向量组

向量和向量组的线性相关性

向量的定义和运算

向量的定义

- n 个数构成的有序数组 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 称为一个 n 维向量, 记作
- $\boldsymbol{\alpha} = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$, $\boldsymbol{\alpha}$ 称为 n 维行向量,$\boldsymbol{\alpha}^T$ 称为 n 维列向量, 其中 a_i 称为向量的第 i 个分量

向量的线性运算

- 向量的加法: $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \xlongequal{def} [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n]$
- 标量乘法: $k\boldsymbol{\alpha} \xlongequal{def} [ka_1, ka_2, \cdots, ka_n], k \in \mathbb{R}$

向量的内积和正交

向量的内积

- 设 $\boldsymbol{\alpha} = [a_1, a_2, \cdots, a_n]^T, \boldsymbol{\beta} = [b_1, b_2, \cdots, b_n]^T$, 则称:
  $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 的内积, 记作 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$

向量的模

- $\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的模, 特别的当 $\boldsymbol{\alpha}$时, 称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量

正交

- 当 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta} = 0$ 时, 称向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 是正交向量

标准正交基

- 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 满足:
  $\boldsymbol{\alpha}_i^T \boldsymbol{\alpha}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$
  则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是标准或单位正交向量组

正交矩阵

- 设 A 是 n 阶方阵, 若 $A^T A = E$, 则称 A 为正交矩阵
- $A^T A = E \Rightarrow A^T = A^{-1}$
- $|A| = \pm 1$
- A 的行(列)向量是标准正交向量组

施密特正交化

- 线性无关的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的标准正交化公式:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \cdots \\ \boldsymbol{\beta}_n = \boldsymbol{\alpha}_n - \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \boldsymbol{\beta}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)} \boldsymbol{\beta}_2 - \cdots - \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}_{n-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{n-1}, \boldsymbol{\beta}_{n-1})} \boldsymbol{\beta}_{n-1} \end{cases}$$

- 将 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 单位化:
  $$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}_1 = \dfrac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|} \\ \boldsymbol{\eta}_2 = \dfrac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} \\ \cdots \\ \boldsymbol{\eta}_n = \dfrac{\boldsymbol{\beta}_n}{\|\boldsymbol{\beta}_n\|} \end{cases}$$
- $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 是一个标准正交向量组

向量组的线性相关性

线性相关和线性表出

线性组合

- 设有 m 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 和 m 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 向量
  $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m$
  称作向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合

线性表出

- 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以表示为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合

$\exists k_i(i = 1, 2, \cdots, m) \in \mathbb{R},\ s.t.\ \boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m$
向量$\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出

线性相关

- 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$

$$\exists k_i \neq 0(i = 1, 2, \cdots, m),\ s.t.\ k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = 0$$

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关

线性无关

- 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$

$$\exists k_i \in \mathbb{R},\ s.t.\ k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = 0$$

当且仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$ 时上式成立, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关

判别线性相关性的七大定理

- 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关的充要条件: 至少有一个向量可以由其余的 $n-1$ 个向量线性表出
- 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关, $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出, 且表示唯一
- 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出, 且 $t > s$, 则 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性相关

- 设 m 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$, 其中
$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1 = [a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{n1}]^T \\ \boldsymbol{\alpha}_2 = [a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{n2}]^T \\ \cdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m = [a_{1m}, a_{2m}, \cdots, a_{nm}]^T \end{cases}$
向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充要条件时齐次线性方程组 $AX = 0$ 有非零解, 也等价于零空间不为零
- 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出, 等价于非齐次方程组方程 $AX = \boldsymbol{\beta}$ 有解; 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出, 等价于非齐次方程组方程 $AX = \boldsymbol{\beta}$无解
- 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 一部分向量线性相关, 那么整个向量组也线性相关
- 如果一组 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, 那么把这些向量各任意添加 m 个分量得到的新向量组 $(n+m)$ 维 $\boldsymbol{\alpha}_1^*, \boldsymbol{\alpha}_2^*, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n^*$ 线性无关; 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关, 那各去掉相同的若干个分量所得到的新向量组也线性相关

极大线性无关组和向量组的秩

极大线性无关组

- 在向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$, 如果存在部分向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 满足:
  - $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关
  - 向量组中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}_i (i = 1, 2, \cdots, s)$ 都可以被向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表出
  - 称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是原向量组的一个极大线性无关组
- 一个向量组的极大线性无关组不唯一, 对于线性无关的向量组, 它的极大线性无关组是自身

向量组的秩

- 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 中所含向量的个数 r 称为向量组的秩,记作:

$$rank(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = r$$

- $r(A) = r(col(A)) = r(row(A))$
- 初等行变换和初等列变换不改变矩阵的秩
- $A \xrightarrow{col} B, A$ 的行向量与 B 的行向量是等价向量组

- 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 及 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$, 若 $\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,\cdots,t)$ 均可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出,则:

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) \leq r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t)$$

等价向量组

- 设两个向量组: $(1)\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, (2)\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$, 若 (1) 中向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 均可由 (2) 中向量线性表出, 则称向量组 (1) 可由向量组 (2) 线性表出;若向量组 (1) 和向量组 (2) 互相线性表出, 称向量组 (1) 与向量组 (2) 是等价向量组, 记作 $(1) \cong (2)$
- $(1) \cong (1)$
- $(1) \cong (2), (2) \cong (1)$
- $(1) \cong (2), (2) \cong (3)$, 则$(1) \cong (3)$
- 向量组和它的极大线性无关组是等价向量组

向量空间

向量空间的定义

- 设 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$ 是 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中线性无关的有序向量, $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ 均可由向量组 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$ 线性表出, 且表出式:
  $\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{\xi}_1 + a_2\boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{\xi}_n$
  称 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$ 是 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 基向量的个数 n 称为向量空间的维度, $[a_1, a_2, \cdots, a_n]^T$ 是向量 α 在基向量 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$ 的坐标

基变换

- $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$ 和 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 是向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中的两个基, 其有关系:

$$[\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n] = [\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n] \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n]C$$

上式是基 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 的基变换公式,矩阵 C 是基 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 的过渡矩阵,C 的第 i 列即是 η_i 在基 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$ 下的坐标, 过渡矩阵 C 为可逆矩阵

坐标变换

- 设向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$ 和基 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 下的坐标为别是 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T, \mathbf{y} = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^T$

$\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n]\mathbf{x} = [\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n]\mathbf{y}$

$[\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n] = [\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n]C$

$\mathbf{x} = C\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} = C^{-1}\mathbf{x}$