线性方程组

具体型方程组

齐次方程组

- 方程组
  $$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$
  称为 m 个方程, n 个未知数的齐次方程组
- 向量形式:
  $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=0$
  其中
  $$\boldsymbol{\alpha}_i=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}(j=1,2,\cdots,n)$$
- 矩阵形式
  $A_{m\times n}X=0$
  $$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$
- 1. 当 $r(A)=n$ 时, $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 线性无关, 方程组只有零解
- 2. 当 $r(A)=r<n$ 时, $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 线性相关, 方程组有非零解, 且有 $n-r$ 个线性无关解

基础解系和通解

基础解系

- 设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 满足:
  - $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是方程组的解
  - $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关
  - 方程组 $AX=0$ 任意一个解均可以由 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表出
- $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是方程组 $AX=0$ 的基础解系

通解

- 设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 为方程组 $AX=0$ 的基础解系, 则 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是方程组 $AX=0$ 的通解, 其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}\in\mathbb{R}$

非齐次方程组

- 方程组
  $$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$
  称为 m 个方程, n 个未知数的非齐次方程组
- 向量形式:
  $$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}$$
  其中:
  $$\boldsymbol{\alpha}_i=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{mj}\end{bmatrix}(j=1,2,\cdots,n)$$
- 矩阵形式:
  $$A_{m\times n}X=\boldsymbol{\beta}$$
  $$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix},X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_{mj} \end{bmatrix}$$

记作为矩阵 A 的增广矩阵, 简记为 $[A \quad \boldsymbol{\beta}]$

- 1. $r(A) \neq r([A, \boldsymbol{\beta}])$, 方程组无解
  - $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出
- 2. $r(A) = r([A, \boldsymbol{\beta}]) = n$, 方程组有唯一解
  - $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,
  - $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关
- 3. $r(A) = r([A, \boldsymbol{\beta}]) < n$, 方程组有无穷多组解

特解和通解

特解

- η 是非齐次性方程组 $AX = \boldsymbol{\beta}$ 的一个特解

通解

- 设 $k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是方程组 $AX = 0$ 的通解, 其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$, 非齐次性方程组的通解:
  $k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r} + \boldsymbol{\eta}$

两个方程组公共解

- 齐次性线性方程组 $A_{m\times n}X = 0$ 和 $B_{m\times n}X = 0$ 的公共解是满足方程组
  $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} X = 0$
- 非齐次性性线性方程组 $A_{m\times n}X = \alpha$ 和 $B_{m\times n}X = \beta$ 的公共解是满足方程组
  $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}$
- 给出方程组 $A_{m\times n}X = 0$ 的通解 $k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\xi}_s$, 代入第二个方程组 $B_{m\times n}X = 0$ 得到 $k_i(i = 1, 2, \cdots, s)$ 之间的关系,代回方程 $A_{m\times n}X = 0$
- 给出方程组$A_{m\times n}X = 0$ 的基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_s$ 和方程组 $B_{m\times n}X = 0$ 的基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_t$,公共解为:

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\xi}_s = l_1\boldsymbol{\eta}_1 + l_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + l_t\boldsymbol{\eta}_t$$

同解方程组

- 如果两个方程组 $A_{m\times n}X=0$ 和 $B_{m\times n}X=0$ 有完全相同的解, 则称它们为同解方程组
  - $AX=0$ 的解满足 $BX=0$ 且 $BX=0$ 的解满足 $AX=0$
  - $r(A)=r(B)$ 且 $AX=0$ 的解满足 $BX=0$ ($BX=0$ 的解满足$AX=0$)
    - $r(A)=r(B)=r(\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix})$