大数定理和中心极限定理

1. 依概率收敛

设随机变量 X 与随机变量序列 $\{X_n\}(n=1,2,3,\cdots,n)$

$$\begin{cases}\forall\varepsilon>0,\ \lim\limits_{n\Rightarrow\infty}P\{|X_n-X|\geq\varepsilon\}=0\\ \forall\varepsilon>0,\ \lim\limits_{n\Rightarrow\infty}P\{|X_n-X|<\varepsilon\}=1\end{cases}$$

称随机变量序列 $\{X_n\}$ **依概率收敛于随机变量** X, 记作

$$\lim_{n\Rightarrow\infty}X_n=X(P)\ or\ X_n\xrightarrow{P}X(n\Rightarrow\infty)$$

2. 大数定理

2.1 切比雪夫大数定理

假设 $\{X_n\}(n=1,2,\cdots,n)$ 是相互独立的随机变量序列, 如果方差 $D(X_i)$ 存在且一致有上界, $\forall i\geq 1,\ s.t.\ D(X_i)\leq C, C\in\mathbb{R}$,

$\{X_n\}$ 服从大数定理

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$$

2.2 伯努利大数定理]

假设 μ_n 是 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数, 在每次试验中事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$, $\frac{\mu_n}{n}\xrightarrow{P}p$

$$\forall\varepsilon>0,\ \lim_{n\Rightarrow\infty}P\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|<\varepsilon\}=1$$

2.3 辛钦大数定理

假设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 如果 $E(X_i)=\mu(i=1,2,\cdots,n)$ 存在,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\mu$$

$$\forall\varepsilon>0,\ \lim_{n\Rightarrow\infty}P\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\}=1$$

3. 中心极限定理

[中心极限定理]

[正态分布]

3.1 列维-林德伯格定理

假设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 如果
$E(X_i)=\mu, D(X_i)=\sigma^2>0(i=1,2,\cdots,n)$

$$\forall x\in\mathbb{R},\lim_{n\Rightarrow\infty}P\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n\sigma}}<x\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t2}{2}}dt=\Phi(x)$$

3.1.1 中心极限定理推论

- $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\sim N(n\mu,n\sigma^2)$
- $P\{a<\sum\limits_{i=1}^{n}X_i<b\}\approx\Phi(\frac{b-n\mu}{\sqrt{n\sigma}})-\Phi(\frac{a-n\mu}{\sqrt{n\sigma}})$

3.2 棣莫弗-拉普拉斯定理

假设随机变量 $Y_n\sim B(n,p)(0<p<1,n\geq1)$

$$\forall x\in\mathbb{R},\lim_{n\Rightarrow\infty}P\{\frac{Y_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}<x\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t2}{2}}dt=\Phi(x)$$