}\alpha_2 + \cdots + b_{n1}\alpha_n\\ b_{12}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 + \cdots + b_{n2}\alpha_n\\ \vdots\\ b_{1s}\alpha_1 + a_{2s}\alpha_2 + \cdots + a_{ns}\alpha_n\end{bmatrix}^T$$
$$= \begin{bmatrix}\gamma_1, & \gamma_2, & \cdots, & \gamma_s\end{bmatrix}$$

我们可以得到: AB的列向量都可以由A的列向量线性表出.

$$r(AB) \leq r(A)$$

$$由r(AB) \leq r(A),\ r(AB) \leq r(B) \Rightarrow r(AB) \leq min\{r(A), r(B)\}$$

(2).$r(A+B) \leq r(A) + r(B)$
我们假设

$$A = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s], B = [\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s], [A, B] = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s]$$

$$A + B = [\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \cdots, \alpha_s + \beta_s]$$

$$可以由[A, B]的列向量线性表出 \Rightarrow r(A+B) \leq r([A, B]) \Rightarrow r(A+B) \leq r(A) + r(B)$$

(3).$A_{m\times k}, B_{k\times n}$, 我们有 $r(A) + r(B) - k \leq r(AB)$
我们设 $A_{m\times k}, B_{k\times n}$, 我们有:

$$\begin{bmatrix}E_m & -A\\ O & E_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & O\\ E_k & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_k & -B\\ O & E_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}O & -AB\\ E_k & O\end{bmatrix}$$

$$r(Left) \geq r(A) + r(B),\ r(Right) = r(AB) + k \Rightarrow r(A) + r(B) - k \leq r(AB)$$

$$(4).r(A^*)=\begin{cases} n, r(A)=n \\ 1, r(A)=n-1 \\ 0, r(A)<n-1 \end{cases}$$ 其中A为n阶方阵. 我们有: $AA^*=|A|E$

(i). 当$r(A)=n$, A是可逆矩阵 $\Rightarrow |A|\neq 0$

$$AA^*=|A|E \Rightarrow |A^*|=|A|^{n-1}\neq 0 \Rightarrow A^*\text{是可逆矩阵}, r(A^*)=n$$

(ii). 当$r(A)=n-1$
存在$n-1$阶子式行列式不为0, 我们得到A^*中至少有一个元素不为0, $r(A^*)\geq 1$
$AA^*=|A|E=O \Rightarrow r(A)+r(A^*)\leq n \Rightarrow r(A^*)\leq 1$

$$r(A^*)\geq 1,\ r(A^*)\leq 1 \Rightarrow r(A^*)=1$$

(iii). 当$r(A)<n-1$, 我们得到A的任意$n-1$阶子式行列式值为0, $A^*=O$

$$A^*=O \Rightarrow r(A^*)=0$$

总结

1. 计算仔细小心, 稳步前进
2. $AA^*=|A|E$　!!!!
3. 注意: $(AB)^T=B^TA^T$,　$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
4. 如果某一个矩阵的列向量均为某一个固定列向量的倍数, 则这个矩阵可以写为 $A=\alpha\beta^T$,α, β 均为列向量, 方便计算 A^n.

第 17 章 向量组

17.1 向量和向量组的线性相关性

定义 17.1.1 (向量的定义和运算)

1. n 维向量,n 个数构成的有序数组 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 称为一个 n 维向量, 记作 $\alpha = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$,$\alpha$ 称为 n 维行向量,α^T 称为 n 维列向量, 其中 a_i 称为向量的第 i 个分量.

2. 向量间运算

(i). 加法

$$\alpha + \beta \overset{\text{def}}{\Longrightarrow} [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n]$$

(ii). 数乘

$$k\alpha \overset{\text{def}}{\Longrightarrow} [ka_1, ka_2, \cdots, ka_n]$$

(iii). 内积和叉积

内积

$$\alpha\dot{\beta} \overset{\text{def}}{\Longrightarrow} \sum_{i=1}^{n} a_i b_1$$

叉积：$\alpha = [a_1, a_2, a_3]$, $\beta = [b_1, b_2, b_3]$

$$\alpha\dot{\beta} \overset{\text{def}}{\Longrightarrow} \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

定义 17.1.2 (线性相关和线性表出)

1. 线性组合

设有 m 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 和 m 个数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$, 向量

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$$

称作向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 的线性组合.

2. 线性表出

如果向量 β 可以表示为向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 的线性组合, 即存在 m 个数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$, 使得

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$$

我们称向量 β 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 线性表出.

3. 线性相关

对于向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$, 如果存在 m 个不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$, 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

我们称向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 线性相关线性相关.

4. 线性无关

对于向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$, 如果不存在 m 个不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$, 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

当且仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时上式成立, 我们称向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 线性相关线性无关.

定理 17.1.1 (判别线性相关性的七大定理)

定理 一

向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n$ 线性相关的充要条件为: 至少有一个向量可以由其余的 $n-1$ 个向量线性表出.

逆否命题:

向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n$ 线性无关的充要条件为: 任意一个向量都不可以由其余的 $n-1$ 个向量线性表出.

证明

(i). 必要性

向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性相关, 我们得到存在不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$, 使得:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

我们不妨假设 $k_1 \neq 0$, 我们可以得到:

$$\alpha_1 = -\frac{k_1}{k_1}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_n}{k_1}\alpha_n$$

至少有一个向量可以由其余的 $n-1$ 个向量线性表出

(ii). 充分性

如果有一个向量可以由其余的 $n-1$ 个向量线性表出, 我们不妨假设 α_1 可以由其余的 $n-1$ 个向量线性表出, 我们得到:

$$\alpha_1 = k_2\alpha_2 + k_2\alpha_3 + \cdots + k_n\alpha_n \Rightarrow 1\alpha_1 - k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

存在不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_n(k_1 = 1)$, 使得:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性相关

定理 二

若向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性无关,$\beta, \alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性相关, 则 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性表出, 且表示法唯一.

证明

(i). 证明存在性

$\beta, \alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性相关, 存在不全为 0 的数 $k_\beta, k_1, k_2, \cdots, k_n$, 使得:

$$k_\beta \beta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

假设 $k_\beta = 0$, 我们得到:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

此时得到不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 使得: $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性无关, 矛盾!!!

我们得到 $k_\beta \neq 0$, 我们可以得到:

$$\beta = -\frac{k_1}{k_\beta}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_\beta}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_n}{k_\beta}\alpha_n$$

向量 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性表出, 证毕

(ii). 证明唯一性 (反证法)

假设向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 对 β 存在两种不同的线性表出, 我们可以得到:

$$\begin{cases} \beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_n\alpha_n \\ \beta = h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + \cdots + h_n\alpha_n \end{cases}$$

两式相减, 得到:

$$(l_1 - h_1)\alpha_1 + (l_2 - h_2)\alpha_2 + \cdots + (l_n - h_n)\alpha_n = 0$$

至少存在 $l_i - h_i \neq 0, i \in (1, n)$, 这说明向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性相关, 矛盾!!!

我们证明了 β 的线性表出的唯一性.

定理 三

如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_s$ 线性表出, 且 $t > s$, 则 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性相关.

如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_s$ 线性表出, 且 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性相关, 则 $t \leq s$.

证明

向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$ 线性表出, 我们得到:

$$\begin{cases} \beta_1 = l_{11}\alpha_1 + l_{12}\alpha_2 + \cdots + l_{1s}\alpha_s \\ \beta_2 = l_{21}\alpha_1 + l_{22}\alpha_2 + \cdots + l_{2s}\alpha_s \\ \cdots\cdots \\ \beta_t = l_{t1}\alpha_1 + l_{t2}\alpha_2 + \cdots + l_{ts}\alpha_s \end{cases}$$

我们要证明是否存在不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_t$, 使得:

$$\begin{aligned} k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_t\beta_t &= 0 \\ k_1(l_{11}\alpha_1 + l_{12}\alpha_2 + \cdots + l_{1s}\alpha_s) &+ \\ k_2(l_{21}\alpha_1 + l_{22}\alpha_2 + \cdots + l_{2s}\alpha_s) &+ \\ \cdots + k_t(l_{t1}\alpha_1 + l_{t2}\alpha_2 + \cdots + l_{ts}\alpha_s) &= 0 \end{aligned}$$

即:

$$(\sum_{i=1}^{t} k_i l_{i1})\alpha_1 + (\sum_{i=1}^{t} k_i l_{i2})\alpha_2 + \cdots + (\sum_{i=1}^{t} k_i l_{is})\alpha_s = 0$$

当 $\sum\limits_{i=1}^{t} k_i l_{i1} = \sum\limits_{i=1}^{t} k_i l_{i2} = \cdots = \sum\limits_{i=1}^{t} k_i l_{is} = 0$ 显然满足, 此时我们得到一个关于 $k_1,k_2,\cdots,k_t$ 的 t 元方程组, 一共有 s 个方程,$t > s$ 时, 未知数个数大于方程数量, 原方程组一定存在非零解.
我们得到存在不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_t$, 使得:

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_t\beta_t = 0$$

我们得到: $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性相关, 证毕.

定理 四

设 m 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$, 其中

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= [a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1}]^T \\ \alpha_2 &= [a_{12},a_{22},\cdots,a_{n2}]^T \\ &\cdots\cdots \\ \alpha_m &= [a_{1m},a_{2m},\cdots,a_{nm}]^T \end{aligned}$$

向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 线性相关的充要条件时齐次线性方程组

$$AX=0$$

有非零解, 也等价于零空间非零.

$$A=[\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix},\ X=[x_1,x_2,\cdots,x_m]^T$$

逆否命题:

向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 线性无关的充要条件时齐次线性方程组

$$AX=0$$

只有零解, 也等价于零空间为零.

证明

(i). 必要性

向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 线性无关, 我们得到存在不全为 0 的数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$, 使得:

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$$

$$x_1[a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1}]^T+x_2[a_{12},a_{22},\cdots,a_{n2}]^T+\cdots+x_m[a_{1m},a_{2m},\cdots,a_{nm}]^T=0$$

存在不全为 0 的数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 是方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m=0 \end{cases}$$

有非零解, 证毕

(ii). 充分性

方程组 $AX=0$ 有非零解, 我们得到存在不全为 0 的数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 使得:

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$$

此时向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 线性相关, 证毕.

定理 五

如果向量 β 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$ 线性表出,等价于非齐次方程组方程 $AX=\beta$ 有解;如果向量 β 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$ 线性表出,等价于非齐次方程组方程 $AX=\beta$ 无解.

证明

向量 β 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$ 线性表出,我们可以得到存在不全为 0 的数 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 使得:

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0\Rightarrow[\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_s\end{bmatrix}=\beta$$

方程组 $AX=\beta$ 有非零解.

定理六

如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n$,一部分向量线性相关,那么整个向量组也线性相关.
逆否命题:
如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n$ 线性无关,其任意部分向量组也线性无关.

证明

我们不妨设 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_j$ $(j<n)$ 线性相关,我们得到存在不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_j$ 使得:

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_j\alpha_j=0$$

我们取 $k_1,k_2,\cdots,k_j,k_{j+1}=k_{j+2}=\cdots=k_n=0$,我们得到:

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_j\alpha_j+0\alpha_{j+1}+\cdots+0\alpha_n=0$$

$k_1,k_2,\cdots,k_j,k_{j+1}=k_{j+2}=\cdots=k_n=0$ 不全为 0,整个向量组也线性相关.

定理七

如果一组 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n$ 线性无关,那么把这些向量各任意添加 m 个分量得到的新向量组 $(n+m)$维$\alpha_1^*,\alpha_2^*\cdots,\alpha_n^*$ 线性无关;如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n$ 线性相关,那他们各去掉相同的若干个分量所得到的新向量组也是线性相关.

17.2 极大线性无关组和向量组的秩

定义 17.2.1 (极大线性无关组)

在向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$, 如果存在部分向量组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2}\cdots,\alpha_{i_r}$ 满足:

- $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2}\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性无关.
- 向量组中任意向量α_i, $(i=1,2,\cdots,s)$都可以被向量组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2}\cdots,\alpha_{i_r}$线性表出.

则称向量组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2}\cdots,\alpha_{i_r}$ 是原向量组的一个极大线性无关组.

我们注意到: 一个向量组的极大线性无关组不唯一, 对于线性无关的向量组, 它的极大线性无关组是自身.

定义 17.2.2 (向量组的秩)

向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$ 的极大线性无关组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2}\cdots,\alpha_{i_r}$ 中所含向量的个数 r 称为向量组的秩, 记作:

$$rank(\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s)=r \text{ 或 } r=(\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s)=r$$

性质 1.

- $r(A)$(矩阵的秩) $=r(A$列向量)(列秩) $=r(A$行向量)(行秩)
- 初等行变换和列变换不改变矩阵的秩
- $A\xrightarrow{\text{初等行变换}}B$, A的行向量与B的行向量是等价向量组
- 设向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$及$\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_t$,若$\beta_i(i=1,2,\cdots,t)$均可由$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$线性表出, 则:

$$r(\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s)\le r(\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_t)$$

17.3 等价向量组

定义 17.3.1 (等价向量组)

设两个向量组: (I) $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$, (II) $\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_t$, 若 (I) 中向量 α_i, $(i=1,2,\cdots,s)$ 均可由 (II) 中向量线性表出, 则称向量组 (I) 可由向量组 (II) 线性表出; 若向量组 (I) 和向量组 (II) 互相线性表出, 称向量组 (I) 与向量组 (II) 是等价向量组, 记作 (I) $\cong$ (II).

性质 1.

- (I) ≅ (I)
- 如果(I) ≅ (II), 则(II) ≅ (I)
- 如果(I) ≅ (II), (II) ≅ (III), 则(I) ≅ (III)
- 向量组和它的极大线性无关组是等价向量组

17.4 向量空间

定义 17.4.1 (向量空间)

设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中线性无关的有序向量, 对于任意向量 $\alpha \in \mathbb{R}^n$ 均可由向量组 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 线性表出, 我们将表出式记:

$$\alpha = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \cdots + a_n\xi_n$$

我们称 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 基向量的个数 n 称为向量空间的维度,$[a_1, a_2, \cdots, a_n]^T$ 是向量 α 在基向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 的坐标.

定义 17.4.2 (基变换)

如果 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 和 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 是向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中的两个基, 其有关系:

$$[\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n] = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n] \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]C$$

上式是由基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 的基变换公式, 矩阵 C 是由基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 的过渡矩阵,C 的第 i 列即是 η_i 在基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 下的坐标, 过渡矩阵 C 为可逆矩阵.

定义 17.4.3 (坐标变换)

设向量 α 在基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 和基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 下的坐标为别是 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T, \mathbf{y} = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^T$

$$\alpha = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]\mathbf{x} = [\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n]\mathbf{y}$$

不妨假设由基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 的过渡矩阵 C, 我们有:

$$[\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n] = [\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n]C$$

我们得到:

$$\mathbf{x} = C\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} = C^{-1}\mathbf{x}$$

第 18 章 线性方程组

18.1 具体型方程组

18.1.1 齐次方程组

定义 18.1.1 (齐次方程组)

1. 形式

方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

称为 m 个方程,n 个未知数的齐次方程组.

其向量形式为:

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$$

其中:

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} (j = 1, 2, \cdots, n)$$

方程组的矩阵形式为:

$$A_{m\times n}X = 0$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

2. 有解的条件

(i). 当 $r(A)=n$时, ($\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关), 方程组只有零解.

(ii). 当 $r(A)=r<n$时, ($\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关), 方程组有非零解, 且有 $n-r$ 个线性无关解.

3. 解的性质

如果 $A\xi_1=0,\ A\xi_2=0, \forall k_1,k_2\in\mathbb{R},\ A(k_1\xi_1+k_2\xi_2)=0$

4. 基础解系和解的结构

(1). 基础解系

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 满足:

- $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是方程组的解
- $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关
- 方程组$AX=0$的任意一个解均可以由$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性表出

我们称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为方程组 $AX=0$ 的基础解系.

(2). 通解

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为方程组 $AX=0$ 的基础解系, 则 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$ 是方程组 $AX=0$ 的通解, 其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}\in\mathbb{R}$

18.1.2 非齐次方程组

定义 18.1.2 (非齐次方程组)

1. 形式

方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

称为 m 个方程,n 个未知数的非齐次方程组.

其向量形式为:

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$$

其中:

$$\alpha_i=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{bmatrix}(j=1,2,\cdots,n),\ \beta=\begin{bmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{mj}\end{bmatrix}$$

方程组的矩阵形式为:

$$A_{m\times n}X=\beta$$

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

矩阵 $\left[\begin{array}{cccc:c}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_{1j}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_{2j}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_{mj}\end{array}\right]$ 记作为矩阵 A 的增广矩阵, 简记为 $\left[\begin{array}{c:c}A&\beta\end{array}\right]$

2. 有解的条件

(i).$r(A)\neq r([A,\beta])$, 方程组无解.(β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表出)

(ii). $r(A)=r([A,\beta])=n$, 方程组有唯一解

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{线性无关},\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{线性相关}$$

(iii).$r(A)=r([A,\beta])<n$, 方程组有无穷多组解.

3. 解的性质

设 η_1,η_2,η_3 是非齐次方程组 $AX=\beta$ 的解,ξ 是对应齐次方程组 $AX=0$ 的解, 我们有:

- $\eta_1-\eta_2$是$AX=0$的解
- $k\xi+\eta$是方程组$AX=\beta$的解

4. 解的结构

(1). 特解

η是非齐次性方程组$AX=\beta$的一个特解

(2). 通解

设 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$ 是方程组 $AX=0$ 的通解, 其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}\in\mathbb{R}$, 我们可以得到非齐次性方程组的通解:

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta$$

18.2 两个方程组的公共解

定义 18.2.1 (两个方程组的公共解)

(1). 齐次性线性方程组 $A_{m\times n}X=0$ 和 $B_{m\times n}X=0$ 的公共解是满足方程组 $\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}X=0$ 的解.

(2). 非齐次性性线性方程组 $A_{m\times n}X=\alpha$ 和 $B_{m\times n}X=\beta$ 的公共解是满足方程组 $\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}$ 的解.

(3). 给出方程组 $A_{m\times n}X=0$ 的通解 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s$, 代入第二个方程组 $B_{m\times n}X=0$ 得到 $k_i(i=1,2,\cdots,s)$ 之间的关系, 代回方程 $A_{m\times n}X=0$

(4). 给出方程组 $A_{m\times n}X=0$ 的基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 和方程组 $B_{m\times n}X=0$ 的基础解系 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$, 公共解为:

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s=l_1\eta_1+l_2\eta_2+\cdots+l_t\eta_t$$

18.3 同解方程组

定义 18.3.1 (同解方程组)

如果两个方程组 $A_{m\times n}X=0$ 和 $B_{m\times n}X=0$ 有完全相同的解, 则称它们为同解方程组.

- $AX=0$的解满足$BX=0$并且$BX=0$的解满足$AX=0$
- $r(A)=r(B)$并且$AX=0$的解满足$BX=0(BX=0$的解满足$AX=0)$
- $r(A)=r(B)=r(\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix})$

第 19 章 特征值和特征向量

2012.08.18

19.1 特征值和特征向量定义

定义 19.1.1 (特征值和特征向量)

设 A 是 n 阶矩阵,λ 为常数, 存在非零列向量 ξ, 满足:

$$A\xi = \lambda\xi$$

则称 λ 为 A 的特征值,ξ 是 A 对应于特征值 λ 的特征向量

注

$$(\lambda E - A)\xi = O \Rightarrow |\lambda E - A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) = 0$$

上面右边是关于 λ 的特征多项式, 也是 A 的特征方程:

$$\lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$$

我们得到:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} \\ \prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = |A| \end{cases}$$

推论 19.1.1 (特征向量)

- k重特征值至多只有k个线性无关的特征向量
- 若ξ_1, ξ_2是A的属于不同特征值λ_1, λ_2的特征向量, λ_1, λ_2线性无关
- 若ξ_1, ξ_2是A的属于同一特征值λ的特征向量
  $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2(k_1, k_2$不同时为$0)$仍然是$A$属于特征值$\lambda$的特征向量

表 19.1: 常用特征值和特征向量

矩阵	A	kA	A^k	$f(A)$	A^{-1}	A^*	$P^{-1}AP$
特征值	λ	$k\lambda$	λ^k	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\|A\|}{\lambda}$	λ
特征向量	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	$P^{-1}\xi$

19.2 相似

定义 19.2.1 (矩阵的相似)

设 A, B 是两个 n 阶方阵, 若存在 n 阶可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP = B$, 则称 A 相似于 B, 记作 $A \sim B$

注

(1). $A \sim A$ 反身性

(2). $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ 对称性

(3). $A \sim B,\ B \sim C \Rightarrow A \sim C$ 传递性

推论 19.2.1 (相似矩阵)

(1).$A \sim B$, 我们得到:

- $r(A) = r(B)$
- $|A| = |B|$
- $|\lambda A - E| = |\lambda B - E|$
- A, B具有相同的特征值

(2).$A \sim B$, 我们得到:

- $A^m \sim B^m$
- $f(A) \sim f(B)$

(3).$A \sim B$且A可逆, 我们得到:

- $A^{-1} \sim B^{-1}$
- $f(A^{-1}) \sim f(B^{-1})$

(4).$A \sim B$, 我们得到:

- $A^T \sim B^T$
- $A^* \sim B^*$

19.2.1 矩阵的相似对角化

定义 19.2.2 (相似对角化)

设 A 是 n 阶方阵, 若存在 n 阶可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$, 其中 Λ 是对角矩阵, 则称 A 可相似对角化, 记作 $A \sim \Lambda$, 称 Λ 为 A 的相似标准型

注

$$P = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n], \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \Lambda \Rightarrow AP = P\Lambda$$

$$A[\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n] = [\lambda_1\xi_1, \lambda_2\xi_2, \cdots, \lambda_n\xi_n] \Rightarrow A\xi_i = \lambda_i\xi_i (i = 1, 2, \cdots, n)$$

推论 19.2.2 (对角化)

- n阶矩阵A可相似对角化 $\Leftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量
- n阶矩阵A可相似对角化 $\Leftrightarrow$ 对于每个k_i重特征值都有k_i个特征向量
- A有n个特征值 $\Rightarrow$ n阶矩阵A可相似对角化
- n阶矩阵A为实对称矩阵 $\Rightarrow$ A可相似对角化

19.2.2 实对称矩阵的相似对角化

定义 19.2.3 (实对称矩阵相似对角化)

$A^T = A$且A中元素全为实数, 我们把A称作实对称矩阵

性质

- 实对称矩阵必可相似对角化, 特征值为实数, 特征向量为实向量
- 实对称矩阵属于不同特征值的特征向量互相正交
- $\exists$正交矩阵Q, s.t. $Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \Lambda$

第 20 章 二次型

20.1 二次型定义

定义 20.1.1 (二次型)

n 元变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + & \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
+ a_{22}x_2^2 + & \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
+ & \cdots \\
& + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

称为 n 元二次型, 简称为二次型.

我们令 $a_{ij} = a_{ji}$, 我们可以得到:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n + \cdots + a_{n1}x_nx_1 + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

我们令

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

二次型可表示为: $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, A 为二次型 $f(\mathbf{x})$ 的矩阵

20.2 二次型的标准型和规范型

定义 20.2.1 (线性变换)

对于 n 元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 令:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

记

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}, \ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

上面的线性变化可写作:

$$\mathbf{x} = C\mathbf{y}$$

我们把这种变换称为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的**线性变换**, 如果线性变换矩阵 C 可逆,$|C| \neq 0$, 则称为**可逆线性变换**.

我们有:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}, \ \mathbf{x} = C\mathbf{y} \Rightarrow f(\mathbf{x}) = (C\mathbf{y})^T A(C\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T(C^T AC)\mathbf{y}$$

如果我们记 $B = C^T AC$, 我们得到

$$f(\mathbf{x}) = y^T By = g(\mathbf{y})$$

二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ 通过线性变换 $\mathbf{x} = C\mathbf{y}$ 得到了一个新二次型 $g(\mathbf{y}) = y^T By$ ♣

定义 20.2.2 (矩阵合同)

设 A,B 为 n 阶矩阵, 若存在可逆矩阵 C, 使得:

$$B = C^T AC$$

则称 A,B 合同, 记作 $A \simeq B$, 其对应的二次型 $f(\mathbf{x})$ 与 $g(\mathbf{y})$ 为合同二次型.

注

(1). $A \simeq A$ 反身性

(2). $A \simeq B \Rightarrow B \simeq A$ 对称性

(3). $A \simeq B, \ B \simeq C \Rightarrow A \simeq C$ 传递性 ♣

定义 20.2.3 (标准型和规范型)

1. 二次型中只有平方项, 而没有交叉项 (所有交叉项系数全为 0), 形如:

$$d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$$

的二次型为标准二次型.

2. 在标准二次型中, 如果二次型的系数 $d_i = \{0, 1, -1\}$, 这样的二次型称为规范型二次型.

3. 二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ 合同于标准型 $d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$, 则称 $d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$ 为二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ 的合同标准型.

4. 二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ 合同于规范型 $x_1^2+\cdots++x_p^2-x_{p+1}^2-x_q^2$, 则称 $x_1^2+\cdots++x_p^2-x_{p+1}^2-x_q^2$ 为二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ 的合同规范型.

5. 任何二次型都可以通过可逆线性变换化为标准型或者规范型, 对任意实对称矩阵 A, 必存在可逆矩阵 C, 使得 $C^TAC = \Lambda$

6. 任何二次型都可以通过正交变换化为标准型, 对任意实对称矩阵 A, 必存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^{-1}AC = Q^TAQ = \Lambda$

定义 20.2.4 (惯性定理)

无论用什么样的可逆线性变换得到的二次型标准型或者规范型, 标准型或者规范型中正项个数 p, 负项个数 q 都是不变的,p 被称为正惯性指数,q 被称为负惯性指数.

注

(1). 二次型的秩为r, $r = p + q$

(2). 两个二次型合同的充要条件为有相同的正、负惯性指数, 或者相同的秩及正 (负) 惯性指数

20.3 正定二次型

定义 20.3.1 (正定矩阵)

n 元二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \mathbf{x}^TA\mathbf{x}$, 对于任意 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T \neq 0$, 都有 $\mathbf{x}^TA\mathbf{x} > 0$, 则称 f 为正定二次型, 二次型对应的矩阵 A 为正定矩阵.

推论 20.3.1 (二次型正定充要)

- f正定 $\Leftrightarrow$ f正惯性指数$p = n$
- f正定 $\Leftrightarrow$ $\exists$可逆矩阵D, s.t. $A = D^TD$
- f正定 $\Leftrightarrow$ $A \simeq E$
- f正定 $\Leftrightarrow$ A的所有特征值$\lambda_i > 0$
- f正定 $\Leftrightarrow$ A的全部顺序主子式大于0

推论 20.3.2 (二次型正定必要)

- f正定 $\Rightarrow a_{ii} > 0$
- f正定 $\Rightarrow |A| > 0$

第四部分

概率论

第 4 部分目录

第 21 章 随机事件和概率

定义 21.0.1 (随机试验)

- 试验可以在相同条件下重复进行
- 试验的所有结果是明确可知道的, 并且不止一个
- 每一次试验出现哪一个结果, 事先并不确定

定义 21.0.2 (随机事件)

- 每一次试验中可能出现也可能不出现的结果称为随机事件
- 在试验中一定发生的事件为必然事件, 一定不发生的事件为不可能事件

定义 21.0.3 (样本空间)

- 随机试验的每一个可能的结果称为样本点, 记作ω
  样本点的全体组成的几何称为样本空间, 记作$\Omega \Rightarrow \Omega = \{\omega\}$
- 由一个样本点构成的事件为基本事件
- 随机事件A是由若干个基本事件组成 $\Rightarrow A \subset \Omega$

21.1 事件的关系和运算

定义 21.1.1 (事件间关系)

- 包含: 事件A发生, 事件B发生 $\Rightarrow A \subset B$
- 相等: $A \subset B,\ B \subset A \Rightarrow A = B$
- 相容: $AB \neq \varnothing$
- 互斥: $AB = \varnothing$
- 对立: $A \cup B = \Omega, A \cap B = \varnothing$

定义 21.1.2 (运算法则)

- 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- 分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $De\ Morgan's\ laws$: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

21.2 概率定义

定义 21.2.1 (概率定义)

1. 描述性定义

通常将随机事件 A 发生的可能性大小的度量 (非负值) 称为事件 A 发生的概率, 记作 $P(A)$

2. 统计性定义

在相同条件下做重复实验, 事件 A 出现的次数 k 和总的试验次数 n 的比 $\frac{k}{n}$ 称为事件 A 在这 n 次试验中出现的频率. 当试验次数 n 足够大时, 频率将稳定于某个常数 p,n 越大, 频率偏离 p 的可能性越小, 我们把这个常数 p 称为事件 A 发生的概率.

3. 公理化定义

设随机事件的样本空间为 Ω, 如果对于每一个事件 A 都有一个确定的实数 $P(A)$, 且事件函数 $P(*)$ 满足:

- 非负性: $P(A) \geq 0$
- 规范性: $P(\Omega) = 1$
- 可列可加性: 对于任意两个互不相容的事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$, 我们有:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

21.3 古典概率型和几何概率型

定义 21.3.1 (古典概率型)

古典概率型样本空间满足:

- 只有有限个基本事件
- 每个基本事件都是等可能发生

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{事件}A\text{所含的基本事件的个数}}{\text{样本空间内的基本事件个数}}$$

定义 21.3.2 (几何概率型)

几何概率型样本空间满足:

- 无限个基本事件
- 每个基本事件都是等可能发生
- 样本空间是一个可以度量的有界区域

$$P(A)=\frac{S_A\text{的几何度量}}{\text{样本空间内的几何度量}}$$

21.4 概率论基本公式

定义 21.4.1 (性质和基本公式)

- $0\le P(A)\le 1, P(\varnothing)=0, P(\Omega)=1$
- $A\subset B\Rightarrow P(B-A)=P(B)-P(A), P(B)\ge P(A)$
- $P(\overline{A})=1-P(A)$
- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

定义 21.4.2 (公式)

定理 21.4.1 (条件概率公式)

A,B 是两个任意事件, 如果 $P(A)>0$, 我们称在 A 发生的条件下 B 发生的概率为条件概率, 我们记作 $P(B|A)$.

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

定理 21.4.2 (乘法公式)

$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件, 且 $P(A_i)>0,(i=1,2,\cdots,n), P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$, 我们有:

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

特别的, 当 $n=2$ 时, 我们有:

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$$

定理 21.4.3 (全概率公式)

如果有完备事件组 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$, 满足 $\bigcup_{i=1}^n A_i=1, A_iA_j=\varnothing$, 对于任意事件 B, 我们有:

$$B=\bigcup_{i=1}^n A_iB,\ P(B)=\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

定理 21.4.4 (贝叶斯公式)

如果有完备事件组 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$, 满足 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = 1, A_iA_j = \varnothing$, 对于任意事件 B, 我们有:

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_jB)}{P(B)} = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}, j = 1,2,\cdots,n$$

21.5 事件独立性和独立重复实验

定义 21.5.1 (定义)

1. 事件的独立性

(1). 描述性定义

事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意一个事件 A_i 发生的概率不受其他 $n-1$ 个事件的影响, 我们称这 n 个事件相互独立.

(2). 数学定义

A, B 为两个事件, 如果我们有: $P(AB) = P(A)P(B)$, 则称事件 A, B 相互独立.

2. 试验的独立性

如果各个试验的结果是相互独立的, 我们称这些试验是相互独立的, 试验序列 $\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ 中任意两个试验 E_i, E_j, 在这两个试验中任意两个结果 A_{ip}, A_{iq} 满足: $P(A_{ip}A_{jq}) = P(A_{ip})P(A_{jq})$, 我们称试验序列相互独立.

注

相互独立 $\Rightarrow$ 两两独立, 两两独立 $\nRightarrow$ 相互独立

第 22 章 一维随机变量及其分布

22.1 一维随机变量

定义 22.1.1 (随机变量)

设随机试验 E 的样本空间 $\Omega=\{\omega\}$ 满足: $\forall\omega\in\Omega$ 都有唯一的实数 $X(\omega)$ 与之对应, 且对任意实数 x, 都有 $\{\omega|X(\omega)\leq x,\omega\in\Omega\}$ 是随机事件, 我们则称定义在 Ω 上的单值函数 $X(\omega)$ 是随机变量.

定义 22.1.2 (分布函数)

设 X 是随机变量,x 是任意实数, 称函数 $F(x)=P(X\leq x)$ 为随机变量 X 的分布函数, 或者称 X 服从 $F(x)$ 分布, 记作 $X\sim F(x)$

- $F(x)$ 是单调不减函数,$\forall x_1\leq x_2$, 我们有 $F(x_1)\leq F(x_2)$
- $F(x)$ 是右连续函数, 我们有 $\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x_0^+)=F(x_0)$
- $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0,\ F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$
- $P\{X\leq a\}=F(a),\ P\{X<a\}=F(a^-),\ P\{X=a\}=F(a)-F(a^-)$

22.2 一维离散型随机变量

定义 22.2.1 (一维离散型随机变量)

随机变量 X 只能取有限个值 $x_1,x_2,\cdots$, 则称 X 为离散型随机变量, 我们有:

$$P\{X=x_i\}=p_i,i=1,2,\cdots$$

我们将上面的式子称为随机变量 X 的分布列、分布律或者概率分布, 记作 $X\sim p_i$, 概率

分布通常用表格或者矩阵形式表示.

X	x_1	x_2	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$

或 $X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$

数列 $\{p_i\}$ 是离散型随机变量的概率分布的充要条件为: $p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

我们假设离散型随机变量的概率分布为: $P(X = x_i) = p_1$, 我们得到离散型随机变量 X 的分布函数:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

对实轴上任意集合 B, 我们有:

$$P(X \in B) = \sum_{x_i \in B} P(X = x_i)$$

$$P(a < X \leq b) = P(x \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

定义 22.2.2 (常见离散型随机变量分布)

(1).0-1分布

$X \sim B(1, p)$

$$P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$$

(2).二项分布

$X \sim B(n, p)$, 试验次数为 n, 成功概率为 p, 随机变量 X 为成功次数

$$P(X = k) = C_k^n p^k (1 - p)^{n-k}, (k = 0, 1, 2, \cdots, n), 0 < p < 1$$

(3).泊松分布

$X \sim P(\lambda)$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, (k = 0, 1, 2, \cdots), 0 < p < 1$$

(4).几何分布

$X \sim G(p)$

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p, (k = 1, 2, \cdots), 0 < p < 1$$

(5).超几何分布

$X \sim H(n, N, M)$

$$P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, (max\{0, n - M + N\} \leq k \leq min\{M, n\})$$

22.3 一维连续型随机变量

定义 22.3.1 (连续型随机变量分布函数和密度函数)

随机变量 X 的分布函数可以表示为:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt, t\in\mathbb{R}$$

其中 $f(x)$ 是非负可积函数, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$, 我们称 X 是连续型随机变量,$f(x)$ 是随机变量 X 的**概率密度函数**, 记作 $X\sim f(x)$

对于连续型随机变量 X, 我们有:

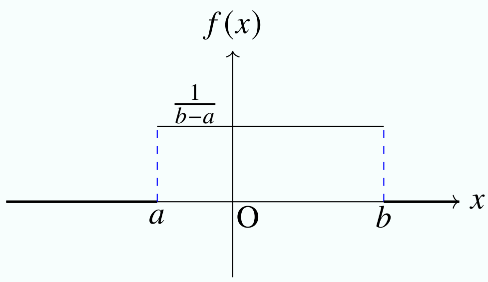
$$\begin{aligned}&P(X=c)=0\\&P(a<X<b)=P(a\le X<b)=P(a<X\le b)=P(a\le X\le b)\\&P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

定义 22.3.2 (常见连续型随机变量分布)

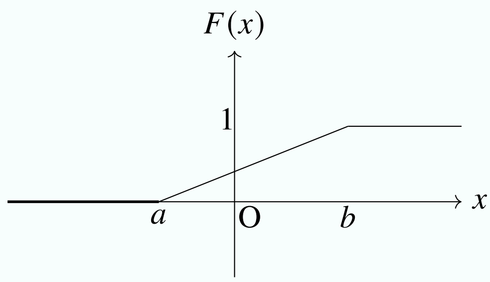
(1).均匀分布

$X\sim U(a,b)$,X 的概率密度函数 $f(x)$ 和分布函数 $F(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & x\le a\text{或}x\ge b\end{cases},\quad F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x<b\\ 1, & x\ge b\end{cases}$$



(a) 概率密度

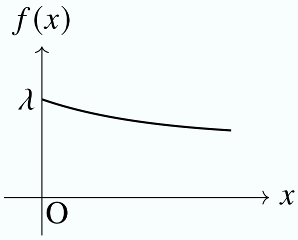


(b) 分布函数

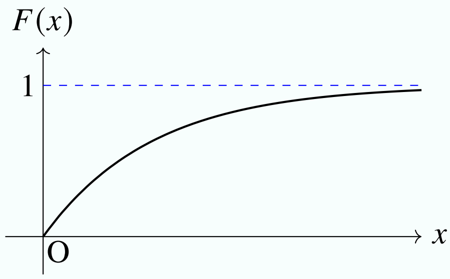
(2).指数分布

$X\sim E(\lambda)X$ 的概率密度函数 $f(x)$ 和分布函数 $F(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},\quad F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}\quad(\lambda>0)$$



(c) 概率密度



(d) 分布函数

(3).正态分布

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$,X 的概率密度 $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}, (-\infty < x < +\infty)$$

特别的，当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时,$X \sim f(x)$ 是标准正态分布:

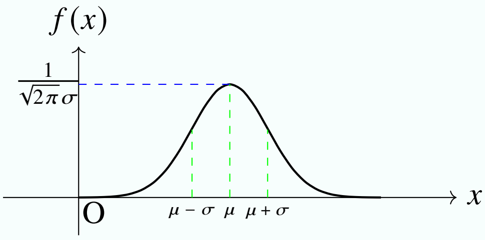
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, (-\infty < x < +\infty)$$

关于正态分布，我们有:

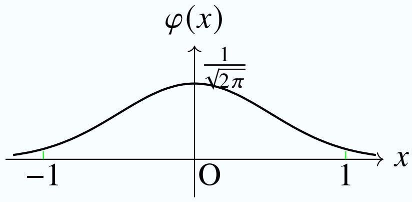
$$F(x) = P(X \le x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

$$P(a \le x \le b) = \Phi(\frac{b-u}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

$$F(\mu - x) + F(\mu + x) = 1,\ aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$



(e) 概率密度



(f) 分布函数

22.4 一维随机变量函数的分布

定义 22.4.1

设 X 是随机变量，函数 $y = g(x)$，以随机变量 X 作为自变量的函数 $Y = g(X)$ 也是随机变量，称为随机变量函数.

我们一般有离散型 $\longrightarrow$ 离散型和连续型 $\longrightarrow$ 离散型两种随机变量函数.

第 23 章 多维随机变量及其分布

23.1 基本概念

定义 23.1.1 (n 维随机变量)

如果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是定义在同一个样本空间 Ω 上的 n 个随机变量，我们称 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 n 维随机向量.

对于任意的 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 我们把 n 元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

称为 n 维随机向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的**联合分布函数**

特别的，当 $n = 2$ 时，记 (X, Y) 为**二维随机变量**或者**二维随机向量**，我们称 $F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\}$ 为二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数，记作：

$$(X, Y) \sim F(x, y) \Leftrightarrow F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\}$$

随机变量 X 与 Y 的分布函数 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 分别称为随机变量关于 (X, Y) 关于 X 和 Y 的边缘分布函数.

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < +\infty\} = F(x, +\infty)$$

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X < +\infty, Y \le y\} = F(+\infty, y)$$

注

二维随机变量联合分布性质

(1). 单调性 (单调不减)

$$\forall x,\ 当 y_1 < y_2 时, F(x, y_1) \leq F(x, y_2)$$

$$\forall y,\ 当 x_1 < x_2 时, F(x_1, y) \leq F(x_1, y)$$

(2). 右连续性

$$\lim_{x \to x_0^+} F(x, y) = F(x_0 + 0, y) = F(x_0, y)$$

$$\lim_{y \to y_0^+} F(x, y) = F(x, y_0 + 0) = F(x, y_0)$$

(3). 有界性

$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0,\ F(+\infty, +\infty) = 1$$

(4). 非负性 $\forall x_1 < x_2, y_1 < y_2$, 我们有:

$$F(x_1 < x \leq x_2, y_1 < y \leq y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \geq 0$$

♣

23.2 二维离散型随机变量

表 23.1: 离散型二维随机变量概率分布

$X \backslash Y$	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$P\{X = x_i\}$
x_1	p_{11}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	p_{1*}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	p_{i*}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$P\{Y = y_j\}$	p_{*1}	$\cdots$	p_{*j}	$\cdots$	1

定义 23.2.1 (二维离散型随机变量)

1. 概率分布

二维随机变量 (X, Y) 只能取有限对值或可列对值 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n), \cdots$, 则称

(X,Y) 为离散型随机变量,(X,Y) 满足概率分布:

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}, i, j = 1, 2, \cdots$$

上面的式子称为 (X,Y) 的联合分布律, 记作 $(X,Y) \sim p_{ij}$, 如 **table** : 23.1所示

数列$\{p_{ij}\}, i, j = 1, 2, \cdots$是某一二维随机变量的概率分布的充要条件:

$$p_{ij} \geq 0, \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$$

2. 联合分布函数、边缘分布、条件分布

(1). 联合分布函数

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$$

(2). 边缘分布

X 的边缘分布:

$$p_{i*} = P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, (i = 1, 2, \cdots)$$

Y 的边缘分布:

$$p_{*j} = P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, (j = 1, 2, \cdots)$$

(3). 条件分布

X 在 $Y = y_j$ 下的条件分布:

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{*j}}, i = 1, 2, \cdots$$

Y 在 $X = x_i$ 下的条件分布:

$$P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{i*}}, j = 1, 2, \cdots$$

23.3 二维连续型随机变量

定义 23.3.1 (二维连续型随机变量)

1. 联合分布函数、概率密度

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) du dv, (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$F(x, y)$ 是二维随机变量 (X,Y) 的概率分布函数,$f(x)$ 是二维随机变量 (X,Y) 的概率密度函数.

$$f(x,y) \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy$$

注

- $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续, 我们有: $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}|_{(x_0,y_0)} = f(x_0,y_0)$
- $F(x,y)$ 连续且可导, $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$

2. 边缘分布函数、边缘概率密度

$(X,Y) \sim f(x,y)$,X 的边缘分布函数和边缘概率密度:

边缘分布函数

$$F_X(x) = F(x,+\infty) = \int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dv\right]du$$

边缘概率密度

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$(X,Y) \sim f(x,y)$,Y 的边缘分布函数和边缘密度函数:

边缘分布函数

$$F_Y(y) = F(+\infty,y) = \int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)du\right]dv$$

边缘概率密度

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

3. 条件分布函数、条件概率密度

$(X,Y) \sim f(x,y)$,X 在 $Y=y$ 条件下的条件分布函数和条件概率密度:

条件概率密度

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, (f_Y(y) > 0)$$

条件分布函数

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx$$

$(X,Y) \sim f(x,y)$,Y 在 $X=x$ 条件下的条件分布函数和条件概率密度:

条件概率密度

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, (f_X(x) > 0)$$

条件分布函数

$$F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(y|x)dy = \int_{-\infty}^{y} \frac{f(x,y)}{f_X(x)}dy$$

定义 23.3.2 (常见二维分布)

(1). 二维均匀分布

(X,Y) 在有界区域 D 服从均匀分布,(X,Y) 的概率密度为:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{S_D}, & (x,y) \in D \\ 0, \text{其他} \end{cases} \quad S_D\text{是区域的面积}$$

(2). 二维正态分布

(X,Y) 概率密度为:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$$

其中 $\mu_1,\mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1,\sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1$, 我们称 (X,Y) 服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的二维正态分布, 记作 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$

注

- $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$,$Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$,$\rho$ 是 X 与 Y 的相关系数

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_1\sigma_2}$$

- X 和 Y 的条件分布都是正态分布
- $aX + bY(a \neq 0\text{或者}b \neq 0)$ 服从正态分布
- X,Y 相互独立的充要条件为 X,Y 不相关 $\Leftrightarrow \rho = 0$

23.4 独立性

定义 23.4.1 (独立性)

1. 概念

设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布 $F(x,y)$, 边缘分布分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 如果对任意实数 (x,y), 我们都有:

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \Leftrightarrow X\text{和}Y\text{相互独立}$$

- 随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立 $\Leftrightarrow F(x_1,x_1,\cdots,x_n) = F(x_1)\ldots F(x_2)\cdots F(x_n)$
- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 则其中任意 $k(2 \leq k \leq n)$ 个随机变量也相互独立

- 两个多维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 与 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_m)$ 相互独立, 我们有:

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m) = F_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \dots F_2(y_1, y_2, \cdots, y_m)$$

- (X, Y) 为独立的二维随机变量, 边缘分布和条件分布相等, 边缘概率密度与条件概率密度相等.$(P\{Y = y_j\} > 0,\ P\{X = x_i\} > 0)$

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = P\{X = x_i\},\ P\{Y = y_j | X = x_i\} = P\{Y = y_j\}$$

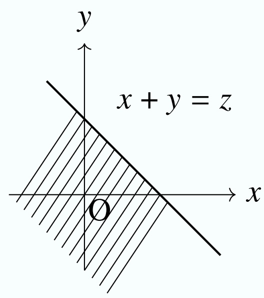
$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = f_X(x)(f_Y(y) > 0),\ f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = f_Y(y)(f_X(x) > 0)$$

♣

定义 23.4.2 (连续型多维随机变量函数的分布)

$(X, Y) \sim f(x, y)$

(1). 和的分布



(a) $X + Y$

$Z = X + Y$

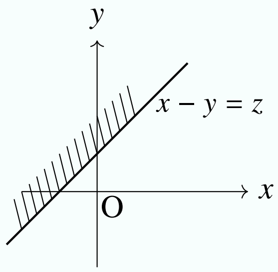
分布函数:

$$F_Z(z) = P\{X + Y \leq z\} = \iint\limits_{D_z: x+y\leq z} f(x, y) d\sigma = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y) dy \\ \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{z-y} f(x, y) dx \end{cases}$$

概率密度:

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z - y, y) dy \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x) dx \end{cases}$$

(2). 差的分布



(b) $X-Y$

$Z=X-Y$

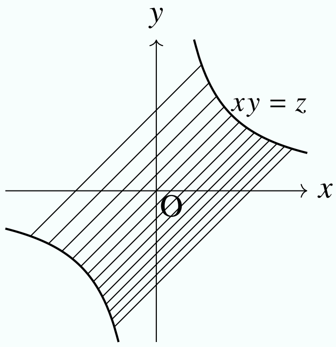
分布函数:

$$F_Z(z)=P\{X-Y\le z\}=\iint\limits_{D_z:x-y\le z} f(x,y)d\sigma=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{x-z}^{+\infty}f(x,y)dy\\ \int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{y+z}f(x,y)dx\end{cases}$$

概率密度:

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}f(z+y,y)dy\\ \int_{-\infty}^{+\infty}f(x,x-z)dx\end{cases}$$

(3). 积的分布



(c) XY

$Z=XY$

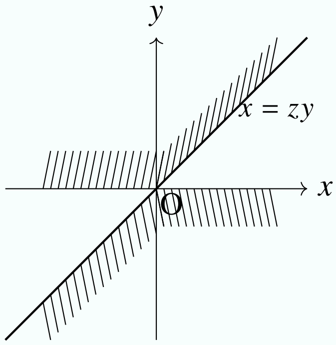
分布函数:

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{XY\le z\}=\iint\limits_{D_z:xy\le z} f(x,y)d\sigma\\ &=\begin{cases}\int_{-\infty}^{0}dy\int_{\frac{z}{y}}^{+\infty}f(x,y)dx+\int_{0}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{\frac{z}{y}}f(x,y)dx\\ \int_{-\infty}^{0}dx\int_{\frac{z}{x}}^{+\infty}f(x,y)dy+\int_{0}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{\frac{z}{x}}f(x,y)dy\end{cases}\end{aligned}$$

概率密度:

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{0}(-\frac{1}{y})f(\frac{z}{y},y)dy+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{y}f(\frac{z}{y},y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|y|}f(\frac{z}{y},y)dy\\ \int_{-\infty}^{0}(-\frac{1}{x})f(x,\frac{z}{x})dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x}f(x,\frac{z}{x})dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f(x,\frac{z}{x})dx\end{cases}$$

(4). 商的分布



(d) $\frac{X}{Y}$

$Z=\dfrac{X}{Y}$

分布函数:

$$F_Z(z)=P\{\frac{X}{Y}\le z\}=\iint\limits_{D_z:\frac{X}{Y}\le z}f(x,y)d\sigma=\int_{-\infty}^{0}dy\int_{zy}^{+\infty}f(x,y)dx+\int_{0}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{zy}f(x,y)dx$$

概率密度:

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\int_{-\infty}^{0}(-y)f(zy,y)dy+\int_{0}^{+\infty}yf(zy,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(zy,y)dy$$

(5).$max\{X,Y\}$

$Z=max\{X,Y\}$

分布函数:

$$\begin{aligned}F_Z(z)=P\{Z\le max\{X,Y\}\}&=P\{X\le z\}\cup P\{Y\le z\}\\&=P\{X\le z\}+P\{Y\le z\}-P\{X\le z,Y\le z\}\\&=F_X(z)+F_Y(z)-F(z,z)\end{aligned}$$

概率密度:

$$f_Z=F_Z'(z)=f(z,z)$$

(6).$min\{X,Y\}$

$Z=min\{X,Y\}$

分布函数:

$$F_Z(z)=P\{Z\le min\{X,Y\}\}=P\{X\le z,Y\le z\}=F(z,z)\Rightarrow F_{max}(z)=F(z,z)$$

概率密度:

$$f_Z = F'_Z(z) = f_X(z) + f_Y(z) - f(z,z)$$

注

- n 个相互独立的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$,$Z_1 = max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$, $Z_2 = min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$,$Z_1, Z_2$ 的分布函数:

$$F_{max}(z) = F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)$$

$$F_{min}(z) = 1 - [1 - F_{Z_1}(z)][1 - F_{Z_2}(z)]\cdots[1 - F_{Z_n}(z)]$$

- $X_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 独立同分布, 我们有:

$$F_{max}(x) = [F(x)]^n,\ f_{max}(x) = n[F(x)]^{n-1}f(x)$$

$$F_{min}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n,\ f_{min}(x) = nf(x)[1 - F(x)]^{n-1}$$

表 23.2: 常见分布可加性

X	Y	$X+Y$
$B(n,p)$	$B(m,p)$	$B(n+m,p)$
$P(\lambda_1)$	$P(\lambda_2)$	$P(\lambda_1+\lambda_2)$
$N(\mu_1,\sigma_1^2)$	$N(\mu_2,\sigma_2^2)$	$N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$
$\chi^2(n)$	$\chi^2(m)$	$\chi^2(n+m)$

第 24 章 随机变量的数字特征

24.1 一维随机变量的数字特征

定义 24.1.1 (数学期望)

1. X 是离散型随机变量,X 的分布列为 $p_i = P\{X = x_i\}(i = 1, 2, \cdots, n)$, 如果级数 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} x_i p_i$ 绝对收敛, 我们称随机变量 X 的数学期望存在, 并将其记作 $E(X)$.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i$$

2. X 是连续型随机变量,X 的概率密度为 $f(x)$, 如果积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ 绝对收敛, 我们称随机变量 X 的数学期望存在, 并将其记作 $E(X)$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

- a_i为常数,$E\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$
- $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$, $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$
- X与Y相互独立 $\Rightarrow$ $E(XY) = E(X)E(Y), E[g_1(X) \ldots g_2(Y)] = E[g_1(X)] \ldots E[g_2(Y)]$
- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 我们有:

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i),\ E\left[\prod_{i=1}^{n} g_i(X_i)\right] = \prod_{i=1}^{n} E[g_i(X_i)]$$

♣

定义 24.1.2 (方差和标准差)

设 X 是随机变量, 如果 $E[(X-EX)^2]$ 存在, 我们将 $E[(X-EX)^2]$ 记作 X 的方差 $D(X)(DX)$:

$$D(X)=E[(X-EX)^2]=E(X^2)-[E(X)]^2$$

我们将 $\sqrt{D(X)}$ 称为随机变量的**标准差**或者**均方差**, 记作 $\sigma(X)$.

- $DX\geq 0,\ E(X^2)=DX+(EX)^2$
- $D(c)=0,\ c$为常数
- $D(aX+b)=a^2D(X),\ D(X+b)=D(X)$
- $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2Cov(X,Y)$
- $X^*=\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ 是 X 的标准化随机变量,$E(X^*)=0, D(X^*)=1$
- 如果X和Y相互独立, 我们得到

$$D(aX+bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)$$

- $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是相互独立, 我们有:

$$D\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2D(X_i)$$
$$D\left(\sum_{i=1}^{n}g_i(X_i)\right)=\sum_{i=1}^{n}D\left[g_i(X_i)\right]$$

♣

定义 24.1.3 (切比雪夫不等式)

如果随机变量 X 的期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 都存在, 对任意 $\varepsilon>0$, 我们都有:

$$P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}\text{或者}P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

注

♣

24.2 二维随机变量的数字特征

定义 24.2.1 (数学期望)

设 X,Y 为随机变量,$g(X,Y)$ 为 X,Y 的函数 (g 是连续函数)

1. (X,Y) 是离散型随机变量, 联合分布为:

$$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}(i,j=1,2,\cdots)$$

级数 $\sum\limits_i\sum\limits_j g(x_i,y_j)p_{ij}$ 绝对收敛, 我们定义:

$$E[g(X,Y)]=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}$$

2. (X,Y) 是连续型随机变量, 概率密度为 $f(x,y)$, 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy$ 绝对收敛, 我们定义:

$$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy$$

定义 24.2.2 (协方差与相关系数)

如果随机变量 X 与 Y 的方差存在且 $D(X)>0, D(Y)>0$, 我们定义随机变量 X,Y 的协方差 $Cov(X,Y)$:

$$Cov(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]=E(XY)-E(X)E(Y)$$

其中 $E(XY)$:

$$E(XY)=\begin{cases}\sum\limits_i\sum\limits_j x_iy_ip_{ij},\ (X,Y)\text{是离散型随机变量}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy,\ (X,Y)\text{是连续型随机变量}\end{cases}$$

我们将 $\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$ 定义为随机变量 X,Y 的**相关系数**.

- $\rho_{XY}=0\Rightarrow X,Y$不相关
- $\rho_{XY}\neq 0\Rightarrow X,Y$相关
- 对称性 $Cov(X,Y)=Cov(Y,X),\ Cov(X,X)=D(X),\ \rho_{XX}=1$
- 线性 $Cov(aX+b,Y)=aCov(X,Y),\ Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$

表 24.1: 常用分布表

名称	概率分布	均值	方差	参数范围
两点分布	$P(X=k)=p^kq^{1-k}$ $(k=0,1)$	p	pq	$0<p<1$ $q=1-p$
二项分布 $B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^kp^xq^{n-k}$ $(x=0,1,\cdots,n)$	np	npq	$0<p<1$ $q=1-p$ $n\in N$
泊松分布 $P(\lambda)$	$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $(k=0,1,2,\cdots)$	λ	λ	$\lambda>0$
超几何分布 $H(n,N,M)$	$P(X=k)=\frac{C_{N-M}^{n-k}C_M^k}{C_N^n}$ $(k=0,1,\cdots min\{M,n\})$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{n(N-n)(N-M)M}{N^2(N-1)}$	$n,N,M\in N$ $n\le N,M\le N$
几何分布 $G(p)$	$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$ $(k=0,1,\cdots)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$0<p<1$ $q=1-p$
均匀分布 $U(a,b)$	$p(x)=\frac{1}{b-a}(a\le x\le b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^3}{12}$	$0<p<1$ $q=1-p$ $r\in\mathbb{R}$
指数分布 $E(\lambda)$	$p(x)=\lambda e^{-\lambda x}(x>0)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\lambda>0$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2	$\sigma>0$
Γ分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$	$p(x)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}(x>0)$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$\alpha>0$ $\beta>0$

第 25 章 大数定理和中心极限定理

25.1 依概率收敛

定义 25.1.1 (依概率收敛)

设随机变量 X 与随机变量序列 $\{X_n\}(n=1,2,3,\cdots)$, 如果对于任意 $\varepsilon>0$, 我们有:

$$\lim_{n\Rightarrow\infty} P\{|X_n-X|\geq\varepsilon\}=0\text{或者}\lim_{n\Rightarrow\infty} P\{|X_n-X|<\varepsilon\}=1$$

我们称随机变量序列 $\{X_n\}$ **依概率收敛于随机变量** X, 记作:

$$\lim_{n\Rightarrow\infty} X_n=X(P)\text{或者}X_n\xrightarrow{P}X(n\Rightarrow\infty)$$

25.2 大数定理

定理 25.2.1 (切比雪夫大数定理)

假设 $\{X_n\}(n=1,2,\cdots)$ 是相互独立的随机变量序列, 如果方差 $D(X_i)$ 存在且一致有上界, 即存在常数 $C,\forall i\geq 1, s.t. D(X_i)\leq C,\{X_n\}$ 服从大数定理.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$$

定理 25.2.2 (伯努利大数定理)

假设 μ_n 是 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数, 在每次试验中事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$, 则 $\frac{\mu_n}{n}\xrightarrow{P}p$.

$$\forall\varepsilon>0,\lim_{n\Rightarrow\infty} P\{|\frac{\mu_n}{n}-p|<\varepsilon\}=1$$

定理 25.2.3 (辛钦大数定理) 假设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 如果 $E(X_i) = \mu, (i = 1, 2, \cdots)$ 存在, 则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \mu$.

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \Rightarrow \infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu| < \varepsilon\} = 1$$

25.3 中心极限定理

定理 25.3.1 (列维-林德伯格定理) 假设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 如果 $E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2 > 0, (i = 1, 2, \cdots)$ 存在,$\forall x \in \mathbb{R}$, 我们有:

$$\lim_{n \Rightarrow \infty} P\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

注

- 定理满足X_n独立同分布、方差和期望存在
- $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$
- $P\{a < \sum_{i=1}^{n} X_i < b\} \approx \Phi(\frac{b - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}) - \Phi(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n}\sigma})$

定理 25.3.2 (棣莫弗-拉普拉斯定理) 假设随机变量 $Y_n \sim B(n, p), (0 < p < 1, n \geq 1)$,$\forall x \in \mathbb{R}$, 我们有:

$$\lim_{n \Rightarrow \infty} P\{\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

这一部分的内容我推荐一个 B 站视频观看.

- 中心极限定理
- 正态分布

第 26 章 数理统计

26.1 总体和样本

定义 26.1.1 (统计概念和统计量)

1. **总体**: 研究对象的全体称为总体

2. **样本**: n 个相互独立且与总体具有相同概率分布的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 所组成的整体 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 称为来自总体 X, 容量为 n 的一个**简单随机样本**, 一次抽样结果的具体的 n 个数值 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的一个观测值.

3. **样本分布**

假设总体的分布函数 $F(x)$, 概率密度函数 $f(x)$, 样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数和概率密度:

$$\text{离散型: } P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i = x_i\}$$

$$\text{连续型分布函数: } F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i)$$

$$\text{连续型概率密度: } f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

26.2 统计量及其分布

定义 26.2.1

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本,$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 n 元函数, 如果函数 g 中不含任何参数, 我们称 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一个**统计量**.

1. **常用统计量**

(1). 数字特征

- **样本均值 (一阶原点矩)** $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
- **样本方差 (二阶中心矩)** $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_1 - \overline{X})^2$
- **样本** k阶原点矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, (k = 1, 2, \cdots)$
- **样本** k阶中心矩 $B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k, (k = 2, \cdots)$

(2). 顺序统计量

将样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的 n 个观测值从小到大顺序排序得到:

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)} \leq$$

随机变量 $X_{(k)}$ 称作第 k 顺序统计量,$X_{(1)}$ 为最小顺序统计量,$X_{(n)}$ 为最大顺序统计量.

注

假设总体期望 $E(X) = \mu$, 总体方差为 $D(X) = \sigma^2$,$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体的一个样本,$\overline{X}, S^2$ 分别为样本的均值和方差, 我们有:

1.$E(X_i) = \mu$

2.$D(X_i) = \sigma^2$

3.$E(\overline{X}) = E(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}) = E(X) = \mu$

4.$E(S^2) = D(X) = \sigma^2$

5.$D(\overline{X}) = \frac{1}{n}D(X) = \frac{\sigma^2}{n}$

定义 26.2.2 (三大分布)

1. χ^2 分布

随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 且都服从标准正态分布, 则随机变量 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 服从自由度为 n 的卡方分布 $\chi^2(n)$, 记作 $X \sim \chi^2(n)$.

α 分位点: 对于给定的$\alpha(0 < \alpha < 1)$, 满足

$$P\{\chi^2 > \chi_\alpha^2(n)\} = \int_{\chi_\alpha^2(n)}^{+\infty} f(x)dx$$

的 $\chi_\alpha^2(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 分布上的 α 分位点.

- $X_1 \sim \chi^2(n_1)$, $X_2 \sim \chi^2(n_2)$,X_1, X_2 相互独立, 我们有: $X_1 + X_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$
- $X \sim \chi^2(n) \Rightarrow E(X) = n, D(X) = 2n$

2. t 分布
设随机变量 $X \sim N(0,1)$,$Y \sim \chi^2(n)$,X,Y 相互独立, 记随机变量 $t = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布, 记作 $t \sim t(n)$

- $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$
- t 分布概率密度关于 x 轴对称

3. F 分布
设随机变量 $X \sim \chi^2(n_1)$,$Y \sim \chi^2(n_2)$, 且 X,Y 相互独立, 则 $F = \dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从自由度为 (n_1,n_2) 的 F 分布, 记作 $F \sim F(n_1,n_2)$.

- $F \sim F(n_1,n_2) \Rightarrow \dfrac{1}{F} \sim F(n_2,n_1)$
- $F_{1-\alpha}(n_1,n_2) = \dfrac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$

♣

注

正态总体条件下常见结论:
设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本,$\overline{X}$, S^2 分别是样本的均值和方差.

1. $\overline{X} \sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow \dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$
2. $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$
3. $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum\limits_{i=1}^{n}(\dfrac{X_i-\overline{X}}{\sigma})^2 \sim \chi^2(n)$
4. $\overline{X}$ 和 S^2 相互独立,$\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S} \sim t(n-1)$
5. σ未知时: $\dfrac{n(\overline{X}-\mu)^2}{S^2} \sim F(1,n-1)$

26.3 参数的点估计

定义 26.3.1 (矩估计和最大似然估计)

1. 概念
设总体 X 的分布函数 $F(x,\theta)$, 其中 θ 是一个未知参数,$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体的一个样本, 由样本构造一个适当的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 作为参数 θ 的估计, 称统计量为参数的估计量,$\theta = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$.
2. 矩估计法

设总体分布中有 k 个未知的参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$, 来自总体 X 的一组样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$, 如果 X 的原点矩 $E(X^l)(l=1,2,\cdots,k)$ 存在, 我们令样本的原点矩 = 总体原点矩:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^l=E(X^l)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}x^l f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)dx\\ \sum_{i=1}^{n}x_i^l P\{X=x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\}\end{cases}$$

3. 最大似然估计法对未知参数 θ 进行估计, 在该参数可能的取值范围 I 中选取, 使用使样本观测值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 最大的参数 $\hat{\theta}$ 作为参数 θ 的估计值.

(1). 总体 X 是离散型分布, 分布函数的参数为 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$, 样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 出现取值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的概率为:

$$P\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$$

我们得到似然函数:

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)$$

$$\exists\hat{\theta}\in I,\ s.t.L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\hat{\theta})=max_{\theta\in I}L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)$$

(2). 总体 X 是连续型分布, 概率密度为 $f(x;\theta),\theta\in I$, 样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 出现取值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的概率为:

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)$$

$$\exists\hat{\theta}\in I,\ s.t.L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\hat{\theta})=max_{\theta\in I}L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)$$

我们得到了参数的最大似然估计 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

估计量的评判标准

1. 无偏性
2. 有效性 (最小方差性)
3. 一致性 (相和性)

26.4 参数的区间估计

定义 26.4.1 (概念)

设 θ 是总体 X 的一个未知参数, 对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$, 如果由样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 确定的两个统计量 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 满足:

$$P\{\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\theta<\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}=1-\alpha$$

则称随机区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 是 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的**置信区间**,$\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 分别称为**置信上限**和**置信下限**,$1-\alpha$ 为置信水平,α 为显著性水平.

表 26.1: 正态总体均值的置信区间

待估参数	其他参数	枢轴量分布	置信区间
μ	σ^2已知	$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}, \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$
μ	σ^2未知	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$

26.5 假设检验

定义 26.5.1 (统计性检验)

1. H_0: 虚无假设, H_1: 备择假设
2. 双边检验和单侧检验
3. 正态总体下的六大检查和拒绝域
   - σ^2已知, μ未知, H_0: $\mu=\mu_0$, H_1: $\mu\neq\mu_0$
   $$\text{拒绝域}: (-\infty, \mu_0-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}})\cup(\mu_0+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}, +\infty)$$
   - σ^2未知, μ未知, H_0: $\mu=\mu_0$, H_1: $\mu\neq\mu_0$
   $$\text{拒绝域}: (-\infty, \mu_0-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))\cup(\mu_0+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), +\infty)$$
   - σ^2已知, μ未知, H_0: $\mu\leq\mu_0$, H_1: $\mu>\mu_0$
   $$\text{拒绝域}: (\mu_0+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}, +\infty)$$
   - σ^2已知, μ未知, H_0: $\mu\geq\mu_0$, H_1: $\mu<\mu_0$
   $$\text{拒绝域}: (-\infty, \mu_0-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}})$$
   - σ^2未知, μ未知, H_0: $\mu\leq\mu_0$, H_1: $\mu>\mu_0$
   $$\text{拒绝域}: (\mu_0+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), +\infty)$$
   - σ^2未知, μ未知, H_0: $\mu\geq\mu_0$, H_1: $\mu<\mu_0$
   $$\text{拒绝域}: (-\infty, \mu_0-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$$

第五部分

每日一题 I

第 5 部分目录

第 27 章 January

27.1 Week I

January 1

例题 27.1.

已知 $f(x+1)$ 的定义域为 $[0,a]$,$(a>0)$, 求 $f(x)$ 定义域

解

$f(x+1)$ 的定义域为 $[0,a]$, 则 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,a-1]$

例题 27.2.

已知 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 并求出定义域

解

$f[\varphi(x)]=1-x \Rightarrow e^{\varphi^2(x)}=1-x$, 因此: $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}, x\geq 1$

例题 27.3.

设

$$g(x)=\begin{cases}2-x, x\leq 0\\ x+2, x>0\end{cases}$$

,

$$f(x)=\begin{cases}x^2, x<0\\ -x, x\geq 0\end{cases}$$

求 $g[f(x)]$

解

$$g[f(x)]=\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ x+2, & x\geq 0\end{cases}$$

例题 27.4.

设函数

$$f(x)=\begin{cases}1-2x^2, x<-1\\ x^3, -1\leq x\leq 2\\ 12x-16, x>2\end{cases}$$

求 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式

解

$$g(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, & x\in(-\infty,-1)\\ \sqrt[3]{x}, & x\in[-1,8]\\ \dfrac{x+16}{12}, & x\in(8,+\infty)\end{cases}$$

例题 27.5.

证明: 定义在 $[-a,a]$ 上的任意一个函数 $f(x)$ 都可以表示为一个奇函数和一个偶函数之和

解

令 $g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}\quad h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

$$\begin{cases}g(-x)=\dfrac{f(-x)+f(x)}{2}=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}=g(x)\\ h(-x)=\dfrac{f(-x)-f(x)}{2}=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}=-h(x)\\ f(x)=g(x)+h(x)\end{cases}$$

其中 $g(x)$ 是偶函数, $h(x)$ 是奇函数

例题 27.6.

判断函数 $f(x)=x\tan x\cdot e^{\sin x}$ 的奇偶性、单调性、周期性和有界性

解

$f(x)$ 定义域为 $(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi), k\in\mathbb{Z}$, 关于原点对称

(1). 奇偶性: $f(-x)=x\tan x\cdot e^{-\sin x}\neq -f(x),\quad f(-x)\neq f(x)$

$f(x)$ 是非奇非偶函数

(2). 单调性: $f'(x)=\tan x{\cdot}e^{\sin x}{+}x\sec^2 x{\cdot}e^{\sin x}{+}x\tan x\cos x{\cdot}e^{\sin x}=e^{\sin x}\left[\tan x+x\sin x+x\sec^2 x\right]$

$f(x)$ 不是单调函数

(3). 有界性: $x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 时, $f(x)>\dfrac{x\tan x}{e}$, 函数 $g(x)=\frac{x\tan x}{e}$ 为无界函数

$f(x)$ 是无界函数

(4). 周期性: $f(x+2\pi)=(x+2\pi)\tan(x+2\pi)\cdot e^{\sin(x+2\pi)}=(x+2\pi)\tan x\cdot e^{\sin x}\neq f(x)$

$f(x)$ 不是周期函数

例题 27.7.

函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界

- A. $(-1,0)$
- B. $(0,1)$
- C. $(1,2)$
- D. $(2,3)$

解

(1). $x\to 0^-, f(x)\to-\dfrac{\sin 2}{4}; x\to 0^+, f(x)\to\dfrac{\sin 2}{4}$

(2). $x\to 1^-, f(x)\to+\infty; x\to 1^+, f(x)\to-\infty$

(3). $x\to 2^-, f(x)\to-\infty; x\to 2^+, f(x)\to\infty$

$f(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 有界

January 2

例题 27.8.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]$$

解

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{(n-1)n}{2}}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n-1)}{2}\right]}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}+\sqrt{\frac{(n-1)n}{2}}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{2}n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

例题 27.9.

$$
\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}
$$

解

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2(4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})}+x(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(1+\frac{\sin x}{x^2})}} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}} \\
&=1
\end{aligned}
$$

January 3

例题 27.10.

$$
\lim_{x\to0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)
$$

解

$$
\begin{aligned}
I^{+} &= \lim_{x\to 0^{+}}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)\\
&= \lim_{x\to 0^{+}}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\sin x}{x}\\
&=0+1=1\\
I^{-} &= \lim_{x\to 0^{-}}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)\\
&= \lim_{x\to 0^{-}}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\lim_{x\to 0^{-}}\frac{\sin x}{x}\\
&=2-1=1
\end{aligned}
$$

综上所述，原极限 $I=1$

例题 27.11.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$$

解

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-(x^2-x)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\\
&=1
\end{aligned}
$$

January 4

例题 27.12.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$$

解

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}\cdot\frac{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1+\tan x-1-\sin x}{x(1-\cos x)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x(1-\cos x)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{\frac{1}{2}x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

例题 27.13.

已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos 2x}{ax^b}=1$, 求 a, b

解

泰勒展开式:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos 2x}{ax^b} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1+x^2+\frac{x^4}{2}-1+\frac{4x^2}{2!}-\frac{8x^4}{4!}}{ax^b} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{3x^2-\frac{x^4}{6}}{ax^b} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{3}{a}=1
\end{aligned}
$$

因此: $a=3, b=2$

January 5

例题 27.14.

已知 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$, 下列结论正确的个数为

- A. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$

- B. $\lim_{x\to x_0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi}}=e$
- C. 当 $x\to x_0$ 时,$\sin\varphi(x)\sim\varphi(x)$
- D. 若 $\lim_{u\to 0}f(u)=A$, 则 $\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=A$

解

正确的个数: 0, 令 $\varphi(x)=0, x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$, A,B,C,D 四个选项均不正确

例题 27.15.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\arctan x}{\sin x-\tan x}$$

解

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\arctan x}{\sin x-\tan x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{-\frac{1}{2}x^3}\\&=-1\end{aligned}$$

January 6

例题 27.16.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{x}{\ln(1+x)}}{x}$$

解

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{x}{\ln(1+x)}}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

例题 27.17.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}$$

解

$$\begin{aligned}I=&\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}\\=&\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}}\\=&\lim_{x\to+\infty}e^{x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})}\\=&\lim_{x\to+\infty}e^{x-x^2(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2})}\\=&\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{2}}\\=&e^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

January 7

例题 27.18.

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)}{x^4}$$

解

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)}{x^4}(\text{Lagrange's Mean Value Theorem})\\&=\lim_{x\to0}\frac{-\sin\xi(x-\sin x)}{x^4},\xi\in(\sin x\sim x)\\&=\lim_{x\to0}\frac{-\sin\xi}{6x}\\&=-\frac{1}{6}\end{aligned}$$

夹逼定理:

$$\sin\xi\in(\sin x\sim x)\to\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}=1\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{\sin\xi}{x}=1$$

例题 27.19.

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left[\arctan(x+1)-\arctan x\right]$$

解

$$
\begin{aligned}
I=&\lim_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+1)-\arctan x](\text{Lagrange's Mean Value Theorem})\\
=&\lim_{x\to+\infty}x^2\frac{1}{1+\xi^2},\xi\in(x,x+1)\\
=&1
\end{aligned}
$$

夹逼定理:

$$\xi\in(x,x+1)\to\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+(x^2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+(x+1)^2}=1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+\xi^2}=1$$

27.2 Week II

January 8

例题 27.20.

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left[\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right]$$

解

归结原理:

$$
\begin{aligned}
I=&\lim_{x\to\infty}x^2[\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1}](\text{Lagrange's Mean Value Theorem})\\
=&\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2}{x(x+1)}\frac{1}{1+\xi^2},\xi\in(\frac{a}{x},\frac{a}{x+1})\\
=&a
\end{aligned}
$$

夹逼定理:

$$\xi\in(\frac{a}{x},\frac{a}{x+1})\to\lim_{x\to\infty}\frac{a}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{x+1}=0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\xi=0$$

例题 27.21.

$$\lim_{x\to+\infty}[\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}]$$

解

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to+\infty}[\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}]\text{(Lagrange's Mean Value Theorem)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\cos\xi(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}), \xi\in(\sqrt{x},\sqrt{x+1})\\
&= \lim_{x\to+\infty}\cos\xi(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}})\\
&=0
\end{aligned}
$$

January 9

例题 27.22.

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{\ln(1+x^2)}-\frac{1}{\ln(1+\tan^2 x)}\right]$$

解

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to0}\left[\frac{1}{\ln(1+x^2)}-\frac{1}{\ln(1+\tan^2 x)}\right]\\
&= \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\tan^2 x)-\ln(1+x^2)}{\ln(1+x^2)\ln(1+\tan^2 x)}\text{(Lagrange's Mean Value Theorem)}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{(\tan x+x)(\tan x-x)}{x^4\xi}, \xi\in(1+x^2,1+\tan^2 x)\\
&= \lim_{x\to0}\frac{2x\cdot\frac{x^3}{3}}{x^4}\\
&=\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

夹逼定理:

$$\xi\in(1+x^2,1+\tan^2 x)\longrightarrow\lim_{x\to0}(1+x^2)=\lim_{x\to0}(1+\tan^2 x)=1\Rightarrow\lim_{x\to0}\xi=1$$

例题 27.23.

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{\ln(1+x^2)}-\frac{1}{\sin^2 x}\right]$$

解

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to0}\left[\frac{1}{\ln(1+x^2)}-\frac{1}{\sin^2 x}\right]\\
&= \lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x-\ln(1+x^2)}{\ln(1+x^2)\sin^2 x}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x-x^2+x^2-\ln(1+x^2)}{x^4}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}+\lim_{x\to0}\frac{x^2-\ln(1+x^2)}{x^4}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{(\sin x+x)(\sin x-x)}{x^4}+\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^4}{x^4}\\
&=\frac{1}{2}+\lim_{x\to0}\frac{2x\cdot(-\frac{1}{6}x^3)}{x^4}\\
&=\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

夹逼定理:

$$
\xi\in(1+\sin^2 x, 1+x^2)\to\lim_{x\to0}(1+\sin^2 x)=\lim_{x\to0}(1+x^2)=1\Rightarrow\lim_{x\to0}\xi=1
$$

January 10

例题 27.24.

$$
\lim_{x\to0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}
$$

解

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}\\
&= \lim_{x\to0} e^{\frac{2\ln(x+2^x)}{x}}\\
&=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2\ln(x+2^x)}{x}}\\
&=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2(x+2^x-1)}{x}}\\
&=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\ln2}{x}}\\
&=e^{2+2\ln2}\\
&=4e^2
\end{aligned}
$$

例题 27.25.

若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e$, 求 k

解

$$
\begin{aligned}
I&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}\\
&=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{\sin kx}\ln\frac{1-\tan x}{1+\tan x}}\\
&=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin kx}\ln(1-\frac{2\tan x}{1+\tan x})}\\
&=e^{\lim\limits_{x\to 0}-\frac{2\tan x}{(1+\tan x)sinkx}}\\
&=e^{\lim\limits_{x\to 0}-\frac{2x}{kx}}\\
&=e^{-\frac{2}{k}}=e
\end{aligned}
$$

综上所述, $k=-2$

January 11

例题 27.26.

若 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=1$, 求 a,b

解

$$
\begin{aligned}
I&=\lim_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}\\
&=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln(e^x+ax^2+bx)}\\
&=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+ax^2+bx-1}{x^2}}\qquad\text{(Taylor's Formula)}\\
&=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(a+\frac{1}{2})x^2+(b+1)x+o(x^2)}{x^2}}\\
&=1
\end{aligned}
$$

综上所述, $a=-\dfrac{1}{2}, b=-1$

例题 27.27.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

解

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} \\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\arctan x}{x}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\arctan x}{x}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\ln(1+\frac{\arctan x-x}{x})} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\frac{\arctan x-x}{x}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}-\frac{2x^3}{3x^3}} \\
&= e^{-\frac{2}{3}}
\end{aligned}
$$

January 12

例题 27.28.

$$
\lim_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}
$$

解

归结原理:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to\infty}\left(x\tan\frac{1}{x}\right)^{x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} e^{x^2\ln(x\tan\frac{1}{x})} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to\infty}x^2\ln(x\tan\frac{1}{x})} \\
&= e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(\frac{\tan t}{t})}{t^2}} \\
&= e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\tan t-t}{t^3}} \\
&= e^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}
$$

例题 27.29.

$$
\lim_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)
$$

解

归结原理:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to\infty} e^{x\ln(\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}))} \\
&= \lim_{x\to\infty} e^{x\ln(\frac{1+\tan(\frac{1}{x})}{1-\tan(\frac{1}{x})})} \\
&= \lim_{t\to 0} e^{\frac{2\tan t}{t(1-\tan t)}} \\
&= e^2
\end{aligned}
$$

January 13

例题 27.30.

$$
\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}
$$

解

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x(e^x-1)}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}} \\
&= e^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

例题 27.31.

$$
\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}
$$

解

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}} \\
&= e^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

January 14

例题 27.32.

$$
\lim_{x\to 0}(\cos 2x + 2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}
$$

解

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0} e^{\frac{2x\sin x+\cos 2x-1}{x^4}} \quad \text{(Taylor's Formula)}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x(x-\frac{x^3}{6})-2x^2+\frac{2}{3}x^4}{x^4}}\\
&= e^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}
$$

例题 27.33.

$$
\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}
$$

解

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{\frac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos x(1-\tan x)}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{\cos x}}\\
&= e^{-\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

27.3 Week III

January 15

例题 27.34.

$$
\lim_{x\to 0}\left(\frac{(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})}{n}\right)^{\frac{1}{x}}
$$

解

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}}{x}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1+e^{2x}-1+\cdots+e^{nx}-1}{nx}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{n(n+1)x}{2}}{nx}}\\
&= e^{\frac{n+1}{2}}
\end{aligned}
$$

例题 27.35.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^n}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\right)^x$$

解

$$\begin{aligned}
I=&\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{-x}\cdots\left(1+\frac{n}{x}\right)^{-x}\\
=&e^{\lim\limits_{x\to+\infty}-x\ln(1+\frac{1}{x})}e^{\lim\limits_{x\to+\infty}-x\ln(1+\frac{2}{x})}\cdots e^{\lim\limits_{x\to+\infty}-x\ln(1+\frac{n}{x})}\\
=&e^{-1}e^{-2}\cdots e^{-n}\\
=&e^{-\frac{n(n+1)}{2}}
\end{aligned}$$

January 16

例题 27.36.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$$

解

$$\begin{aligned}
I=&\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x\\
=&e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})}\\
=&e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(\sin t+\cos t)}{t}}\\
=&e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t+\cos t-1}{t}}\\
=&e
\end{aligned}$$

例题 27.37.

$$\lim_{n\to\infty}n\left[e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}-1\right]$$

解

归结原理:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to\infty} x\left[e\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}-1\right] \\
&= \lim_{x\to\infty} x(e^{1-x\ln(1+\frac{1}{x})}-1) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{e^{1-\frac{\ln(1+t)}{t}}-1}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t-\ln(1+t)}{t^2} \\
&= e^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

January 17

例题 27.38.

设 $a>0, a\neq 1$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})=\ln a$, 求 p

解

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to+\infty} x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})(\text{Lagrange's Mean Value Theorem}) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{x(x+1)}a^{\xi}\ln a, \xi\in(\frac{1}{x+1},\frac{1}{x}) \\
&= \ln a \lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{x(x+1)} \\
&= \ln a
\end{aligned}
$$

夹逼准则:

$$
\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\xi=0
$$

综上所述, 我们有: $p=2$

例题 27.39.

$$
\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{\cos x})(1-\sqrt[3]{\cos x})\cdots(1-\sqrt[n]{\cos x})}{(1-\cos x)^{n-1}}
$$

解

等价无穷小:

$$
x\to 0, 1-\sqrt[n]{\cos x}\sim -(\sqrt[n]{1+\cos x-1}-1)\sim \frac{1-\cos x}{n}
$$

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{\cos x})(1-\sqrt[3]{\cos x})\cdots(1-\sqrt[n]{\cos x})}{(1-\cos x)^{n-1}} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^{n-1}}{n!(1-\cos x)^{n-1}} \\
&=\frac{1}{n!}
\end{aligned}
$$

January 18

例题 27.40.

$$
\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}
$$

解

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\frac{\sin^2 x}{e^x}+1)}{\ln(\frac{x^2}{e^{2x}}+1)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin^2 x}{x^2} \\
&=1
\end{aligned}
$$

例题 27.41.

已知 $\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^k}=c$, 其中 k,c 为常数, 且 $c\neq 0$, 求 k,c

解

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^k} \\
&= \lim_{x\to 0}-\frac{x^3}{3x^k} \\
&=c
\end{aligned}
$$

综上所述: $k=3, c=-\dfrac{1}{3}$

January 19

例题 27.42.

若 $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x^4}{x^4}-\frac{f(x)}{x^3}\right)=2, x\to0$ 时,$f(x)$ 是 x 的:

- A. 等价无穷小
- B. 同阶但非等价无穷小
- C. 高阶无穷小
- D. 低阶无穷小

解

令

$$\begin{cases} I=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x^4}{x^4}-\frac{f(x)}{x^3}\right)=2 \\ J=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^4}{x^4}=1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}=-1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^4}\cdot\lim_{x\to0}x^3=0$$

综上所述, $f(x)$ 是 x 的高阶无穷小.

例题 27.43.

当 $x\to0$ 时,$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 时等价无穷小, 求 k

解

等价无穷小定义:

$$\begin{aligned} I&=\lim_{x\to0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\\ &=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{kx^2}\\ &=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin x}-1}{kx^2}-\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{kx^2}\\ &=\lim_{x\to0}\frac{x\arcsin x}{2kx^2}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2kx^2}\\ &=\frac{3}{4k}\\ &=1 \end{aligned}$$

综上所述, 我们有: $k=\frac{3}{4}$

January 20

例题 27.44.

当 $x \to 0^+$ 时, 与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量为:

- A. $1 - e^{\sqrt{x}}$
- B. $\ln \dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$
- C. $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$
- D. $1 - \cos\sqrt{x}$

解

$$\begin{cases} 1 - e^{\sqrt{x}} \sim -\sqrt{x} \\ 1 - \cos\sqrt{x} \sim \dfrac{1}{2}x \\ \sqrt{1+\sqrt{x}} - 1 \sim \dfrac{1}{2}\sqrt{x} \\ \ln \dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}} \sim \sqrt{x} \end{cases}$$

因此: $\ln \dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}} \sim \sqrt{x}$

例题 27.45.

设 $\alpha_1 = x(\cos\sqrt{x} - 1), \alpha_2 = \sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x}), \alpha_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1$, 当 $x \to 0^+$ 时, 以上 3 个无穷小量从低阶到高阶的排序为:

- A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
- B. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$
- C. $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3$
- D. $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$

解

$$\begin{cases} \alpha_1 \sim -\dfrac{1}{2}x^2 \\ \alpha_2 \sim x^{\frac{5}{6}} \\ \alpha_3 \sim \dfrac{1}{3}x \end{cases}$$

因此: $\alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_1$

January 21

例题 27.46.

函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是:

- A. 0
- B. 1
- C. $-\dfrac{\pi}{2}$
- D. $\dfrac{\pi}{2}$

解

$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上无定义的点有 $x=0,x=1,x=\pm\dfrac{\pi}{2}$

- $x\to0^+,f(x)\to1;x\to0^-,f(x)\to-1$
- $x\to1^+,f(x)\to-\infty;x\to1^-,f(x)\to+\infty$
- $x\to\dfrac{\pi}{2}^+,f(x)\to-\infty;x\to\dfrac{\pi}{2}^-,f(x)\to+\infty$
- $x\to-\dfrac{\pi}{2}^+,f(x)\to-\infty;x\to-\dfrac{\pi}{2}^-,f(x)\to+\infty$

综上所述, $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点, 是第一类间断点

例题 27.47.

设函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$, 则 $f(x)$ 有

- A. 1 个可去间断点,1 个跳跃间断点
- B. 1 个可去间断点,1 个无穷间断点
- C. 2 个跳跃间断点
- D. 2 个无穷间断点

解

$f(x)$ 在定义域上无定义的点有 $x=0,x=1$

- $x\to0^+,f(x)\to0;x\to0^-,f(x)\to0$
- $x\to1^+,f(x)\to\sin1;x\to1^-,f(x)\to-\sin1$

综上所述, $f(x)$ 有 1 个可去间断点, 1 个跳跃间断点

27.4 Week IV

January 22

例题 27.48.

函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为:

- A. 0

- B. 1
- C. 2
- D. 3

解

$f(x)$ 在定义域上无定义的点有 $x=0, x=\pm 1$

- $x\to 0^+, f(x)\to 1; x\to 0^-, f(x)\to -1$
- $x\to 1^+, f(x)\to \dfrac{\sqrt{2}}{2}; x\to 1^-, f(x)\to \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $x\to -1^+, f(x)\to +\infty; x\to -1^-, f(x)\to -\infty$

综上所述, $f(x)$ 有 1 个可去间断点, 1 个跳跃间断点, 1 个无穷间断点

例题 27.49.

函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为:

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

解

$f(x)$ 在定义域上无定义的点有 $x=0, x=\pm 1$

- $x\to 0^+, f(x)\to 1; x\to 0^-, f(x)\to 1$
- $x\to 1^+, f(x)\to \dfrac{1}{2}; x\to 1^-, f(x)\to \dfrac{1}{2}$
- $x\to -1^+, f(x)\to +\infty; x\to -1^-, f(x)\to -\infty$

综上所述, $f(x)$ 有 2 个可去间断点, 1 个无穷间断点

January 23

例题 27.50.

设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$, 讨论函数的间断点, 其结论为:

- A. 不存在间断点
- B. 存在间断点 $x=1$
- C. 存在间断点 $x=0$
- D. 存在间断点 $x=-1$

解

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,-1)\\ 0, & x=-1\\ x+1, & x\in(-1,1)\\ 1, & x=1\\ 0, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$$

综上所述, $f(x)$ 存在唯一的跳跃间断点 $x=1$

例题 27.51.

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$, 则:

- A. $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$ 存在
- B. $f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$ 存在
- C. $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在
- D. $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在

解

$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续:

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^-}f(x)$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h^2)}{h^2}=1\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{h^2\to0}f(h^2)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}\cdot\lim\limits_{h\to0}h^2=0\\ f'_+(0)=\lim\limits_{h^2\to0}\dfrac{f(h^2)-f(0)}{h^2}=1\end{cases}$$

综上所述，$f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在

January 24

例题 27.52.

设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内有定义, 若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时, 恒有 $|f(x)|\le x^2$, 则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的:

- A. 间断点
- B. 连续而不可导的点
- C. 可导的点, 且 $f'(0)=0$
- D. 可导的点, 且 $f'(0)\ne0$

解

(1). 连续性: $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

- $|f(x)| \le x^2, x \in (-\delta, \delta) \Rightarrow |f(0)| \le 0 \Rightarrow f(0) = 0$
- 夹逼准则:$\lim\limits_{x\to 0} 0 = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} |f(x)| = 0$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \xi > 0, |f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

(2). 可导性: $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0) = 0$

- $|f(x)| \le x^2, x \in (-\delta, \delta) \Rightarrow 0 < \left|\dfrac{f(x)}{x}\right| < |x|$
- 夹逼准则:$\lim\limits_{x\to 0} 0 = \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \left|\dfrac{f(x)}{x}\right| = 0$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \xi > 0, \left|\dfrac{f(x)}{x}\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$
- $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 0$

例题 27.53.

设函数 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos \dfrac{1}{x^\beta}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$, 若 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则:

- A. $\alpha - \beta > 1$
- B. $0 < \alpha - \beta \le 1$
- C. $\alpha - \beta > 2$
- D. $0 < \alpha - \beta \le 2$

解

$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, $\alpha > 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha-1} \cos \dfrac{1}{x^\beta}, & x = 0 \\ \alpha x^{\alpha-1} \cos \dfrac{1}{x^\beta} + \beta x^{\alpha-\beta-1} \sin \dfrac{1}{x^\beta}, & x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 1 > 0 \\ \alpha - \beta - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha - \beta > 1$$

January 25

例题 27.54.

曲线 $x + y + e^{2xy} = 0$ 在点 $(0, -1)$ 处的切线方程

解

设 $\begin{cases} F(x,y) = x + y + e^{2xy} = 0 \\ y = y(x) \end{cases}$:

$$F'_x + F'_y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 1 + 2ye^{2xy} + (1 + 2xe^{2xy})\frac{dy}{dx} = 0$$

在 $(0,-1)$ 邻域附近, $F'_y \neq 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}|_{(0,-1)} = -\frac{1+2ye^{2xy}}{1+2xe^{2xy}} = 1$

综上所述, $(0,-1)$ 处的切线方程为: $x - y - 1 = 0$

例题 27.55.

(1). 设函数 $u(x), v(x)$ 可导, 利用导数定义证明:$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

(2). 设函数 $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)$ 可导,$f(x) = u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$, 写出 $f(x)$ 的求导公式

解

(1). 导数定义: $f(x) = u(x)v(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x+\Delta x)v(x) + u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x+\Delta x)v(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x)}{\Delta x} \\ &= v'(x) \lim_{\Delta x \to 0} u(x+\Delta x) + v(x)u'(x) \\ &= u(x)v'(x) + u'(x)v(x) \end{aligned}$$

(2). $f'(x) = \sum_{i=1}^{n} u'_i(x) \prod_{\substack{1 \le j \le n \\ i \neq j}} u_j$

January 26

例题 27.56.

设函数 $f(x) = \begin{cases} \ln\sqrt{x}, x \geq 1 \\ 2x - 1, x < 1 \end{cases}$,$y = f(f(x))$, 则 $\frac{dy}{dx}|_{x=e}$

解

方法一

$$f(f(x)) = \begin{cases} \ln \dfrac{\ln x}{2}, & x \in [e^2, +\infty) \\ \ln x - 1, & x \in [1, e^2) \\ 4x - 3, & x \in (-\infty, 1) \end{cases}$$

方法二

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=e} = f'(u)f'(x)\Big|_{\substack{x=e \\ u=\ln\sqrt{x}}} = 2 \cdot \frac{1}{2e} = \frac{1}{e}$$

综上所述, $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=e} = \dfrac{1}{e}$

例题 27.57.

设 $y = y(x)$ 是由方程 $xy + e^y = x + 1$ 确定的隐函数, 则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}$

解

令 $F(x, y) = xy + e^y - x - 1 = 0$:

$$F'_x + F'_y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y - 1 + (x + e^y)\frac{dy}{dx} = 0$$

令 $G(x, y) = y - 1 + (x + e^y)\dfrac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2}(x + e^y) + (1 + e^y\frac{dy}{dx})\frac{dy}{dx} = 0$$

令 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = a \\ \dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0} = b \end{cases}$:

$$\begin{cases} x = 0, y = 0 \\ a - 1 = 0 \\ a + b + (1 + a)a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$$

综上所述, $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0} = -3$

January 27

例题 27.58.

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t-\ln(1+t) \\ y=t^3+t^2 \end{cases}$ 所确定, 则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

解

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{(3t^2+2t)(1+t)}{t}=(3t+2)(1+t)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{(6t+5)(t+1)}{1+t}$$

例题 27.59.

设 $y=x^2 2^x$, 求 $y^{(n)}$

解

莱布尼茨求导公式:

$$(uv)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{n}u^{(i)}v^{(n-i)},\ u(x)=x^2, v(x)=2^x$$

$$\begin{aligned} y^{(n)} =&(x^2 2^x)^n \\ =&\binom{0}{n}(x^2)^{(0)}(2^x)^{(n)}+\binom{1}{n}(x^2)^{(1)}(2^x)^{(n-1)}+\binom{2}{n}(x^2)^{(2)}(2^x)^{(n-2)} \\ =&(\ln 2)^n x^2 2^x+2n(\ln 2)^{n-1}x2^x+n(n-1)(\ln 2)^{n-2}2^x \end{aligned}$$

January 28

例题 27.60.

设 $y=\dfrac{1}{x^2-1}$, 求 $y^{(n)}$

解

$$y=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right]$$

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{x-1} \\ g(x)=\dfrac{1}{x+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} \\ g^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} \end{cases}$$

$$y^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$$

例题 27.61.

已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数, 且 $f'(x)=[f(x)]^2$, 则当 n 为大于 2 的正整数时,$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是:

- A. $n![f(x)]^{n+1}$
- B. $n[f(x)]^{n+1}$
- C. $[f(x)^{2n}]$
- D. $n![f(x)]^{2n}$

解

$$\begin{cases} f'(x)=[f(x)]^2 \\ f''(x)=2f(x)f'(x)=2[f(x)]^3 \\ f^{(3)}(x)=6[f(x)]^2f'(x)=2\cdot 3[f(x)]^4 \\ \cdots\cdots \\ f^{(n)}(x)=n![f(x)]^{n+1} \end{cases}$$

综上所述, $f^{(n)}(x)=n![f(x)]^{n+1}$

January 29

例题 27.62.

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导, 且对任意 x_1,x_2, 当 $x_1>x_2$ 时, 都有 $f(x_1)>f(x_2)$, 则:

- A. 对任意 x,$f'(x)>0$
- B. 对任意 x,$f'(-x)\le 0$
- C. 函数 $f(-x)$ 单调增加
- D. 函数 $-f(-x)$ 单调增加

解

$f'(x)\ge 0$

- $[f(-x)]'=-f'(-x)\le 0$
- $[-f(-x)]'=f'(-x)\ge 0$

综上所述: $f(-x)$ 单调递减, $-f(-x)$ 单调递增

例题 27.63.

设 $f(x), g(x)$ 是恒大于零的可导函数, 且 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$, 当 $a < x < b$ 时, 有:

- A. $f(x)g(b) > f(b)g(x)$
- B. $f(x)g(a) > f(a)g(x)$
- C. $f(x)g(x) > f(b)g(b)$
- D. $f(x)g(x) > f(a)g(a)$

解

构造辅助函数: $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, x \in (a,b), F'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} < 0$

$F(x)$ 在 (a,b) 内单调递减, $F(a) > F(x) > F(b) \Rightarrow \begin{cases} f(a)g(x) > f(x)g(a) \\ f(x)g(b) > f(b)g(x) \end{cases}$

January 30

例题 27.64.

设 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = -1$, 其中 n 为大于 1 的整数, 则在点 $x = a$ 处:

- A. $f(x)$ 的导数存在, 且 $f'(a) \neq 0$
- B. $f(x)$ 取得极大值
- C. $f(x)$ 取得极小值
- D. $f(x)$ 是否取得极值与 n 的取值有关

解

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) - f(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} \lim\limits_{x \to a} (x-a)^n = 0 \\ f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} \lim\limits_{x \to a} (x-a)^{n-1} = 0 \end{cases}$$

(1). 当 n 为偶数时, $x \in (a-\delta, a), f(x) < f(a); x \in (a, a+\delta), f(x) < f(a), x = a$ 是极大值点

(2). 当 n 为奇数时, $x \in (a-\delta, a), f(x) > f(a); x \in (a, a+\delta), f(x) < f(a), x = a$ 不是极值点

综上所述, $f(x)$ 是否取极值点与 n 的取值有关

例题 27.65.

设 $f(x)$ 的导数在 $x = a$ 处连续, 又 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{x - a} = -1$, 则:

- A. $x = a$ 是 $f(x)$ 的极小值点
- B. $x = a$ 是 $f(x)$ 的极大值点

- C. $(a, f(a))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
- D. $x = a$ 不是 $f(x)$ 的极值点,$(a, f(a))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

解

$$\begin{cases} f'(a) = \lim\limits_{x\to a} f'(x) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{x-a} \lim\limits_{x\to a}(x-a) = 0 \\ x \in (a-\delta, a), f'(x) > 0 \\ x \in (a, a+\delta), f'(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow f''(a) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{x-a} = -1$$

综上所述, $x = a$ 是 $f(x)$ 的极大值点, $(a, f(a))$ 不是曲线 $f(x)$ 的拐点.

January 31

例题 27.66.

曲线 $y = (x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为:

解

$$\begin{cases} y' = x^{\frac{2}{3}} + \dfrac{2}{3}(x-5)x^{-\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{3}}(\dfrac{5}{3}x - \dfrac{10}{3}) \\ y'' = -\dfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}(\dfrac{5}{3}x - \dfrac{10}{3}) + \dfrac{5}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}(x+1) \end{cases}$$

令 $y''(x) = 0 \Rightarrow x = -1$, 因此拐点坐标 $(-1, -6)$

例题 27.67.

已知函数 $y = f(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$, 若 $f'(x_0) = 0(x_0 \neq 0)$, 则:

- A. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
- B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
- C. $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
- D. $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,$(x_0, f(x_0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

解

$$f''(x) = \frac{1-e^{-x}}{x} - 3[f'(x)]^2$$

当 $f'(x_0) = 0(x_0 \neq 0)$ 时, $f''(x_0) = \dfrac{1-e^{-x_0}}{x_0} > 0$

综上所述, $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 点 $(x_0, f(x_0))$ 不是 $f(x)$ 的拐点.

第 28 章 February

28.1 Week I

February 1

例题 28.1.

设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$ 且 $f'(0)=0$, 则:

- A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
- B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
- C. $(0, f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点
- D. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,$(0, f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

解

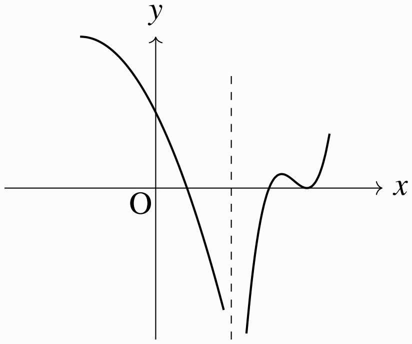
$$f''(x)=x-[f'(x)]^2, f'(0)=0 \Rightarrow f''(0)=0$$

$$f^{(3)}(x)=1-2f'(x)f''(x), f^{(3)}(0)=1\neq 0$$

综上所述: $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, 点 $(0, f(0))$ 是曲线 $f(x)$ 的拐点

例题 28.2.

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，其导函数图形如图所示，则:



- A. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点
- B. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点
- C. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点
- D. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点

解

$f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有 3 个零点 x_1,x_2,x_3

$$\begin{cases} x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty), f'(x)>0 \\ x\in(x_1,x_2), f'(x)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x_1\text{是}f(x)\text{极大值点} \\ x=x_2\text{是}f(x)\text{极小值点} \end{cases}$$

观察函数 $f'(x)$ 的单调性, $f'(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上单调减少;(a,b) 上单调增加, (b,c) 上单调减少; $(c,+\infty)$ 上单调增加; $f(x)$ 有拐点 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b))$ 以及 $(c,f(c))$

综上所述, $f(x)$ 有 2 个极值点和 3 个拐点

February 2

例题 28.3.

曲线 $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$ $(x>0)$ 的渐近线方程为:

解

(i). 铅垂渐近线: $x\to 0, f(x)\to 0$, 无铅垂渐近线

(ii). 水平渐近线和斜渐进线: $x\to+\infty, f(x)\to+\infty$, 无水平渐近线

$$\begin{cases} a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1 \\ b=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-ax=\dfrac{1}{e} \end{cases}$$

综上所述, $f(x)$ 有且仅有一条斜渐近线: $x-y+\dfrac{1}{e}=0$

例题 28.4.

曲线 $y = \dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为:

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

解

$$令\ f(x) = \frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x-1}, x \neq \pm 1, 我们有: \begin{cases} x \to -1, f(x) \to \dfrac{1}{2} \\ x \to 1^+, f(x) \to +\infty \\ x \to 1^-, f(x) \to -\infty \end{cases}$$

(i). 铅垂渐近线: $x = 1$

(ii). 水平渐近线和斜渐近线: $x \to \infty, f(x) \to 1$, 无斜渐近线

综上所述, $f(x)$ 有且仅有 2 条渐近线, 1 条铅垂渐近线, 1 条水平渐近线

February 3

例题 28.5.

设函数 $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$, 求

(1). 函数的增减区间及极值

(2). 函数图像的凹凸区间及拐点

(3). 渐近线

(4). 作出其图形

解

$$令\ f(x) = \frac{x^3+4}{x^2} = x + \frac{4}{x^2}, x \neq 0$$

$$(1).\ f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2), f'(x) < 0 \\ x \in (2, +\infty), f'(x) > 0 \end{cases}$$

$f(x)$ 单调递增区间 $(2, +\infty)$, 单调递减区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, 2)$, $f(x)$ 无极大值, 在 $x = 2$ 处取得极小值 $f(2) = 3$

(2). $f''(x) = \dfrac{24}{x^4} > 0$, $f(x)$ 在定义域上是凹函数, 无拐点

(3).

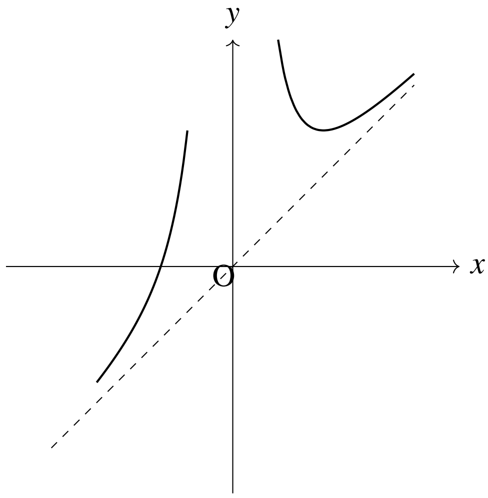
(i). 铅垂渐近线: $x \to 0, f(x) \to +\infty$, $f(x)$ 有铅垂渐近线 $x = 0$

(ii). 水平渐近线和斜渐近线: $x \to \infty, f(x) \to \infty$, 无水平渐近线

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1 \\ b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - ax = 0 \end{cases} \Rightarrow y = x$$

综上所述, $f(x)$ 有 2 条渐近线, 1 条铅垂渐近线 $x = 0$, 一条斜渐近线 $y = x$

(4). 如下图所示:



例题 28.6.

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内, 方程 $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$:

- A. 无实根
- B. 有且仅有一个实根
- C. 有且仅有两个实根
- D. 有无穷多个实根

解

令 $f(x) = |x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x$, $f(x)$ 是偶函数, 取 $x > 0$, $f(x) = x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{2}} - \cos x$

(i). 当 $x \geq 1$ 时, $f(x) > 0$

(ii). 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) = \dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} + \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \sin x > 0$

$f(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递增

$$\begin{cases} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 2 - \cos 1 \\ f(0) \cdot f(1) < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{在} (0, 1) \text{内有且仅有} 1 \text{个零点}$$

综上所述, $f(x)$ 有且仅有 2 个零点, $x_1 \in (-1, 0), x_2 \in (0, 1)$

February 4

例题 28.7.

函数 $f(x) = \ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为:

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

解

令 $g(x) = |(x-1)(x-2)(x-3)|$, $f(x)$ 和 $g(x)$ 同单调性, 令 $h(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$
罗尔定理: $\exists x_1 \in (1,2), x_2 \in (2,3)$, $s.t.\ f'(x_1) = f'(x_2) = 0$

$$\begin{cases} x \in (-\infty, x_{1]}) \cup (x_2, +\infty), f'(x) > 0 \\ x \in (x_1, x_2), f'(x) < 0 \\ f(1) = f(2) = f(3) = 0 \end{cases} \Rightarrow |h(x)| 在 x = 1,2,3 处均不可导$$

$f(x)$ 的驻点只有 2 个驻点, 分别是 $x = x_1$ 和 $x = x_2$

例题 28.8.

设 $f(x) = x^2(1-x)^2$, 则方程 $f''(x) = 0$ 在 $(0,1)$ 上:

- A. 无实根
- B. 有且仅有一个实根
- C. 有且仅有两个实根
- D. 有且仅有三个实根

解

$f'(x) = 2x(x-1)^2 + 2x^2(x-1) = 2x(x-1)(3x-1)$ 且 $f'(0) = f'(\frac{1}{3}) = f(1) = 0$

罗尔定理: $\exists x_1 \in (0, \frac{1}{3}), x_1 \in (\frac{1}{3})$, $s.t.\ f''(x_i) = 0(i = 1,2)$
$f''(x)$ 是一个二次多项式, 至多存在 2 个实数根, 综上, $f''(x)$ 有且仅有 2 个实数根.

February 5

例题 28.9.

设常数 $k > 0$, 设函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点个数为:

- A. 3
- B. 2
- C. 1
- D. 0

解

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = \frac{e-x}{ex}, x > 0$$

当 $x \in (0,e)$, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (e,+\infty)$, $f'(x) < 0$; $f(x)$ 在 $x = e$ 处取得最大值 $f(e) = k > 0$ 且

$$\begin{cases} x \to 0, f(x) \to -\infty \\ x \to +\infty, f(x) \to -\infty \end{cases}$$

零点定理: $\exists x_1 \in (0,e), x_2 \in (e,+\infty),\ s.t.\ f(x_i) = 0 (i = 1,2)$

综上所述, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有 2 个零点

例题 28.10.

证明: 当 $x > 0, \ln(1+\frac{1}{x}) > \frac{1}{1+x}$

解

构造辅助函数: $f(x) = \ln x, \ln(1+\frac{1}{x}) = \ln(1+x) - \ln x = f(x+1) - f(x)$

拉格朗日中值定理:

$$f(x+1) - f(x) = \frac{1}{\xi}, \xi \in (x,x+1) \Rightarrow \frac{1}{x+1} < f(x+1) - f(x) < \frac{1}{x}$$

综上所述: $\frac{1}{1+x} < \ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{1}{x}$

February 6

例题 28.11.

证明: $x > 0, \arctan x + \frac{1}{x} > \frac{\pi}{2}$

解

构造辅助函数:

$$f(x) = \arctan x + \frac{1}{x}, f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{(1+x^2)x^2} < 0, x > 0$$

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减, $f(x) > \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\arctan x + \frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$$

综上所述, $f(x) > \frac{\pi}{2}$

例题 28.12.

设 p,q 是大于 1 的常数, 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 证明: $\forall x>0, \frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}\geq x$

解

$\forall x>0, \frac{1}{p}x^p-x+1-\frac{1}{p}\geq 0$

构造辅助函数: $f(x)=\frac{1}{p}(x^p-1)-(x-1), x>0$

$$\begin{cases} f'(x)=x^{p-1}-1, p>1 \\ f''(x)=(p-1)x^{p-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,1), f'(x)<0 \\ x\in(1,+\infty), f'(x)>0 \end{cases}$$

$$f(x)\text{在}x=1\text{取最小值}f(x)_{\min}=f(1)=0$$

综上所述, $f(x)\geq 0 \Rightarrow \forall x>0, \frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}\geq x$

February 7

例题 28.13.

设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续, 在 $(0,3)$ 内可导, 且 $f(0)+f(1)+f(2)=3, f(3)=1$, 证明:

$$\exists\xi\in(0,3),\ s.t.\ f'(\xi)=0$$

解

不妨设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上最大值为 M, 最小值为 m, 介值定理:

$$\begin{cases} m\leq f(0)\leq M \\ m\leq f(1)\leq M \\ m\leq f(2)\leq M \end{cases}$$

$$m\leq\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\leq M\Rightarrow\exists\eta\in(0,2),\ s.t.\ f(\eta)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$$

罗尔定理:

$$\begin{cases} f(\eta)=1,\eta\in[0,2] \\ f(3)=1 \end{cases} \Rightarrow\exists\xi\in(\eta,3)\subset(0,3),\ s.t.\ f'(\xi)=0$$

综上所述, $\exists\xi\in(0,3),\ s.t.\ f'(\xi)=0$

例题 28.14.

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有二阶导数, 且 $f(a)=f(b)=0, f'(a)f'(b)>0$, 证明:

$$\exists\xi\in(a,b),\eta\in(a,b),\ s.t.\ f(\xi)=0, f''(\eta)=0$$

解

极限保号性: 不妨设 $f'(a)>0$

$$\begin{cases} f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ f'(b)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} \\ f'(a)\cdot f'(b)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(a,a+\delta), f(x)>f(a)=0, f(x_1)>0, x_1\in(a,a+\delta) \\ x\in(b-\delta,b), f(x)<f(b)=0, f(x_2)>0, x_2\in(b-\delta,b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x_1)>0, x_1\in(a,a+\delta) \\ f(x_2)>0, x_2\in(b-\delta,b) \end{cases} \Rightarrow f(x_1)\cdot f(x_2)<0$$

零点定理: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f(\xi)=0$

罗尔定理: $f(a)=f(\xi)=f(b)=0$

$$\begin{cases} \exists x_3\in(a,\xi),\ s.t.\ f'(x_3)=0 \\ \exists x_4\in(\xi,b),\ s.t.\ f'(x_4)=0 \end{cases} \Rightarrow \exists\eta\in(x_3,x_4),\ s.t.\ f''(\eta)=0$$

综上所述, 存在 $\xi\in(a,b)$ 和 $\eta\in(a,b)$,$s.t.\ f(\xi)=0$ 且 $f''(\eta)=0$

28.2 Week II

February 8

例题 28.15.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a)=f(b)=0$, 证明:

(1). $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)+f(\xi)=0$

(2). $\exists\eta\in(a,b),\ s.t.\ f'(\eta)-f(\eta)=0$

(3). $\exists\zeta\in(a,b),\ s.t.\ f'(\zeta)+\lambda f(\zeta)=0$

解

(1). 构造辅助函数: $g(x)=e^xf(x), g'(x)=e^x\left[f'(x)+f(x)\right]$, 且 $g(a)=g(b)=0$

罗尔定理: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ g'(\xi)=e^{\xi}\left[f'(\xi)+f(\xi)\right]=0\Rightarrow f'(\xi)+f(\xi)=0$

(2). 构造辅助函数: $g(x)=e^{-x}f(x), g'(x)=e^{-x}\left[f'(x)-f(x)\right]$, 且 $g(a)=g(b)=0$

罗尔定理: $\exists\eta\in(a,b),\ s.t.\ g'(\eta)=e^{-\eta}\left[f'(\eta)-f(\eta)\right]=0\Rightarrow f'(\eta)-f(\eta)=0$

(3). 构造辅助函数: $g(x)=e^{\lambda x}f(x), g'(x)=e^{\lambda x}\left[f'(x)+\lambda f(x)\right]$, 且 $g(a)=g(b)=0$

罗尔定理: $\exists\zeta\in(a,b),\ s.t.\ g'(\zeta)=e^{\lambda\zeta}\left[f'(\zeta)+\lambda f(\zeta)\right]=0\Rightarrow f'(\zeta)+\lambda f(\zeta)=0$

例题 28.16.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(1)=0$, 证明:

$$\exists\xi\in(0,1),\ s.t.\ \xi f'(\xi)+f(\xi)=0$$

解

构造辅助函数: $g(x)=xf(x), g'(x)=f(x)+xf'(x)$, 且 $g(1)=g(0)=0$

罗尔定理: $\exists\xi\in(0,1),\ s.t.\ g'(\xi)=0\Rightarrow\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$

综上所述, $\exists\xi\in(0,1), s.t.\ \xi f'(\xi)+f(\xi)=0$

February 9

例题 28.17.

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=\dfrac{1}{3}$, 证明:

$$\exists\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right),\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right),\ s.t.\ f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$$

解

构造辅助函数: $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{3}x^3, g(0)=g(1)=0, g'(x)=f'(x)-x^2$

拉格朗日中值定理:

$$\begin{cases}2[g(\frac{1}{2})-g(0)]=g'(\xi),\xi\in(0,\frac{1}{2})\\ 2[g(1)-g(\frac{1}{2})]=g'(\eta),\eta\in(\frac{1}{2},1)\\ g(1)=g(0)=0\end{cases}\Rightarrow g'(\xi)+g'(\eta)=0\Rightarrow f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$$

综上所述, $\exists\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right),\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right),\ s.t.\ f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$

例题 28.18.

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 a,b 同号, 证明:

$$\exists\xi,\eta\in(a,b),\ s.t.\ abf'(\xi)=\eta^2f'(\eta)$$

解

拉格朗日中值定理:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

柯西中值定理: $g(x)=\dfrac{1}{x}$

$$\exists\eta\in(a,b),\ s.t.\ \frac{ab[f(b)-f(a)]}{a-b}=\eta^2f'(\eta)$$

综上: $abf'(\xi)=\eta^2f'(\eta)$

综上所述, $\exists\xi,\eta\in(a,b),\ s.t.\ abf'(\xi)=\eta^2f'(\eta)$

February 10

例题 28.19.

求下列的不定积分

(1). $\displaystyle\int\frac{1}{\cos x}dx$

(2). $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x}dx$

解

(1).

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{\cos x}{\cos^2x}dx\\&=\int\frac{1}{1-\sin^2x}d(\sin x)\\&=\int\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\right]d(\sin x)\\&=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C\\&=\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|+C\\&=\ln\left|\sec x+\tan x\right|+C\end{aligned}$$

(2).

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{\sin x}{\sin^2x}dx\\&=-\int\frac{1}{1-\cos^2x}d(\cos x)\\&=-\int\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+\cos x}+\frac{1}{1-\cos x}\right]d(\cos x)\\&=-\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x}+C\\&=-\ln\left|\frac{1+\cos x}{\sin x}\right|+C\\&=-\ln\left|\csc x+\cot x\right|+C\end{aligned}$$

例题 28.20.

求下列的不定积分

(1). $\displaystyle\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)}dx$

(2). $\displaystyle\int (1+\ln x)(\ln x+\ln\ln x)dx$

解

(1).

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(x+1)e^x}{xe^x(1+xe^x)}dx \\ &= \int \frac{1}{xe^x(1+xe^x)}d(xe^x) \\ &= \int \left[\frac{1}{xe^x} - \frac{1}{1+xe^x}\right] d(xe^x) \\ &= \ln \frac{xe^x}{1+xe^x} + C \end{aligned}$$

(2). 令

$$\begin{cases} f(x) = x\ln x \\ g(x) = \ln x + \ln\ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 1+\ln x \\ g'(x) = \dfrac{1+\ln x}{x\ln x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int f'(x)g(x)dx \\ &= f(x)g(x) - \int g'(x)f(x)dx \\ &= x(\ln x)\ln(x\ln x) - \int (1+\ln x)dx \\ &= x\ln x\left[\ln(x\ln x) - 1\right] + C \end{aligned}$$

February 11

例题 28.21.

求下列的不定积分

(1). $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+x^3}dx$

(2). $\displaystyle\int \frac{1-x}{1+x^3}dx$

例题 28.22.

求下列的不定积分

(1). $\int \frac{dx}{1+x^3}$

(2). $\int \frac{x}{1+x^3}dx$

February 12

例题 28.23.

已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2 x$, 求 $\int xf'(x)dx$

例题 28.24.

设 $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, 求 $\int f(x)dx$

February 13

例题 28.25.

$$\int \max(1, x^2)dx$$

例题 28.26.

设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x dx, N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^4 x)dx, P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^3 x - \cos^4 x)dx$

- A. $N < P < M$
- B. $M < P < N$
- C. $N < M < P$
- D. $P < M < N$

February 14

例题 28.27.

设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx, N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x}dx, K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\sqrt{\cos x})dx$

- A. $M > N > K$

- B. $M > K > N$
- C. $K > M > N$
- D. $K > N > M$

例题 28.28.

设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx$
- A. $I_1 > I_2 > 1$
- B. $1 > I_1 > I_2$
- C. $I_2 > I_1 > 1$
- D. $1 > I_2 > I_1$

28.3 Week III

February 15

例题 28.29.

$$\int_{-2}^{2} [\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}] dx$$

例题 28.30.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x|[x^3 + \sin^2 x] \cos^2 x dx$$

February 16

例题 28.31.

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin x} dx$$

例题 28.32.

$$\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$$

February 17

例题 28.33.

$$\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$$

February 18

例题 28.34.

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$$

例题 28.35.

已知函数 $f(x)=\int_1^x \sqrt{1+t^4}dt$, 则 $\int_0^1 x^2 f(x)dx$

February 19

例题 28.36.

已知 $f(x)$ 连续,$\int_0^x tf(x-t)dt = 1-\cos x$, 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

例题 28.37.

设 $f(x)=\begin{cases} x^2, 0\le x\le 1 \\ 2-x, 1<x\le 2 \end{cases}$, 记 $F(x)=\int_0^x f(t)dt(0\le x\le 2)$, 则有:

- A. $F(x)=\begin{cases} \frac{x^3}{3}, 0\le x\le 1 \\ 2x-\frac{x^2}{2}, 1<x\le 2 \end{cases}$

- B. $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3},0\le x\le 1\\ \dfrac{1}{3}+2x-\dfrac{x^2}{2},1<x\le 2\end{cases}$
- C. $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3},0\le x\le 1\\ -\dfrac{7}{6}+2x-\dfrac{x^2}{2},1<x\le 2\end{cases}$
- D. $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3},0\le x\le 1\\ \dfrac{x^3}{3}+2x-\dfrac{x^2}{2},1<x\le 2\end{cases}$

February 20

例题 28.38.

设 $x\ge -1$, 求 $\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt$

例题 28.39.

设 $x=x(t)$ 由方程 $\sin t-\int_1^{x-t}e^{-u^2}du=0$ 所确定, 试求 $\dfrac{d^2x}{dt^2}|_{t=0}$

February 21

例题 28.40.

设函数 $f(x)=\int_0^1|t(t-x)|dt(0<x<1)$, 求 $f(x)$ 的极值、单调区间及曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间

例题 28.41.

下列反常积分中发散的是:

- A. $\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx$
- B. $\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx$
- C. $\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{1+x^2}dx$
- D. $\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}dx$

28.4 Week IV

February 22

例题 28.42.

$$\int_{5}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x+3}$$

例题 28.43.

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{e^{1+x}+e^{3-x}}$$

February 23

例题 28.44.

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}dx$$

例题 28.45.

已知抛物线通过 x 轴上的两点 $A(1,0), B(3,0)$

(1). 求证: 两坐标轴与该抛物线所围图形的面积等于 x 轴与该抛物线所围图形的面积

(2). 计算上述两平面图形绕 x 轴旋转一周所产生的两个旋转体体积之比

February 24

例题 28.46.

求心形线 $r = a(1+\cos\theta)$ $(a > 0)$ 所围图形的面积

例题 28.47.

已知平面区域 $D = \{(x,y)|0 \le y \le \dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}, x \ge 1\}$

(1). 求 D 的面积

(2). 求 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积

February 25

例题 28.48.

某水库的闸门形状为等腰梯形, 它的两条底边各长 $10m$ 和 $6m$, 高为 $20m$, 较长的底边与水面相齐, 求闸门的一侧所受水的压力

例题 28.49.

一个半径为 $R(m)$ 的球形贮水箱盛满了水, 如果把箱中的水从顶部全部抽出, 需要作的功

February 26

例题 28.50.

方程 $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$ 的通解

例题 28.51.

方程 $y'=1+x+y^2+xy^2$ 的通解

February 27

例题 28.52.

方程 $(y+\sqrt{x^2+y^2})dx-xdy=0$ 满足条件 $y|_{x=1}=0$ 的特解

例题 28.53.

方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x+y^4}$ 的通解

February 28

例题 28.54.

$$\int \frac{x\ln x+x\ln^2 x}{2+x\ln x}dx$$

例题 28.55.

$$\int \frac{\sin 2x \sin^2 x}{2+\cos^4 x} dx$$

February 29

例题 28.56.

$$\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x} dx$$

例题 28.57.

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x(1+\sin^2 x)} dx$$

第 29 章 March

29.1 Week I

March 1

例题 29.1.

$$\int \frac{1}{\cos^3 x} dx$$

例题 29.2.

$$\int \frac{2+x}{(1+x^2)^2} dx$$

March 2

例题 29.3.

$$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

例题 29.4.

$$\int e^x \arcsin\sqrt{1-e^{2x}}\, dx$$

March 3

例题 29.5.

已知 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, 求 $\int f(x)dx$

例题 29.6.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\cos^2 x dx$$

March 4

例题 29.7.

$$\int_0^{\pi^2} \sqrt{x}\cos\sqrt{x} dx$$

例题 29.8.

$$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2} dx$$

March 5

例题 29.9.

$$\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}} dx$$

例题 29.10.

$$\int_1^2 (x-1)^2(x-2)^2 dx$$

March 6

例题 29.11.

$$\int_{-2}^{2} x\ln(1+e^x)dx$$

例题 29.12.

设 D 是由曲线 $xy+1=0$ 与直线 $y+x=0$ 及 $y=2$ 围成的有界区域, 求 D 的面积

March 7

例题 29.13.

设 D 是由曲线 $y=x^2$ 与 $y=x$ 围成的有界区域, 求区域 D 分别绕直线 $y=0, x=0, x=1, x=2$ 旋转所得旋转体的体积

例题 29.14.

方程 $y''+4y'+4y=e^{-2x}$ 满足条件 $y(0)=1, y'(0)=0$ 的特解

29.2 Week II

March 8

例题 29.15.

具有特解 $y_1=e^{-x}, y_2=2xe^{-x}, y_3=3e^x$ 的三阶常系数线性齐次方程为:

- A. $y'''-y''-y'+y=0$
- B. $y'''+y''-y'-y=0$
- C. $y'''-6y''+11y'-6y=0$
- D. $y'''-2y''-y'+2y=0$

例题 29.16.

方程 $y''-2y'=xe^{2x}$ 的特解形式为:

- A. $y=axe^{2x}$
- B. $y=(ax+b)e^{2x}$
- C. $y=x(ax+b)e^{2x}$
- D. $y=x^2(ax+b)e^{2x}$

March 9

例题 29.17.

方程 $y'' + y = e^x + 1 + \sin x$ 的特解形式为:

- A. $ae^x + b + c\sin x$
- B. $ae^x + b + c\cos x + d\sin x$
- C. $ae^x + b + x(c\cos x + d\sin x)$
- D. $y = ae^x + b + cx\sin x$

例题 29.18.

设函数 $f(x)$ 具有一阶连续导数, 且满足 $f(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f'(t) dt + x^2$, 求 $f(x)$ 表达式

March 10

例题 29.19.

设 L 是一条平面曲线, 其上任意一点 $P(x, y)(x > 0)$ 到坐标原点的距离恒等于该点处切线在 y 轴上的截距, 且 L 经过 $(\frac{1}{2}, 0)$, 求曲线 L 的渐近线方程为

例题 29.20.

二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处:

- A. 不连续
- B. 两个偏导数都不存在
- C. 偏导数存在但不可微
- D. 可微

March 11

例题 29.21.

二元函数 $f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处两个偏导数 $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ 存在, 是 $f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续的:

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件

- C. 充分必要条件
- D. 不充分不必要条件

例题 29.22.

已知 $f(x,y)=\sin\sqrt{x^4+y^4}$

- A. $f_x'(0,0), f_y'(0,0)$ 都存在
- B. $f_x'(0,0)$ 不存在, $f_y'(0,0)$ 存在
- C. $f_x'(0,0)$ 存在, $f_y'(0,0)$ 不存在
- D. $f_x'(0,0), f_y'(0,0)$ 都不存在

March 12

例题 29.23.

设 $f(x,y)=\dfrac{2x+y^2}{1+y^2\sqrt{1+x^2+y^2}}$, 求 $df(0,0)$

例题 29.24.

已知 $dF(x,y)=xye^x dx+(f(x)+y^2)dy$, 且 $f(x)$ 有连续一阶导数, $f(x)=0$, 求 $F(x,y)$

March 13

例题 29.25.

设函数 $f(x,y)$ 可微, 且对于任意 x,y 都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0, \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$, 则下列结论正确的是:

- A. $f(1,1)>f(0,0)$
- B. $f(-1,1)>f(0,0)$
- C. $f(-1,-1)>f(0,0)$
- D. $f(1,-1)>f(0,0)$

例题 29.26.

设 $z=(x+e^y)^x$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)}$

March 14

例题 29.27.

设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(x+1)z + y\ln z - \arctan(2xy) = 1$ 确定, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,2)}$

例题 29.28.

设 $f(x, y, z) = e^x + y^2 z$, 其中 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x + y + z + xyz = 0$ 所确定的隐函数, 求 $f_x'(0, 1, -1)$

29.3 Week III

March 15

例题 29.29.

设 $z = xyf(\frac{y}{x})$, 其中 $f(u)$ 可导, 求 $xz_x' + yz_y'$

例题 29.30.

设 $z = e^{xy} + f(x+y, xy)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, 其中 $f(u, v)$ 有二阶连续偏导数

March 16

例题 29.31.

已知 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处取得极小值

- A. $f_x'(x_0, y_0) = f_y'(x_0, y_0) = 0$
- B. $f_{xx}''(x_0, y_0)f_{yy}''(x_0, y_0) - (f_{xy}''(x_0, y_0))^2 > 0$, 且 $f_{xx}''(x_0, y_0) > 0$
- C. $f(x_0, y)$ 在 y_0 处取得极大值
- D. $f(x, y_0)$ 在 x_0 处取得极小值

例题 29.32.

设函数 $f(x), g(x)$ 均有二阶连续导数, 满足 $f(0) > 0, g(0) < 0$, 且 $f'(0) = g'(0) = 0$, 则函数 $z = f(x)g(y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取得极小值的一个充分条件

- A. $f''(0) < 0, g''(0) > 0$

- B. $f''(0) < 0, g''(0) < 0$
- C. $f''(0) > 0, g''(0) > 0$
- D. $f''(0) > 0, g''(0) < 0$

March 17

例题 29.33.

已知函数 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = (ay - x^2)dx + (ax - y^2)dy, (a > 0)$, 函数 $f(x, y)$

- A. 无极值点
- B. 点 (a, a) 为极小值点
- C. 点 (a, a) 为极大值点
- D. 是否有极值点与 a 的取值有关

例题 29.34.

设函数 $z = f(xy, yg(x))$, 其中 f 函数具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导且在 $x = 1$ 处取得极值 $g(1) = 1$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}|_{(1,1)}$

March 18

例题 29.35.

求函数 $f(x, y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值

例题 29.36.

求 $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$ 在椭圆域 $D = \left\{(x, y)|x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1\right\}$ 上的最大值和最小值

March 19

例题 29.37.

交换二次积分的积分次序 $(a > 0)$

(1). $\int_0^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}}^{3-x} f(x, y)dy$

(2). $\int_0^a dy \int_0^{\sqrt{ay}} f(x,y)dx + \int_a^{2a} dy \int_0^{2a-y} dx$

例题 29.38.

设 $f(x)$ 是连续函数, 则 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$ 等价于:

- A. $\int_0^1 dx \int_0^{x-1} f(x,y)dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$
- B. $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)dy$
- C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr$
- D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$

March 20

例题 29.39.

设函数 $f(t)$ 连续, 则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^2 f(r^2)rdr$

- A. $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} f(x^2+y^2)dy$
- B. $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2+y^2)dy$
- C. $\int_0^2 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{x^2+y^2} f(x^2+y^2)dx$
- D. $\int_0^2 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x^2+y^2)dx$

例题 29.40.

计算二重积分

(1). $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} (2x+3y)^2 d\sigma$

(2). $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx$

(3). $\int_0^1 dy \int_y^1 \sqrt{x^2-y^2} dx$

(4). $\int_0^1 dy \int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^3}\right) dx$

(5). $\iint\limits_D \left(xy^5-1\right) dxdy, D = \left\{(x,y) \middle| -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \sin x \le y \le 1\right\}$

(6). $\iint\limits_D x^2ydxdy$, 其中 D 是由双曲线 $x^2-y^2=1$ 以及直线 $y=0, y=1$ 所围成的平面区域

(7). $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy, D=\left\{(x,y)|0\le y\le x, x^2+y^2\le 2x\right\}$

(8). $\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}drd\theta, D=\left\{(r,\theta)|0\le r\le\sec\theta, 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$

March 21

引理 29.3.1 (估值定理)

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^nf(x)dx$$

其中 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导 $\Rightarrow |f(x)|\le M, M$ 是 $|f(x)|$ 在 $[0,1]$ 上的最大值

$$0\le\int_0^1 x^nf(x)dx\le\int_0^1 Mx^ndx=\frac{M}{n+1}$$

夹逼准则:

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}0=0\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{M}{n+1}=0\end{cases}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^nf(x)dx=0$$

$$\begin{cases}\sin x<x\\ \ln(1+x)<x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\sin^n xf(x)dx=0\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\ln^n(1+x)f(x)dx=0\end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 nx^nf(x)dx$$

其中 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1(n+1)x^nf(x)dx-\int_0^1 x^nf(x)dx\\&=\int_0^1 f(x)d(x^{n+1})-\int_0^1 x^nf(x)dx\\&=f(x)x^{n+1}\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 x^{n+1}f'(x)dx\\&=f(1)-\int_0^1 x^{n+1}f'(x)dx\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to+\infty} I = f(1) - \lim_{n\to oo}\int_0^1 x^{n+1} f'(x)dx = f(1)$$

例题 29.41.

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{nx^n}{1+e^x}dx$$

解

令: $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$

lem :29.3.1

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{nx^n}{1+e^x}dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 nx^n f(x)dx = f(1) = \frac{1}{1+e}$$

例题 29.42.

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right]$$

解

$$\begin{cases} x\to 0 & \sqrt{1+x^2}-1 \sim \frac{1}{2}x^2 \\ x\to 0 & \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \sim x \end{cases}$$

$$f(x) = \ln x \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} I &= -\frac{f(x+\sqrt{1+x^2}) - f(1+x)}{x^2} \\ &= -\frac{1+\sqrt{1+x^2}-x}{x^2} f'(\xi) \\ &= -\frac{1}{2} f'(\xi) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x} = 1 \\ \lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x^2}-x) = 1 \end{cases}$$

夹逼定理:

$$\lim_{x\to 0} f'(\xi) = 1$$

综上，$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]=-\frac{1}{2}$

29.4 Week IV

March 22

例题 29.43.

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}dx$$

解

$$\begin{cases} I=A(\sin x+\cos x) \\ J=B(\cos x-\sin x) \\ I+J=\sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{I+J}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}}dx-\frac{1}{2}\int \frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}dx-\frac{1}{2}\int \frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}}dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\arcsin\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}-\ln\left(\sin x+\cos x+\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}\right)\right]+C \end{aligned}$$

例题 29.44.

$$\int_{\frac{1}{6}}^{+\infty}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]dx$$

解

$$\begin{cases} \left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]=0, & x\geq 1 \\ \left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]=1, & \frac{1}{4}\leq x\leq 1 \\ \left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]=2, & \frac{1}{6}\leq x\leq\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\int_{\frac{1}{6}}^{+\infty}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]dx=\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{4}}\frac{2}{x}dx+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{x}dx=2\ln 3$$

March 23

例题 29.45.

已知函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin x^2\cos y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 求 $f_x'(0,0),f_y'(0,0)$

解

$$\begin{cases}f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x+\Delta x,0)-f(x,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\sin(\Delta x)^2}{|\Delta x|\Delta x}\\ f_y'(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to0}\dfrac{f(0,y+\Delta y)-f(0,y)}{\Delta y}=0\end{cases}$$

综上, $f_x'(0,0)$ 不存在, $f_y'(0,0)=0$

例题 29.46.

设 $z=e^{xy}+f(x+y,xy)$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, 其中 $f(u,v)$ 有二阶连续偏导数

解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=1\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=1\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=y\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=x\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}+f_1'(x+y,xy)+yf_2'(x+y,xy)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=e^{xy}+xye^{xy}\\&+f_{11}''(x+y,xy)+xf_{12}''(x+y,xy)\\&+f_2'(x+y,xy)+y\left[f_{21}''(x+y,xy)+xf_{22}''(x+y,xy)\right]\\&=(1+xy)e^{xy}+f_2'(x+y,xy)+f_{11}''(x+y,xy)+xyf_{22}''(x+y.xy)+(x+y)f_{12}''(x+y,xy)\end{aligned}$$

March 24

例题 29.47.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^4}\prod_{k=1}^{2n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$$

解

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(\prod_{k=1}^{2n}(n^2+k^2))-4\ln n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n^{4n}\left[\prod_{k=1}^{2n}(1+(\frac{k}{n})^2)\right]-4\ln n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln\left[\prod_{k=1}^{2n}(1+(\frac{k}{n})^2)\right]} \\ &= \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\ln\left[1+(\frac{k}{n})^2\right]} \\ &= e^{\int_0^2\ln(1+x^2)dx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2\ln(1+x^2)dx &= x\ln(1+x^2)\Big|_{x=0}^{x=2}-\int_0^2(2-\frac{2}{1+x^2})dx \\ &= 2\ln 5-4+2\arctan 2 \\ I &= 25e^{2\arctan 2-4} \end{aligned}$$

例题 29.48.

设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$, 求 $dz\big|_{(0,1)}$

解

$$\begin{cases} f(0,1)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}f(x,y) \\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}f(x,y)-2x+y-2=0 \end{cases} \Rightarrow f(0,1)=1$$

函数 $z=f(x,y)$ 在 $(0,1)$ 邻域内有定义, $z=f(x,y)$ 在 $(0,1)$ 处全增量

$$\Delta z=f(x,y)-f(0,1)=2(x-0)-(y-1)+o(\sqrt{x^2+(y-1)^2})$$

$z=f(x,y)$ 在 $(0,1)$ 处可微, 且 $dz\big|_{(0,1)}=2dx-dy$

March 25

引理 29.4.1 (特殊反常积分)

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\begin{cases}p>1 & \text{收敛}\\ p\le 1 & \text{发散}\end{cases}$$

$$\int_0^1\frac{1}{x^p}dx\begin{cases}0<p<1 & \text{收敛}\\ p\ge 1 & \text{发散}\end{cases}$$

$$\int_0^1\frac{\ln x}{x^p}dx\begin{cases}0<p<1 & \text{收敛}\\ p\ge 1 & \text{发散}\end{cases}$$

例题 29.49.

反常积分 $\int_0^1 x^a(1-x)^b\ln x dx$ 收敛, 求 a,b 取值范围

解

可能的瑕点为 $x=0$ 和 $x=1$

$$\begin{cases}x\to 1^- \quad f(x)=x^a(1-x)^b\ln x\sim-(1-x)^{b+1}\Rightarrow\begin{cases}b\le -2 & \text{瑕点且发散}\\ -2<b<-1 & \text{瑕点且收敛}\\ b\ge -1 & \text{非瑕点}\end{cases}\\ x\to 0^+ \quad f(x)=x^a(1-x)^b\ln x\sim x^a\ln x\Rightarrow\begin{cases}a>0 & \text{非瑕点}\\ -1<a\le 0 & \text{瑕点且收敛}\\ a\le -1 & \text{瑕点且发散}\end{cases}\end{cases}$$

(1). $x=1$ 和 $x=0$ 均为瑕点

$$\begin{cases}-2<b<-1\\ -1<a\le 0\end{cases}$$

(2). $x=1$ 是瑕点, $x=0$ 不是瑕点

$$\begin{cases}a>0\\ -2<b<-1\end{cases}$$

(3). $x=0$ 是瑕点,$x=1$ 不是瑕点

$$\begin{cases}-1<a\le 0\\ b\ge -1\end{cases}$$

例题 29.50.

$$\int \frac{x^2}{(x\cos x-\sin x)(x\sin x+\cos x)}dx$$

解

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x\cos x(x\cos x-\sin x)+x\sin x(x\sin x+\cos x)}{(x\cos x-\sin x)(x\sin x+\cos x)}dx\\
&= \int \frac{x\cos x}{x\sin x+\cos x}dx-\int \frac{-x\sin x}{x\cos x-\sin x}dx\\
&= \int \frac{(x\sin x+\cos x)'}{x\sin x+\cos x}dx-\int \frac{(x\cos x-\sin x)'}{x\cos x-\sin x}dx\\
&= \ln|x\sin x+\cos x|-\ln|x\cos x-\sin x|+C\\
&= \ln\left|\frac{x\sin x+\cos x}{x\cos x-\sin x}\right|+C
\end{aligned}$$

March 26

例题 29.51.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x^2+\frac{1}{2})^2}dx$$

解

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} \frac{4e^{-x^2}}{(2x^2+1)^2}dx\\
&= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{2x}d\left(\frac{4x^2}{2x^2+1}\right)\\
&= \frac{e^{-x^2}}{2x}\frac{4x^2}{2x^2+1}\Big|_{x=0}^{x=+\infty}+2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\\
&= \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}
\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xe^{-x^2}}{2x^2+1}=0\\
\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{-x^2}}{2x+\frac{1}{x}}=0
\end{cases}$$

March 27

例题 29.52.

已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 5$, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

解

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots = 2 \\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1} = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} + \cdots = 5 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n = 3$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n} = 8$$

例题 29.53.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x(1+\ln^2 x)} dx$$

解

$$\begin{cases} t = \dfrac{1}{x} \\ x = \dfrac{1}{t} \\ dx = -\dfrac{1}{t^2}dt \end{cases} \Rightarrow I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan \frac{1}{t}}{t(1+\ln^2 t)} dt$$

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{+\infty} \frac{\arctan \frac{1}{x}}{x(1+\ln^2 x)} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x(1+\ln^2 x)} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\arctan \frac{1}{x} + \arctan x}{x(1+\ln^2 x)} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2x(1+\ln^2 x)} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+\ln^2 x)} d(\ln x) \\ &= \frac{\pi}{2} \arctan(\ln x)\Big|_{x=0}^{x=+\infty} \\ &= \frac{\pi^2}{2} \\ I &= \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

March 28

例题 29.54.

$$\int \frac{2x^4}{1+x^6}dx$$

解

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^4-1}{1+x^6}dx + \int \frac{x^4+1}{1+x^6}dx \\ &= \int \frac{x^2-1}{1+x^4-x^2}dx + \int \frac{x^4-x^2+1}{1+x^6}dx + \int \frac{x^2}{1+x^4-x^2}dx \\ &= \int \frac{x^2-1}{1+x^4-x^2}dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+(x^3)^2}d(x^3) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int \frac{1}{1+(x^3)^2}d(x^3) = \frac{1}{2}\arctan x^3 \\ I_2 = \displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{x^2-1}{1+x^4-x^2}dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}-1}dx \\ &= \int \frac{1}{(x+\frac{1}{x})^2-3}d(x+\frac{1}{x}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{3}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{3}}\right| \end{aligned}$$

综上, $I = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{3}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{3}}\right| + \arctan x + \dfrac{1}{3}\arctan x^3 + C$

例题 29.55.

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(1-\cos\frac{\alpha}{n})(\alpha>0)$ 敛散性

解

$$n\to+\infty, 1-\cos\frac{\alpha}{n}\sim\frac{\alpha^2}{2n^2}$$

比较判别法极限形式:

级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1-\cos\frac{\alpha}{n})(\alpha>0)$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\alpha^2}{2n^2}(\alpha>0)$ 敛散性相同, 绝对收敛

March 29

例题 29.56.

设 $u_n=(-1)^n\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n^2$ 的敛散性

解

(1). 判断交错级数 u_n 敛散性

$$\begin{cases}\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})\text{单调递减}\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})=0\end{cases}\Rightarrow \text{级数}\sum_{n=1}^{+\infty}u_n\text{收敛}$$

(2). 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n^2$ 敛散性

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln^2(1+\frac{1}{\sqrt{n}})}{\frac{1}{n}}=1$$

比较判别法极限形式:
级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n^2$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 同敛散性, 级数发散

例题 29.57.

已知 $y^2(x-y)=x^2$, 求 $\int\frac{1}{y^2}dx$

解

$$\begin{cases}\dfrac{y}{x}=t\\ xt^2(1-t)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{t^2(1-t)}\\ y=\dfrac{1}{t(1-t)}\\ dx=\dfrac{3t^2-2t}{t^4(1-t)^2}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{1}{y^2}dx\\&=\int\frac{3t^2-2t}{t^2}dt\\&=3t-2\ln|t|+C\\&=\frac{3y}{x}-2\ln\left|\frac{y}{x}\right|+C\end{aligned}$$

March 30

引理 29.4.2 (对称积分变换)

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} [f(x) + f(-x)]\, dx$$

例题 29.58.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{1+\cos x-\sin x}dx$$

解

lem : 29.4.2

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\cos^3 x}{1+\cos x-\sin x} \\ f(-x) = \dfrac{\cos^3 x}{1+\cos x+\sin x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)+f(-x) = \cos^2 x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{1+\cos x-\sin x}dx \\ &= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

例题 29.59.

已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛, 求 α 取值范围

解

$$n\longrightarrow+\infty, \sqrt{n}\sin\frac{1}{n^\alpha}\sim\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$$

p 级数敛散性

$$\begin{cases} \alpha-\dfrac{1}{2} > 1 \\ 2-\alpha > 0 \\ 2-\alpha \le 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2} < \alpha < 2$$

March 31

例题 29.60.

求级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 的和函数

解

$$\rho(x)=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=0$$

幂级数收敛域为 $\mathbb{R}$, 不妨设幂级数和函数为 $S(x)$

$$\begin{cases} S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ S'(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{2n!}x^{2n} \end{cases} \Rightarrow S(x)+S'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$$

$$S(x)+S'(x)=e^x, S(0)=0\Rightarrow S(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

例题 29.61.

求二重积分 $\iint\limits_D y^2dxdy$ 和 $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, 其中 D 是由参数方程 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $,t\in[0,2\pi]$

解

积分区域 D 是摆线, $y=y(x),x\in[0,2\pi a]$

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases},t\in[0,2\pi]$$

(1).

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D y^2 dxdy &= \int_0^{2\pi a} dx \int_0^{y(x)} y^2 dy \\
&= \int_0^{2\pi a} \frac{1}{3} y^3(x) dx \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} a^3 (1-\cos t)^3 (a - a\cos t) dt \\
&= \frac{2a^4}{3} \int_0^{\pi} (2\sin^2 u)^4 du \\
&= \frac{4a^4}{3} \times 16 \times \frac{7}{8} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{35a^4\pi}{12}
\end{aligned}
$$

(2).

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D (x+2y) dxdy &= \int_0^{2\pi a} dx \int_0^{y(x)} (x+2y) dy \\
&= \int_0^{2\pi a} \left[y^2(x) + xy(x)\right] dx \\
&= \int_0^{2\pi} \left[y^2(t) + x(t)y(t)\right] (a - a\cos t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} a^3 (1-\cos t)^3 dt + \int_0^{2\pi} a^3 (1-\cos t)^2 (t - \sin t) dt \\
&= 2a^3 \int_0^{\pi} (2\sin^2 u)^3 du + a^3 \int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos u)^2 (u + \pi + \sin u) du \\
&= 4a^3 \times 8 \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \\
&+ 2a^3\pi \int_0^{\pi} (1+\cos u)^2 du \\
&= (5\pi + 3\pi^2) a^3
\end{aligned}
$$

第 30 章 April

30.1 Week I

April 1

例题 30.1.

判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sin(n+k)\right]$ 敛散性

解

设 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}},u_n<a_n$

$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 部分和 $S_n=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=1$$

原级数绝对收敛.

例题 30.2.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{2(\sec x-1)}-\sqrt[3]{6(x-\sin x)}}{\int_0^{x^2}\arctan(e^{\sqrt{t}}-1)dt}$$

解

对于变上限积分，当 $x\to0,g(x)\to0,h(x)\to0$, 我们有:

$$\lim_{x\to0^+}\int_0^{g(x)}h(t)dt\Rightarrow\lim_{x\to0^+}\int_0^{G(x)}H(t)dt,x\to0,f(x)\sim F(x),h(x)\sim H(x)$$

我们得到原极限等价于:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{2(\sec x-1)}-\sqrt[3]{6(x-\sin x)}}{\frac{2}{3}x^3}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{2(\sec x-1)}-\sqrt{2\frac{1}{2}x^2}+\sqrt[3]{6\frac{1}{6}x^3}-\sqrt[3]{6(x-\sin x)}}{\frac{2}{3}x^3}$$

前一个极限:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{2(\sec x-1)}-\sqrt{2\frac{1}{2}x^2}}{\frac{2}{3}x^3}=\lim_{x\to0^+}\frac{2(\sec x-1-\frac{1}{2}x^2)}{\frac{2}{3}x^3(\sqrt{2(\sec x-1)}+x)}$$

我们有: $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{2(\sec x-1)}+x}{2x}=1$

前一个极限:

$$I_1=\frac{3}{2}\frac{1-\cos x-\frac{1}{2}x^2\cos x}{x^4\cos x}=\frac{5}{16}$$

同理可得:

$$I_2=-\lim_{x\to0^+}\frac{3}{2}\frac{\sqrt[3]{6\frac{x-\sin x}{x^3}}-1}{x^2}=-\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2}\frac{6(x-\sin x)-x^3}{x^5}=\frac{1}{40}$$

原极限为: $I=I_1+I_2=\dfrac{27}{80}$

April 2

例题 30.3.

级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}[sin\frac{1}{n}-k\ln(1-\frac{1}{n})]$ 收敛, 求 k 的值

解

泰勒公式和级数的比较判别法极限形式

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{sin\frac{1}{n}-k\ln(1-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to+0}\frac{sinx-k\ln(1-x)}{x}$$

分子利用泰勒展开式得到:

$$x\to0,\sin x-k\ln(1-x)\sim x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)+kx+k\frac{x^2}{2}+o(x^2)\sim(1+k)x+o(x)$$

我们得到:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{sin\dfrac{1}{n}-k\ln(1-\dfrac{1}{n})}{\dfrac{1}{n}}=1+k$$

当且仅当 $k=-1$ 时, 级数收敛, 因为当 $k\neq-1$ 时, 原级数敛散性和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ 一致, 级数发散.

例题 30.4.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^3dx$$

解

原定积分:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)^3dx=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3 x dx$$

令 $tanx=t,x=\arctan t,dx=\frac{1}{1+t^2}dt,t\in[0,1]$, 原定积分为:

$$I=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}dt^2=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{t}{1+t}dt=\frac{\ln 2-1}{2}$$

April 3

例题 30.5.

级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|,\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^na_n$、$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_na_{n+1}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 敛散性

解

$$a_n=(-1)^n\frac{1}{n}\quad b_n=(-1)^n\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

a_n 收敛,$|a_n|$ 发散;
a_n 收敛,$(-1)^na_n$ 发散;
b_n 收敛,b_nb_{n+1} 发散;

例题 30.6.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x-\cos x}dx$$

解

原定积分内有瑕点, 原积分等价于:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin x-\cos x}dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x-\cos x}dx$$

我们有: $\int\frac{1}{\sin x-\cos x}dx=\ln\left|\frac{1-\cos(x-\frac{\pi}{4})}{\sin(x-\frac{\pi}{4})}\right|+C$
我们可以得到原反常积分发散.

April 4

例题 30.7.

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\cot x}{e^{-2x}}+\frac{1}{e^{-x}\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$$

解

原极限等价于:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2e^x-\frac{1}{2}x^2\sin 2xe^{2x}-\sin^2 x}{x^4}=-\frac{7}{6}$$

例题 30.8.

判断下列命题是否正确

(i). $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(u_{2n+1}+u_{2n})$ 收敛, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n$ 收敛

(ii). $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n$ 发散

解

(i). $u_n=(-1)^n$, 第一个排除

(ii). 正项级数比较判别法

April 5

例题 30.9.

$(1+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}$

解

我们有:

$$(1+\sqrt{3})^{n+1}=(1+\sqrt{3})^n(1+\sqrt{3})=(a_n+b_n\sqrt{3})(1+\sqrt{3})$$

我们得到:

$$(a_n+3b_n)+(a_n+b_n)\sqrt{3}=a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{3}\Rightarrow\begin{cases}a_{n+1}=a_n+3b_n\\b_{n+1}=a_n+b_n\end{cases}$$

我们化简得:

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\frac{\frac{a_n}{b_n}+3}{\frac{a_n}{b_n}+1}$$

不妨设 $x_n=\frac{a_n}{b_n}$, 我们有 $x_{n+1}=1+\frac{2}{x_n+1}$,$x_1=1$

因为 $1<x_1<\sqrt{3},x_n>1$, 我们得到:

$$0<|x_{n+1}-\sqrt{3}|=|1+\frac{2}{x_n+1}-(1+\frac{2}{\sqrt{3}+1})|=\frac{2}{(x_n+1)(\sqrt{3}+1)}|x_n-\sqrt{3}|$$

化简得:

$$0 < |x_{n+1} - \sqrt{3}| < \frac{1}{\sqrt{3}+1}|x_n - \sqrt{3}| = \frac{1}{(\sqrt{3}+1)^{n-1}}a_1$$

夹逼定理得到: $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n - \sqrt{3}| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{3}$

例题 30.10.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

解

令 $x = \sec t, t \in [1, \frac{\pi}{2}], dx = \tan t \sec t dt$, 我们有:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t \tan t}{\sec^2 t \tan t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 1$$

April 6

例题 30.11.

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

解

令 $x = \sin t, t \in [0, \frac{\pi}{2}], dx = \cos t dt$, 我们有:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \cos t}{(2-\sin^2 t)\cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{2-\sin^2 t} dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\cos t}{\cos^2 t + 1} = -\arctan(\cos t)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

例题 30.12.

$y = x^2$ 与 $y = mx$ 围成的部分绕着 $y = mx(m > 0)$ 旋转一周得到的旋转体体积 V

解

$$V = \int_0^L \pi r^2 dl = \int_0^m \pi r^2\sqrt{1+m^2}dx = \frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}} \int_0^m x^2(m-x)^2 dx = \frac{m^5\pi}{30\sqrt{1+m^2}}$$

April 7

例题 30.13.

$f(x)$ 在 $(2,4)$ 上二阶导数连续,$f(3) = 0$, 求证: $f''(\varepsilon) = 3\int_2^4 f(x)dx$

解

设 $F(x) = \int_2^x f(x)dx$, 原命题转化为证明:

$$\text{已知} F(2) = 0, F'(3) = 0, \text{求证} F'''(\varepsilon) = 3F(4)$$

$F(x)$ 在 $x=3$ 处的泰勒展开式为:

$$F(x)=F(3)+F'(3)(x-3)+\frac{F''(3)}{2}(x-3)^2+\frac{F'''(\varepsilon_1)}{6}(x-3)^3$$

我们得到:

$$\begin{cases} F(2)=F(3)-F'(3)+\frac{F''(3)}{2}-\frac{F'''(\varepsilon_1)}{6}, \varepsilon_1\in(2,3) \\ F(4)=F(3)+F'(3)+\frac{F''(3)}{2}+\frac{F'''(\varepsilon_2)}{6}, \varepsilon_2\in(3,4) \end{cases}$$

我们得到: $F(4)=\dfrac{F'''(\varepsilon_1)+F'''(\varepsilon_2)}{6}$

由平均值定理得到:

$$\exists\varepsilon_3\in(\varepsilon_1,\varepsilon_2),\ s.t\ F'''(\varepsilon_3)=\frac{F'''(\varepsilon_1)+F'''(\varepsilon_2)}{2}$$

我们得到: $F(4)=\dfrac{F'''(\varepsilon_3)}{3}$, 证毕

例题 30.14.

$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, $f(0)=0$, 其反函数为 $g(x)$, 若 $\int_0^{f(x)} g(t)dt=x^2e^x$, 求 $f(x)$

解

我们对 $\int_0^{f(x)} g(t)dt=x^2e^x$ 左右两边同时对 x 求导:

$$g(f(x))f'(x)=(x^2+2x)e^x\Rightarrow f'(x)=(x+2)e^x$$

我们得到: $f(x)=(x+1)e^x+C, f(0)=1+C=0, C=-1$

$$f(x)=(x+1)e^x-1$$

30.2 Week II

April 8

例题 30.15.

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{2^n}(x+1)^{2n+1}$ 收敛区间

解

求解收敛半径的两种方法:

(i).$\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

(ii).$\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$

本题中采用第二种方法: $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2}\sqrt[n]{\ln n}=\dfrac{1}{2}$

此题中幂级数只有奇数项, 收敛半径 $R=\sqrt{\frac{1}{\rho}}=\sqrt{2}$

原幂级数收敛区间: $(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})$

例题 30.16.

证明:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx=\frac{n\pi}{2}$$

解

我们不妨设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\sin nx}{\sin x})^2 dx$, 我们有:

$$a_1=\frac{\pi}{2}$$

$$a_{n+1}-a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(n+1)x-\sin^2 nx}{\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx$$

我们令 $c_n=a_{n+1}-a_n$,$c_0=\frac{\pi}{2}$

$$c_{n+1}-c_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+3)x-\sin(2n+1)x}{\sin x}dx$$

我们利用和差化积公式得到:

$$c_{n+1}-c_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin[(2n+2)x+x]-\sin[(2n+2)x-x]}{\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos(2n+2)x}{\sin x}dx=0\Rightarrow c_n=\frac{\pi}{2}$$

我们得到: a_n 是等差数列,$a_n=\dfrac{n\pi}{2}$

April 9

例题 30.17.

方程 $F(cx-az,cy-bz)=0$ 确立了函数 $z=z(x,y)$, 求 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}$

解

隐函数求导法则: $G(x,y,z)=F(u,v),\begin{cases}u=cx-az\\ v=cy-bz\end{cases}$, 我们有:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=\dfrac{cF_1'}{aF_1'+bF_2'}\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'}=\dfrac{cF_2'}{aF_1'+bF_2'}\end{cases}$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$$

例题 30.18.

设函数 f, g 均可微, 且 $z = f[xy, \ln x + g(xy)]$, 求 $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = yf_1' + (\frac{1}{x} + yg')f_2' \\ \frac{\partial z}{\partial y} = xf_1' + xg'f_2' \end{cases}$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = f_2'$$

April 10

例题 30.19.

$f'(x)$ 连续, $|f'(x)| \le M$, $\int_0^1 f(x)dx = 0$, 证明:

$$\forall a \in [0,1], \left|\int_0^a f(x)dx\right| \le \frac{M}{8}$$

解

我们令: $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 原命题等价于:

$$|F''(x)| \le M, F(0) = F(1) = 0, \forall a \in [0,1], |F(x)| \le \frac{M}{8}$$

利用泰勒反向展开:

$$\begin{cases} F(0) = F(x) + F'(x)(0-x) + \frac{F''(\varepsilon_1)}{2}(0-x)^2 & ① \\ F(1) = F(x) + F'(x)(1-x) + \frac{F''(\varepsilon_2)}{2}(1-x)^2 & ② \end{cases}$$

我们利用 $(1-x)①+x②$ 得到:

$$F(x) = -\frac{F''(\varepsilon_1)}{2}x^2(1-x) - \frac{F''(\varepsilon_2)}{2}x(1-x)^2$$

$$|F(x)| \le \frac{M}{2}[x^2(1-x) + x(1-x)^2] = \frac{M}{8}$$

例题 30.20.

求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n + (-2)^n}{n}(x-1)^n$ 的收敛域

解

先求幂级数收敛半径:

$$\rho = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n + (-2)^n}{n}} = 3 \Rightarrow r = \frac{1}{3}$$

原幂级数中心点 $x=1$, 收敛区间为 $(\frac{2}{3},\frac{4}{3})$, 我们验证端点值 $x=\frac{2}{3}, x=\frac{4}{3}$

当 $x=d\frac{2}{3}$ 时, 原幂级数为 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{(-3)^n n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n3^n}$, 原级数收敛.

当 $x=d\frac{4}{3}$ 时, 原幂级数为 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-2)^n}{n3^n}$, 原级数发散.

幂级数收敛域为 $[\frac{2}{3},\frac{4}{3})$

April 11

例题 30.21.

设幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 和 $\frac{1}{3}$, 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n^2}{b_n^2}x^n$ 收敛半径

解 由题意知:

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\frac{3}{\sqrt{5}}\\ \lim\limits_{n\to+\infty}|\frac{b_{n+1}}{b_n}|=3\end{cases}$$

后面幂级数收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}$, 我们有:

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}|\frac{a_{n+1}^2b_n^2}{a_n^2b_{n+1}^2}|=\frac{9}{5}\frac{1}{9}=\frac{1}{5}\Rightarrow R=5$$

(有些许问题)

例题 30.22.

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$, 计算 $f''_{xy}(0,0)$ 和 $f''_{yx}(0,0)$

解

$$\begin{cases}f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0\\ f'_y(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}f'_x=\dfrac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2}+\dfrac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\\ f'_y=\dfrac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}-\dfrac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}f''_{xy}(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y}=-1\\ f''_{yx}(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x}=1\end{cases}$$

April 12

例题 30.23.

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $f(0)=f(1)=0, \min_{x\in[0,1]}\{f(x)\}=-1$, 证明:

$$\exists\varepsilon\in(0,1),\ s.t.\ f''(\varepsilon)\geq 8$$

解

$f(0)=f(1)=0, \underset{x\in[0,1]}{min}\{f(x)\}=-1$, 由费马定理我们得到:

$$\exists x_0\in(0,1), f'(x_0)=0$$

我们利用泰勒展开,$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒展开式:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\eta)}{2}(x-x_0)^2, \eta\in x\sim x_0$$

(1). 当 $x=0$ 时,$f(0)=-1+\frac{f''(\eta_1)}{2}x_0^2=0\Rightarrow f''(\eta_1)=\frac{2}{x_0^2}$

(2). 当 $x=0$ 时,$f(1)=-1+\frac{f''(\eta_2)}{2}(1-x_0)^2=0\Rightarrow f''(\eta_1)=\frac{2}{(1-x_0)^2}$

我们不妨记 $f''(\eta)=max(f''(\eta_1),f''(\eta_2))$, 利用不等式的知识, 我们得到:

$$f''(\eta)\geq\frac{2}{(\frac{1}{2})^2}=8$$

我们得到: $\exists\varepsilon=\eta\in(0,1)$, 使得 $f''(\varepsilon)\geq 8$

例题 30.24.

设 m,n 均是正整数, 证明: $\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 收敛性与 m,n 无关

解

令 $f(x)=\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}=x^{-\frac{1}{n}}[\ln(1-x)]^{-\frac{2}{m}}$

我们需要讨论 $x\longrightarrow 0^+$ 和 $x\longrightarrow 1^-$ 两个可能的瑕点

$$\text{(i).}\lim_{x\to 0^+}f(x)=x^{\frac{2}{m}-\frac{1}{n}}=\begin{cases}0, \frac{2}{m}>\frac{1}{n}\\ 1, \frac{2}{m}=\frac{1}{n}\\ +\infty, \frac{2}{m}<\frac{1}{n}\end{cases}$$

(ii). $\lim_{x\to 1^-}f(x)=-\infty$

综合 (i)(ii), 我们知道 $x=1$ 一定是 $f(x)$ 的瑕点,$x=0$ 在一定情况下是 $f(x)$ 的瑕点.

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx=I_1+I_2$$

(1). 我们讨论 I_2 的收敛性, 我们比较 $f(x)$ 和 $\frac{1}{\sqrt[m]{1-x}}$:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)}{\frac{1}{\sqrt[m]{1-x}}}=\sqrt[m]{\frac{\ln^2(1-x)}{\frac{1}{1-x}}}\overset{t=1-x}{\Longrightarrow}\lim_{t\to0^+}\sqrt[m]{t}\ln^2 t=0$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)dx<\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{\sqrt[m]{1-x}}dx$$

后面的定积分收敛,I_2 收敛

(2). 我们讨论 I_1 的收敛性, 我们比较 $f(x)$ 和 $\frac{1}{\sqrt[n]{x}}$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{\frac{1}{\sqrt[n]{x}}}=\lim_{x\to0^+}\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}=0$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt[n]{x}}dx$$

后面的定积分收敛,I_1 收敛.

I 积分收敛, 与 m,n 的取值无关.

April 13

例题 30.25.

设数列 a_n 单调减少, $\lim_{n\to+\infty}a_n=0, S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k(n=1,2\ldots)$ 无界, 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(x-1)^n$ 收敛域

解

我们不难发现幂级数的中心点为 $x=1$, 数列 a_n 单调减少, $\lim_{n\to+\infty}a_n=0\Rightarrow a_n$ 是正项级数.

(i). 当 $x=0$ 时, 我们得到幂级数为 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$, 莱布尼兹判别法得到级数收敛, 由阿贝尔定理我们得到: $x\in(0,2)$, 级数收敛.

(ii). 当 $x=2$ 时, 我们得到幂级数为 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$, 级数发散, 由阿贝尔定理我们得到: $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$, 级数发散.

综合 (i)(ii), 我们的得到幂级数收敛域为 $[0,2)$

例题 30.26.

判断函数 $f(x,y)=\begin{cases}y\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq0\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处是否连续, 是否可微, 一阶偏导数是否连续

解

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}y\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}y\frac{\pi}{2}=0=f(0,0)$$

(i).$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$$
$$f_y'(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\arctan\frac{1}{|y|}=\frac{\pi}{2}$$

(ii).$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数为 $f_x'(0,0)=0, f_y'(0,0)=\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f_x'(0,0)(x-0)-f_y'(0,0)(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=y\frac{\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

(iii).$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

公式法求 $f(x,y)$ 偏导数:

$$f_x'=y\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}(-x)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}=-xy\frac{(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}}{1+x^2+y^2}$$
$$f_y'=\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-y^2\frac{(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}}{1+x^2+y^2}$$

我们得到一阶偏导数在 $(0,0)$ 处的极限:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}f_x'(x,0)=0=f_x'(0,0)\\ \lim\limits_{y\to 0}f_y'(0,y)=\frac{\pi}{2}=f_y'(0,0)\end{cases}$$

(iiii). 原函数一阶偏导数在 $(0,0)$ 处连续.

April 14

例题 30.27.

将 $f(x)=\dfrac{5x-12}{x^2+5x-6}$ 展开为 x 的幂级数

解

$$\frac{5x-12}{x^2+5x-6}=\frac{6}{x+6}+\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1+\frac{x}{6}}+\frac{1}{1-x}$$

我们由常见幂级数展开式得到:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n,\ -1<x<1$$
$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^n,\ -1<x<1$$

我们可以得到:

$$\frac{1}{1+\frac{x}{6}}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\frac{x}{6})^n,-1<\frac{x}{6}<1$$

我们可以得到:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\frac{x}{6})^n+\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{(-1)^n}{6^n})x^n,-1<x<1$$

例题 30.28.

证明: $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续, $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微

解

由题意得:

$$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}\dfrac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}=f'_x(x_0,y_0)\Rightarrow f(x,y_0)-f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+\alpha(x,y)\\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}\dfrac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}=f'_y(x_0,y_0)\Rightarrow f(x_0,y)-f(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)+\beta(x,y)\end{cases}$$

我们要证明函数在 (x_0,y_0) 处可微, 我们只需要证明:

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)+o(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})$$

$$\begin{aligned}f(x,y)-f(x_0,y_0)&=(f(x,y)-f(x_0,y))+(f(x_0,y)-f(x_0,y_0))\\&=f'_x(\varepsilon_1,y)(x-x_0)+f'_y(x,\varepsilon_2)(y-y_0)\\&=\left[f'_x(\varepsilon_1,y)-f'_x(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\right](x-x_0)\\&+\left[f'_y(x,\varepsilon_2)-f'_y(x_0,y_0)+f'_y(x_0,y_0)\right](y-y_0)\\&=dz+\alpha_1(x,y)+\beta_1(x,y)\end{aligned}$$

我们有:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}\alpha_1(x,y)=0\quad\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}\beta_1(x,y)=0$$

证毕.

30.3 Week III

April 15

例题 30.29.

将函数 $f(x)=\ln(1-x-2x^2)$ 展开为 x 的幂级数, 并指出其收敛区间

解

$$\ln(1-x-2x^2)=\ln(1+x)+\ln(1-2x)$$

我们根据:

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},-1<x\le 1$$

得到上面式子的展开式:

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},-1<x\le 1$$

$$\ln(1-2x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2x)^n}{n},-1<-2x\le 1$$

我们得到 $f(x)$ 的展开式为:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}[\frac{(-1)^n-2^n}{n}]x^n,-\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}$$

函数 $f(x)$ 的收敛区间为 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

例题 30.30.

设 $f(x),g(x)$ 在 $x\in[0,1]$ 上的导数连续, 且 $f(0)=0,f'(x)\ge 0,g'(x)\ge 0$, 证明:

$$\forall a\in[0,1],\int_0^a g(x)f'(x)dx+\int_0^1 f(x)g'(x)dx\ge f(a)g(1)$$

解

我们设 $F(x)=\int_0^x g(t)f'(t)dt+\int_0^1 f(t)g'(t)dt-f(x)g(1)$.

我们有:

$$F'(x)=g(x)f'(x)-g(1)f'(x)=f'(x)[g(x)-g(1)]$$

我们知道: $f'(x)\ge 0,g'(x)\ge 0\Rightarrow g(x)\le g(1),x\in[0,1]$

我们得到: $F'(x)\le 0\Rightarrow F(x)$单调递减

$$F(x)\ge F(1)=\int_0^1 g(x)df(x)+\int_0^1 f(x)g'(x)dx-f(1)g(1)=-f(0)g(0)=0$$

原命题得证, 证毕.

April 16

例题 30.31.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调递减, 证明:

$$\forall\lambda\in(0,1),\int_0^\lambda f(x)dx>\lambda\int_0^1 f(x)dx$$

解

我们构造: $F(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}$

我们对 $F(x)$ 求导得到:

$$F'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(t)dt}{x^2}$$

我们令 $G(x)=xf(x)-\int_0^x f(t)dt$, 我们得到:

$$G'(x)=f(x)+xf'(x)-f(x)=xf'(x),\ x\in[0,1]$$

我们已知 $f(x)$在$[0,1]$上连续且单调递减, 我们可以得到$f'(x)<0,\ x\in(0,1)$

我们得出: $G'(x)<0,\ x\in(0,1)$

$G(x)$在$(0,1)$上单调递减, $G(x)<G(0)=0\Rightarrow F'(x)<0,\ x\in(0,1)$, $F(x)$单调递减 我们得到:

$$F(x)>F(1)\Rightarrow\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}>\frac{\int_0^1 f(x)dx}{1}$$

即 $\forall\lambda\in(0,1)$, $\int_0^\lambda f(x)dx>\lambda\int_0^1 f(x)dx$

例题 30.32.

$z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, $f(1)=0$, $f'(1)=1$, 求 $f(x)$ 表达式

解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf(x^2+y^2)+2x(x^2+y^2)f'(x^2+y^2)\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2yf(x^2+y^2)+2y(x^2+y^2)f'(x^2+y^2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f(x^2+y^2)+4x^2f'(x^2+y^2)+(6x^2+2y^2)f'(x^2+y^2)+4x^2(x^2+y^2)f''(x^2+y^2)\\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f(x^2+y^2)+4y^2f'(x^2+y^2)+(6y^2+2x^2)f'(x^2+y^2)+4y^2(x^2+y^2)f''(x^2+y^2)\end{cases}$$

我们可以得到:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4f(u)+12uf'(u)+4u^2f''(u)=0,\ u=x^2+y^2$$

问题转化为:

$$u^2f''(u)+3uf'(u)+f(u)=0\Rightarrow(u^2f''(u)+2uf'(u))+(uf'(u)+f(u))=[u^2f'(u)+uf(u)]'=0$$

我们得到: $u^2f'(u)+uf(u)=C$, 又因为 $f(1)=0, f'(1)=1\Rightarrow C=1$

我们得到一个一阶线性微分方程: $uf'(u)+f(u)=\dfrac{1}{u}$

利用公式法, 我们得到:

$$(uf(u))'=\frac{1}{u}\Rightarrow uf(u)=\ln u+C_2\Rightarrow uf(u)=\ln u$$

我们得到: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

April 17

例题 30.33.

将 $f(x) = \arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数

解

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}, -1 < x^2 < 1$$

我们有:

$$f(x) - f(0) = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}dx$$

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x (-1)^n x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

$f(0) = \dfrac{\pi}{4}$, 我们有: $f(x) = \dfrac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, -1 < x < 1$

例题 30.34.

微分方程 $y' = \dfrac{y(1-x)}{x}$ 通解

解

分离变量

原微分方程可以化为:

$$\begin{aligned} &(i) \quad y \neq 0 \quad \frac{1}{y}dy = (\frac{1}{x} - 1)dx \\ &(ii) \quad y = 0 \quad y'(x) = 0, \text{满足条件} \end{aligned}$$

针对 (i), 我们同时求不定积分得到:

$$\ln|y| = \ln|x| - x + C_1 \Rightarrow \ln|y| = \ln|cxe^{-x}| \Rightarrow y = cxe^{-x}$$

综合 (i)(ii), 我们得到微分方程通解: $y = Cxe^{-x}, C \in \mathbb{R}$

April 18

例题 30.35.

方程 $x^3 + y^3 = 3axy(a > 0)$ 确定隐函数 $y = y(x)$, 求 $y = y(x)$ 的斜渐近线

解

令 $t = \dfrac{y}{x} \longrightarrow y = tx$

我们得到: $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$ 当 $x \to \infty, t \to -1$

我们得到:

(i).

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to-1^-} t = -1 \\ b &= \lim_{x\to+\infty} (y-ax) = \lim_{t\to-1^-} (\frac{3at^2}{1+t^3} + \frac{3at}{1+t^3}) = -a \end{aligned}$$

(ii).

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to-1^+} t = -1 \\ b &= \lim_{x\to-\infty} (y-ax) = \lim_{t\to-1^+} (\frac{3at^2}{1+t^3} + \frac{3at}{1+t^3}) = -a \end{aligned}$$

斜渐近线为: $y = -x - a$

例题 30.36.

已知函数 $y = y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y = \dfrac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha$, 当 $\Delta x \to 0, \alpha$ 是 Δx 的高阶无穷小, $y(0) = \pi$, 求 $y(1)$

解

我们由题意得到微分方程:

$$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{1+x^2}dx \Rightarrow \ln|y| = \arctan x + C \Rightarrow y = Ce^{\arctan x}$$

由 $y(0) = \pi, \Rightarrow C = \pi$, 我们得到$y(x)$表达式 : $y(x) = \pi e^{\arctan x} \Rightarrow y(1) = \pi e^{\frac{\pi}{4}}$

April 19

例题 30.37.

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2n+1)x^n$ 收敛域, 并求其和函数

解

(i). 先求幂级数收敛半径:

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+3}{2n+1} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\rho} = 1$$

(ii). 验证两个端点

当 $x = \pm 1$ 时, 幂级数对应的级数发散.

我们得到原幂级数的收敛域为 $(-1, 1)$.

$$S(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 2x[\sum_{n=1}^{+\infty} x^n]' + \frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2}, -1 < x < 1$$

例题 30.38.

微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\frac{1}{2}(\frac{y}{x})^3$, 满足 $y|_{x=1}=1$ 的特解

解

令 $z=\frac{y}{x}$, 我们得到 : $y=xz\Rightarrow\frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx}$
原微分方程可化为:

$$(z+x\frac{dz}{dx})=z-\frac{1}{2}z^3\text{满足}z|_{x=1}=1$$

我们可以得到: $-\frac{2}{z^3}dz=\frac{1}{x}dx\Rightarrow\frac{1}{z^2}=\ln x+c$

我们有$z|_{x=1}=1$, 得到 : $1+\ln x=\frac{1}{z^2}\Rightarrow y^2=\frac{x^2}{1+\ln x}$

我们得到: $\frac{dy}{dx}|_{(1,1)}=\frac{1}{2}>0\Rightarrow y=\frac{x}{\sqrt{1+\ln x}}$

April 20

例题 30.39.

求微分方程 $(x+y)dx+(y-x)dy=0$ 满足 $y(1)=-1$ 的特解

解

我们对微分方程进行一些简单的变形:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$$

我们令 $z=\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx}$
原微分方程可以化简为:

$$\frac{1}{x}dx=\frac{1-z}{1+z^2}dz\Rightarrow\ln|x|=\arctan z-\ln\sqrt{z^2+1}+C$$

即: $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}+C$, 由$y(1)=-1$得到$C=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}$

我们得到微分方程的特解为: $\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}$

例题 30.40.

$f(x,y)$ 连续, 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-xy}{x^2+y^2}=1$, 判断 $f(0,0)$ 是极大值还是极小值

解

极小值点, 理由如下: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-xy}{x^2+y^2}=1$, 我们可以得到在 $(0,0)$ 的一个去心邻域内,

我们有:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= xy+(x^2+y^2)(1+\alpha)=\frac{1}{2}(x+y)^2+(x^2+y^2)(\frac{1}{2}+\alpha) \\ \text{其中} & \lim_{(x,y)\to(0,0)} \alpha = 0 \end{aligned}$$

我们得到在 $(0,0)$ 的一个邻域内,$f(x,y)\geq 0$, $f(0,0)$是极小值

April 21

例题 30.41.

求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{2n+1}-1)x^{2n}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)$

解

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}-\sum_{n=1}^{+\infty}x^{2n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}-\frac{x^2}{1-x^2}$$

(i). 当 $x\neq 0$, $S(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}-\frac{x^2}{1-x^2}=\frac{1}{x}\int_0^x\sum_{n=1}^{+\infty}x^{2n}-\frac{x^2}{1-x^2}$

$$S(x)=\frac{\ln\frac{1-x}{1+x}}{2x}-\frac{1}{1-x^2}$$

(ii). 当 $x=0$,$S(x)=0$.

综上,$S(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln\frac{1-x}{1+x}}{2x}-\dfrac{1}{1-x^2}, 0<|x|<1 \\ 0, x=0 \end{cases}$

例题 30.42.

求微分方程 $(y+x^3)dx-2xdy=0$ 满足 $y\big|_{x=1}=\frac{6}{5}$ 的特解

解

我们对微分方程化简: $y'-\frac{1}{2x}y=\frac{x}{2}\Rightarrow(\frac{y}{\sqrt{x}})'=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2}$

我们得到: $y=\frac{x^3+C\sqrt{x}}{5}, y|_{x=1}=\frac{6}{5}\Rightarrow C=5$

原微分方程的解: $y=\frac{x^3+5\sqrt{x}}{5}$

30.4 Week IV

April 22

例题 30.43.

求微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 的特解

解

原微分方程可化为: $y'+\dfrac{2}{x}y=\ln x \Rightarrow (x^2y)'=x^2\ln x$

原微分方程的解为: $y=\dfrac{\int x^2\ln x dx+C}{x^2} \Rightarrow y=\dfrac{x(3\ln x-1)}{9}+\dfrac{C}{x^2}$

我们由 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 得到: $y=\dfrac{x(3\ln x-1)}{9}$

例题 30.44.

$f(x,y)=x^4+2y^2-3x^2y$ 判断 $f(0,0)$ 处极值情况

解

$f(0,0)$ 不是极值点, 理由如下:

$$f(x,y)=(x^2-\frac{3}{2}y)^2-\frac{1}{4}y^2$$

(i). 当 $y=0, f(x,y)\geq 0$

(ii). 当 $x^2=\dfrac{3}{2}y, f(x,y)\leq 0$

April 23

例题 30.45.

$$\int_0^{+\infty}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^x e^{-t^2}dt\right]dx$$

解

方法 1: 分部积分法

$$\int_0^{+\infty}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^x e^{-t^2}dt\right]dx=x\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^x e^{-t^2}dt\right]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^x e^{-t^2}dt}{\frac{1}{x}}-\frac{1}{2}d(e^{-x^2})=\frac{1}{2}$$

方法 2: 二重积分交换积分次序

$$\int_0^{+\infty}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^x e^{-t^2}dt\right]dx=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt-\int_0^x e^{-t^2}dt\right]dx$$

我们得到:

$$\int_0^{+\infty}(\int_x^{+\infty}e^{-t^2}dt)dx=\int_0^{+\infty}dt\int_0^t e^{-t^2}dx=\int_0^{+\infty}te^{-t^2}dt=\frac{1}{2}$$

例题 30.46.

设 $F(x) = f(x)g(x)$, 其中函数 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足以下条件: $f'(x) = g(x), g'(x) = f'(x)$, 且 $f(0) = 0, f(x) + g(x) = 2e^x$

(i). 求 $F(x)$ 满足的一阶微分方程

(ii). 求 $F(x)$ 表达式

解

(i). 我们有:

$$F'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) = f^2(x) + g^2(x) = (f(x) + g(x))^2 - 2f(x)g(x)$$

我们得到 $F(x)$ 满足的微分方程为: $F'(x) + 2F(x) = 4e^{2x}$

(ii). 我们利用一阶线性微分方程公式得到:

$$(e^{2x}F(x))' = 4e^{4x} \Rightarrow F(x) = \frac{e^{4x} + C}{e^{2x}}$$

由 $f(0) = 0 \Rightarrow F(0) = 1 + C = 0 \Rightarrow C = -1, F(x) = e^{2x} - e^{-2x}$

April 24

例题 30.47.

求级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{(n^2 - 1)2^n}$

解

我们引入幂级数:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2 - 1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)x^n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}\right)$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} = x\left(\sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^x x^{n-2}dx\right) = x\int_0^x \left(\sum_{n=2}^{+\infty} x^{n-2}\right)dx = -x\ln(1-x)$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}}{x} = \frac{\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \int_0^x x^n dx}{x} = \frac{\int_0^x \left(\sum\limits_{n=2}^{+\infty} x^n\right)dx}{x} = -\frac{x}{2} - 1 - \frac{\ln(1-x)}{x}$$

原幂级数的和函数为:

$$S(x) = \frac{1}{2}\left(-x\ln(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{x}{2} + 1\right), -1 < x < 1$$

我们得到: $S(\frac{1}{2}) = \frac{5}{8} - \frac{3\ln 2}{4}$

例题 30.48.

已知 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}(x\geq 0), g(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$, 求 $f(g(x))$

解

$$\text{我们易得到: } f(x)=\begin{cases} x^2, x\geq 2 \\ 2x, \frac{1}{2}<x<2 \\ 1, 0\leq x\leq \frac{1}{2} \end{cases},\quad g(x)=\begin{cases} -x, |x|>1 \\ 0, x=1 \\ 1, -1\leq x<1 \end{cases}.$$

我们可以得到:

$$f(g(x))=\begin{cases} x^2, x\leq -2 \\ -2x, -2<x<-1 \\ 2, -1\leq x<1 \\ 1, x=1 \end{cases}$$

April 25

例题 30.49.

已知 $y_1=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}, y_2=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解, 求 $q(x)$

解

由题意得:

$$\begin{cases} y_1'+p(x)y_1=q(x) \\ y_2'+p(x)y_2=q(x) \end{cases}\Rightarrow (y_1-y_2)'+p(x)(y_1-y_2)=0\Rightarrow p(x)=-\frac{(y_1-y_2)'}{y_1-y_2}$$

我们得到: $p(x)=-\dfrac{x}{1+x^2}$

任意带入一个方程: $q(x)=y_1'+p(x)y_1=3x(1+x^2)$

例题 30.50.

设 $z=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,$f_y'\neq 0$, 证明: 对任意的常数 k, 曲线 $f(x,y)=k$ 是直线的充分必要条件为

$$(f_y')^2f_{xx}''-2f_x'f_y'f_{xy}''+(f_x')^2f_{yy}''=0$$

解

$f(x,y)=k$为直线 $\Rightarrow f(x,y)=ax+by+c=k$

(i). 必要性

$f(x,y)=k$为直线 $\Rightarrow f_{xx}''=f_{yy}''=f_{xy}''=0$, 我们可以得到:

$$(f_y')^2f_{xx}''-2f_x'f_y'f_{xy}''+(f_x')^2f_{yy}''=0$$

(ii). 充分性

我们记 $\begin{cases} f'_x = f'_1 \\ f'_y = f'_2 \\ f''_{xx} = f''_{11} \\ f''_{xy} = f''_{12} \\ f''_{yx} = f''_{21} \\ f''_{yy} = f''_{22} \end{cases}$，我们将 $f(x,y)=k$ 对 x 求导:

$$f'_1 + f'_2\frac{dy}{dx} = 0$$

再次对等式两边对 x 求导:

$$f''_{11} + f''_{12}\frac{dy}{dx} + (f''_{21} + f''_{22}\frac{dy}{dx})\frac{dy}{dx} + f'_2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

若要证明 $f(x,y)=k$ 是直线, 我们只需要证明:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Rightarrow f''_{11} + f''_{12}\frac{dy}{dx} + (f''_{21} + f''_{22}\frac{dy}{dx})\frac{dy}{dx} = 0$$

由隐函数求导公式: $\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_1}{f'_2}$, 我们化简上式:

$$f''_{11} + f''_{12}(-\frac{f'_1}{f'_2}) + (f''_{21} - f''_{22}\frac{f'_1}{f'_2})(-\frac{f'_1}{f'_2}) = \frac{(f''_2)^2 f''_{11} - 2f'_1f'_2f''_{12} + (f'_1)^2 f''_{22}}{(f''_2)^2} = 0$$

令分子为 0 即可:

$$(f''_2)^2 f''_{11} - 2f'_1f'_2f''_{12} + (f'_1)^2 f''_{22} = 0 \Rightarrow (f'_y)^2 f''_{xx} - 2f'_xf'_yf''_{xy} + (f'_x)^2 f''_{yy} = 0$$

April 26

例题 30.51.

判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ 敛散性

解

我们不妨记 $u_n = (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

级数的部分和 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

$$\begin{aligned} S_n &= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) - (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots \\ &+ (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{2} - \sqrt{1}) \end{aligned}$$

我们得到: $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1 - \sqrt{2}$, 原级数收敛

例题 30.52.

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^{\alpha}}$ 敛散性

解 我们有:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$n\to+\infty,\quad \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\sim\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^{\alpha}}\sim\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

我们可以得到:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^{\alpha}}\begin{cases}\text{收敛}, \alpha>\dfrac{1}{2}\\ \text{发散}, \alpha\le\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

April 27

例题 30.53.

设连续函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加, 下列说法正确的是:

- A. $\tan f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加
- B. $f'(x)>0, x\in(-\infty,+\infty)$
- C. $\int_{-1}^{x}\dfrac{f(t)}{1+f^2(t)}dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加
- D. $\int_{-1}^{e^x}\dfrac{1}{1+f^2(t)}dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加

解

(i). 对于 $f(x)=x^3$: $f'(x)\ge 0, tan f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不单调,A、B 错误

(ii). 令 $F(x)=\int_{-1}^{x}\frac{f(t)}{1+f^2(t)}dt, F'(x)=\frac{f(x)}{1+f^2(x)}, f(x)$ 正负性未知, 无法判断函数单调性,C 错误

(iii) 令 $F(x)=\int_{-1}^{x}\frac{1}{1+f^2(t)}dt, F'(x)=\frac{1}{1+f^2(x)}>0, F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

正确答案: D

例题 30.54.

下列微分方程是以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x, (C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R})$ 为通解的微分方程为:

- A. $y'''+y''-4y'-4y=0$
- B. $y'''+y''+4y'+4y=0$
- C. $y'''-y''-4y'+4y=0$
- D. $y'''-y''+4y'-4y=0$

解

我们易得: $y = C_1e^x + C_4e^0(A\cos 2x + B\sin 2x)$

我们可以得到原三阶微分方程对应的特征方程的三个根 $x_1 = 1,\ x_2 = 2i,\ x_3 = -2i$, 特征方程为: $(r-1)(r^2+4) = 0 \Rightarrow r^3 - r^2 + 4r - 4 = 0$

我们得到微分方程表达式为: $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$, 故答案选 D

April 28

例题 30.55.

设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 连续可导, 证明:

$$\int_0^a dx\int_0^x \frac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dy = \pi[f(a)-f(0)]$$

解

原二重积分等价于:

$$\begin{aligned}\int_0^a dy\int_y^a \frac{f'(y)}{\sqrt{(\frac{a-y}{2})^2-(x-\frac{a+y}{2})^2}}dx &= \int_0^a f'(y)[\arcsin(\frac{2x-a-y}{a-y})]|_y^a dy\\ &= \pi\int_0^a f'(y)dy = \pi[f(a)-f(0)]\end{aligned}$$

例题 30.56.

$f(x)$ 连续且为奇函数, 下列函数一定是偶函数的是:

- A. $\int_0^x du\int_a^u tf(t)dt$
- B. $\int_a^x du\int_0^u f(t)dt$
- C. $\int_0^x du\int_a^u f(t)dt$
- D. $\int_a^x du\int_0^u tf(t)dt$

解

(i). 对于 A、C, 我们交换二重积分的积分次序:

A: $\int_0^x du\int_a^0 tf(t)dt+\int_0^x du\int_0^u tf(t)dt = x\int_a^0 tf(t)dt+\int_0^x t^2f(t)dt$, 前一个是奇函数, 后一个是偶函数

C: $\int_0^x du\int_a^u f(t)dt = \int_0^x du\int_a^0 f(t)dt + \int_0^x du\int_0^u f(t)dt$, 前一个是奇函数, 后一个是奇函数

(ii). 对于 B、D, 我们交换二重积分的积分次序:

$$B:\ \int_a^0 du\int_0^u f(t)dt + \int_0^x du\int_0^u f(t)dt = \int_a^x tf(t)dt, \text{奇函数}$$

$$D:\ \int_a^0 du\int_0^u tf(t)dt + \int_0^x du\int_0^u tf(t)dt = \int_a^x t^2f(t)dt, \text{偶函数}$$

此题答案为: D

April 29

例题 30.57.

证明: $\int_0^1 dx \int_0^1 (xy)^{xy} dy = \int_0^1 x^x dx$

解

我们令 $xy = t, y = \frac{1}{x}t$, 我们得到原二重积分为: $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{x} t^t dt$.
我们交换二重积分的积分次序:

$$\int_0^1 dt \int_t^1 \frac{1}{x} t^t dx = -\int_0^1 t^t \ln t dt = -\int_0^1 x^x \ln x dx$$

我们只需要证明:

$$-\int_0^1 x^x \ln x dx = \int_0^1 x^x dx \Rightarrow \int_0^1 x^x (1+\ln x) dx = \int_0^1 e^{x\ln x} d(x\ln x) = 0$$

证毕.

例题 30.58.

微分方程 $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(1+\cos 2x)$ 的特解可以设为哪种形式:

- A. $Ae^{2x} + e^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$
- B. $Axe^{2x} + e^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$
- C. $Ae^{2x} + xe^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$
- D. $Axe^{2x} + xe^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$

解

原微分方程对应的特征方程为: $r^2 - 4r + 8 = 0 \Rightarrow r_1 = 2+2i,\ r_2 = 2-2i$
齐次微分方程的通解为: $e^{2x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$
对于方程: $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}$, 特解为: $C_1 e^{2x}$
对于方程: $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}\cos 2x$, 特解为: $xe^{2x}(C_2\cos 2x + C_3\sin 2x)$
我们得到方程的特解形式为: $y = C_1e^{2x} + xe^{2x}(C_2\cos 2x + C_3\sin 2x)$, 故此答案选 C

April 30

例题 30.59.

$f(x)$ 连续且为偶函数, 下列函数一定是偶函数的是:

- A. $\int_0^x (x-t^2) f(t) dt$
- B. $\int_a^x f(x-t) dt$
- C. $\int_0^x (x-2t) f(t) dt$
- D. $\int_a^x (x-2t) f(t) dt$

解

令 $f(x)=1$, 我们得到:

(i).$\int_0^x (x-t^2)f(t)dt=\int_0^x (x-t^2)dt=x^2-\frac{x^3}{3}$ 非奇非偶函数

(ii).$\int_a^x f(x-t)dt=\int_a^x dt=x-a$, 当$a=0$时为奇函数

(iii).$\int_0^x (x-2t)f(t)dt=\int_0^x (x-2t)dt=-\frac{x^2}{2}$, 偶函数

(iiii). $\int_a^x (x-2t)f(t)dt=\int_a^x (x-2t)dt=-\frac{x^2}{2}-\frac{ax}{2}+a^2$, 当$a=0$时为偶函数

故答案为: C

例题 30.60.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x t^{-5}dt}{\int_1^x t^{-3}dt}$$

解

原极限为: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{4x^4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2}$

第 31 章 May

31.1 Week I

May 1

例题 31.1.

求二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$ 的通解

解

原微分方程对应的特征方程为: $r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = 3$

齐次微分方程的通解为: $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$

我们设方程的特解为: $y^* = Ae^{2x} \Rightarrow A(4 - 8 + 3)e^{2x} = 2e^{2x} \Rightarrow A = -2$

我们得到原微分方程的通解为:

$$y = -2e^{2x} + C_1 e^x + C_2 e^{3x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

例题 31.2.

求微分方程 $y'' - 2y' - e^{2x} = 0$ 满足条件 $y(0) = 1, y'(0) = 1$ 的解

解

原微分方程对应的特征方程为: $r^2 - 2r = 0 \Rightarrow r_1 = 0,\ r_2 = 2$

我们得到齐次微分方程的通解: $y = C_1 e^{2x} + C_2$

我们设微分方程的特解为:

$$y^* = Axe^{2x} \Rightarrow A(4 + 4x - 2 - 4x)e^{2x} = e^{2x} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

我们得到方程的解为: $y = C_1 e^{2x} + C_2 + \frac{1}{2}xe^{2x}$

又因为 $y(0)=1, y'(0)=1 \Rightarrow$, 我们得到:

$$\begin{cases} C_1+C_2=1 \\ 2C_1+\frac{1}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=\frac{1}{4} \\ C_2=\frac{3}{4} \end{cases}$$

原微分方程的解: $y=\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}+\frac{3}{4}$

May 2

例题 31.3.

设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续,$f(x)>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}}$, 求 $f(x)$

解

我们得到:

$$\lim_{h\to 0} e^{\frac{1}{h}\ln(1+\frac{f(x+hx)-f(x)}{f(x)})}=\lim_{h\to 0} e^{\frac{1}{h}\frac{f(x+hx)-f(x)}{f(x)}}=e^{\frac{1}{x}}$$

我们进而得到:

$$\lim_{h\to 0}\frac{x}{f(x)}\frac{f(x+x)-f(x)}{hx}=\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x^2}$$

即: $\ln f(x)=-\frac{1}{x}+C$, 又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, 两边同时取 $x\to+\infty$ 的极限:

$$\lim_{x\to+\infty}\ln f(x)=\lim_{x\to+\infty}(-\frac{1}{x}+C)\Rightarrow C=0$$

我们得到: $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$

例题 31.4.

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n}{5^n-3^n}$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}-1}$ 敛散性

解

采取抓大头的方式, 利用级数判别方法中的比较法的极限形式

(i). $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(\frac{4^n}{5^n-3^n})^n}{(\frac{4}{5})^n}=1\Rightarrow$ 原级数和级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(\frac{4}{5})^n$ 同敛散性, 原级数收敛

(ii). $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n^3-1}}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}}=1\Rightarrow$ 原级数和级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ 同敛散性, 原级数收敛

May 3

例题 31.5.

设函数 $f(x)$ 连续, 且对于任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$, 恒有 $f(x+1) = -f(x)$, 下面结论不正确的是:

- A. $f(x)$ 是以 2 为周期的函数
- B. $\int_0^x [f(t) - f(-t)]dt$ 是以 2 为周期的函数
- C. $\int_0^x f(t)dt - \frac{x}{2}\int_0^2 f(t)dt$ 是以 2 为周期的函数
- D. $f'(x)$ 是以 2 为周期的函数

解

我们得到: $\begin{cases} f(x+1) + f(x) = 0 \\ f(x+2) + f(x+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x+2) = f(x)$

我们得到: $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数,A 正确

我们由原函数和导函数周期性关系得到:

$$f(x)\text{周期函数}, \int_0^x f(t)dt\text{周期函数} \Leftrightarrow \int_0^T f(x)dx = 0$$

对于 B 选项, 我们发现 $g(x) = f(x) - f(-x)$, $g(x)$是奇函数

$g(x)$是周期函数, 且 $\int_{-1}^1 g(x)dx = 0 \Rightarrow \int_0^x g(t)dt$是周期函数

对于 C 选项, 我们得到: $\int_0^x [f(t) - \frac{\int_0^2 f(x)dx}{2}]dt$

我们只需要证明:

$$\int_0^2 [f(t) - \frac{\int_0^2 f(x)dx}{2}]dt = 0$$

不妨设 $\int_0^2 f(x)dx = A$, 我们有:

$$\text{左边} = \int_0^2 [f(t) - \frac{A}{2}]dt = \int_0^2 f(x)dx - A = 0 \Rightarrow \text{原命题得证}$$

对于 D 选项, 我们未知 $f(x)$ 是否可导, 故此题答案选 D

例题 31.6.

求微分方程 $y'' + y = 4\sin x$ 的通解

解

特征方程为: $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = i,\ r_2 = -i$

齐次微分方程的通解为: $y = A\sin x + B\cos x$

非齐次微分方程特解: $y^* = x(C_1 \sin x + C_2 \cos x) \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = -2 \end{cases}$

原微分方程的通解为: $y = -2x\cos x + A\sin x + B\cos x$, A、$B \in \mathbb{R}$

May 4

例题 31.7.

求微分方程 $y''+y=\sin x+x\cos 2x$ 的通解

解

特征方程为: $r^2+1=0\Rightarrow r_1=i,\ r_2=-i$

齐次微分方程的通解为: $y=A\sin x+B\cos x$

非齐次微分方程特解:

$$y_1^*=x(C_1\sin x+C_2\cos x)\Rightarrow\begin{cases}C_1=0\\C_2=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow y_1^*=-\frac{x}{2}\cos x$$

$$y_1^*=(Ax+B)\sin 2x+(Cx+D)\cos 2x)\Rightarrow\begin{cases}C=-\frac{1}{3}\\A=D=0\\B=\frac{4}{9}\end{cases}\Rightarrow y_2^*=-\frac{x}{3}\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x$$

原微分方程的通解为: $y=y_1^*+y_2^*+A\sin x+B\cos x, A、B\in\mathbb{R}$

例题 31.8.

$$\lim_{x\to0}\int_0^{2x}du\int_0^{\sqrt{2ux-u^2}}\frac{cos(t-u)^2}{\ln(1+x|x|)}dt$$

解

我们不难发现此题需要分左右极限分别来求:

$$I_{左}=\lim_{x\to0}\frac{-\iint\limits_{D_1}\cos(t-u)^2d\sigma}{-x^2}$$

由二元函数的积分中值定理:

$$\iint\limits_{D_1}\cos(t-u)^2d\sigma=S_{D_1}f(\varepsilon_1,\varphi_1),(\varepsilon_1,\varphi_1)在以(0,x)为半径,x为半径的圆内$$

$$I_{左}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2\pi}{2}}{-x^2}\cos(\varepsilon_1-\varphi_1)^2=\frac{\pi}{2}$$

$$I_{右}=\lim_{x\to0}\frac{\iint\limits_{D_2}\cos(t-u)^2d\sigma}{x^2}$$

由二元函数的积分中值定理:

$$\iint\limits_{D_2} \cos(t-u)^2 d\sigma = S_{D_2} f(\varepsilon_2, \varphi_2), (\varepsilon_2, \varphi_2) 在以 (0, x) 为半径, x 为半径的圆内$$

$$I_{右} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2\pi}{2}}{x^2} \cos(\varepsilon_2 - \varphi_2)^2 = \frac{\pi}{2}$$

综上所述: $I = \frac{\pi}{2}$

May 5

例题 31.9.

下列函数中原函数必为周期函数的是:

- A. $|\sin x|$
- B. $\sin^4 x$
- C. $\dfrac{1}{1+\sin^2 x}$
- D. $\dfrac{\sin x}{1+\sin^4 x}$

解

原函数为周期函数, 只需满足函数为周期函数, 且 $\int_0^T f(t)dt = 0$

对于四个选项: A, B, C 对应的 $f(t)$ 在一个周期中函数值大于 0, $\int_0^T f(t)dt > 0$

此题答案选 D

例题 31.10.

设 $y = \frac{1}{2}e^{2x} + (x - \frac{1}{3})e^x$ 是二阶常系数线性微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个特解, 求 a, b, c

- A. $a = -3, b = 2, c = -1$
- B. $a = 3, b = 2, c = -1$
- C. $a = -3, b = 2, c = 1$
- D. $a = 3, b = 2, c = 1$

解

我们可以得到特征方程的两根: $r_1 = 1,\ r_2 = 2 \Rightarrow$ 特征方程为: $r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow a = -3,\ b = 2$

我们将特解 $y* = xe^x$ 代入微分方程, 得到: $c = -1$, 故此题选 A

May 6

例题 31.11.

设 $F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin x - a\cos x\right| dx$, 求 $F(a)$ 的最小值

解

$$F(a)=\sqrt{a^2+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin(x+\varphi)|dx, \text{其中}\begin{cases}\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\\ \sin\varphi=-\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\end{cases}$$

(1).$a>0,\ \varphi\in(-\frac{\pi}{2},0)$

$$\frac{F(a)}{\sqrt{a^2+1}}=\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}+\varphi}|\sin t|dt=2\int_0^{-\varphi}\sin tdt+\int_{-\varphi}^{\frac{\pi}{2}+\varphi}\sin tdt=2-\cos\varphi+\sin\varphi=2-\frac{a+1}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\begin{aligned}F(a)&=2\sqrt{a^2+1}-(a+1)\\ F'(a)&=\frac{2a-\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}}\\ \text{当}x&=\frac{\sqrt{3}}{3},F(a)_{min}=\sqrt{3}-1\end{aligned}$$

(2).$a<0,\ \varphi\in(0,\frac{\pi}{2})$

$$\frac{F(a)}{\sqrt{a^2+1}}=\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}+\varphi}|\sin t|dt=\cos\varphi+\sin\varphi=\frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$F(a)=1-a,\ F(a)\geq 1,\ F(a)_{min}=1$$

综上,$F(a)_{min}=\sqrt{3}-1$

例题 31.12.

设 $f(x)$ 连续且以 T 为周期, 则下列函数以 T 为周期的是:

- A. $\int_0^x f(t)dt$
- B. $\int_{-x}^0 f(t)dt$
- C. $\int_0^x f(t)dt-\int_{-x}^0 f(t)dt$
- D. $\int_0^x f(t)dt+\int_{-x}^0 f(t)dt$

解

我们知道如果原函数也为周期函数, 那么必有: $\int_0^T f(t)dt=0$

对于 A,B 选项, 我们自然可以排除掉, 没有任何附加条件

对于 C,D 选项

$$C\Rightarrow\int_0^x[f(t)-f(-t)]dt\text{奇函数}\Rightarrow\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[f(t)-f(-t)]dt=0$$

$$D\Rightarrow\int_0^x[f(t)+f(-t)]dt\text{偶函数}$$

故此题答案选 C

May 7

例题 31.13.

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^3)}$$

解

令 $x=\frac{1}{t}, t\in(0,+\infty), dx=-\frac{1}{t^2}dt$, 原积分等价于:

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{t^3}{(1+t^2)(1+t^3)}dt=\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{(1+x^2)(1+x^3)}dx$$
$$2I=\int_0^{+\infty}\frac{1+x^3}{(1+x^2)(1+x^3)}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}$$
$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^3)}=\frac{\pi}{4}$$

例题 31.14.

设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+2\int_0^x f(t)dt=x^2$, 求 $f(x)$

解

令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt, F'(x)=f(x)$, 原微分方程等价于:

$$F'(x)+2F(x)=x^2\Rightarrow[e^{2x}F(x)]'=x^2e^{2x}$$
$$e^{2x}F(x)=\int x^2e^{2x}dx\Rightarrow e^{2x}F(x)=\frac{x^2e^{2x}}{2}-\frac{xe^{2x}}{2}+\frac{e^{2x}}{4}+C$$

我们得到:

$$F(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+Ce^{-2x}$$

$f(x)=F'(x)=x-\frac{1}{2}-2Ce^{-2x}, f(0)=-\frac{1}{2}-2C=0\Rightarrow C=-\frac{1}{4}$

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-2x}+x-\frac{1}{2}$$

31.2 Week II

May 8

例题 31.15.

设连续函数 $f(x)$ 满足 $x\int_0^1 f(tx)dt=f(x)+x$, 求 $f(x)$

解

对于 $x\int_0^1 f(tx)dt$, 令 $u=tx, t=\dfrac{u}{x}, dt=\dfrac{du}{x}$, 原微分方程为:

$$\int_0^x f(u)du = f(x)+x$$

令 $F(x)=\int_0^x f(u)du = f(x)+x, F'(x)=f(x)$, 原微分方程等价于:

$$F(x)-F'(x)=x \Rightarrow [e^{-x}F(x)]'=-xe^{-x}$$

$$e^{-x}F(x)=\int(-xe^{-x})dx=(x+1)e^{-x}+C \Rightarrow F(x)=Ce^x+x+1$$

$$f(x)=F'(x)=Ce^x+1, f(0)=0 \Rightarrow C=-1$$

$$f(x)=1-e^x$$

例题 31.16.

求抛物线 $y=x^2$ 和直线 $x-y-2=0$ 之间的最短距离

解

方法一 (不太严谨):

设抛物线上任意一点坐标 $P(x_0,y_0)$, 点 P 到直线 $x-y-2=0$ 的距离为:

$$d=\frac{|x_0-x_0^2-2|}{\sqrt{2}}=\frac{(x_0-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}{\sqrt{2}}$$

$$d_{min}=\frac{7\sqrt{2}}{8}$$

方法二:

我们设抛物线上一点 P 坐标为 (x,y), 直线 $x-y-2=0$ 上一点 Q 坐标 (α,β), 我们得到 $|PQ|^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$.

我们令 $f(x,y,\alpha,\beta,\lambda,\mu)=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+\lambda(y-x^2)+\mu(\alpha-\beta-2)$

我们令:

$$\begin{cases} f'_x=2(x-\alpha)-2\lambda x=0 \\ f'_y=2(y-\beta)+\lambda=0 \\ f'_\alpha=-2(x-\alpha)+\mu=0 \\ f'_\beta=-2(y-\beta)-\mu=0 \\ f'_\lambda=y-x^2=0 \\ f'_\mu=\alpha-\beta-2=0 \end{cases}$$

我们解得:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{4} \\ \alpha = \dfrac{11}{8} \\ \beta = -\dfrac{5}{8} \\ \lambda = -\dfrac{7}{4} \\ \mu = -\dfrac{7}{4} \end{cases}$$

$$f(x,y,\alpha,\beta,\lambda,\mu)_{min} = f(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{11}{8},-\frac{5}{8},-\frac{7}{4},-\frac{7}{4}) = \frac{7\sqrt{2}}{8}$$

May 9

例题 31.17.

设 $f(x)$ 二阶可导, $f(-x) = -f(x), f(x+1) = f(x), x \in (-\infty,+\infty)$, 且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\sin(x-1)} = 1$

- A. $f''(99) \le f'(100) \le f(101)$
- B. $f(99) = f(100) < f'(101)$
- C. $f'(99) \le f(100) < f''(101)$
- D. $f(99) < f'(100) = f''(100)$

解

由题意知道:

$$f(x), f'(x), f''(x)\text{周期为}1, f(x), f''(x)\text{是奇函数, 且}f(1) = 0$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\sin(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 1$$

我们从而得到: $f(n) = 0, f'(n) = 1, f''(n) = 0$

此题答案选 B

例题 31.18.

设连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt + e^{-x} - 1$, 求 $f(x)$

解

原微分方程等价于:

$$\int_0^x f(t)dt = x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt + e^{-x} - 1$$

对微分方程左右两边对 x 求导, 得到:

$$f(x) = \int_0^x f(t)dt - e^{-x}$$

我们令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt, f(x)=F'(x)$, 上式等价于:

$$F(x)-F'(x)=e^{-x}\Rightarrow [e^{-x}F(x)]'=-e^{-2x}$$
$$F(x)=Ce^{x}+\frac{1}{2}e^{-x}$$
$$f(x)=F'(x)=Ce^{x}-\frac{1}{2}e^{-x}, f(0)=-1\Rightarrow C=-\frac{1}{2}$$
$$f(x)=-\frac{1}{2}e^{x}-\frac{1}{2}e^{-x}$$

May 10

例题 31.19. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)dt$, 求 $f(x)$

解

对微分方程左右两边对 x 求导, 得到:

$$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)dt$$

令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt, f(x)=F'(x)$, 上式等价于:

$$F''+F=\cos x$$

特征方程为 $r^2+1=0, r_1=i,\ r_2=-i$, 方程通解为 $F(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$
特解设为 $F(x)=x(A\cos x+B\sin x)$, 代入得到:

$$A=0,\ B=\frac{1}{2}$$
$$F(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{x}{2}\sin x$$
$$f(x)=F'(x)=C_2\cos x-C_1\sin x+\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x\Rightarrow\begin{cases}f(0)=0\\ f'(0)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=0\\ C_2=0\end{cases}$$
$$f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x$$

例题 31.20.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$$

解

典型的区间再现

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan(\frac{\pi}{4}-x))dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 - \ln(1+\tan x))dx$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 dx = \frac{\ln 2}{4}\pi$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx = \frac{\ln 2}{8}\pi$$

May 11

例题 31.21.

设 $f(x)$ 是连续的正值函数, 且单调减少, 证明:

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx} \le \frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}$$

解

原命题等价于:

$$\int_0^1 xf^2(x)dx \int_0^1 f(y)dy - \int_0^1 xf(x)dx \int_0^1 f^2(y)dy \le 0$$

$$I = \iint\limits_D [xf(x)f(y)(f(x)-f(y))]dxdy, D = \{0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1\}$$

积分区域关于 $y = x$ 对称, 我们交换 x, y 位置, 得到

$$2I = \iint\limits_D [f(x)f(y)(f(x)-f(y))(x-y)]dxdy, D = \{0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1\}$$

我们知道 $f(x)$ 单调递减, 且 $f(x) > 0$, 我们得到:

$$f(x)f(y) > 0,\ (x-y)(f(x)-f(y)) \le 0 \Rightarrow I \le 0, \text{证毕}$$

例题 31.22.

$$\iint\limits_D \frac{1}{\arcsin\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

其中 $D = \{(x,y)|x^2+y^2 \le 1, x^2+y^2 \ge y, x \ge 0, y \ge 0\}$

解

利用极坐标公式进行代换,$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$, 我们得到:

$$I = \iint\limits_{D_1} \frac{r}{\arcsin r}drd\theta, \theta \in (0, \frac{\pi}{2}),\ r \in (\sin\theta, 1)$$

上面的积分可以化为:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\sin\theta}^1\frac{r}{\arcsin r}dr=\int_0^1 dr\int_0^{\arcsin r}\frac{r}{\arcsin r}d\theta=\frac{1}{2}$$

$$\iint\limits_D\frac{1}{\arcsin\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\frac{1}{2}$$

May 12

例题 31.23.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 在 $(0,1)$ 内可导, $\int_0^1 f(x)dx=1$, 证明:

$$\exists\xi\neq\eta\in(0,1),\ s.t.\ f(\xi)+3f(\eta)=4f(\xi)f(\eta)$$

解

我们令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, 我们有:

$$F(0)=0,\ F(1)=1,F(x)\text{在}[0,1]\text{连续},\text{在}(0,1)\text{可导}$$

原命题转化为证明:

$$\exists\xi\neq\eta\in(0,1),\text{s.t. }F'(\xi)+3F'(\eta)=4F'(\xi)F'(\eta)$$

上面的式子我们进行一些变形:

$$\exists\xi\neq\eta\in(0,1),\text{s.t. }\frac{1}{F'(\eta)}+\frac{3}{F'(\xi)}=4$$

$F(x)$在$[0,1]$连续, $F(0)=0,F(1)=1$,$\exists c\in(0,1)\text{s.t. }F(c)=\frac{1}{4}$.

由拉格朗日中值定理我们得到:

$$\exists\xi\in(0,c),\eta\in(c,1),\text{s.t.}\begin{cases}\dfrac{F(c)-F(0)}{c}=F'(\xi)\\ \dfrac{F(1)-F(c)}{1-c}=F'(\eta)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{F'(\xi)}=4c\\ \dfrac{1}{F'(\eta)}=\frac{4}{3}(1-c)\end{cases}$$

$$\frac{1}{F'(\xi)}+\frac{3}{F'(\eta)}=4c+4(1-c)=4$$

$$\exists\xi\neq\eta\in(0,1),\text{s.t. }f(\xi)+3f(\eta)=4f(\xi)f(\eta),\text{证毕}$$

例题 31.24.

函数 $\dfrac{|x|e^{\frac{1}{x-1}}\ln(x-1)^2}{x(x-1)(x-2)}$ 在下列哪个区间内无界:

- A. $(-\infty,0)$
- B. $(0,1)$
- C. $(1,2)$

- D. $(2, +\infty)$

解

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{-2x\ln(1-x)}{2ex}=0,\ \lim_{x\to 0^+}\frac{2x\ln(1-x)}{2ex}=0$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2e^{\frac{1}{x-1}}\ln(1-x)}{1-x}=0,\ \lim_{x\to 1^+}\frac{2e^{\frac{1}{x-1}}\ln(x-1)}{1-x}=\infty$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2e\ln(x-1)}{x-2}=2e$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{2\ln(x-1)}{(x-1)(x-2)}=0,\ \lim_{x\to -\infty}\frac{-2\ln(1-)}{(x-1)(x-2)}=0$$

答案:C

May 13

例题 31.25.

求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$ 和 $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to 1}}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{\frac{y^2}{\sin\frac{2}{x}}}$

解

$$I_1=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1+x^2+y^2-1}{(x^2+y^2)(\sqrt{1+x^2+y^2}+1)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}+1}=\frac{1}{2}$$

$$I_2=\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to 1}}e^{\frac{y^2}{\sin\frac{2}{x}}}\ln(1+\frac{1}{xy})$$

$$I_2=\lim_{\substack{x\to +\infty\\ y\to 1}}e^{\frac{xy^2}{2}\frac{1}{xy}}=e^{\frac{1}{2}}$$

例题 31.26.

$$\int_0^{\pi}(e^{-\cos x}-e^{\cos x})\,dx$$

解

区间再现

原积分等价于:

$$I=\int_0^{\pi}(e^{\cos x}-e^{-\cos x})\,dx$$

$$2I=0\Rightarrow I=0$$

May 14

例题 31.27.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\arctan e^x) \sin^2 x dx$$

解

区间再现

原积分等价于:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - \arctan e^x) \sin^2 x dx$$

$$2I = \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{4}$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\arctan e^x) \sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{8}$$

例题 31.28.

设 $f(x) = \int_0^x f(x-t) \sin t dt + x$, 求 $f(x)$

解

我们有: $\int_0^x f(x-t) \sin t dt = \sin x \int_0^x f(t) \cos t dt - \cos x \int_0^x f(t) \sin t dt$

原微分方程等价于:

$$f(x) = \sin x \int_0^x f(t) \cos t dt - \cos x \int_0^x f(t) \sin t dt + x$$

两边对 x 求导得到:

$$f'(x) = 1 + \cos x \int_0^x f(t) \cos t dt + \sin x \int_0^x f(t) \sin t dt$$

再次两边对 x 求导得到:

$$f''(x) = f(x) + \cos x \int_0^x f(t) \sin t dt - \sin x \int_0^x f(t) \cos t dt \Rightarrow f''(x) = f(x) + x - f(x)$$

$$f''(x) = x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + C_1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{6}x^3 + C_1 x + C_2$$

我们有: $f(0) = 0,\ f'(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 1,\ C_2 = 0$

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + x$$

31.3 Week III

May 15

例题 31.29.

下列函数在区间 $(0,1)$ 内无界的是:

- A. $\int_0^x \frac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}dt$
- B. $\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$
- C. $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1-t)^3}}dt$
- D. $\int_0^x \frac{1}{(t-1)^2}\sin\frac{1}{t-1}dt$

解

$$\begin{aligned}
&A \quad f(x)=\int_0^x \tfrac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}dt=e^{-\frac{1}{x}}\\
&B \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\\
&C \quad f(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1-t)^3}}dt=\frac{2}{\sqrt{1-x}}-2,\ f(1)\to+\infty\\
&D \quad f(x)=\int_0^x \frac{1}{(t-1)^2}\sin\frac{1}{t-1}dt=\cos\frac{1}{x-1}+\frac{\pi}{2}\ \text{有界}
\end{aligned}$$

答案:C

例题 31.30.

$$\iint\limits_D \frac{x^3\sin y\cos y e^{\sqrt{x^2+2}}}{\sqrt{x^2\cos^2 y+2\sqrt{x^2+2}}}dxdy$$

,其中 $D=\{(x,y)|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le \frac{\pi}{2}\}$

解

原二重积分可以化为:

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{D'} \frac{r^2\sin\theta\cos\theta e^{\sqrt{r^2+2}}}{\sqrt{r^2\cos^2\theta+2}\sqrt{r^2+2}} r dr d\theta, \text{其中} D' = \{(r,\theta)|\, 0 \le r \le 1,\ \theta \in (0,\frac{\pi}{2})\} \\ &= \iint\limits_{D''} \frac{xye^{\sqrt{x^2+y^2+2}}}{\sqrt{x^2+2}\sqrt{x^2+y^2+2}} dxdy \\ &= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{ye^{\sqrt{x^2+y^2+2}}}{\sqrt{x^2+y^2+2}} dy \\ &= e^{\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} dx - \int_0^1 \frac{xe^{\sqrt{x^2+2}}}{\sqrt{x^2+2}} dx \\ &= e^{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-\sqrt{2}) - e^{\sqrt{3}} + e^{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

May 16

例题 31.31.

已知函数 $f(x) = \dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{x^\alpha}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界, 求 α 取值范围:

- A. $(0,+\infty)$
- B. $(0,3]$
- C. $(0,2)$
- D. $(1,3]$

解

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界, 我们可以得到:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{和} \lim_{x\to 0} f(x) \text{存在}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^{3-\alpha}}{\alpha(\alpha-1)(1+x^2)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^{3-\alpha}}{\alpha(\alpha-1)}$$

我们得到:

$$\begin{cases} 3-\alpha \ge 0 \\ 3-\alpha \le 2 \\ \alpha \ne 1 \end{cases} \Rightarrow 1 < \alpha \le 3$$

综上所述, 答案:D

例题 31.32.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos(\frac{\pi}{4}-x)\cos x}dx$$

解

区间再现

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\pi}{4}-x}{\cos(\frac{\pi}{4}-x)\cos x}dx$$

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\pi}{4}}{\cos(\frac{\pi}{4}-x)\cos x}dx=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x+\sin x\cos x}=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\tan x}{1+\tan x}=\frac{\ln 2\sqrt{2}\pi}{4}$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos(\frac{\pi}{4}-x)\cos x}dx=\frac{\ln 2\sqrt{2}\pi}{8}$$

May 17

例题 31.33.

$$\iint\limits_D \frac{1}{xy}dxdy, D=\{(r,\theta)|\frac{\cos\theta}{4}\le r\le\frac{\cos\theta}{2},\frac{\sin\theta}{4}\le r\le\frac{\sin\theta}{2}\}$$

解

二重积分积分区域如下图所示:

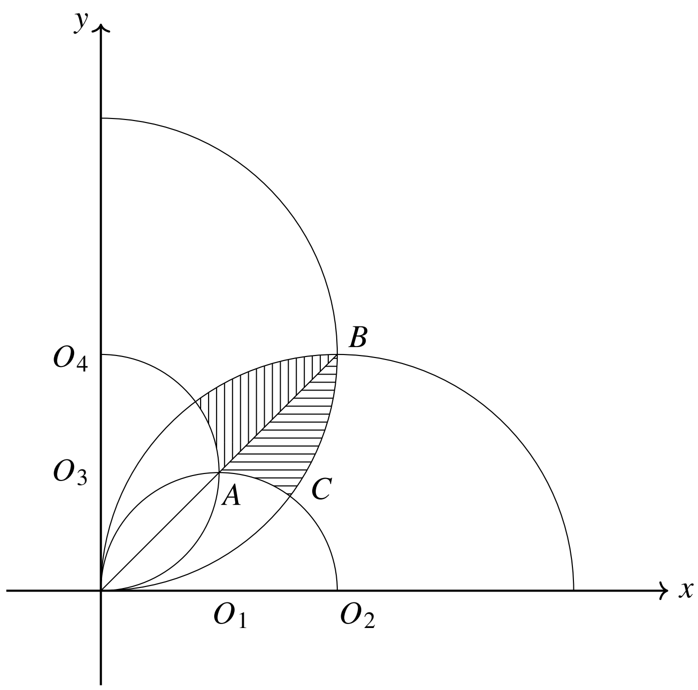


图 31.1: 二重积分区域示意图

$$I=2\iint_{D_{ACB}}\frac{1}{xy}dxdy=2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\frac{\cos\theta}{4}}^{\frac{\sin\theta}{2}}\frac{1}{r\sin\theta\cos\theta}dr$$

$$I=2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln 2\tan\theta}{\sin\theta\cos\theta}d\theta=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\ln 2t}{t}dt=\ln^2 2$$

例题 31.34.

当 n 充分大时, $a-\frac{1}{n}<a_n<a+\frac{1}{n}$ 是数列 a_n 收敛于 a 的什么条件:

- A. 充分必要条件
- B. 必要条件但非充分条件
- C. 充分条件但非必要条件
- D. 既非充分也非必要条件

解

(i). 充分性:

$a-\frac{1}{n}<a_n<a+\frac{1}{n}$, 由夹逼定理得到:

$$\lim_{n\to+\infty}(a-\frac{1}{n})<\lim_{n\to+\infty}a_n<\lim_{n\to+\infty}(a+\frac{1}{n})$$

我们有: $\lim_{n\to+\infty}(a-\frac{1}{n})=\lim_{n\to+\infty}(a+\frac{1}{n})=a$ 因此:

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=a\Rightarrow \text{充分性成立}$$

(ii). 必要性

$\lim_{n\to+\infty}a_n=a\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists N_0>0,$ 当 $n>N_0, |a_n-a|<\varepsilon$

我们得到:

$n>N_0, a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$, 当 $\frac{1}{N_0+1}<\varepsilon$, 我们不能得到 $a-\frac{1}{n}<a_n<a+\frac{1}{n}$, 必要性不成立

答案:C

May 18

例题 31.35.

$$\iint\limits_D\left|x^2+y^2-\sqrt{2}(x+y)\right|dxdy, D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 4\}$$

解

原二重积分等价于:

$$I=I_1+2I_2=\iint\limits_D[x^2+y^2-\sqrt{2}(x+y)]dxdy+2\iint\limits_{D_1}[\sqrt{2}(x+y)-(x^2+y^2)]dxdy$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r(r^2 - \sqrt{2}r(\sin\theta + \cos\theta))dr = \int_0^{2\pi} (4 - \frac{8\sqrt{2}}{3}(\sin\theta + \cos\theta))d\theta = 8\pi$$

$$I_2 = \iint_{D_1} [\sqrt{2}(x+y) - (x^2+y^2)]dxdy, D_1 : (x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (y - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 \leq 1$$

$$\text{做变量替换:} \begin{cases} x - \frac{\sqrt{2}}{2} = R\cos\alpha \\ y - \frac{\sqrt{2}}{2} = R\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(R,\alpha)}\right| dRd\alpha = RdRd\alpha$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^1 (1 - R^2)RdR = \frac{\pi}{2}$$

$$I = I_1 + 2I_2 = 9\pi$$

例题 31.36.

设 $f(x)$ 可积, 则下列结论正确的是:

- A. 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$, 则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = A$
- B. 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, 且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = A$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$
- C. 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = A$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$
- D. 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{|f(t)|}{1+t^2}dt = A$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{|f(t)|}{1+t^2}dt = A$

解

针对于此题, 我们需要区分几个概念:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \text{只要求在}x\text{邻域内有定义, 不要求}x\text{处有定义}$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = A, f(x)\text{单调}, \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = A$$

对于 A, 我们只能得到在 $x = 0$ 的邻域内的一组特殊的离散点满足极限的定义, 其余点未知, 我们举一个反例,$x_n = \dfrac{1}{n\pi}$, $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$

对于 B, 我们举出一个反例 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, x \neq 0 \\ 2 \end{cases}$,$x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, n\text{为奇数} \\ 0, n\text{为偶数} \end{cases}$

对于 C, 不清楚 $f(x)$ 单调性, 举一个反例,$f(x) = \sin\pi x$

对于 D, 利用积分的几何意义知道 $g(x) = \int_0^x \dfrac{|f(t)|}{1+t^2}dt$ 单调递增

答案:D.

May 19

例题 31.37.

设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1, g(x,y)=f\left(xy,\frac{1}{2}(x^2-y^2)\right)$, 求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$

解

我们令 $\begin{cases} u=xy \\ v=\dfrac{1}{2}(x^2-y^2) \end{cases}$

我们有:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=y\dfrac{\partial f}{\partial u}+x\dfrac{\partial f}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=x\dfrac{\partial f}{\partial u}-y\dfrac{\partial f}{\partial v} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}=y(y\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+x\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v})+\dfrac{\partial f}{\partial v}+x(y\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+x\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}) \\ \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x(x\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}-y\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v})-\dfrac{\partial f}{\partial v}-y(x\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}-y\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}) \end{cases}$$

我们得到:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=(x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=x^2+y^2$$

例题 31.38.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx$$

解

区间再现

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x(\frac{\pi}{2}-\arctan e^x)}{1+\cos^2 x}dx$$

$$2I=\frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

令 $J=\int_0^{\pi}\dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$$J=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx\Rightarrow 2J=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi^2}{2}$$

$$J=\frac{\pi^2}{4},I=\frac{\pi}{2}J=\frac{\pi^3}{8}$$

May 20

例题 31.39.

$$\iint\limits_D \frac{1}{3x^2+y^2}dxdy$$

D 是由 $\begin{cases} x^2+y^2-xy=1 \\ x^2+y^2-xy=2 \end{cases}$ 和直线 $\begin{cases} y=\sqrt{3}x \\ y=0 \end{cases}$ 围成

解

原二重积分等价于:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{r_1}^{r_2}\frac{r}{3r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}dr,\text{其中}\begin{cases} r_1=\sqrt{\dfrac{1}{1-\sin\theta\cos\theta}} \\ r_2=\sqrt{\dfrac{2}{1-\sin\theta\cos\theta}} \end{cases}$$

$$I=\frac{\ln 2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin^2\theta+3\cos^2\theta}d\theta=\frac{\ln 2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3+\tan^2\theta}d\tan\theta$$

$$I=\frac{\ln 2}{2\sqrt{3}}\arctan(\frac{\tan\theta}{\sqrt{3}})|_0^{\sqrt{3}}=\frac{\pi\ln 2}{8\sqrt{3}}$$

例题 31.40.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $\forall x,y\in\mathbb{R},|f(x)-f(y)|\le M|x-y|$, 求证:

$$\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})\right|\le\frac{M}{2n}$$

解

引理 31.3.1 (积分和求和)

$$\int_0^1 f(x)dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)dx$$

我们利用上面的式子, 对不等式的左边进行处理:

$$\text{左边:}\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)dx-\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(\frac{k}{n})dx\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}[f(x)-f(\frac{k}{n})]dx\right|$$

由绝对值不等式得到:

$$左边 \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| [f(x) - f(\frac{k}{n})] \right| dx \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} M(\frac{k}{n} - x) dx$$

$$左边 \leq M \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n^2} = \frac{M}{2n} = 右边$$

May 21

例题 31.41.

已知数列 $\{x_n\}$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = \int_0^1 e^{-x^2} dx$

- A. $\lim\limits_{n\to+\infty} = 0$
- B. $\lim\limits_{n\to+\infty} = \infty$
- C. $\lim\limits_{n\to+\infty} = a(a \neq 0)$
- D. $\lim\limits_{n\to+\infty}$ 不存在但不是 ∞

解

首先我们可以得到:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = a, \ a \in (0,1)$$

我们由 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = a \Rightarrow |x_n| = a|x_{n+1}| < |x_{n+1}| \Rightarrow x_n$单调递增

我们假设 x_n 有上界

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = 1 \neq a 矛盾!!!$$

答案:B

例题 31.42.

设 $f(x,y)$ 二阶偏导数连续, $f(1,y) = f(x,1) = 0$, $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = a$, 其中 $D \in [0,1] \times [0,1]$, 求 $\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)d\sigma$

解

原二重积分可以化为:

$$\begin{aligned}\int_0^1 xdx\int_0^1 ydf_x'(x,y) &= \int_0^1 x\left[yf_x'(x,y)|_{y=0}^{y=1}-\int_0^1 f_x'(x,y)dy\right]dx\\ &= -\int_0^1 xdx\int_0^1 f_x'(x,y)dy\\ &= -\int_0^1 dy\int_0^1 xdf(x,y)\\ &= -\int_0^1\left[xf(x,y)|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 f(x,y)dx\right]dy\\ &= \int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy=a\end{aligned}$$

$$\iint_D xyf_{xy}''(x,y)d\sigma=\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy=a$$

31.4 Week IV

May 22

例题 31.43.

设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx(n=0,1,2,\cdots)$

(1). 证明: 数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2},(n=2,3,\cdots)$

(2). 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$

解

(1). 我们令 $x=\sin t,\ t\in[0,\frac{\pi}{2}],\ dx=\cos tdt$, 我们有:

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\cos^2 tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n tdt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}tdt$$

$$a_0=\frac{\pi}{4},\ a_1=\frac{1}{3}$$

根据华里士公式, 我们有:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3}\cdot 1, n\text{为大于 1 的奇数}\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, n\text{为正偶数}\end{cases}$$

$$a_n-a_{n-1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n tdt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}tdt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}tdt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}tdt$$

$$a_n-a_{n-1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}-(1-\sin t)^2\sin^{n-1}tdt<0\Rightarrow a_n<a_{n-1}\Rightarrow\{a_n\}\text{单调递减}$$

(i). 当 n 为奇数时, 我们有:

$$\begin{cases} a_n = (1-\dfrac{n+1}{n+2})\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3}\cdot 1 \\ a_{n-2} = (1-\dfrac{n-1}{n})\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3}\cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{n-1}{n+2}\cdot\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3}\cdot 1 \\ a_{n-2} = \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3}\cdot 1 \end{cases}$$

$$a_n = \frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$$

(i). 当 n 为偶数数时, 我们有:

$$\begin{cases} a_n = (1-\dfrac{n+1}{n+2})\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} \\ a_{n-2} = (1-\dfrac{n-1}{n})\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{n-1}{n+2}\cdot\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} \\ a_{n-2} = \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$a_n = \frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$$

综上所述,数列$\{a_n\}$单调减少, 且$a_n = \dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}$, $(n = 2, 3, \cdots)$

(2). 我们不妨设 $b_n = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$, $(n = 1, 2, \cdots)$

$b_1 = \dfrac{4}{3\pi}$, 当 $n \geq 2$ 是, 我们有:

$$b_n b_{n-1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \frac{n-1}{n+2}$$

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$

$$A^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+2} = 1 \Rightarrow A = 1(A > 0)$$

我们来严格证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = 1$

原命题转换为:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N > 0, 当n > N时, |\frac{a_n}{a_{n-1}} - 1| < \epsilon$$

$$\int_0^1 (1-x)x^{n-1}\sqrt{1-x^2}dx < \varepsilon\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x^2}dx \Rightarrow \int_0^1 (1-x-\varepsilon)x^{n-1}\sqrt{1-x^2}dx < 0$$

$$\int_0^{1-\varepsilon}(1-x-\varepsilon)x^{n-1}\sqrt{1-x^2}dx < \int_{1-\varepsilon}^1 (x+\varepsilon-1)x^{n-1}\sqrt{1-x^2}dx$$

$$\text{左式} < (1-\varepsilon)^{n-1}\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x^2}dx = P(1-\varepsilon)^{n-1}$$

$$\text{右式} > \int_{1-\frac{\varepsilon}{2}}^1 (x+\varepsilon-1)x^{n-1}\sqrt{1-x^2}dx > (1-\frac{\varepsilon}{2})^{n-1}\int_{1-\frac{\varepsilon}{2}}^1 (x+\varepsilon-1)\sqrt{1-x^2}dx > Q(1-\frac{\varepsilon}{2})^{n-1}$$

其中 P,Q 均为与 n 无关的正数, 我们只需找到 N, 使得 $Q(1-\frac{\varepsilon}{2})^{n-1} > P(1-\varepsilon)^{n-1}$

$$n > [1+\frac{\ln P-\ln Q}{\ln(1-\frac{\varepsilon}{2})-\ln(1-\varepsilon)}]$$

综上,$\forall\varepsilon>0,\ \exists N=[1+\frac{\ln P-\ln Q}{\ln(1-\frac{\varepsilon}{2})-\ln(1-\varepsilon)}]+1>0$, 当$n>N$时,$|\frac{a_n}{a_{n-1}}-1|<\epsilon$

注

(1). 我们可以得到:

$$a_{n+1}-a_n=\int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x^2}dx-\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^1(x-1)x^n\sqrt{1-x^2}dx<0$$

我们可以得到数列 $\{a_n\}$ 单调递减.

我们还有:

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx\\
&= -\frac{1}{3}\int_0^1 x^{n-1}d(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\\
&= \frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}(1-x^2)dx\\
&= \frac{n-1}{3}a_{n-2}-\frac{n-1}{3}a_n\\
a_n &= \frac{n-1}{n+2}a_{n-2}
\end{aligned}$$

(2). 我们由 (1) 知道,$\{a_n\}$ 单调递减且 $a_n>0$, 我们得到:

$$\begin{cases} a_n < a_{n-1}\\ a_{n-1} < a_{n-2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a_n}{a_{n-1}} < 1\\ \dfrac{a_n}{a_{n-2}} < \dfrac{a_n}{a_{n-1}}\end{cases}$$

我们由夹逼定理可以得到:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-2}}=1\\ \lim\limits_{n\to+\infty}1=1\end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=1$$

综上所述, 我们得到: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=1$

例题 31.44.

$xy'-(2x^2+1)y=x^2(x\geq 1)$, 且 $y(1)=a$, 讨论 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$

解

我们得到微分方程:

$$y'-(2x+\frac{1}{x})y=x\Rightarrow(e^{\int(-2x-\frac{1}{x})dx}y)'=xe^{\int(2x+\frac{1}{x})dx}$$

$$y=xe^{x^2}(\int_1^x e^{-t^2}dt+C)$$

我们由: $y(1)=a\Rightarrow C=\frac{a}{e}$

原问题转化为:

$$\lim_{x\to+\infty}xe^{x^2}(\int_1^x e^{-t^2}dt+\frac{a}{e})$$

我们有:

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

原极限可以写作:

$$\lim_{x\to+\infty}xe^{x^2}(\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^1 e^{-t^2}dt+\frac{a}{e})$$

(i). 当 $a=e(\int_0^1 e^{-t^2}dt-\frac{\sqrt{\pi}}{2})$

洛必达法则:

$$\lim_{x\to+\infty}xe^{x^2}(\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^1 e^{-t^2}dt+\frac{a}{e})=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{-2x^2-1}=-\frac{1}{2}$$

(ii). 当 $a\neq e(\int_0^1 e^{-t^2}dt-\frac{\sqrt{\pi}}{2})$, 极限不存在.

May 23

例题 31.45.

已知当 n 充分大时, $|a_n|\leq|b_n|\leq|c_n|$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}|c_n|$

- A. $\lim\limits_{n\to\infty}(|a_n|-b_n)$
- B. $\lim\limits_{n\to\infty}(|b_n|-c_n)$
- C. $\lim\limits_{n\to\infty}(|b_n|-c_n)$
- D. $\lim\limits_{n\to\infty}(|b_n|-a_n)$

解

我们有：$\lim_{x\to\infty} x_n = A \Rightarrow \lim_{x\to\infty} |x_n| = A$

我们假设：$\lim_{x\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} |c_n| = A$

我们得到：$\lim_{x\to\infty} |a_n| = A$

根据夹逼定理：$\lim_{x\to\infty} |b_n| = A$

我们已知的极限有 $\lim_{x\to\infty} a_n, \lim_{x\to\infty} |a_n|, \lim_{x\to\infty} |b_n|, \lim_{x\to\infty} |c_n|$

答案:D.

例题 31.46.

$$\lim_{n\to+\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+3n})$$

解

原极限等价于：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+3n}-\pi n) &= \lim_{n\to+\infty} \sin^2(\frac{3n\pi}{\sqrt{n^2+3n}+n}) \\ &= \sin^2(\frac{3\pi}{2}) = 1\end{aligned}$$

May 24

例题 31.47.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\left[\frac{1}{n+\ln 1}+\frac{2}{n+\ln 2}+\cdots+\frac{n}{n+\ln n}\right]$$

引理 31.4.1 (斯特林公式)

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$$

注

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} &= \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{n}(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n})} \\ &= e^{-\int_0^1 \ln x dx} \\ &= e\end{aligned}$$

解

我们不妨设 $b_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\left[\frac{1}{n+\ln 1}+\frac{2}{n+\ln 2}+\cdots+\frac{n}{n+\ln n}\right]$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}[\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}],\ c_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}[\frac{1}{n+\ln n}+\frac{2}{n+\ln n}+\cdots+\frac{n}{n+\ln n}]$$

我们得到:

$$c_n < b_n < a_n \Rightarrow \frac{n+1}{2(n+\ln n)}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} < b_n < \frac{n+1}{2n}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

我们有: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2(n+\ln n)} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$

对于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

我们可以知道: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$

我们得到: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{e}{2}$

由夹逼定理, 我们得到: $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{e}{2}$

例题 31.48.

$f(x)>0, f(x)f''(x)\geq[f'(x)]^2, f(0)=1$, 证明: $f(x)\geq e^{f'(0)x}$

解

这个题还有第一问: $f(x_1)f(x_2)\geq f^2(\frac{x_1+x_2}{2})$

我们由:

$$f(x)f''(x)\geq[f'(x)]^2 \Rightarrow \text{可以构造出函数}\frac{f'(x)}{f(x)}\text{单调递增}$$

我们将 $f(x_1)f(x_2)\geq f^2(\frac{x_1+x_2}{2})$ 取对数得到:

$$\ln f(x_1)+\ln f(x_2)\geq 2\ln f(\frac{x_1+x_2}{2})$$

我们构造函数 $g(x)=\ln f(x)$

原命题转化为: $\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}\geq g(\frac{x_1+x_2}{2})$

我们只需要证明: $g(x)$是凹函数, $g''(x)\geq 0$

我们有:

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)},\ g''(x)=\frac{f(x)f''(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}\geq 0$$

$g(x)$为凹函数 $\Rightarrow \frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}\geq g(\frac{x_1+x_2}{2})$

我们证明了: $f(x_1)f(x_2)\geq f^2(\frac{x_1+x_2}{2})$

$$g''(x)\geq 0\Rightarrow g'(x)\geq g'(0)=\frac{f'(0)}{f(0)}$$

我们可以理解为: $g(x)$始终大于$g(0)$处的切线

$$g(x)\geq g'(0)x+g(0)\Rightarrow \ln f(x)\geq f'(0)x\Rightarrow f(x)\geq e^{f'(0)x}$$

May 25

例题 31.49.

设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)=f(b)=0$, 证明: $|f(x)|\le \frac{1}{2}\int_a^b|f'(x)|dx$

解

我们可以得到:

$$f(x)=f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)tdt,\ f(x)=-(f(b)-f(x))=-\int_x^b f'(t)tdt$$

我们得到:

$$\begin{cases} |f(x)|=|\int_a^x f'(t)tdt|\le\int_a^x|f'(t)|dt \\ |f(x)|=|\int_x^b f'(t)tdt|\le\int_x^b|f'(t)|dt \end{cases} \Rightarrow 2|f(x)|\le\int_a^b|f'(x)|dx$$

我们证明: $|f(x)|\le\frac{1}{2}\int_a^b|f'(x)|dx$

例题 31.50.

$$\iint_D \ln|sin(x-y)|dxdy, D=\{(x,y)|0\le x\le y\le 2\pi\}$$

解

利用二重积分换元公式: $\begin{cases} u=y-x \\ v=x \end{cases} \Rightarrow dudv=dxdy,\ 0\le u\le\pi-v, 0\le v\le\pi$

我们得到原二重积分等价于:

$$I=\int_0^\pi du\int_0^{\pi-u}\ln(sinu)dudv=\int_0^\pi(\pi-u)\ln(\sin u)du$$

利用区间再现公式:

$$2I=\pi\int_0^\pi\ln(\sin u)du\Rightarrow I=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin u)du$$

$$I=-\frac{\ln 2\pi^2}{2}$$

引理 31.4.2 (区间再现例子)

- $\int_0^\pi\ln(\sin x)dx=\int_0^\pi\ln(\cos x)dx=-\frac{\ln 2\pi}{2}$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\tan x)dx=0$

注

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx$$

我们有:

$$\begin{aligned}
2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x \cos x)dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2dx \\
&= I - \frac{\ln 2\pi}{2} \\
I &= -\frac{\ln 2\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

May 26

例题 31.51.

设 $x_n = (1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to\infty} e^{\ln(1+\frac{1}{n^2})} e^{\ln(1+\frac{2}{n^2})} \cdots e^{\ln(1+\frac{n}{n^2})} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n^2}} e^{\frac{2}{n^2}} \cdots e^{\frac{n}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n(n+1)}{2n^2}} \\
&= e^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

引理 31.4.3 (不等式放缩)

- 琴生不等式: $\frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$
- 琴生不等式: $x \le \tan x \le \frac{4}{\pi}x, x \in [0, \frac{\pi}{4}]$
- 泰勒不等式: $\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x,\ x \in [0, +\infty)$

我们利用不等式放缩:

$$\frac{k}{n^2+k} \le \ln(1+\frac{k}{n^2}) \le \frac{k}{n^2} \Rightarrow \frac{k}{n^2+n} \le \ln(1+\frac{k}{n^2}) \le \frac{k}{n^2}$$

我们得到:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n} \le \sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n^2}) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \frac{1}{2}$$

由夹逼定理, 我们得到: $\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n^2}) = \frac{1}{2} \Rightarrow I = e^{\frac{1}{2}}$

例题 31.52.

若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数, 且满足 $\varphi(2) > \varphi(1), \varphi(2) > \int_2^3 \varphi(x)dx$, 证明: $\exists\xi \in (1,3),\ s.t.\ \varphi''(x) < 0$

解

我们有积分中值定理得到:

$$\exists\eta \in (2,3),\ s.t. \int_2^3 \varphi(x)dx = \varphi(\eta)$$

我们由拉格朗日中值定理得到:

$$\begin{cases} \exists\xi_1 \in (1,2),\ s.t. \dfrac{\varphi(2)-\varphi(1)}{2-1} = \varphi'(\xi_1) > 0 \\ \exists\xi_2 \in (2,\eta),\ s.t. \dfrac{\varphi(\eta)-\varphi(2)}{\eta-2} = \varphi'(\xi_2) < 0 \end{cases}$$

我们在区间 (ξ_1,ξ_2) 内使用拉格朗日中值定理得到:

$$\exists\xi_3 \in (\xi_1,\xi_2),\ s.t. \frac{\varphi(\xi_2)-\varphi(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1} = \varphi'(\xi_3) < 0$$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi \in (1,3), s.t. \varphi''(x) < 0$

May 27

例题 31.53.

设 $x_0 = 0, x_n = \dfrac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

解

我们有: $x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2}, x_n > 0$

我们使用数学归纳法来证明 x_n 单调递增: $(x_{n+1} > x_n)$

(1). 当 $n = 1$ 时,$x_2 > x_1$ 成立

(2). 当 $n \ge 1$ 时, 假设 $n = k$ 时,$x_{k+1} > x_k$, 我们有:

$$x_{k+1} = \frac{1+2x_k}{1+x_k} > x_k \Rightarrow 1+2x_k-x_k > 0$$

当 $n=k+1$ 时:

$$x_{k+2}=\frac{1+2\frac{1+2x_k}{1+x_k}}{1+\frac{1+2x_k}{1+x_k}}=\frac{3+5x_k}{2+3x_k}$$

$$x_{k+2}-x_{k+1}=\frac{3+5x_k}{2+3x_k}-\frac{1+2x_k}{1+x_k}=\frac{1+2x_k-x_k^2}{(2+3x_k)(1+x_k)}>0$$

我们证明: x_n 单调递增, 且 $x_n-2x_n-1<0\Rightarrow|x_n|<3$

$\{x_n\}$ 单调递增且有上界, 我们得到 x_n 极限必定存在, 我们不妨设:

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=A(A>0)\Rightarrow A=\frac{1+2A}{1+A}\Rightarrow A=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

例题 31.54.

$$\lim_{n\to+\infty}\int_n^{n+1}x^2\sin\frac{1}{x}dx$$

解

我们有:

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}x\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=+\infty$$

我们有: $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_n^{n+1}x^2\sin\frac{1}{x}dx=+\infty$

May 28

例题 31.55.

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^5-n+2}}$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$ 敛散性

解

我们运用比较判别法的极限形式:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n+1}{\sqrt{n^5-n+2}}}{n^{-\frac{3}{2}}}=1$$

原级数收敛.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}}{2n^{-\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2}$$

原级数收敛.

例题 31.56.

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x)dx = A$, 求 $\int_0^1 dx\int_x^1 dy\int_x^y f(x)f(y)f(z)dz$

解

我们不妨设: $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, $F(0)=0, F(1)=A$, 原积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)[F(y)-F(x)]dy \\ &= \int_0^1 f(x)dx\int_x^1 f(y)F(y)dy - \int_0^1 f(x)F(x)dx\int_x^1 f(y)dy \\ &= \int_0^1 f(x)[\frac{F^2(1)}{2}-\frac{F^2(x)}{2}]dx - \int_0^1 f(x)F(x)[F(1)-F(x)]dx \\ &= \frac{A^3}{2}-\frac{A^3}{6}-\frac{A^3}{2}+\frac{A^3}{3} \\ &= \frac{A^3}{6} \end{aligned}$$

May 29

例题 31.57.

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2+(-1)^n}{n^2}$ 敛散性

解

我们不妨设: $a_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2}{n^2}, b_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}-\frac{1}{n^2}$

我们根据莱布尼茨判别法得到: a_n 收敛,b_n 收敛, 原级数收敛.

例题 31.58.

$$\iint_D|\frac{x+y}{2}-x^2-y^2|dxdy, D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$$

解

原二重积分可化为:

$$I=\iint_D|\frac{1}{8}-(x-\frac{1}{4})^2-(y-\frac{1}{4})^2|dxdy, D:\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$$

$$I=\iint_D(x^2+y^2-\frac{x+y}{2})dxdy-2\iint_{D'}(x^2+y^2-\frac{x+y}{2})dxdy$$

其中:

$$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\},\ D'=\{(x,y)|(x-\frac{1}{4})^2+(y-\frac{1}{4})^2\le\frac{1}{8}\}$$

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1[r^3-\frac{r^2}{2}(\sin\theta+\cos\theta)]dr-2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}}[r^3-\frac{r^2}{2}(\sin\theta+\cos\theta)]dr$$

$$I=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{24}\int_0^{\pi}\sin^4\theta d\theta=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{64}=\frac{33\pi}{64}$$

May 30

例题 31.59.

设 $f(x,y)$ 在区域 $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$ 上连续, $f(0,0)=0$, 且 $f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, $f_y'(0,0)=1$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}dt\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)du}{1-e^{-\frac{x^4}{4}}}$$

解

我们交换积分次序得到:

$$\begin{aligned}I&=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x du\int_0^{u^2}f(t,u)dt}{\frac{x^4}{4}}\\&=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}f(t,x)dt}{x^3}\end{aligned}$$

我们由积分中值定理得到:

$$\exists\xi\in(0,x^2),\ s.t.\int_0^{x^2}f(t,x)dt=x^2f(\xi,x)$$

原极限可以化为:

$$I=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2f(\xi,x)}{x^3}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{f(\xi,x)}{x}$$

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微, 我们得到:

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)=f(0,0)+f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$$

我们有:

$$f(\xi,x)=f(0,0)+f_x'(0,0)\xi+f_y'(0,0)x+o(\sqrt{(\xi)^2+x^2})=f_x'(0,0)\xi+x+o(\sqrt{\xi^2+x^2})$$

我们知道:

$$0<\xi<x^2\to\lim_{x\to 0}\frac{\xi}{x}=0$$

$$0<\sqrt{\xi^2+x^2}<\sqrt{(x^4+x^2}\to\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\xi^2+x^2}}{x}=0$$

我们得到原极限 $I=-1$

例题 31.60.

设 $f(x)=1-\cos x$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\sqrt{\cos x})(1-\sqrt[3]{\cos x})(1-\sqrt[4]{\cos x})(1-\sqrt[5]{\cos x})}{f\{f[f(x)]\}}$

解

我们有:

$$\begin{cases} x\to 0,\sqrt{\cos x}-1=\sqrt{1+\cos x-1}-1\sim\frac{1}{2}(\cos x-1)\\ x\to 0,\sqrt[3]{\cos x}-1=\sqrt[3]{1+\cos x-1}-1\sim\frac{1}{3}(\cos x-1)\\ x\to 0,\sqrt[4]{\cos x}-1=\sqrt[4]{1+\cos x-1}-1\sim\frac{1}{4}(\cos x-1)\\ x\to 0,\sqrt[5]{\cos x}-1=\sqrt[5]{1+\cos x-1}-1\sim\frac{1}{5}(\cos x-1)\end{cases}$$

原极限为:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{120}(1-\cos x)^4}{\dfrac{1}{8}(1-\cos x)^4}=\frac{1}{15}$$

May 31

例题 31.61.

$z(x,y)=\int_0^x dt\int_t^x f(t+y)g(yu)du$, f 和 g' 连续, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解

我们交换积分次序:

$$z(x,y)=\int_0^x du\int_0^u f(t+y)g(yu)dt$$

我们得到:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=g(xy)\int_0^x f(t+y)dt$$

我们令 $t+y=u, t=u-y, dt=du$, 我们得到:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=g(xy)\int_y^{x+y}f(u)du$$

我们得到:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xg'(xy)\int_y^{x+y}f(t)dt+g(xy)[f(x+y)-f(y)]$$

例题 31.62.

$F(x)=\int_0^x e^{tx-t^2}dt$, 求 $F'(x)$

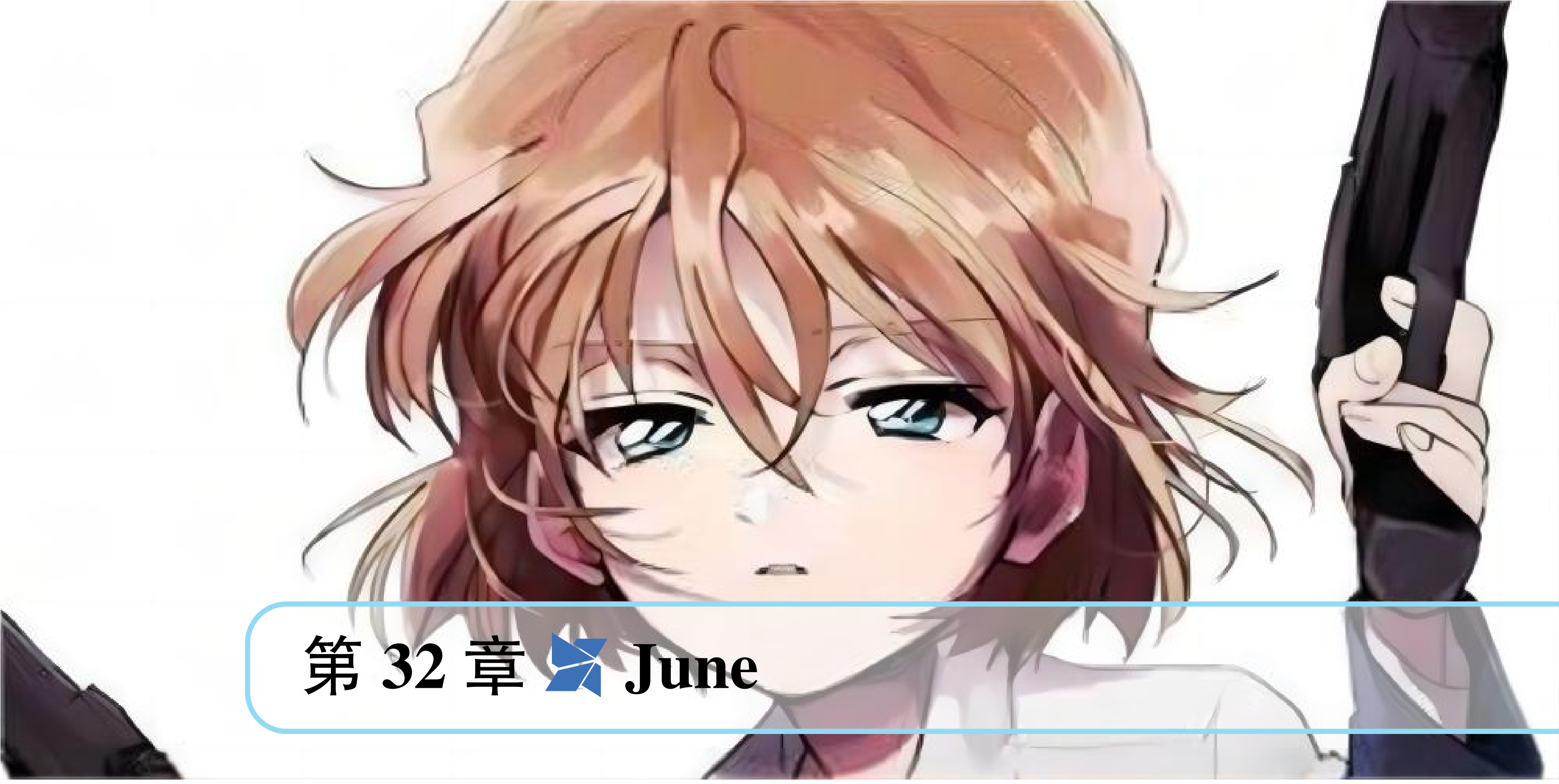
解

$$F(x)=\int_0^x e^{\frac{x^2}{4}-(t-\frac{x}{2})^2}dt=e^{\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{-(t-\frac{x}{2})^2}dt$$

令 $t-\dfrac{x}{2}=u, t=u+\dfrac{x}{2}, dt=du$, 我们得到:

$$F(x)=e^{\frac{x^2}{4}}\int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}}e^{-u^2}du$$

$$F'(x)=\frac{x}{2}e^{\frac{x^2}{4}}\int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}}e^{-u^2}du+e^{\frac{x^2}{4}}e^{-1\frac{x^2}{4}}=\frac{x}{2}e^{\frac{x^2}{4}}\int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}}e^{-u^2}du+1$$



第 32 章 June

32.1 Week I

June 1

例题 32.1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin x)-x}{\arctan x-\arcsin x}$$

解

原极限等价于:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin x)-\sin x}{\arctan x-\arcsin x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{\arctan x-\arcsin x}$$

$$I_1=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\sin^3 x}{-\frac{1}{2}x^3}=-\frac{2}{3}$$

$$I_2=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3}{-\frac{1}{2}x^3}=\frac{1}{3}$$

$$I=I_1+I_2=-\frac{1}{3}$$

例题 32.2.

设 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足 $x_1=y_1=\dfrac{1}{2}, x_{n+1}=\sin x_n, y_{n+1}=y_n^2$, 判断 x_n 和 y_n 的阶数

- A.$\{x_n\}$ 比 $\{y_n\}$ 高阶
- B.$\{y_n\}$ 比 $\{x_n\}$ 高阶

- C.$\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 等价
- D.$\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 同阶不等价

解

我们用数学归纳法来证明:

$$0 < y_n \le x_n \le \frac{1}{2}$$

(1). 当 $n = 1$ 时, 上式显然成立

(2). 假设当 $n = k$ 时上式成立

(3). 当 $n = k + 1$ 时:

$$x_{k+1} = \sin x_k < \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$y_{k+1} = y_k^2 < \frac{1}{2}$$

$$\text{我们有} x_k \ge \sin x_k \ge x_k^2 \ge y_k^2 \Rightarrow x_{k+1} \ge y_{k+1}$$

我们得到:

$$\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} < \frac{\frac{1}{2}y_n}{\frac{2}{\pi}x_n} = \frac{\pi}{4}\frac{y_n}{x_n} < (\frac{\pi}{4})^n$$

两边取极限, 由夹逼定理可以得到:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$$

June 2

例题 32.3.

$f(x)$ 可微, 且 $x = \int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t-x)dt$, 求 $f(x)$

解

我们对方程后面部分 $\int_0^x tf(t-x)dt$ 进行换元, 得到:

$$\int_0^x tf(t-x)dt = x \in_{-x}^0 f(-t)dt + \int_{-x}^0 tf(t)dt$$

我们对方程两边对 x 求导, 得到:

$$f(x) + \int_0^x f(-t)dt = 1 \Rightarrow f'(x) + f(-x) = 0 \Leftrightarrow f'(-x) + f(x) = 0$$

我们继续对 x 求导得到:

$$f''(x) - f'(-x) = 0 \Rightarrow f''(x) + f(x) = 0$$

$$f(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x, f(0) = 1, f'(0) = -1 \Rightarrow c_1 = -1.c_2 = 1$$

$$f(x) = \cos x - \sin x$$

June 3

例题 32.4.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1-\sqrt[3]{1-\sqrt{1-x}}}-1}{(1+x)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}-1}$$

解

原极限等价于:

$$I = -\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{1-x}}}{x^{-\frac{2}{3}}\ln(1+x)} = -\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{1+\sqrt{1-x}}} = -\frac{1}{4\sqrt[3]{2}}$$

例题 32.5.

$y''+ay' = f(x)(a>0), f(+\infty) = b$, 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} y''(x)$

解

我们由 $y''+ay' = f(x), a>0$, 利用一阶线性微分方程通解公式得到:

$$y' = e^{-ax}\left(\int_0^x e^{at}f(t)dt + C\right)$$

我们得到:

$$\lim_{x\to+\infty} y' = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{at}f(t)dt+C\right)}{e^{ax}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{ax}f(x)}{ae^{x-1}} = \frac{b}{a}$$

我们又有: $y''+ay' = f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} y'' = \lim_{x\to+\infty}[f(x)-ay'] = 0$$

June 4

例题 32.6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3+\sin x^2)^x - 3^{\sin x}}{x^3}$$

解

我们令 $f(x) = e^x$, 由拉格朗日中值定理得到:

$$\exists\xi \in (x\ln 3, x\ln(3+x^2)),\ s.t. e^{x\ln(3+x^2)} - e^{\sin x\ln 3} = e^{\xi}[x\ln(3+\sin x^2) - \sin x\ln 3]$$

由夹逼定理得到:

$$\lim_{x\to0} x\ln 3=\lim_{x\to0} x\ln(3+x^2)=0\Rightarrow\lim_{x\to0} e^{\xi}=1$$

原极限等价于:

$$\begin{aligned}I &= \lim_{x\to0} e^{\xi}\lim_{x\to0}\frac{[x\ln(3+\sin x^2)-x\ln 3+x\ln 3-\sin x\ln 3]}{x^3}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{[x\ln(3+\sin x^2)-x\ln 3]}{x^3}+\lim_{x\to0}\frac{x\ln 3-\sin x\ln 3}{x^3}\\ &= \frac{2+\ln 3}{6}\end{aligned}$$

综上所述, 原极限 $I=\dfrac{2+\ln 3}{6}$

例题 32.7.

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n(n+1)x^n$ 和函数

解

幂级数的收敛域:

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}=1\Rightarrow R=1, \text{幂级数收敛域为}(-1,1)$$

原幂级数可化为:

$$\begin{aligned}S(x) &= x\sum_{n=1}^{+\infty}n(n+1)x^{n-1}\\ &= x\sum_{n=1}^{+\infty}(x^{n+1})''\\ &= x\left(\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n+1}\right)''\\ &= x\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''\\ &= \frac{-2x}{(x-1)^3}, x\in(-1,1)\end{aligned}$$

June 5

例题 32.8.

设 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 连续可导, $f'(x)\geq 0$, 证明:

$$\left|\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx dx\right|\leq\frac{2}{n}[f(2\pi)-f(0)]$$

解

由分部积分法:

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx\right| &= \frac{1}{n}\left|\int_0^{2\pi} f(x) d\cos nx\right| \\ &= \frac{1}{n}\left|f(x)\cos nx|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(x)\cos nx dx\right| \\ &\leq \frac{1}{n}[f(2\pi)-f(0)] + |\int_0^{2\pi} f'(x)\cos nx dx| \\ &= \frac{1}{n}[f(2\pi)-f(0)] + |\int_0^{2\pi} f'(x) dx| \\ &= \frac{2}{n}[f(2\pi)-f(0)]\end{aligned}$$

例题 32.9.

证明: $\left|\int_x^{x+1} \sin t^2 dt\right| \leq \frac{1}{x}(x>0)$

解

分部积分:

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2}\left|\int_x^{x+1} \frac{1}{t} d\cos t^2\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\frac{1}{t}\cos t^2|_x^{x+1} + \int_x^{x+1} \frac{1}{t^2}\cos t^2 dt\right| \\ &\leq \frac{1}{2}[\left|\frac{1}{t}\cos t^2|_x^{x+1}\right| + \left|\int_x^{x+1}\frac{1}{t^2}dt\right|] \\ &= \frac{1}{2}[\frac{\cos x^2}{x} - \frac{\cos(x+1)^2}{x+1} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}] \\ &\leq \frac{1}{x}\end{aligned}$$

June 6

例题 32.10.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}$$

解

原极限可以写作:

$$\begin{aligned}I &= \lim_{x\to 1}\frac{x-e^{x\ln x}}{1-x+\ln(1+x-1)}(\text{泰勒展开}) \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x-(1+x(x-1))}{1-x+(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2} \\ &= 2\end{aligned}$$

例题 32.11.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)!}$$

解

原级数等价于:

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n\to+\infty} u_n \\ &= \lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}) \\ &= \lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{(n+1)!}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

June 7

例题 32.12.

设函数 $u=f(x,y,x)$ 有连续偏导数, 且 $z=z(x,y)$ 由方程 $xe^x-ye^y=ze^z$ 所确定, 求 du

解

我们得到关于 x,y,z 的方程 $F(x,y,z)$, 利用隐函数导数公式:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{(x+1)e^x}{(z+1)e^z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{(y+1)e^y}{(z+1)e^z}$$

我们得到:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=f_1+f_3\frac{\partial z}{\partial x}=f_1+f_3\frac{(x+1)e^x}{(z+1)e^z} \\ \frac{\partial u}{\partial y}=f_2+f_3\frac{\partial z}{\partial y}=f_1-f_3\frac{(y+1)e^y}{(z+1)e^z} \end{cases}$$

$$du=(f_1+f_3\frac{(x+1)e^x}{(z+1)e^z})dx+(f_1-f_3\frac{(y+1)e^y}{(z+1)e^z})dy$$

例题 32.13.

设 $u=f(x,y,z),\varphi(x,y,z)=0,y=\sin x$ 确定了函数 $u(x)$, 其中 f,φ 具有一阶偏导数, 且 $\frac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$, 求 $\frac{du}{dx}$

解

复合函数偏导数:

$$\frac{du}{dx}=f_1+f_2\frac{dy}{dx}+f_3(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx})$$

$$\frac{dy}{dx}=\cos x,\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x\varphi_1}{\varphi_3},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{e^y\varphi_2}{\varphi_3}$$

我们最终得到 $\dfrac{du}{dx}$:

$$\frac{du}{dx}=f_1+f_2\cos x-f_3\frac{2x\varphi_1+e^{\sin x}\cos x\varphi_2}{\varphi_3}$$

32.2 Week II

June 8

例题 32.14.

$$\lim_{t\to0^+}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{\sqrt{t}}dx\int_{x^2}^{t}\sin y^2dy}{\left[\left(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{x}{t^2}\right)^x-1\right]\int_0^t(e^{\sqrt{u}}-1)du}$$

解

原极限可以化为:

$$\begin{aligned}
I&=\lim_{t\to0^+}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^t dy\int_0^{\sqrt{t}}\sin y^2dy}{[e^{x\ln(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{x}{t^2})}-1]\int_0^t(e^{\sqrt{u}}-1)du}\\
&=\lim_{t\to0^+}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^t\sqrt{y}\sin y^2dy}{\int_0^t(e^{\sqrt{u}}-1)du[e^{-\frac{x\pi}{2}\arctan\frac{t^2}{x}}-1]}\\
&=\lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^t\sqrt{y}\sin y^2dy}{[e^{-\frac{2t^2}{\pi}}-1]\int_0^t(e^{\sqrt{u}}-1)du}\\
&=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}}}{-\frac{4}{3\pi}t^{\frac{7}{2}}}\\
&=-\frac{3\pi}{14}
\end{aligned}$$

例题 32.15.

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2[1-\ln(e^x+\sin x)]}{x}$$

解

原极限可化为:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0}\frac{e^2[e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}-2}+\ln(e^x+\sin x)-1]}{x} \\ I_1 &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\ln(1+x)}{x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x)-2x}{x^2}=-1 \\ I_2 &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+e^x+\sin x-1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x-1}{x}=2 \\ I &= e^2(I_1+I_2)=e^2 \end{aligned}$$

June 9

例题 32.16.

$f(x)$ 二阶可导, $f(a)=f'(a)=f''(a)=f(b)=0$, 证明:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ (\xi-a)^2f''(\xi)-2f(\xi)=0$$

解

我们令 $g(x)=(x-a)^2, g'(x)=2(x-a), g''(x)=2$

原式等价于: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t. g(\xi)f''(\xi)-g''(\xi)f(\xi)=0$

我们构造辅助函数: $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$$F'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

我们对分子继续求导:

$$(f'(x)g(x)-g'(x)f(x))'=f''(x)g(x)+f'(x)g'(x)-g''(x)f(x)-g'(x)f'(x)=f''(x)g(x)-g''(x)f(x)$$

此时 $F(x)=\dfrac{f(x)}{(x-a)^2}, \lim\limits_{x\to a}F(x)=0$, 我们构造:

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{(x-a)^2}, x\in(a,b]\\ 0, x=a\end{cases}$$

$F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $F(a)=F(b)=0$

我们在区间 (a,b) 上对 $F(x)$ 使用罗尔定理得到:

$$\exists c\in(a,b),\ s.t.F'(c)=0\Rightarrow(c-a)^2f'(c)-2(c-a)f(c)=0$$

对于函数 $H(x)=(x-a)^2f'(x)-2(x-a)f(x)$, 我们有: $H(a)=H(c)=0$

我们对 $H(x)$ 在区间 (a,c) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(a,c),\ s.t.H'(\xi)=0\Rightarrow(\xi-a)^2f''(\xi)-2f(\xi)=0$$

例题 32.17.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$$

解

由拉格朗日中值定理:

$e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e^{\frac{1}{2x}\ln(1+2x)}=e^{\xi}(\frac{1}{x}\ln(1+x)-\frac{1}{2x}\ln(1+2x)),\xi\in(\frac{1}{x}\ln(1+x),\frac{1}{2x}\ln(1+2x))$

原极限可化为:

$$\begin{aligned}I &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\xi}[\frac{1}{x}\ln(1+x)-\frac{1}{2x}\ln(1+2x)]}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}e^{\xi}\frac{2\ln(1+x)-\ln(1+2x)}{2x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}e^{\xi}\frac{1}{2(1+x)(1+2x)}=\frac{e}{2}\end{aligned}$$

June 10

例题 32.18.

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数, $f(0)=f(2)=0, M=\max\limits_{x\in[0,2]}\{|f(x)|\}$, 证明:

(1). $\exists\xi\in(0,2),\ s.t.\ |f'(\xi)|\geq M$

(2). $\forall x\in(0,2),|f'(x)|\leq M\to M=0$

解

(1). 我们不妨假设 $|f(c)|=M$

- 当 $c=0$或者$c=2$, 我们得到: $f(x)\equiv 0$, 我们得到: $M=0,\exists\xi\in(0,2),\ s.t.|f'(\xi)|\geq M$
- 当 $c\in(0,2),|f(c)|=M$, 我们由拉格朗日中值定理得到:

$$\begin{cases} f(c)-f(0)=cf'(\xi_1),\ \xi_1\in(0,c)\\ f(2)-f(c)=(2-c)f'(\xi_2),\ \xi_2\in(c,2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|f'(\xi_1)|=\dfrac{M}{c},\ \xi_1\in(0,c)\\ |f'(\xi_2)|=\dfrac{M}{2-c},\ \xi_2\in(c,2)\end{cases}$$

当 $c\in(0,1],|f'(\xi_1)|\geq M$; 当 $c\in(1,2),|f'(\xi_2)|\geq M$.

(2). 我们不妨假设 $M>0,|f(d)|=M,f(0)=f(2)=0\Rightarrow\exists\eta\in(0,2),\ s.t.f'(\eta)=0$

我们得到:

$$\begin{cases}|f(d)-f(0)|=|\int_0^d f'(x)dx|\leq\int_0^c|f'(x)|dx\leq Md\\ |f(2)-f(d)|=|\int_d^2 f(x)dx|\leq\int_d^2|f(x)|dx\leq M(2-d)\end{cases}$$

我们化简:

$$\begin{cases}M\leq Md\\ M\leq M(2-d)\end{cases}\Rightarrow M(1-d)=0$$

当 $M=0$ 时,$f(x)\equiv 0$

当 $M \neq 0$, 则 $d = 1, M = \begin{cases} |f(1) - f(0)| \leq \int_0^1 |f'(x)|dx \leq M \\ |f(2) - f(1)| \leq \int_1^2 |f'(x)|dx \leq M \end{cases}$

此时当且仅当 $|f'(x)| \equiv M$ 时等号成立, 如果 $M \neq 0, f(2) \neq 0$, 矛盾

综上所述,$M = 0$

例题 32.19.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{x^2}{2} - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2}) \sin x^2}$$

解

泰勒展开:

原极限可化为:

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{x^2}{2} - (1 + \frac{x^2}{2} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2} x^4)}{x^2(1 - \frac{x^2}{2} - 1 - x^2)} = -\frac{1}{12}$$

June 11

例题 32.20.

证明方程 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1 (n \geq 2)$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内有且仅有一个实数根, 记作 x_n, 求 $\lim_{n\to+\infty} x_n$

解

设函数 $f(x) = x + x^2 + \cdots + x^n - 1$, 我们有: $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} > 0 \Rightarrow f(x)$在$(\frac{1}{2}, 1)$单调递增

$$f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2^n} < 0, f(1) = n - 1 > 0$$

根据零点定理, 我们得到 $f(x)$ 在区间 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内有且仅有一个零点.

我们可以得到 $\frac{1}{2} < x_n < 1$

我们知道: $f(x)$ 单调递增, 当 $x = x_n$ 时, 我们有:

$$x_n + x_n^2 + \cdots + x_n^n - 1 = 0$$

假设 $x_{n+1} \geq x_n$, 我们得到:

$$x_{n+1} + x_{n+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^n + x_{n+1}^{n+1} - 1 > x_n + x_n^2 + \cdots + x_n^n - 1 = 0$$

我们要求:

$$x_{n+1} + x_{n+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^{n+1} - 1 = 0 \Rightarrow x_n > x_{n+1}$$

$\{x_n\}$ 单调递减且有下界,$\{x_n\}$ 极限一定存在, 我们不妨设 $\lim_{n\to+\infty} x_n = A$, 我们有:

$$\frac{A}{1-A} = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

例题 32.21.

方程 $\cos x+\cos^2 x+\cdots+\cos^n x=1(n\geq 2)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{3})$ 的根 x_n, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

解

我们令 $t=\cos x, x\in(\frac{1}{2},1)$, 原方程为:

$$t+t^2+\cdots+t^n=1\text{在区间}(\frac{1}{2},1)\text{内的根}t_n$$

我们构造辅助函数: $F(t)=t+t^2+\cdots+t^n-1$, 我们有:

$$F(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2^n}, F(1)=n-1>0, F;(x)=1+2t+3t^2+\cdots+nt^{n-1}>0$$

$F(t)$ 在区间 $(\frac{1}{2},1)$ 有且只有一个实数根 $t_n,\frac{1}{2}<t_n<1$

上面的题已证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=\frac{1}{2}\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\frac{\pi}{3}$

June 12

例题 32.22.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x^2-2(1-\cos x)\sin x}{x^5}$$

解

泰勒展开:

$$\sin x^2=x^2-\frac{x^6}{6}+o(x^6),\ 1-\cos x=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+o(x^4),\ sinx=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)$$

原极限等价于:

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-\frac{1}{6}x^7-2(\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{8}x^5+\frac{1}{144}x^7)}{x^5}=\frac{1}{4}$$

例题 32.23.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(2\sqrt[n]{n}-1)^n}{n^2}$$

解

原极限等价于:

$$I=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x\ln(1+2x^{\frac{1}{x}}-2)}}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)}}{x^2}$$

$$I=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^{\frac{\ln x}{x}}}{x^2}=1$$

June 13

例题 32.24.

设 $f'(0)=0, f''(0)$ 存在, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f[\ln(1+x)]}{x^3}$

解

我们由拉格朗日中值定理得到:

$$f(x)-f(\ln(1+x))=f'(\xi)(x-\ln(1+x)),\ \xi\in(\ln(1+x),x)$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\xi}{x}=1,\ (\text{夹逼定理})$$

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi)(x-\ln(1+x))}{x^3}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi)}{2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f'(\xi)}{\xi}\frac{\xi}{2x}\\ &= \frac{f''(0)}{2} \end{aligned}$$

例题 32.25.

求椭圆 $x^2+2xy+3y^2-8y=0$ 与直线 $x+y=8$ 的最短距离

解

我们不妨设椭圆上任意一点 $P(x,y)$, 我们要求 $F(x,y)=\frac{1}{2}(x+y-8)^2$ 的最小值.
我们利用拉格朗日数乘法构造辅助函数:

$$F(x,y,\lambda)=\frac{1}{2}(x+y-8)^2+\lambda(x^2+2xy+3y^2-8y)$$

我们令:

$$\begin{cases} F'_x=x+y-8+2\lambda(x+y)=0\\ F'_y=x+y-8+2\lambda(x+3y-4y)=0\\ F'_\lambda=x^2+2xy+3y^2-8y=0 \end{cases}$$

我们解得:

$$\begin{cases} x=2\pm 2\sqrt{2}\\ y=2\\ \lambda=0 \end{cases}$$

我们得到两个驻点: $(2+2\sqrt{2},2)$ 和 $(2-2\sqrt{2},2)$

$$L(2+2\sqrt{2},2)=2\sqrt{2}-2,\ L(2+2\sqrt{2},2)=2\sqrt{2}+2$$

综上所述，距离最小值为 $2\sqrt{2}-2$.

June 14

例题 32.26.

证明 $\tan x = x$ 在区间 $(n\pi, n\pi+\frac{\pi}{2})$ 内存在实根 x_n，并求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)$

解

我们令 $f(x) = tanx - x, x \in (n\pi, n\pi+\frac{\pi}{2})$, $f'(x) = \sec^2 x - 1 \geq 0 \Rightarrow f(x)$单调递增

$$f(n\pi) < 0, f(n\pi+\frac{\pi}{2}) > 0 \Rightarrow f(x)\text{存在唯一零点}x_n \in (n\pi, n\pi+\frac{\pi}{2})$$

我们有: $x_{n+1}-x_n \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

$$\begin{aligned}
x_{n+1}-x_n &= \tan x_{n+1} - \tan x_n \\
&= \tan(x_{n+1}-x_n)(1+\tan x_{n+1}\tan x_n) \\
&= \tan(x_{n+1}-x_n)(1+x_{n+1}x_n) \\
\lim_{n\to+\infty}\tan(x_{n+1}-x_n) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{1+x_{n+1}x_n} = 0
\end{aligned}$$

我们得到: $\lim\limits_{n\to+\infty}\tan(x_{n+1}-x_n) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1}-x_n = \pi$

例题 32.27.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x\sqrt{x}}(\sqrt{a}\arctan\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b}\arctan\sqrt{\frac{x}{b}})$$

解

原极限可化为:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x\sqrt{x}}[\sqrt{a}(\arctan\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{\frac{x}{a}})-\sqrt{b}(\arctan\sqrt{\frac{x}{b}}-\sqrt{\frac{x}{b}})] \\ &= I_1-I_2 \\ I_1 &= \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x\sqrt{x}}\sqrt{a}(\arctan\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{\frac{x}{a}}) \\ &= \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{-\sqrt{a}}{3}(\sqrt{\frac{x}{a}})^3}{x\sqrt{x}} \\ &= -\frac{1}{3a} \\ I_2 &= \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x\sqrt{x}}\sqrt{b}(\arctan\sqrt{\frac{x}{b}}-\sqrt{\frac{x}{b}}) \\ &= \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{-\sqrt{b}}{3}(\sqrt{\frac{x}{b}})^3}{x\sqrt{x}} \\ &= -\frac{1}{3b} \end{aligned}$$

综上所述:

$$I=\begin{cases} 0, & a=b \\ \frac{1}{3b}-\frac{1}{3a}, & a\neq b \end{cases}$$

32.3 Week III

June 15

例题 32.28.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\left|\arcsin(\sin t)\right|dt}{x}$$

引理 32.3.1 (周期函数积分性质)

$f(x)=\int_0^x|\sin t|dt$

(i). 设 n 为正整数, 当 $n\pi\le x\le(n+1)\pi$, 证明: $2n\le f(x)\le 2(n+1)$

(ii). 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|\sin t|dt}{x}$

解

(i). 我们有:

$$\int_0^{n\pi}|\sin t|dt\le f(x)\le\int_0^{(n+1)\pi}|\sin t|dt$$

我们知道对于周期函数 $f(x)$, 我们有:

$$\int_0^{nT} f(t)dt = n\int_0^T f(t)dt \Rightarrow \begin{cases} \int_0^{n\pi} |\sin t|dt = 2n \\ \int_0^{(n+1)\pi} |\sin t|dt = 2(n+1) \end{cases}$$

我们得到: $2n \le f(x) \le 2(n+1)$

(ii). 当 $x \in (n\pi, (n+1)\pi)$ 时, 我们有:

$$\frac{\int_0^{n\pi} |\sin t|dt}{(n+1)\pi} \le \frac{\int_0^{x} |\sin t|dt}{x} \le \frac{\int_0^{(n+1)\pi} |\sin t|dt}{n\pi}$$

$$\begin{cases} \text{左边} = \dfrac{2n}{(n+1)\pi} \\ \text{右边} = \dfrac{2(n+1)}{n\pi} \end{cases}$$

两边同时取极限, 我们有 $\lim\limits_{n\to+\infty}$ 左边 $= \lim\limits_{n\to+\infty}$ 右边 $= \dfrac{2}{\pi}$

由夹逼定理, 我们可以得到:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^{x} |\sin t|dt}{x} = \frac{2}{\pi}$$

定理 32.3.1 (周期函数性质)

$f(x)$ 是周期函数, 我们有:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^{x} f(t)dt}{x} = \frac{\int_0^{T} f(x)dx}{T}$$

解

我们发现 $f(x) = |\arcsin(\sin x)|$ 是周期 $T = \pi$ 的周期函数, 且

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x - \frac{\pi}{2})dx = \frac{\pi^2}{4}$$

我们得到原极限等价于:

$$I = \frac{\int_0^{T} f(x)dx}{T} = \frac{\pi}{4}$$

例题 32.29.

设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求极限 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x\int_0^x f(x-t)dt}{\int_0^x tf(t-x)dt}$

解

我们令: $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $F'(x) = f(x)$, $F(0) = 0$

$$\lim_{x\to0} \frac{\int_0^{x} f(t)dt}{x} = F'(0) = f(0)$$

原极限等价于:

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)dt}{x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt+xf(x)}{\int_0^x f(t)dt}$$

$$I=1+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}}=2$$

June 16

例题 32.30.

$$f(x)=\int_1^x e^{t^2}dt$$

(i). 证明: $\exists\xi\in(1,2),\ s.t. f(\xi)=(2-\xi)e^{\xi^2}$

(ii). 证明: $\exists\eta\in(1,2),\ s.t. f(2)=e^{\eta^2}\eta\ln 2$

解

(i). 我们构造辅助函数: $F(x)=(x-2)f(x)$

我们有:

$$F'(x)=f(x)+(x-2)f'(x),\ f'(x)=e^{x^2},\ F(1)=F(2)=0$$

我们对 $F(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(1,2),\ s.t. F'(\xi)=0\Rightarrow f(\xi)+(\xi-2)f'(x)=0$$

(ii). 原式子可以化为 $\dfrac{f(2)-f(1)}{\ln 2-\ln 1}=\dfrac{e^{\eta^2}}{\frac{1}{\eta}}$

我们构造辅助函数: $g(x)=\ln x,\ g'(x)=\dfrac{1}{x}$, 我们由柯西中值定理得到:

$$\exists\eta\in(1,2),\ s.t.\frac{f(2)-f(1)}{\ln 2-\ ln 1}=\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}\Rightarrow f(2)=e^{\eta^2}\eta\ln 2$$

例题 32.31.

设函数 $f(x)$ 连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^{xt}\arctan(x-t)^2dt}{\int_0^x tf(x-t)dt}$

解

我们得到: $f(0)=0,\ f'(0)=2$

我们利用广义积分中值定理得到:

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\xi}\int_0^x\arctan(x-t)^2dt}{\int_0^x tf(x-t)dt},\ \xi\in(0,x)$$

我们再进行换元, 原极限等价于:

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\xi}\int_0^x\arctan u^2dt}{x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\int_0^x f(u)du}$$

$$I=\lim_{x\to0}\frac{2x}{f(x)}=2\lim_{x\to0}\frac{x-0}{f(x)-f(0)}=1$$

June 17

例题 32.32.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导, $f(0)=0, f(1)=1$, 证明:

$$\exists\xi\in(0,1),\ s.t.\xi f''(\xi)+(1+\xi)f'(\xi)=1+\xi$$

解

原命题等价于:

$$\exists\xi\in(0,1),\ s.t.f''(\xi)+\frac{1+\xi}{\xi}[f'(\xi)-1]$$

我们构造辅助函数:

$$F(x)=[f'(x)-1]e^{\int(1+\frac{1}{x})dx}\Rightarrow F(x)=xe^x[f'(x)-1]$$

我们有: $F(0)=0$, 由拉格朗日中值定理得到:

$$\exists\eta\in(0,1),\ s.t.f'(\eta)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1\Rightarrow F(\eta)=0$$

我们对 $F(x)$ 在区间 $(0,\eta)$ 上使用罗尔定理, 可以得到:

$$\exists\xi\in(0,\eta),\ s.t.F'(\xi)=e^{\xi}[\xi f''(\xi)+(\xi+1)[f'(\xi)-1]]=0$$

综上所述,$\exists\xi\in(0,1),\ s.t.\xi f''(\xi)+(1+\xi)f'(\xi)=1+\xi$

例题 32.33.

已知微分方程 $y'+y=f(x)$, 其中 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数, 证明: 该微分方程存在唯一的以 T 为周期的解

解

我们利用一阶微分方程通接公式得到:

$$y(x)=e^{-x}(\int_0^x e^tf(t)dt+C)$$

我们由此得到:

$$\begin{aligned} y(x+T) &= e^{-x-T}(\int_0^{x+T} e^t f(t)dt + C) \\ &= e^{-x}(\int_0^{x+T} e^{t-T} f(t)dt + Ce^{-T}) \\ &= e^{-x}(\int_{-T}^{x} e^t f(t)dt + Ce^{-T}) \\ &= e^{-x}(\int_0^{x} e^t f(t)dt + Ce^{-T} + \int_{-T}^{0} e^t f(t)dt) \\ y(x) &= e^{-x}(\int_0^{x} e^t f(t)dt + C) \end{aligned}$$

如果 $y(x)$ 是周期函数, 我们可以得到:

$$C = Ce^{-T} + \int_{-T}^{0} e^t f(t)dt \Rightarrow C = \frac{\int_0^T e^t f(t)dt}{e^T - 1}$$

当且仅当 $C = \dfrac{\int_0^T e^t f(t)dt}{e^T - 1}$ 时,$y(x)$ 为周期函数.

June 18

例题 32.34.

$f(x)$ 一阶连续可导, 且 $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$, 求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{x^2} f(t)dt}{x^2 \int_0^x f(t)dt}$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0} \frac{2xf(x^2)}{2x\int_0^x f(t)dt + x^2 f(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2f(x^2)}{2\int_0^x f(t)dt + xf(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{4xf'(x)}{3f(x) + xf'(x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{4f'(x)}{\frac{3f(x)}{x} + f'(x)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

例题 32.35.

设 $f(x)$ 满足 $f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}, f'(0) = 2$, 求 $f(x)$

解

我们令 $x = y = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

我们令 $y=\Delta x$, 我们有:

$$f(x+\Delta x)=\frac{f(x)+f(\Delta)}{1-f(x)f(\Delta)}$$

又因为:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)+f(\Delta x)-f(x)[1-f(x)f(\Delta x)]}{[1-f(x)f(\Delta x)]\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)[1+(f(x))^2]}{[1-f(x)f(\Delta x)]\Delta x}\\
&= 2[1+(f(x))^2]
\end{aligned}$$

我们得到: $\dfrac{f'(x)}{1+(f(x))^2}=2\Rightarrow \arctan f(x)=2x+C,\ f(0)=0\Rightarrow C=0$

综上所述,$f(x)=tan(2x)$

June 19

例题 32.36.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x[\int_u^x u^2\arctan(1+tu)dt]du}{(\int_0^x\ln(1+t)dt)^2}$$

解

我们对分子交换积分次序, 原极限等价于:

$$I=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x[\int_0^t u^2\arctan(1+tu)du]dt}{\frac{x^4}{4}}$$

利用洛必达法则:

$$I=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x u^2\arctan(1+xu)du}{x^3}$$

令 $xu=v,\ u=\frac{v}{x},\ du=\frac{dv}{x}$, 原极限等价于:

$$I=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}v^2\arctan(1+v)dv}{x^6}$$

再次使用洛必达法则:

$$I=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x^5\arctan(1+x^2)}{6x^5}=\frac{\pi}{12}$$

例题 32.37.

设 $f'(x)$ 在 $[0,2]$ 连续, 证明: $\left|f(2)\right|\le\frac{1}{2}\left|\int_0^2 f(x)dx\right|+\int_0^2\left|f'(x)\right|dx$

解

我们由积分中值定理得到:

$$\exists\xi \in (0,2),\ s.t. \int_0^2 f(x)dx = 2f(\xi) \Rightarrow \frac{1}{2}|\int_0^2 f(x)dx| = |f(\xi)|$$

原命题等价于:

$$|f(2)| - |f(\xi)| \le \int_0^2 |f'(x)|dx$$

由绝对值三角不等式得到:

$$左边 \le |f(2) - f(\xi)| = |\int_\xi^2 f'(x)dx| \le \int_\xi^2 |f(x)|dx$$

我们有: $\xi \in (0,2), \Rightarrow \int_\xi^2 |f(x)|dx \le \int_0^2 |f(x)|dx$

综上, 我们得到 $|f(2)| \le \frac{1}{2}|\int_0^2 f(x)dx| + \int_0^2 |f'(x)|dx$

June 20

例题 32.38.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明: $\max\limits_{0\le x\le 1}\{|f(x)|\} \le \int_0^1[|f(x)| + |f'(x)|]$

解

我们不妨假设 $\exists\xi \in (0,1),\ s.t. |f(x)|_{max} = |f(\xi)|$, 原命题等价于:

$$f(\xi) - \int_0^1 |f(x)|dx \le \int_0^1 |f'(x)|dx$$

我们由积分中值定理得到:

$$\exists\eta \in (0,1),\ s.t. \int_0^1 |f(x)|dx = |f(\eta)|$$

命题等价于:

$$|f(\xi)| - |f(\eta)| \le \int_0^1 |f'(x)|dx$$

$$左边 \le |f(\xi) - f(\eta)| = |\int_\xi^\eta f'(x)dx| \le \int_\xi^\eta |f'(x)|dx \le 右边$$

综上所述, 我们得到: $\underset{0\le x\le 1}{max}\{|f(x)|\} \le \int_0^1[|f(x)| + |f'(x)|]$

例题 32.39.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t|\sin t|dt}{x^2}$$

解

我们不妨假设 $x \in (n\pi, (n+1)\pi)$, 我们有:

$$\int_0^{n\pi} t|\sin t|dt < \int_0^x t|\sin t|dt < \int_0^{(n+1)\pi} t|\sin t|dt$$

我们由区间再现公式可以得到:

$$\int_0^{n\pi} t|\sin t|dt = \int_0^{n\pi} (n\pi - t)|\sin t|dt \Rightarrow \int_0^{n\pi} t|\sin t|dt = \pi n^2$$

同理我们可以得到:

$$\int_0^{(n+1)\pi} t|\sin t|dt = \pi(n+1)^2$$

我们得到: $\pi n^2 < \int_0^x t|\sin t|dt < \pi(n+1)^2$

我们有:

$$\frac{\pi n^2}{(n+1)^2\pi^2} < \frac{\int_0^x t|\sin t|dt}{x^2} < \frac{\pi(n+1)^2}{n^2\pi^2}$$

由夹逼定理可以得到, 原极限 $I = \dfrac{1}{\pi}$

June 21

例题 32.40.

已知 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \end{vmatrix}$, 求 $\sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=1}^{4} A_{ij}$

解

我们将行列式按照第一行展开得到:

$$|A| = A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}$$

我们发现: $A_{21} + A_{22} + A_{23} + A_{24}$ 其实就是将原行列式中第二行所有元素替换为 1 的新行列式的值, 根据行列式两行相同值为 0, 我们可以得到:

$$\begin{cases} A_{21} + A_{22} + A_{23} + A_{24} = 0 \\ A_{31} + A_{32} + A_{33} + A_{34} = 0 \\ A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = 0 \end{cases}$$

我们得到: $\sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=1}^{4} A_{ij} = |A|$

根据范德蒙行列式的求值公式:

$$|A| = (3-2)(4-2)(5-2)(4-3)(5-3)(5-4) = 12$$

综上所述,$\sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=1}^{4} A_{ij} = 12$

例题 32.41.

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x}\int_x^{x^2}(1+\frac{1}{2t})^t\sin\frac{1}{\sqrt{t}}dt$$

解

我们利用广义积分中值定理和 $x\to 0,\ \sin x\sim x$, 原极限等价于:

$$I=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+\frac{1}{2\xi})^\xi\int_x^{x^2}\sin\frac{1}{\sqrt{t}dt}}{x},\ \xi\in(x,x^2)$$

利用洛比达法则得到:

$$I=\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{2\xi})^\xi\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{\sqrt{x}}}{1}=I_1I_2$$

由夹逼定理得到:

$$I_1=e^{\frac{1}{2}},\ I_2=2\Rightarrow I=2e^{\frac{1}{2}}$$

32.4 Week IV

June 22

例题 32.42.

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & b & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a & a+b & b & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a & a+b & b & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a & a+b & b\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a+b \end{vmatrix}$$

解

我们将行列式按照第一行展开后得到:

$$D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2},\ D_1=a+b,\ D_2=a^2+b^2-ab$$

我们可以得到:

$$D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2})$$

我们构造数列 $\{x_n\}=D_{n+2}-aD_{n+1},\ x_1=b^2\Rightarrow x_n=b^{n+1}$

我们得到:

$$D_n - aD_{n-1} = b^n$$

同样我们可以得到:

$$D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2})$$

我们构造数列 $\{y_n\} = D_{n+2} - bD_{n+1}$, $y_1 = a^2 \Rightarrow y_n = a^{n+1}$
我们得到:

$$D_n - bD_{n-1} = a^n$$

我们有:

$$\begin{cases} D_n - aD_{n-1} = b^n \\ D_n - bD_{n-1} = a^n \end{cases} \Rightarrow (a-b)D_n = a^{n+1} - b^{n+1}$$

(1). 当 $a = b$ 时, 我们直接得到: $D_n - aD_{n-1} = a^n$, $D_1 = a + b$
我们有: $\{\frac{D_n}{a^n}\}$ 是首项为 2, 公差为 1 的等差数列,$D_n = (n+1)a^n$
(2). 当 $a \neq b$ 时, 我们得到: $D_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$
综上所述, 我们得到:

$$D_n = \begin{cases} \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} \\ (n+1)a^n \end{cases}$$

例题 32.43.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{x^2}$$

解

原极限等价于:

$$I = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x + x\ln(1 - \frac{\ln x}{x})}$$

$$I = e^{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + x\ln x) - x\ln x}{x}}$$

我们有: $\ln(1+x) - x \sim -\frac{1}{2}x^2$
原极限 $I = 1$
June 23

例题 32.44.

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 + \int_0^x e^{t^2} dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right)$$

解

原极限等价于:

$$I=\frac{\sin x+\sin x\int_0^x e^{t^2}-(e^x-1)}{x^2}$$

我们利用泰勒展开可以得到:

$$I=\frac{x+o(x^2)+(x+o(x^2))\int_0^x(1+o(t))dt-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

例题 32.45.

$$A=\begin{pmatrix} a^n & (a+1)^n & \cdots & (a+n)^n \\ a^{n-1} & (a+1)^{n-1} & \cdots & (a+n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a+1 & \cdots & a+n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

求伴随矩阵 A^* 的所有元素之和

解

我们知道 A 的伴随矩阵 A^* 的所有元素之和为 A 的所有代数余子式的和, 我们可以得到:

$$\operatorname{sum}(A^*)=\sum_{i,j\in n}A_{ij}$$

我们对每一行的代数余子式表示为原行列式对应行全换为 1 的新行列式的值, 我们得到:

$$\sum_{i,j\in n}A_{ij}=|A|$$

我们将 A 上下颠倒即可得到一个范德蒙行列式.

$$|A|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\sum_{n=1}^{n}n!$$

June 24

例题 32.46.

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)+\int_0^x t(1+t)^{\frac{1}{t}dt}}\right]$$

解

我们首先有:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}=1,\ \lim_{x\to0}\frac{\int_0^x t(1+t)^{\frac{1}{t}}dt}{x^2}=\frac{e}{2}$$

我们可以得到:

$$x \to 0,\ \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \sim x,\ \int_0^x t(1+t)^{\frac{1}{t}}dt \sim \frac{e}{2}x^2$$

原极限等价于: (泰勒展开)

$$I = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x+\frac{e-1}{2}x^2+o(x^2)-x+o(x^2)}{x(x+o(x))}\right] = \frac{e-1}{2}$$

例题 32.47.

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+j^2}$$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n^2}\frac{1}{n}\frac{1}{1+(\frac{j}{n})^2} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^n \frac{1}{1+x^2}dx \\ &= \lim_{n\to+\infty}(\arctan n-\frac{\pi}{4}) \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

June 25

例题 32.48.

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}$$

解

我们可以得到:

$$\frac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n}\frac{n}{n+1} < \frac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n+\frac{1}{k}} < \frac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n+1}$$

我们得到:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{2n}\frac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n+\frac{1}{k}} > \frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n} \\ \sum_{k=1}^{2n}\frac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n+\frac{1}{k}} < \sum_{k=1}^{2n}\frac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n+\frac{1}{k}} > \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\int_0^2\sqrt{1+\sin\pi x}dx \\ \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n+\frac{1}{k}} < \int_0^2\sqrt{1+\sin\pi x}dx \end{cases}$$

我们由夹逼定理可以得到:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2\sqrt{1+\sin\pi x}dx \\ &= \pi\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin x}dx \\ &= 2\pi\int_0^{\pi}|\sin x+\cos x|dx \\ &= 2\pi\int_0^{\frac{3}{4}\pi}(\sin x+\cos x)dx-2\pi\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}(\sin x+\cos x)dx \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

例题 32.49.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x^3-x^2+\frac{x}{2}+1)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+x^2+x+1}\right]$$

解

我们令 $t=\frac{1}{x}$, 原极限等价于:

$$I=\lim_{t\to0}\left[\frac{(t^3+\frac{1}{2}x^2-t+1)e^t-\sqrt{t^6+t^5+t^4+1}}{t^3}\right]$$

我们利用泰勒展开得到:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{t\to0}\left[\frac{(t^3+\frac{1}{2}x^2-t+1)e^t-\sqrt{t^6+t^5+t^4+1}}{t^3}\right] \\ &= \lim_{t\to0}\left[\frac{(t^3+\frac{1}{2}x^2-t+1)(1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3)-(1+t^4+t^5+t^6)}{t^3}\right] \\ &= \lim_{t\to0}\frac{\frac{7}{6}t^3+o(t^3)}{t^3} \\ &= \frac{7}{6} \end{aligned}$$

June 26

例题 32.50.

求 $\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 的整数部分

解

我们可以得到原和式等价于:

$$I = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{100}}$$

我们把这个理解为 100 个长方形面积之和, 我们有:

$$\begin{cases} I > \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx + \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x}}dx + \cdots + \int_{100}^{101} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^{101} \frac{1}{\sqrt{x}}dx \\ I < 1 + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx + \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x}}dx + \cdots + \int_{99}^{100} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 1 + \int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{x}}dx \end{cases}$$

我们可以得到:

$$2(\sqrt{101} - 1) < I < 1 + 2(\sqrt{100} - 1 \Rightarrow 18 < I < 19$$

综上所述, 原和式的整数部分为 18.

例题 32.51.

设 $f(x)$ 是满足 $\int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t-x)f(t)dt = \cos^4 x$ 的连续函数, 求 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的平均值

解

我们要求的是:

$$I = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx}{\frac{\pi}{2}}$$

我们对 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t-x)f(t)dt = \cos^4 x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上取定积分得到:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t-x)f(t)dt \right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = \frac{3}{16}\pi$$

我们交换积分次序可以得到:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt \int_0^t f(t-x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt \int_0^t f(u)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)F(t)dt = \frac{3}{16}\pi$$

其中 $F'(t) = f(t)$, 我们得到:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)F(t)dt = \frac{1}{2}F^2(x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}F^2(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{16}\pi$$

我们可以得到:

$$I = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \pm\sqrt{\frac{3}{2\pi}}$$

June 27

例题 32.52.

$$|A| = \begin{vmatrix} a + x_1 & a + x_1^2 & \cdots & a + x_1^n \\ a + x_2 & a + x_2^2 & \cdots & a + x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a + x_n & a + x_n^2 & \cdots & a + x_n^n \end{vmatrix} (a \neq 0)$$

解

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1+a-a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+x_1 & a+x_1^2 & \cdots & a+x_1^n \\ a & a+x_2 & a+x_2^2 & \cdots & a+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a+x_n & a+x_n^2 & \cdots & a+x_n^n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1+a-a & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ a & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ a & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1+a & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 0 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ a & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ a & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \\
&= (1-a)\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} + (-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \\
&= (1-a)\prod_{k=1}^{n} x_k \prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i) - a\prod_{k=1}^{n}(x_k-1)\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i) \\
&= \prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\left[(1-a)\prod_{k=1}^{n} x_k - a\prod_{k=1}^{n}(x_k-1)\right]
\end{aligned}
$$

范德蒙行列式应用

求行列式:

$$|A| = \begin{vmatrix} a+x_1 & a+x_2 & \cdots & a+x_n \\ a^2+x_1^2 & a^2+x_2^2 & \cdots & a^2+x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n+x_1^n & a^n+x_2^n & \cdots & a^n+x_n^n \end{vmatrix} (a \neq 0)$$

解

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+x_1 & a+x_2 & \cdots & a+x_n \\ a^2 & a^2+x_1^2 & a^2+x_2^2 & \cdots & a^2+x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n & a^n+x_1^n & a^n+x_2^n & \cdots & a^n+x_n^n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ a & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ a^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ a^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ a^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \\ &= 2\prod_{k=1}^{n} x_k \prod_{1<i\le j<n} (x_j - x_i) - \prod_{k=1}^{n}(x_k - a) \prod_{1<i\le j<n} (x_j - x_i) \\ &= \prod_{1<i\le j<n} (x_j - x_i) \left[2\prod_{k=1}^{n} x_k - \prod_{k=1}^{n}(x_k - a) \right] \end{aligned}$$

例题 32.53.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} \left[\ln(1+\sin^2 x) - 6(\sqrt[3]{2-\cos x} - 1) \right]$$

解

我们利用泰勒展开:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0}\frac{(x-\frac{x^3}{6})^2-\frac{1}{2}(x-\frac{x^3}{6})^4-6[\frac{1-\cos x}{3}-\frac{(1-\cos x)^2}{9}]}{x^4} \\ &= \frac{x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)-2(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4)+o(x^4)+\frac{2}{3}\frac{1}{4}x^4+o(x^4)}{x^4} \\ &= -\frac{7}{12} \end{aligned}$$

June 28

例题 32.54.

$$\int_0^1 x\arcsin 2\sqrt{x-x^2}dx$$

解

我们利用区间再现公式:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_0^1 \arcsin 2\sqrt{x-x^2}dx \\ &= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\arcsin(\cos t)dt \\ &= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos t\arcsin(\cos t)dt\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\arcsin(\cos t)dt \\ &= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(\frac{\pi}{2}+t)\cos tdt+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-t)\cos tdt \\ &= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos tdt \\ &= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-1) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

例题 32.55.

设 $a_n\geq 0$, 且 $\{na_n\}$ 有界, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n^2$ 收敛

解

我们由 $\{na_n\}$ 收敛得出:

$$\forall M>0,\exists N_0>0,\ \text{当}n>N_0, na_n<M\Rightarrow a_n<\frac{n}{M}\Rightarrow a_n^2<\frac{M^2}{n^2}$$

我们知道级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{M^2}{n^2}$($M$为常数) 收敛, 我们通过比较判别法得出: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n^2$ 收敛.

June 29

例题 32.56.

A 是三阶矩阵, $\forall i,j \in \{1,2,3\}, a_{ij} = A_{ij}, a_{33} = 1$, 证明: A 是正交矩阵

解

我们由: $\forall i,j \in \{1,2,3\},\ a_{ij} = A_{ij} \Rightarrow A^T = A^*$

我们有:

$$AA^T = AA^* = |A|E \Rightarrow |A|^2 = |A|^3 \Rightarrow |A| = 1\text{或者}0$$

我们将 $|A|$ 按照第三行展开得到:

$$|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = a_{31}^2 + a_{32}^2 + 1 \geq 1$$

我们得到: $|A| = 1$

我们有: $AA^T = AA^* = E \Rightarrow A$是正交矩阵.

例题 32.57.

证明: $e^{\int_0^1 f(x)dx} \leq \int_0^1 e^{f(x)}dx$

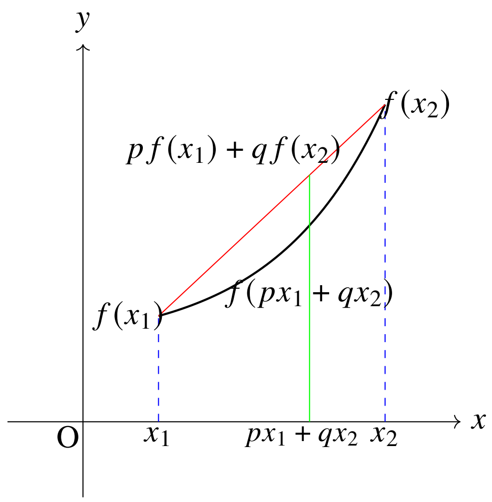


图 32.1: 凹函数性质

解

凹函数性质

我们不妨假设 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凹函数, 我们有以下的定理.

$$\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in (a,b), x_1 < x_2 < \cdots < x_n, \exists p_1, p_2, \cdots, p_n > 0, \sum_{i=1}^n p_n = 1,\ s.t. \sum_{i=1}^n p_i f(x_i) \geq f(\sum_{i=1}^n p_i x_i)$$

证明

(1). 当 $n=1$ 时, 原命题显然成立.
(2). 当 $n=2$ 时, 原命题等价于:

$$p+q=1,\ f(px_1+qx_2)\leq pf(x_1)+qf(x_2)$$

我们由 *Figure* :32.1得到:

$$\begin{cases} px_1+qx_2>(p+q)x_1=x_1 \\ px_1+qx_2<(p+q)x_2=x_2 \end{cases} px_1+qx_2\in(x_1,x_2)$$

$$\frac{l-f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}=\frac{px_1+qx_2-x_1}{x_2-x_1}=q\Rightarrow l=qf(x_1)+(1-q)f(x_1)=pf(x_1)+qf(x_2)$$

(3). 假设当 $n=k$ 时, 我们有:

$$\sum_{i=1}^{k}p_if(x_i)\geq f(\sum_{i=1}^{k}p_ix_i)$$

当 $n=k+1$ 时, 我们有:

$$\begin{aligned} f(x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}) &= f((1-x_{k+1})[\frac{x_1}{1-p_{k+1}}+\frac{x_2}{1-p_{k+1}}+\cdots+\frac{x_k}{1-p_{k+1}}+p_{k+1}x_{k+1}]) \\ &\leq p_{k+1}f(x_{k+1})+\frac{1}{1-p_{k+1}}f(\sum_{i=1}^{k}\frac{p_i}{1-p_{k+1}}x_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k+1}p_if(x_i) \end{aligned}$$

原命题等价于:

$$\lim_{n\to+\infty}e^{\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})\frac{i}{n}}\leq\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}e^{f(\frac{i}{n})}$$

我们得到:

$$e^{\int_0^1 f(x)dx}\leq\int_0^1 e^{f(x)}dx$$

June 30

例题 32.58.

$$\lim_{x\to 0}\int_0^x \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^{\frac{1}{\int_0^t \ln(1+u)du}} \cot x dt$$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x\int_0^x \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^{\frac{1}{\int_0^t \ln(1+u)du}}}{\sin x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^{\frac{1}{\int_0^t \ln(1+u)du}}dt}{x}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\frac{\arctan x}{x})}{\int_0^x \ln(1+u)du}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{3}x^2}{\int_0^x \ln(1+u)du}}\\
&= e^{-\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

例题 32.59.

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 xf(x)dx=1$, $\int_0^1 f(x)dx=0$, 证明:

$$\exists \xi\in(0,1),\ s.t. \left|f(\xi)\right|\geq 4$$

解

我们由 $\int_0^1 xf(x)dx=1$, $\int_0^1 f(x)dx=0$ 得到:

$$\int_0^1 (x+a)f(x)=1\Rightarrow \int_0^1 |x+a||f(x)|\geq 1$$

我们假设 $f(x)<4$, 我们得到:

$$4\int_0^1 |x+a|dx>1$$

我们有:

$$4\int_0^1 |x+a|dx=\begin{cases}4a+2, a\geq 0\\ -4a-2, a\leq -1\\ 4a^2+4a+2, a\in(-1,0)\end{cases}$$

我们要得出矛盾, 即令 $4\int_0^1|x+a|dx\leq 1$, 我们令 $a=-\dfrac{1}{2}$,$4\int_0^1|x+a|dx=1$ 矛盾!!!

综上所述, 我们得到: $\exists\xi \in (0,1),\ s.t.|f(\xi)| \geq 4$

第六部分

每日一题 II

第 6 部分目录

第 33 章 July

33.1 Week I

July 1

例题 33.1.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}\right]^{x^2\ln x}$$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to+\infty} e^{x^2\ln x\ln\left[1+\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}\right]}\\
I_1 &= \lim_{x\to+\infty} x^2\ln x\ln\left[1+\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}\right]\\
&= \lim_{x\to+\infty} x^2\ln x(\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{\ln(x+\sqrt{x^2-1})})\\
&= \lim_{x\to+\infty} x^2\ln x(\frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})}{\xi\ln(2x)}),\xi\in(x+\sqrt{x^2-1},x+\sqrt{x^2+1})\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\xi}\frac{2x}{(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\xi}
\end{aligned}
$$

我们用夹逼定理: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\xi}=\frac{1}{2}$

原极限 $I = e^{\frac{1}{2}}$

例题 33.2.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 导函数连续, 且 $\int_0^1 x^2 f'(x)dx = 1$, 证明:

(1). $\exists \xi \in (0,1)$, $s.t. f'(\xi) = 3$

(2). $f(1) = \int_0^1 f(x)dx = 0 \to \exists \eta \in (0,1)$, $s.t.\ f'(\eta) = -\dfrac{6}{7}$

解

(1). 我们不妨设 $g(x) = x^2$, 我们有 $x \in (0,1), g(x) > 0$, 我们根据第一积分中值定理得到:

$$\exists \xi \in (0,1),\ s.t. \int_0^1 f'(x)g(x)dx = f'(\xi)\int_0^1 g(x)dx \Rightarrow \int x^2 f'(x)dx = f'(\xi)\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}f'(\xi) = 1$$

综上所述, 我们得到: $\exists \xi \in (0,1)$, $s.t. f'(\xi) = 3$

(2). 我们由 $\int_0^1 x^2 f'(x)dx = 1$ 得到:

$$\int_0^1 f(x)dx = xf(x)|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 xf'(x)dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 xf'(x)dx = 0$$

我们得到:

$$\begin{cases} \int_0^1 xf'(x)dx = 0 \\ \int_0^1 x^2 f'(x)dx = 1 \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 (x^2 - kx)f'(x)dx = 1$$

我们假设 $h(x) = x^2 - kx$, 我们不妨假设 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上恒有 $h(x) > 0$ 或者 $h(x) < 0$, 我们由第一积分中值定理得到:

$$\exists \eta \in (0,1),\ s.t. \int_0^1 h(x)f'(x) = f'(\eta)\int_0^1 h(x)dx \Rightarrow f'(\eta)\int_0^1 (x^2 - kx)dx = 1 \Rightarrow f'(\eta) = \frac{6}{2-3k}$$

当 $k = 3$ 时, 我们有 $h(x) = x^2 - 3x$, 当 $x \in (0,1), h(x) < 0$, 满足第一积分中值定理使用条件, 我们可以得到: $\exists \eta \in (0,1)$, $s.t. f'(\eta) = -\dfrac{6}{7}$

July 2

例题 33.3.

设 $f(x)$ 连续, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0}\left[1 + \int_0^x tf(x^2 - t^2)dt\right]^{\frac{1}{(\tan x - x)\ln(1+x)}}$$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to0} e^{\frac{3\int_0^{x^2}-\frac{1}{2}f(x^2-t^2)d(x^2-t^2)}{x^4}} \\
&= \lim_{x\to0} e^{\frac{\frac{3}{2}\int_0^{x^2}f(u)du}{x^4}} \\
&= \lim_{x\to0} e^{\frac{3f(x^2)}{4x^2}} \\
&= e^{\frac{3}{4}}
\end{aligned}$$

例题 33.4.

设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的周期为 1 的周期函数且满足 $0 \le f(x) \le 1$, $\int_0^1 f(x)dx = 1$, 证明:

$$x\in[0,13], \int_0^{\sqrt{x}} f(t)dt + \int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)dt + \int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)dt \le 11$$

解

我们由 $0 \le f(x) \le 1$ 得到:

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)dt+\int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)dt+\int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)dt \le \sqrt{x}+\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x} = 1\cdot\sqrt{x}+a\cdot\frac{1}{a}\sqrt{x+27}+b\cdot\frac{1}{b}\sqrt{13-x}$$

我们由柯西不等式得到:

$$1\cdot\sqrt{x}+a\cdot\frac{1}{a}\sqrt{x+27}+b\cdot\frac{1}{b}\sqrt{13-x} \le \sqrt{(1+a^2+b^2)(x+\frac{x+27}{a^2}+\frac{13-x}{b^2})}$$

我们需要满足:

$$\begin{cases} 1+\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=0 \\ (1+a^2+b^2)(\dfrac{27}{a^2}+\dfrac{13}{b^2})=121 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=2 \\ b^2=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

我们可以得到原不等式取等号条件 $\dfrac{\sqrt{x}}{1}=\dfrac{\sqrt{x+27}}{2}=\dfrac{3\sqrt{13-x}}{2}$, 当且仅当 $x=9$ 时等号成立.

当 $x=9$ 时, 原不等式为:

$$\int_0^3 f(t)dt+\int_0^6 f(t)dt+\int_0^2 f(t)dt = 11\int_0^1 f(t)dt = 11$$

综上所述, 等号成立条件为 $x=9$, 原不等式成立.

July 3

例题 33.5.

设 $D=\{(x,y)|0\le x\le 2,0\le y\le 2\}$, $f(x,y)$ 在 D 上连续, $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=0$, $\iint\limits_D xyf(x,y)dxdy=1$, 证明:

$$\exists(\xi,\eta)\in D,\ s.t.\left|f'(\xi,\eta)\right|\ge\frac{2}{4\ln 2+3}$$

1.

解

我们由: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=0,\iint\limits_D xyf(x,y)dxdy=1$ 得到:

$$\iint\limits_D(xy-k)f(x,y)dxdy=1\Rightarrow\iint\limits_D|xy-k||f(x,y)|dxdy\ge 1$$

我们由二重积分第一积分中值定理得到:

$$\exists(\xi,\eta)\in D,\ s.t.|f(\xi,\eta)|\iint\limits_D|xy-k|dxdy=\iint\limits_D|xy-k||f(x,y)|dxdy\ge 1$$

我们得到:

$$\exists(\xi,\eta)\in D,\ s.t.|f(\xi,\eta)|\ge\frac{1}{\iint\limits_D|xy-k|dxdy}$$

我们只需要找到 k 使得 $\iint\limits_D|xy-k|dxdy=2\ln 2+\frac{3}{2}$.

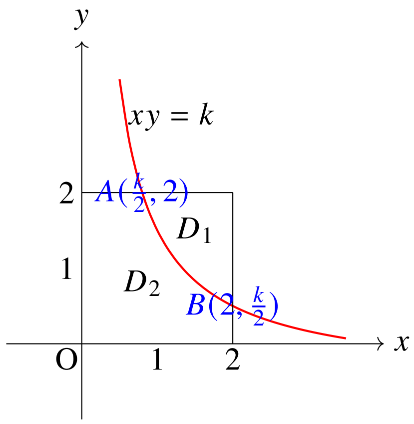


图 33.1: 积分区域图

原二重积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{D_1}(xy-k)dxdy+\iint\limits_{D_2}(k-xy)dxdy \\ &= \int_{\frac{k}{2}}^{2}dx\int_{\frac{k}{x}}^{2}(xy-k)dy+\int_{0}^{\frac{k}{2}}dx\int_{0}^{2}(k-xy)dy+\int_{\frac{k}{2}}^{2}dx\int_{0}^{\frac{k}{x}}(k-xy)dy \\ &= \frac{3}{4}k^2-4k+4+\frac{3}{4}k^2+k^2\ln 2-k^2\ln\frac{k}{2} \\ &= 2k^2\ln 2-k^2\ln k+\frac{3}{2}k^2+4-4k \end{aligned}$$

我们得到:

$$\begin{cases} 2k^2=2 \\ \ln k=0 \\ \frac{3}{2}k^2+4-4k=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow k=1$$

综上所述, 我们找到 $k=1$ 使得上式成立, 我们有: $\exists(\xi,\eta)\in D,\ s.t.|f'(\xi,\eta)|\geq\dfrac{2}{4\ln 2+3}$

例题 33.6.

$$\lim_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)}{\ln x}} \\ &\overset{L}{=} \lim_{x\to+\infty}e^{\frac{(1-\ln x)e^{\frac{\ln x}{x}}}{x(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)}} \\ &= \lim_{x\to+\infty}e^{\frac{(1-\ln x)e^{\frac{\ln x}{x}}}{\ln x}} \\ &= e^{-1} \end{aligned}$$

注

- 如果 $f\sim g$, 我们有 $\ln f\sim\ln g$

July 4

例题 33.7.

已知 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}, b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\frac{\pi^2}{6}$

(1). 证明: $a_{2n}=\frac{1}{4}a_n+b_n(n=1,2,\cdots)$

(2). $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(\frac{b_n}{a_n}-\frac{3}{4}\right)$

解

(1). 我们有:

$$\frac{1}{4}a_n=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2}$$

因此, 我们有:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}a_n+b_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}\\ &= \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^2}\\ &= a_{2n}\end{aligned}$$

(2). 原极限等价于:

$$\begin{aligned}I &= \lim_{n\to+\infty}n\left(\frac{a_{2n}-a_n}{a_n}\right)\\ &= \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}n(a_{2n}-a_n)}{\lim\limits_{n\to+\infty}a_n}\\ &= \frac{6}{\pi^2}\lim_{n\to+\infty}n\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+k)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+n)^2}\right]\\ &= \frac{6}{\pi^2}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{k}{n})^2}\\ &= \frac{6}{\pi^2}(-\frac{1}{1+x})|_0^1\\ &= \frac{3}{\pi^2}\end{aligned}$$

注

- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$
- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$
- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{24}$

例题 33.8.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(xe^x)-e^{-\frac{x^2}{2}e^{2x}}}{x^\alpha}=\beta\neq 0, \text{求 } \alpha,\beta$$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}x^2e^{2x}+\frac{1}{24}x^4e^{4x}-(1-\frac{1}{2}x^2e^{2x}+\frac{1}{8}x^4e^{4x})}{x^\alpha} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4e^{4x}}{x^\alpha} \\ &= \beta \end{aligned}$$

我们得到: $\alpha=4,\ \beta=-\dfrac{1}{12}$

July 5

例题 33.9.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}dx(a>0)$$

解

原积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\frac{\ln a+\ln\frac{x}{a}}{(\frac{x}{a})^2+1}d(\frac{x}{a}) \\ &= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\frac{\ln a+\ln u}{u^2+1}du \\ &= \frac{\ln a}{a}\int_0^{+\infty}\frac{1}{u^2+1}du+\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\frac{\ln u}{u^2+1}du \\ &= I_1+I_2 \\ I_1 &= \frac{\pi\ln a}{2a} \\ I_2 &= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\frac{\ln u}{u^2+1}du=\frac{1}{a}\int_{+\infty}^{0}\frac{-\ln t}{(\frac{1}{t})^2+1}(-\frac{1}{t^2})dt=-\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+1}dt\Rightarrow I_2=0 \\ I &= I_1+I_2=\frac{\pi\ln a}{2a} \end{aligned}$$

$\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 积分技巧

- 倒代换
- 分割为 $\int_0^1 f(x)+\int_1^{+\infty}f(x)dx$
- 利用正切三角换元法

例题 33.10.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^\alpha}=\beta\neq 0, \text{求 } \alpha,\beta$$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 2x-\cos^2 x\cos 2x}{(\cos x+\cos x\sqrt{\cos 2x})x^\alpha} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos 2x\sin^2 x}{(\cos x+\cos x\sqrt{\cos 2x})x^\alpha} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos 2x}{\cos x+\cos x\sqrt{\cos 2x}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^\alpha} \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^\alpha} \\ &= \beta \end{aligned}$$

我们可以得到: $\alpha=2,\ \beta=-\dfrac{1}{2}$

July 6

例题 33.11.

设 $f(x)=\dfrac{1}{1+3x+9x^2}$, 求 $f^{(100)}(0)$

解

我们可以得到:

$$f(x)=\frac{1-3x}{(1-3x)(1+3x+9x^2)}=\frac{1}{1-(3x)^3}-3x\frac{1}{1-(3x)^3}$$

我们将 $f(x)$ 在 $x=0$ 处泰勒展开得到:

$$\begin{cases} f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{100}x^{100}+\cdots+a_nx^n+\cdots \\ f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(100)}}{100!}x^{100}+\cdots \end{cases} \Rightarrow f^{(100)}(0)=a_{100}100!$$

我们有:

$$-1<x<1,\ 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n=\frac{1}{1-x}$$

我们得到:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(3x)^{3n}-\sum_{n=0}^{+\infty}(3x)^{3n+1}$$

我们得到: $a_{100}=-3^{100}\Rightarrow f^{(100)}(0)=-3^{100}100!$

例题 33.12.

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-e^{x^2-2x}}{x^2}=2,\text{ 求 } a,b$$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-(1+x^2-2x+\frac{1}{2}(x^2-2x)^2)}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(b+2)x+(a-3)x^2}{x^2} \\ &= a-3 \end{aligned}$$

我们得到: $\begin{cases} a-3=2 \\ b+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-2 \end{cases}$

July 7

例题 33.13.

$$\lim_{x\to 0}\frac{n!x^n-\sin x\sin 2x\cdots\sin nx}{x^{n+2}}$$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= n!\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{\sin x\sin 2x\cdots\sin nx}{n!x^n}}{x^2} \\ &= n!\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{\sin x}{x}\frac{\sin 2x}{2x}\cdots\frac{\sin nx}{nx}}{x^2} \\ &= -n!\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\frac{\sin x}{x}\frac{\sin 2x}{2x}\cdots\frac{\sin nx}{nx})}{x^2} \\ &= -n!\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{\sin kx-kx}{kx})}{x^2} \\ &= n!\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{kx-\sin kx}{kx^3} \\ &= n!\sum_{k=1}^{n}(\frac{k^2}{6}) \\ &= n!\frac{n(n+1)(2n+1)}{36} \\ &= \frac{n(2n+1)(n+1)!}{36} \end{aligned}$$

例题 33.14.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})+ax^2+bx^3}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^2, \text{求 } a,b$$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\left(\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+ax^2+bx^3-x}{x}+1\right)}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+ax^2+bx^3-x}{x^3}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)+ax^2+bx^3-x}{x^3}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(b-\frac{1}{6})x^3+o(x^3)+ax^2}{x^3}} \\
&= e^2
\end{aligned}$$

我们得到: $\begin{cases} b-\frac{1}{6}=2 \\ a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\dfrac{13}{6} \\ a=0 \end{cases}$

注

$x\to 0,\ x\sim\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

我们可以得到:

$$[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^3+\cdots$$

我们可以得到: $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的泰勒展开式:

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

33.2 Week II

July 8

例题 33.15.

设 n 阶矩阵 A, B 满足 $AB + aA + bB + cE = O$, 其中 $ab \neq c$, 证明:

(1). $A + bE$ 与 $B + aE$ 均为可逆矩阵

(2). $AB = BA$

1.

解

(1). 我们由 $AB + aA + bB + cE = O$ 可以得到:

$$(A + bE)(B + aE) = (ab - c)E$$

我们得到:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{ab - c}(A + bE)(B + aE) = E \\ (A + bE)\dfrac{1}{ab - c}(B + aE) = E \end{cases}$$

我们得到: $A + bE$ 与 $B + aE$ 均为可逆矩阵

(2). 我们可以得到:

$$\frac{1}{ab - c}(A + bE)(B + aE) = \frac{1}{ab - c}(B + aE)(A + bE)$$

我们化简一下:

$$\begin{cases} \text{左边} = AB + bB + aA + abE \\ \text{右边} = BA + aA + bB + abE \end{cases} \Rightarrow AB = BA$$

例题 33.16.

已知常数 $a > 0, bc \neq 0$, 且 $\lim\limits_{x \to +\infty} [x^a \ln(1 + \frac{x}{b}) - x] = c$, 求 a, b, c

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + bx) - x^{a-1}}{x^a} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{bx - \frac{1}{2}b^2x^2 - x^{a-1}}{x^a} \\ &= c \end{aligned}$$

我们得到: $\begin{cases} a - 1 = 1 \\ b = 1 \\ c = -\dfrac{1}{2}b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

July 9

例题 33.17.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{6n}}\frac{\sin y}{y}dy+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{3}{6n}}\frac{\sin y}{y}dy+\cdots+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{(2n-1)}{6n}}\frac{\sin y}{y}dy\right]$$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2k-1}{6n}}\frac{\sin y}{y}dy\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{2k-1}{2n})\\
&= \int_0^1[\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}x}\frac{\sin y}{y}dy]dx\\
&= -\int_0^{\frac{1}{3}}dy\int_0^{3y}\frac{\sin y}{y}dx\\
&= -\int_0^{\frac{1}{3}}3\sin ydy\\
&= 3(\cos\frac{1}{3}-1)
\end{aligned}$$

例题 33.18.

设 A 为 n 阶反对称矩阵, 证明: 对于任意向量 x, 均有 $x^T(A+E)x\geq 0$

解

我们有:

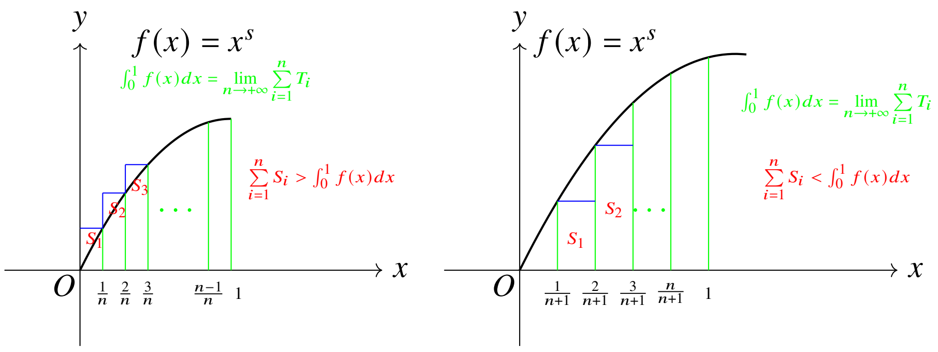
$$x^T(A+E)x=[x^T(A+E)x]^T=x^T(A^T+E)x=x^T(-A+E)x$$

$$x^T(A+E)x+x^T(A-E)x=2x^TAx=0\Rightarrow x^T(A+E)x=x^TAx+x^TEx=x^Tx\geq 0$$

July 10

例题 33.19.

$$\frac{n^{s+1}}{s+1}<1^s+2^s+\cdots+n^s<\frac{(n+1)^{s+1}}{s+1}(s>0)$$



(a) 定积分定义示意图 α (b) 定积分定义示意图 β

图 33.2: 积分和求和关系图

解

原不等式可以化为:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{n}[(\frac{1}{n})^s+(\frac{2}{n})^s+\cdots+(\frac{n}{n})^s]>\dfrac{1}{s+1}\\ \dfrac{1}{n+1}[(\frac{1}{n+1})^s+(\frac{2}{n+1})^s+\cdots+(\frac{n}{n+1})^s]<\dfrac{1}{s+1}\end{cases}$$

如图 (a) 第一个不等式:

$$左边=\sum_{i=1}^{n}S_i>\int_0^1 x^s dx=\frac{1}{s+1}=右边$$

如图 (b) 第二个不等式:

$$左边=\sum_{i=1}^{n}S_i<\int_0^1 x^s dx=\frac{1}{s+1}=右边$$

例题 33.20.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^{p+1}+2^{p+1}+\cdots+n^{p+1}}{n(1^p+2^p+\cdots+n^p)}(p>0)$$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to+\infty}\frac{(\frac{1}{n})^{p+1}+(\frac{2}{n})^{p+1}+\cdots+(\frac{n}{n})^{p+1}}{(\frac{1}{n})^{p}+(\frac{2}{n})^{p}+\cdots+(\frac{n}{n})^{p}}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}[(\frac{1}{n})^{p+1}+(\frac{2}{n})^{p+1}+\cdots+(\frac{n}{n})^{p+1}]}{\frac{1}{n}[(\frac{1}{n})^{p}+(\frac{2}{n})^{p}+\cdots+(\frac{n}{n})^{p}]}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^{p+1}}{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^{p}}\\
&= \frac{\int_0^1\frac{x^{p+2}}{p+2}dx}{\int_0^1\frac{x^{p+1}}{p+1}dx}\\
&= \frac{p+1}{p+2}
\end{aligned}$$

July 11

例题 33.21.

已知 $A=\begin{bmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, 求 A^{99}

解

我们将矩阵 A 相似对角化:

(1). 求矩阵 A 的特征值和特征向量

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\-2&\lambda+3&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)$$

矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=-2$

当 $\lambda_1=0$ 时,$(-A)x=0\Rightarrow\begin{bmatrix}0&1&-1\\-2&3&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0\Rightarrow\xi_1=(3,2,2)^T$

当 $\lambda_2=-1$ 时,$(-E-A)x=0\Rightarrow\begin{bmatrix}-1&1&-1\\-2&2&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0\Rightarrow\xi_2=(1,1,0)^T$

当 $\lambda_3=-2$ 时,$(-2E-A)x=0\Rightarrow\begin{bmatrix}-2&1&-1\\-2&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0\Rightarrow\xi_3=(1,2,0)^T$

存在可逆矩阵 $P=\begin{bmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{bmatrix}$, $s.t.\ P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}0&&\\&-1&\\&&-2\end{bmatrix}$, 其中 $P^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

我们得到:

$$A=P\Lambda P^{-1}\Rightarrow A^{99}=P\Lambda^{99}P^{-1}$$

上面的式子可以化为:

$$\begin{aligned}A^{99}&=\begin{bmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&&\\&-1&\\&&-2^{99}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0&-1&-2^{99}\\0&-1&-2^{100}\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}2^{99}-2&1-2^{99}&2-2^{98}\\2^{100}-2&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

例题 33.22.

设 3 阶实对称矩阵 A 特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1,\lambda_1$ 的特征向量为 $\xi_1=[0,1,1]^T$, 求 A

解

我们不妨设特征值 λ_2, λ_3 对应的特征向量为 $x=(x_1,x_2,x_3)^T$, 我们由实对称矩阵不同特征值对应的特征向量相互正交得到:

$$x_2+x_3=0$$

我们不妨取 $\xi_2=(1,0,0)^T$, $\xi_3=(0,-1,1)^T$ 作为特征值 λ_2, λ_3 的特征向量. 我们将 ξ_1,ξ_2,ξ_3 单位化得到:

$$\begin{cases}\eta_1=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T\\\eta_2=(1,0,0)^T\\\eta_3=(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T\end{cases}$$

我们得到:

$$\exists \text{可逆矩阵} P=[\eta_1,\eta_2,\eta_3],\ s.t. P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}$$

其中 $P=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}, P^{-1}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

我们得到:

$$\begin{aligned} A &= P\Lambda P^{-1}\\ &= \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

July 12

例题 33.23.

设 A 是任意的 $m\times n$ 矩阵, 证明: 方程组 $A^TAx=A^Tb$ 一定有解

解

我们知道非齐次方程组有解的充要条件为: $rank(A)=rank([A,b])$

在此题中, 我们需要证明:

$$rank(A^TA)=rank([A^TA,A^Tb])=rank(A^T[A,b])$$

显然, 我们由 $rank(AB)\le min\{rank(A),rank(B)\}$ 有:

$$rank(A^TA)\le rank([A^TA,A^Tb])=rank(A^T[A,b])\le rank(A^T)$$

我们还有: $rank(A)=rank(A^T)=rank(AA^T)=rank(A^TA)$

因此我们得到:

$$\begin{cases} rank(A^TA)=rank(A)\le rank([A^TA,A^Tb])\\ rank([A^TA,A^Tb])\ge rank(A^T)=rank(A)=rank(A^TA)\end{cases}\Rightarrow rank(A^TA)=rank([A^TA,A^Tb])$$

原方程组一定有解.

例题 33.24.

设 A 为 3 阶实对称矩阵, $B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}, \alpha=(1,0,1)^T$ 是矩阵 A 特征值 3 的一个特征向量, 若 $r(3E-A)>1$, 且 $A^2-4E+3E=0$, 下列选项错误的是:

- A. 矩阵 A 必可相似对角化
- B. 矩阵 B 不可以相似对角化
- C. 矩阵方程 $AX-XB=0$ 有可逆解
- D. $r(3E-A)=2$

解

A. 我们由实对称矩阵必可相似对角化得到矩阵 A 一定可以相似对角化.

B. 矩阵 B 的三个特征值为 $\lambda_1=3, \lambda_2=\lambda_3=1$, 对于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=1, n-r(E-B)=1$, 不满足相似对角化条件.

C. 假设方程 $AX-XB=0$ 存在可逆解, 我们有 $AXX^{-1}=XBX^{-1}\Rightarrow A=XBX^{-1}$, 我们可以得到: $A\sim B$, 我们有 $A\sim\Lambda$, 可以得到: $B\sim\Lambda$, 矛盾!!

D. 我们有: $A^2-4E+3E=0\Rightarrow(A-3E)(A-E)=0$, 矩阵 A 的特征值有 $\lambda_1=3, \lambda_2=1$, 对应 $r(3E-A)=1$或者2, 又因为 $r(3E-A)>1\Rightarrow r(3E-A)=2$.

July 13

例题 33.25.

求 $f(x)=\sqrt{4x^2+x}\ln(2+\frac{1}{x})$ 的斜渐近线

解

我们不妨假设 $f(x)$ 的斜渐近线为 $y=ax+b$, 我们得到:

(1).

$$\begin{cases} a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}\\ b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)\end{cases}$$

我们得到:

$$\begin{cases} a=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}\ln(2+\dfrac{1}{x})=2\ln 2\\ b=\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{4x^2+x}\ln(2+\dfrac{1}{x})-2\ln 2x]=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\sqrt{4+t}\ln(2+t)-2\ln 2}{t}=\lim\limits_{t\to0^+}(\dfrac{\ln(2+t)}{2\sqrt{4+t}}+\dfrac{\sqrt{4+t}}{t+2})=\dfrac{\ln 2}{4}+1\end{cases}$$

(2).

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - ax) \end{cases}$$

我们得到:

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}\ln(2+\dfrac{1}{x}) = -2\ln 2 \\ b = \lim\limits_{x\to-\infty} [\sqrt{4x^2+x}\ln(2+\dfrac{1}{x}) + 2\ln 2x] = \lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{2\ln 2 - \sqrt{4+t}\ln(2+t)}{t} = -\dfrac{\ln 2}{4} - 1 \end{cases}$$

综上所述,$f(x)$ 的斜渐近线为 $y = 2\ln 2\, x + \dfrac{\ln 2}{4} + 1$ 和 $y = -2\ln 2\, x - \dfrac{\ln 2}{4} - 1$

注

利用泰勒展开式来求渐近线.

$f(x) = \sqrt{4x^2+x}\ln(2+\frac{1}{x})$, 我们利用泰勒展开式得到:

$$\begin{cases} x\to+\infty,\ f(x) \sim 2x\sqrt{1+\frac{1}{4x}}[\ln 2 + \ln(1+\frac{1}{2x})] = 2x(1+\frac{1}{8x})(\ln 2 + \frac{1}{2x}) = 2\ln 2\, x + \frac{\ln 2}{4} + 1 \\ x\to-\infty,\ f(x) \sim -2x\sqrt{1+\frac{1}{4x}}[\ln 2 + \ln(1+\frac{1}{2x})] = -2x(1+\frac{1}{8x})(\ln 2 + \frac{1}{2x}) = -2\ln 2\, x - \frac{\ln 2}{4} - 1 \end{cases}$$

例题 33.26.

当 $x\to 0$ 时, 下列无穷小量最高阶的是:

- A. $(1+x)^{x^2} - 1$
- B. $e^{x^4-2x} - 1$
- C. $\int_0^{x^2} \sin t^2 dt$
- D. $\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}$

解

A. $e^{x^2\ln(1+x)} - 1 \sim x^2\ln(1+x) \sim x^3 \Rightarrow$ 最高阶3阶

B. $e^{x^4-2x} - 1 \sim x^4 - x^2 \Rightarrow$ 最高阶4阶

C. $\int_0^{x^2} \sin t^2 dt \sim \dfrac{x^6}{3} \Rightarrow$ 最高阶6阶

D. $\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x} = 1 + \dfrac{1}{2}2x - \dfrac{1}{8}(2x)^2 - [1 + \dfrac{1}{3}3x - \dfrac{1}{27}(3x^2)] \sim \dfrac{1}{12}x^2 \Rightarrow$ 最高阶2阶

July 14

例题 33.27.

求曲线 $y = \sqrt{x^4 - 3x^3 + 4}$ 在 $x\to+\infty$ 方向的渐进二次曲线

解

$$
\begin{aligned}
\text{当}x \to +\infty,\ f(x) &= x^2\sqrt{1+\frac{4-3x^3}{x^4}} \\
&= x^2[1+\frac{4-3x^3}{2x^4}-\frac{(4-3x^3)^2}{8x^8}] \\
&= x^2-\frac{3}{2}x-\frac{9}{8}+o(\frac{1}{x})
\end{aligned}
$$

原函数的渐近二次曲线为: $y=x^2-\frac{3}{2}x-\frac{9}{8}$

例题 33.28.

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 个 n 维列向量, 证明: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关的充要条件为:

$$
\begin{vmatrix}
\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\
\alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n
\end{vmatrix} \neq 0
$$

解

我们不妨设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n), A^T=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \cdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}$, 我们可以得到:

$$
|AA^T|=\begin{vmatrix}
\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\
\alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n
\end{vmatrix} \Rightarrow |A|^2=\begin{vmatrix}
\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\
\alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n
\end{vmatrix}
$$

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关等价于 $|A|\neq 0$, 证毕!

33.3 Week III

July 15

例题 33.29.

当 $x \to 0^+$ 时, 下列无穷小量中最高阶的是:

- A. $\int_0^{1-\cos x} \frac{\sin t}{t} dt$
- B. $\int_0^x t \tan \sqrt{x^2 - t^2} dt$
- C. $\int_{\sin x}^{1-\sqrt{\cos x}} e^{xt} \ln(1+t^3) dt$
- D. $\int_{\sin x}^x \sqrt{\sin^3 t} dt$

解

A. $\int_0^{1-\cos x} \frac{\sin t}{t} dt \sim \int_0^{\frac{1}{2}x^2} 1 dt \sim \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow$ 最高阶2阶

B. 我们进行换元 $u = x^2 - t^2, d(t^2) = -du$, 原积分等价于: $\int_0^{x^2} \frac{tan\sqrt{u}}{2} du \sim \frac{1}{3}x^3 \Rightarrow$ 最高阶3阶

C. 我们可以得到原积分等价于: $\int_{\sin x}^{1-\sqrt{\cos x}} e^{xt} \ln(1+t^3) dt = I_1 - I_2$

$$I_1 = \int_0^{1-\sqrt{\cos x}} e^{xt} \ln(1+t^3) dt$$

$$I_2 = \int_0^{\sin x} e^{xt} \ln(1+t^3) dt$$

由积分中值定理得到:

$I_1 = e^{x\xi} \int_0^{1-\sqrt{\cos x}} \ln(1+t^3) dt \sim \frac{1}{4^5}x^8 \Rightarrow$ 最高阶8阶

$I_2 = e^{x\xi} \int_0^{\sin x} \ln(1+t^3) dt \sim \frac{1}{4}x^4 \Rightarrow$ 最高阶4阶

$\int_{\sin x}^{1-\sqrt{\cos x}} e^{xt} \ln(1+t^3) dt \sim \frac{1}{4}x^4 \Rightarrow$ 最高阶4阶

D. 由积分中值定理得到:

$$\int_{\sin x}^x \sqrt{\sin^3 t} dt = (x - \sin x) \sin^{\frac{3}{2}} \xi \sim \frac{1}{6}x^{\frac{9}{2}},\ \xi \in (\sin x, x) \Rightarrow \text{最高阶}\frac{9}{2}\text{阶}$$

例题 33.30.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)}$$

解

我们可以得到: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} - \frac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

我们有:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots$$

我们不妨设 $S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$, $T=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$, 我们有:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)} &= \frac{1}{2}(S-T)\\ &= \frac{1}{2}(-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n-1}+\cdots)-\frac{1}{2}(-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}+\cdots)\\ &= -\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4}-1)\\ &= \frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

定理 33.3.1 (常用泰勒级数)

- $$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!},\ x\in\mathbb{R}$$

- $$\text{欧拉公式: } e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

$$\begin{aligned}e^{i\theta} &= 1+i\theta+\frac{(i\theta)^2}{2!}+\frac{(i\theta)^3}{3!}+\cdots+\frac{(i\theta)^n}{n!}+\cdots\\ &= [1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^k\theta^{2k}}{2k}+\cdots]+i[\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^k\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots]\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\theta^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

- $$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\ x\in\mathbb{R}$$

- $$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x\in\mathbb{R}$$

- $$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n,\ x\in(-1,1)$$

- $$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n,\ x\in(-1,1)$$

- $$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+x}dx=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1},\ x\in(-1,1]$$

- $$\ln(1-x)=-\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots]=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1},\ x\in[-1,1)$$

命题 33.3.1 (扩展泰勒级数)

- $$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n},\ x\in(-1,1)$$
- $$\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},\ x\in[-1,1]$$
- $$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,\ x\in(-1,1)$$
- $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^{2n}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}x^{2n},\ x\in(-1,1)$$
- $$\arcsin x=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}x^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1},\ x\in(-1,1)$$
- $$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x\in\mathbb{R}$$
- $$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x\in\mathbb{R}$$

♠

命题 33.3.2 (常用数列和)

- $$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$$
- $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}=\ln 2$$
- $$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

♠

July 16

例题 33.31.

设 $A=(a_{ij})_{3\times3}$, A 的每行元素之和为 a, 且 $|A|=b$, 将 A 中的每个元素加 k 得到矩阵 $B=(a_{ij}+k)_{3\times3}$, 求 $|B|$

解

我们不妨设: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_{11}+k & a_{12}+k & a_{13}+k \\ a_{21}+k & a_{22}+k & a_{23}+k \\ a_{13}+k & a_{23}+k & a_{33}+k \end{bmatrix}$

我们有:

$$|A| = a\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = b \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned} |B| &= (a+3k)\begin{vmatrix} 1 & a_{12}+k & a_{13}+k \\ 1 & a_{22}+k & a_{23}+k \\ 1 & a_{23}+k & a_{33}+k \end{vmatrix} \\ &= (a+3k)\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13}+k \\ 1 & a_{22} & a_{23}+k \\ 1 & a_{23} & a_{33}+k \end{vmatrix} + (a+3k)\begin{vmatrix} 1 & k & a_{13}+k \\ 1 & k & a_{23}+k \\ 1 & k & a_{33}+k \end{vmatrix} \\ &= (a+3k)\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + (a+3k)\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & k \\ 1 & a_{22} & k \\ 1 & a_{23} & k \end{vmatrix} \\ &= \frac{(a+3k)b}{a} \end{aligned}$$

例题 33.32.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$$

解

我们有:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x},\ x \in (-1,1) \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2}{3}$$

我们对 $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ 求导得到:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \\ \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)x^n = \frac{2}{(1-x)^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(-\frac{1}{2})^n = \frac{4}{9} \\ \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)(-\frac{1}{2})^n = \frac{16}{27} \end{cases}$$

原级数等价为:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n[(n+2)(n+1)-4(n+1)+3]}{2^n}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n+2)(n+1)}{2^n}-4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{2^n}+3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\\ &= \frac{16}{27}-4\frac{4}{9}+3\frac{2}{3}\\ &= \frac{22}{27}\end{aligned}$$

July 17

例题 33.33.

设 A 是 3 阶矩阵, 且满足 $\left|A-2E\right|=\left|A-3E\right|=\left|A-4E\right|=3$, 求 $\left|A-E\right|$

解

我们不妨设: $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{bmatrix}$, 我们有:

$$|A-xE|=\begin{vmatrix}a_{11}-x&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}-x&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}-x\end{vmatrix}=-x^3+bx^2+cx+d$$

又因为: $|A-2E|=|A-3E|=|A-4E|=3$, 我们不妨设 $|A-xE|=f(x)=-x^3+bx^2+cx+d$
我们可以得到: $f(x)=-(x-2)(x-3)(x-4)+3$, 因此: $f(1)=9\Rightarrow|A-E|=9$

例题 33.34.

设 $f(x)$ 连续, 且 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=1, \alpha(x)=\int_0^{\sqrt{x}}\dfrac{\ln(1+t^4)}{f(t)}dt, \beta(x)=\int_0^{\sin x}\dfrac{\sqrt{1+t^3}-1}{f(t)}dt$, 则当 $x\to0^+$ 时, $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的:

- A. 等价无穷小
- B. 同阶但非等价无穷小
- C. 高阶无穷小
- D. 低阶无穷小

解

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\frac{\ln(1+t^4)}{f(t)}dt}{\int_0^{\sin x}\frac{\sqrt{1+t^3}-1}{f(t)}dt}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x^2)}{2\sqrt{x}f(\sqrt{x})}}{\frac{\cos x[\sqrt{1+(\sin x)^3}-1]}{f(\sin x)}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)}{\sin x}\frac{\sqrt{x}}{f(\sqrt{x})}\frac{1}{x}\\
&= +\infty
\end{aligned}$$

$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的低阶无穷小.

July 18

例题 33.35.

证明: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 收敛, 并求其和

解

我们不妨设 $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, 我们可以得到:

$$x\longrightarrow a_n \sim \ln n$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}}{(k+1)(k+2)}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k+1)(k+2)}\\
&= \frac{a_1}{2}-\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3}-\frac{a_2}{4}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}\\
&= \frac{a_1}{2}+\frac{a_2-a_1}{3}+\cdots+\frac{a_n-a_{n-1}}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}\\
&= \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}-\frac{a_n}{n+2}\\
&= 1-\frac{1}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to+\infty}S_n = \lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n+1}-\frac{\ln n}{n+2}) = 1$$

原级数收敛, 其和 $S=1$.

例题 33.36.

当 $x \longrightarrow 0$ 时, $2\arctan x - \ln\frac{1+x}{1-x}$ 是 x 的 n 阶无穷小, 求 n

解

利用泰勒展开式将函数展开:

$$\begin{cases} \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \longrightarrow 0, f(x) &= 2\arctan x - \ln(1+x) + \ln(1-x) \\ &= 2(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)) - (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)) - (x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)) \\ &= -\frac{4}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

综上所述, 我们可以得到: $n = 3$.

July 19

例题 33.37.

关于函数 $f(x,y) = \begin{cases} xy & xy \neq 0 \\ x & y = 0 \\ y & x = 0 \end{cases}$, 下列结论正确的是:

- A. $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,0)} = 1$
- B. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}|_{(0,0)} = 1$
- C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$
- D. $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = 0$

解

$A.\ \frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,0)} \lim\limits_{x\to 0+\infty} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 1$

$B. \frac{\partial f}{\partial x}{}_{(0,y)} = \begin{cases} 1,\ y = 0 \\ \text{不存在},\ y \neq 0 \end{cases}$

$C.\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

$D.\ \lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \begin{cases} xy = 0,\ x \neq 0 \\ y = 0,\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = 0$

例题 33.38.

求幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{x^{2n+2}}{n+1}$ 和函数

解

我们先求收敛区间:

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=x^2<1\Rightarrow x\in(-1,1)$$

我们对 $S(x)$ 求导得到:

$$S'(x)=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}=2f(x)$$

我们再对 $f(x)$ 求导:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}\\
&= 1+x[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}]\\
&= 1+x[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}]'\\
&= 1+x[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+2}]'\\
&= 1+x[x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}]'\\
&= 1+x[xf(x)]'\\
&= 1+x[f(x)+xf'(x)]\\
&= 1+xf(x)+x^2f'(x)
\end{aligned}$$

我们得到:

$$f'(x)-\frac{x}{1-x^2}f(x)-\frac{1}{1-x^2}=0$$

我们解出

$$f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow S(x)=2\int_0^x f(x)dx+S(0)=(\arcsin x)^2$$

当 $x=\pm1$ 时, 我们需要判断级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{1}{n+1}$ 的敛散性:

我们有:

$$\begin{cases} 2\times 4 \le 3^3 \\ 4\times 6 \le 5^2 \\ \cdots \\ (2n-2)\times 2n \le (2n)^2 \\ (2n)\times(2n+2) \le (2n+1)^2 \end{cases} \Rightarrow [(2n)!!]^2 \le (n+1)[(2n+1)!!]^2 \Rightarrow \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \le \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

我们得到: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{1}{n+1} \le \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$, 由比较判别法可知, 级数收敛.

综上所述, 我们得到: $S(x) = (\arcsin x)^2,\ x \in [-1,1]$

July 20

例题 33.39.

当 $x \to 0^+$ 时, $(1+x)^{\frac{1}{x}} - (e+ax+bx^2)$ 是比 x^2 高阶的无穷小, 求 a, b

解

我们利用泰勒展开得到:

$$\begin{aligned} x\to 0^+, f(x) &= e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} - (e+ax+bx^2) \\ &= e(1+\frac{\ln(1+x)-x}{x} + \frac{[\ln(1+x)-x]^2}{2x^2} + o(x^2)) - (e+ax+bx^2) \\ &= (-a-\frac{e}{2})x + (\frac{11e}{24}-b)x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

我们得到: $\begin{cases} a = -\frac{e}{2} \\ b = \frac{11e}{24} \end{cases}$

综上所述, 我们得到: $a = -\frac{e}{2},\ b = \frac{11e}{24}$

例题 33.40.

设 $f(x)$ 二阶可导, $f(0) = 0$, 证明:

$$\exists \xi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),\ s.t.\ f''(\xi) = 3f'(\xi)\tan\xi + 2f(\xi)$$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = f(x)\cos^2 x$

我们得到: $F(-\frac{\pi}{2}) = F(0) = F(\frac{\pi}{2}) = 0$

$$\begin{cases} G(x) = f'(x)\cos x - 2\sin x f(x) \\ F'(x) = f'(x)\cos^2 x - 2\sin x\cos x f(x) = \cos x G(x) \end{cases} \Rightarrow G'(x) = f''(x)\cos x - 3f'(x)\sin x - 2\cos x f(x)$$

我们对 $F(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},0)$ 和 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上使用罗尔定理得到:

$$\begin{cases} \exists\xi_1\in(-\frac{\pi}{2},0),\ s.t.F'(\xi_1)=\xi_1G(\xi_1)=0 \\ \exists\xi_2\in(0,\frac{\pi}{2}),\ s.t.F'(\xi_2)=\xi_2G(\xi_2)=0 \end{cases}$$

我们对 $G(x)$ 在 (ξ_1,ξ_2) 上使用罗尔定理得到:

$\exists\eta\in(\xi_1,\xi_2),\ s.t.G'(\eta)=f''(\eta)\cos\eta-3f'(\eta)\sin\eta-2\cos\eta f(\eta)=0\Rightarrow f''(\eta)=3f'(\eta)\tan\eta+2f(\eta)$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\ s.t.f''(\xi)=3f'(\xi)\tan\xi+2f(\xi)$.

July 21

例题 33.41.

设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$, 求 a,b,c

解

我们由泰勒展开式:

$$\begin{cases} \sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3) \\ \dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+o(x^3) \end{cases}$$

我们可以得到:

$$\begin{aligned} x\to0,f(x) &= \frac{\sin x}{1+x^2} \\ &= (x-\frac{x^3}{6})(1-x^2) \\ &= x-\frac{7}{6}x^3+o(x^3) \end{aligned}$$

我们得到: $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-\dfrac{7}{6} \end{cases}$

例题 33.42.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{(1+x)^{\frac{1}{x}}}-(1+x)^{\frac{e}{x}}}{x^2}$$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to0} e^{\frac{e\ln(1+x)}{x}} \frac{e^{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-\frac{e\ln(1+x)}{x}}-1}{x^2} \\ &= e^{e+1}\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x}}-\frac{\ln(1+x)-x}{x}-1}{x^2} \\ &= e^{e+1}\lim_{x\to0}\frac{\frac{(\ln(1+x)-x)^2}{2x^2}}{x^2} \\ &= \frac{e^{e+1}}{8} \end{aligned}$$

33.4 Week IV

July 22

例题 33.43.

设函数 $f(x)=\sec x$ 在 $x=0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $1+ax+bx^2$, 求 a,b

解

我们有:

$$\sec x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nE_{2n}}{(2n)!}x^{2n}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+\cdots,\ x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$$

我们可以知道: $\begin{cases} a=0 \\ b=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

例题 33.44.

设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 二阶导数连续, 证明:

$$\exists\xi\in[-1,1],\ s.t.\ \int_{-1}^{1}xf(x)dx=\frac{2f'(\xi)+\xi f''(\xi)}{3}$$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=\int_0^x tf(t)dt, F(0)=F'(0)=0$, 我们有:

$$\begin{cases} F'(x)=xf(x) \\ F''(x)=f(x)+xf'(x) \\ F'''(x)=2f'(x)+xf''(x) \end{cases}$$

原命题等价于: $\exists\xi\in[-1,1],\ s.t. F(1)-F(-1)=\frac{1}{3}F'''(\xi)$

我们将 $F(x)$ 在 $x=0$ 处进行泰勒展开:

$$F(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{F''(0)}{2}x^2+\frac{F'''(\xi)}{6}x^3,\ \xi\in(0,x)$$

我们有:

$$\begin{cases} F(1)=\dfrac{F''(0)}{2}+\dfrac{F'''(\xi_1)}{6} \\ F(-1)=\dfrac{F''(0)}{2}-\dfrac{F'''(\xi_2)}{6} \end{cases} \Rightarrow F(1)-F(-1)=\frac{1}{3}\frac{F'''(\xi_1+F'''(\xi_2))}{2}$$

我们由 $F'''(x)$ 连续, 由介值定理可以知道:

$$\exists\eta\in(-1,1),\ s.t.\frac{F'''(\xi_1)+F'''(\xi_2)}{2}\Rightarrow\exists\xi\in[-1,1],\ s.t.F(1)-F(-1)=\frac{1}{3}F'''(\eta)$$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi\in[-1,1],\ s.t.\ \int_{-1}^{1}xf(x)dx=\dfrac{2f'(\xi)+\xi f''(\xi)}{3}$

July 23

例题 33.45.

函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)|x-1|}{e^{\frac{1}{x-2}}\ln|x|}$ 的可去间断点个数

解

我们发现可能的间断点为 $x=0,\ x=1,\ x=-1,\ x=2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=e^{\frac{1}{2}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\ln x}=0 \\ \lim\limits_{x\to0^-}f(x)=e^{\frac{1}{2}}\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{\ln(-x)}=0 \end{cases}\Rightarrow x=0\text{是}f(x)\text{的可去间断点}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to1^+}f(x)=2e\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{\ln x}=2e \\ \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=2e\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1-x}{\ln(-x)}=-2e \end{cases}\Rightarrow x=1\text{不是}f(x)\text{的可去间断点}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=2e^{\frac{1}{3}}\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x+1}{\ln(-x)}=-2e^{\frac{1}{3}} \\ \lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=2e^{\frac{1}{3}}\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{1+x}{\ln(-x)}=-2e^{\frac{1}{3}} \end{cases}\Rightarrow x=-1\text{是}f(x)\text{的可去间断点}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\dfrac{3}{\ln2}\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{1}{+\infty}=0 \\ \lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\dfrac{3}{\ln2}\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{0}=+\infty \end{cases}\Rightarrow x=2\text{不是}f(x)\text{的可去间断点}$$

综上所述,$f(x)$ 的可去间断点有两个, 分别为 $x=0,\ x=-1$

例题 33.46.

设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,$f(x)$ 为连续函数,$\varphi(x)$ 有间断点, 下列命题正确的是:

- A. $f(x)[|\varphi(x)|+\varphi^2(x)]$ 必有间断点

- B. 若 $f(x)$ 单调, 则 $\dfrac{\varphi(x)}{|f(x)|}$ 必有间断点
- C. $\dfrac{\varphi(x)}{1+f^2(x)}$ 必有间断点
- D. $f(x)\varphi(x)$ 必有间断点

解

我们知道:

$$f(x)\text{有间断点} \nRightarrow |f(x)|\text{有间断点},\ |f(x)|\text{有间断点} \Rightarrow f(x)\text{有间断点}$$

我们知道 $|\varphi(x)|$ 不一定有间断点, 令 $f(x)=0 \Rightarrow f(x)g(x)$ 连续不存在间断点, 我们可以得到 A, D 错误.

我们知道 $f(x)$连续 $\Rightarrow |f(x)|$连续, 我们不妨假设: $\dfrac{\varphi(x)}{|f(x)|}$ 连续, 我们知道连续函数之积仍然是连续函数, 我们得到: $\varphi(x)$ 连续, 矛盾!!!

对于 C 选项, 我们同理假设 $\dfrac{\varphi(x)}{1+f^2(x)}$ 连续, 我们知道 $1+f^2(x)$ 连续, 我们得到: $\varphi(x)$ 连续, 矛盾!!!

July 24

例题 33.47.

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是 n 阶矩阵 A 的 m 个两两互异的特征值 $(m \le n)$, 对应的特征向量分别为 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$, 令 $\eta = \sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k$

证明: $\eta, A\eta, A^2\eta, \cdots, A^{m-1}\eta$ 线性无关

解

我们由:

$$\begin{cases} A\xi_1 = \lambda_1\xi_1 \\ A\xi_2 = \lambda_2\xi_2 \\ \cdots \\ A\xi_m = \lambda_m\xi_m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \eta = \sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k \\ A\eta = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k\xi_k \\ A^2\eta = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k^2\xi_k \\ \cdots \\ A^{m-1}\eta = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k^{m-1}\xi_k \end{cases}$$

我们不妨假设矩阵 $C=[\eta,A\eta,\cdots,A^{m-1}\eta]$, 我们有:

$$C=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m]\begin{bmatrix}1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{m-1}\\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{m-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-1}\end{bmatrix}$$

我们可以知道 $C=DB$, 其中 D 为列满秩矩阵,B 为范德蒙矩阵.

我们有 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 两两互异, 我们得到 $|B|\neq 0$,B 为可逆矩阵, 我们得到: $r(C)=r(D)$,$D=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m]$ 线性无关, 因此我们得到:

$$\eta,A\eta,A^2\eta,\cdots,A^{m-1}\eta\text{线性无关}$$

例题 33.48.

设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n}+x^{2n}}}$, $f(x)$ 在其定义域内:

- A. 连续
- B. 有 1 个可去间断点
- C. 有 1 个跳跃间断点
- D. 有 1 个第二类间断点

解

我们首先得到:

$$f(x)=\begin{cases}0,\ -2<x<2\\ 2\sqrt{2},\ x=2\\ x^2,\ x>2\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $(-\infty,-2]$ 上没有定义, 在 $(-2,+\infty)$ 上有且仅有一个间断点 $x=2$, 且为跳跃间断点.

July 25

例题 33.49.

$$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}}(\frac{e^x}{x}-\frac{e^{y^2}}{\sqrt{x}})dy$$

解

原二重积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}dx - \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 \frac{e^{y^2}}{\sqrt{x}}dx \\
&= \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}dx - \int_0^1 2e^{y^2}dy + e^{y^2}|_{y=0}^{y=1} \\
&= \int_0^1 2e^{t^2}dt - \int_0^1 2e^{y^2}dy + e - 1 \\
&= e - 1
\end{aligned}
$$

例题 33.50.

设 $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^{n+2} - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$, 函数 $f(x)$:

- A. 仅有 1 个间断点
- B. 仅有 2 个间断点, 其中 1 个可去间断点, 1 个无穷间断点
- C. 仅有 2 个间断点, 2 个都是跳跃间断点
- D. 有 2 个跳跃间断点和 1 个可去间断点

解

我们可以知道:

$$
f(x) = \begin{cases} x^2, \ |x| > 1 \\ 0, \ |x| = 0 \\ -1, \ 0 < |x| < 1 \end{cases}
$$

我们知道 $f(x)$ 有 3 个间断点, 其中 $x = 0$ 是可去间断点;$x = 1$ 和 $x = -1$ 是两个跳跃间断点.

July 26

例题 33.51.

$$
\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx
$$

解

原积分等价于:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\ln x} dx \int_a^b (\ln x) x^y dy \\
&= \int_a^b dx \int_0^1 x^y dx \\
&= \int_a^b \frac{1}{y+1} \\
&= \ln |\frac{b+1}{a+1}|
\end{aligned}$$

例题 33.52.

$$\int_0^1 \sin(\ln \frac{1}{x}) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$$

解

原积分等价于:

$$\begin{aligned}
I &= -\int_0^1 \sin(\ln x) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \\
&= -\int_0^1 \frac{\sin(\ln x)}{\ln x} dx \int_a^b (\ln x) x^y dy \\
&= -\int_0^1 dx \int_a^b \sin(\ln x) x^y dy \\
&= -\int_a^b dy \int_{-\infty}^0 e^{(y+1)t} \sin t dt \\
&= -\int_a^b \frac{\begin{vmatrix} (y+1)e^{(y+1)t} & \cos t \\ e^{(y+1)t} & \sin t \end{vmatrix}}{1+(1+y)^2} |_{t=0}^{t=-\infty} dy \\
&= \int_a^b \frac{1}{1+(y+1)^2} dy \\
&= \arctan(y+1)|_{y=a}^{y=b} \\
&= \arctan(b+1) - \arctan(a+1)
\end{aligned}$$

July 27

例题 33.53.

设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 且 $\dfrac{f(x)-2x}{e^{x-1}-1} - \dfrac{1}{\ln x}$ 在 $x=1$ 的某去心邻域有界, 求 $f(1)$

解

我们由题意可得:

$$\lim_{x\to1}[\frac{f(x)-2x}{e^{x-1}-1}-\frac{1}{\ln x}](e^{x-1}-1)=0$$

上述极限等价于:

$$\begin{aligned}I &= \lim_{x\to1}[f(x)-2x-\frac{e^{x-1}-1}{\ln x}]\\ &= \lim_{x\to1}(f(x)-2x)-1\\ &= 0\end{aligned}$$

我们知道:

$$\lim_{x\to1}[f(x)-2x]=1\Rightarrow\lim_{x\to1}f(x)=3$$

综上所述,$f(1)=3$.

例题 33.54.

设 α,β 均为 3 维单位列向量, $\alpha^T\beta=\frac{1}{2}, A=\alpha\beta^T+\beta\alpha^T$, 求二次型 x^TAx 在正交变换下的标准型

解

我们由: $\alpha^T\beta=\frac{1}{2}$,$A=\alpha\beta^T+\beta\alpha^T$ 可以得到:

$$\begin{cases}A\alpha=\frac{1}{2}\alpha+\beta\\ A\beta=\alpha+\frac{1}{2}\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}(\alpha+\beta)\\ A(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\end{cases}$$

我们可以知道: 矩阵 A 有两个特征向量 $\lambda_1=\frac{3}{2},\ \lambda_2=-\frac{1}{2}$.

我们有 $r(\alpha\beta^T)=r(\beta\alpha^T)=1\Rightarrow r(A)\le r(\alpha\beta^T)+r(\beta\alpha^T)=2$

我们由 $r(A)\le2\Rightarrow|A|=0\Rightarrow\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0$

我们可得到 A 的三个特征值为 $\lambda_1=\frac{3}{2},\ \lambda_2=-\frac{1}{2},\ \lambda_3=0.$

综上所述, 二次型 $f=x^TAx$ 的标准型为 $f=\frac{3}{2}y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2.$

变式

$A=\alpha\beta^T$, 求二次型 $f=x^TAx$ 在正交变换下的标准型.

解

我们首先要求出二次型对应的矩阵 B, 我们有: $f^T=f\Rightarrow x^TA^Tx=B^T$

我们得到: $B=\dfrac{A+A^T}{2}=\dfrac{\alpha\beta^T+\beta\alpha^T}{2}$

我们有:

$$\begin{cases}B\alpha=\frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{2}\beta\\ B\beta=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{4}\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B(\alpha+\beta)=\frac{3}{4}(\alpha+\beta)\\ B(\alpha-\beta)=-\frac{1}{4}(\alpha-\beta)\end{cases}$$

我们可以知道: 矩阵 B 有两个特征向量 $\lambda_1=\frac{3}{4}$, $\lambda_2=-\frac{1}{4}$.
我们有 $r(\alpha\beta^T)=r(\beta\alpha^T)=1\Rightarrow r(B)\le r(\alpha\beta^T)+r(\beta\alpha^T)=2$
我们由 $r(B)\le 2\Rightarrow |B|=0\Rightarrow \lambda_1\lambda_2\lambda_3=0$
我们可得到 A 的三个特征值为 $\lambda_1=\frac{3}{4}$, $\lambda_2=-\frac{1}{4}$, $\lambda_3=0$.
综上所述, 二次型 $f=x^TAx$ 的标准型为 $f=\frac{3}{4}y_1^2-\frac{1}{4}y_2^2$.

July 28

例题 33.55.

已知函数 $f(x)=\dfrac{(x^2+a^2)(x-1)}{e^{\frac{1}{x}}+b}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有一个可去间断点和一个跳跃间断点, 求 a,b

解

我们发现 $f(x)$ 的间断点为 $x=0$ 和 $x=\dfrac{1}{\ln(-b)}$, 我们有:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\dfrac{a^2}{b}\end{cases}\quad a\neq0\Rightarrow x=0\text{是}f(x)\text{跳跃间断点}$$

我们进而得到 $x=\dfrac{1}{\ln(-b)}$ 是 $f(x)$ 可去间断点, 我们得到:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\ln(-b)^+}f(x)=\dfrac{\ln^2(-b)+a^2}{-b}\lim\limits_{x\to\ln(-b)^+}\dfrac{x-1}{x-\ln(-b)}=a\\ \lim\limits_{x\to0\ln(-b)^-}f(x)=\dfrac{\ln^2(-b)+a^2}{-b}\lim\limits_{x\to\ln(-b)^-}\dfrac{x-1}{x-\ln(-b)}=a\end{cases}\Rightarrow b=-e$$

综上所述,$a\neq0,\ b=-e$

例题 33.56.

$$\int\frac{x^2(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}+1)}e^xdx$$

解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+1)}{\sqrt{1+x^2}} e^x dx \\ &= \int (\sqrt{x^2+1}-x+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1)e^x dx \\ &= \int (g(x)+g'(x))e^x dx \\ &= e^x g(x)+C \\ &= e^x(\sqrt{x^2+1}-x)+C \end{aligned}$$

July 29

例题 33.57.

函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$, 判断 $x=0$ 处连续性、可导性以及极值情况

解

首先判断连续性:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=1=f(0)\Rightarrow f(x)\text{在}x=0\text{处连续}$$

可导性:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}, & x\neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & x=0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f'(0)=\frac{1}{2}=f'(0)$$

我们得到 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续可导, 且导函数连续.

例题 33.58.

$A=(a_{ij})_{3\times 3}$ 是实对称矩阵, A 的每行元素之和为 0, 设 2,3 是 A 的非零特征值, 求 a_{11} 对应的代数余子式

解

我们可以知道矩阵 A 的三个特征值分别为 0,2,3, 其中特征值 0 对应的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

我们根据 A^* 和 A 特征值和特征向量之间的关系可以知道 A^* 的三个特征值分别为 6,0,0,

其中特征值 6 对应的特征向量为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

对于 A^*, 我们根据谱分解定理可以得到: $A^* = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i G_i = 6e_1^T e_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

综上所述: a_{11} 对应的代数余子式 $A_{11} = A_{11}^* = 2$.

July 30

例题 33.59.

下列函数在 $x = 0$ 处不可导的是:

- A. $\int_0^x (|t| + t)dt$
- B. $|x|[x + \int_0^{|x|} e^{t^2} dt]$
- C. $|\tan x - \sin x|$
- D. $\sin|x| + \cos|x|$

解

$$A.\ f(x) = \begin{cases} x^2,\ x \geq 0 \\ 0,\ x < 0 \end{cases} \quad f(x)\text{在}x = 0\text{处可导}$$

$$B. \begin{cases} \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{cases} \quad f(x)\text{在}x = 0\text{处可导}$$

$$C. \begin{cases} \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{cases} \quad f(x)\text{在}x = 0\text{处可导}$$

$$D. \begin{cases} \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \end{cases} \quad f(x)\text{在}x = 0\text{处不可导}$$

例题 33.60.

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 证明:

$$\exists \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n \in (a, b)(\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_n),\ s.t.\ f'(\xi_1)f'(\xi_2)\cdots f'(\xi_n) = \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right]^n$$

解

我们构造辅助函数 $F(x) = [f(x) - f(a)]^n$, $G(x) = [x - a]^n$, 我们有 $F(a) = G(a) = 0$

我们由柯西中值定理可以得到:

$$\exists\xi_1 \in (a,b),\ s.t.\frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} \Rightarrow \frac{f'(\xi_1)\left[f(\xi_1)-f(a)\right]^{n-1}}{(\xi_1-a)^{n-1}} = \frac{[f(b)-f(a)]^n}{(b-a)^n}$$

我们继续构造辅助函数 $H(x)=[f(x)-f(a)]^{n-1}$, $J(x)=[x-a]^{n-1}$, 我们有 $H(a)=J(a)=0$

我们由柯西中值定理可以得到:

$$\exists\xi_2 \in (\xi_1,b),\ s.t.\frac{H'(\xi_2)}{J'(\xi_2)} = \frac{F(\xi_1)-F(a)}{G(\xi_1)-G(a)} \Rightarrow \frac{f'(\xi_2)\left[f(\xi_{\xi_2})-f(a)\right]^{n-2}}{(\xi_2-a)^{n-2}} = \frac{[f(\xi_1)-f(a)]^{n-1}}{(\xi_1-a)^{n-1}}$$

$$\cdots\cdots$$

我们构造辅助函数 $P(x)=f(x)-f(a)$, $Q(x)=x-a$, 我们有 $P(a)=Q(a)=0$ 我们由拉格朗日中值定理可以得到:

$$\exists\xi_n \in (\xi_{n-1},b),\ s.t. f'(\xi_n) = \frac{f(\xi_{n-1})-f(a)}{\xi_{n-1}}$$

我们将上面 n 个式子相乘可以得到:

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2)\cdots f'(\xi_n) = \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]^n$$

综上所述, 我们得到:

$$\text{存在互不相同的}\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n \in (a,b),\ s.t.\ f'(\xi_1)f'(\xi_2)\cdots f'(\xi_n) = \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]^n$$

July 31

例题 33.61.

已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有定义, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f[\varphi(x)]-f(0)}{\varphi(x)}$ 存在和 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导之间关系

1.

解

(1). 必要性

$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = A \Rightarrow \lim_{\varphi(x)\to 0}\frac{f[\varphi(x)]-f(0)}{\varphi(x)} = A$$

当 $\varphi(x)\equiv 0$ 时, 充分性不成立.

(2). 充分性

我们不妨取 $\varphi(x)=|x|$, 我们可以得到:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f[\varphi(x)]-f(0)}{\varphi(x)} = A \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'_+(0)$$

充分性不成立.

综上所述,$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f[\varphi(x)]-f(0)}{\varphi(x)}$ 存在是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的既不充分也不必要条件.

例题 33.62.

设存在连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=1+\lambda\int_x^1 f(y)f(y-x)dy$, 证明: $\lambda\le\frac{1}{2}$

解

我们对等式两边分别在区间 $[0,1]$ 上取定积分得到:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= 1+\lambda\int_0^1[\int_x^1 f(y)f(y-x)dy]dx\\ &= 1+\lambda\int_0^1[f(y)\int_0^y f(y-x)dx]dy\\ &= 1+\lambda\int_0^1[f(y)\int_0^y f(x)dx]dy\\ &= 1+\lambda\int_0^1[\int_0^y f(x)dx]d(\int_0^y f(x)dx)\\ &= 1+\frac{\lambda}{2}[\int_0^1 f(x)dx]^2\end{aligned}$$

我们不妨记 $A=\int_0^1 f(x)dx$, 我们可以得到:

$$A=1+\frac{\lambda}{2}A^2\text{在}\mathbb{R}\text{上有实数根}\Rightarrow 1-2\lambda\ge 0\Rightarrow\lambda\le\frac{1}{2}$$

第 34 章 August

34.1 Week I

August 1

例题 34.1.

已知 $f(x)$ 为奇函数, $f'_+(0)$ 存在和 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导关系

解

(1). 充分性

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=A\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}f(x)=0$$

我们可以得到:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(-x)-f(0)}{-x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-f(x)-f(0)}{-x}=A$$

我们得到:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=A$$

充分性成立

(2). 必要性

$$f(x)\text{在}x=0\text{处可导}\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=A$$

必要性成立

综上所述,$f'_+(0)$ 存在是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件.

例题 34.2.

$$\int_0^1 dx \int_{1-x}^{2-x} e^{(x+y)^2}(\sin^2 x+\cos^2 y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} e^{(x+y)^2}(\sin^2 x+\cos^2 y)dy$$

解

我们画出二重积分的积分区域,不难发现积分区域关于直线 $y=x$ 对称,原二重积分等价于:

$$I=\int_0^1 dx \int_{1-x}^{2-x} e^{(y+x)^2}(\sin^2 y+\cos^2 x)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} e^{(y+x)^2}(\sin^2 y+\cos^2 x)dy$$

我们得到:

$$\begin{aligned}
2I &= \int_0^1 dx\int_{1-x}^{2-x} 2e^{(x+y)^2}dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x}2e^{(x+y)^2}dy\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}} 2re^{r^2(1+\sin 2\theta)}dr\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^4-e}{1+\sin 2\theta}d\theta\\
I &= \frac{e^4-e}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^2\theta}}{(1+\tan\theta)^2}d\theta\\
&= \frac{e^4-e}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2}dx\\
&= \frac{e^4-4}{2}
\end{aligned}$$

August 2

例题 34.3.

已知函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内可导, $f'(x_0)>0$ 与 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内单调递增关系

解

(1). 充分性

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A>0$$

我们可以得出,$x\in(x_0-\delta,x_0)$, $f(x)<f(x_0)$;$x\in(x_0,x_0+\delta)$, $f(x)>f(x_0)$, 并不能得出函数的单调性.

(2). 必要性

$f(x)$ 在某邻域内单调递增, 我们只能得出 $f'(x_0)\geq 0$

综上所述,$f'(x_0)>0$ 是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内单调递增的既不充分也不必要条件.

例题 34.4.

$I_n=\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{t-1}}{t^n}dt\ (n\geq 2)$, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}$

解

我们令 $t=\frac{1}{\cos^2 x}$, $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, $dt=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$, 我们可以得到:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x}\cos^{2n}x\frac{2\sin x}{\cos^3 x}dx \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-4}xdx-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}xdx \end{aligned}$$

由此我们可以得到:

$$\begin{cases} I_{n+1}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}xdx-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}xdx \\ I_n=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-4}xdx-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}xdx \end{cases}$$

我们得到:

$$\frac{I_{n+1}}{I_n}=\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}xdx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}xdx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-4}xdx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}xdx}$$

我们计算:

$$\begin{aligned} J_{2n} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}xdx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-1}xd\sin x \\ &= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^{2n-2}xdx \\ &= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}xdx-(2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}xdx \\ &= (2n-1)J_{2n-2}-(2n-1)J_{2n} \\ J_{2n} &= \frac{2n-2}{2n}J_{2n-2} \end{aligned}$$

我们得到:

$$\frac{I_{n+1}}{I_n}=\frac{J_{2n-2}-J_{2n}}{J_{2n-4}-J_{2n-2}}=\frac{\frac{2}{2n}J_{2n-2}}{\frac{2}{2n-2}J_{2n-4}}=\frac{n-1}{n}\frac{2n-4}{2n-2}=\frac{n-2}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n-2}{n}=1$$

August 3

例题 34.5.

设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某个邻域内有定义, 下列命题中正确的个数:

- A. 若 $f'(x_0)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续
- B. 若 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续
- C. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续
- D. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续

解

A. 导函数存在, 原函数连续, 正确

B. 左右导数存在, 我们得到:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A \\ \lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = B \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

C、D 我们取 $f(x) = sign(x) = \begin{cases} 1, \ x > 0 \\ 0, \ x = 0 \\ -1, \ x < 0 \end{cases}$, 此时 $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 0$, 函数在 $x = x_0$ 处间断.

综上所述, 上述命题正确的个数为 2 个.

例题 34.6.

A 为 3 阶实对称矩阵, 特征值为 $0,1,1$, 且 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{bmatrix}$ 是 A 的两个不同的特征向量, 若 $A(\alpha_1+\alpha_2) = \alpha_2$, 求矩阵 A

解

(1). 我们可以得到:

α_1 是矩阵 A 特征值 0 对应的特征向量; α_2 是矩阵 A 特征值 1 对应的特征向量.

(2). 我们知道实对称矩阵不同特征值对应的特征向量是正交的 $\Rightarrow \alpha_1^T\alpha_2 = 0 \Rightarrow a = 1$

(3). 根据谱分解定理, 我们可以得到: $A = \sum\limits_{i=1}^{3} \lambda_i G_i$

我们发现矩阵 $A-E$ 更好求, 因为矩阵 $A-E$ 的特征值为 $-1,0,0$, 因此 $A-E = -G_1 = -e_1e_1^T$,

我们得到:

$$\begin{cases} A = E - e_1 e_1^T \\ e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

August 4

例题 34.7.

设曲线 $y = f(x)$ 与 $y = \sqrt{\dfrac{(1+x^2)\sqrt{x}}{e^{x-1}}} + \arctan\dfrac{x^2-1}{\sqrt{1+x^2}}$ 在点 $(1,\sqrt{2})$ 处相切, 求 $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)+1-\sqrt{2}]^{\frac{1}{\ln x}}$

解

原极限可以化为:

$$\begin{aligned} I &= e^{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(f(x)+1-\sqrt{2})}{\ln x}} \\ &= e^{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\sqrt{2}}{x-1}} \\ &= e^{\lim\limits_{x\to 1} f'(x)} \end{aligned}$$

我们有:

$$\begin{cases} g(x) = \sqrt{\dfrac{(1+x^2)\sqrt{x}}{e^{x-1}}} \\ h(x) = \arctan\dfrac{x^2-1}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln(g(x)) = \dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{2}\ln x + \ln(1+x^2) - x + 1] \\ h'(1) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{g'(1)}{g(1)} = \dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{2x} + \dfrac{2x}{1+x^2} - 1]|_{x=1} = \dfrac{1}{4} \\ g'(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ h'(1) = \sqrt{2} \end{cases}$$

我们由 $f'(1) = g'(1) + h'(1) = \dfrac{5\sqrt{2}}{4}$, 我们得到原极限 $I = e^{\frac{5\sqrt{2}}{4}}$

例题 34.8.

求二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + 2x_2 + mx_3)(2x_1 + 3x_2 + nx_3)$ 的正惯性指数

解

我们令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + mx_3 \\ y_2 = 2x_1 + 3x_2 + nx_3 \\ y_3 = ax_1 + bx_2 + bx_3 \end{cases}$ 可以得到二次型 $g(y_1, y_2, y_3) = y_1 y_2$

我们再令 $\begin{cases} z_1 = y_1 + y_2 \\ z_2 = y_1 - y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$ 可以得到二次型 $h(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - z_2^2$

我们作的线性变换 $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & 3 & n \\ a & b & c \end{bmatrix}$ 和 $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 均为可逆线性变换, 二次型 f 和二次型 h 为合同二次型, 具有相同的正惯性指数和负惯性指数.

综上所述, 原二次型的正惯性指数为 1.

August 5

例题 34.9.

确定函数 $g(x) = \left|x^3 - x - \sin x\right|$ 不可导的点的个数

解

我们知道, 对于连续函数 $f(x)$, 当 $f(x) \neq 0$ 时,$f(x)$ 可导,$|f(x)|$ 也可导; 当 $f(x) = 0$ 时, 当且仅当 $f'(x) = 0$ 时,$|f(x)|$ 可导.

我们已知 $f(x) = x^3 - x - \sin x$ 在 $x \in \mathbb{R}$ 处处可导, 当 $f(x) \neq 0$ 时,$g(x) = |f(x)|$ 可导, 我们只需要关注 $f(x) = 0$ 处的导函数值是否为 0.

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - x - \sin x \\ f'(x) = 3x^2 - 1 - \cos x \\ f''(x) = 6x + \sin x \\ f'''(x) = 6 + \cos x > 0 \end{cases}$$

我们知道:

$f''(x)$ 单调递增,$f''(0) = 0$, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时,$f''(x) < 0$; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时,$f''(x) > 0$.

我们得到:

$f'(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减; 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增 $\Rightarrow f'(x)_{min} = f'(0) = -2 < 0$

我们取 $a = -\dfrac{\pi}{2}$, $b = \dfrac{\pi}{2}$, 我们有: $\begin{cases} f'(a) = \dfrac{3}{4}\pi^2 - 1 > 0 \\ f'(b) = \dfrac{3}{4}\pi^2 - 1 > 0 \end{cases}$

我们得到: $\exists x_1 \in (a, 0)$, $x_2 \in (0, b)$, $s.t. f'(x_1) = f'(x_2) = 0$

我们得到: $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, $f'(x) > 0$;$x \in (x_1, x_2)$, $f'(x) < 0$.

$f(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 单调递增;(x_1, x_2) 单调递减;$(x_2, +\infty)$ 单调递减, 其中 $x_1 < 0 < x_2$

我们有 $\begin{cases} f(a) < 0 \\ f(0) = 0 \\ f(b) > 0 \end{cases}$,我们得到:

$$\exists \text{唯一的} \xi_1 \in (a, 0), \xi_2 \in (0, b), s.t.\ f(\xi_1) = f(\xi_2) = f(0) = 0$$

此时对应 $f'(x)$ 均不为 0, 我们可以得到 $g(x)$ 不可导的点有 3 个: $x = \xi_1$, $x = 0$, $x = \xi_2$.

例题 34.10.

设 A 为 n 阶矩阵, n 维列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 是方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, $\exists \beta_i$, $s.t.\ A\beta_i = \alpha_i (i = 1, 2, \cdots, t)$, 分析下列命题正确的个数

- A. 向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性无关
- B. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性无关
- C. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 均是方程组 $A^2x = 0$ 的解
- D. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 均是方程组 $A^2x = 0$ 的基础解系

解

(1). 我们令 $C = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t)$,$B = \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$, 我们有 $AB = C$

我们根据 $rank(AB) \le min\{rank(A), rank(B)\}$, 我们可以得到: $rank(A) \ge rank(C), rank(B) \ge rank(C) \Rightarrow rank(B) \ge t$, 又因为矩阵 B 有 t 列,$rank(B) \le t$, 矩阵 B 是列满秩矩阵, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性无关

(2). 我们假设存在不全为 0 的数 $l_1, l_2, \cdots, l_t, r_1, r_2, \cdots, r_t$, 使得:

$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_t\alpha_t + r_1\beta_1 + r_2\beta_2 + \cdots + r_t\beta_t = 0$$

上面的式子同时左乘 A 得到:

$$r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \cdots + r_t\alpha_t = 0$$

由于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 线性无关, 我们可以知道: $r_1 = r_2 = \cdots = r_t = 0$.

原式子化为: $\exists$不全为0的数$l_1, l_2, \cdots, l_t$, $s.t.\ l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_t\alpha_t = 0$

由于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 线性无关, 我们可以知道: $l_1 = l_2 = \cdots = l_t = 0$.

综上所述, 我们得到: $l_1 = l_2 = \cdots = l_t = r_1 = r_2 = \cdots = r_t = 0$, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性无关.

(3). $\begin{cases} A\alpha_i = 0 \\ A\beta_i = \alpha_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(A\alpha_i) = 0 \\ A(A\alpha_i) = A\beta_i = 0 \end{cases}$

我们可以得到: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 均是方程组 $A^2x = 0$ 的解

(4). 由 (2), (3) 可以知道 $A^2x = 0$ 至少存在 $2t$ 个线性无关的解, 我们可以推出 $n - rank(A^2) \ge$

$2t$, 我们有 $ran(AB) \geq rank(A) + rank(B) - n$, 结合起来我们有:

$$\begin{cases} n - rank(A^2) \geq 2t \\ rank(A^2) \geq 2(n-t) - n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} rank(A^2) \leq n - 2t \\ rank(A^2) \geq n - 2t \end{cases} \Rightarrow rank(A^2) = n - 2t$$

方程组 $A^2x = 0$ 基础解析向量个数为 $r = n - rank(A^2) = 2t$, 因此向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 均是方程组 $A^2x = 0$ 的基础解系.

综上所述, 命题 (1), (2), (3), (4) 都是正确的, 命题正确个数为 4 个.

August 6

例题 34.11.

设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x^4 & x < 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$, 若 $y = f[g(x)]$, 求 $\frac{dy}{dx}|_{x=1}$ 和 $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$

解

我们令 $h(x) = f(g(x))$, 我们有:

$$h(x) = \begin{cases} x^2, \ x > 0 \\ x^4, \ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow h'(x) = \begin{cases} 2x, \ x > 0 \\ 4x^3, \ x \leq 0 \end{cases}$$

我们得到: $\begin{cases} h'(1) = 2 \\ h'(0) = 0 \end{cases}$

综上所述, 我们得到: $\frac{dy}{dx}|_{x=1} = 2, \ \frac{dy}{dx}|_{x=0} = 0.$

例题 34.12.

设 A 为 3 阶矩阵, α 为 3 维列向量, $A^2\alpha \neq 0, A^3\alpha = 0$, 下列说法错误的是:

- A. A 只有 0 特征值
- B. $r(A) = 2$
- C. A 能相似对角化
- D. A 不是对称矩阵

解

我们可以证明向量组 $(\alpha, A\alpha, A^2\alpha)$ 线性无关, 我们不妨假设存在不全为 0 的数 k_1, k_2, k_3 使得:

$$k_1\alpha + k_2A\alpha + k_3A^2\alpha = 0$$

我们有 $A^2\alpha \neq 0, \ A^3\alpha = 0$, 我们在上面式子两边左乘 A, A^2, A^3 得到:

$$\begin{cases} k_1A\alpha + k_2A^2\alpha = 0 \\ k_1A^2\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

我们得到向量组 $(\alpha, A\alpha, A^2\alpha)$ 线性无关，我们令 $P=(\alpha, A\alpha, A^2\alpha)$，矩阵 P 为可逆矩阵，我们得到:

$$AP=(A\alpha, A^2\alpha, 0)=(\alpha, A\alpha, A^2\alpha)\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\Rightarrow AP=PB,\text{其中}B=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

我们得到: $A=PBP^{-1}$, P为可逆矩阵,A 与 B 相似

我们可以求出矩阵 B 只有 0 特征值，且 $rank(B)=2$，不能相似对角化.

August 7

例题 34.13.

设 $\varphi(x)=\begin{cases}x^3\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，函数 $f(x)$ 可导，求 $F(x)=f[\varphi(x)]$ 的导数

解

我们有 $\varphi'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)}{x}=0$，我们可以得到:

$$F'(x)=\begin{cases}f'(x^3\sin\frac{1}{x})(3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}),\ x\neq 0\\ f'(0)\varphi'(0)=0,\ x=0\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$F'(x)=\begin{cases}f'(x^3\sin\frac{1}{x})(3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}),\ x\neq 0\\ 0,\ x=0\end{cases}$$

例题 34.14.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上导函数连续，$f(0)=f(\dfrac{1}{2})=f(1)=0, \left|f'(x)\right|\leq M$，求证:

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right|\leq\frac{M}{8}$$

解

我们由绝对值不等式可以得到:

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right|\leq\int_0^1|f(x)|dx=\begin{cases}\int_0^1|\int_0^x f'(t)dt|dx\leq\int_0^1\int_0^x|f'(t)|dtdx\leq\int_0^1|\int_0^x Mdt|dx\\ \int_0^1|\int_1^x f'(t)dt|dx\leq\int_0^1\int_1^x|f'(t)|dtdx\leq\int_0^1|\int_1^x Mdt|dx\\ \int_0^1|\int_{\frac{1}{2}}^x f'(t)dt|dx\leq\int_0^1\int_{\frac{1}{2}}^x|f'(t)|dtdx\leq\int_0^1|\int_{\frac{1}{2}}^x Mdt|dx\end{cases}$$

我们将 $[0,1]$ 区间分为 $[0,\frac{1}{4}],[\frac{1}{4},\frac{3}{4}],[\frac{3}{4},1]$, 我们可以得到:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f(x)|dx &= \int_0^{\frac{1}{4}} |f(x)|dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} |f(x)|dx + \int_{\frac{3}{4}}^{1} |f(x)|dx \\
&\leq \int_0^{\frac{1}{4}} \int_0^x Mdtdx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \int_{\frac{1}{2}}^x Mdtdx + \int_{\frac{3}{4}}^{1} \int_1^x Mdtdx \\
&= \int_0^{\frac{1}{4}} |Mx|dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} |Mx - \frac{M}{2}|dx + \int_{\frac{3}{4}}^{1} |Mx - M|dx \\
&= \frac{M}{32} + \frac{M}{32} + \frac{M}{32} + \frac{M}{32} \\
&= \frac{M}{8}
\end{aligned}$$

综上所述, 我们证明: $|\int_0^1 f(x)dx| \leq \frac{M}{8}$

34.2 Week II

August 8

例题 34.15.

设 A 是 n 阶矩阵, 下列说法错误的是:

- A. 对于任意的 n 维列向量 ξ, 有 $A\xi = 0$, 则 $A = 0$
- B. 对于任意的 n 维列向量 ξ, 有 $\xi^T A\xi = 0$, 则 $A = 0$
- C. 对于任意的 n 阶矩阵 B, 有 $AB = 0$, 则 $A = 0$
- D. 对于任意的 n 阶矩阵 B, 有 $B^T AB = 0$, 则 $A = 0$

解

(1). 我们可以知道矩阵 A 的零空间为 $N(A) = R^n$, 我们可以得到 A 的行空间 $R(A) = 0$,$A = 0$

(2). 当 A 为反对称矩阵时, 我们可以得到 $\xi^T A\xi = 0$

(3). 我们不妨取 $B = E$, 可以得到 $A = 0$, 矩阵 A 只能为零矩阵, 在 $A = 0$ 时, 任意的 n 阶矩阵 B 满足 $AB = 0$

(4). 同 (3), 取 $B = E$, 可以得到 $A = 0$, 矩阵 A 只能为零矩阵, 在 $A = 0$ 时, 任意的 n 阶矩阵 B 满足 $B^T AB = 0$

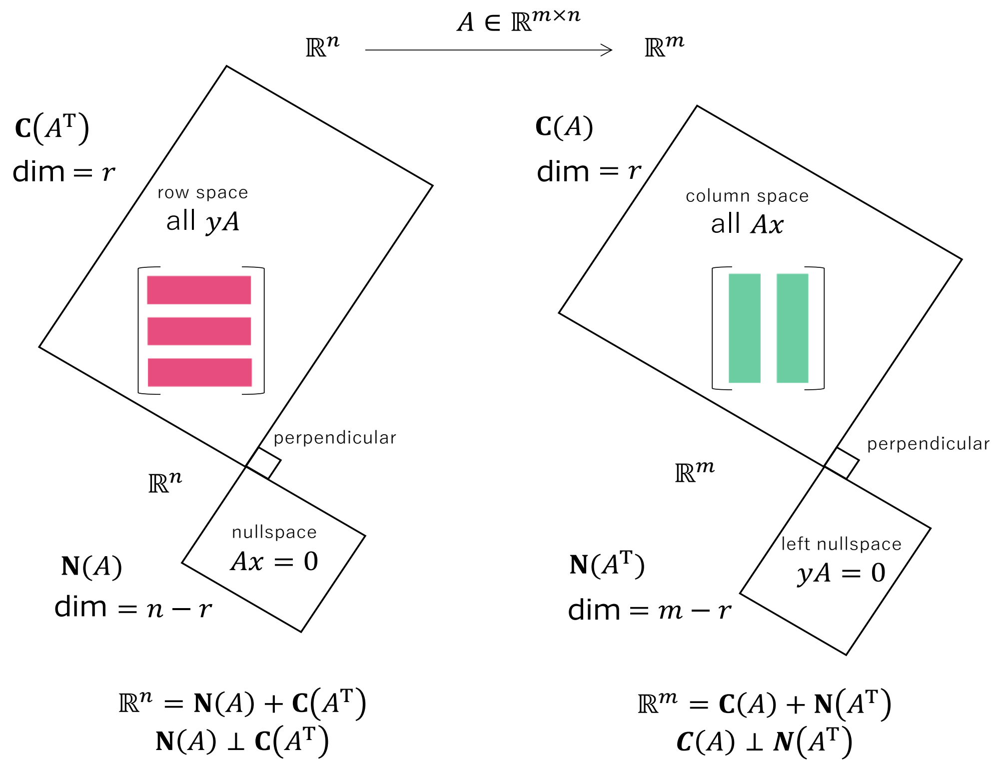


图 34.1: 四个子空间

例题 34.16.

设函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 上可导, 且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f[(x+h)^2]-f(x^2+h)}{h}=1, f(1)=1$, 求 $f(x)$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{h\to 0}\frac{f[(x+h)^2]-f(x^2+h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f[(x+h)^2]-f(x^2)+f(x^2)-f(x^2+h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f[(x+h)^2]-f(x^2)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x^2)-f(x^2+h)}{h} \\ &= [f(x^2)]'-f'(x^2) \\ &= (2x-1)f'(x^2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

我们得到:

$$f'(x^2)=\frac{1}{2x-1}\Rightarrow 2xf'(x^2)=\frac{2x}{2x-1}\Rightarrow f(x^2)=x+\frac{1}{2}\ln(2x-1)+C$$

我们由 $f(1)=1\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x^2)=x+\dfrac{1}{2}\ln(2x-1)$

我们得到 $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}\ln(2\sqrt{x}-1)$

August 9

例题 34.17.

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上导函数连续, $f(0)=f(1)=0$, 证明:

$$\int_0^1 f^2(x)dx \le \frac{1}{8}\int_0^1 [f'(x)]^2 dx$$

定理 34.2.1 (积分形式柯西不等式)

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$$

我们知道 $\forall t\in\mathbb{R}$, 我们有:

$$[tf(x)-g(x)]^2 \ge 0 \Rightarrow t^2f^2(x)-2tf(x)g(x)+g^2(x)\ge 0$$

我们对上式子两边在区间 $[a,b]$ 上积分, 可以得到:

$$t^2\int_a^b f^2(x)dx - 2t\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \ge 0$$

我们可以得到一个关于 t 的一元二次方程方程:

$$At^2+Bt+C\ge 0, \text{其中}\begin{cases} A=\int_a^b f^2(x)dx \\ B=-2\int_a^b f(x)g(x)dx \\ C=\int_a^b g^2(x)dx \end{cases} \Rightarrow B^2-4AC\le 0$$

我们得到:

$$4\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 - 4\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx \le 0$$

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$$

解

$$\text{我们知道:}\begin{cases} f(x)=\int_0^x f'(t)dt \\ f(x)=\int_1^x f'(t)dt \end{cases} \text{我们有:}$$

$$\int_0^1 f^2(x)dx = \begin{cases} \int_0^1\left[\int_0^x f'(t)dt\right]^2 dx \le \int_0^1\left[\int_0^x 1^2dt\int_0^x |f'(t)|^2dt\right]dx \\ \int_0^1\left[\int_1^x f'(t)dt\right]^2 dx \le \int_0^1\left[\int_1^x 1^2dt\int_0^x |f'(t)|^2dt\right]dx \end{cases}$$

我们可以得到:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f^2(x)dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} f^2(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f^2(x)dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^x f'(t)dt\right]^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\int_x^1 f'(t)dt\right]^2 dx \\
&\le \int_0^{\frac{1}{2}} [\int_0^x 1^2 dt \int_0^x |f'(t)|^2 dt]dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 [\int_x^1 1^2 dt \int_x^1 |f'(t)|^2 dt]dx \\
&\le \int_0^{\frac{1}{2}} [x \int_0^x |f'(t)|^2 dt]dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 [(1-x) \int_x^1 |f'(t)|^2 dt]dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(t)|^2 dt \int_t^{\frac{1}{2}} x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(t)|^2 dt \int_{\frac{1}{2}}^t (1-x)dx \\
&= (\frac{1}{8} - \frac{t^2}{2}) \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(t)|^2 dt + (t - \frac{t^2}{2} - \frac{3}{8}) \int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(t)|^2 dt \\
&= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(t)|^2 dt + \frac{1}{8} \int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(t)|^2 dt \\
&= \frac{1}{8} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx
\end{aligned}
$$

例题 34.18.

$$
\lim_{n\to+\infty} \left[\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) + \frac{1}{2}\right]^{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}
$$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= e^{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right)}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2}} \\
&= e^{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2}} \\
&= e^{\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{2}} \\
&= e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

August 10

例题 34.19.

设可导函数 $y = y(x)$ 由方程 $\sin x - \int_x^y \varphi(u)du = 0$ 所确定, 其中可导函数 $\varphi(u) > 0$, 且 $\varphi(0) = \varphi'(0) = 1$, 求 $y''(0)$

解

我们可以得到: 当 $x = 0$ 时,$\int_0^y \varphi(u)du = 0$, 且 $\varphi(u) > 0$, 我们得到 $y = 0$.

我们对方程 $\sin x - \int_x^y \varphi(u)du = 0$ 两边对 x 求导得到:

$$\begin{cases} \cos x - [\varphi(y)y' - \varphi(x)] = 0 \\ -\sin x - [\varphi'(y)y'^2 + \varphi(y)y'' - \varphi'(x)] = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - y'(0)\varphi(0) + \varphi(x) = 0 \\ -\varphi'(0)y'(0)^2 - y''(0)\varphi(0) + \varphi'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'(0) = 2 \\ y''(0) = -3 \end{cases}$$

例题 34.20.

设 $a_n = \int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}dx$

(1). 证明: $\dfrac{1}{2(n+1)} \leq a_n \leq \dfrac{1}{2n}(n = 1, 2, \cdots)$

(2). 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left[\dfrac{1}{2n} - \int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}dx\right]$ 绝对收敛

解

(1). 我们有:

$$\begin{cases} \dfrac{x^n}{1+x} \geq \dfrac{x^n}{2},\ x \in (0, 1) \\ \dfrac{x^n}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}x^{n-1} \leq \dfrac{x^{n-1}}{2},\ x \in (0, 1) \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^n}{2}dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{2}dx$$

我们有:

$$\begin{cases} \int_0^1 \dfrac{x^n}{2}dx = \dfrac{x^{n+1}}{2(n+1)}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2(n+1)} \\ \int_0^1 \dfrac{x^{n-1}}{2}dx = \dfrac{x^n}{2n}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2n} \end{cases}$$

我们证明了: $\dfrac{1}{2(n+1)} \leq a_n \leq \dfrac{1}{2n},\ n = 1, 2, \cdots$

(2). 我们不妨设 $b_n = \dfrac{1}{2n} - a_n = \dfrac{1}{2n} - \int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}dx$.

我们由 (1) 可得: $|b_n| \leq \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{2(n+2)} = \dfrac{1}{2n^2+4n} < \dfrac{1}{2n^2}$

我们知道级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2n^2}$ 收敛, 由比较判别法我们可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛, 原级数绝对收敛.

August 11

例题 34.21.

设 $x = x(y)$ 是函数 $y = \ln x + e^x$ 的反函数, 求 $\dfrac{d^2x}{dy^2}$

解

我们有: $\begin{cases} y = f(x) \\ x = g(y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'(x) = f'(x) \\ 1 = f'(x)g'(y) \end{cases} \Rightarrow g'(y) = \dfrac{1}{f(x)}$

我们有: $f(x) = \ln x + e^x \Rightarrow f'(x) = e^x + \dfrac{1}{x}$

我们得到: $g'(y) = \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{x}{1+xe^x}$

我们有:

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{\frac{dx}{dy}}{dx}\frac{dx}{dy} = \frac{x - x^3e^x}{(1+xe^x)^3}$$

例题 34.22.

设 $a_0 = 1, a_1 = 0, a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}(na_n + a_{n-1})(n = 1, 2, 3\cdots)$, $S(x)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ 的和函数

(1). 证明: 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ 的收敛半径不小于 1

(2). 证明: $(1-x)S'(x) - xS(x) = 0, x \in (-1, 1)$, 并求出 $S(x)$ 的表达式

解

(1). 我们由 $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}(na_n + a_{n-1})$ 得到:

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n+1}(a_n - a_{n-1})$$

我们不妨设 $b_n = a_n - a_{n-1} \Rightarrow b_{n+1} = -\dfrac{1}{n+1}b_n$, $b_1 = a_1 - a_0 = -1$

我们有:

$$\begin{cases} b_n = -\dfrac{1}{n}b_{n-1} \\ b_{n-1} = -\dfrac{1}{n-1}b_{n-2} \\ \dots \\ b_2 = -\dfrac{1}{2}b_1 \\ b_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow b_n = \frac{(-1)^n}{n!}$$

我们由累加法可以得到: $a_n = \begin{cases} a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}, \ n \geq 1 \\ 1, \ n = 0 \end{cases} \Rightarrow a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$

我们利用根值审敛法:

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!})}{n}} = 1$$

我们得到级数的收敛半径: $r = \dfrac{1}{\rho} = 1$, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ 的收敛半径不小于 1.

(2). 我们有: $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$, 我们得到:

$$\begin{cases} S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \\ S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n \end{cases}$$

$$a_{n+1}=\frac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})\Rightarrow(n+1)a_{n+1}=na_n+a_{n-1}\Rightarrow(n+2)a_{n+2}=(n+1)a_{n+1}=a_n$$

我们得到:

$$\begin{aligned}(1-x)S'(x)-xS(x) &= (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-x\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}[(n+1)a_{n+1}+a_n]x^{n+1} \\ &= a_1+\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}[(n+1)a_{n+1}+a_n]x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)a_{n+2}x^{n+1}-\sum_{n=0}^{+\infty}[(n+1)a_{n+1}+a_n]x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}[(n+2)a_{n+2}-(n+1)a_{n+1}-a_n]x^{n+1} \\ &= 0\end{aligned}$$

我们得到:

$$(1-x)S'(x)-xS(x)=0\Rightarrow\frac{S'(x)}{S(x)}=\frac{x}{1-x}\Rightarrow S(x)=\frac{C_1}{e^x(1-x)}$$

我们有 $S(0)=1\Rightarrow C_1=1$, 因此 $S(x)=\dfrac{1}{e^x(1-x)}$, $x\in(-1,1)$

August 12

例题 34.23.

设 $y=y(x)$ 由 $e^y\sin t-y+1=0$ 和 $x=\begin{cases}\dfrac{e^t-1}{t} & t\neq0\\ 1 & t=0\end{cases}$ 所确定, 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}$

解

我们知道: 当 $t=0$ 时, $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$, 我们由:

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{e^t-1}{t}, & t\neq0\\ 1, & t=0\end{cases}\Rightarrow x(t)=1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{6}+\frac{t^3}{24}+\cdots\Rightarrow\begin{cases}x'(0)=\dfrac12\\ x''(0)=\dfrac13\end{cases}$$

我们由: $e^y \sin t - y + 1 = 0 \Rightarrow e^{y(t)} \sin t - y(t) + 1 = 0$ 得到:

$$\begin{cases} e^{y(t)} \cos t + y'(t)e^{y(t)} \sin t - y'(t) = 0 \\ y'(t)e^{y(t)} \cos t - e^{y(t)} \sin t + \left\{[y'(t)]^2 e^{y(t)} + y''(t)e^{y(t)}\right\} \sin x + \cos x \left[y'(t)e^{y(t)}\right] - y''(t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(0) = e \\ y''(0) = 2e^2 \end{cases}$$

我们由参数方程二阶导数公式:

$$\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=0} = \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{[x'(t)]^3}|_{t=0} = 8e^2 - \frac{8e}{3}$$

例题 34.24.

下列命题正确的是:

- A. 设 A 为 3 阶矩阵, 若 A 的特征值 $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$, 则 $r(A) = 2$
- B. 设 A 为 3 阶非零矩阵, 若 $A^2 = 0$, 则 $r(A) = 1$
- C. 设 A, B 为 3 阶矩阵, 若 A 与 B 等价, 则 $|A| = |B|$
- D. 设 A, B 为 3 阶实对称矩阵, 若 A 与 B 合同, 则 $|A| = |B|$

解

(A). 我们可以得到矩阵 $A \sim diag\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, 对角矩阵的秩和矩阵 A 的秩相同,$r(A) = 2$

(B). $A^2 = 0 \Rightarrow 2r(A) \leq 3 \Rightarrow r(A) = 1$

(C). A 与 B 等价 $\Rightarrow r(A) = r(B)$

(D). A 与 B 合同 $\Rightarrow A = P^T BP$

August 13

例题 34.25.

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{2nx + x^2}{2n^2}\right)^{-n} & x \neq 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2\left[\dfrac{n}{(n+1)^2} + \dfrac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \dfrac{n}{(n+n)^2}\right] & x = 0 \end{cases}$$

求 $\int f(x)dx$

解

当 $x \neq 0$ 时:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{2nx + x^2}{2n^2}\right)^{-n} \\ &= e^{\lim\limits_{n\to+\infty} (-n)\frac{2nx + x^2}{2n^2}} \\ &= e^{-x} \end{aligned}$$

当 $x=0$ 时:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to+\infty} 2\left[\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n+n)^2}\right] \\ &= 2\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{(1+\frac{2}{n})^2}+\cdots+\frac{1}{(1+\frac{n}{n})^2}\right] \\ &= 2\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx \\ &= 2(1-\frac{1}{2}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

我们得到: $f(x)=e^{-x}\Rightarrow\int f(x)dx=-e^{-x}+C$

例题 34.26.

已知函数 $f(x)=x^2\ln(1-x)$, 当 $n\geq 3$ 时, 求 $f^{(n)}(0)$

解

我们利用 $\ln(1-x)$ 的泰勒展开式:

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^n}{n}-\cdots$$

我们可以得到:

$$f(x)=-x^3-\frac{x^4}{2}-\frac{x^5}{3}-\cdots-\frac{x^n+2}{n}-\cdots$$

我们有:

$$\begin{cases} f'(0)=0 \\ f''(0)=0 \\ f^{(3)}(0)=-6 \\ f^{(4)}(0)=-\dfrac{4!}{2} \\ \cdots\cdots \end{cases} \Rightarrow f^{(n)}(0)=-\frac{n!}{n-2},\ n\geq 3$$

August 14

例题 34.27.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $f(0)=f(1)=-2$, 证明: $\exists\xi\in(0,1),\ s.t.\ f'(\xi)-f(\xi)=\xi$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=e^{-x}\left[f(x)+x+1\right]$, 我们有:

$$F(0)=-1,\ F(1)=0,\ F'(x)=e^{-x}\left[f'(x)-f(x)-x\right]$$

我们由积分中值定理可以得到:

$$\exists \eta \in (0,1),\ s.t. \int_0^1 f(x)dx = f(\eta) \Rightarrow \exists \eta \in (0,1),\ s.t. f(\eta) = 0$$

我们有:

$$F(\eta) = e^{-\eta}\left[f(\eta)+\eta+1\right] = e^{-\eta}(\eta+1) > 0$$

我们根据零点定理, 可知: $\exists \delta \in (0,\eta),\ s.t. F(\delta) = 0.$

我们对 $F(x)$ 在区间 $[\delta,1]$ 上使用罗尔定理可以得到:

$$\exists \xi \in (\delta,1),\ s.t. F'(\xi) = e^{-\xi}\left[f'(\xi)-f(\xi)-\xi\right] = 0 \Rightarrow f'(\xi)-f(\xi) = \xi$$

综上所述, 我们得到: $\exists \xi \in (0,1),\ s.t. f'(\xi)-f(\xi) = \xi$

例题 34.28.

设数列 $\{u_n\}$ 满足 $u_1 = 1, u_{n+1} = \dfrac{u_n+3}{u_n+1}(n = 1,2,\cdots)$, 证明数列 $\{u_n\}$ 收敛, 并求其极限

解

我们有:

$$u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = \frac{5}{3},\ u_4 = \frac{7}{4},\cdots\ (u_n > 0)$$

我们发现数列 $\{u_n\}$ 不是单调数列, 我们从奇数项和偶数项入手:

$$\begin{cases} u_{2k+2} = \dfrac{u_{2k+1}+3}{u_{2k+1}+1} = \dfrac{\frac{u_{2k}+3}{u_{2k}+1}+3}{\frac{u_{2k}+3}{u_{2k}+1}+1} = 2-\dfrac{1}{u_{2k}+2} \\ u_{2k+1} = \dfrac{u_{2k}+3}{u_{2k}+1} = \dfrac{\frac{u_{2k-1}+3}{u_{2k-1}+1}+3}{\frac{u_{2k-1}+3}{u_{2k-1}+1}+1} = 2-\dfrac{1}{u_{2k-1}+2} \end{cases} \Rightarrow f(x) = 2-\frac{1}{x+2}\text{单调递增}$$

我们首先证明数列 $\{u_{2k-1}\}$ 极限存在:

(1). 当 $n = 1$ 时,$u_1 < u_3$.

(2). 当 $n = k$ 时, 假设 $u_{2k-1} < u_{2k+1}$

(3). 当 $n = k+1$ 时,$u_{2k-1} < u_{2k+1} \Rightarrow f(u_{2k-1}) < f(u_{2k+1}) \Rightarrow u_{2k+1} < u_{2k+3}$

数列 $\{u_{2k-1}\},(k = 1,2,\cdots)$ 单调递增, 且 $u_{2k-1} < 2$

我们继续证明数列 $\{u_{2k}\}$ 极限存在:

(1). 当 $n = 1$ 时,$u_2 > u_4$.

(2). 当 $n = k$ 时, 假设 $u_{2k} > u_{2k+2}$

(3). 当 $n = k+1$ 时,$u_{2k} > u_{2k+2} \Rightarrow f(u_{2k}) > f(u_{2k+2}) \Rightarrow u_{2k+2} < u_{2k+4}$

数列 $\{u_{2k}\},(k = 1,2,\cdots)$ 单调递减少, 且 $u_{2k} > \dfrac{3}{2}$

我们不妨假设:

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to+\infty} u_{2k-1} = A \\ \lim\limits_{k\to+\infty} u_{2k} = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{B+3}{B+1} \\ B = \dfrac{A+3}{A+1} \end{cases} \Rightarrow A = B = \sqrt{3}$$

我们可以得到:

(1). $\forall\varepsilon > 0, \exists N_1 > 0$, 当 $n = 2k-1 > N_1$ 时, 我们有:$|u_{2k-1} - \sqrt{3}| < \varepsilon$.
(2). $\forall\varepsilon > 0, \exists N_2 > 0$, 当 $n = 2k > N_2$ 时, 我们有:$|u_{2k} - \sqrt{3}| < \varepsilon$.
(3). 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$,$\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 我们有:$|u_n - \sqrt{3}| < \varepsilon$.
综上所述, 我们证明数列 $\{u_n\}$ 收敛, 极限为 $\sqrt{3}$.

34.3 Week III

August 15

例题 34.29.

$$f(x) = \int_1^x \frac{\arctan t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\ln(1+t^2)}dt$$

求 $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} f(x)dx$

解

原定积分等价于:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{f(x)}{2} d(\ln(1+x^2)) \\
&= \frac{f(x)\ln(1+x^2)}{2}\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{2} d(f(x)) \\
&= -\int_0^1 \frac{\arctan x}{2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta\cos\theta d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\theta\sin\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta d\theta \\
&= -\frac{\sqrt{2}\pi}{16} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

例题 34.30.

设 $f(x) = \dfrac{1}{1+2x+4x^2}$, 求 $f^{(100)}(0)$

解

$$f(x) = \frac{1-2x}{(1-2x)(4x^2+2x+1)} = \frac{1-2x}{1-(2x)^3}$$

$$\frac{1}{1-(2x)^3} = 1 + (2x)^3 + (2x)^6 + (2x)^9 + \cdots + (2x)^{3n}$$

我们得到:

$$f(x) = (1-2x)\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^{3n} - \sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^{3n+1}$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$\dfrac{f^{(100)}(0)}{100!}$ 是 $f(x)$ 中 x^{100} 前面的系数,我们可以得到:

$$f^{(100)}(0) = -2^{100} \times 100!$$

August 16

例题 34.31.

证明:

$$\exists x_1, x_2, x_3 \in (0,2)(x_1 < x_2 < x_3),\ s.t. \frac{1-\ln(1+x_1)}{(1+x_1)^2}x_3 = \frac{1-\ln(1+x_2)}{(1+x_2)^2}(2-x_3)$$

解

我们构造辅助函数: $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$, 我们有:

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2} \\ f(0) = 0 \\ f(2) = \dfrac{\ln 3}{3} \end{cases}$$

我们不妨假设 $\exists x_3 \in (0,2), f(x_3) = A$, 我们分别在区间 $(0, x_3)$ 和区间 $(x_3, 2)$ 上使用拉格朗日中值定理可以得到:

$$\begin{cases} \exists x_1 \in (0, x_3),\ s.t. \dfrac{f(x_3) - f(0)}{x_3} = f'(x_1) = \dfrac{1-\ln(1+x_1)}{(1+x_1)^2} \\ \exists x_2 \in (x_3, 2),\ s.t. \dfrac{f(2) - f(x_3)}{2-x_3} = f'(x_2) = \dfrac{1-\ln(1+x_2)}{(1+x_2)^2} \end{cases}$$

我们令 $f(x_3) - f(0) = f(2) - f(x_3) \Rightarrow A = f(2) - A \Rightarrow f(x_3) = A = \dfrac{f(2)}{2} = \dfrac{\ln 3}{6}$ 时, 我们可以得到:

$$\frac{1-\ln(1+x_1)}{(1+x_1)^2}x_3 = \frac{1-\ln(1+x_2)}{(1+x_2)^2}(2-x_3)$$

综上所述, 我们可以得到: 在区间 $(0,2)$ 内存在三个不同的点 x_1, x_2, x_3, 使得 $\dfrac{1-\ln(1+x_1)}{(1+x_1)^2}x_3 = \dfrac{1-\ln(1+x_2)}{(1+x_2)^2}(2-x_3)$

例题 34.32.

$$y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

(1). 证明: $(1-x^2)y^{(n+1)}-(2n+1)xy^{(n)}-n^2y^{(n-1)}=0(n\geq 1)$

(2). 求 $y^{(n)}(0)$

解

(1). 我们对 $f(x)$ 求导可以得到:

$$f'(x)=\frac{1+\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1+xf(x)}{1-x^2}\Rightarrow(1-x^2)f'(x)-xf(x)-1=0$$

我们令 $g(x)=(1-x^2)f'(x)-xf(x)-1$, 我们利用莱布尼兹公式可以得到:

$$g^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(1-x^2)^{(k)}f^{(n-k+1)}(x)-\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x)^{(k)}f^{(n-k)}=0$$

当 $k\geq 3$ 时,$(1-x^2)^{(k)}=0$; 当 $k\geq 2$ 时,$x^{(k)}=0$, 我们有:

$$g^{(n)}(x)=(1-x^2)f^{(n+1)}(x)-2nxf^{(n)}(x)-n(n-1)f^{(n-1)}(x)-xf^{(n)}(x)-nf^{(n-1)}(x)=0$$

我们得到:

$$(1-x^2)f^{(n+1)}(x)-(2n+1)xf^{(n)}(x)-n^2f^{(n-1)}(x)=0$$

综上所述, 我们得到: $(1-x^2)y^{(n+1)}-(2n+1)xy^{(n)}-n^2y^{(n-1)}=0(n\geq 1)$

(2). 我们将 $x=0$ 代入上面式子可以得到:

$$\begin{cases} y^{(n)}=(n-1)^2y^{(n-2)}\\ y(0)=0\\ y^{(1)}(0)=1\end{cases}\Rightarrow y^{(n)}(0)=\begin{cases}0,\ n\text{为偶数}, n=2k(k=0,1,\cdots)\\ (2k!!)^2,\ n\text{为奇数}, n=2k+1(k=0,1,\cdots)\end{cases}$$

August 17

例题 34.33.

$$f(x)=\lim_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$$

求 $f(x)$ 的间断点, 并指出其类型

解

$$f(x)=e^{\lim\limits_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln(1+\frac{\sin t-\sin x}{\sin x})}=e^{\frac{x}{\sin x}}$$

我们发现 $f(x)$ 的间断点为 $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

(1). 当 $k=0$ 时, 我们有:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = e \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = e \end{cases} \Rightarrow x = 0\text{是}f(x)\text{可去间断点}$$

(2). 当 $k \neq 0$ 时, 我们有:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to k\pi^+} f(x) = +\infty\text{或者}0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0\text{或者}+\infty \end{cases} \Rightarrow x = k\pi\text{是}f(x)\text{无穷间断点}$$

例题 34.34.

证明:

$$\int_0^\pi x a^{\sin x} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\cos x} dx \geq \frac{\pi^3}{4}$$

解

我们由区间再现公式可以得到:

$$\begin{cases} I_1 = \int_0^\pi (\pi - t) a^{\sin t} dt \\ 2I_1 = \pi \int_0^\pi a^{\sin t} dt \\ I_1 = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\cos t} dt \end{cases}$$

我们可以得到原定积分等价于:(柯西不等式)

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\cos x} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\cos x} dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x) dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} g^2(x) dx \\ &\geq \pi \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) g(x) dx \right]^2 \\ &= \frac{\pi^3}{4} \end{aligned}$$

August 18

例题 34.35.

设函数 $f(x) = \begin{cases} x|x| & x \leq 0, \\ x\ln x & x > 0, \end{cases}$,$x=0$ 处 $f(x)$ 的可导性判断、$x=0$ 是否为 $f(x)$ 的极值点

解

当 $x=0$ 时, 我们有 $f(0)=0$, 且我们有:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x=0\\ \lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(-x^2)=0\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to0} f(x)=f(0)\Rightarrow f(x)\text{在}x=0\text{处连续}$$

我们有:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\ln x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=-x=0\end{cases}\Rightarrow f(x)\text{在}x=0\text{处不可导}$$

取 $\varepsilon\in(0,1)$, 当 $x\in(-\varepsilon,0)$ 时,$f(x)=-x^2<f(0)=0$; 当 $x\in(0,\varepsilon)$ 时,$f(x)=x\ln x<f(0)=0$,$x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

例题 34.36.

$$f(x)=\prod_{n=1}^{100}\left(\tan\frac{\pi x^n}{4}-n\right), \text{求 } f'(1)$$

我们令 $g(x)=\prod\limits_{n=2}^{100}\left(\tan\dfrac{\pi x^n}{4}-n\right)$, 我们得到:

$$f(x)=(\tan\frac{\pi x}{4}-1)g(x)$$

$$f'(x)=\frac{\pi}{4\cos^2\frac{\pi x}{4}}g(x)+g'(x)(\tan\frac{\pi x}{4}-1)$$

$$f'(1)=\frac{\pi}{2}g(1)=\frac{\pi}{2}\times(1-2)\times(1-3)\cdots\times(1-100)=-\frac{\pi}{2}99!$$

August 19

例题 34.37.

$$f(x)=\begin{cases}\int_0^x\cos\dfrac{1}{t}dt & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}, \text{求 } f'(0)$$

解

我们有:$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$, 我们根据导数的定义可以得到:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos\frac{1}{t}dt}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{\int_0^x t^2 d\sin\frac{1}{t}}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}\left[-t\sin\frac{1}{t}\Big|_{t=0}^{t=x}\right] + \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x 2t\sin\frac{1}{t}dt}{x} \\ &= 0 + 2\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

综上所述, 我们得到:$f'(0) = 0$

例题 34.38.

$f(x)$ 可导, 且满足 $x = \int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t-x)dt$, 求 $f(x)$ 以及 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |f(x)|^6 dx$

解

我们令 $u = t - x, t = u + x$, 我们得到:

$$x = \int_0^x f(t)dt + \int_{-x}^0 (u+x)f(u)du \Rightarrow x = \int_0^x f(t)dt + \int_{-x}^0 uf(u)du + x\int_{-x}^0 f(u)du$$

我们对方程左右两边对 x 求导, 得到:

$$1 = f(x) - xf(-x) + \int_{-x}^0 f(u)du + xf(-x) \Rightarrow f(x) + \int_{-x}^0 f(u)du = 1$$

我们再求一次导数, 得到:

$$f'(x) + f(-x) = 0 \Rightarrow f''(x) - f'(-x) = 0 \Rightarrow f''(x) = f(x)$$

我们得到特征方程:$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$

我们不妨设 $f(x) = C_1\sin x + C_2\cos x$

我们有:$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4})$

我们得到:

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |f(x)|^6 dx &= 8\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^6(x+\frac{\pi}{4})dx \\ &= 8\int_0^{\pi} \cos^6 t dt \\ &= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 t dt \\ &= 16\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{5\pi}{2}\end{aligned}$$

August 20

例题 34.39.

设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x} t\ln|t|dt, x=0$ 处 $f(x)$ 的可导性判断、$x=0$ 是否为 $f(x)$ 的极值点

解

我们有 $g(x)=x\ln|x|$ 在 $x=0$ 处可去间断, 且 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$, 我们得到 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

我们有:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{\int_0^x t\ln t dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{\int_x^0 t\ln(-t)dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)\ln(-x)=0\end{cases} \Rightarrow f'(0)=0$$

当 $x\in(-1,0)$ 时,$f(x)>f(0)$; 当 $x\in(0,1)$ 时,$f(x)>f(0)$,$f(x)$ 在 $x=0$ 处取极小值.

例题 34.40.

函数 $f(x)=(x+1)\left|x^2-1\right|$ 驻点和极值点个数

解

我们得到: $f(x)=\begin{cases} x^3+x^2-x-1, & |x|\geq 1 \\ x+1-x^2-x^3, & |x|<1\end{cases}$, 我们对 $f(x)$ 求导得到:

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2+2x-1, & x\leq -1 \\ 1-2x-3x^2, & -1<x<1 \\ 3x^2+2x-1, & x>1\end{cases} \Rightarrow f(x)在x=-1处可导; 在x=1处不可导$$

$$f'(x)=\begin{cases}(3x-1)(x+1), & x\leq -1 \\ (1-3x)(x+1), & -1<x<1 \\ (3x-1)(x+1), & x>1\end{cases}$$

我们发现:

$$\begin{cases} x \in (-\infty, -1), f'(x) > 0 \\ x \in (-1, \frac{1}{3}), f'(x) > 0 \\ x \in (\frac{1}{3}, 1), f'(x) < 0 \\ x \in (1, +\infty), f'(x) > 0 \end{cases}$$

在可导点处,$f(x)$ 有两个驻点 $x = \frac{1}{3}$ 和 $x = -1$;$f(x)$ 有一个极值点 $x = \frac{1}{3}$.
在不可导点 $x = 1$ 处,$x = 1$ 不是驻点,$x = 1$ 两侧导数值异号,$x = 1$ 是极值点.
综上所述, 我们得到 $f(x)$ 有 $x = \frac{1}{3}$ 和 $x = -1$ 两个驻点和 $x = \frac{1}{3}$ 和 $x = 1$ 两个极值点.

August 21

例题 34.41.

$f(x)$ 在 $x = 0$ 的某个邻域内二阶可导, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x^3} + \frac{f(x)}{x^2}\right] = \frac{1}{3}$, 求 $f(0), f'(0)$ 和 $f''(0)$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x + xf(x) + x}{x^3} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} + \lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x^2} \\ &= -\frac{1}{6} + \lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x^2} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

我们得到: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x^2} = \frac{1}{2}$

我们得到:

$$\begin{cases} f(0) = -1 \\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x} = \frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = -1 \\ f'(0) = 0 \\ f''(0) = 1 \end{cases}$$

例题 34.42.

设 $f(x)$ 连续, 且 $x > 1, f(x)\left[\int_0^x f(t)dt + 1\right] = \frac{xe^x}{2(1+x)^2}$, 求 $f(x)$

解

我们不妨设 $F(x) = \int_0^x f(t)dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$

我们构造辅助函数:$G(x)=[F(x)+1]^2 \Rightarrow G'(x)=\dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$

我们可以得到: $\begin{cases} G(x)=\dfrac{e^x}{1+x}+C \\ G(0)=[F(0)+1]^2=1 \end{cases} \Rightarrow C=0$

我们得到:

$$\begin{cases} F(x)+1=\sqrt{\dfrac{e^x}{1+x}} \\ f(x)=F'(x)=\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

综上所述, 我们得到: $f(x)=\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$

34.4 Week IV

August 22

例题 34.43.

设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f'(0)=0, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)+f(x)-f(-x)}{|x|}=1$, 下列说法正确的是:

- A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 极大值
- B. $f''(0)>0, f(0)$ 是 $f(x)$ 极小值
- C. $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点
- D. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极值点, $(0,f(0))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)+f(x)-f(-x)}{|x|} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)+[f(0)+f'(0)x+o(x)]-[f(0)-f'(0)x+o(x)]}{|x|} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)+2f'(0)x+o(x)}{|x|} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{|x|} \\ &= 1 \end{aligned}$$

我们得到:$f''(0)=0$, 且 $x\in(-\xi,\xi), f''(x)>0$, 我们知道 $f'(x)$ 在 $x\in(-\xi,\xi)$ 上单调递增,$x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点,$(0,f(0))$ 不是函数 $f(x)$ 的拐点.

例题 34.44.

$$\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{t}{\cos\theta}}\frac{\sin(r^2\sin\theta\cos\theta)}{\sin\theta}dr$$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{t}{\cos\theta}}\frac{\sin(r^2\sin\theta\cos\theta)}{r\sin\theta}rdr\\
&= \lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^t dx\int_0^x\frac{\sin(xy)}{y}dy}{t^3}\\
&= \lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^{t^2}\frac{\sin u}{u}du}{3t^2}\\
&= \lim_{t\to0^+}\frac{2t\sin(t^2)}{6t^3}\\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

August 23

例题 34.45.

设 $f(x)$ 连续, 且 $f(x)\neq0, f(1)=\sqrt{2}$

$$\forall x,y\in(-\infty,+\infty), f(x+y)-f(x)=\int_x^{x+y}\frac{t}{f(t)}(t^2+1)dt$$

求 $f(x)$

解

我们可以得到:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}\frac{t}{f(t)}(t^2+1)dt}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to0}\frac{(x+\Delta x)}{f(x+\Delta x)}\left[(x+\Delta x)^2+1\right]\\
&= \frac{x(x^2+1)}{f(x)}
\end{aligned}$$

我们得到: $f'(x)f(x)=x^3+x\Rightarrow[f^2(x)]'=2x^3+2x$

我们得到: $f^2(x)=\frac{x^4}{2}+x^2+C,\ f(1)=\sqrt{2}\Rightarrow C=\frac{1}{2}$

我们得到: $f(x)=\sqrt{\frac{x^4}{2}+x^2+\frac{1}{2}}=\frac{x^2+1}{\sqrt{2}}$

例题 34.46.

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续, 在 $(0,+\infty)$ 恒正, $x>0$, $[f(x)]^3\leq 3\int_0^x f^2(t)dt$, 证明:

$$x\geq 0, f(x)\leq x$$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=\int_0^x f^2(t)dt$, $F'(x)=f^2(x)$

我们得到:

$$[F'(x)]^{\frac{3}{2}}\leq 3F(x)\Rightarrow F'(x)\leq 3^{\frac{2}{3}}[F(x)]^{\frac{2}{3}}\Rightarrow\frac{F'(x)}{[F(x)]^{\frac{2}{3}}}\leq 3^{\frac{2}{3}}$$

我们构造: $G(x)=F(x)^{\dfrac{1}{3}}$, $G'(x)=\dfrac{F'(x)}{3[F(x)]^{\frac{2}{3}}}\leq 3^{-\frac{1}{3}}$

我们得到:$G(x)\leq\int_0^x 3^{-\frac{1}{3}}=3^{-\frac{1}{3}}x\Rightarrow F(x)^{\frac{1}{3}}\leq 3^{-\frac{1}{3}}x$

我们有:

$$F'(x)\leq 3^{\frac{2}{3}}[F(x)]^{\frac{2}{3}}\Rightarrow f^2(x)\leq x^2\Rightarrow f(x)\leq x$$

我们补充 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, 综上所述, 我们得到: $x\geq 0$时, 均有$f(x)\leq x$

August 24

例题 34.47.

$f(x)=\dfrac{x|x|}{1+x}$, 求 $f(x)$ 的凹凸区间和渐近线

解

我们有:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x}{(1+x)^2}, & x\geq 0\\ -\dfrac{x^2+2x}{(1+x)^2}, & x<0, \text{且} x\neq -1\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{(1+x)^3}, & x>0\\ -\dfrac{2}{(1+x)^3}, & x<0, \text{且} x\neq -1\end{cases}$$

$f'(0)=0$, 我们利用导数定义得到:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f'(x)}{x}=2\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f'(x)}{x}=-2\end{cases}\Rightarrow f''(x)\text{在}x=0\text{跳跃间断}$$

当 $x\in(0,+\infty)$,$f''(x)>0$, 我们可以得到:$(0,+\infty)$ 是 $f(x)$ 的凹区间;

当 $x\in(-\infty,-1)$,$f''(x)>0$, 我们可以得到:$(-\infty,-1)$ 是 $f(x)$ 的凹区间;

当 $x\in(-1,0)$,$f''(x)<0$, 我们可以得到:$(-1,0)$ 是 $f(x)$ 的凸区间.

铅锤渐近线:$x=-1$; 无水平渐近线

斜渐近线:

(1).

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

(2).

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - ax) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

综上所述,$f(x)$ 有三条渐近线, 铅锤渐近线 $x = -1$; 斜渐近线 $y = x - 1$ 和 $y = -x + 1$.

例题 34.48.

函数 $f(x)$ 具有二阶连续的导数, 曲线 $y = f(x)$ 既关于 y 轴对称也关于直线 $x = 1$ 对称, 求 $\int_{-2}^{2}(x - 2024)f''(x)dx$

解

周期性、轴对称性、中心对称性

我们可以得到 $f(x)$ 是以 $T = 2$ 为周期的周期函数; 且 $f(x)$ 是偶函数,$f'(x)$ 是奇函数且为周期函数.

原定积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^{2}(x - 2024)df'(x) \\ &= (x - 2024)f'(x)|_{x=-2}^{x=2} - \int_{-2}^{2} f'(x)dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

August 25

例题 34.49.

设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} x + y & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0 & others \end{cases}$

(1). 求 $\max\{X, Y\}$ 的分布函数和概率密度

(2). 求 $\min\{X, Y\}$ 的分布函数和概率密度

解

例题 34.50.

曲线 $y = x(1 + \arcsin \dfrac{2}{x})$ 的斜渐近线

解

(1). $x \Rightarrow +\infty$

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (1 + \arctan\dfrac{2}{x}) \\ b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\arctan\dfrac{2}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

(2). $x \Rightarrow -\infty$

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} (1 + \arctan\dfrac{2}{x}) \\ b = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - ax) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\arctan\dfrac{2}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

综上所述,$f(x)$ 的斜渐近线方程为:$y = x + 2$

August 26

例题 34.51.

$$\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{x^2 - x + 1} dx$$

解

我们有:$\begin{cases} \sin\theta = \sqrt{x} \\ \cos\theta = \sqrt{1-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \arcsin\sqrt{x} = \theta \\ \arcsin\sqrt{1-x} = \dfrac{\pi}{2} - \theta \end{cases}$ 我们利用区间再现公式得到:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{1-x}}{x^2 - x + 1} dx \\ 2I &= \int_0^1 \frac{\pi}{2(x^2 - x + 1)} dx \\ I &= \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{\pi}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx \\ &= \frac{\pi}{4} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{\sqrt{3}\pi^2}{18} \end{aligned}$$

例题 34.52.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$$

解

我们利用区间再现公式得到:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x})dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\frac{2}{1+\tan x})dx \\ 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2dx \\ I &= \frac{\pi \ln 2}{8} \end{aligned}$$

August 27

例题 34.53.

$f(x) = \arctan x$, 求 $f^{(n)}(0), n \in \{2k+1, k \in \mathbb{Z}^+\}$

解

我们利用泰勒展开式:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{2n-2}$$

$$\begin{cases} f(x) = \arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1} \\ f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} + \cdots \end{cases}$$

我们可以得到:$\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!$

综上所述, 我们得到: $f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!$, n为奇数

例题 34.54.

设 $f(x) = \begin{cases} ax+1 & x<0 \\ be^x & x \geq 0 \end{cases}$ 为可导函数, 求 $\int f(\ln x)dx$

解

我们可以知道 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = b \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow b = 1$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = b \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = a \end{cases} \Rightarrow a = b = 1$$

我们令 $g(x)=f(\ln x)$, 我们得到:$g(x)=\begin{cases}1+\ln x,\ x\in(0,1)\\ x,\ x\in[1,+\infty)\end{cases}$

我们得到:$\int g(x)dx=\begin{cases}x\ln x+C\\ \dfrac{x^2-1}{2}+C\end{cases}$

August 28

例题 34.55.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, $f(a)=a$, $\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$, 证明:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1$$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=\dfrac{f(x)-x}{e^x}$, 我们有: $F(a)=0$

我们由 $\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$ 得到:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b xdx\Rightarrow\int_a^b[f(x)-x]\,dx=0\Rightarrow\exists\theta\in(a,b),\ s.t. f(\theta)=\theta$$

我们有:

$$\begin{cases}F'(x)=\dfrac{f'(x)-f(x)+x-1}{e^x}\\ F(a)=F(\theta)=0\end{cases}$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a,θ) 上使用罗尔定理可以得到:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t. F'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1$$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t. f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1$

例题 34.56.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{(1+2^x)(1+\cos^2 x)}dx$$

解

我们可以得到:

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2^x x\sin x}{(1+2^x)(1+\cos^2 x)}dx\Rightarrow 2I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx\Rightarrow I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

我们利用区间再现公式得到:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx \\ &= \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

August 29

例题 34.57.

$$\int_0^1 \frac{\arctan e^{2x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} dx$$

解

我们利用区间再现公式:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\arctan e^{1-2x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} dx \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} dx \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2 - 1}{\sin\theta+\cos\theta} d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} \left[2 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})} d(\theta+\frac{\pi}{4}) \right] \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \ln(\sqrt{2}+1) \end{aligned}$$

例题 34.58.

求曲线 $y = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+x^2}$ 的渐近线所围区域的面积

解

我们由题意知:$f(x)$ 在 $x=0$ 处无定义,$x=0$ 是 $f(x)$ 的铅垂渐近线.

我们知道 $x \Rightarrow +\infty, f(x) \Rightarrow +\infty$; 当 $x \Rightarrow -\infty, f(x) \Rightarrow +\infty$.

$$(1). \begin{cases} a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{t\to 0^+} e^t\sqrt{1+t^2} = 1 \\ b = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{e^t\sqrt{1+t^2}-1}{t} = 1 \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $+\infty$ 处的渐近线为 $y = x+1$

$$(2). \begin{cases} a = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{t\to 0^-} -e^t\sqrt{1+t^2} = -1 \\ b = \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - ax] = \lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{1-e^t\sqrt{1+t^2}}{t} = -1 \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $-\infty$ 处的渐近线为 $y = -x-1$

我们可以得到: $S=1$

August 30

例题 34.59.

随机变量 X 服从分布 $X\sim E(1)$, 随机变量 Y 服从分布 $Y\sim B(1,\frac{1}{2})$, X,Y 相互独立, 随机变量 $Z=X-Y$, 求 $f_z(Z)$

解

例题 34.60.

设 $f(x)$ 是单调可导函数,$f(-\frac{\pi}{2})=-f(\frac{\pi}{2})$, $g(x)$ 是 $f(x)$ 反函数

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{f(x)} g(t)dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\left(\frac{1}{1+e^{-|t|}}+\frac{\sin t}{1+e^{-\frac{\pi}{2}}}\right)\sin tdt$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

解

我们对上述等式两边对 x 求导可以得到:

$$g(f(x))\cdot f'(x)=\frac{\sin x}{1+e^{-|x|}}+\frac{\sin^2 x}{1+e^{-\frac{\pi}{2}}}\Rightarrow xf'(x)=\frac{\sin x}{1+e^{-|x|}}+\frac{\sin^2 x}{1+e^{-\frac{\pi}{2}}}$$

我们利用分部积分可以得到:

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx &= xf(x)|_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx\\ &= -\frac{2}{1+e^{-\frac{\pi}{2}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 dx\\ &= \frac{-\pi}{2(1+e^{-\frac{\pi}{2}})}\end{aligned}$$

August 31

例题 34.61.

设 $f(x)=\arctan x\cdot e^{ax}$, 且 $f'''(0)=2$, 求 a^2

解

我们根据泰勒展开式:

$$\begin{cases}\arctan x=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\cdots\\ e^{ax}=1+ax+\dfrac{(ax)^2}{2!}+\cdots\end{cases}\Rightarrow f(x)=x+ax^2+(\frac{a^2}{2}-\frac{1}{3})x^3+\cdots$$

我们可以得到: $f'''(0) = 3a^2 - 2 = 2 \Rightarrow a^2 = \dfrac{4}{3}$

例题 34.62.

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 的导函数连续,$f(0) = 0, \left|f'(x) - f(x)\right| \leq 1$, 证明: $|f(x)| \leq e^x - 1$

解

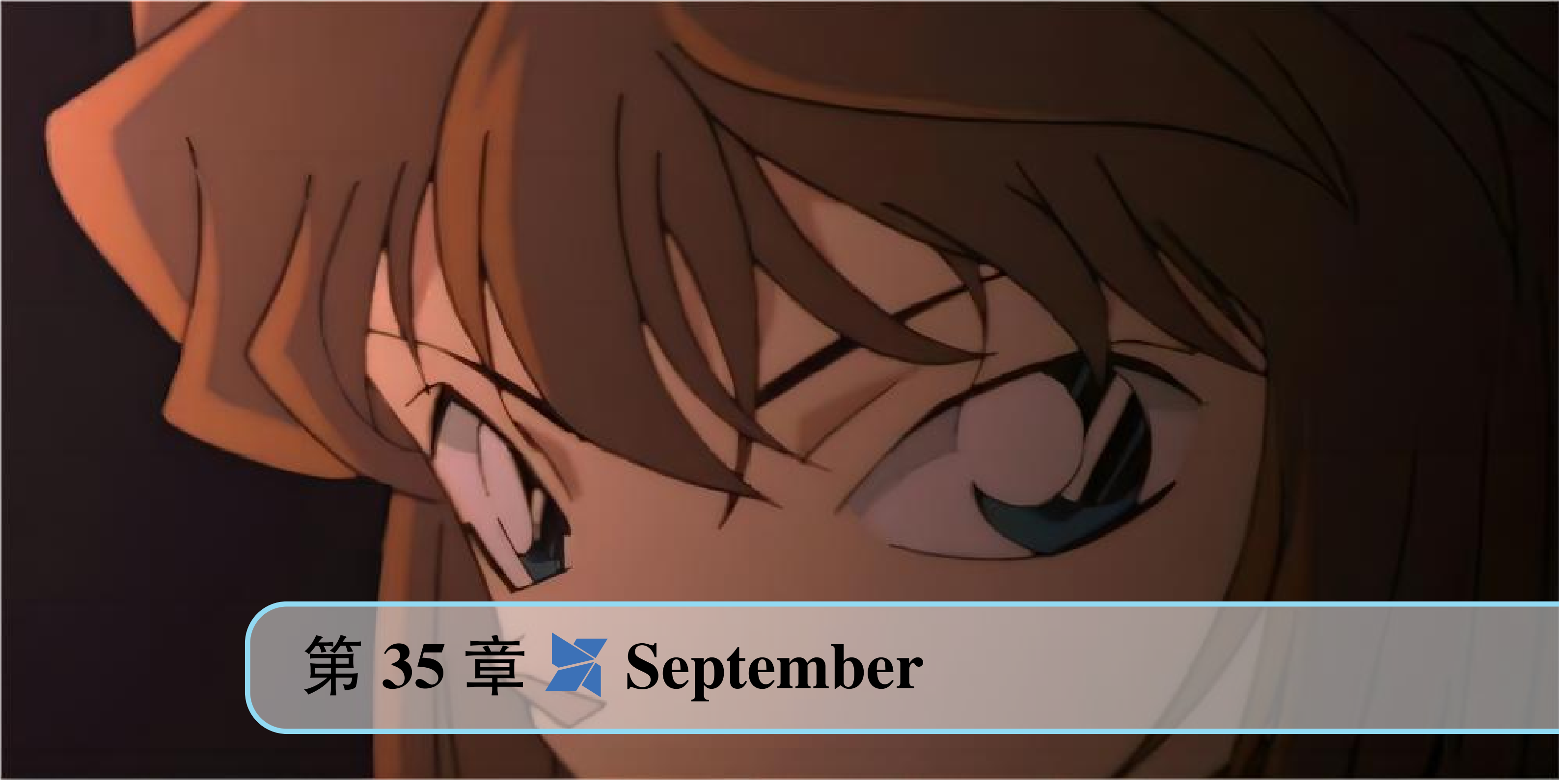
我们构造辅助函数: $F(x) = e^{-x}f(x) \Rightarrow F'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x))$

我们由: $|f'(x) - f(x)| \leq 1 \Rightarrow |F'(x)| \leq e^{-x}$

我们对 $F(x)$ 在 $[0,x](x > 0)$ 上求不定积分, 我们可以得到:

$$\begin{cases} -e^{-x} \leq F'(x) \leq e^{-x} \\ \int_0^x -e^{-t}dt \leq \int_0^x F'(t)dt \leq \int_0^x e^{-t}dt \end{cases} \Rightarrow \int_0^x |F'(t)|dt = |F(x)|-|F(0)| = e^{-x}|f(x)| \leq |\int_0^x e^{-t}dt| = 1-e^{-x}$$

综上所述, 我们得到: $|f(x)| \leq e^x - 1$



第 35 章 September

35.1 Week I

September 1

例题 35.1.

求曲线 $y = \dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}(x > 0)$ 的斜渐近线

解

我们不妨设曲线的斜渐近线方程为: $y = ax + b$, 我们可以得到:

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = e^{\lim\limits_{t \to 0} -\frac{\ln(t+1)}{t}} = e^{-1} \\ b = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = \dfrac{1}{2e} \end{cases}$$

综上所述, 曲线的斜渐近线方程为: $y = \frac{x}{e} + \frac{1}{2e}$

例题 35.2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$$

解

我们利用区间再现公式:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx \\
2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x\cos x)dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin x)dx - \frac{\pi\ln 2}{2} \\
&= I - \frac{\pi\ln 2}{2} \\
I &= \frac{\pi\ln 2}{2}
\end{aligned}
$$

September 2

例题 35.3.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^n x}dx$$

解

原定积分等价于: $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{(1+x^n)(1+x^2)}dx$

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^n)(1+x^2)}dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^n)(1+x^2)}dx \\
2I &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \frac{\pi}{2} \\
I &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

例题 35.4.

设随即变量 (X,Y) 的联合概率密度为: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{21}{4}x^2y & x^2 \le y \le 1 \\ 0 & others \end{cases}$, 求 $P\{Y \ge 0.75|X = 0.5\}$

解

September 3

例题 35.5.

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$, 其中 $g(x)$ 在 $x=0$ 的一个邻域内有二阶导数, 且 $g(0)=0$, $g'(0)=0$, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处

- A. 不连续
- B. 连续, 但 $f'(0)$ 不存在
- C. $f'(0)$ 存在, 但 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续
- D. $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

解

(1). $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续性

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0} g'(x)=0\\ f(0)=0\end{cases}\Rightarrow f(x)\text{在}x=0\text{处连续}$$

(2). $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续性

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{xg'(x)-g(x)}{x^2}, x\neq 0\\ f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x^2}=\dfrac{g''(0)}{2}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xg'(x)-g(x)}{x^2}=\frac{g''(0)}{2}=f'(0)$$

综上所述, 我们得到 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

例题 35.6.

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, $a_n=\int_0^1 f(nx)dx$, 证明: $k>0$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n^2}{n^k}$ 收敛

解

我们由 $a_n=\int_0^1 f(nx)dx\Rightarrow a_n=\dfrac{1}{n}\int_0^n f(x)dx$, 我们可以得到:

$$\begin{cases}a_n^2=\dfrac{[\int_0^n f(x)dx]^2}{n^2}\leq\dfrac{\int_0^n[f(x)]^2dx}{n}(\text{积分形式柯西不等式})\\ b=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n[f(x)]^2dx=\int_0^{+\infty} f^2(x)dx\text{收敛}\end{cases}$$

我们得到:

$$\frac{a_n^2}{n^k}\leq\frac{\int_0^n[f(x)]^2dx}{n^{1+k}}\leq\frac{b}{n^{1+k}}$$

我们已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{b}{n^{1+k}}(k>0,b>0)$ 收敛, 我们根据比较判别法可以得到: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n^2}{n^k}$ 收敛

September 4

例题 35.7.

已知方程 $x^5-5x+k=0$ 有三个不同的实数根, 求 k 的取值范围

解

我们令 $f(x)=x^5-5x+k, f'(x)=5x^4-5=5(x^2+1)(x+1)(x-1)$

$$\begin{cases} x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty),\ f'(x)>0 \\ x\in(-1,1),\ f'(x)<0 \end{cases}$$

我们得到: $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增;$(-1,1)$ 上单调递减;$(1,+\infty)$ 上单调递增.

我们有: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \end{cases}$,$f(x)$ 有三个不同的实数根, 我们需要满足:

$$\begin{cases} f(-1)>0 \\ f(1)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k+4>0 \\ k-4>0 \end{cases} \Rightarrow k\in(-4,4)$$

综上所述, 我们得到 k 的取值范围为 $(-4,4)$.

例题 35.8.

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)}dx$$

解

原定积分可以化为:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty}\frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)}dx \\ 2I &= \int_0^{+\infty}\frac{1+x^n}{(1+x^2)(1+x^n)}dx \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx \\ &= \frac{\pi}{2} \\ I &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

September 5

例题 35.9.

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$$

解

原定积分可以化为:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan\theta)d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta})d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\frac{2}{1+\tan\theta})d\theta \\
2I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2d\theta \\
&= \frac{\pi\ln 2}{4} \\
I &= \frac{\pi\ln 2}{8}
\end{aligned}$$

例题 35.10.

$$\lim_{x\to 0}\int_{\ln(1+x)}^{x} \frac{(1-2t)^{\frac{1}{t}}}{t^2}dt$$

解

我们利用第二积分中值定理可以得到:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\xi}{x} = 1$$

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}(x-\ln(1+x))\frac{(1-2\xi)^{\frac{1}{\xi}}\xi^2}{,} \quad \xi \in (\ln(1+x), x) \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{\xi^2}\lim_{\xi\to 0}(1-2\xi)^{\frac{1}{\xi}} \\
&= \frac{e^{-2}}{2}
\end{aligned}$$

September 6

例题 35.11.

已知 $f(x) = [x]\sin\pi x$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 求 $f'(x)$

解

(1).

$$x \in (n, n+1), (n \in \mathbb{Z}),\ [x] = n$$

我们得到:

$$f'(x) = n\pi\cos(\pi x),\ x \in (n, n+1),\ n \in \mathbb{Z}$$

(2). 当 $x = n,\ n \in \mathbb{Z}$ 时, 我们利用导数定义可以得到:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to n^+} \dfrac{n\sin\pi x}{x-n} \\ \lim\limits_{x \to n^-} \dfrac{(n-1)\sin\pi x}{x-n} \end{cases} \Rightarrow f'(n)\text{不存在}$$

综上所述, 我们得到: $f'(x) = \begin{cases} [x]\cos\pi x,\ x \neq n,\ n \in \mathbb{Z} \\ \text{不存在},\ x = n,\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

例题 35.12.

设函数 $f(x) = ax - b\ln x (a > 0)$ 有两个零点, 求 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围

解

我们首先得到 $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$, 我们有: $f'(x) = \dfrac{ax-b}{x}$.
(1). 当 $b \leq 0$ 时,$f'(x) > 0, f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 至多存在一个零点.
(2). 当 $b > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{b}{a}$.

$$\begin{cases} x \in (0, \frac{b}{a}),\ f'(x) < 0 \\ x \in (\frac{b}{a}, +\infty),\ f'(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x)_{min} = f(\frac{b}{a})$$

我们有:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$$

当且仅当 $f(\dfrac{b}{a}) < 0$ 时,$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个零点.

$$f(\frac{b}{a}) = b(1 - \ln\frac{b}{a}) < 0 \Rightarrow \frac{b}{a} > e$$

综上所述, 我们得到 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围为 $(e, +\infty)$.

September 7

例题 35.13.

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x + \sqrt{1-x^2}} dx$$

解

原定积分可以化为:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta} d\theta \\ 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\cos\theta+\cos^2\theta\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \\ I &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

例题 35.14.

$$\int_0^1 \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}} dx$$

解

原定积分可以化为:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta} d\theta \\ 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \\ I &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

35.2 Week II

September 8

例题 35.15.

$$\lim_{n\to+\infty} \left[1+\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right)\right]^n$$

解

原极限可以化为:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n\to+\infty}\left[1+\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)\right]^n \\ &= e^{\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left[1+\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)\right]} \\ &= e^{\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)} \\ &= e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi n}{\sqrt{1+4n^2}+2n}} \\ &= e^{\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

例题 35.16.

设 $f_n(x)=\tan^n x(n=1,2,\cdots)$, 且曲线 $y=\tan^n x$ 在点 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(x_n,0)$, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n)$

解

我们先求切线方程:

$$\begin{cases} f(x)=\tan^n x \\ f(\frac{\pi}{4})=1 \\ f'(x)=n\tan^{n-1}x\sec^2 x \end{cases} \Rightarrow l:\ y-1=2n(x-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow x_n=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2n}$$

原极限可以化为:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n\to+\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2n}\right) \\ &= e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\tan(\frac{\pi}{4}-x))}{2x}} \\ &= e^{-1} \end{aligned}$$

综上所述, 我们得到: $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n)=e^{-1}$

September 9

例题 35.17.

设 A 是 3 阶实对称矩阵, 且不可逆

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}\cdot A=\begin{bmatrix} 6 & -6 & 3 \\ -12 & -6 & 12 \end{bmatrix}$$

求 A

解

我们利用谱分解定理: $A=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i G_i$, $G_i=e_ie_i^T$

我们将上述方程两边取转置得到:

$$A^T\cdot\begin{pmatrix}2&-2&\\-2&-1&\\&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-12\\-6&-6\\3&12\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}A^T\xi_1=3\xi_1\\A^T\xi_2=6\xi_2\end{cases}$$

我们知道矩阵 A^T 的两个特征值为 $3,6$, 又因为矩阵 A 不可逆, 矩阵 A^T 的三个特征值分别为 $0,3,6$

我们可以得到: $A^T=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i G_i=\begin{pmatrix}4&0&-2\\0&2&-2\\-2&-2&3\end{pmatrix}$

我们有 $A^T=A$, 综上所述, 我们得到: $A=\begin{pmatrix}4&0&-2\\0&2&-2\\-2&-2&3\end{pmatrix}$

例题 35.18.

已知方程 $\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}=k$ 在区间 $(0,1)$ 有实数根, 求 k 的取值范围

解

我们构造辅助函数: $f(x)=\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}$, 我们有:

$$f'(x)=\frac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)},\ x\in(0,1)$$

我们构造辅助函数: $g(x)=2\ln x-\dfrac{x^2-1}{x}$, $x\in(1,2)$

我们有:

$$\begin{cases}g'(x)=\dfrac{-(x-1)^2}{x^2}\le 0\\ g(x)\text{单调递减}\\ g(x)\le g(1)=0\end{cases}\Rightarrow 2\ln t\le\frac{t^2-1}{t},\ t\in(1,2)\Rightarrow \ln^2(1+x)\le\frac{x^2}{1+x}$$

我们得到: $f'(x)\le 0$, $x\in(0,1)\Rightarrow f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减.

我们有:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\dfrac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to1}f(x)=\dfrac{1}{\ln 2}-1\end{cases}$$

综上所述,k 的取值范围为: $(\dfrac{1}{\ln 2}-1,\dfrac{1}{2})$

September 10

例题 35.19.

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$, 则下列关于 $y=\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}$ 的命题正确的个数

- A. 有垂直渐近线
- B. 有水平渐近线
- C. 有斜渐近线
- D. 是有界函数

解

我们可以得到: $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 我们令 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}$
首先 $g(x)$ 在 $x=0$ 处无定义, 我们可以得到:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=1\\ \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=1\end{cases} \Rightarrow g(x)\text{没有垂直渐近线}$$

其次 $g(x)$ 在 ∞ 处水平渐近线:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0\end{cases} \Rightarrow g(x)\text{在}x\Rightarrow-\infty\text{时有水平渐近线}y=0$$

在 $x\Rightarrow+\infty$ 时, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{2x^2}=+\infty$,$g(x)$ 不存在斜渐近线, 且 $g(x)$ 为无界函数.

例题 35.20.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx$$

解

原定积分可以化为:

$$\begin{aligned}I &= -\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}dt\\ &= -I\\ I &= 0\end{aligned}$$

September 11

例题 35.21.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1-x^2+x^4)}{(1+x^2)\ln x}dx$$

解

原定积分可以化为:

$$\begin{aligned}I &= -\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t^4-t^2+1)}{(1+t^2)\ln t}dt+\int_0^{+\infty}\frac{4}{1+t^2}dt\\ &= -I+2\pi\\ I &= \pi\end{aligned}$$

例题 35.22.

已知函数 $f(x)$ 三阶可导, 则下列命题中不是 $(0,f(0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点的必要条件的有:

- A. $\exists\delta>0, f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调下降,$f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加
- B. $\exists\delta>0, x\in(-\delta,\delta),\ f''(-x)=-f''(x)$
- C. $f''(0)=0, f'''(0)\neq 0$

解

拐点是函数凹凸性发生改变的函数点, 由函数 $f(x)$ 三阶可导, 我们可以得到 $f''(x_0)=0$, 且有:

$$\begin{cases} f''(a)\cdot f''(b)<0,\ a\in(x_0-\xi,x_0),\ b\in(x_0,x_0+\xi)\\ f'''(x_0)\text{符号不确定}\\ f(x)=x^3\end{cases}$$

综上所述, 上述三个命题都不正确.

September 12

例题 35.23.

下列命题正确的是:

- A. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=a$, 则 $f'(x_0)=a$
- B. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 不存在, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处不可导
- C. 若 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续, 则在 x_0 的某邻域内 $f'(x)$ 存在
- D. 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导,$g(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导, 则 $f(x)\cdot g(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导

解

重要反例:

(1). 函数在某个点无定义，但是这个点处导数极限存在

$$f(x) = \arctan\frac{1}{x},\ f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

(2). 函数导函数在某点处可导，但是导函数在该点处极限不存在

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x},\ x \neq 0 \\ 0 \end{cases},\ f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x},\ x \neq 0 \\ 0 \end{cases}$$

例题 35.24.

证明不等式和求极限

(1). 证明: $\frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$, $(n \in \mathbb{N}^*)$

(2). 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{n^2+i}{n^2}$

解

(1). 我们构造辅助函数: $f(x) = x - \ln(1+x) - \frac{x^2}{2}$, $x \in (0,1]$

我们有: $f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x} < 0$,$f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减，我们得到: $f(x) < f(x)_{max} = f(0) = 0$

我们得到: $f(x) < 0,\ x \in (0,1] \Rightarrow \frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$, $(n \in \mathbb{N}^*)$

(2). 我们由:

$$\begin{cases} \ln(1+x) < x,\ x \in (0,1] \\ \ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2},\ x \in (0,1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(1+\frac{i}{n^2}) < \frac{i}{n^2} \\ \ln(1+\frac{i}{n^2}) > \frac{i}{n^2} - \frac{i^2}{2n^4} \end{cases}$$

我们可以得到:

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{n^2+i}{n^2} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\ln(1+\frac{i}{n^2})}$$

$$e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\frac{i}{n^2}-\frac{i^2}{2n^4}} \le I \le e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\frac{i}{n^2}}$$

$$e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4}} \le I \le e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n}}$$

左边 = 右边 = $e^{\frac{1}{2}}$，我们由夹逼定理可以得到原式子 $I = e^{\frac{1}{2}}$

September 13

例题 35.25.

设区域 $D_1 : \{(x,y)|0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$,$D_2 : \{(x,y)|x^2+y^2 \le r^2,\ (r > 0)\}$，比较 $I = \iint\limits_{D_1}(\cos x^2 + \sin y^2)\,dxdy$, $J = \iint\limits_{D_1}\sqrt{2}dxdy$, $K = \lim\limits_{r\to0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{D_2}e^{x^2-y^2}\cos(x+y)dxdy$ 大小

1.

解

我们首先可以得到: $J=\sqrt{2}$

我们根据轮换对称性:

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{D_1} \left(\cos x^2 + \sin y^2\right) dxdy \\ &= \iint\limits_{D_1} \left(\cos x^2 + \sin x^2\right) dxdy \\ &= \iint\limits_{D_1} \left(\sqrt{2}\sin(x^2+\frac{\pi}{4})\right) dxdy \\ &\in (1,\sqrt{2}) \end{aligned}$$

我们对于 K, 我们根据积分中值定理可以得到:

$$\begin{aligned} K &= \lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2} e^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta)\iint\limits_{D_2} 1dxdy \\ &= \lim_{r\to 0} e^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta) \\ &= 1 \end{aligned}$$

综上所述, 我们得到: $\begin{cases} I\in(1,\sqrt{2}) \\ J=\sqrt{2} \\ K=1 \end{cases} \Rightarrow K<I<J$

例题 35.26.

证明: 若在区间 I 上 $f^{(n)}(x)\neq 0$, 则方程 $f(x)=0$ 在 I 上最多 n 个实数根

解

我们利用反证法, 来证明: 方程 $f(x)=0$ 在区间 I 上有超过 n 个实数根, 则 $f^{(n)}(x)=0$ 在区间 I 上有解.

我们不妨假设 $\exists x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}\in I$, 且满足 $f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_n)=f(x_{n+1})=0$.

我们对 $f(x)$ 在区间 $(x_1,x_2),(x_2,x_3),\cdots,(x_n,x_{n+1})$ 上使用罗尔定理:

$$\begin{cases} \exists\xi_1\in(x_1,x_2),\ s.t. f'(\xi_1)=0 \\ \exists\xi_2\in(x_2,x_3),\ s.t. f'(\xi_2)=0 \\ \cdots\cdots \\ \exists\xi_n\in(x_n,x_{n+1}),\ s.t. f'(\xi_n)=0 \end{cases}$$

我们以此类推, 我们可以得到: $\exists\eta_1,\eta_2\in I,\ s.t. f^{(n-1)}(x)=0$, 我们再次使用罗尔定理, 可以得到: $\exists\mu\in(\eta_1,\eta_2),\ s.t. f^{(n)}(\mu)=0$

综上所述, 原命题的逆否命题成立, 原命题成立.

September 14

例题 35.27.

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $(0,+\infty)$ 上 $f'(x)>0$, 下列命题正确的是:

- A. 若 $f(0)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在
- B. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2024$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=2024$
- C. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=1$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$
- D. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=1$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt=\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在

解

(A). $f(x)=\sqrt{x}$

(B). $f(x)=2024x+\sin x,\ f'(x)=2024+\cos x, \lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$不存在

(C). $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(x)dt}{x}$

我们有:

$$\int_0^x f(t)dt<\int_0^x f(x)dt<\int_x^{2x} f(t)dt\Rightarrow\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}<\frac{\int_0^x f(x)dt}{x}<\frac{\int_x^{2x} f(t)dt}{x}$$

我们有: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^{2x} f(t)dt}{x}=2\end{cases}$

我们可以得到: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

(D). 我们假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在, 我们可以得到:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\lim_{x\to+\infty}f(x)\neq1$$

例题 35.28.

讨论 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x^m|\ln x|^n}{1+x^k}dx$ 的敛散性

解

我们可知函数可能的暇点为 $x=0,\ x=1,\ x=+\infty$

(1). $x=0$

当 $k\geq0$ 时,$1+x^k$ 非零, 原反常积分敛散性等价于: $\int_0^{\frac{1}{2}}x^m|\ln x|^n dx$

$$\begin{cases}m>-1,\text{反常积分收敛}\\ m=-1,n<-1\text{反常积分收敛}\end{cases}$$

当 $k<0$ 时, 原反常积分敛散性等价于: $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{m-k}|\ln x|^n dx$

$$\begin{cases} m-k>-1, \text{反常积分收敛} \\ m-k=-1, n<-1, \text{反常积分收敛} \end{cases}$$

(2). $x=1$

原反常积分敛散性等价于: $\int_{\frac{1}{2}}^1 |\ln x|^n dx$ 和 $\int_1^2 |\ln x|^n dx$ 收敛 $\Rightarrow n>-1$

(3).$x=+\infty$

当 $k\geq 0$ 时, 原反常积分敛散性等价于: $\int_2^{+\infty} x^{m-k}|\ln x|^n dx$

$$\begin{cases} m-k<-1, \text{反常积分收敛} \\ m-k=-1, n<-1, \text{反常积分收敛} \end{cases}$$

当 $k<0$ 时, 原反常积分敛散性等价于: $\int_2^{+\infty} x^{m}|\ln x|^n dx$

$$\begin{cases} m<-1, \text{反常积分收敛} \\ m=-1, n<-1, \text{反常积分收敛} \end{cases}$$

综上所述, 我们得到: $\begin{cases} n>-1 \\ k<0, k-1<m<-1 \quad \text{时, 原反常积分收敛} \\ k>0, -1<m<k-1 \end{cases}$

35.3 Week III

September 15

例题 35.29.

函数 $y=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$, 下列说法正确的是:

- A. 当 n 无论为偶数还是奇数时, 函数都取极值
- B. 当 n 无论为偶数还是奇数时, 函数都不取极值
- C. 当 n 为偶数时, 函数取极值; 当 n 为奇数时, 函数不取极值
- D. 当 n 为偶数时, 函数不取极值; 当 n 为奇数时, 函数取极值

解

我们对原函数求导, 可以得到:

$$f'(x)=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}$$

(1). 当 n 为偶数时,$f'(x)\leq 0, f(x)$ 没有极值点

(2). 当 n 为奇数时,$x<0$ 时,$f'(x)>0$;$x>0$ 时,$f'(x)<0, f(x)$ 在 $x=0$ 处取极值.

例题 35.30.

设 $f(x)$ 连续, $g(x)=f(x)\cdot\int_0^x f(t)dt$ 单调不增, 证明: $f(x)\equiv 0$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=\frac{1}{2}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2$

我们有:

$$\begin{cases} F(0)=0 \\ F'(x)=f(x)\int_0^x f(t)dt\text{单调不增} \\ F'(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,0), F'(x)\geq 0 \\ x\in(0,+\infty), F'(x)\leq 0 \end{cases} \Rightarrow F(x)\leq F(0)=0$$

我们有: $F(x)=\frac{1}{2}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2\geq 0\Rightarrow F(x)=0\Rightarrow f(x)\equiv 0$

综上所述, 我们得到: $f(x)\equiv 0$

September 16

例题 35.31.

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导, $f''(x)\neq 0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{xf'(x)}=\alpha>0$, 且 $\exists x_0\in\mathbb{R}$, $s.t.\ f(x_0)<0$, 证明: 方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上恰有两个实数根

解

我们可以得到:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\dfrac{1}{\alpha}>0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\dfrac{1}{\alpha}<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists x_1\in(0,+\infty), f(x_1)>0 \\ \exists x_2\in(-\infty,0), f(x_2)>0 \end{cases}$$

我们由 $f''(x)\neq 0$, 且 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)>0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)<0 \end{cases} \Rightarrow f''(x)>0$

我们可以得到 $f'(x)$ 单调递增,$\exists x_3\in(-\infty,+\infty)$, $s.t. f'(x_3)=0$.

我们可以得到 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_3)$ 上单调递减,$(x_3,+\infty)$ 上单调递增, 且 $\exists x_0, s.t. f(x_0)<0$.

我们根据单调性可知 $f(x)$ 至多两个零点, 根据零点定理可知 $(-\infty,x_0)$ 和 $(x_0,+\infty)$ 上都有一个零点, 我们得到 $f(x)$ 有且仅有两个零点.

综上所述, 我们得到: 方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上恰有两个实数根

例题 35.32.

讨论 $\int_0^{+\infty}\dfrac{(1+x^p)\ln|\ln x|}{x^q}dx$ 的敛散性

解

我们可以找到函数可能的暇点为 $x=0, x=1, x=+\infty$

(1). $x=0$

当 $p\geq 0$ 时,$1+x^p$ 非零, 原反常积分敛散性等价于: $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln|\ln x|}{x^q}dx$

$$\begin{cases} q<1, \text{反常积分收敛} \\ q=1, n<-1\text{反常积分发散} \end{cases}$$

当 $p<0$ 时, 原反常积分敛散性等价于: $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln|\ln x|}{x^{q-p}}dx$

$$\begin{cases} q-p<1, \text{反常积分收敛} \\ q-p=1, \text{反常积分发散} \end{cases}$$

(2). $x=1$

原反常积分敛散性等价于: $\int_{\frac{1}{2}}^1\ln|\ln x|dx$ 和 $\int_1^2\ln|\ln x|dx$ 收敛

(3).$x=+\infty$

当 $p\leq 0$ 时, 原反常积分敛散性等价于: $\int_2^{+\infty}\frac{\ln|\ln x|}{x^q}dx$

$$\begin{cases} q>1, \text{反常积分收敛} \\ q=1,, \text{反常积分发散} \end{cases}$$

当 $p>0$ 时, 原反常积分敛散性等价于: $\int_2^{+\infty}\frac{\ln|\ln x|}{x^{q-p}}dx$

$$\begin{cases} q-p>1, \text{反常积分收敛} \\ q-p=1, \text{反常积分发散} \end{cases}$$

综上所述, 我们得到, 原反常积分一定发散.

September 17

例题 35.33.

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内可导,$g(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=0$, $f'(x)=\sin^2 x+\int_0^x g(x-t)dt$, 则下列命题正确的是:

- A. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点
- B. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点
- C. $(0,f(0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点
- D. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0,f(0))$ 不是 $y=f(x)$ 的拐点

解

我们首先可以得到: $g(0)=0, g'(0)=0$, 我们有:

$$\begin{cases} f''(x)=2\sin x\cos x+g(x) \\ f''(0)=0 \\ f'''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x\cos x+g(x)}{x}=2 \end{cases}$$

我们可以得到:

$$\begin{cases} x \in (-\xi, 0), f''(x) < 0 \\ x \in (0, \xi), f''(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)\text{在}(-\xi,0)\text{单调递减}; f'(x)\text{在}(0,\xi)\text{单调递增} \Rightarrow f'(x) \geq f'(0) = 0$$

我们有: $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点;$(0, f(0))$ 是 $f(x)$ 的拐点.

例题 35.34.

设 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 是来自正态总体 X 的简单随机样本,$Y_1 = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_6}{6}, Y_2 = \dfrac{X_7 + X_8 + X_9}{3}, S^2 = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{9}(X_i - Y_2)^2, Z = \dfrac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S}$, 证明: $Z \sim t(2)$

解

September 18

例题 35.35.

设函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上可导, 且 $f'(x) > f(x) > 0$, 下列命题正确的是:

- A. $\dfrac{f(-2)}{f(-1)} > 1$
- B. $\dfrac{f(0)}{f(-1)} > e$
- C. $\dfrac{f(1)}{f(-1)} < e^2$
- D. $\dfrac{f(2)}{f(-1)} < e^3$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = \dfrac{f(x)}{e^x}$

我们有: $F'(x) = \dfrac{f'(x) - f(x)}{e^x} > 0$,$F(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上单调递增.

$$\begin{cases} F(-1) > F(-2) \\ F(0) > F(-1) \\ F(1) > F(-1) \\ F(2) > F(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{f(-2)}{f(-1)} < \dfrac{1}{e} \\ \dfrac{f(0)}{f(-1)} > e \\ \dfrac{f(1)}{f(-1)} > e^2 \\ \dfrac{f(2)}{f(-1)} > e^3 \end{cases}$$

例题 35.36.

$D = \left\{(p, q) \middle| \int_0^{+\infty} \dfrac{x^p |x-1|^q}{(x+1)\ln x \ln(x+2)} dx \quad \text{收敛}\right\}$, 求 D 绕 q 轴旋转一周扫过的体积

解

我们可以找到函数可能的瑕点为 $x=0, x=1, x=+\infty$

(1). $x=0$

原反常积分敛散性等价于: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^p}{\ln x} dx$

$$\begin{cases} p > -1, \text{反常积分收敛} \\ p \leq -1, \text{反常积分发散} \end{cases}$$

(2). $x=1$

原反常积分敛散性等价于: $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{|x-1|^q}{\ln x} dx$ 和 $\int_1^2 \frac{|x-1|^q}{\ln x} dx$

$$\begin{cases} q-1 > -1, \text{反常积分收敛} \\ q-1 \leq -1, \text{反常积分发散} \end{cases}$$

(3).$x=+\infty$

原反常积分敛散性等价于: $\int_2^{+\infty} \frac{x^{p+q-1}}{\ln^2 x} dx$

$$\begin{cases} p+q-1 < -1, \text{反常积分收敛} \\ p+q-1 = -1, \text{反常积分收敛} \\ p+q-1 > -1, \text{反常积分发散} \end{cases}$$

综上所述, 我们得到 $\begin{cases} p > -1 \\ q > 0 \\ p+q \leq 0 \end{cases}$ 时, 原反常积分收敛.

我们可以得到: $D = \{(p,q) | -1 < p < 0, 0 < q < -p\}$, 我们可以得到:

$$V = \frac{2\pi}{3}$$

September 19

例题 35.37.

设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 下列哪些命题是 $\int_0^x f(t)dt$ 是以 T 为周期的周期函数的充分条件:

- A. $\int_0^T [f(t) - f(-t)]\, dt = 0$
- B. $f(-x) = f(x)$
- C. $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ 收敛

解

我们设 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 已知函数 $f(x)$ 为周期函数,$F(x)$ 为在周期函数等价于:

$$F(x)\text{为周期函数} \Leftrightarrow \int_0^T f(x)dx = 0$$

(1). $f(x) = 1, F(x) = x$

(2). $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x)\text{为奇函数} \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx = 0$

(3). $\int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}\int_{iT}^{(i+1)T} f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} nA$收敛

我们得到: $\int_0^T f(x)dx = A = 0$

例题 35.38.

设随机变量 X 和 Y 独立同分布,X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$, 令 $Z = \sqrt{X^2+Y^2}$, 求 $D(Z)$

解

September 20

例题 35.39.

已知常数 $k \geq \ln 2 - 1$, 证明: $(x-1)(x-\ln^2 x + 2k\ln x - 1) \geq 0$

解

我们构造辅助函数: $f(x) = x - \ln^2 x + 2k\ln x - 1, x > 0$

我们有: $\begin{cases} f'(x) = \dfrac{x - 2\ln x + 2k}{x} \\ f(1) = 0 \end{cases}$

我们不妨设 $g(x) = x - 2\ln x + 2k$,$g(x)$ 与 $f'(x)$ 同号,$g'(x) = \dfrac{x-2}{x}$

我们可以得到:

$$\begin{cases} x \in (0,2), g'(x) < 0 \\ x \in (2,+\infty), g'(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow g(x)_{min} = g(2) = 2 - 2\ln 2 + 2k \geq 0$$

我们得到: $g(x) \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增

我们得到:

$$\begin{cases} x \in (0,1), f(x) < 0, x-1 < 0 \\ x \in (1,+\infty), f(x) > 0, x-1 > 0 \\ x = 1, f(x) = 0, x-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x-1)f(x) \geq 0$$

综上所述, 我们得到: $(x-1)(x-\ln^2 x + 2k\ln x - 1) \geq 0$

例题 35.40.

求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(n-1)^3}{n(n+1)}x^n$ 的和函数 $S(x)$

解

我们不妨设 $a_n=\dfrac{(n-1)^3}{n(n+1)}$，我们可以得到：

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=1\Rightarrow R=\frac{1}{\rho}$$

我们得到幂级数的收敛区间为 $(-1,1)$，当 $x=\pm1$ 时，原级数发散，因此原级数的收敛域为 $(-1,1)$

我们有：$a_n=\dfrac{(n-1)^3}{n(n+1)}=\dfrac{n^3-3n^3+3n-1}{n^2+n}=n-4+\dfrac{8}{n+1}-\dfrac{1}{n}$

原级数可以等价于：

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n-1)^3}{n(n+1)}x^n &= \sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)x^n-5\sum_{n=1}^{+\infty}x^n+8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\\ &= (\frac{x^2}{1-x})'-\frac{5x}{1-x}+\frac{8}{x}[-\ln(1-x)-x]+\ln(1-x)\\ &= \frac{1}{(1-x)^2}-9-\frac{5x}{1-x}-\frac{8\ln(1-x)}{x}+\ln(1-x)\end{aligned}$$

综上所述，$S(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}-9-\dfrac{5x}{1-x}-\dfrac{8\ln(1-x)}{x}+\ln(1-x),\ x\in(-1,1)$

September 21

例题 35.41.

设 $f(x)=x[\frac{1}{x}]$，$[\frac{1}{x}]$ 表示不超过 $\frac{1}{x}$ 的最大整数，求 $f(x)$ 的间断点并判断其类型

解

我们发现 $f(x)$ 可能的间断点在 $x=0,\pm\frac{1}{n}$，且 $x-1<[x]\le x\Rightarrow\frac{1}{x}-1<[\frac{1}{x}]<\frac{1}{x}$

(1). 当在 $x=0$ 处附近，$f(x)$ 在 $x=0$ 处无定义

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\in(1-x,1)\\ \lim\limits_{x\to0^-}f(x)\in(1,1-x)\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^-}f(x)=1$$

$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点

(2). 当 $x=\dfrac{1}{n}$ 处附近：

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}^+}f(x)=1-\frac{1}{n}\\ \lim\limits_{x\to\frac{1}{n}^-}f(x)=1\end{cases}\Rightarrow f(x)在x=\frac{1}{n}跳跃间断$$

(3). 当 $x = -\frac{1}{n}$ 处附近:

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\frac{1}{n}^+} f(x) = 1 + \frac{1}{n} \\ \lim\limits_{x\to -\frac{1}{n}^-} f(x) = 1\end{array}\right. \Rightarrow f(x)\text{在}x = \frac{1}{n}\text{跳跃间断}$$

综上所述,$f(x)$ 有且仅有一个可去间断点 $x = 0$, 有无数多个跳跃间断点 $x = \pm\frac{1}{n}$

例题 35.42.

设 $f(x, y)$ 在全平面上有连续的偏导数, 且 $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, 证明: $f(x, y)$ 为常数

解

我们构造辅助函数: $g(t) = f(tx, ty)$, 我们有:

$$\left\{\begin{array}{l}g'(t) = xf_1(tx, ty) + yf_2(tx, ty) \\ tg'(t) = txf_1(tx, ty) + tyf_2(tx, ty) \quad tg'(t) = 0 \\ x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0\end{array}\right.$$

(1). 当 $t \neq 0$, 我们可以得到: $g'(t) = 0 \Rightarrow g(t) = C$

(2). 当 $t \neq 0$ 时, 我们由 $f(x, y)$ 在全平面上有连续的偏导数, 可以得到: $g'(t)$ 连续 $\Rightarrow g'(0) = 0$

综上所述,$g'(t) = 0 \Rightarrow g(t) = C \Rightarrow g(0) = g(1) \Rightarrow f(0, 0) = f(x, y) = C$,$f(x, y)$ 为常数.

35.4 Week IV

September 22

例题 35.43.

设函数 $f(x)$ 二阶可导, $f(0) = 1, f'(0) = 0, \forall x \geq 0, f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) \geq 0$, 证明:

$$f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x} (x \geq 0)$$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = e^{-3x}(f'(x) - 2f(x))$, 我们有:

$$\left\{\begin{array}{l}F'(x) = e^{-3x}(f''(x) - 5f'(x) + 6f(x)) \geq 0, x \geq 0 \\ F(x)\text{在}(0, +\infty)\text{上单调递增} \\ F(x) \geq F(0) = -2\end{array}\right. \Rightarrow f'(x) - 2f(x) + 2e^{3x} \geq 0$$

我们构造辅助函数: $G(x)=e^{-2x}(f(x)+2e^{3x}),x\geq 0$, 我们有:

$$\begin{cases} G'(x)=e^{-2x}(f'(x)-2f(x)+2e^{3x}),x\geq 0 \\ G'(x)\geq 0 \\ G(x)\geq G(0)=3 \end{cases} \Rightarrow f(x)\geq 3e^{2x}-2e^{3x}$$

综上所述, 我们证明: $f(x)\geq 3e^{2x}-2e^{3x}$, $(x\geq 0)$

例题 35.44.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{(2n+1)!!(n+1)}$$

解

我们构造幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)}x^{2n+2}$, 我们设该幂级数的和函数为 $S(x)$

我们可以得到原和式为 $2S(\frac{1}{\sqrt{2}})$, 我们需要求出幂级数的和函数 $S(x)$

我们不妨设 $a_n=\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)}$, 我们可以得到:

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=1\Rightarrow R^2=1$$

我们可以得到幂级数的收敛区间为 $(-1,1)$, 我们对幂级数逐项求导可以得到:

$$S'(x)=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$$

我们不妨设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$, 我们有: $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}$

我们对 $f'(x)$ 稍作变形:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n} \\ &= x\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}\right]' \\ &= x\left[x\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}\right)\right]' \\ &= x\left[xf(x)+x^2\right]' \end{aligned}$$

我们得到: $f'(x)-\dfrac{x}{1-x^2}f(x)=\dfrac{2x^2}{1-x^2}$

我们可以解得: $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-x+C, f(0)=0\Rightarrow C=0$

我们得到: $S'(x)=\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-2x, S(0)=0\Rightarrow S(x)=(\arcsin x)^2-x^2$

我们得到原和式为: $I=2S(\frac{1}{\sqrt{2}})=\dfrac{\pi^2}{8}-1$

September 23

例题 35.45.

$$\iint\limits_D \left[x(1-y^3)+y(1+x^3)\right]dxdy$$

其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 2x+2y\}$

解

我们根据轮换对称性, 可以得到:

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D \left[x(1-y^3)+y(1+x^3)\right]dxdy \\ &= \iint\limits_D \left[y(1-x^3)+x(1+y^3)\right]dxdy \\ &= \iint\limits_D (x+y)dxdy \\ &= \iint\limits_D (x-1+y-1)dxdy+\iint\limits_D 2dxdy \\ &= 2S_D \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

例题 35.46.

设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin nx dx$, 证明:

$$a_n=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}(n\ge 1)$$

解

我们可以得到:

$$\begin{cases} a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin nx dx \\ a_{n-1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1} x\sin(n-1)x dx \end{cases} \Rightarrow a_{n-1}=a_n-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\sin x\cos nx dx$$

我们利用分部积分对 a_n 进行简化:

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx dx \\ &= -\frac{1}{n}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x d\cos nx\right) \\ &= -\frac{1}{n}\left(\cos^n x\cos nx|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\sin x\cos nx dx\right) \\ &= \frac{1}{n} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin x \cos nx dx \end{aligned}$$

我们可以得到:

$$a_n = \frac{1}{n} + a_{n-1} - a_n \Rightarrow a_n - \frac{a_{n-1}}{2} = \frac{1}{2n}$$

我们有: $a_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x dx = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2} \\ a_n - \dfrac{a_{n-1}}{2} = \dfrac{1}{2n} \end{cases} \Rightarrow \text{数列}\{a_n\}\text{唯一}$$

我们不妨假设: $a_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2^k}{k}$, 下面用数学归纳法证明:

(1). 当 $n = 1$ 时,$a_1 = \dfrac{1}{2}$

(2). 当 $n = k$ 时, 我们有: $a_k = \dfrac{1}{2^{k+1}}\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{2^i}{i}$

$$a_{k+1} = \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2}a_k = \frac{2^{k+1}}{2^{k+2}(k+1)} + \frac{1}{2^{k+2}}\sum_{i=1}^{k}\frac{2^i}{i} = \frac{1}{2^{k+2}}\sum_{i=1}^{k+1}\frac{2^i}{i}$$

综上所述, 我们得到: $a_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2^k}{k}$, $(n \geq 1)$

September 24

例题 35.47.

设三元二次型 $f = x^T Ax$ 正定, 其中 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, A 为实对称矩阵, 则下列说法不正确的是:

- A. 仅在 $x = 0$ 处 f 取得最小值
- B. 齐次方程组 $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$ 只有零解

- C. 二阶偏导数矩阵 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{3\times 3} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}$ 是正定矩阵
- D. $\exists \alpha \in \mathbb{R}^3 \neq 0,\ s.t.\ A = \alpha\alpha^T \to f = (\alpha^T x)^2$

解

我们不妨假设 $f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$, 我们可以得到:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(1). 我们由 f 正定, 可以得到: $f \geq 0$, 当且仅当 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 时等号成立.

(2)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3 = 0 \\ 2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 + 2a_{23}x_3 = 0 \\ 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + 2a_{33}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{12} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{13} & 2a_{23} & 2a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2Ax = 0$$

矩阵 A 为正定矩阵 $\Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ 原方程组只有零解.

(3). 我们可以得到:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{3\times 3} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{12} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{13} & 2a_{23} & 2a_{33} \end{pmatrix} = 2A \text{正定}$$

(4)$|A| \neq 0 \Rightarrow rank(A) = 3$, 假设 $A = \alpha\alpha^T$,$rank(A) = 1$ 矛盾!!!

例题 35.48.

证明:

$$\left|\frac{\sin x - \sin y}{x - y} - \cos y\right| \leq \frac{1}{2}\left|x - y\right|(x \neq y)$$

解

我们利用带拉格朗日余项的泰勒公式将 $f(x)=\sin x$ 进行展开:

$$\sin x=\sin y+(x-y)\cos y+\frac{(x-y)^2}{2}\sin\xi,\xi\text{位于}x,y\text{之间}$$

我们可以得到:

$$\begin{aligned}|\frac{\sin x-\sin y}{x-y}-\cos y| &= |\frac{\sin\xi}{2}(x-y)| \\ &\le \frac{1}{2}|x-y|\end{aligned}$$

September 25

例题 35.49.

求幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2+3n+4}{2^n(n+1)!}x^{2n}$ 的和函数 $S(x)$

解

我们可以将原级数化为: $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2+3n+4}{(n+1)!}(\frac{x^2}{2})^n$

我们设 $a_n=\frac{n^2+3n+4}{(n+1)!}$, 我们可以得到:

$$a_n=\frac{1}{(n-1)!}+\frac{2}{n!}+\frac{2}{(n+1)!}$$

我们先求出收敛半径:

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=0\Rightarrow R=\infty$$

原级数可以化为:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2+3n+4}{2^n(n+1)!}x^{2n} &= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}(\frac{x^2}{2})^n+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2}{n!}(\frac{x^2}{2})^n+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2}{(n+1)!}(\frac{x^2}{2})^n \\ &= \frac{x^2}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}(\frac{x^2}{2})^n+2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!}(\frac{x^2}{2})^n+\frac{4}{x^2}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n!}(\frac{x^2}{2})^n \\ &= \frac{x^2}{2}\left[e^{\frac{x^2}{2}}-1\right]+2\left[e^{\frac{x^2}{2}}-1-\frac{x^2}{2}\right]+\frac{4}{x^2}\left[e^{\frac{x^2}{2}}-1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}\right] \\ &= \frac{x^2e^{\frac{x^2}{2}}}{2}+2e^{\frac{x^2}{2}}+\frac{4e^{\frac{x^2}{2}}}{x^2}-2x^2-4-\frac{4}{x^2}\end{aligned}$$

综上所述, 我们得到: $S(x)=\begin{cases}\frac{x^2e^{\frac{x^2}{2}}}{2}+2e^{\frac{x^2}{2}}+\frac{4e^{\frac{x^2}{2}}}{x^2}-2x^2-4-\frac{4}{x^2},\ x\neq 0\\ 0,\ x=0\end{cases}$

例题 35.50.

设线性方程组 $Ax=\alpha$ 有解,$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ 无解, 则下列结论正确的是:

- A. $r(B,\beta) = r(B) + 1$
- B. $r\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix} < r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + 1$
- C. $r\left[B^T(B,\beta)\right] > r(B^TB)$
- D. $r\left[(A^T,B^T)\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix}\right] = r\left[(A^T,B^T)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right]$

解

(1). 方程组 $Ax=\alpha$ 与 $Bx=\beta$ 无公共解,$r(B,\beta)$ 和 $r(B)+1$ 可能相等, 也可能不等

(2). 方程组 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ 无解 $\Rightarrow r\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + 1$

(3). $\begin{cases} r\left[B^T(B,\beta)\right] \le r(B^T) \\ r(B^T) = r(B) = r(BB^T) = r(B^TB) \\ r\left[B^T(B,\beta)\right] = r(B^TB, B^T\beta) \ge r(B^TB) \end{cases} \Rightarrow r\left[B^T(B,\beta)\right] = r(B^TB)$

(4).

$$\begin{cases} r\left[(A^T,B^T)\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix}\right] \ge r\left[(A^T,B^T)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right] \\ r\left[(A^T,B^T)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right] = r(A^T,B^T) \\ r(A^T,B^T) \ge r\left[(A^T,B^T)\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix}\right] \end{cases} \Rightarrow r\left[(A^T,B^T)\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix}\right] = r\left[(A^T,B^T)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right]$$

September 26

例题 35.51.

已知 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^{\ln(3\cos x)} - 3^{\ln x}}{x^k \ln x} = c(c \neq 0)$, 求 c, k

解

原极限可以化为:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to0^+}\frac{x^{\ln(3\cos x)}-3^{\ln x}}{x^k\ln x}\\ &= \lim_{x\to0^+}\frac{e^{\ln x\ln(3\cos x)}-e^{\ln3\ln x}}{x^k\ln x}\\ &= \lim_{x\to0^+}\frac{e^{\ln3\ln x}[e^{\ln(\cos x)\ln x}-1]}{x^k\ln x}\\ &= \lim_{x\to0^+}\frac{x^{\ln3}[\ln x\ln(\cos x)]}{x^k\ln x}\\ &= \lim_{x\to0^+}\frac{-x^{2+\ln3}}{2x^k}\\ &= c \end{aligned}$$

我们可以得到: $\begin{cases} k=2+\ln3\\ c=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

例题 35.52.

设 $f(x,y)$ 在 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le1\}$ 内具有连续的偏导数, 且在边界上取值为 0, 证明:

$$f(0,0)=\lim_{\xi\to0^+}\frac{-1}{2\pi}\iint_{D_1}\frac{x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}}{x^2+y^2}dxdy$$

其中 $(D_1=\{(x,y)|\xi^2\le x^2+y^2\le1\})$

解

我们利用极坐标代换:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\Rightarrow f(x,y)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

我们得到: $r\dfrac{\partial f}{\partial r}=x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}$

原极限可以化为:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\xi\to0^+}\frac{-1}{2\pi}\iint_{D_1}\frac{\partial f}{\partial r}drd\theta\\ &= \lim_{\xi\to0^+}\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_\xi^1\frac{\partial f}{\partial r}dr\\ &= \lim_{\xi\to0^+}\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(\cos\theta,\sin\theta)-f(\xi\cos\theta,\xi\sin\theta)]d\theta\\ &= \lim_{\xi\to0^+}\frac{-1}{2\pi}(-2\pi)f(\xi\cos\alpha,\xi\sin\alpha),\alpha\in(0,2\pi)(\text{积分中值定理})\\ &= f(0,0) \end{aligned}$$

September 27

例题 35.53.

设 $f(x)$ 二阶可导, $f(x) > 0, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x} = 1$, 且 $f(x)f''(x) > [f'(x)]^2$, 下列命题一定成立的是:

- A. $e^{-x}f(x) \geq 1$
- B. $e^{-x}f(x) < 1$
- C. $\dfrac{\ln f(x)}{x} < 1$
- D. $\dfrac{\ln f(x)}{x} > 1$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} = 1 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$$ 我们构造辅助函数: $F(x) = \ln f(x)$, 我们有:

$$\begin{cases} F'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \\ F''(x) = \dfrac{f''(x)f(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2} > 0 \\ F(0) = 0 \\ F'(0) = 1 \end{cases}$$

我们将 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处进行泰勒展开得到:

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(\xi)}{2}x^2,\ F''(x) > 0 \Rightarrow F(x) \geq x \Rightarrow e^{-x}f(x) \geq 1$$

例题 35.54.

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^3x^n$ 的和函数 $S(x)$

解

首先求收敛域, 不妨设 $a_n = n^3$, 我们有:

$$\rho = \lim_{n\to+\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 1 \Rightarrow R = 1$$

当 $x = \pm 1$ 时, 原幂级数发散, 因此幂级数的收敛域为 $(-1, 1)$

我们已知幂级数: $G(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^n = \dfrac{x}{1-x}, x \in (-1, 1)$

我们可以得到:

$$\begin{cases} G'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \dfrac{1}{(x-1)^2} \\ xG'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^n = \dfrac{x}{(x-1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [xG'(x)]' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2x^{n-1} = \dfrac{1+x}{(1-x)^3} \\ x[xG'(x)]' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2x^n = \dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \{x[xG'(x)]'\}' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^3x^{n-1} = \\ S(x) = x\{x[xG'(x)]'\}' = \dfrac{x^3 +}{(x} \end{cases}$$

综上所述, 原幂级数的和函数 $S(x)=\dfrac{x^3+4x^2+x}{(x-1)^4}$

September 28

例题 35.55.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x+2)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+\sin x}}\right]$$

解

原极限可化为:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to+\infty}2(x+2)^{\frac{1}{x}}+\lim_{x\to+\infty}x\left[(x+2)^{\frac{1}{x}}-x^{\frac{1}{x+\sin x}}\right]\\
&= 2+\lim_{x\to+\infty}x\left[e^{\frac{\ln(x+2)}{x}}-e^{\frac{\ln x}{x+\sin x}}\right]\\
&= 2+\lim_{x\to+\infty}e^{\xi}x[\frac{\ln(x+2)}{x}-\frac{\ln x}{x+\sin x}](\text{拉格朗日中值定理})\\
&= 2
\end{aligned}$$

例题 35.56.

设 A 为 n 阶方阵, β 为 n 维非零列向量, 且 $r\begin{pmatrix}A^T\\ \beta^T\end{pmatrix}<r\begin{pmatrix}A^T & 0\\ \beta^T & 1\end{pmatrix}$, 下列说法正确的是:

- A. $\begin{pmatrix}A & \beta\\ \beta^T & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0$ 必有非零解
- B. $\begin{pmatrix}A & \beta\\ \beta^T & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0$ 只有零解
- C. 方程组 $Ax=\beta$ 必无解
- D. 方程组 $Ax=\beta$ 必有解

解

$$\begin{pmatrix}A & \beta\\ \beta^T & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0\Rightarrow(A,\beta)v=0$$

我们由: $r\begin{pmatrix}A^T\\ \beta^T\end{pmatrix}<r\begin{pmatrix}A^T & 0\\ \beta^T & 1\end{pmatrix}$ 得到:

(1). 当 $r\begin{pmatrix}A^T & 0\\ \beta^T & 1\end{pmatrix}=n+1$ 时,$(A,\beta)v=0$ 只有零解 $\Rightarrow\begin{pmatrix}A & \beta\\ \beta^T & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0$ 只有零解

(2). 当 $r\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix} < n+1$ 时,$\begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ 必有非零解

以上两种情况我们都有: $r\begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} < r\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} + 1 \Rightarrow r(A, \beta) = r(A)$, 我们可以得到: 方程组 $Ax = \beta$ 一定有解

September 29

例题 35.57.

设 $X \sim N(0,1)$, 求 $E(X^4e^X)$

解

例题 35.58.

设 $f(x)$ 为非负连续函数, $x > 0$, $\int_0^x f(x)f(x-t)dt = x^3$, 求 $f(x)$

解

我们不妨设 $F(x) = \int_0^x f(t)dt, F(0) = 0$, 上述条件可化为:

$$\int_0^x f(x)f(x-t)dt = x^3 \Rightarrow f(x)\int_0^x f(t)dt = x^3 \Rightarrow F(x)F'(x) = x^3 \Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$$

$$f(x) = F'(x) = \sqrt{2}x$$

September 30

例题 35.59.

$a_{n+2} = \dfrac{2}{n+2}a_{n+1} + \dfrac{3}{(n+2)(n+1)}a_n (n \geq 0), a_0 = 0, a_1 = 1$, 已知 $a_3 > a_4 > a_5$, 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$

解

我们利用数学归纳法证明 $\{a_n\}(n \geq 3)$ 单调递减:

(1). 当 $n = 3, 4, 5, a_3 > a_4 > a_5$

(2). 假设 $n = k(k \geq 3)$ 时,$a_{k+1} < a_k$, 我们有:

$$a_{k+2} = \frac{2}{k+2}a_{k+1} + \frac{3}{(k+2)(k+1)}a_k < \frac{2}{k+1}a_k + \frac{3}{(k+1)k}a_{k-1} = a_{k+1}$$

我们可以得到 $\{a_n\}(n \geq 3)$ 单调递减,$a_n > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 存在

我们假设 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = A$ 存在, 我们有:

$$A = A\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n+2} + \lim_{n\to+\infty}\frac{3}{(n+2)(n+1)} \Rightarrow A = 0 \Rightarrow \text{收敛域}(-\infty, +\infty)$$

我们可以得到:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = 2(n+1)a_{n+1} + 3a_n \Rightarrow (a_{n+2}x^{n+2})'' = 2(a_{n+1}x^{n+1})' + 3a_nx^n$$

我们得到:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_{n+2}x^{n+2})'' = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(a_{n+1}x^{n+1})' + 3\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$$

我们进一步得到:

$$[S(x)-a_0-a_1x]'' = 2[S(x)-a_0]' + 3S(x) \Rightarrow S''(x) = 2S'(x) + 3S(x), \begin{cases} S(0) = a_0 = 0 \\ S'(0) = a_1 = 1 \end{cases}$$

我们可以得到: $S(x) = \dfrac{e^{3x} - e^{-x}}{4}$

例题 35.60.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x} = 2, \int_0^1 f(x)dx = 1$

(1). 证明: $\exists\xi\in(0,1),\ s.t.\ f'(\xi) = f(\xi) - 2\xi + 2$

(2). 证明: $\exists\eta\in(0,1),\ s.t.\ f''(\eta) = 0$

(3). 证明: $\exists\zeta\in(0,1),\ s.t.\ \int_0^\zeta f(t)dt + \zeta f(\zeta) = 2\zeta$

(4). 证明: $\exists\mu\in(0,1),\ s.t.\ \mu f(\mu) = 2\int_0^\mu f(t)dt$

解

我们由题意可得:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x} = 2 \\ \int_0^1 f(x)dx = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 2 \\ \exists c\in(0,1),\ s.t. f(c) = 1 \end{cases}$$

(1) 我们构造辅助函数: $F(x) = \dfrac{f(x)-2x}{e^x}$, 我们可以得到:

$$\begin{cases} F(0) = 0 \\ \int_0^1[f(x)-2x] = 0 \\ F'(x) = e^{-x}[f'(x) - 2 - f(x) + 2x] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(0) = 0 \\ \exists c\in(0,1),\ s.t. F(c) = 0(\text{积分中值定理}) \end{cases}$$

我们对 $F(x)$ 在 $(0,c)$ 上使用罗尔定理可以得到:

$$\exists\xi\in(0,c)\subset(0,1),\ s.t. F'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = f(\xi) - 2\xi + 2$$

(2). 我们构造辅助函数: $G(x) = f(x) - 2x$, 我们可以得到:

$$\begin{cases} G(0) = 0 \\ G'(0) = 0 \\ \int_0^1 G(x)dx = 0 \Rightarrow \exists a\in(0,1), s.t. G(a) = 0 \end{cases} \Rightarrow G(0) = G(d) = 0$$

我们对 $G(x)$ 在 $(0,a)$ 上使用罗尔定理得到:

$$\exists b\in(0,a),s.t.G'(b)=0$$

我们对 $G'(x)$ 在 $(0,b)$ 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\eta\in(0,b),s.t.G''(\eta)=0\Rightarrow f''(\eta)=0$$

(3). 我们构造辅助函数: $H(x)=x\int_0^x f(t)dt-x^2$, 我们有:

$$\begin{cases} H(0)=H(1)=0 \\ H'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-2x \end{cases}$$

我们对 $H(x)$ 在 $(0,1)$ 上使用罗尔定理可以得到:

$$\exists\zeta\in(0,1),\ s.t.H'(\zeta)=0\Rightarrow\int_0^\zeta f(t)dt+\zeta f(\zeta)=2\zeta$$

(4). 我们构造辅助函数: $P(x)=\begin{cases} \dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^2},\ x\in(0,1] \\ 1,x=0 \end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^+}P(x)=1$

我们可以得到: $P(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,$(0,1)$ 上可导, 我们还可以得到:

$$\begin{cases} P(0)=P(1)=1 \\ P'(x)=\dfrac{xf(x)-2\int_0^x f(t)dt}{x^3} \end{cases}$$

我们对 $P(x)$ 在 $(0,1)$ 上使用罗尔定理可以得到:

$$\exists\mu\in(0,1),\ s.t.P'(\mu)=0\Rightarrow\mu f(\mu)=2\int_0^\mu f(t)dt$$

第 36 章 October

36.1 Week I

October 1

例题 36.1.

设 $I=\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos x^2 dx$, $J=\int_0^{\sqrt{\pi}} \cos x^2 dx$, $K=\int_0^{\pi}\sqrt{x}\cos x dx$, 比较 I,J,K 的大小

解

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos x^2 dx = \frac{\sin x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{\pi}} = 0 \\
J &= \int_0^{\sqrt{\pi}} \cos x^2 dx = \int_0^{\pi} \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} dt > 0 \\
K &= \int_0^{\pi} \sqrt{x}\cos x dx < 0
\end{aligned}
$$

综上所述, 我们可以得到: $K<I<J$

例题 36.2.

已知曲线 $L: y=x^2-1(-1\le x\le 2)$, 方向从 $A(-1,0)$ 到 $B(2,3)$, 求 $\int_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$

解

$$
\begin{aligned}
\int_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} &= \int_{-1}^{2}\frac{x^2+1}{x^2+(x^2-1)^2}dx \\
&= \int_{-1}^{2}\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx \\
&= \int_{-1}^{2}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}-1}dx \\
&= \int_{-1}^{2}\frac{1}{1+(x-\frac{1}{x})^2}d(x-\frac{1}{x}) \\
&= \int_{-1}^{0^-}\frac{1}{1+(x-\frac{1}{x})^2}d(x-\frac{1}{x})+\int_{0^+}^{2}\frac{1}{1+(x-\frac{1}{x})^2}d(x-\frac{1}{x}) \\
&= \arctan(x-\frac{1}{x})|_{x=-1}^{x=0^-}+\arctan(x-\frac{1}{x})|_{x=0^+}^{x=2} \\
&= \arctan\frac{3}{2}+\pi
\end{aligned}
$$

October 2

例题 36.3.

$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\,(x>0)$, 求 $\int f(x)dx$

解

$$
f(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,1]\\ x, & x\in(1,2]\\ \frac{x^2}{2}, & x\in(2,+\infty)\end{cases}\Rightarrow \int f(x)=\begin{cases}x+C, & x\in(0,1]\\ \frac{x^2+1}{2}+C, & x\in(1,2]\\ \frac{x^3+7}{6}+C, & x\in(2,+\infty)\end{cases}
$$

例题 36.4.

$f(x)$ 连续,$f(x+2)-f(x)=\sin x$, $\int_0^2 f(x)dx=0$, 求 $\int_1^3 f(x)dx$

解

$$\begin{aligned}\int_1^3 f(x)dx &= \int_1^3 f(x)dx - \int_0^2 f(x)dx \\ &= \int_2^3 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \\ &= \int_0^1 f(x+2)dx - \int_0^1 f(x)dx \\ &= \int_0^1 [f(x+2)-f(x)]dx \\ &= \int_0^1 \sin x dx \\ &= 1-\cos 1\end{aligned}$$

注

构造辅助函数: $F(x) = \int_x^{x+2} f(t)dt$

$$\begin{cases} F'(x) = f(x+2) - f(x) = \sin x \\ F(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x) = -\cos x + 1 \\ F(1) = \int_1^3 f(x)dx = 1-\cos 1 \end{cases}$$

October 3

例题 36.5.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=1, f(1)=0$, 证明:

(1). $\exists \xi_1, \xi_2 \in (0,1)(\xi_1 \neq \xi_2),\ s.t.\ f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = -2$

(2). $\exists \eta, \zeta \in (0,1)(\eta \neq \zeta),\ s.t.\ f'(\eta)f'(\zeta) = 1$

解

(1). 取 $c = f(\frac{1}{2})$, 我们在 $(0,\frac{1}{2})$ 和 $(\frac{1}{2},1)$ 上分别对 $f(x)$ 使用拉格朗日中值定理:

$$\begin{cases} \exists \xi_1 \in (0,\frac{1}{2}),\ s.t.\ 2(c-1) = f'(\xi_1) \\ \exists \xi_2 \in (\frac{1}{2},1),\ s.t.\ -2c = f'(\xi_2) \end{cases} \Rightarrow f(\xi_1) + f(\xi_2) = -2$$

(2). 构造辅助函数: $F(x) = f(x) - x$

$$\begin{cases} F(0) = f(0) = 1 > 0 \\ F(1) = f(1) - 1 = -1 < 0 \end{cases} \Rightarrow 零点定理: \exists c \in (0,1),\ s.t.\ F(c) = f(c) - c = 0$$

对 $f(x)$ 分别在 $(0,c)$ 和 $(c,1)$ 上使用拉格朗日中值定理:

$$\begin{cases}\exists\eta\in(0,c),\ s.t.\ \dfrac{f(c)-1}{c}=f'(\eta)\\ \exists\zeta\in(c,1),\ s.t.\ \dfrac{-f(c)}{1-c}=f'(\zeta)\end{cases}\Rightarrow f'(\eta)f'(\zeta)=\frac{c-1}{c}\frac{-c}{1-c}=1$$

例题 36.6.

设 $f(x)=\displaystyle\int_{-1}^{x}t\cos t dt, x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 则曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的图形面积为:

- A. $2\int_0^1 x\sin x dx$
- B. $2\int_0^1 x^2\sin x dx$
- C. $2\int_0^1 x\cos x dx$
- D. $2\int_0^1 x^2\cos x dx$

解

$f(x)$ 为偶函数, 且 $f'(x)=x\cos x$, $f(1)=f(-1)=0$

$$\begin{cases}x\in(-\dfrac{\pi}{2},0) & f'(x)<0\\ x\in(0,\dfrac{\pi}{2}) & f'(x)>0\end{cases}\Rightarrow f(x)\text{在}(-\frac{\pi}{2},0)\text{上单调递减, 在}(0,\frac{\pi}{2})\text{上单调递增}$$

$$\begin{aligned}S&=|\int_{-1}^{1}f(x)dx|\\&=-2\int_0^1 f(x)dx\\&=-2[xf(x)]|_{x=-1}^{x=1}+2\int xf'(x)dx\\&=2\int x^2\cos x dx\end{aligned}$$

October 4

例题 36.7.

设 Γ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线, 从 z 轴正向往负向看去为逆时针, 计算积分 $\displaystyle\oint_\Gamma xzdx+xdy+\frac{y^2}{2}dz$

解

我们有:

$$\int_0^{2\pi}\sin^{2k+1}xdx=\int_0^{2\pi}\cos^{2k+1}xdx=0(k=0,1,2,\cdots)$$

$$
令\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \\ z=\sin\theta+\cos\theta \\ \theta\in[0,2\pi] \end{cases} \quad 曲线积分:
$$

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi}\left[\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)d(\cos\theta)+\cos\theta d(\sin\theta)+\frac{\sin^2\theta}{2}d(\sin\theta+\cos\theta)\right] \\
&= \int_0^{2\pi}\cos\theta(\cos^2\theta-1)d\theta+\int_0^{2\pi}(\sin^2\theta-1)\sin\theta+\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos^2\theta)\cos\theta d\theta-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^3\theta d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

例题 36.8.

$$
\int\frac{1}{\sin^3x+\cos^3x}dx
$$

解

$$
\begin{aligned}
I &= \int\frac{1}{(\sin x+\cos x)(\sin^2x+\cos^2x-\sin x\cos x)}dx \\
&= \int\frac{\sin x+\cos x}{(\sin x+\cos x)^2(\sin^2x+\cos^2x-\sin x\cos x)}dx \\
&= \int\frac{d(\sin x-\cos x)}{(1+2\sin x+\cos x)(\sin^2x+\cos^2x-\sin x\cos x)} \\
&= \int\frac{2d(\sin x-\cos x)}{\left[2-(\sin x-\cos x)^2\right]\left[1+(\sin x-\cos x)^2\right]} \\
&= \int\frac{2du}{(2-u^2)(1+u^2)} \\
&= \frac{2}{3}\left[\int\frac{1}{2-u^2}du+\int\frac{1}{1+u^2}du\right] \\
&= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u}\right|+\arctan u\right] \\
&= \frac{1}{3\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sin x-\cos x}{\sqrt{2}-\sin x+\cos x}\right|+\frac{2}{3}\arctan(\sin x-\cos x)+C
\end{aligned}
$$

October 5

例题 36.9.

$F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t dt$, 求 $F(x)$

解

引入: $f(x)=e^{\sin x}\sin x, f(x)$ 为周期函数, 周期 $T=2\pi$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t dt \\ &= \int_x^{0} e^{\sin t}\sin t dt+\int_0^{2\pi} e^{\sin t}\sin t dt+\int_{2\pi}^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t dt \\ &= -\int_0^{x} e^{\sin t}\sin t dt+\int_0^{2\pi} e^{\sin t}\sin t dt+\int_0^{x} e^{\sin t}\sin t dt \\ &= \int_0^{2\pi} e^{\sin t}\sin t dt \\ &= \int_0^{\pi} (e^{\sin x}-e^{-\sin x})\sin x dx>0 \end{aligned}$$

综上所述, $F(x)=C>0$

例题 36.10.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $I=\int_0^1 f(x)dx\neq 0$, 证明:

$$\exists \xi,\eta\in(0,1)(\xi\neq\eta),\ s.t.\ \frac{1}{f(\xi)}+\frac{1}{f(\eta)}=\frac{2}{I}$$

解

构造辅助函数: $F(x)=\int_0^x f(t)dt, F(0)=0, F(1)=I\neq 0$

介值定理:

$$\exists c\in(0,1),\ s.t.\ F(c)=\frac{I}{2}$$

$F(x)$ 在区间 $(0,c)$ 和 $(c,1)$ 上使用拉格朗日中值定理:

$$\begin{cases} \exists \xi\in(0,c),\ s.t.\ \dfrac{F(c)}{c}=F'(\xi)=f(\xi) \\ \exists \eta\in(c,1).\ s.t.\ \dfrac{F(1)-F(c)}{1-c}=F'(\eta)=f(\eta) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{f(\xi)}+\frac{1}{f(\eta)}=\frac{2c}{I}+\frac{2(1-c)}{I}=\frac{I}{2}$$

综上所述, 我们得到: $\exists \xi,\eta\in(0,1)(\xi\neq\eta),\ s.t.\ \dfrac{1}{f(\xi)}+\dfrac{1}{f(\eta)}=\dfrac{2}{I}$

October 6

例题 36.11.

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义, 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内可导, $\lim_{x\to 0} f'(x)$ 存在,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分条件为:

- A $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在
- B $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}$ 存在
- C $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续
- D $\int_0^x f(t)dt$ 在点 $x=0$ 处可导

解

- A $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在 $\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)$ 存在
- B $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}$ 存在 $\Rightarrow \lim_{x\to 0} f'(x)$ 存在
- C
$$\begin{cases}\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)\\ \lim_{x\to 0} f'(x)=k\\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0} f'(x)\end{cases}\Rightarrow f'(0)=\lim_{x\to 0} f'(x)=k$$
- D $\int_0^x f(t)dt$ 在点 $x=0$ 处可导 $\Rightarrow f(0)$ 存在

例题 36.12.

$$\int x\arctan x\cdot\ln(1+x^2)dx$$

解

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int \arctan x\cdot\ln(1+x^2)d(x^2+1)\\
&= \frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\int(x^2+1)\left[\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}+\frac{2x\arctan x}{1+x^2}\right]dx\\
&= \frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\int\ln(x^2+1)dx-\int x\arctan x dx\\
&= \frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}x\ln(x^2+1)+\int\frac{x^2}{1+x^2}dx\\
&+ \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx-\frac{1}{2}x^2\arctan x\\
&= \frac{x^2+1}{2}\arctan x\ln(x^2+1)-\frac{x}{2}\ln(x^2+1)-\frac{x^2}{2}\arctan x+\frac{2}{2}(x-\arctan x)+C
\end{aligned}$$

October 7

例题 36.13.

设 $\Gamma=\begin{cases}x=2\sqrt{1-y^2}\\ z=x+y\end{cases}$，从 z 轴正向往负向看去为逆时针，计算曲线积分 $\int_{\Gamma}\frac{ydx+zdy+xdz}{x^2+y^2+z^2}$

解

令 $\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y=\sin\theta\\ z=\sin\theta+2\cos\theta\\ \theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\end{cases}$ 曲线积分:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta d(2\cos\theta)+(2\cos\theta+\sin\theta)d(\sin\theta)+2\cos\theta d(2\cos\theta+\sin\theta)}{4\cos^2\theta+\sin^2\theta+(2\cos\theta+\sin\theta)^2}\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2+6\cos 2\theta-3\sin 2\theta}{3\cos 2\theta+2\sin\theta+5}d\theta\\
&= \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2+6\cos x-3\sin x}{3\cos x+2\sin x+5}dx\\
&= \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{A(3\cos x+2\sin x+5)+B(2\cos x-3\sin x)}{3\cos x+2\sin x+5}dx\\
&= \frac{1}{4}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{12}{13}dx+\frac{11}{13}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2\cos x-3\sin x}{3\cos x+2\sin x+5}-\frac{34}{13}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{3\cos x+2\sin x+5}dx\right]\\
&= \frac{6}{13}\pi+0-\frac{17}{26}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{3\cos x+2\sin x+5}dx\\
&= \frac{6}{13}\pi-\frac{17}{26}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(t+1)^2+3}dt\ (t=\tan\frac{x}{2})\\
&= \frac{(36-17\sqrt{3})\pi}{78}
\end{aligned}$$

例题 36.14.

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是以 T 为最小正周期的连续奇函数, 下列函数中不是周期函数的个数:

- A. $\int_a^x f(t)dt$
- B. $\int_{-x}^a f(t)dt$
- C. $\int_{-x}^x tf(t)dt$
- D. $\int_{-x}^x t^2f(t)dt$

解

$$f(x) \text{ 是周期函数, 且为奇函数 } \begin{cases} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx = 0 \\ \int_0^T f(t)dt = \int_x^{x+T} f(t)dt \end{cases}$$

- A. $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

$$\begin{cases} F(x+T) = \int_a^{x+T} f(t)dt \\ F(x+T) - F(x) = \int_x^{x+T} f(t)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx = 0 \end{cases}$$

- B. $F(x) = \int_{-x}^a f(t)dt$

$$\begin{cases} F(x+T) = \int_{-x-T}^{a} f(t)dt \\ F(x+T) - F(x) = \int_{-x-T}^{-x} f(t)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx = 0 \end{cases}$$

- C. $F(x) = \int_{-x}^x tf(t)dt$

$$\begin{cases} F(x+T) = \int_{-x-T}^{x+T} tf(t)dt \\ F(x+T) - F(x) = 2\int_x^{x+T} tf(t)dt \neq 0 \end{cases}$$

- D. $F(x) = \int_{-x}^x t^2 f(t)dt = 0$

综上所述, 上述函数只有 C 不是周期函数, ABD 均为周期函数.

36.2 Week II

October 8

例题 36.15.

设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布,$X \sim N(1,3^2), Y \sim N(0,4^2)$, 且满足 $\rho_{XY} = -\frac{1}{2}, Z = \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}$

(1). 求 $E(Z)$ 与 $D(Z)$

(2). 求 ρ_{XZ}

(3). 证明 X 与 Z 是否独立

解

例题 36.16.

$$\iint\limits_{D} \frac{1}{\sqrt{xy}} dxdy, D = \{(x, y) | (\frac{x}{2} + \frac{y}{4})^2 \le \frac{x}{6}, x, y \ge 0\}$$

解

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{2}{3}} dx \int_0^{4\sqrt{\frac{x}{6}}-2x} \frac{1}{\sqrt{xy}} dy \\ &= 2\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{4\sqrt{\frac{x}{6}} - 2x} dx \\ &= 8\sqrt{6} \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{t - 3t^2} dt \ (t = \sqrt{\frac{x}{6}}) \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta \ (6t - 1 = \sin\theta) \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{3} \end{aligned}$$

注

令

$$\begin{cases} \sqrt{x} = m \\ \sqrt{y} = n \end{cases} \qquad D' = \{(m, n) | \frac{(m - \frac{1}{\sqrt{6}})^2}{2} + \frac{n^2}{4} = \frac{1}{12} (m, n > 0)\}$$

雅可比行列式: $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial m} & \frac{\partial x}{\partial n} \\ \frac{\partial y}{\partial m} & \frac{\partial y}{\partial n} \end{vmatrix} = 4mn$

$$dxdy = 4mndmdn \Rightarrow \iint\limits_{D} \frac{1}{\sqrt{xy}} dxdy = \iint\limits_{D'} 4dmdn$$

$$I = 4S_{D'} = 2ab\pi = 2\pi \times \frac{1}{\sqrt{6}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}$$

October 9

例题 36.17.

$$\int \frac{\sqrt{x-1} \arctan \sqrt{x-1}}{x} dx$$

解

令 $\begin{cases} \sqrt{x-1}=t \\ x=t^2+1 \\ dx=2tdt \end{cases}$ 不定积分:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{2t^2\arctan t}{t^2+1}dt \\
&= 2\int \arctan t dt - 2\int \frac{\arctan t}{1+t^2}dt \\
&= 2t\arctan t - \ln(1+t^2) - (\arctan t)^2 \\
&= 2\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1} - \ln x - (\arctan\sqrt{x-1})^2 + C
\end{aligned}
$$

例题 36.18.

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足 $f(x)=f(x-\pi)+\sin x$, 且 $f(x)=x, x\in[0,\pi)$, 求 $\int_{\pi}^{3\pi} f(x)dx$

解

$$
\begin{cases} f(x)=f(x-\pi)+\sin x, & x\in\mathbb{R} \\ f(x)=x, & x\in[0,\pi) \end{cases} \Rightarrow f(x)=x+\sin x-\pi, x\in[\pi,2\pi)
$$

我们有:

$$
\begin{aligned}
\int_{\pi}^{3\pi} f(x)dx &= \int_{\pi}^{3\pi}[f(x-\pi)+\sin x]dx \\
&= \int_{\pi}^{3\pi} f(x-\pi)dx \\
&= \int_{0}^{2\pi} f(x)dx \\
&= \int_0^{\pi} xdx + \int_{\pi}^{2\pi}[x+\sin x-\pi]dx \\
&= \pi^2-2
\end{aligned}
$$

October 10

例题 36.19.

$$
\int \frac{\cos^3 x - 2\cos x}{1+\sin^2 x+\sin^4 x}dx
$$

解

令 $t=\sin x$ 不定积分为:

$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{t^2+1}{1+t^2+t^4}dt \\ &= -\int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{1+t^2+\frac{1}{t^2}}dt \\ &= -\int \frac{d(t-\frac{1}{t})}{(t-\frac{1}{t})^2+3} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{t-\frac{1}{t}}{\sqrt{3}})+C \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}\sin x})dx+C \end{aligned}$$

例题 36.20.

下列积分中, 与积分 $I=\int_0^1 \frac{1}{2}xe^{-\sqrt{x}}dx$ 值最接近的是

- A. $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$
- B. $\int_0^1 xe^{-x}dx$
- C. $\int_0^1 x^2e^{-x}dx$
- D. $\int_0^1 x^4e^{-x}dx$

解

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{1}{2}xe^{-\sqrt{x}}dx \\ &= \int_0^1 t^3e^{-t}dt \\ &= \int_0^1 x^3e^{-x}dx \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx > \int_0^1 xe^{-x}dx > \int_0^1 x^2e^{-x}dx > \int_0^1 x^3e^{-x}dx > \int_0^1 x^4e^{-x}dx$$

$$\begin{cases} x^2-x^3 > x^3-x^4 \\ \int_0^1 (x^2-x^3)e^{-x}dx > \int_0^1 (x^3-x^4)e^{-x}dx \end{cases}$$

综上所述, 与积分 I 最近接的是 $\int_0^1 x^4e^{-x}dx$

October 11

例题 36.21.

$f(x)=\dfrac{\left(\sqrt[n]{x}-1\right)^n}{x+1}$, 求 $f^{(n)}(1)(n\geq 2)$

解

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)^n}=\frac{1}{2}\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt[n]{x}-1)^n}{(x-1)^n}=\frac{1}{2n^n}$$

$f(x)$ 在 $x=1$ 处泰勒展开式:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-1)^k+o[(x-1)^n]$$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)^n}=\lim_{x\to1}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-1)^k+o[(x-1)^n]}{(x-1)^n}$$

上述极限存在,我们可以得到: $f^{(k)}=0(k=1,2,\cdots,n-1)$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)^n}=\frac{f^{(n)}(1)}{n!}\Rightarrow f^{(n)}(1)=\frac{n!}{2n^n}$$

例题 36.22.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶导数连续, $f(1)=f'(1)=0, D=\{(x,y)|0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1\}$, 证明:

(1). $\iint\limits_D f(x)dxdy=\iint\limits_D x^2yf''(x)dxdy$

(2). $\exists\xi,\eta\in(0,1),\ s.t.\ \xi^2f''(\xi)=2f'(\eta)(\xi-1)$

解

(1).

$$\begin{aligned}\text{Left}&=\iint\limits_D f(x)dxdy\\&=\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 dy\\&=\int_0^1 f(x)dx\\&=xf(x)|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 xf'(x)dx\\&=-\int_0^1 xf'(x)dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{Right} &= \iint\limits_D x^2 y f''(x)dxdy \\
&= \int_0^1 x^2 f''(x)dx \int_0^1 ydy \\
&= \int_0^1 \frac{x^2}{2} df'(x) \\
&= \frac{x^2}{2} f'(x)|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 xf'(x)dx \\
&= -\int_0^1 xf'(x)dx
\end{aligned}
$$

综上所述, Left = Right $\Rightarrow \iint\limits_D f(x)dxdy = \iint\limits_D x^2 y f''(x)dxdy$

(2).

构造辅助函数 $g(x) = \int_0^x x^2 f''(x) - 2f(x), g(0) = g(1) = 0$

罗尔定理:

$$\exists \xi \in (0,1),\ s.t.\ g'(\xi) = 0 \Rightarrow \xi^2 f''(\xi) - 2f(\xi) = 0$$

拉格朗日中值定理:

$$\exists \eta \in (\xi,1),\ s.t.\ f(\xi) - f(1) = f'(\eta)(\xi - 1)$$

综上所述, 我们得到: $\exists \xi, \eta \in (0,1),\ s.t.\ \xi^2 f''(\xi) = 2f'(\eta)(\xi - 1)$

October 12

例题 36.23.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x \left(\arctan e^x + \int_0^x e^{t^2} dt\right)}{1 + \cos^2 x} dx$$

解

$$f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt, f(-x) = -f(x)$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x \arctan e^x}{1+\cos^2 x} dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x \arctan e^{-x}}{1+\cos^2 x} dx \\
2I &= \pi \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx \\
&= \pi \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \sin x}{1+\cos^2 x} dx \\
4I &= \pi^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx \\
4I &= \frac{\pi^3}{2} \\
I &= \frac{\pi^3}{8}
\end{aligned}$$

例题 36.24.

若 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(ax)}{x^n} dx$ 收敛, 求 n 的取值范围

解

瑕点为 $x=0$ 和 $x=+\infty$

(1). $x=0$ $\frac{\arctan(ax)}{x^n} \sim ax^{1-n}$ 收敛 $\Rightarrow 1-n>-1 \Rightarrow n<2$

(2). $x=+\infty$ $\frac{\arctan(ax)}{x^n} \sim \frac{\pi}{2}x^{-n}$ 收敛 $\Rightarrow -n<-1 \Rightarrow n>1$

综上所述, $n \in (1,2)$

October 13

例题 36.25.

设 $0<a<1, I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin ax}{\sin x} dx, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan ax}{\tan x} dx$, 比较 I_1, I_2 和 $\frac{\pi a}{4}$ 的大小

解

构造辅助函数:

$$\begin{cases} f(x) = \sin(ax) - a\sin x, & f(0)=0 \\ g(x) = \tan(ax) - a\tan x, & g(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = a[\cos(ax) - cosx] > 0 \\ g'(x) = \dfrac{a[\cos^2 x - \cos^2(ax)]}{\cos^2 x \cos^2(ax)} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{\sin x} > a \\ \frac{\tan(ax)}{\tan x} < a \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 > \dfrac{\pi a}{4} \\ I_2 < \dfrac{\pi a}{4} \end{cases} \Rightarrow I_2 < \frac{\pi a}{4} < I_1$$

例题 36.26.

$$\iint\limits_D \frac{\tan^3 x + y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

其中 $D = \{(x,y)|y \geq |x|, (x^2+y^2)^3 \leq y^4\}$

解 D 关于 $x=0$ 对称, 且 $f(x,y) = \dfrac{\tan^3 x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 满足 $f(x,y) = -f(-x,y)$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = 0$$

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin\theta d\theta \int_0^{\sin^2\theta} rdr \\ &= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^5\theta d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta d\theta \\ &= \frac{43\sqrt{2}}{120} \end{aligned}$$

October 14

例题 36.27.

已知 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{2x^2+bx+a}{2x^2+ax}-1\right)dx = 0$, 求 a, b

解

$$\int_1^{+\infty}\frac{(b-a)x+a}{2x^2+ax}dx = 0 \text{ 收敛}$$

(1). $x=+\infty$, 假设 $a \neq b \Rightarrow \dfrac{(b-a)x+a}{2x^2+ax} \sim \dfrac{1}{x}$发散, 我们得到: $a=b$

原积分等价于:

$$\int_1^{+\infty}\frac{a}{2x^2+ax}dx = \int_1^{+\infty}(\frac{1}{x}-\frac{2}{2x+a})dx = 0 \Rightarrow \ln|\frac{x}{2x+a}|_{x=1}^{x=+\infty} = 0 \Rightarrow a=b=0$$

例题 36.28.

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)}{n+\frac{1}{k}} - \ln n\right]$$

解

夹逼准则:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)}{n+1}-\ln n<I<\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)}{n}-\ln n$$

$$\begin{aligned}
\text{Left} &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)}{n+1}-\ln n\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left\{\frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[\ln(n+k)-\ln n]-\frac{\ln n}{n+1}\right\}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})-\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n+1}\\
&= \int_0^1\ln(1+x)dx\\
&= 2\ln 2-1\\
\text{Right} &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)}{n}-\ln n\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[\ln(n+k)-\ln n]\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})\\
&= \int_0^1\ln(1+x)dx\\
&= 2\ln 2-1
\end{aligned}$$

综上所述, 极限 $I=2\ln 2-1$

36.3 Week III

October 15

例题 36.29.

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^4)}$$

解

倒代换:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{t^4}{(1+t^2)(1+t^4)} dt \\ 2I &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{\pi}{2} \\ I &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

例题 36.30.

设随机变量 $Y = min\{|X|, 1\}$, 其中 X 为随机变量, 且密度函数为 $f(x) = \dfrac{k}{1+x^2}(x \in \mathbb{R}, k \equiv C)$, 下列说法不正确的是:

- A. $k = \dfrac{1}{\pi}$
- B. $E(X) = 0$
- C. Y 没有概率密度
- D. $E(Y) = \dfrac{\ln(2e^{\frac{\pi}{2}})}{\pi}$

解

October 16

例题 36.31.

求 $y = e^{-x}\sqrt{\sin x}(0 \le x < +\infty)$ 绕 x 轴旋转一周的旋转体体积

解

我们可以得到:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{+\infty} \pi y^2 dx \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \pi e^{-2x} \sin x dx \\ &= \lim_{n\to+\infty} A(1 + e^{-4\pi} + e^{-8\pi} + \cdots + e^{-4n\pi}) \\ &= \frac{A\pi}{1 - e^{-4\pi}} \\ A &= = \int_0^{\pi} e^{-2x} \sin x dx = \frac{e^{-2\pi}+1}{5} \\ V &= \frac{e^{-2\pi}+1}{5(1-e^{-4\pi})} = \frac{e^{2\pi}\pi}{5(e^{2\pi}-1)} \end{aligned}$$

例题 36.32.

已知 $\int_0^{+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x^{\alpha}} dx$ 收敛, 求 α 的取值范围

解

原积分可能存在的瑕点为 $x=0, x=+\infty$

(1). $x=0$ 时, $\dfrac{\ln(1+x)}{x^\alpha} \sim x^{1-\alpha}$ 收敛 $\Rightarrow 1-\alpha > -1 \Rightarrow \alpha < 2$

(2). $x=+\infty$ 时, $\dfrac{\ln(1+x)}{x^\alpha} \sim x^{-\alpha}$ 收敛 $\Rightarrow -\alpha < -1 \Rightarrow \alpha > 1$

我们得到: $\alpha \in (1,2)$

October 17

例题 36.33.

设随机变量 X, Y 相互独立, 且 $X \sim N(0,1), Y \sim B(n,p), 0<p<1$, 且 $X+Y$ 的分布函数:

- A. 是连续函数
- B. 恰有 $n+1$ 个间断点
- C. 恰有 1 个间断点
- D. 有无穷个间断点

解

例题 36.34.

微分方程 $\cos^4 x \dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\cos^2 x(1-\sin x\cos x)\dfrac{dy}{dx} + y = e^{-\tan x}$, 求该微分方程在 $t=\tan x$ 变换下所得的 y 对 t 的微分方程, 并求出其通解

解

我们可以得到:

$$\begin{cases} t = \tan x \\ \sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{(1+t^2)dy}{dt} \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\frac{dy}{dx}}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{(1+t^2)^2 d^2y}{dt^2} - \dfrac{2t(1+t^2)dy}{dt} \end{cases}$$

我们可以得到原微分方程等价于:

$$\frac{d^2y}{(1+t^2)^2dx^2} + \frac{2dy}{(1+t^2)dx} - \frac{2tdy}{(1+t^2)^2dx} + y = e^{-t}$$

我们可以得到:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = e^{-t} \Rightarrow y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{-t}$$

我们得到特征方程: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$

我们可以得到: $y = (C_1x + C_2)e^{-x} + y^* \Rightarrow y^* = Ax^2e^{-x} \Rightarrow y^* = \dfrac{1}{2}x^2e^{-x}$

综上所述, 微分方程的通解为: $y=(C_1x+C_2)e^{-x}+\frac{1}{2}x^2e^{-x}$

October 18

例题 36.35.

$$\iint\limits_D \arcsin(2\sqrt{x-x^2})dxdy, D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le x\}$$

解

原二重积分可化为:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 x\arcsin(2\sqrt{x-x^2})dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arcsin(\cos\theta)\cos\theta(\sin\theta+1)}{4}d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arcsin(\cos\theta)\cos\theta}{4}d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2}-\theta)\cos\theta d\theta \\
&= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta d\sin\theta \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

例题 36.36.

设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x^{n+1}-x^2}{x^n+1}$,$F(x)=\int_0^x f(t)dt$, 下列说法正确的是:

- A. $f(x)$ 有 1 个间断点,$F(x)$ 有 1 个不可导点
- B. $f(x)$ 有 1 个间断点,$F(x)$ 有 2 个不可导点
- C. $f(x)$ 有 2 个间断点,$F(x)$ 有 1 个不可导点
- D. $f(x)$ 有 2 个间断点,$F(x)$ 有 2 个不可导点

解

我们可以得到: $f(x)=\begin{cases} x,\ x<-1 \\ -x^2,\ -1<x<1 \\ 0,\ x=1 \\ x,\ x>1 \end{cases}$

$f(x)$ 在 $x=-1$ 处无定义,$x=-1$ 是可去间断点,$x=1$ 是跳跃间断点.

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 处处连续, 仅在 $x=1$ 处不可导.

October 19

例题 36.37.

$x \geq 0$, 连续函数 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 非负, 且满足方程 $\int_0^{x^2} f(x^2)f(t)dt = \frac{1}{2}(\sqrt{1+x^2} - 1)$, $F(0) = 0$, 求 $f(x)$

解

我们设 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 我们令 $x^2 = u$, 我们得到:

$$f(u)\int_0^u f(t)dt = \frac{1}{2}(\sqrt{1+u} - 1) \Rightarrow F'(x)F(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{1+x} - 1) \Rightarrow \frac{1}{2}[F^2(x)]' = \frac{1}{2}(\sqrt{1+x} - 1)$$

我们得到:

$$F^2(x) = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - x + C, F(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} F(x) = \sqrt{\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - x - \frac{2}{3}} \\ f'(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{2\sqrt{\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - x - \frac{2}{3}}} \end{cases}$$

例题 36.38.

证明:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

解

我们有:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)} + \cdots$$

我们有: $f(x) = \dfrac{\sin x}{x} = 1 - \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^4}{5!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)} + \cdots$

我们知道 $f(x)$ 有零点 $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots \Rightarrow f(x) = A(x-\pi)(x+\pi)(x-2\pi)(x+2\pi)\cdots$

我们有:

$$f(x) = A(x^2-\pi^2)(x^2-4\pi^2)\cdots, \text{令} x = 0, \text{我们有: } A(-\pi^2)(-4\pi^2)\cdots = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{(-\pi^2)(-4\pi^2)\cdots}$$

我们有:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)} + \cdots \\ (1 - \frac{x^2}{\pi^2})(1 - \frac{x^2}{4\pi^2})\cdots \end{cases} \Rightarrow x^2\text{项系数相等} \Rightarrow -\frac{1}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-\frac{1}{n^2\pi^2})$$

我们可以得到: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

October 20

例题 36.39.

设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有连续的一阶导数, $f'(x)=\frac{1}{1+f^2(x)}\left[\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})}\right]$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在

解

我们由: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-f(1)=\int_1^{+\infty} f'(x)dx \Rightarrow$ 我们只需要证明: $\int_1^{+\infty} f'(x)dx$ 收敛
我们有:

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} f'(x)dx &= \int_1^{+\infty}\frac{1}{1+f^2(x)}\left[\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})}\right]dx\\ &\le \int_1^{+\infty}\left[\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})}\right]dx\end{aligned}$$

我们由拉格朗日中值定理得到:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{\xi}}\left(\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x})\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{4}$$

我们由比较判别法可以得到: $\begin{cases}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\text{收敛}, p>1\\ \int_1^{+\infty}\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}dx\text{收敛}\end{cases}$

综上所述, 我们得到: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在

例题 36.40.

函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, $f(0)=1$ 且满足等式:

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0$$

(1). 求 $f'(x)$
(2). 证明: $x\ge 0, e^{-x}\le f(x)\le 1$

解

(1). 我们可以得到:

$$(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)dt=0$$

我们对上式子求导可以得到:

$$(x+1)f''(x)+(x+2)f''(x)=0\Rightarrow\begin{cases}(x+1)e^x f'(x)=C\\ f'(0)=-1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{(1+x)e^x}$$

(2). 我们有:

$$\begin{cases} F(x) = f(x) - 1 \\ G(x) = f(x) - e^{-x} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} F'(x) = f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)e^x} < 0 \\ F(0) = 0 \\ G'(x) = f'(x) + e^{-x} = \dfrac{x}{(1+x)e^x} > 0 \\ G(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} F(x)\text{单调递减} \\ F(x) \le F(0) = 1 \\ G(x)\text{单调递增} \\ G(x) \ge G(0) \Rightarrow f(x) \ge e^{-x} \end{cases}$$

October 21

例题 36.41.

设 $f(x) = \int_{-1}^{x}(1-|t|)dt(x \ge -1)$, 求曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴所围成的面积

解

我们可以得到 $f(x)$ 表达式:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)^2}{2}, & x \in [-1, 0] \\ \dfrac{2x - x^2 + 1}{2}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

我们可以得到:

$$S = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^{1+\sqrt{2}} f(x)dx = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} + \frac{2\sqrt{2}}{3} = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

例题 36.42.

设函数 $f(x)$ 连续, $f'(0)$ 存在, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = \dfrac{f(x) + f(y)}{1 - 4f(x)f(y)}$, 且 $f'(0) = \dfrac{1}{2}$, 求 $f(x)$

解

我们有: $f(0) = \dfrac{2f(0)}{1 - 4f^2(0)} \Rightarrow f(0) = 0$

我们利用导数定义:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)+f(\Delta x)}{1-4f(x)f(\Delta x)}-f(x)}{\Delta x} \\ &= (1+4f^2(x))\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta} \\ &= \frac{1+4f^2(x)}{2} \end{aligned}$$

我们可以得到微分方程的解:

$$\arctan[2f(x)] = x + C, f(0) = 0 \to f(x) = \frac{1}{2}\tan x$$

36.4 Week IV

October 22

例题 36.43.

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上具有二阶连续导数, $f(0) = f'(0) = 0, f''(0) = 1, \forall x > 0, u(x)$ 表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x, f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距, 当 $x \to 0^+$ 时, 下列等价无穷小不成立的是:

- A. $f(x) \sim \dfrac{x^2}{2}$
- B. $x \cdot f(u(x)) \sim \dfrac{u(x)\cdot f(x)}{2}$
- C. $\int_0^x u(t)dt \sim \dfrac{x^2}{4}$
- D. $\int_0^{f(x)} u(t)dt \sim \dfrac{x^4}{4}$

解

我们求出 $f(x)$ 在 $(x, f(x))$ 处的切线方程:$y - f(x) = f'(x)(x' - x)$

我们有:

$$u(x) = x' = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

我们利用泰勒展开式, 将 $f(x)$ 展开:

$$\begin{cases} f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) \\ f'(x) = f'(0) + f''(0)x + o(x) \end{cases} \to \begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\ f'(x) = x + o(x) \end{cases}$$

当 $x \to 0^+$ 时,$f(x) \sim \dfrac{1}{2}x^2, u(x) \sim \dfrac{1}{2}x$

我们得到:

$$\begin{cases} x \cdot f(u(x)) \sim \dfrac{u(x) \cdot f(x)}{2} \\ \int_0^x u(t)dt \sim \dfrac{x^2}{4} \\ \int_0^{f(x)} u(t)dt \sim \dfrac{x^4}{16} \end{cases}$$

例题 36.44.

比较 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{1+x^2}dx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{1+x^2}dx$ 的大小

解

我们不妨设:$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{1+x^2}dx, J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{1+x^2}dx$, 我们有:

$$\begin{aligned} I - J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1+x^2}dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{1+x^2}dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{1+(t+\frac{\pi}{4})^2}dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{\sin t}{1+(t+\frac{\pi}{4})^2}dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{1+(t+\frac{\pi}{4})^2}dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t[\frac{1}{1+(t+\frac{\pi}{4})^2} - \frac{1}{1+(\frac{\pi}{4}-t)^2}]dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\pi t \sin t}{[1+(t+\frac{\pi}{4})^2][1+(\frac{\pi}{4}-t)^2]}dt < 0 \end{aligned}$$

October 23

例题 36.45.

求曲线 $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ 与其渐近线所围区域绕该渐近线旋转所得旋转体体积

解

我们可以得到 $f(x)$ 的渐近线为 $y = 1$, 因此我们有:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}dx \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta \\ &= \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

例题 36.46.

设 A 是 n 阶矩阵, A 的第 i 行第 j 列元素为 a_{ij}, 满足 $a_{ij}=i\cdot j$, 下列命题正确的是:

- A. $r(A)=1$
- B. 矩阵 A 不可相似对角化
- C. 矩阵 A 的特征值之和为 $\sum\limits_{k=1}^{n}k$
- D. 矩阵 A 的特征值之和为 $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2$

解

我们由:$a_{ij}=i\cdot j\to a_{ij}=a_{ji}=i\cdot j$, 即矩阵 A 为实对称矩阵,A 一定可以相似对角化

我们可以得到:$|A|\neq 0\to r(A)=n$ 且矩阵 A 的特征值之和为 $\sum\limits_{i=1}^{n}i^2$

October 24

例题 36.47.

$$\iint\limits_{D}\frac{1}{x^4+y^2}dxdy, D=\{(x,y)|y\geq x^2+1\}$$

解

原二重积分等价于:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{x^2+1}^{+\infty}\frac{1}{x^4+y^2}dy\\
&= 2\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\arctan(\frac{x^2}{x^2+1})dx\\
&= 2\int_{0}^{+\infty}\arctan(\frac{1}{t^2+1})dt\\
&=
\end{aligned}$$

例题 36.48.

$$\iint\limits_{D}\frac{1}{x^4+y^2}dxdy, D=\{(x,y)|x\geq 1, y\geq x^2\}$$

解

原二重积分等价于:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{1}^{+\infty}dx\int_{x^2}^{+\infty}\frac{1}{x^4+y^2}dy\\
&= \int_{1}^{+\infty}\frac{\pi}{4x^2}dx\\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

October 25

例题 36.49.

曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = mx(m > 0)$ 在第一象限内所围成的图形绕该直线旋转所形成的旋转体的体积 V

解

我们设围成区域中任意一点 (x, y), 我们有:$d = \dfrac{mx - y}{\sqrt{1 + m^2}}$

$$\begin{aligned} V &= \iint_S 2\pi d dxdy \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{1+m^2}} \int_0^m dx \int_{x^2}^{mx} (mx - y)dy \\ &= \frac{\pi m^5}{30\sqrt{1+m^2}} \end{aligned}$$

例题 36.50.

设函数 $f(x, y) = \begin{cases} (xy + a|x| + b\sqrt{|y|}) \arctan \dfrac{1}{|x| + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, 下列说法中正确的是:

- A. $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处的连续性和 a, b 的取值有关
- B. $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处偏导数存在的充要条件是 $ab = 0$
- C. $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微的充要条件是 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处偏导数存在
- D. $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极值点

解

October 26

例题 36.51.

设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f'(x) + f^2(x) \geq 0, f(0) = 1, f(x) \neq 0$, 证明: $f(x) \geq \dfrac{1}{x + 1}$

解

例题 36.52.

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $\int_0^1 f(x)dx = 0$

- A. 当 $f'(x) < 0$ 时,$f(\frac{1}{2}) < 0$

- B. 当 $f''(x) < 0$ 时,$f(\frac{1}{2}) < 0$
- C. 当 $f'(x) > 0$ 时,$f(\frac{1}{2}) < 0$
- D. 当 $f''(x) > 0$ 时,$f(\frac{1}{2}) < 0$

解

October 27

例题 36.53.

$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, 求曲线 $y = f(x)$ 在 $(-1, 2)$ 内存在水平切线的条数

解

例题 36.54.

已知正值连续函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调减少,$\forall a, b(0 < a < b < 1)$, 下列结论不正确的是

- A. $a\int_0^b f(x)dx > b\int_0^a f(x)dx$
- B. $b\int_0^a f(x)dx > a\int_0^b f(x)dx$
- C. $a\int_0^b \sqrt{f(x)}dx < b\int_0^a \sqrt{f(x)}dx$
- D. $b\int_0^a \sqrt{f(x)}dx < a\int_0^b \sqrt{f(x)}dx$

解

October 28

例题 36.55.

设函数 $\varphi(x, y)$ 的全微分为 $dz = (2x - y^2 - 2y)dx + (-2xy - 2x + y^3 + 3y)dy$,$f(x, y)$ 连续, 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)} = -1$

- A. 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极大值点
- B. 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值点
- C. 点 $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点
- D. 不能确定点 $(0, 0)$ 是否为 $f(x, y)$ 的极值点

解

例题 36.56.

求 $\int_L \frac{|y|}{x^2+y^2+z^2}ds$, 其中 $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^2+y^2=2ax \\ a\geq 0 \end{cases} \quad (a>0)$

解

October 29

例题 36.57.

设 $I_1=\int_0^\pi \frac{x\sin^2 x}{1+e^{\cos^2 x}}dx$,$I_2=\int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{1+e^{\cos^2 x}}dx$, $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{\sin^2 x}}dx$, 比较 I_1,I_2,I_3 的大小

解

例题 36.58.

设 $f(u,v)$ 有一阶偏导数,$f(x,1-x)=1, f_1'(x,1-x)=x$

(1). 设 $z(t)=f(\cos t,\sin t)$, 计算 $z'(0)$

(2). 证明: $f(u,v)$ 在单位圆周上至少存在两个不同的点满足方程: $v\frac{\partial f}{\partial u}=u\frac{\partial f}{\partial v}$

解

October 30

例题 36.59.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续可导,$\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{2}$, $\int_0^1 xf(x)dx=\frac{3}{2}$, 证明: $\exists\xi\in(0,1)$, $s.t.$ $f'(\xi)=3$

解

例题 36.60.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos^3 x)(1-\cos^{17} x)}{\frac{x^2}{2}-\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)!}t^{2n+1}dt}$$

解

October 31

例题 36.61.

设偶函数 $f(t)$ 具有连续的导函数, 且满足 $f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\le 4t^2} f(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2})dxdy$, 求方程 $\int_0^x \sqrt{1+4\pi t^2}dt+\int_{\cos x}^0 \frac{1+4\pi t^2}{f(t)}dt=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内根的个数

解

例题 36.62.

设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=f(2)=0, f(1)=a>0$ 且 $f''(x)<0$

- A. $\int_0^2 f(x)dx>a$
- B. $\int_0^2 f(x)dx<a$
- C. $\int_0^1 f(x)dx>\int_1^2 f(x)dx$
- D. $\int_0^1 f(x)dx<\int_1^2 f(x)dx$

解

第 37 章 November

37.1 Week I

November 1

例题 37.1.

设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2\sin x}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处

- A. 不连续
- B. 连续但不可导
- C. 可导但不可微
- D. 可微

解

例题 37.2.

$$\iint\limits_D \frac{1-x^3y^2}{(y+2\sqrt{1-x^2})^2}dxdy$$

其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1,-y\le x\le y\}$

解

November 2

例题 37.3.

$$\iiint_{\Omega}(mx+ly+nz)^2dv$$

其中 $\Omega=\{(x,y,x)|x^2+y^2+z^2\leq a^2(a>0)\}$

解

例题 37.4.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上导函数连续,$f'(a)=f'(b)$, 证明:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$$

解

November 3

例题 37.5.

下列函数在 $(0,0)$ 点可微的是:

- A. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$
- B. $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$
- C. $\varphi(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$
- D. $\psi(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

解

例题 37.6.

已知 $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-c)=k$

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^3&b^3&c^3&d^3\\a^4&b^4&c^4&d^4\end{vmatrix}$$

解

November 4

例题 37.7.

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_{x+y}^1 \frac{\sin z}{z} dz$$

解

例题 37.8.

已知函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的某邻域内有定义, 则 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} f_x'(x,0) = f_x'(0,0) \\ \lim\limits_{y\to 0} f_y'(0,y) = f_y'(0,0) \end{cases}$ 和 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微关系

解

November 5

例题 37.9.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$$

A 是 n 阶可逆矩阵 $(b \neq 0)$, 求 A^{-1}

解

例题 37.10.

求微分方程 $y'' + (4x + e^{2y})(y')^3 = 0$ 的通解, 其中 $y' \neq 0$

解

November 6

例题 37.11.

设 $f(x)$ 二阶可导, $f^2(x) - f^2(y) = f(x+y) - f(x-y)$

(1) 证明: $f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$

(2) 若 $f''(1) = f(1) = 1$, 求 $f(x)$

解

例题 37.12.

$$z=\frac{x\cos(y-1)-(y-1)\cos x}{1+\sin x+\sin(y-1)}$$

求 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)}$

解

November 7

例题 37.13.

已知 A 是正交矩阵, $A^*=A^T$ 和 $|A|=1$ 关系

解

例题 37.14.

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{i}}\right)$$

解

37.2 Week II

November 8

例题 37.15.

已知 $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$, 求 $f''_{xy}(0,0)\cdot f''_{yx}(0,0)$

解

例题 37.16.

设矩阵 $A=(a_{ij})$ 满足 $a_{ij}=A_{ij}, a_{11}=-1$, 求 $Ax=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ 的解

解

November 9

例题 37.17.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{\sqrt{x^3}} dx$$

解

例题 37.18.

方程 $x = e^{\sin^n x}(n = 1, 2, \cdots)$

(1). 证明方程在 $(\frac{\pi}{2}, e)$ 内有唯一实数根

(2). 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n-\frac{\pi}{2}}}$

解

November 10

例题 37.19.

若 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 1, \begin{cases} z = \sin y & x = 0 \\ z = \sin x & y = 0 \end{cases}$, 求 $z(x, y)$

解

例题 37.20.

设矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ 满秩, 直线 l_1 : $\frac{x-a_1}{a_1-a_2} = \frac{y-b_1}{b_1-b_2} = \frac{z-c_1}{c_1-c_2}$ 与直线 l_2 : $\frac{x-a_1}{a_2-a_3} = \frac{y-b_1}{b_2-b_3} = \frac{z-c_1}{c_2-c_3}$ 关系

解

November 11

例题 37.21.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求 A^n

解

例题 37.22.

求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{(n+1)!} x^n$ 的和函数 $S(x)$

解

November 12

例题 37.23.

设可微函数 $f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial x} = -f(x,y)$, $f(0,\frac{\pi}{2}) = 1$, 且 $\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{f(0,y+\frac{1}{n})}{f(0,y)}\right]^n = e^{\cot y}$, 求 $f(x,y)$

解

例题 37.24.

$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可微, $|f'(x)| < kf(x)(0<k<1)$

(1). $\exists \xi \in (-\infty,+\infty)$, $s.t.$ $\ln f(\xi) = \xi$

(2). 设 $a_n = \ln f(a_{n-1})(n=1,2,\cdots)$, 证明 $\{a_n\}$ 收敛

解

November 13

例题 37.25.

设 $f(x)$ 有连续一阶导数,$[xy - yf(x)]dx + [f(x)+y^2]dy = du(x,y)$, 且 $f(0) = -1$, 求 $u(x,y)$

解

例题 37.26.

(1). $\int_0^{\ln 2} dy \int_{e^y}^{2} \frac{e^{xy}}{x^x - 1} dx$

(2). $\int_0^1 dx \int_x^1 y dy \int_y^1 \sqrt{1+z^4} dz$

解

November 14

例题 37.27.

$f(x)$ 在 $x = 0$ 处 $n+1$ 阶可导, $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0, f^{(n)}(0) = a$, 求 $\lim_{x\to 0} \frac{f(e^x - 1) - f(x)}{x^{n+1}}$

解

例题 37.28.

函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z} + \frac{xyz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} = 1$ 确定, 求 $dz|_{(0,0)}$

解

37.3 Week III

November 15

例题 37.29.

设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有一阶连续导数

$$\forall \Sigma \in \mathbb{R}^3 (x > 0), \oiint_{\Sigma} e^{-x} f(x) dydz + y\sqrt{e^x - 1} f^2(x) dzdx = 0$$

求 $f(x)$

解

例题 37.30.

设 $f(t)$ 在 $[t, +\infty)$ 上有连续二阶导数, 且 $f(1) = 0, f'(1) = 1, z = (x^2+y^2) f(x^2+y^2)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, 求 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最大值

解

November 16

例题 37.31.

设 $u = f(x, y, z), z = z(x, y)$ 是由方程 $\varphi(x + y, z) = 1$ 所确定的隐函数, 其中 f 和 φ 有二阶连续偏导数且 $\varphi_2 \neq 0$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, du, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

解

例题 37.32.

设函数 $z = z(x, y)$ 的微分 $dz = (2x+12y)dx+(12x+4y)dy$ 且 $z(0, 0) = 0$, 求函数 $z = z(x, y)$ 在 $4x^2 + y^2 \leq 25$ 上的最大值

解

November 17

例题 37.33.

求累次积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$ 的等价形式

解

例题 37.34.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} \rho^2 d\rho + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy$$

解

November 18

例题 37.35.

$$\int_0^1 dy \int_y^1 \sqrt{2xy - y^2} dx$$

解

例题 37.36.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{2} - 1}{\sqrt[n]{2n + 1}} \left[\int_1^{\frac{1}{2n}} e^{-y^2} dy + \int_1^{\frac{3}{2n}} e^{-y^2} dy + \cdots + \int_1^{\frac{2n-1}{2n}} e^{-y^2} dy\right]$$

解

November 19

例题 37.37.

$$\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

其中 $D=[0,1]\times[0,1]$

解

例题 37.38.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_{0}^{2\sin\theta}\left[\sin\theta+\cos\theta\sqrt{1+r^2\sin^2\theta}\right]r^2dr$$

解

November 20

例题 37.39.

$$\begin{cases}I_1=\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma\\ I_2=\iint\limits_{D}\sin\sqrt{x^2+y^2}d\sigma\\ I_3=\iint\limits_{D}(1-\cos\sqrt{x^2+y^2})d\sigma\end{cases}$$

其中 $D=\{(x,y)||x|+|y|\leq\frac{\pi}{2}\}$, 比较 I_1,I_2,I_3 的大小

解

例题 37.40.

$$\begin{cases}I_1=\iint\limits_{D}(2x^2+\tan(xy^2))dxdy\\ I_2=\iint\limits_{D}(x^2y+2\tan(y^2))dxdy\\ I_3=\iint\limits_{D}(|xy|+y^2)dxdy\end{cases}$$

其中 $D=\{(x,y)||x|+|y|\leq 1\}$, 比较 I_1,I_2,I_3 的大小

解

November 21

例题 37.41.

可微函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(x)dx$, 且 $f(0) = 1$, 求 $f(x)$

解

例题 37.42.

设 $f(x)$ 是可导函数, 且 $f(0) = 0, g(x) = \int_0^1 xf(tx)dt$ 满足方程 $f'(x) + g'(x) = x$, 则由曲线 $y = f(x), y = e^{-x}$ 及直线 $x = 0, x = 2$ 围成的平面图形的面积

解

37.4 Week IV

November 22

例题 37.43.

设函数 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f'(x) = f(1-x), f(0) = 1$, 求 $f(x)$

解

例题 37.44.

设函数 $f(x)$ 连续, $\lim\limits_{x\to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{x^4}} = a(a>0)$, 且

$$\forall x, h \in \mathbb{R}, f(x+h) = \int_x^{x+h} t\left[f(t+h)+t^2\right]dt + f(x)$$

求 $f(x)$ 表达式和常数 a

解

November 23

例题 37.45.

设 $f(x)$ 为 $[0,+\infty)$ 上的正值连续函数, 已知曲线 $y = \int_0^x f(u)du$ 和 x 轴及直线 $x = t(t>0)$ 所围成区域绕 y 轴旋转所得体积与曲线 $y = f(x)$ 和两坐标轴及直线 $x = t(t>0)$ 所围区域的面积之和为 t^2, 求曲线 $y = f(x)$ 的方程

解

例题 37.46.

下列级数收敛的是:

- A. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$
- B. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (2-\frac{1}{n})^n \ln(1+\frac{1}{n2^n})$
- C. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n n^2 + e^n}{ne^n}$
- D. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^n}{3^n - 2^n}$

解

November 24

例题 37.47.

下列级数条件收敛的是:

- A. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$
- B. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \ln(1+\frac{1}{n})$
- C. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left[(-1)^n + \ln n\right]}{n}$
- D. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n}$

解

例题 37.48.

讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}$ 敛散性

解

November 25

例题 37.49.

已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$ 条件收敛, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n a_n^2$ 的敛散性

解

例题 37.50.

已知正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则下列级数一定收敛的是:

- A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n a_n}{n}$
- B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n}$
- C. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$
- D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^3+a_n^2}$

解

November 26

例题 37.51.

已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 下列四个级数一定收敛的个数:

- A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$
- B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$
- C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{2n}-a_{2n-1})$
- D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}^2-a_n^2)$

解

例题 37.52.

设 a_n 为曲线 $y=\sin x, (0 \le x \le n\pi)$ 与 x 轴所围区域绕 x 轴旋转所得到旋转体的体积, 求级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \pi^2}{2a_{n+1}}$ 的和

解

November 27

例题 37.53.

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{nt^{n-1}}{1+e^{xt}}dt$$

求 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$

解

例题 37.54.

证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 收敛并求其和

解

November 28

例题 37.55.

设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$, 其中 n 为正整数

(1). 若 $n\geq 2$, 计算 I_n+I_{n-2}

(2). 设 p 为实数, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n I_n^p$ 的绝对收敛性和条件收敛性

解

例题 37.56.

设幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{x^{2n+2}}{n+1}$

(1). 求该幂级数的收敛区间以及和函数

(2). 求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{(2n+1)!!}\frac{1}{n+1}$ 的和

(3). $2f(\frac{1}{\sqrt{2}})-1=\frac{\pi^2}{8}-1$

解

November 29

例题 37.57.

设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续可微,λ 为实数, 证明: 当且仅当 $f(x)e^{\lambda x}$ 单调不减时,$f'(x)+\lambda f(x)$ 单调不减

解

例题 37.58.

$\Omega=\{(x,y,z)|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1\}$, 求 $\iiint\limits_{\Omega}(3x+2y+z)^2dv$

解

November 30

例题 37.59.

设曲线 $C: x^2+y^2=2x$, 求 $\oint_C \frac{(x+y+1)^2}{(x-1)^2+y^2}ds$

解

例题 37.60.

设曲面 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=2y$, 求 $\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+2y^2+3z^2)dS$

解

第 38 章 December

38.1 Week I

December 1

例题 38.1.

计算曲线积分 $I=\oint_L \dfrac{xdy-ydx}{x^2+xy+y^2}$, 其中 L 为 $|x|+|y|=1$, 其方向为逆时针方向

解

例题 38.2.

计算曲线积分 $I=\oint_L \left[\dfrac{4x-y}{4x^2+y^2}-\dfrac{y}{(x-1)^2+y^2}\right]dx+\left[\dfrac{x+y}{4x^2+y^2}+\dfrac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\right]dy$, 其中 L 是 $x^2+y^2=4$, 方向为逆时针方向

解

December 2

例题 38.3.

设 Ω 是由平面曲线 $\begin{cases}4y^2+z^2=4\\x=0\end{cases}$ $(z\geq 0)$ 绕 z 轴旋转一周形成的空间曲面, 取上侧, 计算曲面积分:

$$I = \iint\limits_{\Omega} \frac{x^2ydydz + y^2zdzdx + (z^2+1)dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+(\frac{z}{2})^2+3}}$$

解

例题 38.4.

设函数 $f(x,y,z)$ 在区域 $\Omega = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ 上具有连续一阶偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 计算:

$$\iiint\limits_{\Omega} (x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z})dxdydz$$

解

December 3

例题 38.5.

设 A 为三阶方阵, 并有可逆矩阵 $P = (p_1, p_2, p_3)$, $p_i(i = 1,2,3)$ 为三维列向量, 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1). 证明: p_1, p_2 是方程 $(E-A)x = 0$ 的解, p_3 是方程 $(E-A)x = -p_2$ 的解, 且 A 不可相似对角化

(2). 当 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 时, 求可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解

例题 38.6.

已知 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x f(x) + \sin x}{x^2} = 1$, 求 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)+\sin x}{x^2}$

解

December 4

例题 38.7.

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内可导, 且 $f(0)+3f'(0)=1$, 求:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_x^{\ln(1+x)} f(x+t)dt+[\sin x-\ln(1+x)]\,f(x)}{x^3}$$

解

例题 38.8.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{(e^x-1)\cos\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{(1+\sin x^2)^{\frac{1}{x}}-1}}$$

解

December 5

例题 38.9.

设 $f(x)$ 连续, 且 $f(0)\neq 0$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\int_0^x (x-t)f(t)dt\right]^{\frac{1}{x\int_0^x f(x-t)dt}}$

解

例题 38.10.

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶导数连续, $f(1)\leq 0$, $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-|x|]=0$, 证明:

(1). $\exists\xi\in(1,+\infty),\ s.t.\ f'(\xi)>1$

(2). $\exists\eta\in(-\infty,+\infty),\ s.t.\ f''(\eta)=0$

解

December 6

例题 38.11.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{2x}|t-x|\sin t\,dt}{|x|^3}$$

解

例题 38.12.

求使得 $\oint_L (2y^3-3y)dx-x^3dy$ 的值最大的平面正向边界曲线 L

解

December 7

例题 38.13.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{(1+x)^{\frac{1}{x}}}-(1+x)^{\frac{e}{x}}}{x^2}$$

解

例题 38.14.

设曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与平面 $z=x$ 的交线为 L, 起点为 $A(0,1,0)$, 终点为 $B(0,-1,0)$, 求 $\oint_L (x+y-z)dx+|y|dz$

解

38.2 Week II

December 8

例题 38.15.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\ln(1+\frac{k}{n^2})$$

解

例题 38.16.

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n}{n^2+n+\ln 1}+\frac{n}{n^2+n+\ln 2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+\ln n}\right]^n$$

解

December 9

例题 38.17.

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right]^n$$

解

例题 38.18.

以下两个矩阵, 可以用同一个可逆矩阵 $\mathbf{P}$ 相似对角化的是:

- A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- C. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- D. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

解

December 10

例题 38.19.

设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上一阶可导, $f(0)=0$, $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得最大值 $M, x_0 \in (0,2)$, 且 $f'(x) \leq M$, 证明:

(1). 当 $x \in [0,x_0]$ 时, 有 $f(x) = Mx$

(2). $M = 0$

解

例题 38.20.

设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 对任意的正整数, 满足 $a_n < b_n < a_{n+1}$, 则:

- A. 数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- B. 数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均发散, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$
- C. 数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 具有相同的敛散性
- D. 数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 具有不同的敛散性

解

December 11

例题 38.21.

若可逆线性变换 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ 可将二次型 $f(x_1,x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$ 化为规范型 $y_1^2 + y_2^2$, 同时将二次型 $g(x_1,x_2) = -x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$ 化为标准型 $k_1y_1^2 + k_2y_2^2$, 求可逆矩阵 $\mathbf{P}$ 及 k_1, k_2 的值

解

例题 38.22.

设有数列 $\{x_n\}$, 已知 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$, 求下列说法正确的个数:

- (1). $\{x_n\}$ 必收敛
- (2). 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 必收敛
- (3). 若 $\{x_n\}$ 有界, 则 $\{x_n\}$ 必收敛
- (4). 若 $\{x_{3n}\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 必收敛

解

December 12

例题 38.23.

设 $f(x)$ 有连续一阶导数, 且 $0<f'(x)\leq\dfrac{\ln(2+x^2)}{2(1+x^2)}$, 数列 $x_0=a, x_n=f(x_{n-1})(n=1,2,\cdots)$, 证明:

(1). 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n$ 存在且是方程 $f(x)=x$ 的唯一实根

(2). 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(x_n)-x_n]$ 收敛

(3). 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[x_n-A]$ 绝对收敛, 其中 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=A$

解

例题 38.24.

设 $f(x)=x+a\ln(1+x)+\dfrac{bx\sin x}{1+x^2}, g(x)=cx^3$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to0$ 时是等价无穷小

- A. $a=1, b=-\frac{1}{2}, c=\frac{1}{3}$
- B. $a=1, b=-\frac{1}{2}, c=-\frac{1}{3}$
- C. $a=-1, b=\frac{1}{2}, c=-\frac{1}{3}$
- D. $a=-1, b=-\frac{1}{2}, c=-\frac{1}{3}$

解

December 13

例题 38.25.

设 $f(x)$ 为连续函数,$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(x)-\ln(1+x)}{x^2}=2, F(x)=\int_0^x tf(x-t)dt$, 当 $x\to0$ 时, $F(x)-\dfrac{1}{2}x^2$ 与 bx^k 为等价无穷小, 其中常数 $b\neq0$,k 为正整数, 求 $k,b,f(0),f'(0)$

解

例题 38.26.

设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2e^{(n+1)x}+1}{e^{nx}+x^n+1}$, $f(x)$

- A. 仅有一个可去间断点
- B. 仅有一个跳跃间断点
- C. 有两个可去间断点
- D. 有两个跳跃间断点

解

December 14

例题 38.27.

下列命题成立的是:

- A. 若 $\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)=0$, 且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f[\varphi(x)]-f(0)}{\varphi(x)}$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导
- B. 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f[\varphi(x)]-f(0)}{\varphi(x)}=f'(0)$
- C. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\sin x)-f(0)}{\sqrt{x^2}}$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导
- D. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\sqrt[3]{x})-f(0)}{\sqrt{x^2}}$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

解

例题 38.28.

设 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧, 求 $\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{dydz}{x}+\dfrac{dzdx}{y}+\dfrac{dxdy}{z}$

解

38.3 Week III

December 15

例题 38.29.

设 $f(x)$ 在 x_0 点可导,α_n, β_n 为趋于零的正项数列, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}$

解

例题 38.30.

设函数 $\varphi(x)=\displaystyle\int_0^{\sin x} f(tx^2)dt$, 其中 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(0)=2$

(1). 求 $\varphi'(x)$

(2). 讨论 $\varphi'(x)$ 的连续性

解

December 16

例题 38.31.

设 $x=\int_0^1 e^{tu^2}du$, $y=y(t)$ 由方程 $t-\displaystyle\int_1^{y+t} e^{-u^2}du=0$ 所确定, 求:

(1). $\dfrac{dy}{dt}\Big|_{t=0}, \dfrac{d^2y}{dt^2}\Big|_{t=0}, \dfrac{dx}{dt}\Big|_{t=0}, \dfrac{d^2x}{dt^2}\Big|_{t=0}$

(2). $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=0}, \dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}$

解

例题 38.32.

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sin x}{x^3} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 处处连续, 求 $f''(0)$

- A. 0
- B. 不存在
- C. $\dfrac{1}{60}$
- D. $-\dfrac{a}{10}$

解

December 17

例题 38.33.

设方程 $a^x=bx(a>1)$ 有两个不同的实根, 求常数 a, b 应满足的关系式

解

例题 38.34.

设 $y(x)$ 满足 $y''+2ay'+b^2y=0(a>b>0), y(0)=1, y'(0)=1$, 求 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$

解

December 18

例题 38.35.

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty]$ 上二阶可导, 且 $f(0)=0, f''(x)<0$, 则当 $0<a<x<b$ 时, 下面哪个选项正确:

- A. $af(x)>xf(a)$
- B. $bf(x)>xf(b)$
- C. $xf(x)<bf(b)$
- D. $xf(x)>af(a)$

解

例题 38.36.

设 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f(1)=6, f'(1)=0$, 且当 $x\geq 1, x^2f''(x)-3xf'(x)-5f(x)\geq 0$, 证明: 当 $x\geq 1$ 时,$f(x)\geq x^5+\dfrac{5}{x}$

解

December 19

例题 38.37.

设 $f(x)=\int_0^x t|x-t|dt-\dfrac{x^2}{6}$, 求:
(1). 函数 $f(x)$ 的极值和曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间和拐点
(2). 曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴围成的区域的面积及绕 y 轴旋转所得旋转体的体积

解

例题 38.38.

求曲线 $y=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+x^2}$ 的渐近线

解

December 20

例题 38.39.

设 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上二阶可导, 且 $|f(x)| \leq 1$, 又 $[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$, 证明: $\exists\xi\in(-2,2)$, $s.t.\ f''(\xi)+f(\xi)=0$

解

例题 38.40.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 $n+1$ 阶导数, 且 $f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0(k=0,1,2,\cdots,n)$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.\ f^{(n+1)}(\xi)=f(\xi)$

解

December 21

例题 38.41.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$, 证明:

(1). $\exists\xi,\eta\in(0,1)$, $s.t.\ [1+\eta f(\eta)]f'(\xi)=f'(\eta)+f^2(\eta)$

(2). $\exists\xi,\eta\in(0,1),\xi<\eta$, $s.t.\ f'(xi)+f'(\eta)=2$

解

例题 38.42.

设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $f(1)>g(1), f(0)>g(0)$, $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 g(x)dx$, 证明: $\exists\xi\in(0,1)$, $s.t.\ f''(\xi)>g''(\xi)$

解

38.4 Week IV

December 22

例题 38.43.

设 α 为正整数, 且反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$ 收敛, 求 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$

解

例题 38.44.

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续且单调,$f(x+2)-f(x)=4(x+2), f(0)=1, \int_1^9 f^{-1}(x)dx=\frac{28}{3}$, 其中 $f^{-1}(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数, 求 $\int_1^3 f(x)dx$

解

December 23

例题 38.45.

求曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=x$ 及 $y=2$ 所围区域绕 $y=2$ 旋转所得旋转体的体积

解

例题 38.46.

设曲线 $y=\sin x(0\le x\le n\pi, n=1,2,\cdots)$ 和 x 轴围成的区域为 A, 区域 A 绕 y 轴旋转所得旋转体体积为 S_n

(1). 求 S_n

(2). 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{S_1}{n^3+1^3}+\frac{S_2}{n^3+2^3}+\cdots+\frac{S_n}{n^3+n^3}]$

解

December 24

例题 38.47.

设 $f(x), g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $\int_0^1 f(x)dx=3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx$, 证明:

$$\exists\xi,\eta\in(0,1),\xi\neq\eta,\ s.t.\ f'(\xi)=g'(\xi)[f(\eta)-f(\xi)]$$

解

例题 38.48.

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有连续导数, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} n[\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+\frac{k(b-a)}{n})]=\frac{b-a}{2}[f(a)-f(b)]$$

解

December 25

例题 38.49.

设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续

(1). 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} f(x)|\sin nx|dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(x)dx$

(2). 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} |\sin nx|\ln(1+x)dx$

解

例题 38.50.

设函数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处

- A. 不连续
- B. 两个偏导数都不存在
- C. 两个偏导数存在但不可微
- D. 可微

解

December 26

例题 38.51.

$\lim\limits_{x\to0y\to0}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 是函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微的:

- A. 充分必要条件
- B. 必要条件但非充分条件
- C. 充分条件但非必要条件
- D. 既非充分也非必要条件

解

例题 38.52.

设 $f_x(x_0,y_0)$ 存在,$f_y(x_0,y_0)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续, 证明: $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微

解

December 27

例题 38.53.

设 $u=u(\sqrt{x^2+y^2})$ 具有连续的二阶偏导数, 且满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+u=x^2+y^2$, 试求函数 u 的表达式

解

例题 38.54.

设 $f(x,y)$ 有二阶连续导数,$g(x,y)=f(e^{xy},x^2+y^2)$ 且 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)+x+y-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0$, 证明: $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点取得极值, 判断此极值是极大值还是极小值, 并求出此极值

解

December 28

例题 38.55.

设区域 D 由 $x^2+y^2\le 2x+2y$ 所确定, 求 $\iint\limits_D[x(1-y^3)+y(1+x^3)]d\sigma$

解

例题 38.56.

设 $D=\{(x,y)|0\le x\le 2, 0\le y\le 2\}$

(1). 计算 $b=\iint\limits_D|xy-1|d\sigma$

(2). 设 $f(x,y)$ 在 D 上连续, 且 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=0, \iint\limits_D xyf(x,y)d\sigma=1$, 证明: $\exists(\xi,\eta)\in D, s.t. |f(\xi,\eta)|\ge\dfrac{1}{b}$

解

例题 38.57.

求 $I=\oint\limits_L(y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$, 其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=2bx$ 与柱面 $x^2+y^2=2ax(b>a>0)$ 的交线 $(z\ge 0)$, L 的方向规定为沿 L 的方向运动时, 从 z 轴正往下看, 曲线 L 所围球面部分总在左边

解

December 29

例题 38.58.

设 $f(x)$ 有一阶连续导数,$(xy-yf(x))dx+(f(x)+y^2)dy = du(x,y)$, 其中 $f(0)=-1, u(0,0)=0$, 则函数 $u(x,y)$ 在条件 $xy=1, x>0$ 下最值情况:

- A. 最大值为 $\frac{5}{3}$
- B. 最大值为 5
- C. 最小值为 -3
- D. 最小值为 $\frac{1}{3}$

解

例题 38.59.

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, 区域 D 由不等式 $x^2+y^2 \le t^2(t \ge 0), x \ge 0, y \ge 0$ 所确定, 且 $f(t) = 2\iint\limits_D [(x-1)^2+(y+1)^2] f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy + \frac{t^4}{4} + t^2$, 求 $f(x)$

解

例题 38.60.

设 $f(x,y)$ 连续, 且 $f(x,y) = x^2 - y^2 + \int\limits_L \frac{yf(x,y)dx + xf(x,y)dy}{x^2+y^2}$, 其中 L 是从点 $A(-1,0)$ 到 $B(1,0)$ 的上半圆周 $y=\sqrt{1-x^2}$, 求 $f(x,y)$

解

December 30

例题 38.61.

设函数 $f(x)$ 满足 $xf'(x) - 3f(x) + 6x^2 = 0$, 且由曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=1$ 与 x 轴围成的平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积最小, 求 D 的面积

解

例题 38.62.

下列级数中条件收敛的是:

- A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$
- B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \ln(1+\frac{1}{n})$
- C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n[(-1)^n+\ln n]}{n}$

- D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n \ln n}$

解

例题 38.63.

已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处的梯度 $\mathbf{grad} f(1,1) = 2i - j$, 求函数 $f(x,y)$ 在该点沿曲线 $e^{x-1} + xy = 2$ 在该点处切线方向 (与 y 轴正向夹角小于 $\frac{\pi}{2}$) 的方向导数

解

December 31

例题 38.64.

下列结论正确的是:

- A. 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别是 R_1, R_2, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$ 的收敛半径为 $R = \min\{R_1, R_2\}$
- B. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R = 2$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} |\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| = \dfrac{1}{2}$
- C. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n}$ 的收敛半径为 $\sqrt{R}$
- D. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛半径为 $\sqrt{R}$

解

例题 38.65.

设 $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 4a_{n-1} (n = 1, 2, 3, \cdots)$

(1). 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

(2). 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n!} x^n$ 的收敛域以及和函数

解

例题 38.66.

设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛, 令 $a_n = \displaystyle\int_0^1 f(nx)dx$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n^2}{n^\alpha} (\alpha > 0)$ 收敛

解

第七部分

Summary

第 7 部分目录

第 39 章 Summary

39.1 双曲函数

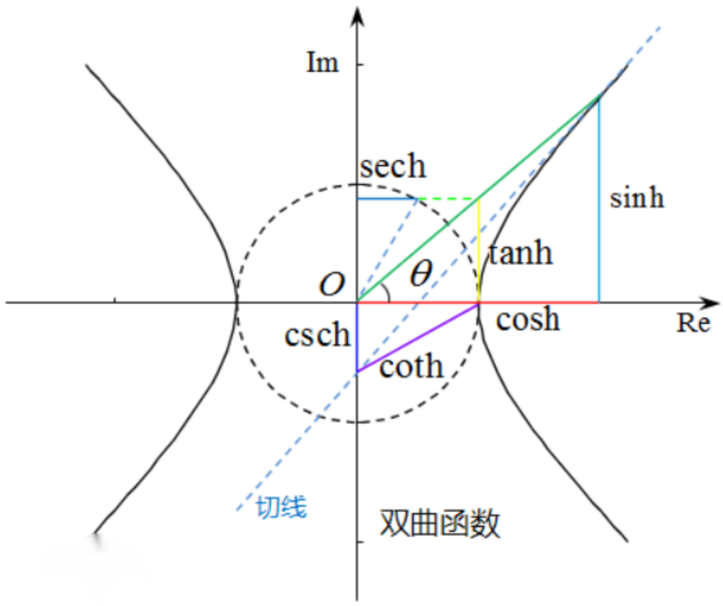


图 39.1: 双曲函数示意图

定义 39.1.1

双曲函数是一种类似于三角函数的一类函数,基本的函数有双曲正弦函数和双曲余弦函数,借由指数函数定义.

1. 双曲正弦函数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

2. 双曲余弦函数

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \to [1, +\infty]$$

3. 双曲正切函数

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \to (-1, 1)$$

恒等式:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 = 1$$

$$\sinh x = -i \sin ix, \quad \cosh x = \cos ix$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

定义 39.1.2

反双曲函数:

1. 反双曲正弦函数

$$\operatorname{arsinh} x = ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad (arsinhx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

2. 反双曲余弦函数

$$\operatorname{arcosh} x = ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad (arcoshx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

3. 反双曲正切函数

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} ln(\frac{1+x}{1-x}), \quad (artanhx)' = \frac{1}{1-x^2}$$

39.2 特殊曲线

定义 39.2.1

几类特殊曲线的面积、弧长、旋转体体积

1. 心形线 $r = a(1 + \cos\theta)$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 + \cos\theta)^2 + a^2 \sin^2\theta d\theta} = 8a$$

$$S = \int_0^{2\pi} a^2(1 + \cos\theta)^2 d\theta = 3\pi a^2$$

2. 摆线 $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta} d\theta = 8a$$

$$S = \int_0^{2a\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos\theta)^2 d\theta = 3\pi a^2$$

3. 星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}$

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sin\theta\cos\theta d\theta = 6a$$

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sin^4\theta\cos^2\theta = \frac{3\pi}{8}a^2$$

4. 三叶玫瑰线 $\rho = a\cos 3\theta$ $\rho = a\sin 3\theta$

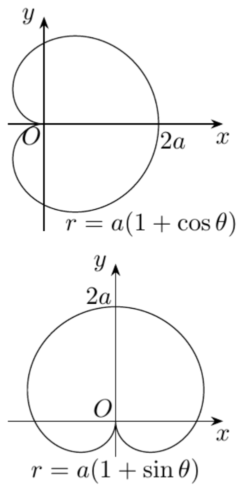
$$L = 6\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{a^2\cos^2 3\theta + 9a^2\sin^2 3\theta} d\theta = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 8\sin^2 t} dt$$

$$S = 3\int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2\cos^2 3\theta d\theta = \frac{\pi a^2}{4}$$

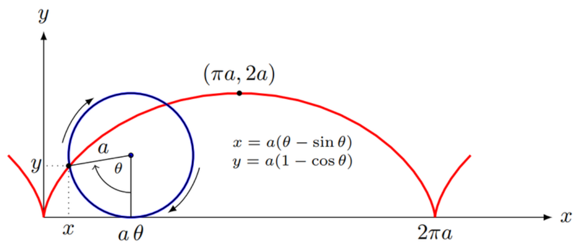
5. 伯努利双扭线 $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta} + \cos^2 2\theta d\theta} = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-\cos^2\theta + \cos^3\theta}{\cos\theta}} d\theta$$

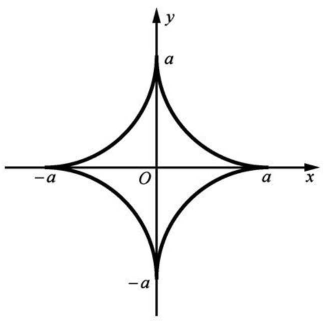
$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta d\theta = a^2$$



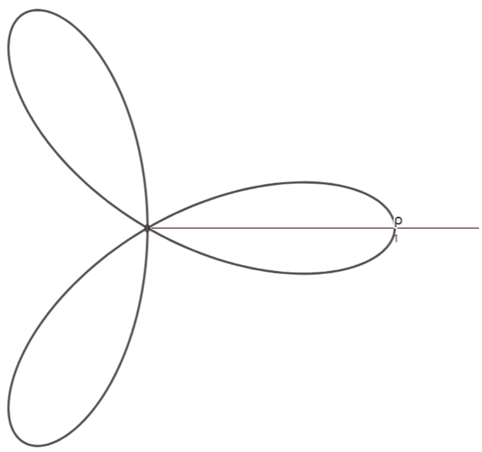
(a) 心形线



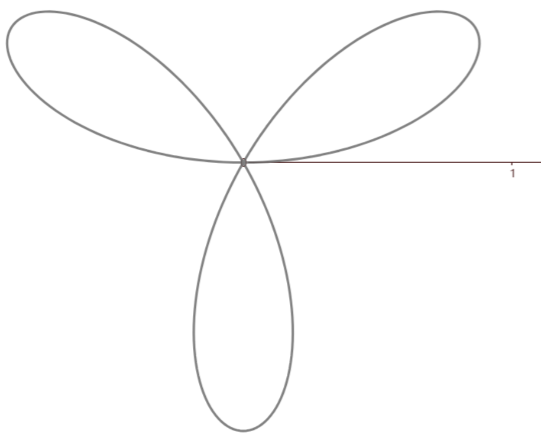
(b) 摆线



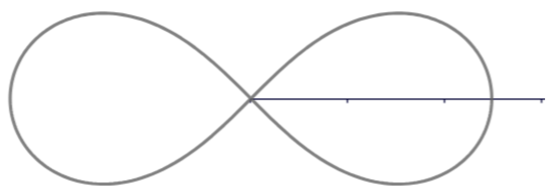
(c) 星形线



(d) 三叶玫瑰线 $\rho = a\cos 3\theta$



(e) 三叶玫瑰线 $\rho = a\sin 3\theta$



(f) 伯努利双扭线 $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$

图 39.2: 曲线图形

39.3 两类欧拉积分

定义 39.3.1 (*Gamma* 函数和 *Beta* 函数)

1. *Gamma* 函数 (欧拉第一类积分)

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=B(q,p)$$

我们有:

$$B(a,b)=(\frac{x^a(1-x)^b}{a})|_0^1+\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-2}dx$$

$$B(a,b)=\frac{b-1}{a}\int_0^1(x-1+1)x^{a-1}(1-x)^{b-2}$$

$$B(a,b)=\frac{b-1}{a}[B(a,b-1)-B(a,b)]$$

$$B(a,b)=\frac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1)$$

特别的, 我们有:

$$B(m,n)=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$$

2.*Beta* 函数 (第二类欧拉积分)

$$\Gamma(\alpha)\begin{cases}\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx\\ 2\int_0^{+\infty}x^{2\alpha-1}e^{-x^2}dx\end{cases}$$

我们有:

$$\Gamma(\alpha)=(-x^{\alpha-1}e^{-x})|_0^{+\infty}+(\alpha-1)\int_0^{+\infty}x^{\alpha-2}e^{-x}dx$$

$$\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1),\alpha>1$$

有两个特别的 α, 分别是 $\alpha=\frac{1}{2}$ 和 $\alpha=1$:

$$\begin{cases}\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1, & \alpha=1\\ \int_0^{+\infty}x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx=2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}, & \alpha=\frac{1}{2}\end{cases}$$

特别的, 我们有:

$$\Gamma(n+1)=n!$$

3. 两类积分之间的关系

转换公式:

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

39.4 谱分解定理

定义 39.4.1 (代数重复度)

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 是矩阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的相异特征值, 其重数分别为 $r_1,r_2,\cdots,r_k$, 称 r_i 为矩阵 A 的特征值 λ_i 的代数重复度.

定义 39.4.2 (几何重复度)

齐次方程组 $Ax=\lambda_i x\ (i=1,2,\cdots,k)$ 的解空间 V_{λ_i} 称为 A 的对应于特征值 λ_i 的特征空间, 则 V_{λ_i} 的维数称为 A 的特征值 λ_i 的几何重复度.

定义 39.4.3 (单纯矩阵)

若矩阵 A 的每一个特征值的代数重复度与几何重复度相等, 则称矩阵 A 为单纯矩阵.

定义 39.4.4 (幂等矩阵)

若 A 为方阵, 且 $A^2=A$, 则称 A 为幂等矩阵.

性质 1. 幂等矩阵 A 性质

- (1). A 是单纯矩阵, 且其 $Jordan$ 标准型为 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (2). A 的特征值只能为 0 或者 1
- (3). $rank(A)=tr(A)$
- (4). $Ax=x \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}(A)$
- (5). A 一定可以相似对角化

定理 39.4.1 (谱分解定理)

设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是单纯矩阵, 矩阵 A 有 k 个相异特征值 $\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,k)$,$\exists A_i\in\mathbb{C}^{n\times n}\ (i=1,2,\cdots,k)$, 使得

$$A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i G_i$$

此式称为矩阵 A 的谱分解,$G_1,G_2,\cdots,G_k$ 称为 A 的族谱, 且满足一下性质:

性质 1. 谱分解谱族 G_i 性质

- (1). 幂等性: $G_i^2=G_i$
- (2). 分离性: $G_iG_j=0\ (i\neq j)$
- (3). 可加性: $\sum\limits_{i=1}^{k}G_i=E_n$

推论 39.4.1 (谱族 G_i 推论)

- $AG_i = G_iA = \lambda_i G_i$
- $rank(G_i) = m_i$
- G_i 是唯一的,G 的族谱是唯一的.

命题 39.4.1

矩阵 A 是单纯矩阵等价为存在 k 个矩阵 G_i, $(i = 1, 2, \cdots, k)$ 满足:

- (1). $G_iG_j = \begin{cases} G_i, \ i = j \\ 0, \ i \neq j \end{cases}$
- (2). $\sum\limits_{i=1}^{k} G_i = E_n$
- (3). $A = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i G_i$
- (4). $f(A)$ 为任意多项式, 则

$$f(A) = \sum_{i=1}^{k} f(\lambda_i) G_i$$

- (5). $A^m = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i^m G_i$

证明

1. 必要性

(1). 当 $k = n$ 时:

我们由 A 是单纯矩阵可以得到矩阵 A 可以相似对角化

$$A = P\Lambda P^{-1}, 其中\Lambda = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$$

我们不妨设 $P=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$,$P^{-1}=\begin{pmatrix}\omega_1^T\\\omega_2^T\\\vdots\\\omega_n^T\end{pmatrix}$, 我们可以得到:

$$A=(v_1,v_2,\cdots,v_n)\begin{bmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1^T\\\omega_2^T\\\vdots\\\omega_n^T\end{pmatrix}\Rightarrow A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i\omega_i^T=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i G_i,\ \text{其中}G_i=v_i\omega_i^T$$

我们由 $\begin{cases}P^{-1}P=E_n\\PP^{-1}=E_n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega_i^Tv_j=\begin{cases}1,\ i=j\\0,\ i\neq j\end{cases}\\\sum_{i=1}^{n}v_i\omega_i^T=\sum_{i=1}^{n}G_i=E_n\end{cases}$

对于任意 $i,j\in(1,n)$, $G_iG_j=v_i(\omega_i^Tv_j)\omega_j^T$, 我们可以得到:

$$G_iG_j=\begin{cases}v_i\omega_i^T=G_i,\ i=j\\0,\ i\neq j\end{cases}\Rightarrow A_i\text{是幂等矩阵}$$

(2). 当 $k<n$ 时:

我们由矩阵 A 是单纯矩阵, 可以得到: $A=P\Lambda P^{-1}$

$$\begin{cases}P=(v_{11},v_{12},\cdots,v_{1r_1},v_{21},v_{22},\cdots,v_{2r_2},\cdots,v_{k1},v_{k2},\cdots,v_{kr_k})\\P^{-1}=(\omega_{11}^T,\omega_{12}^T,\cdots,\omega_{1r_1}^T,\omega_{21}^T,\omega_{22}^T,\cdots,\omega_{2r_2}^T,\cdots,\omega_{k1}^T,\omega_{k2}^T,\cdots,\omega_{kr_k}^T)^T\end{cases}$$

$$A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\sum_{j=1}^{r_i}B_{ij}\xrightarrow{G_i=\sum_{j=1}^{r_i}B_{ij}}A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_iG_i$$

$$P^{-1}P=E_n\Rightarrow\omega_{ij}^Tv_{lk}=\begin{cases}1,\ i=l,j=k\\0,\ i\neq l\text{或}j\neq k\end{cases}$$

$$B_{ij}B_{lk}=v_{ij}(\omega_{ij}^Tv_{lk})\omega_{lk}^T=\begin{cases}B_{ij},\ i=l,j=k\\0,\ i\neq l\text{或}j\neq k\end{cases}\Rightarrow G_iG_j=\sum_{p=1}^{r_i}B_{ip}\sum_{q=1}^{r_j}B_{jq}=\begin{cases}G_i,\ i=j\\0,\ i\neq j\end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{k} G_i = \sum_{i=1}^{n} B_i = E_n$$

(2). 充分性

我们首先可以得到矩阵 G_i 均为幂等矩阵, 我们不妨设 $dim\mathbb{R}(G_i) = n_i$, 我们可以得到:

$$n_i = tr(G_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} n_i = \sum_{i=1}^{k} tr(G_i) = tr(\sum_{i=1}^{k} G_i) = tr(E_n) = n$$

我们取 X_i 为 $\mathbb{R}(G_i)$ 的基列构成的阵, 则 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_k)$ 是 $n \times n$ 矩阵, 且 G_i 的列向量都可以由 X_i 线性表出, 我们可以得到:

$$G_i = (X_i\beta_1, X_i\beta_2, \cdots, X_i\beta_n) = X_iY_i$$

$$XY = (X_1, X_2, \cdots, X_n)\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} X_iY_i = E_n \Rightarrow \text{矩阵}X\text{可逆}$$

$$YX = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}(X_1, X_2, \cdots, X_k) = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \cdots \\ Y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1X_1 & Y_1X_2 & \cdots & Y_1X_k \\ Y_2X_1 & Y_2X_2 & \cdots & Y_2X_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_kX_1 & Y_kX_2 & \cdots & Y_kX_k \end{bmatrix} = E_n = \begin{bmatrix} E_{r_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E_{r_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E_{r_k} \end{bmatrix}$$

我们可以得到:

$$Y_iX_j = \begin{cases} E_{r_i}, \ i = j \\ 0, \ i \neq j \end{cases} \Rightarrow G_iX_j = x_iY_iX_j = \begin{cases} X_i, \ i = j \\ 0, \ i \neq j \end{cases}$$

我们利用幂等矩阵的性质

$$\begin{aligned}
AX &= (\sum_{i=1}^{k}\lambda_i G_i)(X_1, X_2, \cdots, X_k) \\
&= ((\sum_{i=1}^{k}\lambda_i G_i)X_1, (\sum_{i=1}^{k}\lambda_i G_i)X_2, \cdots, (\sum_{i=1}^{k}\lambda_i G_i)X_k) \\
&= (\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \cdots, \lambda_k X_k) \\
&= (X_1, X_2, \cdots, X_k)\begin{bmatrix} E_{r_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E_{r_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E_{r_k} \end{bmatrix} \\
&= X\Lambda \Rightarrow A = X\Lambda X^{-1}
\end{aligned}$$

(3). 谱分解唯一性

我们不妨假设 $F_1, F_2, \cdots, F_k$ 满足:

$$\begin{cases} F_i F_j = 0,\ i \neq j \\ F_i^2 = F_i \\ A = \sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i F_i \\ \sum\limits_{i=1}^{k} F_i = E_n \end{cases}$$

我们由族谱 G_i 性质推论可以得到:

$$\begin{cases} AG_i = G_i A = \lambda_i G_i \\ AF_i = F_i A = \lambda_i F_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AG_i F_j = \lambda_i G_i F_j \\ \lambda_i G_i F_j = G_i A F_j \\ G_i A F_j = \lambda_j G_i F_j \end{cases} \Rightarrow G_i F_j = 0,\ i \neq j$$

我们得到:

$$G_i = G_i E_n = G_i(\sum_{j=1}^{k} F_j) = G_i F_i = (\sum_{j=1}^{k} G_j)F_i = F_i$$

综上所述, 矩阵 A 的谱分解是唯一的.

39.5 多项式函数极值点和拐点

定理 39.5.1 (代数基本定理)

任何一个一元 n 次复系数多项式, 都恰好有 n 个复根, 且可以表示为 n 个一次因式的乘积.

推论 39.5.1 (曲线的极值点和拐点)

曲线上的可导点不可能同时是极值点和拐点, 不可导点可能同时是极值点和拐点.

命题 39.5.1 (多项式函数极值点和拐点个数: 命题一)

多项式函数 $f(x)=(x-a)^n,(n>1)$, 当 n 为奇数时, $(a,0)$ 是 $f(x)$ 的拐点, 当 n 为偶数时, $x=a$ 是 $f(x)$ 的极值点.

证明

$$f'(x)=n(x-a)^{n-1},\quad f''(x)=n(n-1)(x-a)^{n-2}$$

当 n 为偶数时, 我们有: $f'(a)=0$ 且

$$\exists x\in \mathring{U}(a,\delta), f(x)=(x-a)^n>0=f(a)$$

或者

$$\exists\delta>0, x\in(a-\delta,a), f'(x)<0; x\in(a,a+\delta), f'(x)>0$$

我们有: 当 n 为偶数时, $x=a$ 是 $f(x)$ 的极值点.
当 n 为奇数时, 我们有: $f''(a)=0$ 且

$$\exists\delta>0, x\in(a-\delta,a), f''(x)<0; x\in(a,a+\delta), f''(x)>0$$

我们有: 当 n 为奇数时, $(a,0)$ 是 $f(x)$ 的拐点.

命题 39.5.2 (多项式函数极值点和拐点个数: 命题二)

多项式函数 $f(x)=(x-a)^n g(x),(n>1), g(a)\neq 0$, 当 n 为奇数时, $(a,0)$ 是 $f(x)$ 的拐点, 当 n 为偶数时, $x=a$ 是 $f(x)$ 的极值点.

证明

$$\begin{cases} f'(x)=ng(x)(x-a)^{n-1}+g'(x)(x-a)^n=(x-a)^{n-1}[ng(x)+(x-a)g'(x)] \\ f''(x)=(x-a)^{n-2}[n(n-1)g(x)+2n(x-a)g'(x)+(x-a)^2g''(x)] \end{cases}$$

当 n 为偶数时, 我们不妨假设 $g(a)>0$, 根据极限的保号性, 我们有:

$$\exists \delta_1>0, s.t.\ x\in U(a,\delta_1), g(a)>0$$

当 $x\in U(a,\delta_1), f(x)=(x-a)^n g(x)\geq f(a)=0, x=a$ 是 $f(x)$ 的一个极值点.
当 n 为奇数时, $x\to a, (x-a), (x-a)^2$ 都是无穷小量, $g'(a), g''(a)$ 都是定值, 因此

$$\exists \delta_2>0, s.t.\ x\in U(a,\delta_2), 2n(x-a)g'(x)+(x-a)^2 g''(x)\leq |n(n-1)g(x)|$$

我们有: $x\in U(a,\delta_2), [n(n-1)g(x)+2n(x-a)g'(x)+(x-a)^2g''(x)]>0$, 即: $f''(x)$ 与 $(x-a)^{n-2}$ 符号相同
当 $x\in(a-\delta_2,a), f''(x)<0; x\in(a,a+\delta_2), f''(x)>0$, $(a,0)$ 是 $f(x)$ 的一个拐点.

命题 39.5.3 (多项式函数极值点和拐点个数: 命题三)

讨论多项式函数: $P_n(x)=\prod\limits_{i=1}^{k}(x-a_i)^{p_i}$ 极值点和拐点个数, 其中满足:

$$a_i\in\mathbb{R}, a_1<a_2<\cdots<a_k, p_i\in\mathbb{Z}^+$$

证明

我们首先有: $P_n(x)$ 是多项式函数, 在 $\mathbb{R}$ 上 n 阶可导, $P_n(x)$ 的极值点一定满足: $P_n'(x)=0$, 拐点满足: $P_n''(x)=0$

$P(x)$ 有 k 个实数根, 这 k 个实数根的重数分别为: $p_1,p_2,\cdots,p_k$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{k}p_i=n$
我们利用多个函数连乘的求导公式:

$$P_n'(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{p_i-1}\left[\sum_{i=1}^{k}p_i\left(\prod_{j=1\, j\neq i}^{k}(x-a_j)\right)\right]$$

当 $p_i\geq 2(i=1,2,\cdots,k)$ 时, $x=a_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是 $P_n'(x)$ 的一个零点, 此类的驻点一共有 k 个, $P_n'(x)$ 有 $p_i-1(i=1,2,\cdots,k)$ 重根 $a_i(i=1,2,\cdots,k)$

$P_n'(x)$ 此类的零点个数为: $n_1=\sum\limits_{i=1}^{k}(p_i-1)=n-k$

在 $(a_i,a_{i+1}),(i=1,2,\cdots,k-1)$ 中, 我们由罗尔定理得到: $\exists\xi_i\in(a_i,a_{i+1}),(i=1,2,\cdots,k-1), s.t.\ P'(\xi_i)=0$, 此类零点的个数为 $k-1$ 个

$P_n'(x)$ 是 $n-1$ 次多项式函数, 至多有 $n-1$ 个复根, 我们得到 $P_n'(x)$ 有 $n-k+k-1=n-1$ 个实数根, 其中前面 $n-k$ 个根中存在重根情况.

推论 39.5.2 (多项式函数零点)

$P_n(x)$ 有 n 个实数根 (含重根), 那么 $P_n'(x), P_n''(x), \cdots, P_n^{(n-1)}(x)$ 的根全部是实数.

我们继续看 $P_n'(x)$ 的两类零点, 其中一类是 $x=a_i(i=1,2,\cdots,k),(p_i>1)$, 另一类是 $x=\xi_i(i=1,2,\cdots,k-1)$

第一类零点: 我们由 **pro** : 39.5.2得到: 当 p_i 为偶数的时候, a_i 是 $P_n(x)$ 的极值点, 当 p_i 为奇数的时候, a_i 是 $P_n(x)$ 的拐点

第二类零点: $P_n'(x)=\sum\limits_{i=1}^{n-1}(x-\eta_i), \eta_i\in\mathbb{R}$, 当 $x\in U(\xi_i,\delta)$ 时, 只有 $(x-\xi_i)$ 这一项符号改变, 因此 $x=\xi_i$ 是 $P_n(x)$ 极值点

我们不妨假设 $p_i>1$ & p_i为奇数 的个数为 k_1, $p_i>1$ & p_i为偶数 的个数为 k_2

$P_n(x)$ 的极值点个数为 $k-1+k_2$

关于拐点的个数, 我们可以类比极值点个数的方法, 将 $P_n'(x)$ 当做原函数, 求 $P_n'(x)$ 的极值点个数, 我们将 $P_n'(x)$ 改写为:

$$P_n'(x)=\sum_{i=1}^{k}p_i\left[(x-a_1)^{p_1-1}(x-\xi_1)(x-a_2)^{p_2-1}\cdots(x-\xi_{k-1})(x-a_k)^{p_k-1}\right]$$

我们得到:

1. $P_n'(x)$ 有零点 $a_1,\xi_1,a_2,\cdots,a_{k-1},\xi_{k-1},a_k$, 其中 a_i 是重根, ξ_i 是非重根

2. 根据罗尔定理, 我们得到: 在 $P_n'(x)$ 每两个零点之间存在 η_j, 使得 $P_n''(x)=0$, 且是 $P_n''(x)$ 的极值点, 也是 $P_n(x)$ 的拐点, 个数为: k_1+k_2+k-2

3. $a_i(i=1,2,\cdots,k)$ 中, 满足 $p_i>1$ 且 p_i-1 为偶数, 也就是 p_i 为奇数时, $x=a_i$ 是 $P_n''(x)$ 的极值点, 也是 $P_n(x)$ 的拐点, 个数为: k_1

4. $P_n(x)$ 的拐点个数: $k+2k_1+k_2-2$

综上所述, 我们有以下的结论:

推论 39.5.3 (极值点和拐点个数)

假设 $P_n(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{p_i}$, 其中 k_1 个 p_i 为奇数 (大于 1), k_2 个 p_i 为偶数, k_0 个 $p_i=1$, 满足 $k_0+k_1+k_2=k$, 我们有:

- $P_n(x)$ 的极值点个数: $k-1+k_2=k_0+k_1+2k_2-1$
- $P_n(x)$ 的拐点个数: $k+2k_1+k_2-2=k_0+3k_1+2k_2-2$

39.6 柯西收敛准则

定理 39.6.1 (柯西收敛准则)

柯西极限存在准则, 又称柯西收敛准则, 给出某个式子 (数列、数项级数、函数等) 收敛的一个充分必要条件, 主要应用在数列、数项级数、函数、反常积分、函数列和函数项级数等的收敛性判断中.

命题 39.6.1 (柯西收敛准则: 数列)

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是: 对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n,m>N$ 时, $|a_n-a_m|<\varepsilon$, 我们将满足条件的 $\{a_n\}$ 称为柯西序列, 上述定理也可表述为: 数列 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当 $\{a_n\}$ 是柯西序列

证明

(1). 必要性:

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\eta$, 对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N_0\in\mathbb{N}$, 当 $n>N_0$ 时, $|a_n-\eta|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 我们有:

$$\begin{cases}\forall n>N_0, s.t.\ |a_n-\eta|<\dfrac{\varepsilon}{2}\\ \forall m>N_0, s.t.\ |a_m-\eta|<\dfrac{\varepsilon}{2}\end{cases}\Rightarrow |xn-x_m|=|(x_n-\eta)-(x_m-\eta)|\le|x_n-\eta|+|x_m-\eta|\le\varepsilon$$

(2). 充分性:

命题 39.6.2 (柯西收敛准则: 数项级数)

证明

(1). 必要性:

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \eta$, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_0 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_0$ 时, $|a_n - \eta| < \frac{\varepsilon}{2}$, 我们有:

$$\begin{cases} \forall n > N_0, s.t.\ |a_n - \eta| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall m > N_0, s.t.\ |a_m - \eta| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow |x_n - x_m| = |(x_n - \eta) - (x_m - \eta)| \le |x_n - \eta| + |x_m - \eta| \le \varepsilon$$

(2). 充分性:

命题 39.6.3 (柯西收敛准则: 函数)

39.7 阿达玛不等式

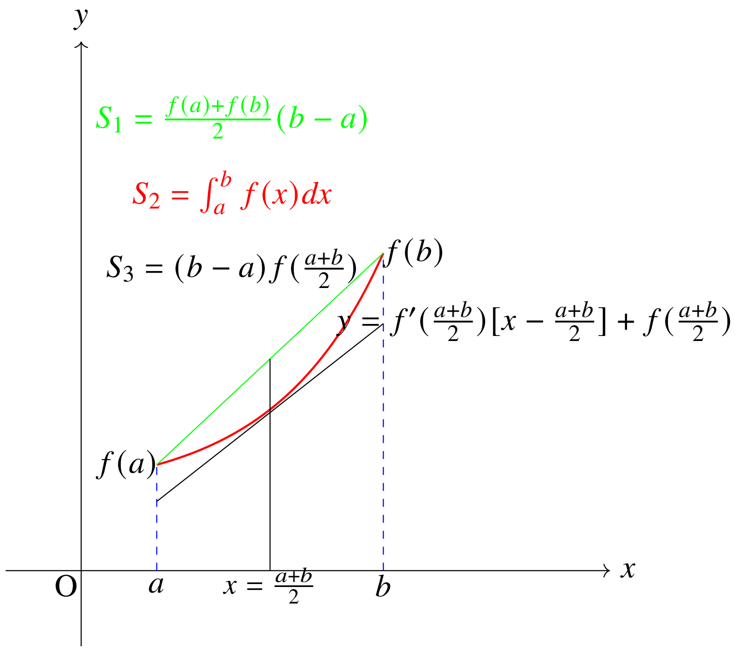


图 39.3: *Hadamard* 不等式

定理 39.7.1 (Hadamard 不等式)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x) \ge 0$, 下面不等式成立:

$$f(\frac{a+b}{2}) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \le \frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$$

证明

原不等式可以化为:

$$(b-a)f(\frac{a+b}{2}) \le \int_a^b f(t)dt \le \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

我们由图39.3可以发现:
不等式左边表示的过 $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$ 的切线与 $x=a, x=b, y=0$ 围成的图形的面积 S_3;
不等式中间表示的是 $f(x)$ 与 $x=a, x=b, y=0$ 围成的曲边梯形的面积 S_2;
不等式右边表示的是直线 $x=a, x=b, y=0$ 与直线 $y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$ 围成的梯形的面积 S_1.
我们可以由图形上直观的看出三个面积的大小关系: $S_3 \leq S_2 \leq S_1$
对于左边的不等式, 我们将 $f(x)$ 在 $x=\frac{a+b}{2}$ 处展开得到:

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2$$

我们由 $f''(x)>0$, 我们可以得到:

$$f(x)>f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})$$

两边同时在 $[a,b]$ 内取定积分得到:

$$\int_a^b f(x)dx > \int_a^b [f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})] = (b-a)f(\frac{a+b}{2})$$

对于右边的不等式, 我们构造辅助函数:

$$F(x)=\frac{x-a}{2}[f(x)+f(a)]-\int_a^x f(t)dt,\ F(a)=0$$

$$\begin{cases} F'(x)=\frac{x-a}{2}f'(x)-\frac{f(x)-f(a)}{2} \\ F''(x)=\frac{x-a}{2}f''(x) \end{cases} \quad F'(0)=0, F''(x)\geq 0 \Rightarrow F'(x)\geq 0$$

我们得到 $F'(x)\geq 0 \Rightarrow F(x)$单调递增,$F(x)\geq F(a)=0$