LaTeX main

Sun for morning, moon for night, and you forever.

作者：Lyshmily.Y & 木易

组织：Lyshmily.Y

时间：December 11, 2024

版本：V.2.0

邮箱：yjlpku.outlook.com & 845307723@qq.com

在没有结束前，总要做很多没有意义的事，这样才可以在未来某一天，用这些无意义的事去堵住那些讨厌的缺口

目录

6 第 6 部分 * 每日一题 II

第一部分

高数(上)

第 1 部分目录

第 1 章 预备知识

内容提要

- 函数定义和性质
- 基本不等式
- 柯西不等式
- 三角函数和反三角函数
- 特殊函数

1.1 函数

定义 1.1.1 (函数)

1. 函数定义:

X, Y 是给定的两个集合, 若对于任意 $x \in X$, 存在法则 f, 使得唯一的 $y = f(x)$ 满足 $y \in Y$, 则称 f 为从 X 到 Y 的一个函数, 记为 $f: X \to Y$, 其中 X 称为定义域, $f(x)(x \in X)$ 称为值域

2. 函数的三要素: 定义域、对应法则和值域

定义 1.1.2 (函数的基本性质)

1. 单射: 若对于任意 $x_1, x_2 \in X$, 若 $x_1 \neq x_2$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$
2. 满射: 若对于任意 $y \in Y$, 存在 $x \in X$, 使得 $f(x) = y$
3. 双射: 若 f 既是单射又是满射

定义 1.1.3 (函数基本运算)

1. 基本四则运算
2. 复合运算
3. 反函数运算

性质 1. 函数四大性质

- 有界性
- 奇偶性: $\begin{cases} \text{奇函数: } f(-x) = -f(-x) \\ \text{偶函数: } f(-x) = f(x) \end{cases}$
- 周期性: $f(x+T) = f(x)$
- 单调性: $\forall x_1, x_2 \in I(x_1 \neq x_2), \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > (<)0$, $f(x)$ 单调递增 (减)

推论 1.1.1 (奇偶性推论)

任意一个定义在 $[-l, l]$ 上的函数 $f(x)$ 均可以写成一个奇函数和一个偶函数的和 $f(x) = h(x) + g(x)$, 其中 $h(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ 是偶函数, $g(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ 是奇函数 ♠

推论 1.1.2 (周期性、中心对称性、轴对称性)

(1). $f(x)$ 有对称中心 (a, c), 且关于直线 $x = b$ 轴对称, 我们可以推出 $f(x)$ 的一个周期 $T = 4|b - a|$.

(2). $f(x)$ 有两个对称中心 (a, c) 和 (b, c), 我们可以推出 $f(x)$ 的一个周期 $T = 2|b - a|$.

(3). $f(x)$ 有两个对称轴直线 $x = a$ 和直线 $x = b$, 我们可以推出 $f(x)$ 的一个周期 $T = 2|b - a|$. ♠

证明

(1).

$$\begin{cases} f(2a - x) + f(x) = 2c \\ f(2b - x) = f(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(2a - x) + f(2b - x) = 2c \\ f(2a - 2b + x) + f(x) = 2c \end{cases} \rightarrow f(x) = f(x + 4a - 4b)$$

(2).

$$\begin{cases} f(2a - x) = f(2b - x) \\ f(2a - 2b + x) = f(x) \end{cases} \rightarrow f(x) = f(x + 2a - 2b)$$

(3).

$$\begin{cases} f(2a - x) = f(x) \\ f(2b - x) = f(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(2a - x) = f(2b - x) \\ f(2a - 2b + x) = f(x) \end{cases} \rightarrow f(x) = f(x + 2a - 2b)$$

1.1.1 初等函数

定义 1.1.4 (初等函数)

初等函数是指可以用有限次基本初等函数和有限次代数运算得到的函数, 六种基本初等函数:

1. 常数函数: $y = C$
2. 幂函数: $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^*$
3. 指数函数: $y = a^x, a > 0, a \neq 1$
4. 对数函数: $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$
5. 三角函数: $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$
6. 反三角函数: $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \cot^{-1}(x), y = \sec^{-1}(x), y = \csc^{-1}(x)$

1.1.2 三角函数和反三角函数

定理 1.1.1 (积化和差 & 和差化积 & 倍角公式)

积化和差公式:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$

和差化积公式:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

倍角公式:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

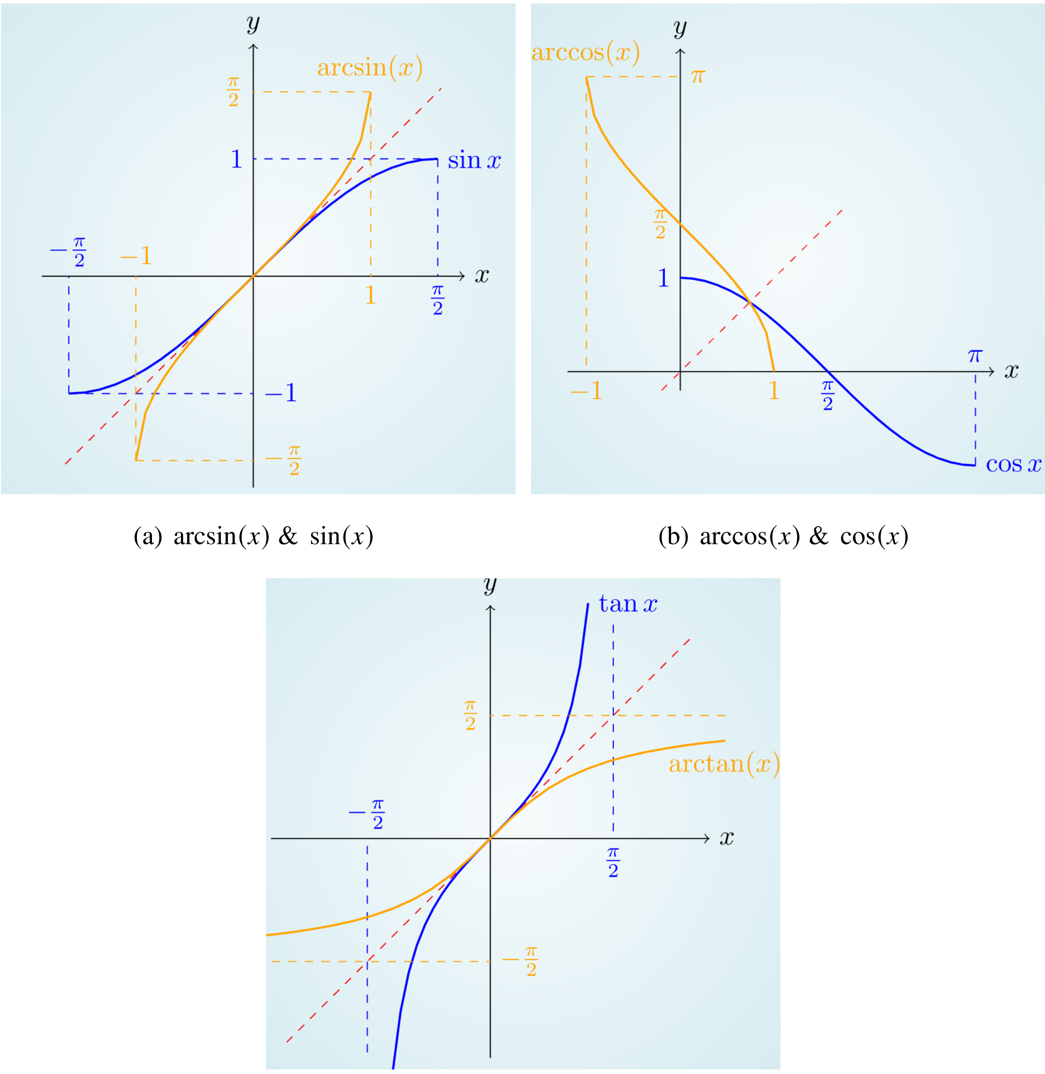
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \qquad \cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

定义 1.1.5 (反三角函数)

1. $\arcsin x$ 的定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$
2. $\arccos x$ 的定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$
3. $\arctan x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$



(a) $\arcsin(x)$ & $\sin(x)$ (b) $\arccos(x)$ & $\cos(x)$

(c) $\arctan(x)$ & $\tan(x)$

图 1.1: 反三角函数图像

1.1.3 特殊函数

定义 1.1.6 (特殊函数)

1. 阶乘函数:

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1, (2n)!! = 2^n\cdot n!, 0! = 1$$

2. 二项式系数:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i}$$

3. 绝对值函数:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

4. 符号函数:

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

5. 取整函数:

$$f(x) = [x], x-1 < [x] \leq x, \lim_{x\to 0^+} = 0, \lim_{x\to 0^-} = -1$$

6. 分段函数:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in D_1 \\ f_2(x) & x \in D_2 \\ \ldots \end{cases}$$

7. 黎曼函数:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & p,q \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q} \in (0,1) \\ 0 & x \notin \mathbb{Q}, x = 0, 1 \end{cases}$$

8. 狄利克雷函数:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

♣

定理 1.1.2 (平均值不等式 $a_i > 0$)

平方平均值:

$$Q_n = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}{n}}$$

算术平均值:

$$A_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$$

几何平均值:

$$G_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

调和平均值:

$$H_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i}}$$

平均值不等式:

$$Q_n \geq A_n \geq G_n \geq H_n, \text{当且仅当} a_1 = a_2 = \cdots = a_n \text{等号成立}$$

定理 1.1.3 (柯西不等式)

二维形式:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2, \text{当且仅当} ad = bc \text{时等号成立}$$

n 维形式:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right), \text{当且仅当} \frac{a_i}{b_i} = c \text{时等号成立}$$

向量形式:

$$(\alpha, \beta)^2 \leq (\alpha, \alpha)(\beta, \beta)$$

定理 1.1.4 (重要不等式)

1. $\sin x < x < \tan x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$　　$\arctan x < x < \arcsin x, x \in [0, 1]$
2. $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$　　$x < \tan x < \frac{4}{\pi}x, x \in (0, \frac{\pi}{4})$
3. $e^x \geq x + 1, x \in \mathbb{R}$　　$x - 1 \geq \ln x, x \in (0, +\infty)$
4. $\frac{1}{1+x} < \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$

定理 1.1.5 (重要公式)

1. $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$
2. $(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$　　$(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

3. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$
4. $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-1}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}), n \in \{2k+1 | k \in \mathbb{N}\}$

1.2 函数的表示方法

1.2.1 显式表达

定义 1.2.1 (显示表达)

$y = f(x)$ 初等函数都是显性表达

1.2.2 隐式表达

定义 1.2.2 (隐式表达)

$f(x, y) = 0$ 一般不能用 x 表示 y, 也不能用 y 表示 x

1.2.3 极坐标

定义 1.2.3 (极坐标)

极坐标系是平面直角坐标系的一种推广, 它是由一个原点 O 和一个射线 Ox 组成的, 其中 O 称为极点, Ox 称为极轴, 任意一点 P 到极点 O 的距离 r 叫做点 P 的极径, 点 P 到极轴的角 θ 叫做点 P 的极角, 记为 $P(r, \theta)$

定义 1.2.4 (重要极坐标方程)

1. 圆方程: $r = a, r = a\sin\theta, r = a\cos\theta$
2. 心形线方程: $r = a(1 \pm \cos\theta), r = a(1 \pm \sin\theta)$
3. 阿基米德螺线方程: $r = a\theta$
4. 三叶玫瑰线方程: $r = a\sin 3\theta, r = a\cos 3\theta$
5. 伯努利双扭线方程: $r^2 = a^2\cos 2\theta, r^2 = a^2\sin 2\theta$

1.2.4 参数方程

定义 1.2.5 (参数方程)

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

定义 1.2.6 (重要参数方程)

1. 摆线方程: $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$
2. 星形线方程: $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$

♣

注

- 双曲函数和反双曲函数的定义和性质 **def** : 39.2.1
- 常见曲线极坐标和参数方程 **def** : 39.6.1

第 2 章 数列极限

内容提要

- ❑ 数列极限定义和性质
- ❑ 归结原理
- ❑ 夹逼准则
- ❑ 单调有界准则

2.1 数列极限

定义 2.1.1 (数列极限)

设 x_n 是一数列, 若存在常数 a, $\forall \epsilon > 0, \exists N_0 > 0$, 当 $n > N_0$ 时, $|x_n - a| < \epsilon$ 恒成立, 常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限或者说数列 $\{x_n\}$ 趋近于 a ♣

推论 2.1.1 (唯一性)

若极限存在, 则极限唯一 ♠

推论 2.1.2 (有界性)

若数列 $\{x_n\}$ 的极限 a 存在, 则数列 $\{x_n\}$ 有界 ♠

推论 2.1.3 (保号性)

若数列 $\{x_n\}$ 的极限 $a > 0 (a < 0)$, 则存在正整数 N_0, 当 $n > N_0$ 时, $x_n > 0 (x_n < 0)$, 取 $\epsilon = \pm a$ 即可 ♠

注

- 若数列的任意子列发散, 数列极限不存在
- 若数列的任意两个子列极限存在但不相等, 数列极限不存在

推论 2.1.4 (数列极限)

- 如果数列从某项起有 $x_n \geq 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $a \geq 0$
- 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |A|$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \to \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1, & a \neq 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \text{不一定存在}, & a = 0 \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = a \to \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty, & |a| > 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0, & |a| < 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \text{不确定}, & |a| = 1 \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$存在且$x_n > 0 \to \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$

2.2 数列极限计算

2.2.1 定义法

定义 2.2.1 (极限的四则运算)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}, b \neq 0$

2.2.2 归结原理

定义 2.2.2 (归结原理)

设函数 $f(x)$ 在去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$ 上有定义, 那么 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ 的充分必要条件是: 对与一切序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathring{U}(a,\delta)$, 只要 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 就有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$

2.2.3 夹逼准则

定义 2.2.3 (夹逼准则)

设数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 满足 $x_n \leq y_n \leq z_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, 条件可变为 $n > N_0$ 时, $x_n \leq y_n \leq z_n$(有限无关性)

推论 2.2.1 (夹逼准则)

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_1^n+u_2^n+u_3^n+\cdots+u_m^n}=\max\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$$

证明

令 $a=\max\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$

$$a^n\le u_1^n+u_2^n+u_3^n+\cdots+u_m^n\le ma^n$$

夹逼准则:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a^n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{(ma^n)}=a=\max\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$$

2.2.4 单调有界准则

定义 2.2.4 (单调有界准则)

单调有界数列必有极限 **the** : 39.1.1

2.3 Exercise

命题 2.3.1

设 $x_1=a\ge 0,y_1=b\ge 0,a\le b,x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n},y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}(n=1,2,\cdots)$, 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$

命题 2.3.2

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$, 且 $|q|<1$, 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$

命题 2.3.3

设 $f_n(x)=1-(1-\cos x)^n(n=1,2,\cdots)$

(1). 证明: 方程 $f_n(x)=\dfrac{1}{2}$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内有且只有一个实数根 x_n

(2). 设 $x_n\in(0,\dfrac{\pi}{2})$, 满足 $f_n(x)=\dfrac{1}{2}$, 证明:

$$\arccos\frac{1}{n}<x_n<\frac{\pi}{2}, \text{且} \lim_{n\to+\infty}x_n=\frac{\pi}{2}$$

命题 2.3.4

设 $x_1>0$, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=\ln(e^{x_n}-1)-\ln x_n$, 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在并求其值

命题 2.3.5

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $|f'(x)|<1$, 当 $x\in[a,b]$ 时, 有 $a<f(x)<b$,$F(x)=\dfrac{x+f(x)}{2}$, 证明:

(1). $\exists!\ x^*\in(a,b),\ s.t.\ F(x^*)=x^*$

(2). 对 $x_0\in[a,b]$, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=F(x_n)(n=0,1,2,\cdots)$, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x^*$

命题 2.3.6

(1). 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数, 证明:

$$f(k+1)\le\int_k^{k+1}f(x)dx\le f(k),\ k=1,2,\cdots$$

(2). 证明: $\ln(1+n)\le 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\le 1+\ln n$, 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}$

命题 2.3.7

设 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续, 且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=-\infty$, 证明: $f(x)$ 在 (a,b) 内有最大值

引理 2.3.1 (不单调数列极限)

1. 压缩映射原理: 从定义出发, 证明: $|x_n-a|$ 极限为 0
2. 柯西列: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x_{n+1}-x_n)$, 证明这个级数收敛即可证明出数列 $\{x_n\}$ 极限存在
3. 奇数项和偶数项极限存在且相等: $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=A$

命题 2.3.8

设 $2x_1=1,2x_{n+1}=1-x_n^2$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$

命题 2.3.9

设 $x_1=1,x_n=1+\dfrac{1}{1+x_{n-1}},(n=1,2,\cdots)$, 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求出此极限

命题 2.3.10

设 $x_1=1,2x_{n+1}=x_n+\sqrt{x_n^2+\dfrac{1}{n^2}},(n=1,2,\cdots)$, 证明极限数列 $\{x_n\}$ 收敛.

命题 2.3.11

设 $x_0=1,x_{n+1}=\dfrac{1}{x_n^3+4},(n=0,1,2,\cdots)$, 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求出此极限

第 3 章 函数极限和连续

内容提要

- 函数极限定义和性质
- 无穷小概念和比阶
- 洛必达法则
- 连续和间断

3.1 函数极限

定义 3.1.1 (函数极限)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ϵ，总存在正数 δ，使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\epsilon$，那么常数 A 是当 x 趋于 x_0 时函数 $f(x)$ 的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

$$\forall\epsilon>0,\exists\xi>0,x\in(x_0-\xi,x_0)\cup(x_0,x_0+\xi),|f(x)-A|<\epsilon\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

定义 3.1.2 (单侧极限)

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左 (右) 邻域内有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ϵ，总存在正数 δ，使得当 x 满足不等式 $0<x-x_0<\delta(0<x_0-x<\delta)$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\epsilon$，那么常数 A 是当 x 趋于 x_0 时函数 $f(x)$ 的左 (右) 极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A(\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A)$

定义 3.1.3 (无穷远极限)

无穷远处极限 (双侧, 单侧只取一边): $f(x)$ 在 $(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$ 上有定义, $\forall\epsilon>0,\exists A>0$, 当 $|x|>A$ 时, $|f(x)-l|<\epsilon$, 我们称 l 是当 x 趋于无穷远时函数 $f(x)$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$

定义 3.1.4 (极限发散)

1. 震荡发散: $\lim\limits_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})$ 反复震荡
2. 左右极限存在但不相等: $\lim\limits_{x\to 0}[x]$
3. 广义收敛: $f(x)$ 在 $x=a$ 的去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$ 上有定义, $\forall X>0,\exists\delta>0$, 当 $0<|x-a|<\delta$ 时, $|f(x)|>X$, 则称 $f(x)$ 在 $x=a$ 处广义收敛

性质 1. 唯一性

若极限存在, 则极限唯一

性质 1. 局部有界性

若函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\exists M>0,\delta>0,\ s.t.\ x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x-0+\delta),|f(x)|\leq M$

性质 1. 局部保号性

若函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>(<)0,\exists\delta>0,\ s.t.\ x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x-0+\delta),f(x)>(<)0$

3.2 函数极限计算

3.2.1 无穷小 (大) 概念和比阶

定义 3.2.1 (无穷小 (大))

1. 无穷小: 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义, 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, 那么称函数 $f(x)$ 是当 x 趋于 x_0 时的无穷小
2. 无穷大: 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义, 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$, 那么称函数 $f(x)$ 是当 x 趋于 x_0 时的无穷大

定义 3.2.2 (无穷小比阶)

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} g(x) = 0$$

1. 等价无穷小: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, 记作 $f(x) \sim g(x)$
2. 同阶无穷小: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = k(k \neq 0)$, 记作 $f(x) \approx g(x)$
3. 高阶无穷小: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, 记作 $f(x) = o(g(x))$
4. 低阶无穷小: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$, 记作 $g(x) = O(f(x))$

推论 3.2.1 (等价无穷小)

1. $x \to 0, x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(x+1) \sim e^x - 1$
2. $x \to 0, \sin x \sim x - \dfrac{x^3}{6}, \arcsin x \sim x + \dfrac{x^3}{6}, \tan x \sim x + \dfrac{x^3}{3}, \arctan x \sim x - \dfrac{x^3}{3}, \cos x \sim 1 - \dfrac{x^2}{2}$
3. $x \to 0, (1+x)^a - 1 \sim ax, a^x - 1 \sim x\ln a$

定理 3.2.1 (洛必达法则)

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $x = a$ 的某去心邻域内可导 (a 可以为 ∞, 邻域也可以是单侧的), 且 $g'(a) \neq 0$, 满足:(1) 或 (2)

(1). $\dfrac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

(2). $\dfrac{\infty}{\infty}$: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$

如果 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$($l$ 可以是实数或者 ∞) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = l$

证明

构造辅助函数:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x = x_0 \\ f(x) & x \in \mathring{U}(x_0) \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} 0 & x = x_0 \\ g(x) & x \in \mathring{U}(x_0) \end{cases}$$

$F(x), G(x)$ 在 $[x_0, x]$ 上连续, 在 (x_0, x) 内可导, 且 $G'(x) \neq 0$

柯西中值定理:

$$\exists \xi \in (x_0, x),\ s.t. \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(xi)}{G'(\xi)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

定理 3.2.2 (广义洛必达定理)

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 上可导, 满足:

(1). $g'(x) \neq 0$

(2). $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$

(3). $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A(A为有限数或\pm\infty)$

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$

证明

首先考虑 $x \to x_0^-$:

(1). 当 A 为常数时:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ s.t.\ x \in (x_0-\delta, x_0), |\frac{f'(x)}{g'(x)} - A| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow 取定x_1 \in (x_0-\delta, x_0)$$

$x \in (x_1, x)$, 柯西中值定理:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Rightarrow |\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} - A| = |\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$x \in [x_1, x_0)$:

$$\begin{aligned}
|\frac{f(x)}{g(x)} - A| &= |\frac{g(x)-g(x_1)}{g(x)}\left[\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} - A\right] + \frac{f(x_1)-Ag(x_1)}{g(x)}| \\
&\leq |1-\frac{g(x_1)}{g(x)}||\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} - A| + |\frac{f(x_1)-Ag(x_1)}{g(x)}| \\
&\leq (1+|\frac{g(x_1)}{g(x)}|)|\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} - A| + |\frac{f(x_1)-Ag(x_1)}{g(x)}|
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x_1)}{g(x)} = 0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x_1)-Ag(x_1)}{g(x)} = 0 \end{cases}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_2 \in (x_1, x_0), \forall x \in (x_2, x_0),\ s.t.\ |\frac{g(x_1)}{g(x)}| < 1且|\frac{f(x_1)-Ag(x_1)}{g(x)}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

此时, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 = x_0 - x_2, \forall x \in (x_0-\delta_1, x_0), |\dfrac{f(x)}{g(x)} - A| < 2\cdot\dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

(2). 当 A 为 ∞ 时: $|\dfrac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}| = |\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}| > M$

取 $M = 1 \to |f(x)-f(x_1)| > |g(x)-g(x_1)| \to \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$

$x \to x_0^+$ 的情况类似

3.3 连续和间断

定义 3.3.1 (连续点)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0, \delta)$ 内有定义，如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，那么称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续

定义 3.3.2 (间断点)

第一类间断点：

1. 可去间断点：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$($f(x_0)$ 可以无定义)
2. 跳跃间断点：$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

第二类间断点：$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 至少有一个不存在

1. 震荡间断点：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 震荡不存在
2. 无穷间断点：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$
3. 其他第二类间断点

第 4 章 一元微分学

内容提要

- ❏ 导数和微分
- ❏ 基本求导公式
- ❏ 高阶导数
- ❏ 泰勒公式
- ❏ 函数单调性和凹凸性
- ❏ 极值点和拐点
- ❏ 渐近线
- ❏ 曲率和曲率半径

4.1 一元微分学概念

定义 4.1.1 (导数)

设 $y=f(x)$ 定义在区间 I 上, 自变量在 $x=x_0$ 处增加一个增量 Δx 时, 其中 $x_0\in I, x_0+\Delta\in I$, 函数值的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, 如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在, 那么称此极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数, 记为 $f'(x_0)$ 或 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$ 或 $\dfrac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$ ♣

定义 4.1.2 (导数的几何意义)

函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 是函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的切线的斜率 ♣

定理 4.1.1 (导数存在充要条件)

函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导的充要条件是: 函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 存在且相等 ♡

定义 4.1.3 (微分)

设 $y=f(x)$ 定义在区间 I 上, 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导, 那么函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微分为 $dy=f'(x_0)dx$, 其中 dx 是自变量 x 的增量, dy 是因变量 y 的增量

4.2 一元微分学计算

定理 4.2.1 (基本求导公式)

1. $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$
2. $(a^x)'=a^x\ln a$　　$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$
3. $(e^x)'=e^x$　　$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
4. $(\sin x)'=\cos x$　　$(\cos x)'=-\sin x$
5. $(\tan x)'=\sec^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
6. $(\sec x)'=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}=\tan x\sec x$
7. $(\csc x)'=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}=-\cot x\csc x$
8. $(\cot x)'=-\csc^2 x$
9. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\arctan x)'=\dfrac{1}{x^2+1}$
12. $\left(\ln(x+\sqrt{x^2+a})\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$
13. $\left(\ln(x+\sqrt{x^2-a})\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a}}$

定理 4.2.2 (导数四则运算)

1. 和差法则: $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$
2. 积法则: $[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
3. 商法则: $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
4. 复合函数求导: $F[G(x)]'=F[G(x)]'\cdot G'(x)$

定理 4.2.3 (高阶导数)

1. $\sin^{(n)} x = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$ $\qquad \sin^{(n)}(ax+b) = a^n \sin(ax+b+\frac{n\pi}{2})$
2. $\cos^{(n)} x = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$ $\qquad \cos^{(n)}(ax+b) = a^n \cos(ax+b+\frac{n\pi}{2})$
3. $[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ $\qquad [\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$
4. $(\frac{1}{ax+b})^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$
5. 莱布尼茨公式: $(uv)^n = \sum\limits_{i=0}^{n}\binom{i}{n}u^{(i)}v^{(n-i)}$

定理 4.2.4 (泰勒公式)

1. 欧拉公式: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
2. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$
3. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{2n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$
4. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{2n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$
5. $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!}x^{2n-1}, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
6. $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}, x \in (-1, 1)$
7. $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}, x \in (-1, 1)$
8. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots, x \in (-1, 1]$
9. $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \cdots, x \in [-1, 1)$
10. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$

定理 4.2.5 (特殊函数导函数)

1. 隐函数导数:

$$F(x,y) = 0 \Rightarrow F'(x,y)\cdot y' = 0$$

2. 指对数函数求导:

$$\ln y = \ln f(x) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad y = a^{f(x)} \Rightarrow y = e^{f(x)\ln a}$$

3. 反函数导数: $x=\varphi(y), y=f(x)$ 记 $x'_y=\varphi'(y), y'_x=f'(x)$

(1). 一阶导数: $x'_y y'_x=1 \Rightarrow \varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$

(2). 二阶导数: $x''_{yy}=-\dfrac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}$ $\qquad y''_{xx}=-\dfrac{x''_{yy}}{(x'_y)^3}$

4. 参数方程导数: $x=x(t), y=y(t)$

(1). 一阶导数: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$

(2). 二阶导数: $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{dy}{dx}}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dx}}{dt}\cdot\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dx}{dx}\left[\dfrac{d^2y}{dt^2}\cdot\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{d^2x}{dt^2}\cdot\dfrac{dy}{dt}\right]$

4.3 一元微分学应用

4.3.1 几何应用

定义 4.3.1 (函数图像要点)

1. 定义域 (间断点)
2. 奇偶性
3. 渐近线 (铅垂、水平、斜)

Points

(1).

$$\begin{cases} \text{水平渐近线: } \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a \Rightarrow y=a \\ \text{铅垂渐近线: } \lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty \Rightarrow x=a \\ \text{斜渐近线: } \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}=a,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)-ax=b \Rightarrow y=ax+b \end{cases}$$

(2). 在同一个趋向方向中水平渐近线和斜渐进线只能有一个

(3). 间断点处看铅垂渐近线, $\pm\infty$ 处看水平渐近线和斜渐近线

4. 单调性和极值
5. 凹凸性和拐点

4.3.2 函数单调性 & 凹凸性 & 极值点 & 拐点

定义 4.3.2 (单调性)

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是严格单调递增的; $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是严格单调递减的
2. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调不减的; $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调不增的

♣

定义 4.3.3 (凹凸性)

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义

1. $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是凹的
2. $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是凸的
3. $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > (<) \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) (\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是凸 (凹) 的

♣

定义 4.3.4 (极值点)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义, $\forall x \in \mathring{U}(x_0)$, 均有 $f(x) \leq (\geq) f(x_0)$, 称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极 (大) 值

♣

定义 4.3.5 (驻点)

一阶导数为 0 的点称为驻点, 对于多元函数, 驻点是一阶偏导数都为 0 的点

♣

定理 4.3.1 (极值点判别)

第一充分条件: $f(x)$ 在 x_0 处连续, 且在 $\mathring{U}(x_0)$ 内可导

$$\begin{cases} x \in (x_0-\delta, x_0), f'(x) > 0; x \in (x_0, x_0+\delta), f'(x) < 0 & f(x_0) = \max\limits_{x \in U(x_0)} \{f(x)\} \\ x \in (x_0-\delta, x_0), f'(x) < 0; x \in (x_0, x_0+\delta), f'(x) > 0 & f(x_0) = \min\limits_{x \in U(x_0)} \{f(x)\} \\ x \in (x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta), f'(x) \leq (\geq) 0 \end{cases}$$

第二充分条件: $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导, 且 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$

$$\begin{cases} f''(x_0) > 0 & f(x_0) = \min\limits_{x \in U(x_0)} \{f(x)\} \\ f''(x_0) < 0 & f(x_0) = \max\limits_{x \in U(x_0)} \{f(x)\} \end{cases}$$

第三充分条件: $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导, 且 $f^{(m)}(x_0) = 0 (m = 1, 2, \cdots, n-1), f^{(n)}(x_0) \neq$

$0, n \in \{2k|k \in \mathbb{N}^+\}$

$$\begin{cases} f^{(n)}(x_0) > 0 & f(x_0) = \min\limits_{x \in U(x_0)}\{f(x)\} \\ f^{(n)}(x_0) < 0 & f(x_0) = \max\limits_{x \in U(x_0)}\{f(x)\} \end{cases}$$

定义 4.3.6 (拐点)

连续函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, x_0 是区间的内点, 当函数 $f(x)$ 经过点 $(x_0, f(x_0))$ 时, 函数的凹凸性发生改变, 称 $(x_0, f(x_0))$ 是函数 $f(x)$ 的拐点

定理 4.3.2 (拐点判别)

第一充分条件: $f(x)$ 在 x_0 处连续, 且在 $\mathring{U}(x_0)$ 内二阶可导

$$\begin{cases} x \in (x_0 - \delta, x_0), f''(x) < (>)0 \\ x \in (x_0, x_0 + \delta), f''(x) > (<)0 \end{cases}$$

第二充分条件: $f(x)$ 在 x_0 处三阶可导

$$\begin{cases} f''(x_0) = 0 \\ f'''(x_0) \neq 0 \end{cases}$$

第三充分条件: $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导

$$\begin{cases} f^{(m)}(x_0) = 0 & m = 1, 2, \cdots, n-1 \\ f^{(n)}(x_0) \neq 0 & n \in \{2k+1|k \in \mathbb{N}^+\} \end{cases}$$

定理 4.3.3 (多项式函数极值点和拐点个数)

假设 $P_n(x) = \prod\limits_{i=1}^{k}(x - a_i)^{p_i}$, 其中 k_1 个 p_i 为奇数 (大于 1), k_2 个 p_i 为偶数, k_0 个 $p_i = 1$, 满足 $k_0 + k_1 + k_2 = k$

- $P_n(x)$ 的极值点个数: $k - 1 + k_2 = k_0 + k_1 + 2k_2 - 1$
- $P_n(x)$ 的拐点个数: $k + 2k_1 + k_2 - 2 = k_0 + 3k_1 + 2k_2 - 2$

多项式函数极值点和拐点 **the** :39.4.1

注

- 驻点是导数为 0 的点, 不一定是极值点
- 极值点导数可能存在, 也可能不存在
- 极值点导数存在时, 导数值为 0
- 拐点处二阶导数可能存在, 也可能不存在
- 拐点二阶导数存在时, 二阶导数值为 0

定义 4.3.7 (曲率和曲率半径)

设 $y(x)$ 二阶可导, 则曲线 $y=y(x)$ 在其上点 (x_0,y_0) 处的曲率公式表示为:

$$k=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

曲率半径:

$$R=\frac{1}{k}=\frac{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

曲率半径推导

不妨设曲线上的任意一点 $C(x_0,f(x_0))$, 点 C 的曲率圆半径为 R, 曲率圆是 C 点和周围两个点 $A(x_0-\delta,f(x_0-\delta)),B(x_0+\delta,f(x_0+\delta))$ 的外接圆, 且 A,B 无线靠近 C

正弦定理:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{abc}{R}$$

ΔABC 的面积:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\mathbf{det}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\right|$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}=(\delta,f(x_0)-f(x_0))\\ \boldsymbol{b}=(\delta,f(x_0+\delta)-f(x_0))\\ \boldsymbol{c}=(2\delta,f(x_0+\delta)-f(x_0-\delta))\end{cases}$$

$$\begin{cases}S=\dfrac{\sqrt{\delta^2+[f(x_0)-f(x_0-\delta)]^2}\sqrt{\delta^2+[f(x_0+\delta)-f(x_0)]^2}\sqrt{4\delta^2+[f(x_0+\delta)-f(x_0-\delta)]^2}}{4R}\\ S=\left|\delta\left[f(x_0+\delta)+f(x_0-\delta)-2f(x_0)\right]\right|\end{cases}$$

$$R=\lim_{\delta\to 0}\frac{\sqrt{1+\left[\frac{f(x_0+\delta)-f(x_0)}{\delta}\right]^2}\sqrt{1+\left[\frac{f(x_0)-f(x_0-\delta)}{\delta}\right]^2}\sqrt{4+\left[\frac{f(x_0+\delta)-f(x_0-\delta)}{2\delta}\right]^2}}{\left|\dfrac{f(x_0+\delta)+f(x_0-\delta)-2f(x_0)}{\delta^2}\right|}$$

$R=\dfrac{[1+[f'(x_0)]^2]^{\frac{3}{2}}}{f''(x_0)}$, R 越大, 曲线越平坦, R 越小, 曲线越陡峭.

4.3.3 物理应用

定义 4.3.8 (相关变化率)

$$y = y(x)\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

第 5 章 中值定理

内容提要

- 介值定理
- 零点定理
- 费马定理
- 罗尔定理
- 拉格朗日中值定理
- 柯西中值定理
- 积分中值定理
- 达布定理

5.1 介值定理 & 零点定理

定理 5.1.1 (有界和最值定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 有: $m \le f(x) \le M$

其中 m, M 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值

定理 5.1.2 (介值定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 有: $m \le f(x) \le M$

其中 m, M 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值

$\forall \mu \in [m, M], \exists \xi \in [a,b],\ s.t.\ f(\xi) = \mu$

定理 5.1.3 (平均值定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 有: $m \le f(x) \le M$

其中 m, M 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值

当 $a \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le b, \exists \xi \in [a,b],\ s.t.\ f(\xi) = \dfrac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$

定理 5.1.4 (零点定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)f(b)<0, \exists \xi \in (a,b),\ s.t.\ f(\xi)=0$

5.2 费马定理

定理 5.2.1 (费马定理)

$f(x)$ 在 x_0 处可导, 且 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 极值点, 有: $f'(x_0)=0$

证明: 不妨设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取极大值

极值点的定义:

$$\begin{cases} f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0 \\ f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}\ge 0 \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导, $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f(x_0)=0$

5.3 罗尔定理

定理 5.3.1 (罗尔定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a)=f(b)$, 则 $\exists \xi \in (a,b),\ s.t.\ f'(\xi)=0$

证明:

最值定理: $m\le f(x)\le M$

(1). $m=M$ 时,$f(x)=C \Rightarrow f'(x)=0$

(2). $m<M$ 时, $f(a)=f(b)$, 在区间 (a,b) 中至少存在一个最值 (最大值或者最小值)

不妨假在 $x=\xi$ 时,$f(\xi)$ 取得最值, 此时 $x=\xi$ 一定是 $f(x)$ 极值点

费马定理: $f'(\xi)=0$

5.4 拉格朗日中值定理

定理 5.4.1 (拉格朗日中值定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 则 $\exists \xi \in (a,b),\ s.t.\ \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$

证明: 构造辅助函数 $g(x)=f(x)(b-a)-[f(b)-f(a)]x$

$$g(a)=g(b)=bf(a)-af(b)$$

罗尔定理:

$$\exists \xi \in (a,b),\ s.t.\ g'(\xi)=0$$

$$f'(\xi)(b-a)=f(b)-f(a) \Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

5.5 柯西中值定理

定理 5.5.1 (柯西中值定理)

$f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $g'(x)\neq 0$,$\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.$ $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

证明: 构造辅助函数 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$

$$F(a)=F(b)=\frac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}$$

罗尔定理:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ F'(\xi)=0$$

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi) \Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

5.6 泰勒公式

定理 5.6.1 (泰勒公式)

(1). 带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内 $n+1$ 阶导数存在, 对邻域内任意一点 x, 有:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

(2). 带佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式

设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导, 则存在 x_0 的一个邻域, 对于该邻域内任意一点 x, 有:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

5.7 积分中值定理

定理 5.7.1 (积分中值定理)

(1). 一元函数积分中值定理

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.$ $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

证明: 构造函数 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$

拉格朗日中值定理:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ F'(\xi)=\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}\Rightarrow\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$$

(2). 二元函数积分中值定理

$f(x,y)$ 在 D 上连续, 则 $\exists(\xi,\eta)\in D,\ s.t.\ \iint_D f(x,y)dxdy=S_D f(\xi,\eta)$

(3). 广义积分中值定理

$f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $g(x)$ 不变号, 有:

$$\exists\xi\in[a,b],\ s.t.\ \int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

设 $f(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 连续,$g(x,y)$ 平面有界闭区域 D 可积且不变号, 有:

$$\exists(\xi,\eta)\in D,\ s.t.\ \iint\limits_D f(x,y)g(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)d\sigma$$

注

构造函数: $F(x)=\int_a^x f(t)g(t)dt,\ G(x)=\int_a^x g(t)dt, F'(x)=f(x)g(x), G'(x)=g(x)$

柯西中值定理:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}\Rightarrow\frac{f(\xi)g(\xi)}{g(\xi)}=\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

$$f(\xi)\int_a^b g(x)dx=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

5.8 达布定理

定理 5.8.1

1. 导数零点定理

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'_+(a)f'_-(b)<0$, 则 $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)=0$

证明: 不妨假设 $f_+(a)>0,\ f'_-(b)<0$

极限定义:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0\\ \lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x)>f(a)\\ f(x)>f(b)\end{cases}$$

$f(x)$ 一定在 (a,b) 内取得最大值, 费马定理: $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.\ f'(\xi)=0$

2. 导数介值定理 (达布定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'_+(a)\neq f'_-(b),\forall\eta\in(f'_+(a),f'_-(b)),\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.\ f'(\xi)=\eta$

证明: 不妨假设 $f_+(a)=m, f'_-(b)=M(M>m)$

$g(x)=f(x)-\eta x$, $g'(x)=f'(x)-\eta$

$g'_+(a)=f'_+(a)-\eta<0\ g'_-(b)=f'_-(b)-\eta>0$

极限的保号性:

$$\begin{cases}\exists\delta_1>0,\ s.t.\ g(x)<g(a),\ x\in(a,a+\delta_1)\\ \exists\delta_2>0,\ s.t.\ g(x)<g(b),\ x\in(b-\delta_2,b)\end{cases}$$

$g(x)$ 是连续可导函数, 费马定理: $g(x)$ 最小值一定在 (a,b) 内取得, 且 $g'(\xi)=0\to f'(\xi)-\eta=0$

综上所述: $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.\ f'(\xi)=\eta$

5.9 Exercise

5.9.1 零点问题

命题 5.9.1

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 且 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx=0$, 证明: $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有两个零点

命题 5.9.2

假设某 n 次多项式 $P_n(x)$ 的一切根均为实数根, 证明: $P'_n(x),P''_n(x),\cdots,P_n^{n-1}(x)$ 也仅有实根

命题 5.9.3

设 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 二阶可导, $f(0)=0,f(1)=1,f(4)=2$, 证明: $\exists\xi\in(0,4)$, $s.t.\ f''(\xi)=-\dfrac{1}{3}$

泰勒展开

$f(x)$ 在 $x=1$ 处的泰勒展开式:

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-1)^2$$

令 $x=0$,$x=4$:

$$\begin{cases} f(0)=f(1)-f'(1)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)=0,\ \xi_1\in(0,1) \\ f(4)=f(1)+3f'(1)+\frac{9}{2}f''(\xi_2)=2,\ \xi_2\in(1,4) \end{cases}$$

消去 $f'(1)$:

$$3f''(\xi_1)+9f''(\xi_2)=-4$$

(i). 当 $f''(\xi_1)=f''(\xi_2)$ 时, $f''(\xi_1)=f''(\xi_2)=-\frac{1}{3}$, 命题成立

(ii). 当 $f''(\xi_1)\neq f''(\xi_2)$, 不妨设 $f''(\xi_1)<f''(\xi_2)$:

$$\begin{cases} 3f''(\xi_1)+9f''(\xi_2)=-4<12f''(\xi_2) \\ 3f''(\xi_1)+9f''(\xi_2)=-4>12f''(\xi_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''(\xi_2)>-\frac{1}{3} \\ f''(\xi_1)<-\frac{1}{3} \end{cases}$$

达布定理: $\exists\xi_3\in(\xi_1,\xi_2)$, $s.t.\ f''(\xi_3)=-\frac{1}{3}$

综上所述: $\exists\xi\in(0,4)$, $s.t.\ f''(\xi)=-\frac{1}{3}$

命题 5.9.4

设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 在 $(0,2)$ 内三阶可导, 且 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=2$, $f(1)=1$, $f(2)=6$, 证明: $\exists\xi\in(0,2)$, $s.t.\ f^{(3)}(\xi)=9$

命题 5.9.5

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, $f(0)=0$, $f(1)=1$, $\int_0^1 f(x)dx=1$, 证明: $\exists\eta\in(0,1)$, $s.t.\ f''(\eta)<-2$

命题 5.9.6

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导,$f(0)=f(1)=0$, $[f(x)]_{min}=-1$, 证明: $\exists\xi\in(0,1)$, $s.t.\ f''(\xi)\geq 8$

泰勒展开

$[f(x)]_{min} = -1$, 且 $f(0) = f(1) = 0 \Rightarrow f(x)$ 一定在 $(0,1)$ 内部取的最小值

不妨设 $f(c) = -1$, 费马定理: $f'(c) = 0$

$f(x)$ 在 $x = c$ 处泰勒展开式:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2$$

令 $x = 0$ 和 $x = 1$:

$$\begin{cases} f(0) = f(c) - f'(c)c + \dfrac{f''(\xi_1)}{2}c^2 = 0 \\ f(1) = f(c) + f'(c)(1-c) + \dfrac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2 = 0 \end{cases}$$

$f(c) = -1, f'(c) = 0$:

$$f''(\xi_1) = \frac{2}{c^2}, f''(\xi_2) = \frac{2}{1-c^2}$$

$$\begin{cases} c \in (0, \dfrac{1}{2}], f'(\xi_1) \geq 8 \\ c \in (\dfrac{1}{2}, 1), f''(\xi_2) \geq 8 \end{cases}$$

综上所述, $\exists \xi \in (0,1)$, $s.t.\ f''(\xi) \geq 8$

命题 5.9.7

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内二阶可导,$f(a) = g(a), f(b) = g(b)$, 且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 (a,b) 内存在相等的最大值, 证明: $\exists \xi \in (a,b)$, $s.t.\ f''(\xi) = g''(\xi)$ ♠

命题 5.9.8

设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 三阶连续可导,$f(-1) = 0, f'(0) = 0, f(1) = 1$, 证明: $\exists \xi \in (-1,1)$, $s.t.\ f^{(3)}(\xi) = 3$ ♠

泰勒展开

$f(x)$ 在 $x = 0$ 处泰勒展开式:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}x^3$$

令 $x=1$ 和 $x=-1$, 且 $f'(0)=0$

$$\begin{cases} f(1)=f(0)+\dfrac{f''(0)}{2}+\dfrac{f'''(\xi_1)}{6}=1 \\ f(-1)=f(0)+\dfrac{f''(0)}{2}-\dfrac{f'''(\xi_2)}{6}=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{6}=1$$

不妨设 $f'''(x)$ 在 $[-1,1]$ 上最大值 M, 最小值 m:

$$\frac{m}{6}\leq\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{6}\leq\frac{M}{6}\Rightarrow m\leq 3\leq M$$

介值定理: $\exists\xi\in(-1,1)$, $s.t.\ f'''(\xi)=3$

5.9.2 复合函数零点问题

命题 5.9.9

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,(a,b) 内可导,$f(a)=f(b)=0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.\ 2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

命题 5.9.10

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,(a,b) 内可导,$f(a)=f(b)=0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.\ f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

命题 5.9.11

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,(a,b) 内可导,$a>0$, $f(a)=0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.\ f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$

命题 5.9.12

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,(a,b) 内可导,$f(a)=f(b)=0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.\ f'(\xi)+f^2(\xi)=0$

5.9.3 罗尔定理 & 费马定理

命题 5.9.13

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,$(0,1)$ 内可导,$f(0)=1, f(1)=\frac{1}{2}$, 证明: $\exists\xi\in(0,1)$, $s.t.$ $f'(\xi)+f^2(\xi)=0$

命题 5.9.14

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,(a,b) 内可导, 且 $\exists c\in(a,b)$, $s.t.$ $f'(c)=0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.$ $f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$

命题 5.9.15

$f(x)$ 在 $[-2,2]$ 二阶可导,$|f(x)|<1$,$[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$, 证明: $\exists\xi\in(-2,2)$, $s.t.$ $f(\xi)+f''(\xi)=0$

命题 5.9.16

设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 二阶可导,$2f(0)=\int_0^2 f(x)dx=f(2)+f(3)$, 证明: $\exists\xi\in(0,3)$, $s.t.$ $f''(\xi)-2f'(\xi)=0$

5.9.4 原函数、导函数、高阶导数关系

命题 5.9.17

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导,$f(a)=f(b)=0$,$f'_+(a)f'_-(b)>0$ 证明: $\exists\xi\in(a,b)$,$s.t.$$f''(\xi)=f(\xi)$

命题 5.9.18

设 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 二阶可导,$f''(x)\neq f(x)$, 证明: $\exists\xi\in(0,2\pi)$, $s.t.$ $\tan\xi=\frac{2f'(\xi)}{f(\xi)-f''(\xi)}$

命题 5.9.19

设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 二阶可导, 证明: $\forall a>0, \exists c \in (2a,4a)$, $s.t.$ $f(4a)-2f(3a)+f(2a)=a^2f''(c)$

5.9.5 复合函数构造问题

命题 5.9.20

设 $f(x)$ 在 $[\frac{3}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi]$ 可导,$f(\frac{3}{4}\pi)=f(\frac{7}{4}\pi)=0$, 证明: $\exists\xi\in(\frac{3}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi)$, $s.t.$ $f'(\xi)+f(\xi)=\cos\xi$

命题 5.9.21

设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 可导, 证明: $\exists\xi\in(1,2)$, $s.t.$ $\xi f'(\xi)-f(\xi)=f(2)-2f(1)$

柯西中值定理

构造辅助函数:

$$\begin{cases} F(x)=\dfrac{f(x)}{x} \\ G(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2} \\ G'(x)=-\dfrac{1}{x^2} \end{cases}$$

柯西中值定理:

$$\exists\xi\in(1,2),\ s.t. \frac{F(2)-F(1)}{G(2)-G(1)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{F(2)-F(1)}{G(2)-G(1)}=2f(1)-f(2) \\ \dfrac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=f(\xi)-\xi f'(\xi) \end{cases} \Rightarrow \exists\xi\in(1,2),\ s.t.\ \xi f'(\xi)-f(\xi)=f(2)-2f(1)$$

综上所述: $\exists\xi\in(1,2)$, $s.t.$ $\xi f'(\xi)-f(\xi)=f(2)-2f(1)$

命题 5.9.22

设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,(a,b) 内可导,$g'(x)\neq 0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.$ $\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

命题 5.9.23

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导,$f(0)=0, \forall x\in(0,1), f(x)>0$, 证明: $\exists\xi\in(0,1)$, $s.t.$ $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

命题 5.9.24

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导,$f(0)=0, \forall x\in(0,1), f(x)>0$, 证明: $\forall a>0, \exists\xi\in(0,1)$, $s.t.$ $a\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

命题 5.9.25

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导,$f(a)=0, \forall x\in(a,b], f(x)>0$, 证明: $\forall m,n>0, \exists\lambda,\mu\in(0,1)$, $s.t.$ $\frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)}=\frac{mf'(\mu)}{nf(\mu)}$

命题 5.9.26

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导,$g''(x)\neq 0, g(a)=g(b)=f(a)=f(b)=0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.$ $\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

命题 5.9.27

设 $f(x)$ 二阶可导,$f(1)>0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$, 证明: $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有两个根.

命题 5.9.28

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导,$f'(a)=f'(b)=0$, $f(x)>0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.$ $f(\xi)f''(\xi)-[f'(\xi)]^2=0$

命题 5.9.29
设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导,$f'(a)=f'(b)=0, f(x)>0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.\ f(\xi)f''(\xi)-2[f'(\xi)]^2=0$

5.9.6 拉格朗日中值定理 & 柯西中值定理

命题 5.9.30
设 $a,b>0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$. $s.t.\ ae^b-be^a=(1-\xi)e^\xi(a-b)$

命题 5.9.31
设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 可导, 证明: $\exists\xi\in(1,2)$, $s.t.\ f(2)-f(1)=\frac{1}{2}\xi^2f'(\xi)$

命题 5.9.32
设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,(a,b) 可导, 证明: $\exists\xi\in(1,2)$, $s.t.\ 2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$

5.9.7 双中值问题

命题 5.9.33
设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导,$f(a)=f(b)=1$, 证明: $\exists\xi_1,\xi_2\in(a,b)$, $s.t.\ e^{\xi_2-\xi_1}[f'(\xi_2)+f(\xi_2)]=1$

注
取 $\xi_1=\xi_2\to\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.\ f'(x)+f(x)-1=0$
构造辅助函数: $F(x)=e^x[f(x)-1]$

$$F'(x)=e^x[f'(x)+f(x)-1]$$

$F(a)=F(b)=0$, 罗尔定理:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ F'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)+f(\xi)-1=0$$

综上所述: $\exists\xi_1=\xi_2\in(a,b)$, $s.t.\ e^{\xi_2-\xi_1}[f'(\xi_2)+f(\xi_2)]=1$

命题 5.9.34

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,(a,b) 可导, 且 $a>0$, 证明: $\exists\xi,\eta\in(a,b)$, $s.t.\ f'(\xi)=(a+b)\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$

注

令 $\xi=\eta\rightarrow\exists\sigma$, $s.t.\ f'(\sigma)[1-\dfrac{a+b}{2\sigma}]=0$

取 $\sigma=\dfrac{a+b}{2}$ 证毕

命题 5.9.35

设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 连续,$(1,2)$ 可导, 且 $f'(x)\neq0$, 证明: $\exists\xi,\eta,\gamma\in(1,2)$, $s.t.\ \dfrac{f'(\gamma)}{f'(\xi)}=\dfrac{\xi}{\eta}$

注

取 $\xi=\gamma=\eta\in(a,b)$, $s.t.\ \dfrac{f'(\gamma)}{f'(\xi)}=\dfrac{\xi}{\eta}=1$ 恒成立

命题 5.9.36

设 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 二阶连续可导,$f'(0)=0$, 证明: $\exists\xi,\eta,\omega\in(0,\dfrac{\pi}{2})$, $s.t.\ f'(\xi)=\dfrac{\pi}{2}\eta\cdot\sin2\xi\cdot f''(\omega)$

命题 5.9.37

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续,$(0,1)$ 可导,$f(0)=0,f(1)=1$, 证明:

(1). $\exists c\in(0,1)$, $s.t.\ f(c)=1-c$

(2). $\exists\xi,\eta\in(0,1)(\xi\neq\eta)\ s.t.\ f'(\xi)f'(\eta)=1$

命题 5.9.38

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续,$(0,1)$ 可导,$f(0)=0,f(1)=1$, 证明:

(1). $\exists c\in(0,1)$, $s.t.\ f(c)=\dfrac{1}{2}$

(2). $\exists\xi,\eta\in(0,1)(\xi\neq\eta)$, $s.t.\ \dfrac{1}{f'(\xi)}+\dfrac{1}{f'(\eta)}=2$

命题 5.9.39

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导,$f(0)=0$, $f(1)=1$,$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为正数, 证明: 存在互不相等的 $\xi_i\in(0,1)$, $s.t.$ $\frac{\lambda_1}{f'(\xi_1)}+\frac{\lambda_2}{f'(\xi_2)}+\cdots+\frac{\lambda_n}{f'(\xi_n)}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$

命题 5.9.40

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导,$f(0)=0,f(1)=1$, 证明: 存在互不相等的 $\xi_i\in(0,1)$, $s.t.$ $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f'(\xi_i)}=n$

命题 5.9.41

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导,$f(0)=0$, $f(1)=1$, 证明: $\xi,\eta\in(0,1)(\xi\neq\eta)$, $s.t.$ $\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b(a,b>0)$

命题 5.9.42

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导,$f(0)=0,f(1)=\frac{1}{4}$, 证明: $\xi,\eta\in(0,1)(\xi\neq\eta)$, $s.t.$ $f'(\xi)+f'(\eta)=\eta-\xi$

命题 5.9.43

设 $f(x)\in\mathbb{R}[0,1]$, $\int_0^1 f(x)dx\neq0$, 证明: 存在互异的三个数 $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in[0,1]$, 满足下列不等式:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)dx &= \left[\frac{1}{1+\xi_1^2}\int_0^{\xi_1} f(x)dx+f(\xi_1)\arctan\xi_1\right]\xi_3\\ &= \left[\frac{1}{1+\xi_2^2}\int_0^{\xi_2} f(x)dx+f(\xi_2)\arctan\xi_2\right](1-\xi_3)\end{aligned}$$

命题 5.9.44

设 $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导,$\int_0^1 f(x)dx=3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx$, 证明: 存在两个不同的点 $\xi,\eta\in(0,1)$, $s.t.$ $f'(\xi)=g'(\xi)[f(\eta)-f(\xi)]$

5.9.8 泰勒公式

命题 5.9.45

设 $f(x)$ 二阶连续可导,$f''(x) \neq 0$, 若 $f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)(0 < \theta < 1)$, 证明: $\lim\limits_{h\to 0}\theta = \dfrac{1}{2}$

命题 5.9.46

设 $f(x)$ 有 $n+1$ 阶导数, 若 $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \dfrac{f''(a)}{2}h^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n(0 < \theta < 1)$, 且 $f^{(n+1)}(a) \neq 0$

证明: $\lim\limits_{h\to 0}\theta = \dfrac{1}{n+1}$

命题 5.9.47

设 $f(x)$ 有 n 阶连续导数,$f^{(k)}(x_0) = 0(k = 2, 3, \cdots, n-1)$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, $f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0+\theta h)$, 其中 $\theta \in (0,1)$, 证明: $\lim\limits_{h\to 0}\theta = \dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$

命题 5.9.48

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的邻域内四阶可导,$|f^{(4)}(x)| \leq M(M > 0)$, 证明: 对此邻域上任意一个不同于 x_0 的点 a:

$$\left|f''(x_0) - \frac{f(a)+f(b)-2f(x_0)}{(a-x_0)^2}\right| \leq \frac{M}{12}(a-x_0)^2,\ a+b = 2x_0$$

命题 5.9.49

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 三阶连续可导, 证明:

$$\exists\xi \in (a,b),\ s.t.\ f(b) = f(a) + f'(\frac{a+b}{2})(b-a) + \frac{(b-a)^3}{24}f^{(3)}(\xi)$$

命题 5.9.50

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶连续可导, 证明:

$$\exists\xi \in (a,b),\ s.t.\ f(a) - 2f(\frac{a+b}{2}) + f(b) = \frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$$

命题 5.9.51

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 $n(n\geq 2)$ 阶可导, 满足 $f^{(i)}(a)=f^{(i)}(b)=0(i=1,2,\cdots,n-1)$, 证明:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ |f^{(n)}(\xi)|\geq\frac{2^{n-1}n!}{(b-a)^n}|f(b)-f(a)|$$

命题 5.9.52

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导, 且 $|f(x)|\leq a,|f''(x)|\leq b$, 证明: $|f'(x)|\leq 2a+b$

命题 5.9.53

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 三阶可导, 且 $f(x)$ 和 $f^{(3)}(x)$ 有界, 证明: $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上也有界

命题 5.9.54

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 二阶可导, 记 $M_i=max|f^{(i)}(x)|(i=0,1,2)$, 证明: $M_1^2\leq 4M_0M_2$

命题 5.9.55

$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 二阶可导, 记 $M_i=max|f^{(i)}(x)|(i=0,1,2)$, 证明: $M_1^2\leq 2M_0M_2$

5.9.9 广义罗尔定理

命题 5.9.56

1. $f(x)$ 在 (a,b) 内可导, 且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=A$, 证明: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)=0$
2. $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可导, 且 $f(0)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, 证明: $\exists\xi\in(0,+\infty),\ s.t.\ f'(\xi)=0$

3.$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可导, 且 $0\leq f(x)\leq\frac{x}{1+x^2}$, 证明: $\exists\xi>0,\ s.t.\ f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$

4.$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可导,$f(0)=1$, 且 $|f(x)|\leq e^{-x}$, 证明: $\exists\xi>0,\ s.t.\ f'(\xi)+e^{-\xi}=0$

命题 5.9.57

$f(x)$ 在 (a,b) 上三阶可导, 证明:

$$\exists \xi \in (a,b),\ s.t.\ f(b)=f(a)+\frac{f'(a)+f'(b)}{2}(b-a)-\frac{(b-a)^3}{12}f^{(3)}(\xi)$$

命题 5.9.58

$f(x)$ 在 (a,b) 上三阶可导, 证明:

$$\exists \xi \in (a,b),\ s.t.\ \int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{4}\left[f(a)+3f(\frac{a+2b}{3})\right]+\frac{(b-a)^4}{216}f^{(3)}(\xi)$$

命题 5.9.59

设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$, 且 $f(x)$ 在区间 $[a_1,a_n]$ 上二阶可导, $c\in[a_1,a_n]$, $f(a_1)=f(a_2)=\cdots=f(a_n)=0$, 证明:

$$\exists \xi \in (a_1,a_n),\ s.t.\ f(c)=\frac{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}{n!}f^{(n)}(\xi)$$

命题 5.9.60

$f(x)$ 在 (a,b) 上二阶可导, 证明:

$$\forall c\in(a,b), \exists \xi \in (a,b),\ s.t.\ \frac{f''(\xi)}{2}=\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(a-b)(c-b)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$$

第 6 章 一元积分学

内容提要

- 不定积分
- 定积分
- 变限积分
- 反常积分
- 积分方法
- 积分应用

6.1 不定积分

定义 6.1.1 (不定积分)

$\forall x \in I$, 对于可导函数 $F(x)$, 均有 $F'(x) = f(x)$, 我们称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 记为 $\int f(x)dx = F(x) + C$ 是 $f(x)$ 的原函数

定理 6.1.1 (原函数存在定理 (充分条件))

连续函数 $f(x)$ 必存在原函数 $F(x)$

证明

1. 构造函数 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, 证明 $F'(x) = f(x)$

2. $\forall x \in (a,b), F'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} = \lim\limits_{\xi \to x} f(\xi) = f(x)$

定理 6.1.2 (达布定理 (必要条件))

1. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数 $F(x)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有介值性
2. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数 $F(x)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必无第一类间断点
3. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数 $F(x)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必无无穷间断点

6.1.1 不定积分计算

定理 6.1.3 (常用不定积分)

1. 基础不定积分

1. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C, \alpha \neq -1$ $\quad \begin{cases} \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}+C \\ \int \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}+C \end{cases}$

2. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C$

3. $\int e^x dx = e^x + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x dx = \sin x + C \qquad \int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$

5. $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C \qquad \begin{cases} \int \frac{1}{\cos x}dx = \int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \\ \int \frac{1}{\sin x}dx = \int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C \end{cases}$

6. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a}+C$

7. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C \qquad \int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

8. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C, |x|>|a|$

9. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

10. $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C \qquad \int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+C$

11. $\int \sqrt{x^2\pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})+C$

12. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

2. 扩展不定积分

1. $\begin{cases} \int \sin^n x dx, & n=2,3,4,5 \\ \int \cos^n x dx, & n=2,3,4,5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \int \frac{1}{\sin^n x}dx, & n=2,3,4,5 \\ \int \frac{1}{\cos^n x}dx, & n=2,3,4,5 \end{cases}$

3. $\int \frac{1}{x^n+1}dx, n=3,4,6$

推论 6.1.1 (扩展不定积分)

命题 6.1.1

$$\int \sin^2 x dx \qquad \int \cos^2 x dx$$

命题 6.1.2

$$\int \sin^3 x dx \qquad \int \cos^3 x dx$$

命题 6.1.3

$$\int \sin^4 x dx \qquad \int \cos^4 x dx$$

命题 6.1.4

$$\int \sin^5 x dx \qquad \int \cos^5 x dx$$

命题 6.1.5

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

命题 6.1.6

$$\int \frac{1}{\sin^3 x} dx \qquad \int \frac{1}{\cos^3 x} dx$$

命题 6.1.7

$$\int \frac{1}{\sin^4 x} dx \qquad \int \frac{1}{\cos^4 x} dx$$

命题 6.1.8

$$\int \frac{1}{\sin^5 x} dx \qquad \int \frac{1}{\cos^5 x} dx$$

命题 6.1.9

$$\int \frac{1}{x^n + 1} dx, n = 3, 4, 6$$

定义 6.1.2 (积分方法)

1. 第一换元法 (凑微分): $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(u)du$
2. 第二换元法: $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$
3. 三角换元法: $\sqrt{a^2 - x2} \to t = a\sin x, \sqrt{a^2 + x^2} \to t = a\tan x$

4. 万能公式: $\int R(\sin x,\cos x)dx \to t=\tan\frac{x}{2} \to \begin{cases}\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}\\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{cases}$

$$\begin{cases}R(\sin x,\cos x)=-R(-\sin x,\cos x)\to t=\cos x\\ R(\sin x,\cos x)=-R(\sin x,-\cos x)\to t=\sin x\\ R(\sin x,\cos x)=R(-\sin x,-\cos x)\to t=\tan x\end{cases}$$

5. 分部积分法:

$$\int udv=uv-\int vdu$$

6. 组合积分法:

$$\begin{cases}\int f(x)dx=I+A\int g(x)dx\\ \int g(x)dx=J+B\int f(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\int[f(x)+g(x)]dx=I\\ \int[f(x)-g(x)]dx=J\end{cases}$$

7. 递归积分法 (分部积分推广):

$$I_n=f(x)+I_{n-1}$$

表 6.1: 分部积分表格

u各阶导数	u	u'	u''	$u^{(3)}$	$\cdots$	$u^{(n+1)}$
$v^{(n+1)}$的各阶原函数	$v^{(n+1)}$	$v^{(n)}$	v^{n-1}	v^{n-2}	$\cdots$	v

定理 6.1.4 (分部积分: 表格法)

$$\begin{aligned}\int uv^{(n+1)}dx &= uv^{(n)}-\int v^{n}u'dx\\ &= uv^{(n)}-u'v^{(n-1)}+\int v^{(n-1)}u''dx\\ &= uv^{(n)}-u'v^{(n-1)}+u''v^{(n-2)}-\int v^{(n-2)}u^{(3)}dx\\ &= uv^{(n)}-u'v^{(n-1)}+u''v^{(n-2)}-\cdots+(-1)^n u^{(n)}v+(-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}vdx\end{aligned}$$

定理 6.1.5 (组合积分)

命题 6.1.10

$$\begin{cases}I=\int e^{ax}\sin(bx)dx\\ J=\int e^{ax}\cos(bx)dx\end{cases}$$

定理 6.1.6 (递归积分)

命题 6.1.11

$$I_n=\int\frac{1}{\cos^n x}dx$$

命题 6.1.12

$$I_n=\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx$$

命题 6.1.13

$$I_n=\int\tan^n xdx$$

命题 6.1.14

$$I_n=\int\ln^n xdx$$

定理 6.1.7 (唯一因式分解定理 (有理积分))

有理函数指的是分子、分母都是 x 的多项式的分式 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, 其中 (m > n)

$$\begin{cases}p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n, a_n\neq 0\\ p(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^n, b_m\neq 0\end{cases}$$

在实数范围内, 任意实系数多项式 $q(x)$ 都可以分解为:

$$q(x)=b_m(x-a_1)^{r_1}\cdots(x-a_k)^{r_k}(x^2+b_1x+c_1)^{s_1}\cdots(x^2+b_lx+c_l)^{s_l}$$

其中 $r_1+\cdots+r_k+2(s_1+\cdots+s_l)=m$

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{A_{1,1}}{x-a_1}+\cdots+\frac{A_{1,r_1}}{(x-a_1)^{r_1}}\\ &+\cdots+\\ &\frac{A_{k,1}}{x-a_k}+\cdots+\frac{A_{k,r_k}}{(x-a_k)^{r_k}}\\ &+\frac{M_{1,1}x+N_{1,1}}{x^2+b_1x+c_1}+\cdots+\frac{M_{1,s_1}x+N_{1,s_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{s_1}}\\ &+\cdots+\\ &\frac{M_{l,1}x+N_{l,1}}{x^2+b_lx+c_l}+\cdots+\frac{M_{l,s_l}x+N_{l,s_l}}{(x^2+b_lx+c_l)^{s_l}}\end{aligned}$$

只需要求解两种不定积分:

$$\begin{cases} I = \int \dfrac{1}{(x-a)^k} dx \\ J = \int \dfrac{mx+n}{(x^2+bx+c)^k}, c - \dfrac{b^2}{4} > 0 \end{cases}$$

第一个不定积分:

$$I = \int \frac{1}{(x-a)^k} dx = \begin{cases} \ln(x-a), & k = 1 \\ \dfrac{1}{1-k}(x-a)^{1-k}, & k > 1 \end{cases}$$

第二个不定积分:

$$J = \int \frac{mx+n}{(x^2+bx+c)^k}$$

令 $t = x + \dfrac{b}{2}, a^2 = c - \dfrac{b^2}{4}$:

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{m(t-\frac{b}{2})+n}{(t^2+a^2)} dt \\ &= \frac{m}{2}\int \frac{2t}{(t^2+a^2)^k} dt + (n - \frac{mb}{2}) \int \frac{1}{(t^2+a^2)^k} dt \\ &= \frac{m}{2}\int \frac{1}{(t^2+a^2)^k} d(t^2+a^2) + (n - \frac{mb}{2}) \int \frac{1}{(t^2+a^2)^k} dt \\ &= \frac{m}{2} P + (n - \frac{mb}{2}) Q \end{aligned}$$

其中

$$P = \begin{cases} \ln(t^2+a^2), & k = 1 \\ \dfrac{1}{1-k}\dfrac{1}{(t^2+a^2)^{1-k}}, & k > 1 \end{cases}$$

关于不定积分 Q, 递归积分 **pro** :6.1.12

综上所述: 有理分式一定存在原函数

6.2 定积分

定义 6.2.1 (定积分)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 在 (a,b) 上任取 $n-1$ 个分点 $x_i(i=1,2,3,\cdots,n-1)$, 定义 $x_0 = a, x_n = b$, 且满足 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, 记 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k = 1,2,\cdots,n$, 任取一点 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, 记 $\lambda = \max\{\Delta x_k\}$, 当 $\lambda \to 0$ 时, 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ 存在且与分点 x_i 和 ξ_k 的取法无关, 则称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 记 $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分

任取 x_i: 变为将区间 $[a,b]$ 分为 n 个小区间, 且每个小区间的长度为 Δx_k, 且 $\Delta x_k \to 0$, 且 ξ_k 为每个小区间的右端点, $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(a+\frac{b-a}{n}i)\frac{b-a}{n}$

定理 6.2.1 (定积分存在定理)

1. 必要条件: 区间有界, 函数有界
2. 充分条件:

(1). $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

(2). $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 且只有有限个间断点, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

定理 6.2.2 (牛顿莱布尼茨公式)

$f(x)$ 是 $[a,b]$ 上连续函数, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b)-F(a)$

定理 6.2.3 (对称函数积分)

(1). $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上连续, 我们有:

1. $f(x)$ 是奇函数

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0$$

2. $f(x)$ 是偶函数

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_0^l f(x)dx$$

(2). $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续:

1. $f(a+b-x) = -f(x)$, 称 $f(x)$ 关于 $x = \dfrac{a+b}{2}$ 奇对称

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

2. $f(a+b-x) = f(x)$, 称 $f(x)$ 关于 $x = \dfrac{a+b}{2}$ 偶对称

$$\int_a^b f(x)dx = 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = 2\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx$$

(3). $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且:

1. $f(a+b-x) = f(x)$, $f(x)$ 关于 $\dfrac{a+b}{2}$ 对称
2. $g(a+b-x) + g(x) = A$, A 为常数

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \frac{A}{2}\int_a^b f(x)dx = A\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = A\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx$$

(3). $f(x), g(x)$ 在 $[\frac{1}{a}, a]$ 上连续, 且:

1. $f(x) = f(\frac{1}{x})$
2. $g(x) + g(\frac{1}{a}) = A$, A 为常数

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a} f(x)g(x)dx = \frac{A}{2}\int_{\frac{1}{a}}^{a} f(x)dx = A\int_{\frac{1}{a}}^{1} f(x)dx = A\int_{1}^{a} f(x)dx$$

定理 6.2.4 (华里士公式)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1, n\in\{2k+1|k\in\mathbb{N}\} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, n\in\{2k+2|k\in\mathbb{N}\} \end{cases}$$

递归积分法,需要证明两个部分:

(1). $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$

区间再现公式: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$

(2). 分部积分: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d(-\cos x) \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} dx \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} dx \\ &= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \\ I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{cases} I_0 = \frac{\pi}{2} \\ I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1 \end{cases}$$

(i). 当 $n\in\{2k+1|k\in\mathbb{N}\}$ 时:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2} I_{n-4} = \cdots = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3} I_1 = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1$$

(ii). 当 $n\in\{2k+2|k\in\mathbb{N}\}$ 时:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2} I_{n-4} = \cdots = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2} I_0 = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

推论 6.2.1 (华里士公式推论)

$$\int_0^{\pi} \sin^n x dx = \begin{cases} 2 \cdot \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{2}{3} \cdot 1, n \in \{2k+1 | k \in \mathbb{N}\} \\ 2 \cdot \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2}, n \in \{2k+2 | k \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \cos^n x dx = \begin{cases} 0, n \in \{2k+1 | k \in \mathbb{N}\} \\ 2 \cdot \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2}, n \in \{2k+2 | k \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^n x dx = \int_0^{2\pi} \cos^n x dx = \begin{cases} 0, n \in \{2k+1 | k \in \mathbb{N}\} \\ 4 \cdot \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2}, n \in \{2k+2 | k \in \mathbb{N}\} \end{cases}$$

命题 6.2.1

$$\int_0^1 x^k \ln^m x, k > 0, m \in \mathbb{N}$$

命题 6.2.2

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1}$$

6.3 变限积分

定义 6.3.1 (变限积分)

$x \in [a,b], \forall x \in [a,b]$, 积分 $\int_a^x f(t)dt$ 都有一个确定的值, 我们将这个关于 x 的函数 $\int_a^x f(t)dt$ 称作变限积分

推论 6.3.1 (变限积分)

1. $f(x)$ 可积, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 一定连续
2. $f(x)$ 连续, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 一定可导, 且 $F'(x) = f(x)$
3. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有唯一跳跃间断点 x_0, 则 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $x = x_0$ 处不可导
4. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有唯一可去间断点 x_0, 则 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $x = x_0$ 处可导, 且 $F'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

定理 6.3.1 (变限积分的导数)

$f(x)$ 是连续函数, 则 $\left[\int_{\phi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt\right]' = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\phi(x)]\phi'(x)$

推论 6.3.2 (变上限积分奇偶性和周期性与原函数关系)

$f(x)$ 连续,$f(x)$ 与 $\int_a^x f(t)dt$ 之间的关系

(1). 如果 $f(x)$ 是奇函数,$\int_a^x f(t)dt$ 是偶函数

(2). 如果 $f(x)$ 是偶函数,$\int_a^x f(t)dt$ 是奇函数当且仅当 $a = 0$ 时成立.

(3). 如果 $f(x)$ 是周期函数,$\int_a^x f(t)dt$是周期函数与 $\int_0^T f(t)dt = 0$等价

证明

令: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

(i). 必要性: $F(x+T) - F(x) = \int_x^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt = 0$

(ii). 充分性: $\int_0^T f(t)dt = 0 \Leftrightarrow F(x+T) - F(x) = 0$

6.4 反常积分

定义 6.4.1 (反常积分)

1. 积分区间无界: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx$
2. 被积函数无界: $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$

反常积分敛散性判别

定理 6.4.1 (比较判别法)

1. 无穷区间: $f(x), g(x)$ 连续, 且 $0 \le f(x) \le g(x)$
   1. 若 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛
   2. 若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散
2. 无穷函数: $f(x), g(x)$ 在 $(a, b]$ 连续, 瑕点为 $x = a$, 且 $0 \le f(x) \le g(x)$
   1. 若 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛
   2. 若 $\int_a^b f(x)dx$ 发散, 则 $\int_a^b g(x)dx$ 发散

定理 6.4.2 (比较判别法的极限形式)

1. 无穷区间: $f(x), g(x)$ 连续, 且 $g(x) > 0, f(x) \ge 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lambda$
   1. $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq \infty$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同敛散
   2. $\lambda = 0$, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛
   3. $\lambda = \infty$, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散
2. 无穷函数: $f(x), g(x)$ 在 $(a, b]$ 连续, 瑕点为 $x = a$, 且 $g(x) > 0, f(x) \ge 0$, $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lambda$
   1. $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq \infty$, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 同敛散

2. $\lambda=0$, 则 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 收敛
3. $\lambda=\infty$, 则 $\int_a^b g(x)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 发散

推论 6.4.1 (p 级数判别法)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx \begin{cases} 收敛, & 0<p<1 \\ 发散, & p\geq 1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx \begin{cases} 收敛, & p>1 \\ 发散, & p\leq 1 \end{cases}$$

6.5 一元积分学应用

6.5.1 几何应用

6.5.1.1 平面图形面积

定义 6.5.1 (定积分几何意义)

(i). 直角坐标 $y=f(x)$

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

S 表示的是由 $y=0, y=f(x)$ 和 $x=a, x=b$ 四条直线围成的平面图形的面积

(ii). 极坐标 $r=r_1(\theta)$ 与 $r=r_2(\theta)$

$$S=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left|[r_1(\theta)]^2-[r_2(\theta)]^2\right|d\theta$$

S 表示的是由 $\theta=\theta_1, \theta=\theta_2$ 和 $r=r_1(\theta), r=r_2\theta$ 四条曲线围成的平面图形的面积

(iii). 参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$

$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$$

S 表示的是由 $t=\alpha, t=\beta$ 和 $x=x(t), y=y(t)$ 四条曲线围成的平面图形的面积

6.5.1.2 平面曲线弧长

定理 6.5.1 (平面曲线的弧长)

(i). 直角坐标 $y = f(x)$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx$$

(ii). 极坐标 $r = r(\theta)$

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2}d\theta$$

(iii). 参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt$$

6.5.1.3 旋转体体积

定理 6.5.2 (旋转体体积)

(i). 绕 x 轴旋转

$y = f(x)$ 与 $x = a, x = b$ 围成的几何图形绕 x 轴旋转得到的几何体体积 V :

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

(ii). 绕 y 轴旋转

$y = f(x)$ 与 $x = a, x = b$ 围成的几何图形绕 y 轴旋转得到的几何体体积 V :

$$V = 2\pi \int_a^b x|f(x)|dx$$

(iii). 绕任意直线 $L_0 : Ax + By + C = 0$ 旋转

$$\begin{cases} V = \pi \int_{l_1}^{l_2} r^2 dl \\ r = \dfrac{|Ax + Bf(x) + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ dl = \dfrac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|} \\ \boldsymbol{n} = (dx, dy) \\ \boldsymbol{l} = (B, -A) \end{cases} \Rightarrow V = \frac{\pi}{(A^2 + B^2)^{\frac{3}{2}}} \int_a^b [Ax + Bf(x) + C]^2 \left|Af'(x) - B\right| dx$$

(iv). 平面区域 D 绕直线 $L_0 : Ax + By + C = 0$

$$V=2\pi\iint\limits_{(x,y)\in D} r\,d\sigma=2\pi\iint\limits_{(x,y)\in D}\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}d\sigma$$

6.5.1.4 旋转曲面侧面积

定理 6.5.3 (曲线绕 x 轴旋转得到的曲面的侧面积)

(i). 直角坐标

$$S=2\pi\int_a^b|y(x)|\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx$$

(ii). 参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta|y(t)|\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$$

(iii). 极坐标

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta|r\sin\theta|\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}d\theta$$

6.5.1.5 函数平均值和形心坐标

定理 6.5.4 (平均值和形心坐标)

(i). 平均值

$$\overline{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

(ii). 形心坐标

$$\begin{cases}\overline{x}=\dfrac{\iint x\,d\sigma}{\iint d\sigma}=\dfrac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}\\[2ex]\overline{y}=\dfrac{\iint y\,d\sigma}{\iint d\sigma}=\dfrac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}\end{cases}$$

6.5.2 物理应用

6.5.2.1 变力做功

定义 6.5.2 (变力做功)

1. $dW = Fds$
2. $W = \int_a^b Fds$

6.5.2.2 抽水做功

定义 6.5.3 (抽水做功)

1. 建立坐标系
2. 确立横截面积表达式
3. $W = \rho g \int_a^b xA(x)dx$

6.5.2.3 水压力

定义 6.5.4 (水中受到的压力)

1. 建立坐标系
2. 建立横截面积表达式: $S = (f(x) - h(x))dx$
3. $F = \rho g \int_a^b x(f(x) - h(x))dx$

积分训练

命题 6.5.1

$$\int \frac{x \sin x}{(1 + \cos^2 x)^{\frac{3}{2}}} dx$$

命题 6.5.2

$$\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

命题 6.5.3

$$\int \frac{x + \sin x \cos x}{(x \sin x + \cos x)^2} dx$$

命题 6.5.4

$$\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx$$

命题 6.5.5

$$\int \frac{x\cos x}{(x+\cos x)^2}dx$$

命题 6.5.6

$$\int \frac{\cos^2 x - x^2\sin x}{(x+\cos x)^2}dx$$

命题 6.5.7

$$\int \frac{x\sin x+\cos x}{x^2+\cos^2 x}dx$$

命题 6.5.8

$$\int \frac{e^x(x-1)}{x^2+e^{2x}}dx$$

命题 6.5.9

$$\int e^{\sec x}(\tan x-\sin x)dx$$

命题 6.5.10

$$\int e^{\frac{1}{x}}(2x-1)dx$$

命题 6.5.11

$$\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx$$

命题 6.5.12

$$\int e^{x^3}(10x-9x^7)dx$$

命题 6.5.13

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$$

命题 6.5.14

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x-1}}dx$$

命题 6.5.15

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{2x-1}}dx$$

命题 6.5.16

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{x^3}dx$$

命题 6.5.17

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$$

命题 6.5.18

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{2}}dx$$

命题 6.5.19

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$$

命题 6.5.20

$$\int x\sqrt{\frac{x}{3-x}}dx$$

命题 6.5.21

$$\int \sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$$

命题 6.5.22

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$$

命题 6.5.23

$$\int \sqrt{x(x+2)}dx$$

命题 6.5.24

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{-x^2+2x+3}}dx$$

命题 6.5.25

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$$

♠

命题 6.5.26

$$\int \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{\sin^4(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})} dx$$

♠

命题 6.5.27

$$\int \frac{1}{\sin^2 x + \sin 2x} dx$$

♠

命题 6.5.28

$$\int \frac{\sin x}{\cos x + 2 \sin x} dx$$

♠

第二部分

高数 (下)

第 2 部分目录

第 7 章 多元函数微分

内容提要

- ❑ 连续、偏导、可微、全微分
- ❑ 链式法则
- ❑ 隐函数存在定理
- ❑ 多元函数极值和最值
- ❑ 拉格朗日数乘法

7.1 多元函数微分概念

定义 7.1.1 (邻域)

1. δ 邻域: 设 $P_0(x_0, y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点, $U(P_0, \delta)$ 表示以 P_0 为中心, 半径为 δ 的圆盘, 即 $U(P_0, \delta) = \{(x, y) | \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$
2. 去心 δ 邻域: $\mathring{U}(P_0, \delta) = \{(x, y) | 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$

定义 7.1.2 (多元函数极限)

设函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上有定义, $P_0(x_0, y_0) \in D$ 或为区域 D 边界上的一点, 如果对于任意给定的正数 ε, 总存 $\delta > 0$, 使得当点 $P(x, y) \in D$ 且 $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ 时, 对应的函数值 $f(x, y)$ 都满足不等式 $|f(x, y) - A| < \varepsilon$, 那么称函数 $f(x, y)$ 当 $(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时的极限为 A, 记为 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$

定义 7.1.3 (连续)

设函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上有定义, $P_0(x_0, y_0) \in D$ 或为区域 D 边界上的一点, 如果 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, 那么称函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续, 如果函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上每一点都连续, 那么称函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上连续

定义 7.1.4 (偏导数)

设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 邻域内有定义, 若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在, 我们将这记作 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数, 记作:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\qquad \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\qquad z'_x\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

类似地, 可以定义 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数, 记作:

$$\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\qquad \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\qquad z'_y\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

对偏导数进一步求偏导数, 可以得到高阶偏导数: $f''_{xx}(x,y), f''_{yy}(x,y), f''_{xy}(x,y), f''_{yx}(x,y)$ ♣

定义 7.1.5 (可微)

函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表示为:

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)\qquad \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

其中 A,B 只与 x,y 相关, 称 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微,$A\Delta x+B\Delta y$ 是 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全微分.

$$dz=A\Delta x+B\Delta y=Adx+Bdy$$

1. 可微必要条件: $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微 $\Rightarrow f(x,y)$ 在点 (x,y) 处偏导数必定存在
且 $\begin{cases}A=\dfrac{\partial z}{\partial x}\\[2mm] B=\dfrac{\partial z}{\partial y}\end{cases}$
2. 可微充分条件: $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处偏导数连续 $\Rightarrow f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微 ♣

定义 7.1.6 (偏导数连续性)

$$\begin{cases}f'_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}f'_x(x,y_0)\\[2mm] f'_y(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\lim\limits_{y\to y_0}f'_y(x_0,y)\end{cases}$$

如果这两个极限相等, 就称偏导数在此点连续 ♣

7.2 链式法则

定义 7.2.1 (链式法则)

$$z=f(u,v),u=\varphi(x,y),v=\phi(x,y)$$

偏导数:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

高阶偏导数:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right]\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right]\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right]\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right]\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right]\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right]\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right]\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right]\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$$

综上所述, 我们有:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}(\frac{\partial u}{\partial x})^2+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}(\frac{\partial v}{\partial x})^2+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}(\frac{\partial u}{\partial y})^2+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}(\frac{\partial v}{\partial y})^2+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$$

定义 7.2.2 (全微分形式不变性)

设 $z = f(x, y), x = x(u, v), y = y(u, v)$, 如果 $f(u, v), u(x, y), v(x, y)$ 分别有连续偏导数, 则复合函数 $z = f(u, v)$ 在 (x, y) 处的全微分:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

7.3 隐函数存在定理

定理 7.3.1 (隐函数存在定理 1)

如果函数 $F(x, y)$ 满足一下条件:

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某一个邻域内具有连续偏导数
3. $F'(x_0, y_0) \neq 0$

那么方程 $F(x, y) = 0$ 在点 (x_0, y_0) 的某一个邻域内能够确定唯一的连续且具有连续导数的函数 $y = f(x)$, 满足 $F(x, f(x)) = 0$ 且 $y_0 = y(x_0)$, 且有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

定理 7.3.2 (隐函数存在定理 2)

如果函数 $F(x, y, z)$ 满足一下条件:

1. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
2. $F(x, y, z)$ 在 (x_0, y_0, z_0) 的某一个邻域内具有连续偏导数
3. $F'(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

那么方程 $F(x, y, z) = 0$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 的某一个邻域内能够确定唯一的连续且具有连续导数的函数 $z = f(x, y)$, 满足 $F(x, y, z(x, y)) = 0$ 且 $z_0 = z(x_0, y_0)$, 且有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

7.4 多元函数极值和最值

定义 7.4.1 (多元函数极值和最值)

极值

设函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处有定义

1. 如果存在邻域 $U(P_0, \delta)$, 使得对于任意 $(x, y) \in U(P_0, \delta)$, 都有 $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, 那么称 $f(x_0, y_0)$ 是函数 $f(x, y)$ 的一个极大值

2. 如果存在邻域 $U(P_0, \delta)$, 使得对于任意 $(x, y) \in U(P_0, \delta)$, 都有 $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$, 那么

称 $f(x_0, y_0)$ 是函数 $f(x, y)$ 的一个极小值

最值

1. 如果对于区域 D 上的任意 (x, y), 都有 $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, 那么称 $f(x_0, y_0)$ 是函数 $f(x, y)$ 的一个最大值
2. 如果对于区域 D 上的任意 (x, y), 都有 $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$, 那么称 $f(x_0, y_0)$ 是函数 $f(x, y)$ 的一个最小值

无条件极值

定义 7.4.2 (多元函数极值)

二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取极值的必要条件:

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$$

二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取极值的充分条件:

$$\begin{cases} f''_{xx}(x_0, y_0) = A \\ f''_{xy}(x_0, y_0) = B \\ f''_{yy}(x_0, y_0) = C \end{cases} \qquad \Delta = AC - B^2 \Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0, \begin{cases} A > 0, & \min \\ A < 0, & \max \end{cases} \\ \Delta < 0, \text{非极值} \\ \Delta = 0, \text{方法失效} \end{cases}$$

条件极值

定义 7.4.3 (拉格朗日数乘法)

求目标函数 $u = f(x, y, z)$ 在条件 $\begin{cases} g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 下的最值

构造辅助函数: $F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z)$

令

$$\begin{cases} F'_x = f'_x + \lambda g'_x + \mu h'_x = 0 \\ F'_y = f'_y + \lambda g'_y + \mu h'_y = 0 \\ F'_z = f'_z + \lambda g'_z + \mu h'_z = 0 \\ F'_\lambda = g(x, y, z) = 0 \\ F'_\mu = h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

得到所有的备选点 P_i, 计算 $f(P_i)$ 得到最大值和最小值.

注

1. 在不封闭曲线上求最值, 可以用拉格朗日数乘法, 但是要注意边界条件
2. 闭区域上多元函数的最值, 分为两部分, 第一部分是在区域内部求最值, 第二部分是在区域边界求最值; 前者利用驻点, 后者利用拉格朗日数乘法, 两者结合求最值

第 8 章 二重积分

内容提要

- 二重积分定义
- 积分次序
- 极坐标和直角坐标下的二重积分
- 变量替换

8.1 二重积分概念和性质

定义 8.1.1 (二重积分)

$f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数, 将有界闭区域 D 任意分割为 n 个小闭区域

$$D=\bigcup_{i=1}^{n} D_i$$

$\Delta\sigma_i$ 是 D_i 的面积, 任取 $(\varepsilon_i,\eta_i)\in D_i$, 作乘积 $f(\varepsilon_i,\eta_i)\sigma_i$, 并求和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i,\eta_i)\sigma_i$, 当 $\lim\limits_{n\to+\infty}\{\lambda|\lambda=\max\{d_i(i=1,2,\cdots,n)\}, d_i\text{是}D_i\text{区域的直径}\}=0$ 时, 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i,\eta_i)\sigma_i$ 存在, 且与 D 的分割方法和 (ε_i,η_i) 的取法无关, 那么称此极限为 $f(x,y)$ 在区域 D 上的二重积分, 记作 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i,\eta_i)\sigma_i$$

其中 $f(x,y)$ 称为被积函数, $f(x,y)ds$ 称为被积表达式, x,y 是积分变量, D 是积分区域

二重积分的几何意义

二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 表示区域 D 上以 $f(x,y)$ 为曲顶的曲顶柱体的体积

推论 8.1.1

(1). $\iint\limits_D 1d\sigma = \iint\limits_D d\sigma = S_D$, S_D 是 D 的面积

(2). $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上可积, $f(x,y)$ 在 D 上必有界

(3). 积分的线性性质

$$\iint\limits_D [k_1 f(x,y) + k_2 g(x,y)]\, d\sigma = k_1 \iint\limits_D f(x,y)d\sigma + k_2 \iint\limits_D g(x,y)d\sigma$$

(4). 积分的可加性

设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 内可积, 且 $D_1 \cup D_2 = D, D_1 \cap D_2 = \emptyset$

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$$

(5). 积分的保号性设 $f(x,y), g(x,y)$ 在有界闭区域 D 内可积, 且 $f(x,y) \le g(x,y)$

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le \iint\limits_D g(x,y)d\sigma \Rightarrow \left|\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\right| = \iint\limits_D |f(x,y)|d\sigma$$

(6). 估值定理

设 M, m 分别是 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 内的最大值和最小值

$$mS_D \le \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le MS_D$$

(7). 中值定理

设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 内连续

$$\exists(\xi,\eta) \in D,\ s.t. \iint\limits_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)S_D$$

8.2 二重积分的对称性

定理 8.2.1 (对称性)

1. 普通对称性

(i). 区域 D 关于 $x = a$ 对称, 我们有:

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma & f(2a-x) = f(x) \\ 0 & f(2a-x) = -f(x) \end{cases}$$

特别的, 当 $a=0$ 时, 我们有:

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma & f(-x)=f(x) \\ 0 & f(-x)=-f(x) \end{cases}$$

(ii). 区域 D 关于 $y=b$ 对称, 我们有:

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma & f(x,2b-y)=f(x,y) \\ 0 & f(x,2b-y)=-f(x,y) \end{cases}$$

特别的, 当 $b=0$ 时, 我们有:

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma & f(x,-y)=f(x,y) \\ 0 & f(x,-y)=-f(x,y) \end{cases}$$

2. 轮换对称性

区域 D 关于 $x=y$ 对称, 我们有:

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(y,x)d\sigma = \frac{1}{2}\iint\limits_D [f(x,y)+f(y,x)]\,d\sigma$$

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma & f(x,y)=f(y,x) \\ 0 & f(x,y)=-f(y,x) \end{cases}$$

3. 区域 D 关于原点对称, 我们有:

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma & f(-x,-y)=f(x,y) \\ 0 & f(-x,-y)=-f(x,y) \end{cases}$$

8.3 二重积分计算

定义 8.3.1 (直角坐标系)

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \begin{cases} \int_a^b dx\int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)dy \\ \int_a^b dy\int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)dx \end{cases}$$

定义 8.3.2 (极坐标系)

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D'} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)drd\theta$$

定义 8.3.3 (换元法)

令 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$，是 (x,y) 面到 (u,v) 面的一对一映射，且 $x = x(u,v), y = y(u,v)$ 有一阶连续偏导数

$$J = |\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}| = \begin{Vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{Vmatrix}$$

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_{uv}} f\left[x(u,v), y(u,v)\right] \cdot J dudv$$

♣

变量替换

$$d\sigma_1 = dudv \qquad d\sigma_2 = |l \times m|$$

$$\begin{cases} x(u,v+dv) - x(u,v) = x'_v dv \\ x(u+du,v) - x(u,v) = x'_u du \\ y(u,v+dv) - y(u,v) = x'_v dv \\ y(u+du,v) - y(u,v) = y'_u du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l = (x'_u du, y'_u du) \\ m = (x'_v dv, y'_v dv) \end{cases}$$

$$d\sigma_2 = (x'_u y'_v - x'_v y'_u) dvdu = \begin{Vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{Vmatrix} d\sigma_1$$

Example

例题 8.1.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

证明

$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy$

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \\
&= \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} re^{-r^2} dr \\
&= \frac{\pi}{4} \\
I &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}
\end{aligned}$$

例题 8.2.

$$\int_0^a f(x)dx \int_0^a \frac{1}{f(x)}dx \geq a^2$$

证明

$$I = \int_0^a f(x)dx \int_0^a \frac{1}{f(x)}dx = \iint\limits_{\substack{0\leq x\leq a\\0\leq y\leq a}} \frac{f(x)}{f(y)}dxdy$$

$$\begin{aligned}
2I &= \iint\limits_{\substack{0\leq x\leq a\\0\leq y\leq a}} \frac{f(x)}{f(y)}dxdy + \iint\limits_{\substack{0\leq x\leq a\\0\leq y\leq a}} \frac{f(y)}{f(x)}dxdy \\
&\geq \iint\limits_{\substack{0\leq x\leq a\\0\leq y\leq a}} 2dxdy \\
&= 2a^2 \\
I &\geq a^2
\end{aligned}$$

第 9 章 常微分方程

内容提要

- 微分方程概念、解和通解
- 一阶微分方程
- 伯努利方程
- (非) 齐次二阶常系数线性微分方程
- 欧拉方程
- 高阶线性微分方程

定义 9.0.1 (微分方程及其阶)

表示未知函数及其导数 (或者微分) 与自变量之间关系的方程称为微分方程, 一般写为:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \text{或} y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$$

微分方程中未知函数的最高阶导数的阶数称为**微分方程的阶**.

定义 9.0.2 (常微分方程)

未知函数是一元函数的微分方程称为**常微分方程**.

定义 9.0.3 (线性微分方程)

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

形如上述的微分方程称为 n 阶**线性微分方程**, 其中 $a_k(x)(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 都是自变量 x 的函数, $a_k(x) \neq 0$, 当 $a_k(x)(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 都是常数时, 又称方程为 n 阶**常系数线性微分方程**; 若右端 $f(x) \equiv 0$, 则称方程为 n 阶**齐次线性微分方程**, 否则称其为 n 阶**非齐次线性微分方程**.

定义 9.0.4 (微分方程的解和通解)

- 若将函数代入微分方程, 使方程成为恒等式, 则该函数称为**微分方程的解**, 微分方程解的图形称为积分曲线
- 若微分方程的解中含有的独立常数的个数等于微分方程的阶数, 则该解称为微分方程的**通解**.

定义 9.0.5 (初始条件和特解)

确定通解中常数的条件就是**初始条件**, 如 $y(x_0) = a_0, y'(x_0) = a_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$, 其中 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 为 n 个给定的数, 确定通解中的常数后, 解就成为**特解**.

9.1 一阶微分方程

9.1.1 可分离变量型微分方程

9.1.1.1 直接可分离

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) = f(x)g(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

9.1.1.2 换元后可分离

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \Rightarrow \begin{cases} u = ax + by + c \\ \dfrac{du}{dx} = a + b\dfrac{dy}{dx} \\ \dfrac{du}{dx} = a + bf(u) \end{cases} \Rightarrow \int \frac{du}{a + bf(u)} = \int dx$$

注

- 在换元过程中, 可能会因为定义域问题漏掉某些解, 这些解称为奇解.
- 非线性微分方程的所有解等于通解和奇解的并集; 线性微分方程的所有解等于通解, 没有奇解.

9.1.2 齐次型微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(\frac{y}{x})\Rightarrow\begin{cases}u=\frac{y}{x}\\ \frac{dy}{dx}=\frac{d(ux)}{x}=u+x\frac{du}{dx}\\ u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u)\end{cases}\Rightarrow\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}$$

9.1.3 一阶线性微分方程

定义 9.1.1 (一阶线性微分方程)

$$y'+p(x)y=q(x),p(x)\text{和}q(x)\text{是已知的连续函数}$$

定理 9.1.1 (一阶线性微分方程解)

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+C\right]$$

注

$$\begin{aligned}&e^{\int p(x)dx}y'+p(x)e^{\int p(x)dx}=q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\\&\left[e^{\int p(x)dx}y\right]'=q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\\&e^{\int p(x)dx}y=\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}+C\\&y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}+C\right]\end{aligned}$$

9.1.4 伯努利方程

定义 9.1.2 (伯努利方程)

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n$$

定理 9.1.2

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}=q(x)\Rightarrow\begin{cases}z=y^{1-n}\\ \frac{dz}{dx}=\frac{1}{1-n}y^{-n}\frac{dy}{dx}\end{cases}\Rightarrow(1-n)\frac{dz}{dx}+p(x)z=q(x)$$

我们可以得到:

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x)\Rightarrow z=e^{-\int(1-n)p(x)dx}\left[e^{\int(1-n)p(x)dx}\cdot q(x)+C\right]$$

9.1.5 二阶可降阶微分方程

定义 9.1.3 (二阶可降阶微分方程)

1. $y''=f(y,y')\Leftrightarrow F(y,y',y'')=0$

我们令: $p=y'$, 则

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p'p\Rightarrow p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$$

2. $y''=f(x,y')\Leftrightarrow F(x,y',y'')=0$

我们令: $p(x)=y'$, 则

$$y''=\frac{dp}{dx}\Rightarrow\frac{dp}{dx}=f(x,p)$$

9.2 高阶线性微分方程

9.2.1 二阶常系数线性微分方程

定义 9.2.1 (二阶常系数线性微分方程)

二阶常系数齐次微分方程:

$$y''+py'+py=0$$

二阶常系数非齐次微分方程:

$$y''+py'+py=f(x)$$

定理 9.2.1 (二阶常系数齐次线性微分方程解)

对于二阶常系数齐次 x 线性微分方程:

特征方程: $\lambda^2+p\lambda+q=0$

- 当方程有两个不同的实数根 λ_1,λ_2 , 微分方程通解:

$$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$$

- 当方程有两个相同的实根 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, 微分方程通解:

$$y=C_1+C_2xe^{\lambda x}$$

- 当方程有两个不同的虚根 $\lambda_1=\alpha+i\beta,\lambda_2=\alpha-i\beta$, 微分方程通解:

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

定理 9.2.2 (二阶常系数非齐次线性微分方程解)

对于二阶常系数非齐次线性微分方程:

$$y'' + py' + py = f(x)$$

通解为二阶常系数齐次线性微分方程的通解加上特解: $y_0 = y^* + y$

1. 当 $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$ 时, 特解 y^*:

$$y^* = e^{\alpha x}x^kQ_n(x)$$

- 当 α 不是特征方程的根,$k = 0$
- 当 α 是特征方程的一个根,$k = 1$
- 当 α 是特征方程的重根,$k = 2$

2. 当 $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + P_m(x)\sin\beta x)$ 时, 特解 y^*:

$$y^* = e^{\alpha x}x^k(Q_l^{(1)}(x)\cos\beta x + Q_l^{(2)}(x)\sin\beta x), \quad l = max\{m, n\}$$

- 当 $\alpha \pm i\beta$ 不是特征方程的根,$k = 0$
- 当 $\alpha \pm i\beta$ 是特征方程的根,$k = 1$

9.2.2 欧拉方程

定义 9.2.2 (欧拉方程)

形如以下形式的微分方程:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + px\frac{dy}{dx} + qy = f(x)$$

1. 当 $x > 0$ 时, 令 $x = e^t, t = \ln x; \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

原微分方程可化为:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = f(e^t)$$

2. 当 $x < 0$ 时, 令 $x = -e^t, t = \ln(-x); \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

原微分方程可化为:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = f(-e^t)$$

9.2.3 高阶常系数齐次线性微分方程

定义 9.2.3 (高阶常系数齐次线性微分方程)

$n(n \geq 3)$ 阶常系数齐次线性微分方程称为高阶常系数齐次线性微分方程。

命题 9.2.1 (n 阶常系数线性微分方程解)

特征方程:

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = 0$$

1. r 是单实数根, 通解包含 Ce^{rx}
2. r 是 k 重实数根, 通解包含 $(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \cdots + C_kx^{k-1})e^{rx}$
3. r 是单复根, 通解包括 $e^{rx}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$
4. r 是二重复根, 通解包括 $e^{rx}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x + C_3x\cos\beta x + C_4x\sin\beta x)$

第 10 章 无穷级数

内容提要

- 常数项级数
- 敛散性判别
- 收敛域和收敛半径
- 函数项级数
- 幂级数
- 和函数和函数展开式
- 傅里叶级数

10.1 常数项级数

定义 10.1.1 (级数定义)

给定一个无穷数列 $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$, 将其各项相加得到 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

我们将 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 称为无穷级数, 简称为级数, 其中 u_n 是无穷级数的通项, 如果 u_n 是常数项, 则称为常数项级数; 如果 u_n 是函数, 则称为函数项级数

定义 10.1.2 (级数敛散性)

级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的敛散性研究:

引入 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$, 我们称 S_n 是无穷级数的部分和, 我们定义:

(1). 当 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$ 时, 我们称级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛.

(2). 当 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \infty$ 或者不存在时, 我们称级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散.

推论 10.1.1

(1). 当 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛时, 我们有: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (必要条件)

(2). 当 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛时, 且这两个级数的和分别为 S, T, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\alpha u_n + \beta v_n)$ 收敛, 且级数和为 $\alpha S + \beta T$

(3). 改变级数任意有限项, 不会改变该级数的敛散性

(4). 收敛级数的任意项加括号所得到的新级数仍收敛, 且其和不变

10.2 敛散性判别

10.2.1 正项级数判别

(1). 定义法

定理 10.2.1 (收敛原则)

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow S_n$ 有界

(2). 比较判别法

定理 10.2.2 (比较判别法)

两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$, 若从某一项起满足 $u_n \leq v_n$:

若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 发散

若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛

(3). 比较判别法的极限形式

定理 10.2.3 (比较判别法的极限形式)

两个正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n (v_n \neq 0)$, 且 $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = A$

(i). $A = 0$, 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛

(ii). $0 < A < +\infty$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 有相同的敛散性

(iii). $A = +\infty$, 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散

(4). 比值判别法 (达朗贝尔判别法)

定理 10.2.4 (比值判别法)

正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, 且 $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

(i). $\rho < 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛

(ii). $\rho > 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散

(iii). $\rho = 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 敛散性不确定

(5). 根值判别法 (柯西判别法)

定理 10.2.5 (根值判别法)

正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, 且 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

(i). $\rho < 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛

(ii). $\rho > 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散

(iii). $\rho = 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 敛散性不确定

(6). 积分判别法

定理 10.2.6 (积分判别法)

正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, 若存在在 $[1, +\infty)$ 上单调减少的非负函数 $f(x)$, 使得 $u_n = f(n)$, 则级数

$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 敛散性相同

10.2.2 交错级数判别

定理 10.2.7 (莱布尼茨判别法)

u_n 单调不增且 $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛

10.2.3 一般项级数判别

定义 10.2.1

$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 是原级数的绝对值级数

(i). 如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 收敛, 称其**绝对收敛**

(ii). 如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 发散,$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 称其**条件收敛**

10.2.4 常见级数敛散性推论

推论 10.2.1

设 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n, \sum_{n=1}^{+\infty} v_n, \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ 是任意项级数

$$\begin{cases} v_n = \dfrac{u_n + |u_n|}{2} \\ w_n = \dfrac{|u_n| - u_n}{2} \end{cases}$$

(1). a, b, c 是非零常数, 且 $au_n + bv_n + cw_n = 0$, 在 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n, \sum_{n=1}^{+\infty} v_n, \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ 中只要有两个级数收敛, 另一个级数必收敛

(2). 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 收敛 $\Rightarrow$ 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛; 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow$ 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 发散

(3). 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ 收敛 $\Rightarrow$ 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n}$ 绝对收敛 $\quad \left|\frac{u_n}{n}\right| \le \frac{1}{2}(u^2 + \frac{1}{n^2})$

(4). 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 和级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ 收敛性不确定 $\quad u_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

(5). 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n$ 收敛性不确定 $\quad u_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$

(6). 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{u_n}{n}$ 收敛性不确定 $\quad u_n=(-1)^n\dfrac{1}{\ln n}$

(7). 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛; 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{2n}$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{2n-1}$ 收敛性不确定

10.3 函数项级数

定义 10.3.1 (函数项级数)

设函数列 $\{u_n(x)\}$ 定义在区间 I 上, 称

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\dots$$

为定义在区间 I 上的 **函数项级数**, 记作 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$, 当 x 取确定的值 x_0 时, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 成为常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$

定义 10.3.2 (收敛点和发散点)

(1). 若给定 $x_0\in I$, 有 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$ 收敛, 则称 $x=x_0$ 是函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的**收敛点**

(2). 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$ 发散, 则称 $x=x_0$ 是函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的**发散点**

定义 10.3.3 (收敛域)

函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的所有收敛点的集合称为函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的 **收敛域**

10.3.1 幂级数

定义 10.3.4 (幂级数)

若 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ 的一般项 $u_n(x)$ 是 x 的 n 次幂函数, 则称 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ 为**幂级数**

标准形式:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \ldots$$

一般形式:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

其中 $a_n(n=0,1,2\cdots)$ 为**幂级数的系数**

10.3.2 幂级数收敛域

定理 10.3.1 (阿贝尔定理)

阿贝尔定理

当幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $x=x_1(x_1 \neq 0)$ 处收敛时, $\forall x < |x_1|$, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 都收敛

当幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $x=x_2(x_2 \neq 0)$ 处发散时, $\forall x > |x_2|$, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 都发散

定理 10.3.2 (收敛域和收敛半径)

(1). 不缺项幂级数 (**充分条件**):

$$\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \rho$$

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, \rho \neq 0 \\ 0, \rho = \infty \\ \infty, \rho = 0 \end{cases}$$

区间 $(-R,R)$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛区间; 幂级数的收敛域为 $(-R,R)$ or $[-R,R]$ or $(-R,R]$ or $[-R,R)$

(2). 缺项幂级数或一般项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$, 利用正项级数判别法中的比值判别法 (**充分条件**):

$$\rho(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} |\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}| < 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n(x)} < 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (a,b)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(a) \text{和} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(b) \text{敛散性}$$

(3). 对级数提出或者乘以因式 $(x-x_0)^k$ 或者平移, 收敛半径不变

(4). 对级数逐项求导, 收敛半径不变, 收敛域可能缩小

(5). 对级数逐项积分, 收敛半径不变, 收敛域可能扩大

10.3.3 幂级数求和函数

定义 10.3.5 (幂级数的和函数)

在幂级数收敛域上, 记 $S(x)$ 是幂级数的和函数:

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$$

定理 10.3.3 (运算法则)

幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 R_a 和 R_b, 且 $R_a\neq R_b$

(i).

$$k\sum_{n=0}^{n}a_nx^n=\sum_{n=0}^{n}ka_nx^n,|x|<R_a$$

(ii).

$$\sum_{n=0}^{n}a_nx^n\pm\sum_{n=0}^{n}b_nx^n=\sum_{n=0}^{n}(a_n\pm b_n)x^n,|x|<\min\{R_a,R_b\}$$

(iii).

$$\sum_{n=0}^{n}a_nx^n\sum_{n=0}^{n}b_nx^n=\sum_{n=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}\right)x^n$$

推论 10.3.1

(i). 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上连续

(ii). 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上可积分, 且有逐项积分公式, 收敛半径不变, 收敛域可能变大

$$\int_0^x S(t)dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n\right)dt=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\int_0^x t^ndt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}(x\in I)$$

(iii). 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 $(-R,R)$ 上可导, 且有逐项求导公式, 收

敛半径不变,收敛域可能变小

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{+\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}(|x|<R)$$

10.3.4 重要展开式

定理 10.3.4

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!},-\infty<x<+\infty$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n,-1<x<1$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^n,-1<x<1$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},-1<x\le 1$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},-\infty<x<+\infty$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^nx^{2n}}{2n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},-\infty<x<+\infty$$

$$\tan x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},-1\le x\le 1$$

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots\\ &=\begin{cases}x\in(-1,1), & \alpha\le -1\\ x\in(-1,1], & -1<\alpha<0\\ x\in[-1,1], & \alpha>0\ \&\ \alpha\notin\mathbb{N}_+\\ x\in(-\infty,+\infty), & \alpha\in\mathbb{N}_+\end{cases}\end{aligned}$$

10.3.5 函数展开成幂级数

定义 10.3.6

泰勒级数: $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处存在任意阶导数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

麦克劳林级数: $f(x)$ 在点 $x=0$ 处存在任意阶导数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

10.4 傅里叶级数

定义 10.4.1 (傅里叶级数)

考虑到三角函数是周期函数, 任意一个以 2π 为周期的函数 $f(x)$, 能写成一系列三角函数 $\sin(nx)$ 和 $\cos(nx)$ 的线性组合:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$$

$f(x)$ 三角函数分解被称为傅里叶级数或傅里叶展开, 也被称为三角级数

10.4.1 三角函数集 Γ 的归一正交性

定义 10.4.2 (内积、正交和范数)

考虑 $[-\pi,\pi]$ 上的函数 $f(x)$ 构成的无限维空间, 我们希望用正交的向量组来表示一般的向量 (函数), 我们定义函数内积、正交和范数概念

(1). 内积

$$\forall f,g\in V,(f\cdot g)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$$

(2). 正交

$$\forall f,g\in V,(f\cdot g)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx=0\Rightarrow f\perp g$$

(3). 范数

$$\forall f\in V,\parallel f\parallel=\left(\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

定义 10.4.3 (三角函数集 Γ 的归一正交性)

定义在 $[-\pi,\pi]$ 上的函数空间中存在一系列范数为 1 且正交的向量组, 考虑 $[-\pi,\pi]$ 上的三角函数组

$$\Gamma=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\cdots,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\cdots\right\}$$

$$\forall f\in\Gamma,\parallel f\parallel=1,\forall f,g\in\Gamma,f\cdot g=0\Rightarrow f\perp g$$

不妨设

$$\begin{cases}f_1=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin mx\\ f_2=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\end{cases}\qquad\begin{cases}g_1=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos mx\\ g_2=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\end{cases}$$

$$\begin{cases}\parallel f_1\parallel=\left(\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nxdx\right)^{\frac{1}{2}}=1\\ \parallel g_1\parallel=\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mxdx\right)^{\frac{1}{2}}=1\end{cases}\qquad\begin{cases}f_1\cdot g_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos mxdx=0\\ f_1\cdot f_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nxdx=0(m\neq n)\\ g_1\cdot g_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nxdx=0(m\neq n)\end{cases}$$

♣

10.4.2 周期函数的傅里叶级数

定理 10.4.1 (周期为 2π 函数的傅里叶级数)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$$

三角函数分解, a_n,b_n 是傅里叶级数系数:

$$\begin{cases}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}a_n\cos^2 nxdx\\ \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}b_n\sin^2 nxdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx\\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx\end{cases}$$

记作: 2π **周期函数** $f(x)$ **的傅里叶级数**

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$$

♡

定理 10.4.2 (周期为 2π 奇偶函数的傅里叶级数)

(1). $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 为奇函数, 傅里叶级数为**正弦级数**:

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin nx\Rightarrow b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

(2). $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 为偶函数, 傅里叶级数为**余弦级数**:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx\Rightarrow a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx dx$$

10.4.3 任意对称区间中的傅里叶展开

定义 10.4.4 (任意对称区间中的傅里叶展开)

设 $f(x)$ 定义域为 $[-l,l]$, 令 $y=\dfrac{x\pi}{l}, y\in[-\pi,\pi]$

$$g(y)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos ny+b_n\sin ny)\Rightarrow f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x)$$

傅里叶系数:

$$\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx, & n=0,1,2,\cdots\\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx, & n=1,2,\cdots\end{cases}$$

10.4.4 周期延拓

定义 10.4.5 (周期延拓)

(1). 周期延拓: $[-\pi,\pi]\to(-\infty,+\infty)$

(2). 奇延拓: $[0,\pi]\to[-\pi,\pi]$ 且 $f(x)$ 为奇函数, 正弦级数

(3). 偶延拓: $[0,\pi]\to[-\pi,\pi]$ 且 $f(x)$ 为偶函数, 余弦级数

10.4.5 逐点收敛性理论

定理 10.4.3 (狄利克雷收敛定理)

$f(x)$ 以 $2l$ 为周期的可积函数, 在 $[-l,l]$ 上 $f(x)$ 满足条件:

(1). 连续或者只有有限个第一类间断点

(2). 至多有有限个极值点

$f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-l,l]$ 上处处收敛, 其和函数 $S(x)$ 满足

$$S(x)=\begin{cases}f(x), & x\text{为连续点}\\ \dfrac{f(x_-)+f(x_+)}{2}, & x\text{为间断点}\\ \dfrac{f(-l_+)+f(l_-)}{2}, & x=\pm l\end{cases}$$

定理 10.4.4 (帕塞瓦尔公式)

$f(x)$ 是 2π 周期函数, $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 有界可积, 傅里叶系数满足:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$$

推论 10.4.1 (常见级数和)

(1). $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=e$

(2). $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

(3). $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}=\ln 2$

(4). $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n}=2$

(5). $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}=\frac{e+e^{-1}}{2}$

(6). $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$

(7). $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n+2}{(2n+1)!}=\sin 1+\cos 1$

第 11 章 空间解析几何

11.1 向量代数

定义 11.1.1 (向量代数)

(1). 方向角: 非零向量 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 与 x, y, z 轴所成夹角 α, β, γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角

(2). 方向余弦: $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦, $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \cos\beta = \dfrac{a_y}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases}$$

设 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$

(3). 夹角

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

(4). 投影

$$\mathbf{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

(5). 叉积

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$$

11.2 空间平面和直线

11.2.1 平面

定义 11.2.1 (平面方程)

假设平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B.C)$

(1). 一般式

$$Ax+By+Cz+D=0$$

(2). 点法式

$$A(x-x_0)+B(y-y_0+C(z-z_0)=0$$

(3). 截距式, 平面过 $(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)$ 三点

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

(4). 三点式 $P_i(x_i,y_i,x_i)(i=1,2,3)$ 不共线

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2\\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3\end{vmatrix}=0$$

11.2.2 直线

定义 11.2.2 (直线方程)

假设直线的方向向量 $\boldsymbol{\tau}=(l,m,n)$, $P(x_0,y_0,z_0)$ 是直线上的一点

(1). 一般式

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, & \boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1) \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, & \boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2) \\ \boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2 \end{cases}$$

(2). 点向式

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

(3). 参数式

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}$$

(4). 两点式

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_2}=\frac{y-y_0}{y_1-y_2}=\frac{z-z_0}{z_1-z_2}$$

♣

定理 11.2.1 (位置关系)

(1). 点到直线的距离公式

点 $M(x,y,z)$ 到直线 $L:\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ 的距离

$$d=\frac{|\boldsymbol{\tau}\times\overrightarrow{M_0M}|}{|\boldsymbol{\tau}|}=\frac{\left\|\begin{matrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ l & m & n \\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

二维平面:

$$d=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

(2). 点到平面距离公式

点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离, $P(x,y,z)$ 是平面上任意一点

$$d=|\mathbf{Prj}_n\overrightarrow{P_0P}|=\frac{|A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(3). 直线和直线

设 $\boldsymbol{\tau}_1(l_1,m_1,n_1),\boldsymbol{\tau}_2(l_2,m_2,n_2)$ 分别是 L_1,L_2 的方向向量

$$\begin{cases} L_1\perp L_2\Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1\perp\boldsymbol{\tau}_2\Leftrightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0\\ L_1\parallel L_2\Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1\parallel\boldsymbol{\tau}_2\Leftrightarrow \dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}\end{cases}$$

L_1,L_2 的夹角 $\theta=\arccos\dfrac{|\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2|}{|\boldsymbol{\tau}_1||\boldsymbol{\tau}_2|},\theta\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$

(4). 平面和平面

设 $\boldsymbol{n}_1(A_1,B_1,C_1),\boldsymbol{n}_2(A_2,B_2,C_2)$ 分别是 π_1,π_2 的法向量

$$\begin{cases} \pi_1\perp\pi_2\Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0\\ \pi_1\parallel\pi_2\Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1\parallel\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\end{cases}$$

π_1,π_2 的夹角 $\theta=\arcsin\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|},\theta\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$

11.3 空间曲面和曲线

定义 11.3.1 (空间曲线)

(1). 一般式

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$$

(2). 参数方程式

$$\begin{cases} x=f(t)\\ y=g(t)\\ z=h(t)\end{cases},t\in[\alpha,\beta]$$

(3). 空间曲线在坐标面的投影

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} H(x,y)=0\\ z=0\end{cases}$$

定义 11.3.2 (空间曲面)

(1). 一般曲面方程

$$F(x, y, z) = 0$$

(2). 二次曲面

(a). 椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

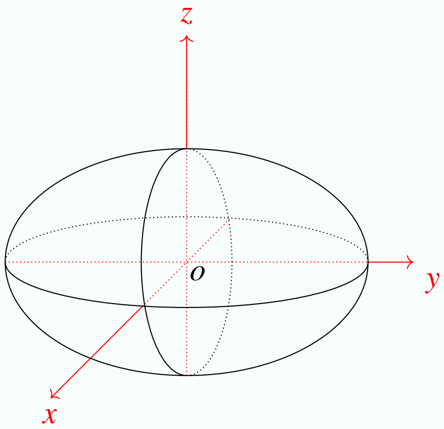


图 11.1: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(b). 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

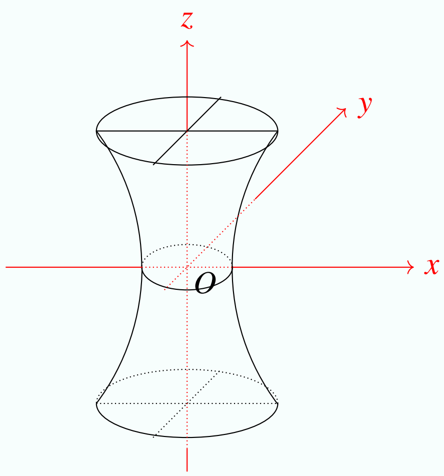


图 11.2: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

(c). 双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

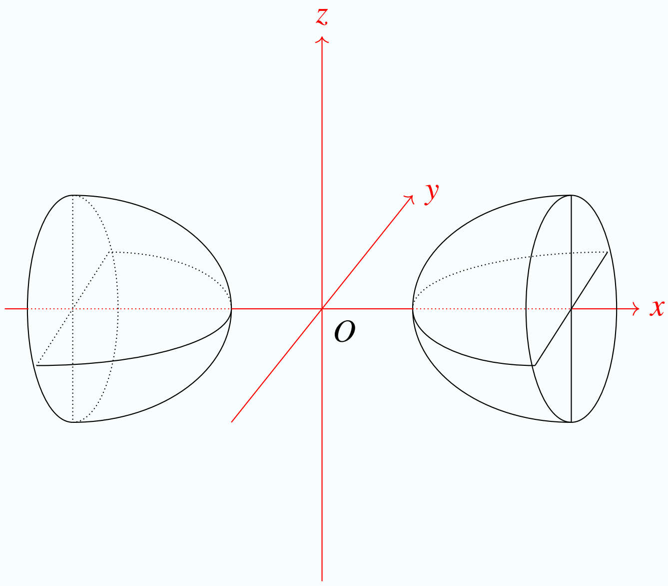


图 11.3: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

(d). 椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z(p,q>0)$

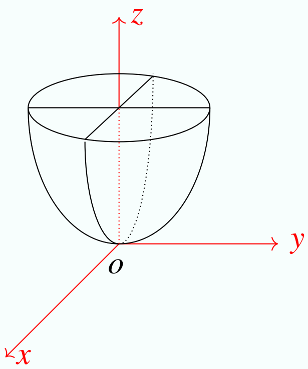


图 11.4: $\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z(p,q>0)$

(f). 椭圆锥面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$

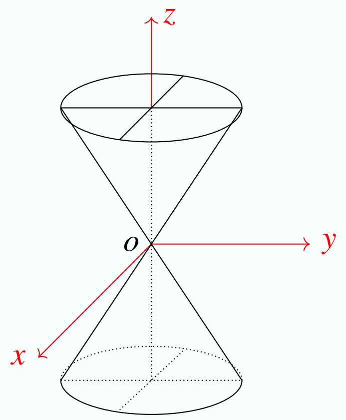


图 11.5: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

(g). 双曲抛物面 $-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z(p,q>0)$

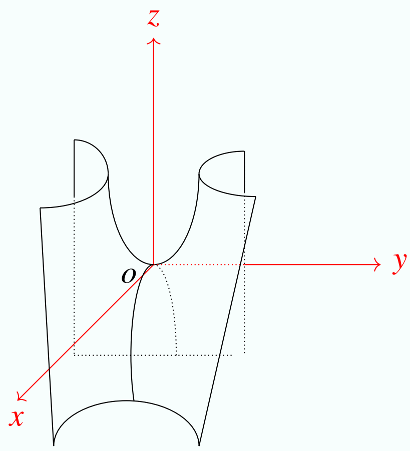


图 11.6: $-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z(p,q>0)$

(h). 双曲抛物面 $z=xy$

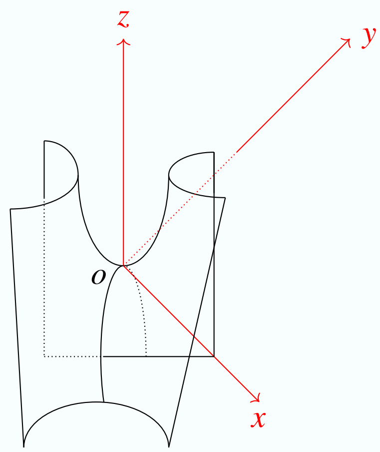


图 11.7: $z=xy$

(i). 椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

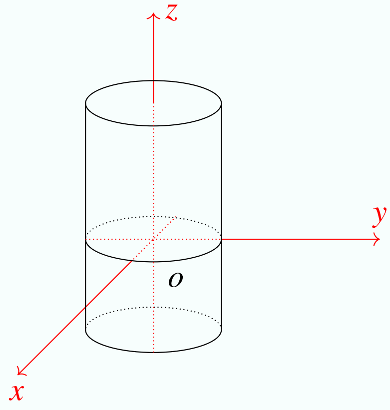


图 11.8: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

(j). 双曲柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

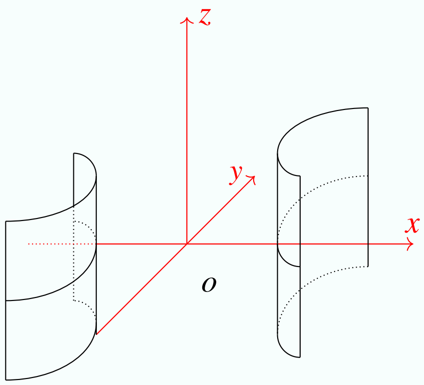


图 11.9: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

(k). 抛物柱面 $y=ax^2$

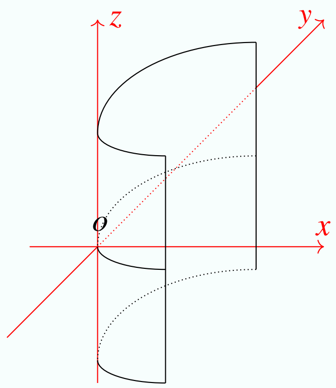


图 11.10: $y=ax^2$

(3). 旋转曲面

曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 绕直线 $L:\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ 旋转一周形成的旋转曲面,

直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{\tau}=(l,m,n)$

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 是曲线 Γ 上任意一点, $P(x,y,z)$ 是 M_1 绕直线 L 旋转一周形成的纬圆上异于 M_1 的一点:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\tau}\perp\overrightarrow{M_1P}\\|\overrightarrow{M_1M_0}|=|\overrightarrow{PM_0}|\\F(x_1,y_1,z_1)=0\\G(x_1,y_1,z_1)=0\end{cases}$$

11.3.1 空间曲线的切线和法平面

定义 11.3.3 (曲线切线和法平面)

(1). 参数方程

$$\begin{cases}x=f(t)\\y=g(t)\\z=h(t)\end{cases},t\in[\alpha,\beta]$$

在 $t=t_0$ 时, 点 $P_0(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$ 处切线的方向向量 $\boldsymbol{n}=(f'(t_0),g'(t_0),h'(t_0))$

切线方程

$$\frac{x-x_0}{f'(t_0)}=\frac{y-y_0}{g'(t_0)}=\frac{z-z_0}{h'(t_0)}$$

法平面方程

$$f'(t_0)(x-x_0)+g'(t_0)(y-y_0)+h'(t_0)(z-z_0)=0$$

(2). 一般式

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$

点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处切线的方向向量

$$\boldsymbol{\tau}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\F'_x&F'_y&F'_z\\G'_x&G'_y&G'_z\end{vmatrix}=(A,B,C)$$

切线方程

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$$

法平面方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

♣

11.3.2 空间曲面的切平面和法线

定义 11.3.4

(1). $F(x,y,z)=0$, 点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处切平面法向量 $\boldsymbol{n}=\{F'_x(x_0,y_0,z_0),F'_y(x_0,y_0,z_0),F'_z(x_0,y_0,z_0)\}$

切平面方程

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$$

(2). $z=f(x,y)$, 点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处切平面法向量 $\boldsymbol{n}=\{f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0),-1\}$

切平面方程

$$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

法线方程

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

♣

11.4 场论初步

11.4.1 方向导数

定义 11.4.1 (方向导数)

设三元函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某空间邻域内 $U\subset R^3$ 有定义,l 是从 P_0 出发的一条射线,$P(x,y,z)$ 为 l 上且在 U 中的任意一点:

$$\begin{cases} x-x_0=\Delta x=t\cos\alpha \\ y-y_0=\Delta y=t\cos\beta \\ z-z_0=\Delta z=t\cos\gamma \end{cases}$$

$t=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$ 表示 $|PP_0|$, 如果下面极限存在:

$$\lim\lim_{t\to0}\frac{u(P)-u(P_0)}{t}=\lim\lim_{t\to0}\frac{u(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-u(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

我们将此极限称为 $u=f(x,y,z)$ 在 P_0 处沿着 l 的方向导数, 记作 $\frac{\partial u}{\partial l}|_{P_0}$

定理 11.4.1 (方向导数计算公式)

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}|_{P_0}=u'_x\cos\alpha+u'_y\cos\beta+u'_z\cos\gamma$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦

11.4.2 梯度

定义 11.4.2 (梯度)

设三元函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处具有一阶偏导数, 定义下面为 $u=u(x,y,z)$ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的梯度:

$$\boldsymbol{guad}\ u|_{P_0}=(u'_x(P_0),u'_y(P_0),u'_z(P_0))$$

梯度和方向导数之间的关系:

$$\frac{\partial u}{\partial l}|_{P_0}=\boldsymbol{guad}\ u|_{P_0}\cdot\boldsymbol{l}=\left|\boldsymbol{guad}\ u|_{P_0}\right||l|\cos\theta$$

11.4.3 散度和旋度

定义 11.4.3 (散度和旋度)

设向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$

散度

$$div\ \boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

旋度

$$rot\ \boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

♣

第 12 章 三重积分

12.1 三重积分定义和性质

定义 12.1.1 (三重积分)

设 $f(x,y,z)$ 是空间有界闭区域 Ω 上的有界函数, 将 Ω 任意分为 n 个小闭区域

$$\Delta v_1, \Delta v_2, \cdots, \Delta v_n$$

其中 Δv_i 表示第 i 个小闭区域, 也表示第 i 个小闭区域的体积, 在每一个 Δv_i 中任意取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i), 作乘积 $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 并求和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$, 如果当 $\lim\limits_{n\to+\infty} \{\lambda|\lambda = \max\{\Delta v_i \text{的直径}, i = 1, 2, \cdots, n\}\} = 0$ 时, 求和的极限总是存在, 与 Δv_i 的分法以及点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无关, 称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上的三重积分, 记作 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$$

其中 $f(x,y,z)$ 称为被积函数, Ω 称为积分区域, $f(x,y,z)dv$ 称为被积表达式, dv 称为体积微元, x,y,z 称为积分变量, $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$ 称为积分和

物理意义

设一物体占有 $Oxyz$ 上闭区域 Ω, 在点 (x,y,z) 处的密度为 $\rho(x,y,z)$, 假定 $\rho(x,y,z)$ 在 Ω 上连续, 物体质量 $M = \iiint\limits_{\Omega} \rho(x,y,z)dv$

推论 12.1.1

(1). 当 $f(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上连续时, 三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$ 一定存在; 当 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上可积, $f(x,y,z)$ 在 Ω 上必有界

(2). $\iint\limits_{\Omega} 1dv = \iiint\limits_{\Omega} dv = V$, V 是 Ω 的体积

(3). 积分线性性质

$$\iiint\limits_{\Omega} [k_1 f(x,y,z) \pm k_2 g(x,y,z)]\, dv = k_1 \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv \pm k_2 \iiint\limits_{\Omega} g(x,y,z)dv$$

(4). 积分的可加性

设 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上可积, 且 $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset, \Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv + \iiint\limits_{\Omega_2} f(x,y,z)dv$$

(5). 积分保号性

设 $f(x,y,z)$ 和 $g(x,y,z)$ 在 Ω 上可积, 且在 Ω 上, $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv \le \iiint\limits_{\Omega} g(x,y,z)dv \Rightarrow \left| \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv \right| \le \iiint\limits_{\Omega} \left| f(x,y,z) \right| dv$$

(6). 估值定理

设 M, m 分别是 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上的最大值和最小值, V 是 Ω 的体积

$$mV \le \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv \le MV$$

(7). 中值定理

设 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上连续, V 是 Ω 的体积

$$\exists (\xi,\eta,\zeta) \in \Omega,\ s.t. \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = f(\xi,\eta,\zeta)V$$

12.2 三重积分对称性

定义 12.2.1 (普通对称性)

(1). Ω 关于平面 xoz 对称

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \begin{cases} 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv & f(x,y,z)=f(x,-y,z) \\ 0 & f(x,y,z)=-f(x,-y,z) \end{cases}$$

(2). Ω 关于平面 yoz 对称

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \begin{cases} 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv & f(x,y,z)=f(-x,y,z) \\ 0 & f(x,y,z)=-f(-x,y,z) \end{cases}$$

(3). Ω 关于平面 xoy 对称

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \begin{cases} 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv & f(x,y,z)=f(x,y,-z) \\ 0 & f(x,y,z)=-f(x,y,-z) \end{cases}$$

定义 12.2.2 (轮换对称性)

若将 x,y,z 任意两个交换位置后, 积分区域 Ω 保持不变

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x)dv = \iiint\limits_{\Omega} f(y)dv = \iiint\limits_{\Omega} f(z)dv$$

12.3 三重积分计算方法

定义 12.3.1 (直角坐标系)

(1). 先一后二

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iint\limits_{D_{xy}} d\sigma \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

一般用于空间区域 Ω 无侧面或者侧面为柱面, 转化为二重积分, 积分区域为空间区域 Ω 在 $xoy(yoz,xoz)$ 平面的投影

(2). 先二后一

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \int_a^b dz \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)d\sigma$$

适用于旋转体, 旋转曲面方程 $z=z(x,y)$

定义 12.3.2 (换元法)

令 $\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$ ，且 $(x,y,z) \to (u,v,w)$ 是一一映射, $x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$ 有一阶连续偏导数

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \left\|\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{matrix}\right\| \neq 0$$

$$\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_{uvw}} f\left[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right]\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

♣

定义 12.3.3 (柱面坐标系)

令 $\begin{cases} x = r\cos\theta, & \theta \in [0,2\pi] \\ y = r\sin\theta, & \theta \in [0,2\pi] \\ z = z \end{cases}$, 且 $(x,y,z) \to (r,\theta,z)$ 是一一映射, $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$ 有一阶连续偏导数

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = \left\|\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| = r$$

$$\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{\Omega_{r\theta z}} drd\theta \int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} rf(r\cos\theta, r\sin\theta, z)dz$$

♣

定义 12.3.4 (球面坐标系)

令 $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, & \theta \in [0,2\pi] \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, & \theta \in [0,2\pi] \\ z = r\cos\varphi, & \varphi \in [0,\pi] \end{cases}$, 且 $(x,y,z) \to (r,\theta,\varphi)$ 是一一映射, $x = r\sin\varphi\cos\theta, y = r\sin\varphi\sin\theta, z = r\cos\varphi$ 有一阶连续偏导数

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right| = \left\|\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \sin\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\cos\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{matrix}\right\| = r^2\sin\varphi$$

$$\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_{r\varphi\theta}} r^2\sin\varphi f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)drd\theta d\varphi$$

12.4 三重积分应用

定理 12.4.1 (重心公式)

对于空间物体, 体密度 $\rho(x,y,z)$, Ω 是物体所占的空间区域, 重心 $O(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{\iiint\limits_{\Omega} x\rho(x,y,z)dv}{\iiint\limits_{\Omega} \rho(x,y,z)dv} \\ \overline{y} = \dfrac{\iiint\limits_{\Omega} y\rho(x,y,z)dv}{\iiint\limits_{\Omega} \rho(x,y,z)dv} \\ \overline{z} = \dfrac{\iiint\limits_{\Omega} z\rho(x,y,z)dv}{\iiint\limits_{\Omega} \rho(x,y,z)dv} \end{cases}$$

当密度函数为 $\rho(x,y,z)$ 为常数, 重心就是形心

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{\iiint\limits_{\Omega} xdv}{\iiint\limits_{\Omega} dv} \\ \overline{y} = \dfrac{\iiint\limits_{\Omega} ydv}{\iiint\limits_{\Omega} dv} \\ \overline{z} = \dfrac{\iiint\limits_{\Omega} zdv}{\iiint\limits_{\Omega} dv} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \iiint\limits_{\Omega} xdv = \overline{x}\cdot V \\ \iiint\limits_{\Omega} ydv = \overline{y}\cdot V \\ \iiint\limits_{\Omega} zdv = \overline{z}\cdot V \end{cases}$$

定理 12.4.2 (转动惯量 $I = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i r_i^2$)

对于空间物体, 体密度 $\rho(x,y,z)$, Ω 是物体所占的空间区域

(1). x 轴

$$I_x = \iint\limits_{\Omega} (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dv$$

(2). y 轴

$$I_y = \iint\limits_{\Omega} (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)dv$$

(3). z 轴

$$I_z = \iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dv$$

(4). 原点 O

$$I_O = \iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dv$$

定理 12.4.3 (万有引力 $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$)

对于空间物体, 体密度 $\rho(x, y, z)$, Ω 是物体所占的空间区域, 计算该物体对物体外一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处质量为 m 的质点的引力 $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$

$$\begin{aligned}
F_x &= Gm \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \cos\alpha dv \\
&= Gm \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)(x - x_0)}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\
F_y &= Gm \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{(y - y_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \cos\beta dv \\
&= Gm \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)(y - y_0)}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\
F_z &= Gm \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{(z - z_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \cos\gamma dv \\
&= Gm \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)(z - z_0)}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

第 13 章 第一型曲线和曲面积分

13.1 第一型曲线积分

13.1.1 第一型曲线积分定义和性质

定义 13.1.1 (第一型曲线积分)

设 L 是 xoy 平面内一条光滑曲线弧, 函数 $f(x,y)$ 在 L 上有界, 在 L 上任意插入一系列的点 $M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}$ 将 L 分成 n 小段, 设第 i 段的弧长为 Δs_i, 在第 i 段上任意取一点 (ζ_i, η_i), 作乘积 $f(\zeta_i, \eta_i)\Delta s_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 并求和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\zeta_i, \eta_i)\Delta s_i$, 当 $\lim\limits_{n\to+\infty} \{\lambda|\lambda = \max\{\Delta s_i\}, i = 1, 2, \cdots, n\} = 0$ 时, 求和极限存在, 且与 Δs_i 的分法以及 (ζ_i, η_i) 的取法无关, 称此极限为函数 $f(x,y)$ 在曲线 L 上对弧长的曲线积分或第一型曲线积分, 记作 $\int_L f(x,y)ds$

$$\int_L f(x,y)ds = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i, \eta_i)\Delta s_i$$

其中 $f(x,y)$ 称为被积函数, $f(x,y)ds$ 称为被积表达式, x, y 是积分变量, L 是积分弧

对于函数 $f(x,y,z)$ 在空间曲线 Γ 上的第一型曲线积分

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i$$

物理意义

1. 设一物体在 xoy 平面内一光滑曲线弧 L 上, 物体在 L 上的线密度为 $\rho(x,y)$, 则物体的质量 $m = \int_L \rho(x,y)ds$
2. 设一物体在空间曲线 Γ 上, 物体在 Γ 上的线密度为 $\rho(x,y,z)$, 则物体的质量 $m = \int_\Gamma \rho(x,y,z)ds$

推论 13.1.1

(1). $\int_\Gamma ds = l_\Gamma$, 其中 l_Γ 是 Γ 的长度

(2). 设 $f(x,y,z)$ 在 Γ 上可积, 其在 Γ 上必有界

(3). 积分线性性质

$$\int_\Gamma [k_1 f(x,y,z) + k_2 g(x,y,z)]\, ds = k_1 \int_\Gamma f(x,y,z)ds + k_2 \int_\Gamma g(x,y,z)ds$$

(4). 积分可加性

设 $f(x,y,z)$ 在 Γ 上可积, 且 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset, \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds = \int_{\Gamma_1} f(x,y,z)ds + \int_{\Gamma_2} f(x,y,z)ds$$

(5). 积分保号性

设 $f(x,y,z), g(x,y,z)$ 在 Γ 上可积, 且在 Γ 上 $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds \le \int_\Gamma g(x,y,z)ds \Rightarrow \left|\int_\Gamma f(x,y,z)ds\right| \le \int_\Gamma |f(x,y,z)|ds$$

(6). 估值定理设 M, m 分别是 $f(x,y,z)$ 在 Γ 上的最大值和最小值, l_Γ 的长度

$$ml_\Gamma \le \int_\Gamma f(x,y,z)ds \le Ml_\Gamma$$

(7). 中值定理

设 $f(x,y,z)$ 在 Γ 上连续, l_Γ 是 Γ 的长度

$$\exists(\xi,\eta,\zeta) \in \Gamma,\ s.t.\ \int_\Gamma f(x,y,z)ds = f(\xi,\eta,\zeta)l_\Gamma$$

13.1.2 第一型曲线积分的对称性

定义 13.1.2 (普通对称性)

(1). Γ 关于平面 xoz 对称

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds = \begin{cases} 2\int_{\Gamma_1} f(x,y,z)ds & f(x,y,z) = f(x,-y,z) \\ 0 & f(x,y,z) = -f(x,-y,z) \end{cases}$$

(2). Γ 关于平面 yoz 对称

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds = \begin{cases} 2\int_{\Gamma_1} f(x,y,z)ds & f(x,y,z) = f(-x,y,z) \\ 0 & f(x,y,z) = -f(-x,y,z) \end{cases}$$

(3). Γ 关于平面 xoy 对称

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds=\begin{cases}2\int_{\Gamma_1} f(x,y,z)ds & f(x,y,z)=f(x,y,-z)\\ 0 & f(x,y,z)=-f(x,y,-z)\end{cases}$$

定义 13.1.3 (轮换对称性)

若将 x,y,z 任意两个交换位置后, 积分区域 Γ 保持不变

$$\int_\Gamma f(x)ds=\int_\Gamma f(y)ds=\int_\Gamma f(z)ds$$

13.1.3 第一型曲线积分计算

定理 13.1.1 (平面曲线)

(1). $L:y=f(x),x\in[a,b]$

$$\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f(x,y)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$$

(2). $L:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}\quad t\in[\alpha,\beta]$

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f\left[x(t),y(t)\right]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$$

(3). $L:r=r(\theta),\theta\in[\theta_1,\theta_2]$

$$\int_L f(x,y)ds=\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}d\theta$$

定理 13.1.2 (空间曲线)

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}\quad t\in[\alpha,\beta]\Rightarrow ds=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}dt$$

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f\left[x(t),y(t),z(t)\right]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}dt$$

13.2 第一型曲面积分

13.2.1 第一型曲面积分定义和性质

定义 13.2.1 (第一型曲面积分)

设曲面 Σ 是光滑的, 函数 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上有界, 将 Σ 任意分为 n 个小块 $\Delta\Sigma_i, \Delta S_i$ 表示曲面 $\Delta\Sigma_i$ 的面积, 在 $\Delta\Sigma_i$ 上任意取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i), 作乘积 $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i(i=1,2,\cdots,n)$, 并求和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)S_i$, 当 $\lim\limits_{n\to+\infty}\{\lambda|\lambda=\max\{S_i\}, i=1,2,\cdots,n\}=0$ 时, 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$ 存在, 且与 $\Delta\Sigma_i$ 的分法和 (ξ_i,η_i,ζ_i) 的取法无关, 称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上对面积的曲面积分或第一型曲面积分, 记作 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS$

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

其中 $f(x,y,z)$ 称为被积函数, $f(x,y,z)dS$ 称为被积表达式, x,y,z 是积分变量, Σ 是积分曲面

物理意义

设一曲面物体 Σ, 曲面密度为 $\rho(x,y,z)$, 则物体的质量 $m=\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)dS$

推论 13.2.1

(1). $\int_{\Sigma} dS=S$, 其中 S 是 Σ 的面积

(2). 设 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上可积, 其在 Σ 上必有界

(3). 积分线性性质

$$\iint\limits_{\Sigma}\left[k_1 f(x,y,z)+k_2 g(x,y,z)\right]dS=k_1\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS+k_2\iint\limits_{\Sigma} g(x,y,z)dS$$

(4). 积分可加性

设 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上可积, 且 $\Sigma_1\cap\Sigma_2=\emptyset, \Sigma_1\cup\Sigma_2=\Sigma$

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS+\iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)dS$$

(5). 积分保号性

设 $f(x,y,z), g(x,y,z)$ 在 Σ 上可积, 且在 Σ 上 $f(x,y,z)\le g(x,y,z)$

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS\le\iint\limits_{\Sigma} g(x,y,z)dS\Rightarrow\left|\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS\right|\le\iint\limits_{\Sigma}\left|f(x,y,z)\right|dS$$

(6). 估值定理

设 M, m 分别是 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上的最大值和最小值, S_Σ 表示 Σ 的面积

$$mS_\Sigma \le \iint\limits_\Sigma f(x,y,z)dS \le MS_\Sigma$$

(7). 中值定理

设 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续, S_Σ 是 Σ 的面积

$$\exists(\xi,\eta,\zeta) \in \Sigma,\ s.t.\ \iint\limits_\Sigma f(x,y,z)dS = f(\xi,\eta,\zeta)S_\Sigma$$

13.2.2 第一型曲面积分的对称性

定义 13.2.2 (普通对称性)

(1). Σ 关于平面 xoz 对称

$$\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)dS = \begin{cases} 2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS & f(x,y,z) = f(x,-y,z) \\ 0 & f(x,y,z) = -f(x,-y,z) \end{cases}$$

(2). Σ 关于平面 yoz 对称

$$\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)dS = \begin{cases} 2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS & f(x,y,z) = f(-x,y,z) \\ 0 & f(x,y,z) = -f(-x,y,z) \end{cases}$$

(3). Σ 关于平面 xoy 对称

$$\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)dS = \begin{cases} 2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS & f(x,y,z) = f(x,y,-z) \\ 0 & f(x,y,z) = -f(x,y,-z) \end{cases}$$

定义 13.2.3 (轮换对称性)

若将 x,y,z 任意两个交换位置后, 积分区域 Σ 保持不变

$$\iint\limits_\Sigma f(x)dS = \iint\limits_\Sigma f(y)dS = \iint\limits_\Sigma f(z)dS$$

13.2.3 第一型曲面积分计算

定理 13.2.1 (投影法)

1. 曲面投影 xoy 平面

设曲面 Σ 的方程为 $z=z(x,y)$, 则 Σ 的面积元素 $dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{D} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$$

2. 曲面投影 yoz 平面

设曲面 Σ 的方程为 $x=x(y,z)$, 则 Σ 的面积元素 $dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}dydz$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{D} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}dydz$$

3. 曲面投影 xoz 平面

设曲面 Σ 的方程为 $y=y(x,z)$, 则 Σ 的面积元素 $dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}dxdz$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{D} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}dxdz$$

13.3 第一型曲线积分和曲面积分应用

1. 曲线长度和曲面面积

定理 13.3.1 (曲线弧长和曲面面积)

$$L_{\Gamma}=\int_{\Gamma} ds$$

$$S_{\Sigma}=\iint_{\Sigma} dS$$

2. 重心

定理 13.3.2 (重心公式)

(1). 光滑曲线, 对于光滑曲线 Γ, 线密度 $\rho(x,y,z)$, 重心 $O(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$

$$\begin{cases} \overline{x}=\dfrac{\int_\Gamma x\rho(x,y,z)ds}{\int_\Gamma \rho(x,y,z)ds} \\ \overline{y}=\dfrac{\int_\Gamma y\rho(x,y,z)ds}{\int_\Gamma \rho(x,y,z)ds} \\ \overline{z}=\dfrac{\int_\Gamma z\rho(x,y,z)ds}{\int_\Gamma \rho(x,y,z)ds} \end{cases}$$

当密度函数为 $\rho(x,y,z)$ 为常数, 重心就是形心

$$\begin{cases} \overline{x}=\dfrac{\int_\Gamma xds}{\int_\Gamma ds} \\ \overline{y}=\dfrac{\int_\Gamma yds}{\int_\Gamma ds} \\ \overline{z}=\dfrac{\int_\Gamma zds}{\int_\Gamma ds} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_\Gamma xds=\overline{x}\cdot l_\Gamma \\ \int_\Gamma yds=\overline{y}\cdot l_\Gamma \\ \int_\Gamma zds=\overline{z}\cdot l_\Gamma \end{cases}$$

(2). 光滑曲面, 对于光滑曲面 Σ, 曲面密度 $\rho(x,y,z)$, 重心 $O(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$

$$\begin{cases} \overline{x}=\dfrac{\int_\Sigma x\rho(x,y,z)dS}{\int_\Sigma \rho(x,y,z)dS} \\ \overline{y}=\dfrac{\int_\Sigma y\rho(x,y,z)dS}{\int_\Sigma \rho(x,y,z)dS} \\ \overline{z}=\dfrac{\int_\Sigma z\rho(x,y,z)dS}{\int_\Sigma \rho(x,y,z)dS} \end{cases}$$

当密度函数为 $\rho(x,y,z)$ 为常数, 重心就是形心

$$\begin{cases} \overline{x}=\dfrac{\int_\Sigma xdS}{\int_\Sigma dS} \\ \overline{y}=\dfrac{\int_\Sigma ydS}{\int_\Sigma dS} \\ \overline{z}=\dfrac{\int_\Sigma zdS}{\int_\Sigma dS} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_\Sigma xdS=\overline{x}\cdot S_\Sigma \\ \int_\Sigma ydS=\overline{y}\cdot S_\Sigma \\ \int_\Sigma zdS=\overline{z}\cdot S_\Sigma \end{cases}$$

3. 转动惯量

定义 13.3.1 (转动惯量: $I=mr^2$)

(1). 光滑曲线, 对于光滑曲线 Γ, 线密度 $\rho(x,y,z)$

对 x 轴: $I_x=\int\limits_L (y^2+z^2)\rho(x,y,z)ds$

对 y 轴: $I_y=\int\limits_L (x^2+z^2)\rho(x,y,z)ds$

对 z 轴: $I_z = \int\limits_L (x^2+y^2)\rho(x,y,z)ds$
对坐标原点 O: $I_O = \int\limits_L (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)ds$
(2). 光滑曲面, 对于光滑曲线 Σ, 面密度 $\rho(x,y,z)$
对 x 轴: $I_x = \iint\limits_\Sigma (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dS$
对 y 轴: $I_y = \iint\limits_\Sigma (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dS$
对 z 轴: $I_z = \iint\limits_\Sigma (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dS$
对坐标原点 O: $I_O = \iint\limits_\Sigma (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)dS$

4. 万有引力

定义 13.3.2 (引力公式: $F = \dfrac{GMm}{r^2}$)

(1). 光滑曲线, 对于光滑曲线 Γ, 线密度 $\rho(x,y,z)$

$$F_x = Gm\int\limits_\Gamma \frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}ds$$

$$F_y = Gm\int\limits_\Gamma \frac{\rho(x,y,z)(y-y_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}ds$$

$$F_z = Gm\int\limits_\Gamma \frac{\rho(x,y,z)(z-z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}ds$$

(2). 光滑曲面, 对于光滑曲面 Σ, 面密度 $\rho(x,y,z)$

$$F_x = Gm\iint\limits_\Sigma \frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}dS$$

$$F_y = Gm\iint\limits_\Sigma \frac{\rho(x,y,z)(y-y_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}dS$$

$$F_z = Gm\iint\limits_\Sigma \frac{\rho(x,y,z)(z-z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}dS$$

第 14 章 第二型曲线和曲面积分

14.1 第二型曲线积分

14.1.1 第二型曲线积分定义和性质

定义 14.1.1 (第二型曲线积分)

在变力场中, $\boldsymbol{F} = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$ 沿着曲线 L 从 A 点到 B 点的做功

二维平面

$$W = \int_L \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

三维空间

$$W = \int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_\Gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

♣

推论 14.1.1

(1). 线性性质

$$\int_\Gamma (k_1\boldsymbol{F_1} \pm \boldsymbol{F_2})d\boldsymbol{s} = k_1\int_\Gamma \boldsymbol{F_1}d\boldsymbol{s} + k_2\int_\Gamma \boldsymbol{F_2}d\boldsymbol{s}$$

(2). 积分有向性

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{F}d\boldsymbol{s} = -\int_{\overset{\frown}{BA}} \boldsymbol{F}d\boldsymbol{s}$$

(3). 积分可加性

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{F}d\boldsymbol{s} = \int_{\overset{\frown}{AC}} \boldsymbol{F}d\boldsymbol{s} + \int_{\overset{\frown}{CB}} \boldsymbol{F}d\boldsymbol{s}$$

♠

14.1.2 第二型曲线积分计算

14.1.2.1 参数方程转定积分

定理 14.1.1

1. 二维平面

$$L=\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases},t\in[\alpha,\beta]$$

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta[P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)]dt$$

2. 三维空间

$$\Gamma=\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases},t\in[\alpha,\beta]$$

$$\begin{aligned}\int_\Gamma P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz &= \int_\alpha^\beta P(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt\\ &+ Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)dt\\ &+ R(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt\end{aligned}$$

14.1.2.2 格林公式

定理 14.1.2 (格林公式)

设平面有界区域 D 由光滑曲线 L 围成, L 取正向 (左手在内侧), $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 上有一阶连续偏导数

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

- L 是非封闭区域, 且在区域 D 内满足 $\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 补线使其成为封闭区域
- L 是封闭区域, 且在区域 D 内有奇点, 且除奇点之外满足 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

$$\oint_L Pdx+Qdy=\oint_{L_1}Pdx+Qdy$$

- 平面曲线积分与路径无关 $\Leftrightarrow\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}\Leftrightarrow u=Pdx+Qdy$

14.1.2.3 斯托克斯公式

定理 14.1.3 (斯托克斯公式)

设 Ω 是某空间区域, Σ 是 Ω 内分片光滑有向曲面, Γ 是 Σ 的边界, 方向和 Σ 法向量成右手系, 函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在 Ω 内有连续的一阶偏导数

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dxdz & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

14.2 第二型曲面积分

14.2.1 第二型曲面积分定义和性质

定义 14.2.1 (第二型曲线积分)

在向量场场中, 存在向量函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ 是向量场中某一有向光滑曲面, $\boldsymbol{n}$ 是 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的单位法向量, $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{\Sigma}$ 上的通量

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS = \iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dydz$$

推论 14.2.1

(1). 线性性质

$$\iint_{\Sigma} (k_1\boldsymbol{F_1} \pm \boldsymbol{F_2})d\boldsymbol{S} = k_1 \iint_{\Sigma} \boldsymbol{F_1}d\boldsymbol{S} + k_2 \iint_{\Sigma} \boldsymbol{F_2}d\boldsymbol{S}$$

(2). 积分有向性

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F}d\boldsymbol{S} = -\iint_{\Sigma^-} \boldsymbol{F}d\boldsymbol{S}$$

(3). 积分可加性

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{S} = \iint_{\Sigma_1} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{S} + \iint_{\Sigma_2} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{S}$$

14.2.2 第二型曲面积分计算

14.2.2.1 投影转二重积分

- $$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dydz$$
- 每一项的符号由 $\boldsymbol{n}$ 的方向决定

$$\begin{cases} cos\alpha > 0 \rightarrow dydz \\ cos\beta > 0 \rightarrow dxdz \\ cos\gamma > 0 \rightarrow dxdy \end{cases}$$

14.2.2.2 高斯公式

定理 14.2.1 (高斯公式) 设空间有界闭区域 Ω 由分片光滑封闭曲面 Σ 围成，Σ 取外侧，函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在 Ω 内有连续的一阶偏导数

$$\iint\limits_{\Omega} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy = \iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv$$

第三部分

线代

第 3 部分目录

第 15 章 行列式

15.1 行列式的定义和性质

定义 15.1.1 (行列式)

行列式是一个在方阵上按照一定法则计算得到的标量, 记作 $det(A)$ 或者 $|A|$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1. 几何定义

n 阶行列式 $det(A_n)$ 的几何意义是 n 维空间中由 n 阶行列式中的 n 个向量围成的 n 维空间体的 “体积”

$$det(A_2) = |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = S_D$$

$$det(A_3) = |A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = V_\Omega$$

2. 逆序数法定义

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 是 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数

推论 15.1.1 (行列式的性质)

- 性质 1

  行列式中行列等价, 行列互换, 行列式的值不变, $|A| = |A^T|$
- 性质 2

  行列式中某行或者某列元素全为 0, 行列式的值 $det(A) = 0$
- 性质 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 性质 4

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 性质 5

  行列式两行或者两列互换, 行列式的值相反

- 性质 6

  行列式中两行或者两列成比例, 行列式的值为 0
- 性质 7

  行列式中某一行加上另一行的 k 倍, 行列式的值不变

15.2 行列式展开定理

15.2.1 余子式

定义 15.2.1 (余子式)

行列式 $det(A)$ 去掉任意一项 a_{ij} 所在行和列去掉后的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式 M_{ij}

15.2.2 代数余子式

定义 15.2.2 (代数余子式)

行列式中任意一项 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

15.2.3 行列式展开定理

定理 15.2.1 (行列式展开定理)

行列式 $det(A)$ 按照第 i 行或者第 j 列展开

$$det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \end{cases}$$

15.3 几类特殊的行列式

15.3.1 上下三角行列式

推论 15.3.1 (上下三角行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

15.3.2 副三角行列式

推论 15.3.2 (副三角行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_{i,n-i+1}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_{i,n-i+1}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_{i,n-i+1}$$

15.3.3 拉普拉斯展开式

推论 15.3.3 (拉普拉斯展开式)

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$$

其中 A 是 m 阶矩阵, B 是 n 阶矩阵

15.3.4 范德蒙行列式

推论 15.3.4 (范德蒙行列式)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)$$

15.4 行列式计算

命题 15.4.1 (爪型行列式)

$$det(A) = \begin{vmatrix} x_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_n \\ y_2 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ y_3 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \prod_{i=2}^{n} x_i \left(x_1 - \sum_{j=2}^{n} \frac{z_j y_j}{x_j} \right)$$

命题 15.4.2 (X 型行列式)

$$det(A)=\begin{vmatrix} a_1 & & & & & b_1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_k & b_k & & \\ & & b_{k+1} & a_{k+1} & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b_n & & & & & a_n \end{vmatrix}$$

♠

命题 15.4.3 (两三角形行列式)

$$det(A)=\begin{vmatrix} x_1 & b & b & \cdots & b \\ c & x_2 & b & \cdots & b \\ c & c & x_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
det(A) &= \begin{vmatrix} x_1 & b & b & \cdots & b+0 \\ c & x_2 & b & \cdots & b+0 \\ c & c & x_3 & \cdots & b+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & c+x_n-c \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_1 & b & b & \cdots & b \\ c & x_2 & b & \cdots & b \\ c & c & x_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & b & b & \cdots & 0 \\ c & x_2 & b & \cdots & 0 \\ c & c & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & x_n-c \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_1-b & 0 & 0 & \cdots & b \\ c-b & x_2-b & 0 & \cdots & b \\ c-b & c-b & x_3-b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c \end{vmatrix} + (x_n-c)A_{n-1} \\
&= c\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-b) + (x_n-c)A_{n-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases} A_n = c\prod\limits_{i=1}^{n-1}(x_i-b) + (x_n-c)A_{n-1} \\ A_n^T = b\prod\limits_{i=1}^{n-1}(x_i-c) + (x_n-b)A_{n-1}^T \\ A_n = A_n^T \end{cases} \Rightarrow det(A) = \frac{b\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i-c) - c\prod\limits_{j=1}^{n}(x_j-b)}{b-c}
$$

命题 15.4.4

$$
det(A) = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{vmatrix} = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}
$$

当 $b=c$ 时

$$\begin{aligned}
det(A) &= \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\
&= [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\
&= [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} \\
&= [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}
\end{aligned}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

命题 15.4.5 (三对角型行列式)

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a \end{vmatrix}$$

递推式: $A_n = aA_{n-1} - bcA_{n-2}$

特征方程: $x^2 - ax + bc = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4bc}}{2} \\ x_2 = \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 4bc}}{2} \end{cases}$

$$det(A) = A_n = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2}$$

15.5 Cramer Rule

定理 15.5.1 (Cramer Rule)

对于 n 个方程 n 个未知数的非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

若行列式

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

方程组有唯一解 $x_i = \dfrac{det(A_i)}{det(A)}$, 其中 A_i 是讲 $det(A)$ 的第 i 列换成 $b_1, b_2, \cdots, b_n$

对于 n 个方程 n 个未知数的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

$det(A) \neq 0$, 方程组有唯一解 $x_i = 0$, $det(A) = 0$, 方程组有无穷多非零解

第 16 章 矩阵

16.1 矩阵的定义和运算

16.1.1 矩阵定义和线性运算

定义 16.1.1 (矩阵定义)

由 $m \times n$ 个数 a_{ij} 排成的 m 行 n 列的数表称为 m 行 n 列的矩阵，记作：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$m \times n$ 个数称为矩阵 A 的元素，简称为元，数 a_{ij} 位于矩阵 A 的第 i 行第 j 列，称为矩阵 A 的 (i, j) 元，$m \times n$ 矩阵乘法记作 A_{mn} 或 $(a_{ij})_{m\times n}$

- 元素是实数的矩阵称为实矩阵，元素是复数的矩阵称为复矩阵
- 行数和列数相等的矩阵称为方阵

定义 16.1.2 (矩阵的线性运算)

1. 加法

$$C = A + B = (a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = (c_{ij})_{m\times n}$$

其中 $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

2. 标量乘法

$$kA = k(a_{ij})_{m\times n} = (ka_{ij})_{m\times n}$$

定义 16.1.3 (重要矩阵)

- 零矩阵: 所有元素均为 0 的矩阵, 记作 O
- 单位矩阵: 主对角线元素均为 1, 其余元素全为 0 的 n 阶方阵, 记作 E 或 I
- 数量矩阵: 数 k 和单位矩阵乘积得到的矩阵被称为数量矩阵
- 对角矩阵: 非主对角线元素均为 0 的矩阵称为对角矩阵
- 上 (下) 三角矩阵: 当 $i > (<) j, a_{ij} = 0$ 的矩阵称为上 (下) 三角矩阵
- 对称矩阵: 满足条件 $A^T = A$ 的矩阵称为对称矩阵
- 反对称矩阵: 满足条件 $A^T = -A$ 的矩阵称为对称矩阵
- 幂等矩阵: 满足条件 $A^2 = A$ 的矩阵称为幂等矩阵
- 正交矩阵: A 是 n 阶方阵, 满足 $A^TA = E$ 的矩阵称为正交矩阵
- 分块矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_n \end{bmatrix}$$

其中 $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}), B_j = (b_{j1}, b_{j2}, \cdots, b_{jm})^T$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX + BY & AY + BW \\ CX + DY & CY + DW \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A^n & O \\ O & B^n \end{bmatrix}$$

16.1.2 矩阵乘法和幂

定义 16.1.4 (矩阵的乘法和幂)

1. 矩阵乘法

$A=(a_{ij})_{m\times s}, B=(b_{ij})_{s\times n}$, 矩阵 A, B 可以相乘 (左乘矩阵的列数和右乘矩阵的行数相等), 记 $C=A\times B=(c_{ij})_{m\times n}$

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$$

2. 矩阵转置

将矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的行列互换得到矩阵 A 的转置矩阵, 记作 A^T

$$A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- $(A^T)^T=A$
- $(kA)^T=k(A)^T$
- $(A+B)^T=A^T+B^T$
- $(AB)^T=B^TA^T$
- 当 $m=n$ 时, $|A^T|=|A|$

3. 矩阵的幂

A 是 n 阶方阵, $A^m=\overbrace{AA\cdots A}^{m个}$ 称为方阵 A 的 m 次幂

- $(A\pm B)^2=A^2+B^2\pm AB\pm BA$
- $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$
- $(AB)^m=\overbrace{(AB)(AB)\cdots(AB)}^{m个}$
- 当 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 时, $f(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_nA^n$ ♣

16.2 矩阵的逆和伴随矩阵

16.2.1 矩阵的逆

定义 16.2.1 (逆矩阵)

A, B 是 n 阶方阵, E 是 n 阶单位矩阵, 若 $AB = BA = E$, 则称 A 是可逆矩阵, 并称 B 是 A 的逆矩阵, 且逆矩阵唯一, 将 A 的逆矩阵记作 A^{-1}

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- AB 可逆, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $k \neq 0, (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
- A^T可逆, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

定理 16.2.1 (逆矩阵存在充要条件)

A 是 n 阶方阵, A 可逆的充要条件:

$$\left|A\right| \neq 0$$

16.2.2 伴随矩阵

定义 16.2.2 (伴随矩阵)

A 是 n 阶方阵, A 的伴随矩阵 A^* 是由 A 的代数余子式构成的矩阵, 记作 $A^* = (A_{ij})_{n\times n}$, 其中 A_{ij} 是 a_{ji} 的代数余子式

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$AA^* = A^*A = |A|E \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

- $\forall A_n, \left|A^*\right| = \left|A\right|^{n-1}$
- $|A| \neq 0, A^* = |A|A^{-1}, A = |A|(A^*)^{-1}$
- $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$
- $(kA)^* = k^{n-1}A^*$

16.3 初等变换和初等矩阵

定义 16.3.1 (初等变换)

- 用一个非零常数乘以矩阵的某一行 (列)
- 互换矩阵中的某两行 (列) 的位置
- 将矩阵的某一行 (列) 的 k 倍加到另一行 (列)

定义 16.3.2 (初等矩阵)

由单位矩阵经过一次初等变换后得到的矩阵被称为初等矩阵

- $E_i(k)$ 表示 E 的第 i 行 (列) 乘 k 倍

$$E_i(k) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & m & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- E_{ij} 表示 E 的第 i 行 (列) 与第 j 行 (列) 互换位置

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- $E_{ij}(k)$ 表示 E 的第 i 行 (列) 的 k 倍加到第 j 行 (列)

$$E_{ij}(k) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & k & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

推论 16.3.1 (初等矩阵推论)

$$\begin{cases} E_i(k)^T = E_i(k) \\ E_{ij}^T = E_{ij} \\ E_{ij}(k)^T = E_{ji}(k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_i(k)^{-1} = \dfrac{1}{k}E_i(k) \\ E_{ij}^{-1} = E_{ij} \\ E_{ij}(k)^{-1} = E_{ij}(-k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left|E_i(k)\right| = k \\ \left|E_{ij}\right| = -1 \\ \left|E_{ij}(k)\right| = 1 \end{cases}$$

- Gauss-Jordan Elimination

$$\begin{bmatrix} A & E \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} E & A^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{bmatrix} E \\ A^{-1} \end{bmatrix}$$

推论 16.3.2 (矩阵变换)

若 A 是可逆矩阵, 存在有限个初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$, 满足 $A = P_1P_2\cdots P_s$, 且 $A^{-1} = P_s^{-1}\cdots P_2^{-1}P_1^{-1}$

定义 16.3.3 (行阶梯形矩阵)

行阶梯形矩阵

- 零行全部位于非零行下方
- 非零行的首个非零元素 (主元) 在每一行中的列标号递增

行最简阶梯形矩阵

- 行阶梯形矩阵非零行的首个非零元素 (主元) 为 1
- 主元所在列的其他元素全为 0

推论 16.3.3 (分块矩阵逆矩阵)

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \cdots & & \\ A_s & & & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & \cdots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} B_{s\times s} & O_{s\times r} \\ D_{r\times s} & C_{r\times r} \end{bmatrix} \to A^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ - - C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} B_{s\times s} & D_{s\times r} \\ O_{r\times s} & C_{r\times r} \end{bmatrix} \to A^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} O_{s\times r} & B_{s\times s} \\ C_{r\times r} & D_{r\times s} \end{bmatrix} \to A^{-1} = \begin{bmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} D_{s\times r} & B_{s\times s} \\ C_{r\times r} & O_{r\times s} \end{bmatrix} \to A^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \end{bmatrix}$$

16.4 等价矩阵和矩阵的秩

定义 16.4.1 (等价矩阵)

设 A, B 均为 $m \times n$ 矩阵, $\exists P_{m\times m}, Q_{n\times n}(P, Q$可逆), $s.t.\ PAQ = B$, 称 A, B 是等价矩阵, 记作 $A \cong B$

- 同型矩阵 A, B 等价的的充要条件: $r(A) = r(B)$
- P, Q 均为可逆矩阵

$$\forall A_{m\times n}, \exists P, Q,\ s.t. PAQ = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

其中 $P_{m\times m}, Q_{n\times n}$ 均为可逆矩阵, E_r 是 r 阶单位矩阵, 矩阵 $\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ 是秩为 r 矩阵的等价标准型

定义 16.4.2 (矩阵的秩)

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, A 中最高阶非零子式的阶数称为矩阵 A 的秩, 记作 $r(A)$

- $r(A) = k$ 充要条件: A 存在 k 阶非零子式, 且所有 $k+1$ 阶子式全为 0
- $r(A) = k$ 充要条件: A 的行 (列) 向量中存在 k 个线性无关的向量, 且任意 $k+1$ 个行 (列) 向量线性相关
- $r(A_{n\times n}) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆

推论 16.4.1 (秩的性质)

设 A 是 $m \times n$ 矩阵,B 是满足有关矩阵运算要求的矩阵, 我们有

- $0 \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$
- $r(kA) = r(A), k \neq 0$
- $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$
- $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$
- $$r(A^*) = \begin{cases} n & r(A) = n \\ 1 & r(A) = n-1 \\ 0 & r(A) < n-1 \end{cases}$$

  其中 A 为 n 阶方阵

命题 16.4.1

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, 则 $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$

证明

(1). $r(AB) \le r(B)$

令

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_n \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1 \\ \boldsymbol{\gamma}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\gamma}_m \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\gamma}_j$ 代表行向量, a_{ij} 代表元素

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\boldsymbol{\beta}_1 + a_{12}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_{1n}\boldsymbol{\beta}_n \\ a_{21}\boldsymbol{\beta}_1 + a_{22}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_{2n}\boldsymbol{\beta}_n \\ \vdots \\ a_{m1}\boldsymbol{\beta}_1 + a_{m2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{\beta}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1 \\ \boldsymbol{\gamma}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\gamma}_m \end{bmatrix}$$

AB 的行向量都可以由 B 的行向量线性表出 $\Rightarrow r(AB) \le r(B)$

(2). $r(AB) \le r(A)$

令

$$A = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n], B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix}, AB = [\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_s]$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\gamma}_j$ 代表列向量, b_{ij} 代表元素

$$AB = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n] \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + b_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + b_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n \\ b_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + b_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + b_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \vdots \\ b_{1s}\boldsymbol{\alpha}_1 + b_{2s}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + b_{ns}\boldsymbol{\alpha}_n \end{bmatrix}^T = [\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_s]$$

AB 的列向量都可以由 A 的列向量线性表出 $\Rightarrow r(AB) \le r(A)$

$$\begin{cases} r(AB) \le r(B) \\ r(AB) \le r(A) \end{cases} \Rightarrow r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$$

命题 16.4.2

设 A, B 是 $m \times n$ 矩阵, 则 $r(A+B) \leq r(A)+r(B)$

证明

令

$$\begin{cases} A = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n] \\ B = [\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n] \\ [A, B] = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n] \end{cases}$$

$$A + B = [\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \cdots, \alpha_n + \beta_n]$$

$A+B$ 的列向量都可以由 $[A, B]$ 的列向量线性表出 $\Rightarrow r(A+B) \leq r([A, B]) \Rightarrow r(A+B) \leq r(A)+r(B)$

命题 16.4.3

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, 则 $r(A)+r(B)-n \leq r(AB)$

证明

$$\begin{bmatrix} E_{m\times m} & -A_{m\times n} \\ O_{n\times m} & E_{n\times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{m\times n} & O_{m\times s} \\ E_{n\times n} & B_{n\times s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{n\times n} & -B_{n\times s} \\ O_{n\times s} & E_{s\times s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_{m\times n} & -AB \\ E_{n\times n} & O_{n\times s} \end{bmatrix}$$

其中 $\begin{bmatrix} E_{m\times m} & -A_{m\times n} \\ O_{n\times m} & E_{n\times n} \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} E_{n\times n} & -B_{n\times s} \\ O_{n\times s} & E_{s\times s} \end{bmatrix}$ 均为可逆矩阵

$$r(A)+r(B) \leq n + r(AB) \Rightarrow r(A)+r(B)-n \leq r(AB)$$

特别的, 当 $AB = O$ 时, $r(AB) = 0 \Rightarrow r(A)+r(B) \leq n$

命题 16.4.4

设 A 是 n 阶方阵, 则

$$r(A^*) = \begin{cases} n & r(A) = n \\ 1 & r(A) = n-1 \\ 0 & r(A) < n-1 \end{cases}$$

证明

(1). $r(A)=n$

$$\begin{cases} r(A)=n \\ AA^*=|A|E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |A|\neq 0 \\ |A^*|=|A|^{n-1}\neq 0 \end{cases} \Rightarrow r(A^*)=n$$

(2). $r(A)=n-1$

$$\begin{cases} r(A)=n-1 \\ AA^*=|A|E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |A|=0 \\ AA^*=O \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r(A)+r(A^*)\leq n \\ r(A^*)\leq 1 \end{cases}$$

$r(A)=n-1\longrightarrow A^*$ 至少存在一个元素不为 $0\longrightarrow r(A^*)\geq 1$

$$\begin{cases} r(A^*)\geq 1 \\ r(A^*)\leq 1 \end{cases} \Rightarrow r(A^*)=1$$

(3). $r(A)<n-1$

$$\begin{cases} r(A)<n-1 \\ AA^*=|A|E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |A|=0 \\ A^*=O \end{cases} \Rightarrow r(A^*)=0$$

第 17 章 向量组

17.1 向量和向量组的线性相关性

17.1.1 向量的定义和运算

定义 17.1.1 (向量的定义)

n 个数构成的有序数组 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 称为一个 n 维向量, 记作 $\boldsymbol{\alpha} = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$, $\boldsymbol{\alpha}$ 称为 n 维行向量, $\boldsymbol{\alpha}^T$ 称为 n 维列向量, 其中 a_i 称为向量的第 i 个分量

♣

定义 17.1.2 (向量的线性运算)

1. 加法

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \overset{def}{\Longrightarrow} [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n]$$

2. 标量乘法

$$k\boldsymbol{\alpha} \overset{def}{\Longrightarrow} [ka_1, ka_2, \cdots, ka_n], k \in \mathbb{R}$$

♣

定义 17.1.3 (向量的内积和正交)

内积

设 $\boldsymbol{\alpha} = [a_1, a_2, \cdots, a_n]^T, \boldsymbol{\beta} = [b_1, b_2, \cdots, b_n]^T$, 则称:

$$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

为向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 的内积, 记作 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$

模

$\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的模, 特别的当 $\boldsymbol{\alpha}$ 时, 称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量

正交

当 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta} = 0$ 时, 称向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 是正交向量

标准正交向量组

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 满足:

$$\boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{\alpha}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是标准或单位正交向量组

正交矩阵

设 A 是 n 阶方阵, 若 $A^TA = E$, 则称 A 为正交矩阵

- $A^TA = E \Rightarrow A^T = A^{-1}$
- $|A| = \pm 1$
- A 的行 (列) 向量是标准正交向量组

施密特正交化

线性无关的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 的标准正交化公式:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 \\ \dots \\ \boldsymbol{\beta}_n = \boldsymbol{\alpha}_n - \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 - \cdots - \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}_{n-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{n-1}, \boldsymbol{\beta}_{n-1})}\boldsymbol{\beta}_{n-1} \end{cases}$$

将 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 单位化:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}_1 = \dfrac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|} \\ \boldsymbol{\eta}_2 = \dfrac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|} \\ \dots \\ \boldsymbol{\eta}_n = \dfrac{\boldsymbol{\beta}_n}{\|\boldsymbol{\beta}_n\|} \end{cases}$$

$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 是一个标准正交向量组

17.1.2 向量组的线性相关性

定义 17.1.4 (线性相关和线性表出)

1. 线性组合

设有 m 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 m 个数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$, 向量

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

称作向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合

2. 线性表出

向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以表示为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合

$$\exists k_i(i=1,2,\cdots,m)\in\mathbb{R},\ s.t.\ \boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出

3. 线性相关

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$

$$\exists k_i\neq 0(i=1,2,\cdots,m),\ s.t.\ k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=0$$

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关

4. 线性无关

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$

$$\exists k_i\in\mathbb{R},\ s.t.\ k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=0$$

当且仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时上式成立, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 ♣

定理 17.1.1 (判别线性相关性的七大定理)

定理一

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关的充要条件: 至少有一个向量可以由其余的 $n-1$ 个向量线性表出

证明

(i). 必要性

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关

$$\exists k_i \neq 0(i=1,2,\cdots,n),\ s.t.\ k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=0$$

不妨假设 $k_m \neq 0(1 \leq m \leq n)$

$$\boldsymbol{\alpha}_m=-\frac{k_1}{k_m}\boldsymbol{\alpha}_1-\cdots-\frac{k_n}{k_m}\boldsymbol{\alpha}_n$$

$\boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由其余 $n-1$ 个向量线性表出

(ii). 充分性

不妨假设 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由其余 $n-1$ 个向量线性表出:

$$\boldsymbol{\alpha}_m=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

$$\exists k_i \neq 0(k_m=1),\ s.t.\ k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+1\boldsymbol{\alpha}_m+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=0$$

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关

定理 二

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关, $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出, 且表示唯一

证明

(i). 存在性

$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关

$$\exists k_i \in \mathbb{R}(i=1,2,\cdots,n,\beta),\ s.t.\ k_\beta\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=0$$

假设 $k_\beta=0$

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=0 \Rightarrow \exists k_i\neq 0(i\in\{1,2,\cdots,n\})$$

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关, 矛盾 $\Rightarrow k_\beta\neq 0$

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{k_{1]}}{k_\beta}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{k_2}{k_\beta}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_n}{k_\beta}\boldsymbol{\alpha}_n$$

向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出

(ii). 唯一性

假设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 对 $\boldsymbol{\beta}$ 存在两种不同的线性表出

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_n\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\beta}=h_1\boldsymbol{\alpha}_1+h_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+h_n\boldsymbol{\alpha}_n\end{cases}$$

两式相减:

$$(l_1-h_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(l_2-h_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(l_n-h_n)\boldsymbol{\alpha}_n=0$$

$\exists l_i-h_i\neq 0(i\in\{1,2,\cdots,n\})$, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关, 矛盾 $\Rightarrow$ 线性表出唯一

定理 三

向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出, 且 $t>s$, 则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性相关

证明

向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=l_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+l_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_{1s}\boldsymbol{\alpha}_s\\ \boldsymbol{\beta}_2=l_{21}\boldsymbol{\alpha}_1+l_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_{2s}\boldsymbol{\alpha}_s\\ \cdots\\ \boldsymbol{\beta}_t=l_{t1}\boldsymbol{\alpha}_1+l_{t2}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_{ts}\boldsymbol{\alpha}_s\end{cases}$$

假设 $\exists k_i\in\mathbb{R},\ s.t.\sum\limits_{i=1}^{s}k_i\boldsymbol{\beta}_i=0$

$$\begin{cases}k_1\boldsymbol{\beta}_1=k_1(l_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+l_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_{1s}\boldsymbol{\alpha}_s)\\ k_2\boldsymbol{\beta}_2=k_2(l_{21}\boldsymbol{\alpha}_1+l_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_{2s}\boldsymbol{\alpha}_s)\\ \cdots\\ k_t\boldsymbol{\beta}_t=k_t(l_{t1}\boldsymbol{\alpha}_1+l_{t2}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_{ts}\boldsymbol{\alpha}_s)\end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{t}k_i\boldsymbol{\beta}_i=(\sum_{i=1}^{t}k_il_{i1})\boldsymbol{\alpha}_1+(\sum_{i=1}^{t}k_il_{i2})\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(\sum_{i=1}^{t}k_il_{is})\boldsymbol{\alpha}_s$$

不妨令 $\sum\limits_{i=1}^{t}k_il_{i1}=\sum\limits_{i=1}^{t}k_il_{i2}=\cdots=\sum\limits_{i=1}^{t}k_il_{is}=0$

$$\begin{cases}k_1l_{11}+k_2l_{21}+\cdots+k_tl_{t1}=0\\ k_1l_{12}+k_2l_{22}+\cdots+k_tl_{t2}=0\\ \cdots\\ k_1l_{1s}+k_2l_{2s}+\cdots+k_tl_{ts}=0\end{cases}\Rightarrow LX=0$$

其中

$$L=\begin{bmatrix}l_{11}&l_{21}&\cdots&l_{t1}\\ l_{12}&l_{22}&\cdots&l_{t2}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ l_{1s}&l_{2s}&\cdots&l_{ts}\end{bmatrix},X=[k_1,k_2,\cdots,k_t]^T$$

这是一个 t 元 s 个方程的齐次线性方程组, 且 $t>s$, 方程组一定有非零解

$$\exists k_i\neq 0(i\in\{1,2,\cdots,n\}),\ s.t.\ k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\beta}_t=0$$

$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性相关

定理 四

设 m 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$, 其中

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1 = [a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{n1}]^T \\ \boldsymbol{\alpha}_2 = [a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{n2}]^T \\ \dots \\ \boldsymbol{\alpha}_m = [a_{1m}, a_{2m}, \cdots, a_{nm}]^T \end{cases}$$

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充要条件时齐次线性方程组 $AX = 0$ 有非零解, 也等价于零空间不为零

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, X = [x_1, x_2, \cdots, x_m]^T$$

证明

(i). 必要性

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关

$$\exists x_i \neq 0 (i \in \{1, 2, \cdots, m\}),\ s.t.\ x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = 0$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = 0 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$$

有非零解

(ii). 充分性

方程组 $AX = 0$ 有非零解

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = 0 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = 0$$

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关

定理 五

向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出, 等价于非齐次方程组方程 $AX = \boldsymbol{\beta}$ 有解;
向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出, 等价于非齐次方程组方程 $AX = \boldsymbol{\beta}$ 无解

证明

向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出

$$\exists x_i \neq 0(i \in \{1, 2, \cdots, s\}),\ s.t.\ x_1\boldsymbol{\alpha} + x_2\boldsymbol{\alpha} + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_s = 0$$

$$[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_s \end{bmatrix} = \boldsymbol{\beta}$$

方程组 $AX = \boldsymbol{\beta}$ 有非零解

定理 六

如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 一部分向量线性相关, 那么整个向量组也线性相关

证明

不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_j(j < n)$ 线性相关

$$\exists k_i \neq 0(i \in \{1, 2, \cdots, j\}),\ s.t.\ k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_j\boldsymbol{\alpha}_j = 0$$

取 $k_1, k_2, \cdots, k_j, k_{j+1} = k_{j+2} = \cdots = k_n = 0$

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_j\boldsymbol{\alpha}_j + 0\boldsymbol{\alpha}_{j+1} + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_n = 0$$

$k_1, k_2, \cdots, k_j, k_{j+1} = k_{j+2} = \cdots = k_n = 0$ 不全为 0, 整个向量组也线性相关

定理 七

如果一组 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, 那么把这些向量各任意添加 m 个分量得到的新向量组 $(n+m)$ 维 $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \cdots, \alpha_n^*$ 线性无关; 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关, 那各去掉相同的若干个分量所得到的新向量组也线性相关

17.2 极大线性无关组和向量组的秩

定义 17.2.1 (极大线性无关组)

在向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$, 如果存在部分向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 满足:

- $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关
- 向量组中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(i = 1, 2, \cdots, s)$ 都可以被向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表出

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是原向量组的一个极大线性无关组

一个向量组的极大线性无关组不唯一, 对于线性无关的向量组, 它的极大线性无关组是自身

定义 17.2.2 (向量组的秩)

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的极大线性无关组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 中所含向量的个数 r 称为向量组的秩, 记作:

$$rank(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = r$$

- $r(A) = r(col(A)) = r(row(A))$
- 初等行变换和初等列变换不改变矩阵的秩
- $A \xrightarrow{col} B$, A 的行向量与 B 的行向量是等价向量组
- 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 及 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$, 若 $\beta_i(i = 1, 2, \cdots, t)$ 均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出, 则:
$$r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \le r(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$$

17.3 等价向量组

定义 17.3.1 (等价向量组)

设两个向量组: (I)$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, (II)$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$, 若 (I) 中向量 $\alpha_i(i = 1, 2, \cdots, s)$ 均可由 (II) 中向量线性表出, 则称向量组 (I) 可由向量组 (II) 线性表出; 若向量组 (I) 和向量组 (II) 互相线性表出, 称向量组 (I) 与向量组 (II) 是等价向量组, 记作 (I) $\cong$ (II)

- (I) $\cong$ (I)
- (I) $\cong$ (II), (II) $\cong$ (I)
- (I) $\cong$ (II), (II) $\cong$ (III), 则 (I) $\cong$ (III)
- 向量组和它的极大线性无关组是等价向量组

17.4 向量空间

定义 17.4.1 (向量空间)

设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中线性无关的有序向量, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$ 均可由向量组 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 线性表出, 且表出式:

$$\alpha = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \cdots + a_n\xi_n$$

称 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 基向量的个数 n 称为向量空间的维度,

$[a_1, a_2, \cdots, a_n]^T$ 是向量 α 在基向量 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$ 的坐标

定义 17.4.2 (基变换)

$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$ 和 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 是向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中的两个基, 其有关系:

$$[\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n] = [\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n] \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n] C$$

上式是基 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 的基变换公式, 矩阵 C 是基 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 的过渡矩阵, C 的第 i 列即是 η_i 在基 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$ 下的坐标, 过渡矩阵 C 为可逆矩阵

定义 17.4.3 (坐标变换)

设向量 α 在基 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$ 和基 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 下的坐标为别是 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T, \mathbf{y} = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^T$

$$\alpha = [\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n]\mathbf{x} = [\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n]\mathbf{y}$$

$$[\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n] = [\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n] C$$

$$\mathbf{x} = C\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} = C^{-1}\mathbf{x}$$

第 18 章 线性方程组

18.1 具体型方程组

18.1.1 齐次方程组

定义 18.1.1 (齐次方程组)

方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

称为 m 个方程, n 个未知数的齐次方程组

向量形式:

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = 0$$

其中:

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} (j = 1, 2, \cdots, n)$$

矩阵形式:

$$A_{m\times n}X = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

定理 18.1.1

1. 当 $r(A) = n$ 时, $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 线性无关, 方程组只有零解
2. 当 $r(A) = r < n$ 时, $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 线性相关, 方程组有非零解, 且有 $n - r$ 个线性无关解

推论 18.1.1 (解的性质)

$$\begin{cases} A\boldsymbol{\xi}_1 = 0 \\ A\boldsymbol{\xi}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}, A(k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2) = 0$$

定义 18.1.2 (基础解系和通解)

1. 基础解系

设 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 满足:

- $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是方程组的解
- $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关
- 方程组 $AX = 0$ 任意一个解均可以由 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表出

$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是方程组 $AX = 0$ 的基础解系

2. 通解

设 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 为方程组 $AX = 0$ 的基础解系, 则 $k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是方程组 $AX = 0$ 的通解, 其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$

18.1.2 非齐次方程组

定义 18.1.3 (非齐次方程组)

方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

称为 m 个方程, n 个未知数的非齐次方程组

向量形式:

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\beta}$$

其中:

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix} (j = 1, 2, \cdots, n)$$

矩阵形式:

$$A_{m\times n}X = \boldsymbol{\beta}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

矩阵 $\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_{mj} \end{array}\right]$ 记作为矩阵 A 的增广矩阵, 简记为 $\left[\begin{array}{c|c} A & \boldsymbol{\beta} \end{array}\right]$

定理 18.1.2

1. $r(A) \neq r([A, \boldsymbol{\beta}])$, 方程组无解

$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出

2. $r(A) = r([A, \boldsymbol{\beta}]) = n$, 方程组有唯一解

$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关

3. $r(A) = r([A, \boldsymbol{\beta}]) < n$, 方程组有无穷多组解

推论 18.1.2 (解的性质)

设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是非齐次方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 的解, $\boldsymbol{\xi}$ 是对应齐次方程组 $AX=0$ 的解

- $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $AX=0$ 的解
- $k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$ 是方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 的解

定义 18.1.4 (特解和通解)

1. 特解

η 是非齐次性方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解

2. 通解

设 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是方程组 $AX=0$ 的通解, 其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}\in\mathbb{R}$, 非齐次性方程组的通解:

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\eta}$$

18.2 两个方程组的公共解

定义 18.2.1 (两个方程组的公共解)

(1). 齐次性线性方程组 $A_{m\times n}X=0$ 和 $B_{m\times n}X=0$ 的公共解是满足方程组

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} X = 0$$

(2). 非齐次性性线性方程组 $A_{m\times n}X=\alpha$ 和 $B_{m\times n}X=\beta$ 的公共解是满足方程组

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

(3). 给出方程组 $A_{m\times n}X=0$ 的通解 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s$, 代入第二个方程组 $B_{m\times n}X=0$ 得到 $k_i(i=1,2,\cdots,s)$ 之间的关系, 代回方程 $A_{m\times n}X=0$

(4). 给出方程组 $A_{m\times n}X=0$ 的基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 和方程组 $B_{m\times n}X=0$ 的基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$, 公共解为:

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s=l_1\boldsymbol{\eta}_1+l_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+l_t\boldsymbol{\eta}_t$$

18.3 同解方程组

定义 18.3.1 (同解方程组)

如果两个方程组 $A_{m\times n}X=0$ 和 $B_{m\times n}X=0$ 有完全相同的解, 则称它们为同解方程组

- $AX=0$ 的解满足 $BX=0$ 且 $BX=0$ 的解满足 $AX=0$
- $r(A)=r(B)$ 且 $AX=0$ 的解满足 $BX=0$ ($BX=0$ 的解满足 $AX=0$)
- $r(A)=r(B)=r(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix})$

第 19 章 特征值和特征向量

2012.08.18

19.1 特征值和特征向量定义

定义 19.1.1 (特征值和特征向量)

设 A 是 n 阶矩阵, λ 为常数, 存在非零列向量 ξ, 满足:

$$A\xi = \lambda\xi$$

称 λ 为 A 的特征值, ξ 是 A 对应于特征值 λ 的特征向量

推论 19.1.1 (特征值)

$$(\lambda E - A)\xi = O \Rightarrow |\lambda E - A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) = 0$$

上式是关于 λ 的特征多项式, 也是 A 的特征方程

$$\lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=tr(A)\\ \prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|\end{cases}$$

推论 19.1.2 (特征向量)

命题 19.1.1

若 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 是 A 的属于不同特征值 λ_1,λ_2 的特征向量, $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 线性无关

证明

$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 是矩阵 A 不同特征值 $\lambda_1,\lambda_2(\lambda_1\neq\lambda_2)$ 对应的特征向量

不妨设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 线性相关, 则存在不全为 0 的常数 c_1,c_2

$$\exists c_1,c_2,\ s.t.\ c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2=0$$

$$\begin{cases}A\boldsymbol{\xi}_1=\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1\\ A\boldsymbol{\xi}_2=\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2\end{cases}\Rightarrow c_1A\boldsymbol{\xi}_1+c_2A\boldsymbol{\xi}_2=c_1\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2$$

$$\begin{cases}c_1(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{\xi}_1=0\\ c_2(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{\xi}_2=0\\ \boldsymbol{\xi}_1\neq\mathbf{0},\boldsymbol{\xi}_2\neq\mathbf{0},\lambda_1\neq\lambda_2\end{cases}\Rightarrow c_1=c_2=0$$

矛盾, 假设不成立, $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 线性无关

命题 19.1.2

若 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 是 A 的属于不同特征值 λ_1,λ_2 的特征向量, $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2(k_1\neq 0,k_2\neq 0)$ 不是 A 的特征向量

证明

不妨设 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$ 是矩阵 A 特征值 λ 对应的特征向量

$$A(k_1\xi_1+k_2\xi_2)=\lambda(k_1\xi_1+k_2\xi_2)$$

$$\begin{cases} A\xi_1=\lambda_1\xi_1 \\ A\xi_2=\lambda_2\xi_2 \end{cases} \Rightarrow k_1(\lambda_1-\lambda)\xi_1+k_2(\lambda_2-\lambda)\xi_2=0$$

ξ_1,ξ_2 线性无关

$$\begin{cases} k_1(\lambda_1-\lambda)=0 \\ k_2(\lambda_2-\lambda)=0 \\ k_1\neq 0,k_2\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda=\lambda_1=\lambda_2$$

矛盾，假设不成立，$k_1\xi_1+k_2\xi_2$ 不是 A 的特征向量

命题 19.1.3

若 ξ_1,ξ_2 是 A 的属于同一特征值 λ 的特征向量，$k_1\xi_1+k_2\xi_2$ (k_1,k_2 不同时为 0) 仍然是 A 属于特征值 λ 的特征向量

证明

$$\begin{cases} A\xi_1=\lambda\xi_1 \\ A\xi_2=\lambda\xi_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(k_1\xi_1+k_2\xi_2)=\lambda(k_1\xi_1+k_2\xi_2) \\ k_1\xi_1+k_2\xi_2\neq \mathbf{0} \end{cases}$$

$k_1\xi_1+k_2\xi_2$ 是矩阵 A 特征值 λ 对应的特征向量

定理 19.1.1 (特征值和特征向量)

k 重特征值至多有 k 个线性无关的特征向量

不妨设 λ_0 是矩阵 A 的一个特征值，λ 对应的 m 个线性无关的特征向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$

构造一个 n 维空间的极大线性无关组 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m,\xi_{m+1},\cdots,\xi_n)$

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m,\xi_{m+1},\cdots,\xi_n)$

$$\begin{cases} A\xi_i=\lambda_0\xi_i(i=1,2,\cdots,m) \\ AP=(A\xi_1,A\xi_2,\cdots,A\xi_m,A\xi_{m+1},\cdots,A\xi_n) \end{cases}$$

$$AP=(\lambda_0\xi_1,\lambda_0\xi_2,\cdots,\lambda_0\xi_m,A\xi_{m+1},\cdots,A\xi_n)$$

$$A\xi_j=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}\xi_k(j=m+1,\cdots,n)$$

综上:

$$\begin{aligned}
AP &= (\lambda_0\xi_1,\lambda_0\xi_2,\cdots,\lambda_0\xi_m,\sum_{k=1}^{n}a_{k(m+1)}\xi_k,\cdots,\sum_{k=1}^{n}a_{kn}\xi_k)\\
&= (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m,\xi_{m+1},\cdots,\xi_n)\begin{bmatrix}
\lambda_0 & & & & a_{1(m+1)} & \cdots & a_{1n}\\
& \lambda_0 & & & a_{2(m+1)} & \cdots & a_{2n}\\
& & \ddots & & \vdots & & \vdots\\
& & & \lambda_0 & a_{m(m+1)} & \cdots & a_{mn}\\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{(m+1)(m+1)} & \cdots & a_{(m+1)n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n(m+1)} & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix}\\
&= PB
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}P^{-1}AP=B\\ |\lambda E-A|=|P^{-1}(\lambda E-B)P|=|\lambda E-B|\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
|\lambda E-A| &= \begin{bmatrix}
\lambda-\lambda_0 & & & & a_{1(m+1)} & \cdots & a_{1n}\\
& \lambda-\lambda_0 & & & a_{2(m+1)} & \cdots & a_{2n}\\
& & \ddots & & \vdots & & \vdots\\
& & & \lambda-\lambda_0 & a_{m(m+1)} & \cdots & a_{mn}\\
0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda-a_{(m+1)(m+1)} & \cdots & a_{(m+1)n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n(m+1)} & \cdots & \lambda-a_{nn}
\end{bmatrix}\\
&= (\lambda-\lambda_0)^m f(\lambda)
\end{aligned}$$

λ_0 至少是矩阵 A 的 m 重特征值, m 个线性无关特征向量对应的特征值至少是 m 重特征值 $\Leftrightarrow$ k 重特征值至多有 k 个线性无关的特征向量

表 19.1: 常用特征值和特征向量

矩阵	A	kA	A^k	$f(A)$	A^{-1}	A^*	$P^{-1}AP$
特征值	λ	$k\lambda$	λ^k	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\lvert A\rvert}{\lambda}$	λ
特征向量	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	$P^{-1}\xi$

19.2 相似

定义 19.2.1 (矩阵的相似)

设 A, B 是两个 n 阶方阵, $\exists n$ 阶可逆矩阵 P, $s.t.$ $P^{-1}AP = B$, 称 A 相似于 B, 记作 $A \sim B$

推论 19.2.1 (相似矩阵)

- 反身性: $A \sim A$
- 对称性: $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
- 传递性: $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$

推论 19.2.2 (相似矩阵)

(1). $A \sim B \Rightarrow P^{-1}AP = B$

必要不充分条件

- $r(A) = r(B)$
- $|A| = |B|$
- $\lambda_A = \lambda_B$
- $tr(A) = tr(B)$
- $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$
- A, B 各阶主子式之和分别相等

(2). $A \sim B$

- $A^T \sim B^T$
- $A^* \sim B^*$
- $A^m \sim B^m$
- $f(A) \sim f(B)$

(3). $A \sim B$ 且 A 可逆

- $A^{-1} \sim B^{-1}$
- $f(A^{-1}) \sim f(B^{-1})$

19.2.1 矩阵的相似对角化

定义 19.2.2 (相似对角化)

设 A 是 n 阶方阵, $\exists n$ 阶可逆矩阵 P, $s.t.$ $P^{-1}AP=\Lambda$, 其中 Λ 是对角矩阵, 称 A 可相似对角化, 记作 $A\sim\Lambda$, 称 Λ 为 A 的相似标准型

定理 19.2.1 (相似对角化充要条件)

n 阶矩阵 A 可相似对角化 $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量

(1). 必要性

不妨设存在可逆矩阵 P, $s.t.$ $P^{-1}AP=\Lambda$, 其中 Λ 是对角矩阵, $\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

令 $P=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]$

$$A(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$A\xi_i=\lambda_i\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$, P 是可逆矩阵, $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 线性无关, 它们分别是矩阵 A 对应于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的特征向量

(2). 充分性

设 A 有 n 个线性无关的特征向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$, 对应的特征值分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 令 $P=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]$, P 可逆

$$A\xi_i=\lambda_i\xi_i\Rightarrow AP=P\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

推论 19.2.3 (对角化)

- n 阶矩阵 A 可相似对角化 $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量
- n 阶矩阵 A 可相似对角化 $\Leftrightarrow$ 对于每个 k_i 重特征值都有 k_i 个线性无关的特征向量
- A 有 n 个特征值 $\Rightarrow$ n 阶矩阵 A 可相似对角化
- n 阶矩阵 A 为实对称矩阵 $\Rightarrow$ A 可相似对角化

19.2.2 实对称矩阵的相似对角化

定义 19.2.3 (实对称矩阵)

$A^T = A$ 且 A 中元素全为实数, 我们把 A 称作实对称矩阵

定理 19.2.2 (实对称矩阵特征值)

n 阶实对称矩阵 A 特征值为实数

不妨设实对称矩阵 A 的特征值 λ 和对应的特征向量 ξ, 记 $\overline{A}$ 为 A 的共轭矩阵, $\overline{\lambda}$ 为 λ 的共轭复数, $\overline{\xi}$ 为 ξ 的共轭向量

$$\begin{cases} A\xi = \lambda\xi \\ \overline{A} = A \\ A = A^T \end{cases} \Rightarrow \overline{x}^T Ax = \overline{x}^T\overline{A}^T x = \overline{Ax}^T x$$

$$\overline{Ax}^T x = \overline{\lambda x}^T x = \overline{\lambda}\overline{x}^T x$$

$$\begin{cases} \overline{x}^T Ax = \lambda\overline{x}^T x \\ \overline{x}^T Ax = \overline{\lambda}\overline{x}^T x \end{cases} \Rightarrow (\lambda - \overline{\lambda})\overline{x}^T x = 0$$

$\lambda - \overline{\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}$, λ 是实数

定理 19.2.3 (实对称矩阵特征向量)

n 阶实对称矩阵 A 的不同特征值对应的特征向量互相正交

不妨设实对称矩阵 A 的特征值 λ_1,λ_2 对应的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$

$$\begin{cases} A\boldsymbol{\xi}_1=\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1 \\ A\boldsymbol{\xi}_2=\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\xi}_1^TA^T=\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1^T \\ \boldsymbol{\xi}_2^TA^T=\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2^T \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\xi}_1^TA\boldsymbol{\xi}_2=\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1^T\boldsymbol{\xi}_2 \\ \boldsymbol{\xi}_1^TA\boldsymbol{\xi}_2=\lambda_2\boldsymbol{\xi}_1^T\boldsymbol{\xi}_2 \end{cases} \Rightarrow (\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{\xi}_1^T\boldsymbol{\xi}_2=0$$

$\lambda_1\neq\lambda_2\Rightarrow\boldsymbol{\xi}_1^T\boldsymbol{\xi}_2=0,\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 互相正交

定理 19.2.4 (实对称矩阵的相似对角化)

n 阶实对称矩阵 A_n 可正交相似对角化

1. 当 $n=1$ 时, A_1 已经是对角矩阵, A_1 可正交相似对角化
2. 假设当 $n=k-1$ 时, A_{k-1} 可以正交相似对角化
3. 当 $n=k$, 不妨设 A_k 的一个特征值为 $\lambda_1\in\mathbb{R}$, 对应的一个单位特征向量为 $\boldsymbol{\eta}_1$, 不妨构造一个正交矩阵 $T=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_k)$

$$T^{-1}A_kT=(T^{-1}\lambda_1\boldsymbol{\eta}_1,T^{-1}A\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,T^{-1}A\boldsymbol{\eta}_k)$$

$$(T^{-1}A_kT)^T=T^TA_k^T(T^{-1})^T=T^{-1}A_kT$$

$$\begin{cases} T^{-1}\boldsymbol{\eta}_1=(1,0,\cdots,0) \\ T^{-1}\boldsymbol{\eta}_2=(0,1,\cdots,0) \\ \cdots \\ T^{-1}\boldsymbol{\eta}_k=(0,0,\cdots,1) \end{cases} \Rightarrow T^{-1}A_kT=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_{k-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

当 $n=k-1$ 时, A_{k-1} 可以正交相似对角化 $\Rightarrow T_2^{-1}A_{k-1}T_2=\Lambda_{k-1}$
存在可逆矩阵 T_f

$$T_f=T\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & T_2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \Rightarrow |T_f|=|T_2|\neq0$$

$$T_f^{-1}A_kT_f=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&&&\\\vdots&&T_2^{-1}&\\0&&&\end{bmatrix}T^{-1}A_kT\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&&&\\\vdots&&T_2&\\0&&&\end{bmatrix}$$

$$T_f^{-1}A_kT_f=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&&&\\\vdots&&T_2^{-1}&\\0&&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&&&\\\vdots&&P_{k-1}&\\0&&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&&&\\\vdots&&T_2&\\0&&&\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&&&\\\vdots&&T_2^{-1}P_{k-1}T_2&\\0&&&\end{bmatrix}$$

$$T_2^{-1}P_{k-1}T_2=\Lambda_{k-1}\Rightarrow A_k\sim\Lambda_k$$

综上, n 阶实对称矩阵 A_n 可正交相似对角化

第 20 章 二次型

20.1 二次型定义

定义 20.1.1 (二次型)

n 元变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + & \quad \cdots & +2a_{1n}x_1x_n \\ +a_{22}x_2^2 + & \quad \cdots & +2a_{2n}x_2x_n \\ + & \quad \cdots & \\ & & +a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为 n 元二次型, 简称二次型

令 $a_{ij} = a_{ji}$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ & a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2m}x_2x_n \\ & \cdots \\ & a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_1 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

令

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

二次型可表示: $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, A 为二次型 $f(\mathbf{x})$ 的矩阵

定义 20.1.2 (线性变换)

对于 n 元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

令

$$\begin{cases} x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n \\ x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n \\ \cdots \\ x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n \end{cases}$$

记

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$x\longrightarrow y$ 线性变化:

$$\mathbf{x}=C\mathbf{y}$$

这种变换称为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的 **线性变换**, 如果线性变换矩阵 $C(|C|\neq 0)$ 可逆, 则称为 **可逆线性变换**

$$\begin{cases} f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \\ \mathbf{x}=C\mathbf{y} \end{cases} \Rightarrow f(\mathbf{x})=(C\mathbf{y})^T A(C\mathbf{y})=\mathbf{y}^T(C^T AC)\mathbf{y}$$

记 $B=C^T AC$

$$f(\mathbf{x})=y^T By=g(\mathbf{y})$$

二次型 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ 通过线性变换 $\mathbf{x}=C\mathbf{y}$ 得到了一个新二次型 $g(\mathbf{y})=y^T By$

20.2 合同

定义 20.2.1 (矩阵合同)

设 A, B 为 n 阶矩阵, C 是可逆矩阵

$$\exists C \in \mathbb{R}^{n\times n},\ s.t.\ B = C^T AC$$

称 A, B 合同, 记作 $A \simeq B$, 其对应的二次型 $f(\mathbf{x})$ 与 $g(\mathbf{y})$ 为合同二次型

推论 20.2.1 (合同)

- 反身性: $A \simeq A$
- 对称性: $A \simeq B \Rightarrow B \simeq A$
- 传递性: $A \simeq B, B \simeq C \Rightarrow A \simeq C$

20.3 二次型的标准型和规范型

定义 20.3.1 (标准型)

二次型中只有平方项, 而没有交叉项 (所有交叉项系数全为 0), 形如:

$$d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$$

的二次型为标准二次型

定义 20.3.2 (规范型)

在标准二次型中, 如果二次型的系数 $d_i \in \{0, 1, -1\}$, 这样的二次型称为规范型二次型

推论 20.3.1 (合同标准型和合同规范型)

- 二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ 合同于标准型 $d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$, 则称 $d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$ 为二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ 的合同标准型
- 二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ 合同于规范型 $x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-x_{p+q}^2$, 则称 $x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-x_{p+q}^2$ 为二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ 的合同规范型
- 对任意实对称矩阵 A, 必存在可逆矩阵 C, 使得 $C^T AC = \Lambda$
- 对任意实对称矩阵 A, 必存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^T AQ = \Lambda$

定理 20.3.1 (惯性定理)

$f(\mathbf{x})$ 是二次型, A 是二次型 $f(\mathbf{x})$ 对应的矩阵, 对于任意可逆线性变换 C, $C^T AC = \Lambda$, 标准型或者规范型中正项个数 p, 负项个数 q 都是不变的, p 是正惯性指数, q 是负惯性指数

推论 20.3.2 (惯性定理)

- A 是二次型 $f(\mathbf{x})$ 对应的矩阵, $r(A) = p_A + q_A$
- A, B 分别是二次型 $f(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})$ 对应的矩阵, $A \simeq B$ 充要条件:

$$A \simeq B \Leftrightarrow \begin{cases} p_A = p_B \\ q_A = q_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r(A) = r(B) \\ q_A = q_B(p_A = p_B) \end{cases}$$

20.4 正定二次型

定义 20.4.1 (正定矩阵)

n 元二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$

$$\forall \mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T \neq 0, \mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$$

f 为正定二次型, 二次型对应的矩阵 A 为正定矩阵

推论 20.4.1 (二次型正定充要条件)

- f 正定 $\Leftrightarrow$ f 正惯性指数 $p = n$
- f 正定 $\Leftrightarrow \exists D,\ s.t.\ A = D^T D$, D 是可逆矩阵
- f 正定 $\Leftrightarrow A \simeq E$
- f 正定 $\Leftrightarrow A$ 的所有特征值 $\lambda_i > 0$
- f 正定 $\Leftrightarrow A$ 的全部顺序主子式大于 0

推论 20.4.2 (二次型正定必要条件)

- f 正定 $\Rightarrow a_{ii} > 0$
- f 正定 $\Rightarrow |A| > 0$

第四部分

概率论

第 4 部分目录

第 21 章 随机事件和概率

定义 21.0.1 (随机试验)

- 试验可以在相同条件下重复进行
- 试验的所有结果是明确可知道的, 并且不止一个
- 每一次试验出现哪一个结果, 事先并不确定

定义 21.0.2 (随机事件)

- 每一次试验中可能出现也可能不出现的结果称为随机事件
- 在试验中一定发生的事件为必然事件, 一定不发生的事件为不可能事件

定义 21.0.3 (样本空间)

- 随机试验的每一个可能的结果称为**样本点**, 记作 ω; 样本点的全体组成的几何称为**样本空间**, 记作 $\Omega \Rightarrow \Omega = \{\omega\}$
- 由一个样本点构成的事件为**基本事件**
- 随机事件 A 是由若干个基本事件组成 $\Rightarrow A \subset \Omega$

21.1 事件的关系和运算

定义 21.1.1 (事件间关系)

- 包含: 事件 A 发生, 事件 B 发生 $\Rightarrow A \subset B$
- 相等: $A \subset B, B \subset A \Rightarrow A = B$
- 相容: $AB \neq \varnothing$
- 互斥: $AB = \varnothing$
- 对立: $A \cup B = \Omega, A \cap B = \varnothing$

定义 21.1.2 (运算法则)

- 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- 分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- **De Morgan's Laws**: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

21.2 概率定义

定义 21.2.1 (概率定义)

(1). 描述性定义

通常将随机事件 A 发生的可能性大小的度量 (非负值) 称为事件 A 发生的概率, 记作 $P(A)$

(2). 统计性定义

在相同条件下做重复实验, 事件 A 出现的次数 k 和总的试验次数 n 的比 $\frac{k}{n}$ 称为事件 A 在这 n 次试验中出现的频率, 当试验次数 n 足够大时, 频率将稳定于某个常数 p, n 越大, 频率偏离 p 的可能性越小, 这个常数 p 称为事件 A 发生的概率

(3). 公理化定义

设随机事件的样本空间为 Ω, 对于每一个事件 A 都有一个确定的实数 $P(A)$, 且事件函数 $P(*)$ 满足

- 非负性: $P(A) \geq 0$
- 规范性: $P(\Omega) = 1$
- 可列可加性: 对于任意两个互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

21.3 古典概率型和几何概率型

定义 21.3.1 (古典概率型)

古典概率型样本空间

- 只有有限个基本事件
- 每个基本事件都是等可能发生

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

定义 21.3.2 (几何概率型)

几何概率型样本空间

- 无限个基本事件
- 每个基本事件都是等可能发生
- 样本空间是一个可以度量的有界区域

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega}$$

21.4 概率论基本公式

定义 21.4.1 (性质和基本公式)

- $0 \leq P(A) \leq 1, P(\varnothing) = 0, P(\Omega) = 1$
- $A \subset B \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A), P(B) \geq P(A)$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

定理 21.4.1 (条件概率公式)

A, B 是两个任意事件, 如果 $P(A) > 0$, 称在 A 发生的条件下 B 发生的概率为条件概率, 记作 $P(B|A)$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

定理 21.4.2 (乘法公式)

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个事件, 且 $P(A_i) > 0(i = 1, 2, \cdots, n), P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0$

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

特别的, 当 $n = 2$ 时

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

定理 21.4.3 (全概率公式)

完备事件组 $A_i(i = 1, 2, \cdots, n)$, 满足 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = 1, A_iA_j = \varnothing$, 对于任意事件 B

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} A_iB, P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

定理 21.4.4 (贝叶斯公式)

完备事件组 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$, 满足 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i=1, A_iA_j=\varnothing$, 对于任意事件 B

$$P(A_j|B)=\frac{P(A_jB)}{P(B)}=\frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}(j=1,2,\cdots,n)$$

21.5 事件独立性和独立重复实验

定义 21.5.1 (独立性)

(1). **事件的独立性**

(i). 描述性定义

事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意一个事件 A_i 发生的概率不受其他 $n-1$ 个事件的影响, 称这 n 个事件相互独立

(ii). 数学定义

A,B 为两个事件, 如果 $P(AB)=P(A)P(B)$, 称事件 A,B 相互独立

(2). **试验的独立性**

如果各个试验的结果是相互独立的, 称这些试验是相互独立的, 试验序列 $\{E_1,E_2,\cdots,E_n\}$ 中任意两个试验 E_i,E_j, 在这两个试验中任意两个结果 A_{ip},A_{iq} 满足 $P(A_{ip}A_{jq})=P(A_{ip})P(A_{jq})$, 称试验序列相互独立

第 22 章 一维随机变量及其分布

22.1 一维随机变量

定义 22.1.1 (随机变量)

设随机试验 E 的样本空间 $\Omega=\{\omega\}$ 满足: $\forall\omega\in\Omega$ 都有唯一的实数 $X(\omega)$ 与之对应, 且对任意实数 x, 都有 $\{\omega|X(\omega)\le x,\omega\in\Omega\}$ 是随机事件, 称定义在 Ω 上的单值函数 $X(\omega)$ 是随机变量

定义 22.1.2 (分布函数)

设 X 是随机变量, x 是任意实数, 称函数 $F(x)=P(X\le x)$ 为随机变量 X 的分布函数, 或者称 X 服从 $F(x)$ 分布, 记作 $X\sim F(x)$

推论 22.1.1 (分布函数性质)

- $F(x)$ 是单调不减函数, $\forall x_1\le x_2, F(x_1)\le F(x_2)$
- $F(x)$ 是右连续函数, $\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x_0^+)=F(x_0)$
- $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0, F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$
- $P\{X\le a\}=F(a), P\{X<a\}=F(a^-), P\{X=a\}=F(a)-F(a^-)$

22.2 一维离散型随机变量

定义 22.2.1 (一维离散型随机变量)

随机变量 X 只能取有限个值 $x_1, x_2, \cdots$, 称 X 为离散型随机变量

$$P\{X = x_i\} = p_i (i = 1, 2, \cdots)$$

上面的式子称为随机变量 X 的分布列、分布律或者概率分布, 记作 $X \sim p_i$, 概率分布通常用表格或者矩阵形式表示

X	x_1	x_2	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

推论 22.2.1 (离散型随机变量的性质)

- $P(X = x_i) \geq 0, \sum\limits_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$
- $P(X \leq x_i) = \sum\limits_{x_j \leq x_i} P(X = x_j)$
- $P(X \in B) = \sum\limits_{x_i \in B} P(X = x_i)$
- $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$

定义 22.2.2 (常见离散型随机变量分布)

(1). $0-1$分布

$X \sim B(1, p)$

$$P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$$

(2). 二项分布

$X \sim B(n, p)$, 试验次数为 n, 成功概率为 p, 随机变量 X 为成功次数

$$P(X = k) = C_k^n p^k (1-p)^{n-k} (k = 0, 1, 2, \cdots, n), 0 < p < 1$$

(3). 泊松分布

$X \sim P(\lambda)$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} (k = 0, 1, 2, \cdots), 0 < p < 1$$

(4). 几何分布

$X \sim G(p)$

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p (k = 1, 2, \cdots), 0 < p < 1$$

(5). 超几何分布

$X \sim H(n, N, M)$

$$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}(\max\{0, n-M+N\} \le k \le \min\{M, n\})$$

22.3 一维连续型随机变量

定义 22.3.1 (连续型随机变量分布函数和密度函数)

随机变量 X 的分布函数可以表示为:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt, t \in \mathbb{R}$$

其中 $f(x)$ 是非负可积函数, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$, 称 X 是连续型随机变量, $f(x)$ 是随机变量 X 的**概率密度函数**, 记作 $X \sim f(x)$

推论 22.3.1 (连续型随机变量分布函数性质)

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$
- $P(a<X<b)=P(a \le X<b)=P(a<X \le b)=P(a \le X \le b)=\int_a^b f(x)dx$
- $P(X=c)=0$

定义 22.3.2 (常见连续型随机变量分布)

(1). 均匀分布

$X \sim U(a, b)$, X 的概率密度函数 $f(x)$ 和分布函数 $F(x)$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & x \in (a, b) \\ 0 & x \in (-\infty, a] \cup [b, +\infty)\end{cases} \Rightarrow F(x)=\begin{cases}0 & x \in (-\infty, a) \\ \dfrac{x-a}{b-a} & x \in [a, b) \\ 1 & x \in [b, +\infty)\end{cases}$$

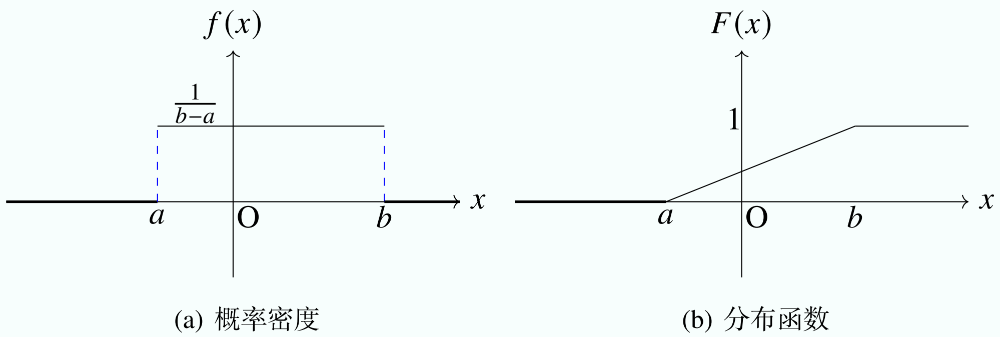
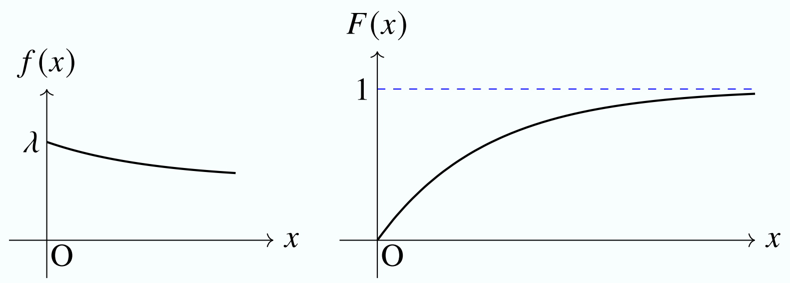


图 22.1: 均匀分布概率密度和分布函数

(2). 指数分布

$X \sim E(\lambda)$, X 的概率密度函数 $f(x)$ 和分布函数 $F(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\in(0,+\infty)\\ 0 & x\in(-\infty,0]\end{cases} \Rightarrow F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\in(0,+\infty)\\ 0 & x\in(-\infty,0]\end{cases} \quad (\lambda>0)$$



(a) 概率密度 (b) 分布函数

图 22.2: 指数分布概率密度和分布函数

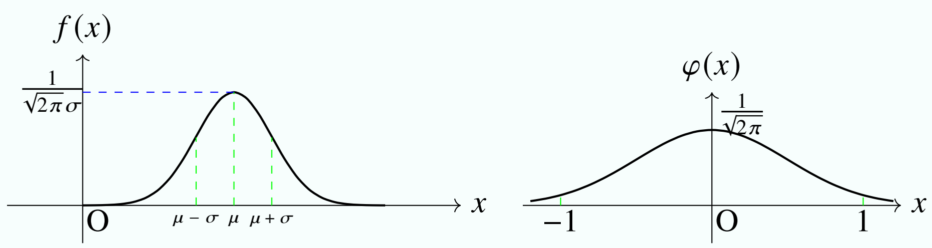
(3). 正态分布

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, X 的概率密度 $f(x)$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}(-\infty<x<+\infty)$$

特别的, 当 $\mu=0,\sigma=1$ 时, $X\sim f(x)$ 是标准正态分布

$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}(x\in\mathbb{R})\\ \Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt\end{cases}$$



(a) 一般正态分布概率密度 (b) 标准正态分布概率密度

图 22.3: 一般正态分布和标准正态分布概率密度函数

推论 22.3.2 (正态分布函数性质)

- $F(x) = P(X \le x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$
- $P(a \le X \le b) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$
- $F(\mu - x) + F(\mu + x) = 1, aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

22.4 一维随机变量函数的分布

定义 22.4.1

设 X 是随机变量, 函数 $y = g(x)$, 以随机变量 X 作为自变量的函数 $Y = g(X)$ 也是随机变量, 称为随机变量函数

- 离散型 $\longrightarrow$ 离散型
- 连续型 $\longrightarrow$ 连续型
- 连续型 $\longrightarrow$ 离散型

第 23 章 多维随机变量及其分布

23.1 n 维随机变量及其分布函数

定义 23.1.1 (n 维随机变量)

如果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是定义在同一个样本空间 Ω 上的 n 个随机变量, 称 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 n 维随机向量

定义 23.1.2 (n 维随机变量分布函数)

对于任意的 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, n 元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

称为 n 维随机向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的**联合分布函数**

特别的, 当 $n = 2$ 时, 记 (X, Y) 为 **二维随机变量**或者 **二维随机向量**, 称 $F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\}$ 为二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数

$$(X, Y) \sim F(x, y) \Leftrightarrow F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\}$$

推论 23.1.1 (二维随机变量联合分布性质)

(1). 单调性 (单调不减)

$$\forall x, y_1 < y_2, F(x, y_1) \le F(x, y_2)$$

$$\forall y, x_1 < x_2, F(x_1, y) \le F(x_1, y)$$

(2). 右连续性

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^+} F(x,y) = F(x_0+0,y) = F(x_0,y) \\ \lim\limits_{y \to y_0^+} F(x,y) = F(x,y_0+0) = F(x,y_0) \end{cases}$$

(3). 有界性

$$\begin{cases} F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = F(-\infty,-\infty) = 0 \\ F(+\infty,+\infty) = 1 \end{cases}$$

(4). 非负性 $\forall x_1 < x_2, y_1 < y_2$

$$F(x_1 < x \le x_2, y_1 < y \le y_2) = F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - F(x_1,y_2) + F(x_1,y_1) \ge 0$$

定义 23.1.3 (边缘分布函数)

设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数 $F(X,Y)$, 随机变量 X 与 Y 的分布函数 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 分别称为随机变量关于 (X,Y) 关于 X 和 Y 的**边缘分布函数**

$$\begin{cases} F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < +\infty\} = F(x,+\infty) \\ F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X < +\infty, Y \le y\} = F(+\infty,y) \end{cases}$$

23.2 二维离散型随机变量

定义 23.2.1 (概率分布)

二维随机变量 (X,Y) 只能取有限对值或可列无限对值 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n),\cdots$, 称 (X,Y) 为**二维离散型随机变量**, (X,Y) 满足概率分布

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}(i,j = 1,2,\cdots)$$

上面的式子称为 (X,Y) 的联合分布律, 记作 $(X,Y) \sim p_{ij}$, 见 **table** : 23.1所示

$$F(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$$

表 23.1: 离散型二维随机变量概率分布

$X \backslash Y$	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$P\{X=x_i\}$
x_1	p_{11}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	p_{1*}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	p_{i*}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$P\{Y=y_j\}$	p_{*1}	$\cdots$	p_{*j}	$\cdots$	1

定义 23.2.2 (边缘分布)

X 边缘分布

$$p_{i*} = P\{X=x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} P\{X=x_i, Y=y_j\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} (i=1,2,\cdots)$$

Y 边缘分布

$$p_{*j} = P\{Y=y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{X=x_i, Y=y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} (j=1,2,\cdots)$$

定义 23.2.3 (条件分布)

X 在 $Y=y_j$ 下的条件分布

$$P\{X=x_i | Y=y_j\} = \frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{*j}} (i=1,2,\cdots)$$

Y 在 $X=x_i$ 下的条件分布

$$P\{Y=y_j | X=x_i\} = \frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{i*}} (j=1,2,\cdots)$$

23.3 二维连续型随机变量

定义 23.3.1 (分布函数和概率密度)

二维随机变量 (X,Y) 的分布函数 $F(X,Y)$ 可以表示为:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv,(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

其中 $f(x,y)$ 是非负可积函数, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$, 称 (X,Y) 是**二维连续型随机变量**, $f(x,y)$ 是随机变量 (X,Y) 的**概率密度函数**, 记作 $(X,Y)\sim f(x,y)$

推论 23.3.1 (分布函数和概率密度性质)

- $P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G}f(x,y)dxdy$
- $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续 $\Rightarrow\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}=f(x_0,y_0)$
- $F(x,y)$ 连续且可导, $\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$

定义 23.3.2 (边缘分布函数和边缘概率密度)

$(X,Y)\sim f(x,y)$, X,Y 的边缘分布函数和边缘概率密度

边缘分布函数

$$\begin{cases}F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dv\right]du\\F_Y(y)=F(+\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)du\right]dv\end{cases}$$

边缘概率密度

$$\begin{cases}f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy\\f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx\end{cases}$$

定义 23.3.3 (条件分布函数和条件概率密度)

$(X,Y)\sim f(x,y)$, X 在 $Y=y$ 条件下的**条件概率密度**和 Y 在 $X=x$ 条件下的**条件概率密度**

$$\begin{cases}f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\dfrac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx}\\f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\dfrac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy}\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases} f_X(x)f_{Y|X}(y|x) \\ f_Y(y)f_{X|Y}(x|y) \end{cases}$$

$(X,Y)\sim f(x,y)$, X 在 $Y=y$ 条件下的**条件分布函数**和 Y 在 $X=x$ 条件下的**条件分布函数**

$$\begin{cases} F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(y|x)dy=\int_{-\infty}^{y}\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}dy \\ F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)dx=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx \end{cases}$$

23.3.1 常见二维连续型随机变量分布

定义 23.3.4 (二维均匀分布)

(X,Y) 在有界区域 D 服从**均匀分布**, (X,Y) 的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{S_D} & (x,y)\in D \\ 0 & (x,y)\notin D \end{cases}$$

定义 23.3.5 (二维正态分布)

(X,Y) 概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$$

其中 $\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R},\sigma_1,\sigma_2>0,-1<\rho<1$, 称 (X,Y) 服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的二维正态分布, 记作 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$

推论 23.3.2 (二维正态分布性质)

- 若 $(X_1,X_2)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)\Rightarrow X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$
- $X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 且 X_1,X_2 相互独立, 则 $(X_1,X_2)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;0)$
- $(X_1,X_2)\sim N\Rightarrow k_1X_1+k_2X_2\sim N$

23.4 独立性

定义 23.4.1 (二维随机变量独立性)

设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布 $F(x,y)$, 边缘分布分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 如果任意实数对 (x,y)

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

称 X 和 Y **相互独立**

定义 23.4.2 (n 维随机变量独立性)

设 n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的联合分布 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 边缘分布分别为 $F_{X_1}(x_1),F_{X_2}(x_2),\cdots,F_{X_n}(x_n)$, 如果任意实数对 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$$

称 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ **相互独立**

推论 23.4.1 (独立性性质)

- n 个随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立 $\Leftrightarrow \forall x_i\in\mathbb{R}(i=1,2,\cdots,n)$, n 个事件 $\{X_1\le x_1\},\{X_2\le x_2\},\cdots,\{X_n\le x_n\}$ 相互独立
- 离散型二维随机变量 (X,Y) 相互独立 $\Leftrightarrow \forall x_i,y_j(i,j=1,2,\cdots),P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}$
- 连续型二维随机变量 (X,Y) 相互独立 $\Leftrightarrow \forall x,y,f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$
- $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 相互独立, 其中任意 $k(2\le k\le n)$ 个随机变量相互独立
- $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 相互独立, $g_1(x),g_2(x),\cdots,g_n(x)$ 是一元连续函数, $g_1(X_1),g_2(X_2),\cdots,g_n(X_n)$ 相互独立
- 独立的二维随机变量, 边缘分布和条件分布相等, 边缘概率密度与条件概率密度相等

23.5 多维随机变量函数的分布

定义 23.5.1 (二维随机变量函数)

设 X,Y 为随机变量, $g(x,y)$ 是二元函数, 以随机变量 X,Y 作为自变量的函数 $Z=g(X,Y)$ 也是随机变量, 称为**随机变量函数**

定理 23.5.1 (随机变量函数分布函数和概率密度)

设 X,Y 是随机变量，$f(x,y)$ 是 (X,Y) 的概率密度，$\begin{cases} U = G(X,Y) \\ V = H(X,Y) \end{cases}$，求 $U = g(X,Y)$ 和 $V = h(X,Y)$ 的分布函数和概率密度

$$\begin{cases} U = G(X,Y) \\ V = H(X,Y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = P(U,V) \\ Y = Q(U,V) \end{cases} \Rightarrow |J| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial X}{\partial U} & \frac{\partial X}{\partial V} \\ \frac{\partial Y}{\partial U} & \frac{\partial Y}{\partial V} \end{matrix} \right\|$$

$$F(u,v) = P\{U(X,Y) \le u, V(X,Y) \le v\} = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy$$

$$\begin{aligned} F(u,v) &= \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy \\ &= \iint\limits_{D_{uv}} f(P(u,v),Q(u,v))\big|J\big|dudv \end{aligned}$$

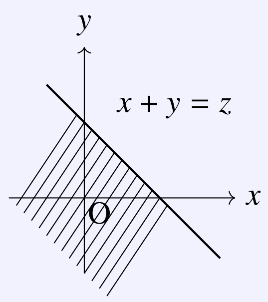
$$f(u,v) = \frac{\partial^2 F(u,v)}{\partial u \partial v} = f(P(u,v),Q(u,v))\big|J\big|$$

$$\begin{cases} f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dv = \int_{-\infty}^{+\infty} f(P(u,v),Q(u,v))\big|J\big|dv \\ f_V(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(P(u,v),Q(u,v))\big|J\big|du \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_U(u_0) = \int_{-\infty}^{u_0} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(P(u,v),Q(u,v))\big|J\big|dv \\ F_V(v_0) = \int_{-\infty}^{v_0} dv \int_{-\infty}^{+\infty} f(P(u,v),Q(u,v))\big|J\big|du \end{cases}$$

命题 23.5.1 (和的分布)

$(X,Y) \sim f(x,y)$, $Z = X + Y$, 求 Z 的分布函数和概率密度



(a) $X + Y$

图 23.1: 和的分布

$$\begin{cases} Z = X + Y \\ W = Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = Z - W \\ Y = W \end{cases} \Rightarrow |J| = 1$$

概率密度

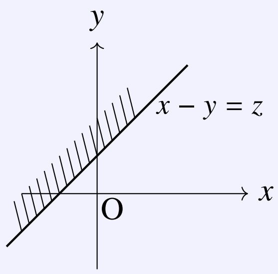
$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z - w, w) dw$$

分布函数

$$F_Z(z_0) = \int_{-\infty}^{z_0} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(z - w, w) dw$$

命题 23.5.2 (差的分布)

$(X, Y) \sim f(x, y)$, $Z = X - Y$, 求 Z 的分布函数和概率密度



(a) $X - Y$

图 23.2: 差的分布

$$\begin{cases} Z = X - Y \\ W = Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = Z + W \\ Y = W \end{cases} \Rightarrow |J| = 1$$

概率密度

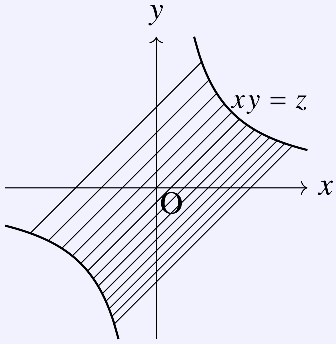
$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z + w, w) dw$$

分布函数

$$F_Z(z_0) = \int_{-\infty}^{z_0} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(z + w, w) dw$$

命题 23.5.3 (积的分布)

$(X, Y) \sim f(x, y)$, $Z = XY$, 求 Z 的分布函数和概率密度



(a) XY

图 23.3: 积的分布

$$\begin{cases} Z = XY \\ W = Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \dfrac{Z}{W} \\ Y = W \end{cases} \Rightarrow |J| = |\frac{1}{w}|$$

概率密度

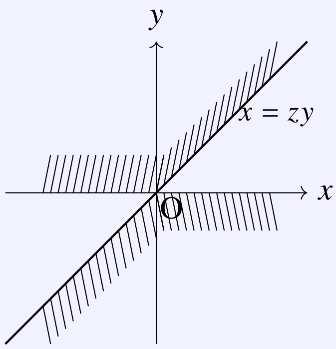
$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\frac{z}{w}, w)|\frac{1}{w}|dw$$

分布函数

$$F_Z(z_0) = \int_{-\infty}^{z_0} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-w, w)|\frac{1}{w}|dw$$

命题 23.5.4 (商的分布)

$(X, Y) \sim f(x, y)$, $Z = \dfrac{X}{Y}$, 求 Z 的分布函数和概率密度



(a) $\dfrac{X}{Y}$

图 23.4: 商的分布

$$\begin{cases} Z = \dfrac{X}{Y} \\ W = Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = ZW \\ Y = W \end{cases} \Rightarrow |J| = |w|$$

概率密度

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\frac{z}{w}, w)|w|dw$$

分布函数

$$F_Z(z_0) = \int_{-\infty}^{z_0} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-w, w)|w|dw$$

命题 23.5.5 (最大值和最小值的分布)

$(X, Y) \sim f(x, y), Z_1 = \max\{X, Y\}, Z_2 = \min\{X, Y\}$, 求 Z_1, Z_2 的分布函数和概率密度

$\max\{X, Y\}$ **分布函数**

$$F_{Z_1}(z) = P\{Z_1 \le \max\{X, Y\}\} = P\{X \le z, Y \le z\} = F(z, z)$$

$\max\{X, Y\}$ **概率密度**

$$f_{Z_1}(z) = F'_{Z_1}(z)$$

$\min\{X, Y\}$ **分布函数**

$$F_{Z_2}(z) = P\{Z_2 \le \min\{X, Y\}\} = P\{X \le z\} \cup P\{Y \le z\} = F_X(z) + F_Y(z) - F(z, z)$$

$\min\{X, Y\}$ **概率密度**

$$f_{Z_2}(z) = F'_{Z_2}(z)$$

推论 23.5.1 (独立同分布随机变量推论)

随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, $Z_1 = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}, Z_2 = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$, Z_1, Z_2 的分布函数

$$\begin{cases} F_{Z_1}(z) = F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z) \\ F_{Z_2}(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)][1 - F_{X_2}(z)]\cdots[1 - F_{X_n}(z)] \end{cases}$$

假设随机变量 $X_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 独立同分布

- $F_{Z_1}(x) = [F(x)]^n, f_{Z_1}(x) = n[F(x)]^{n-1} f(x)$
- $F_{Z_2}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n, f_{Z_2}(x) = n f(x)[1 - F(x)]^{n-1}$

表 23.2: 常见独立分布可加性

X	Y	$X+Y$
$B(n,p)$	$B(m,p)$	$B(n+m,p)$
$P(\lambda_1)$	$P(\lambda_2)$	$P(\lambda_1+\lambda_2)$
$N(\mu_1,\sigma_1^2)$	$N(\mu_2,\sigma_2^2)$	$N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$
$\chi^2(n)$	$\chi^2(m)$	$\chi^2(n+m)$

第 24 章 随机变量的数字特征

24.1 一维随机变量的数字特征

定义 24.1.1 (数学期望)

离散型随机变量

X 是离散型随机变量, X 的分布列为 $p_i = P\{X = x_i\}(i = 1, 2, \cdots, n)$

如果级数 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} x_i p_i$ **绝对收敛**, 称随机变量 X 的**数学期望**存在, 将其记作 $E(X)$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i$$

连续型随机变量

X 是连续型随机变量, X 的概率密度为 $f(x)$

如果积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ **绝对收敛**, 称随机变量 X 的**数学期望**存在, 将其记作 $E(X)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

♣

推论 24.1.1 (数学期望推论)

- $E(a) = a, E(E(X)) = E(X)$
- $E(aX \pm bY) = aE(X) \pm bE(Y)$
- $E\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$
- X 与 Y 相互独立 $\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$

- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立

$$\begin{cases} E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i) \\ E\left[\prod_{i=1}^{n} g_i(X_i)\right] = \prod_{i=1}^{n} E\left[g_i(X_i)\right] \end{cases}$$

定义 24.1.2 (方差和标准差)

设 X 是随机变量, 如果 $E[(X-E(X))^2]$ 存在, 将 $E[(X-E(X))^2]$ 记作 X 的方差 $D(X)$

$$D(X) = E[(X-E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

将 $\sqrt{D(X)}$ 称为随机变量 X 的**标准差**或者**均方差**, 记作 $\sigma(X)$

随机变量 $X^* = \dfrac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ 是 X 的**标准化随机变量**

$$\begin{cases} E(X^*) = 0 \\ D(X^*) = 1 \end{cases}$$

推论 24.1.2 (方差和标准差推论)

- $D(X) \geq 0, D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
- $D(c) = 0, c \in \mathbb{R}$
- $D(aX+b) = a^2 D(X), D(X+b) = D(X)$
- $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2Cov(X, Y)$
- $D\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$
- X 和 Y 相互独立

$$\begin{cases} D(aX+bY) = a^2 D(X) + b^2 D(Y) \\ D(XY) = D(X)D(Y) + D(X)[E(Y)]^2 + D(Y)[E(X)]^2 \geq D(X)D(Y) \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立

$$\begin{cases} D\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D(X_i) \\ D\left(\sum_{i=1}^{n} g_i(X_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} D\left[g_i(X_i)\right] \end{cases}$$

- $\forall c \in \mathbb{R}, D(X) \leq E\left[(X-c)^2\right]$

24.2 二维随机变量的数字特征

定义 24.2.1 (数学期望)

设 X,Y 为随机变量, $g(X,Y)$ 为 X,Y 的函数 (g 是连续函数)

离散型随机变量

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}(i, j = 1, 2, \cdots)$$

级数 $\sum_i^m \sum_j^n g(x_i, y_j)p_{ij}$ **绝对收敛**

$$E[g(X,Y)] = \sum_i^m \sum_j^n g(x_i, y_j)p_{ij}$$

连续型随机变量

(X,Y) 概率密度为 $f(x,y)$, 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy$ **绝对收敛**

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy$$

定义 24.2.2 (协方差与相关系数)

随机变量 X 与 Y 的方差存在且 $D(X) > 0, D(Y) > 0$, 定义随机变量 X,Y 的协方差 $Cov(X,Y)$

$$Cov(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$\rho_{XY} = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$ 定义为随机变量 X,Y 的**相关系数**

推论 24.2.1 (协方差和相关系数推论)

- $Cov(X,Y) = Cov(Y,X), Cov(X,X) = D(X), \rho_{XX} = 1$
- $Cov(aX + b, Y) = aCov(X,Y), Cov(X_1 + X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$
- $\rho_{XY} = 0 \Rightarrow X,Y$ 不相关
- $\rho_{XY} \neq 0 \Rightarrow X,Y$ 相关

24.3 独立性与相关性判定、切比雪夫不等式

推论 24.3.1 (独立性与相关性判定)

随机变量 X,Y 相互独立充要条件

$$\begin{cases} f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \\ P\{X = x_i, Y = y_i\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_i\} \end{cases}$$

随机变量 X,Y 不相关充要条件 $\rho_{XY} = 0$

$$\rho_{XY} = 0 \Leftrightarrow Cov(X,Y) = 0 \Leftrightarrow E(XY) = E(X) \cdot E(Y) \Leftrightarrow D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$

定义 24.3.1 (切比雪夫不等式)

随机变量 X 的期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 都存在

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, P\{|X - E(X)| \leq \varepsilon\} \geq \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2} \\ \forall \varepsilon > 0, P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} \leq 1 - \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2} \end{cases}$$

表 24.1: 常用分布表

名称	概率分布	均值	方差	参数范围
两点分布	$P(X=k)=p^k q^{1-k}$ $(k=0,1)$	p	pq	$0<p<1$ $q=1-p$
二项分布 $B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ $(k=0,1,\cdots,n)$	np	npq	$0<p<1$ $q=1-p$ $n\in N$
泊松分布 $P(\lambda)$	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $(k=0,1,2,\cdots)$	λ	λ	$\lambda>0$
超几何分布 $H(n,N,M)$	$P(X=k)=\dfrac{C_{N-M}^{n-k}C_M^k}{C_N^n}$ $(k=0,1,\cdots\min\{M,n\})$	$\dfrac{nM}{N}$	$\dfrac{n(N-n)(N-M)M}{N^2(N-1)}$	$n,N,M\in N$ $n\le N,M\le N$
几何分布 $G(p)$	$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$ $(k=1,2,\cdots)$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$	$0<p<1$ $q=1-p$
均匀分布 $U(a,b)$	$f(x)=\dfrac{1}{b-a}(a\le x\le b)$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^3}{12}$	
指数分布 $E(\lambda)$	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}(x>0)$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$	$\lambda>0$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2	$\sigma>0$
Γ分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$	$f(x)=\dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}(x>0)$	$\dfrac{\alpha}{\beta}$	$\dfrac{\alpha}{\beta^2}$	$\alpha>0$ $\beta>0$

第 25 章 大数定理和中心极限定理

25.1 依概率收敛

定义 25.1.1 (依概率收敛)

设随机变量 X 与随机变量序列 $\{X_n\}(n=1,2,3,\cdots,n)$

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \lim\limits_{n\Rightarrow\infty} P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} = 0 \\ \forall \varepsilon > 0, \lim\limits_{n\Rightarrow\infty} P\{|X_n - X| < \varepsilon\} = 1 \end{cases}$$

称随机变量序列 $\{X_n\}$ **依概率收敛于随机变量** X, 记作

$$\lim_{n\Rightarrow\infty} X_n = X(P) \; or \; X_n \xrightarrow{P} X(n \Rightarrow \infty)$$

♣

25.2 大数定理

定理 25.2.1 (切比雪夫大数定理)

假设 $\{X_n\}(n=1,2,\cdots,n)$ 是相互独立的随机变量序列, 如果方差 $D(X_i)$ 存在且一致有上界, $\forall i \geq 1, \; s.t. \; D(X_i) \leq C, C \in \mathbb{R}$, $\{X_n\}$ 服从大数定理

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

♡

定理 25.2.2 (伯努利大数定理)

假设 μ_n 是 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数，在每次试验中事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$，$\frac{\mu_n}{n} \xrightarrow{P} p$

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \Rightarrow \infty} P\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\} = 1$$

定理 25.2.3 (辛钦大数定理)

假设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，如果 $E(X_i) = \mu(i = 1,2,\cdots,n)$ 存在，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \mu$

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \Rightarrow \infty} P\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \varepsilon\} = 1$$

25.3 中心极限定理

中心极限定理
正态分布

定理 25.3.1 (列维-林德伯格定理)

假设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，如果 $E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2 > 0(i = 1,2,\cdots,n)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \Rightarrow \infty} P\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

推论 25.3.1 (中心极限定理推论)

- $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$
- $P\{a < \sum_{i=1}^{n} X_i < b\} \approx \Phi(\frac{b - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}) - \Phi(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n}\sigma})$

定理 25.3.2 (棣莫弗-拉普拉斯定理)

假设随机变量 $Y_n \sim B(n,p)(0<p<1, n \geq 1)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \Rightarrow \infty} P\{\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

第 26 章 数理统计

26.1 总体和样本

定义 26.1.1 (统计概念和统计量)

- **总体**: 研究对象的全体称为总体
- **样本**: n 个相互独立且与总体具有相同概率分布的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 所组成的整体 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 称为来自总体 X, 容量为 n 的一个**简单随机样本**, 一次抽样结果的具体的 n 个数值 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的一个观测值

定义 26.1.2 (样本分布)

假设总体的分布函数 $F(x)$, 概率密度函数 $f(x)$, 样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数和概率密度

- 离散型 $P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i = x_i\}$
- 连续型

$$\begin{cases} F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i) \\ f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \end{cases}$$

26.2 统计量及其分布

定义 26.2.1

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本, $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 n 元函数, 如果函数 g 中不含任何参数, 称 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一个**统计量**

定义 26.2.2 (样本数字特征)

- 样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$
- 样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$
- 样本标准差 $S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$
- 样本 k 阶原点矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k(k=1,2,\cdots)$
- 样本 k 阶中心矩 $B_k=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k(k=2,3,\cdots)$

定义 26.2.3 (顺序统计量)

将样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的 n 个观测值**从小到大**顺序排序

$$X_{(1)}\leq X_{(2)}\leq\cdots\leq X_{(n)}\leq$$

随机变量 $X_{(k)}$ 称作第 k 顺序统计量, $X_{(1)}$ 为最小顺序统计量, $X_{(n)}$ 为最大顺序统计量

$$\begin{cases}X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\\ X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\end{cases}$$

推论 26.2.1 (统计量 (数字特征) 性质)

假设总体期望 $E(X)=\mu$, 总体方差为 $D(X)=\sigma^2$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体的一个样本, $\overline{X},S^2$ 分别为样本的均值和方差

- $E(X_i)=\mu$
- $D(X_i)=\sigma^2$
- $E(\overline{X})=E(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n})=E(X)=\mu$
- $D(\overline{X})=D(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n})=\frac{1}{n}\sigma^2$
- $E(S^2)=D(X)=\sigma^2$

26.3 三大分布

定义 26.3.1 (χ^2 分布)

随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立, 且都服从标准正态分布, 随机变量 $X=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 服从自由度为 n 的卡方分布 $\chi^2(n)$, 记作 $X\sim\chi^2(n)$

上 α 分位数: 对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$, 称满足

$$P\{\chi^2 > \chi^2_\alpha(n)\} = \int_{\chi^2_\alpha(n)}^{+\infty} f(x)dx = \alpha$$

的 $\chi^2_\alpha(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 分布的上 α 分位数

- $X_1 \sim \chi^2(n_1), X_2 \sim \chi^2(n_2), X_1, X_2$ 相互独立, $X_1 + X_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$
- $X \sim \chi^2(n) \Rightarrow E(X) = n, D(X) = 2n$

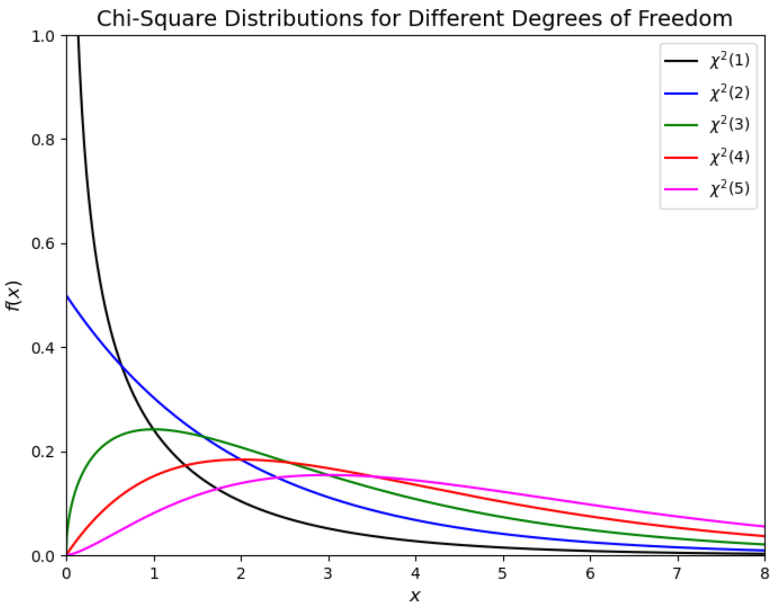


图 26.1: 卡方分布

定义 26.3.2 (t 分布)

随机变量 $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n), X, Y$ 相互独立, 随机变量 $t = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布, 记作 $t \sim t(n)$

上 α 分位数: 对于给定的 $\alpha(0 < \alpha < 1)$, 称满足

$$P\{t > t_\alpha(n)\} = \alpha$$

的 $t_\alpha(n)$ 为 t 分布的上 α 分位数

- t 分布概率密度关于 $x = 0$ 对称 $\Rightarrow E(t) = 0$
- $P\{t > -t_\alpha(n)\} = P\{t > t_{1-\alpha}(n)\} \Rightarrow t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$

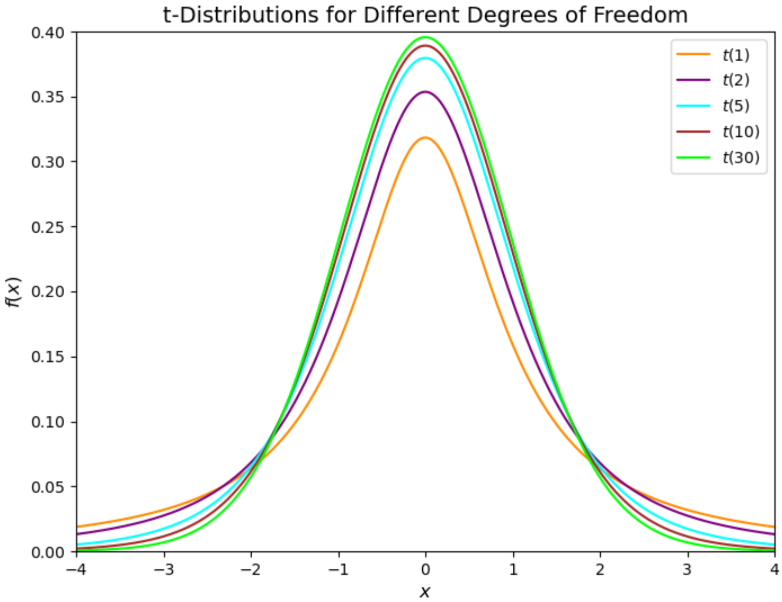


图 26.2: t 分布

定义 26.3.3 (F 分布)

随机变量 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$, 且 X, Y 相互独立, 随机变量 $F = \dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从自由度为 (n_1, n_2) 的 F 分布, 记作 $F \sim F(n_1, n_2)$

- $F \sim F(n_1, n_2) \Rightarrow \dfrac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$
- $F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \dfrac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}$
- $t \sim t(n) \Rightarrow t^2 \sim F(1, n)$

♣

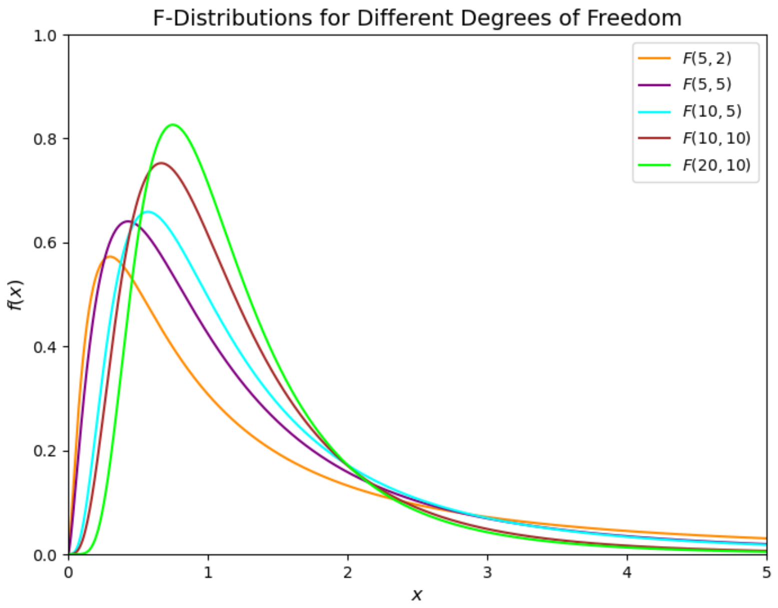


图 26.3: F 分布

推论 26.3.1 (正态总体推论)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本, $\overline{X}, S^2$ 分别是样本的均值和方差

- $\overline{X} \sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow \dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$
- $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$
- $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum\limits_{i=1}^{n}(\dfrac{X_i-\overline{X}}{\sigma})^2 \sim \chi^2(n-1)$
- $\overline{X}$ 和 S^2 相互独立 $\Rightarrow \dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S} \sim t(n-1)$
- σ 未知时, $\dfrac{n(\overline{X}-\mu)^2}{S^2} \sim F(1, n-1)$

26.4 参数的点估计

定义 26.4.1 (参数点估计)

设总体 X 的分布函数 $F(x;\theta)$, 其中 θ 是一个未知参数, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体的一个样本, 由样本构造一个适当的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 作为参数 θ 的估计, 称统计量 $\hat{\theta}$ 为参数 θ 的估计量

定义 26.4.2 (矩估计)

设总体分布中有 k 个未知的参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$, 来自总体 X 的一组样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$, 如果 X 的原点矩 $E(X^l)(l=1,2,\cdots,k)$ 存在, 样本原点矩 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^l$ 可作为 $E(X^l)$ 的估计

定义 26.4.3 (最大似然估计)

对未知参数 θ 进行估计, 在该参数可能的取值范围 I 中选取, 使用使样本观测值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 最大的参数 $\hat{\theta}$ 作为参数 θ 的估计值

似然函数

$$\begin{cases} L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta) \\ L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta) \end{cases}$$

$$\exists\hat{\theta}\in I,\ s.t.\ L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\hat{\theta})=\max_{\theta\in I}L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)$$

推论 26.4.1 (估计量评价标准)

- **无偏性**: $E(\hat{\theta})=\theta$
- **有效性**: $D(\hat{\theta})$ 最小
- **一致性**: $\forall\varepsilon>0,\ \lim_{n\Rightarrow\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=1$

26.5 参数的区间估计

定义 26.5.1 (区间估计和置信区间)

设 θ 是总体 X 的一个未知参数, 对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$, 如果由样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 确定的两个统计量 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 满足

$$P\{\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\theta<\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}=1-\alpha$$

则称随机区间 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 是 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的 **置信区间**, $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 分别称为 **置信上限**和**置信下限**, $1-\alpha$ 为置信水平, α 为**显著性水平**

表 26.1: 正态总体的置信区间

待估参数	其他参数	枢轴量分布	置信区间
μ	σ^2已知	$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$
μ	σ^2未知	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left(\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\overline{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$
σ^2	μ已知	$\chi^2=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$	$\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi_{\alpha/2}(n)},\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi_{1-\alpha/2}(n)}\right)$
σ^2	μ未知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right)$

26.6 假设检验

定义 26.6.1 (统计性检验)

- H_0: 虚无假设
- H_1: 备择假设

定义 26.6.2 (两类错误)

- **第一类错误**: 虚无假设 H_0 为真, 但拒绝了 H_0, 误认为备择假设 H_1 为真, 犯第一类错误概率 $\alpha=P\{R(H_0)|T(H_0)\}$
- **第二类错误**: 备择假设 H_1 为真, 但接受了 H_0, 误认为虚无假设 H_0 为真, 犯第二类错误概率 $\beta=P\{A(H_0)|T(H_1)\}$

推论 26.6.1 (正态总体下的六大检查和拒绝域)

- σ^2 已知,μ 未知, $H_0:\ \mu=\mu_0, H_1:\ \mu\neq\mu_0$
$$\mu_r\in(-\infty,\mu_0-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}})\cup(\mu_0+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},+\infty)$$
- σ^2 未知, μ 未知, $H_0:\ \mu=\mu_0, H_1:\ \mu\neq\mu_0$
$$\mu_r\in(-\infty,\mu_0-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))\cup(\mu_0+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),+\infty)$$
- σ^2 已知, μ 未知, $H_0:\ \mu\leq\mu_0, H_1:\ \mu>\mu_0$
$$\mu_r\in(\mu_0+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha,+\infty)$$
- σ^2 已知, μ 未知, $H_0:\ \mu\geq\mu_0, H_1:\ \mu<\mu_0$
$$\mu_r\in(-\infty,\mu_0-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha)$$

- σ^2 未知, μ 未知, $H_0: \mu \le \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$

$$\mu_r \in (\mu_0 + \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), +\infty)$$

- σ^2 未知, μ 未知, $H_0: \mu \ge \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$

$$\mu_r \in (-\infty, \mu_0 - \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1))$$

第五部分

每日一题 I

第 5 部分目录

第 27 章 January

27.1 Week I

January 1

例题 27.1.

已知 $f(x+1)$ 的定义域为 $[0,a],(a>0)$, 求 $f(x)$ 定义域

例题 27.2.

已知 $f(x)=e^{x^2}, f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 并求出定义域

例题 27.3.

设

$$g(x)=\begin{cases}2-x & x\leq 0\\ x+2 & x>0\end{cases}$$

,

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ -x & x\geq 0\end{cases}$$

求 $g[f(x)]$

例题 27.4.

设函数

$$f(x)=\begin{cases}1-2x^2 & x<-1\\ x^3 & -1\le x\le 2\\ 12x-16 & x>2\end{cases}$$

求 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式

例题 27.5.

证明: 定义在 $[-a,a]$ 上的任意一个函数 $f(x)$ 都可以表示为一个奇函数和一个偶函数之和

例题 27.6.

判断函数 $f(x)=x\tan x\cdot e^{\sin x}$ 的奇偶性、单调性、周期性和有界性

例题 27.7.

函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界

- A. $(-1,0)$
- B. $(0,1)$
- C. $(1,2)$
- D. $(2,3)$

January 2

例题 27.8.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]$$

例题 27.9.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$$

January 3

例题 27.10.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$$

例题 27.11.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$$

January 4

例题 27.12.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$$

例题 27.13.

已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-\cos 2x}{ax^b}=1$, 求 a, b

January 5

例题 27.14.

已知 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$, 下列结论正确的个数为

- A. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$
- B. $\lim\limits_{x\to x_0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi}}=e$

- C. 当 $x \to x_0$ 时,$\sin\varphi(x) \sim \varphi(x)$
- D. 若 $\lim\limits_{u\to 0} f(u) = A$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = A$

例题 27.15.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\arctan x}{\sin x-\tan x}$$

January 6

例题 27.16.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{x}{\ln(1+x)}}{x}$$

例题 27.17.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{(1+\dfrac{1}{x})^{x^2}}$$

January 7

例题 27.18.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)}{x^4}$$

例题 27.19.

$$\lim_{x\to +\infty} x^2\left[\arctan(x+1)-\arctan x\right]$$

27.2 Week II

January 8

例题 27.20.

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left[\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right]$$

例题 27.21.

$$\lim_{x\to+\infty}[\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}]$$

January 9

例题 27.22.

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x^2)}-\frac{1}{\ln(1+\tan^2 x)}\right]$$

例题 27.23.

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x^2)}-\frac{1}{\sin^2 x}\right]$$

January 10

例题 27.24.

$$\lim_{x\to 0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}$$

例题 27.25.

若 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e$, 求 k

January 11

例题 27.26.

若 $\lim_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=1$, 求 a,b

例题 27.27.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

January 12

例题 27.28.

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

例题 27.29.

$$\lim_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$$

January 13

例题 27.30.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$$

例题 27.31.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$$

January 14

例题 27.32.

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$$

例题 27.33.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}$$

27.3 Week III

January 15

例题 27.34.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$$

例题 27.35.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^n}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\right)^x$$

January 16

例题 27.36.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$$

例题 27.37.

$$\lim_{n\to\infty} n\left[e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}-1\right]$$

January 17

例题 27.38.

设 $a>0, a\neq 1$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})=\ln a$, 求 p

例题 27.39.

$$\lim_{x\to0}\frac{(1-\sqrt{\cos x})(1-\sqrt[3]{\cos x})\cdots(1-\sqrt[n]{\cos x})}{(1-\cos x)^{n-1}}$$

January 18

例题 27.40.

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$$

例题 27.41.

已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$, 其中 k,c 为常数, 且 $c\neq0$, 求 k,c

January 19

例题 27.42.

若 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x^3}{x^4}-\dfrac{f(x)}{x^3}\right)=2$, $x\to0$ 时,$f(x)$ 是 x 的:

- A. 等价无穷小
- B. 同阶但非等价无穷小
- C. 高阶无穷小
- D. 低阶无穷小

例题 27.43.

当 $x\to0$ 时,$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 时等价无穷小, 求 k

January 20

例题 27.44.

当 $x\to0^+$ 时, 与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量为:

- A. $1-e^{\sqrt{x}}$
- B. $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$
- C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$

- D. $1-\cos\sqrt{x}$

例题 27.45.

设 $\alpha_1 = x(\cos\sqrt{x}-1), \alpha_2 = \sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x}), \alpha_3 = \sqrt[3]{x+1}-1$, 当 $x \to 0^+$ 时, 以上 3 个无穷小量从低阶到高阶的排序为:

- A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
- B. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$
- C. $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3$
- D. $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$

January 21

例题 27.46.

函数 $f(x) = \dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的第一类间断点是:

- A. 0
- B. 1
- C. $-\dfrac{\pi}{2}$
- D. $\dfrac{\pi}{2}$

例题 27.47.

设函数 $f(x) = \dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$, 则 $f(x)$ 有

- A. 1 个可去间断点,1 个跳跃间断点
- B. 1 个可去间断点,1 个无穷间断点
- C. 2 个跳跃间断点
- D. 2 个无穷间断点

27.4 Week IV

January 22

例题 27.48.

函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为:

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

例题 27.49.

函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为:

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

January 23

例题 27.50.

设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$, 讨论函数的间断点, 其结论为:

- A. 不存在间断点
- B. 存在间断点 $x=1$
- C. 存在间断点 $x=0$
- D. 存在间断点 $x=-1$

例题 27.51.

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$, 则:

- A. $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$ 存在
- B. $f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$ 存在
- C. $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在
- D. $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在

January 24

例题 27.52.

设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内有定义, 若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时, 恒有 $|f(x)|\le x^2$, 则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的:

- A. 间断点
- B. 连续而不可导的点
- C. 可导的点, 且 $f'(0)=0$
- D. 可导的点, 且 $f'(0)\neq 0$

例题 27.53.

设函数 $f(x)=\begin{cases} x^\alpha\cos\dfrac{1}{x^\beta}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$ $(\alpha>0,\beta>0)$, 若 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则:

- A. $\alpha-\beta>1$
- B. $0<\alpha-\beta\le 1$
- C. $\alpha-\beta>2$
- D. $0<\alpha-\beta\le 2$

January 25

例题 27.54.

曲线 $x+y+e^{2xy}=0$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线方程

例题 27.55.

(1). 设函数 $u(x),v(x)$ 可导, 利用导数定义证明:$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

(2). 设函数 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$ 可导,$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$, 写出 $f(x)$ 的求导公式

January 26

例题 27.56.

设函数 $f(x)=\begin{cases} \ln\sqrt{x} & x\ge 1 \\ 2x-1 & x<1 \end{cases}$,$y=f(f(x))$, 则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=e}$

例题 27.57.

设 $y=y(x)$ 是由方程 $xy+e^y=x+1$ 确定的隐函数, 则 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}$

January 27

例题 27.58.

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t-\ln(1+t) \\ y=t^3+t^2 \end{cases}$ 所确定, 则 $\frac{d^2y}{dx^2}$

例题 27.59.

设 $y=x^2 2^x$, 求 $y^{(n)}$

January 28

例题 27.60.

设 $y=\frac{1}{x^2-1}$, 求 $y^{(n)}$

例题 27.61.

已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数, 且 $f'(x)=[f(x)]^2$, 则当 n 为大于 2 的正整数时,$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是:

- A. $n![f(x)]^{n+1}$
- B. $n[f(x)]^{n+1}$
- C. $[f(x)^{2n}]$
- D. $n![f(x)]^{2n}$

January 29

例题 27.62.

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导, 且对任意 x_1,x_2, 当 $x_1>x_2$ 时, 都有 $f(x_1)>f(x_2)$, 则:

- A. 对任意 $x,f'(x)>0$

- B. 对任意 $x, f'(-x) \leq 0$
- C. 函数 $f(-x)$ 单调增加
- D. 函数 $-f(-x)$ 单调增加

例题 27.63.

设 $f(x), g(x)$ 是恒大于零的可导函数, 且 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$, 当 $a < x < b$ 时, 有:

- A. $f(x)g(b) > f(b)g(x)$
- B. $f(x)g(a) > f(a)g(x)$
- C. $f(x)g(x) > f(b)g(b)$
- D. $f(x)g(x) > f(a)g(a)$

January 30

例题 27.64.

设 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = -1$, 其中 n 为大于 1 的整数, 则在点 $x = a$ 处:

- A. $f(x)$ 的导数存在, 且 $f'(a) \neq 0$
- B. $f(x)$ 取得极大值
- C. $f(x)$ 取得极小值
- D. $f(x)$ 是否取得极值与 n 的取值有关

例题 27.65.

设 $f(x)$ 的导数在 $x = a$ 处连续, 又 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{x-a} = -1$, 则:

- A. $x = a$ 是 $f(x)$ 的极小值点
- B. $x = a$ 是 $f(x)$ 的极大值点
- C. $(a, f(a))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
- D. $x = a$ 不是 $f(x)$ 的极值点,$(a, f(a))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

January 31

例题 27.66.

曲线 $y = (x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为:

例题 27.67.

已知函数 $y=f(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$, 若 $f'(x_0)=0(x_0\neq 0)$, 则:

- A. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
- B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
- C. $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点
- D. $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,$(x_0, f(x_0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

第 28 章 February

28.1 Week I

February 1

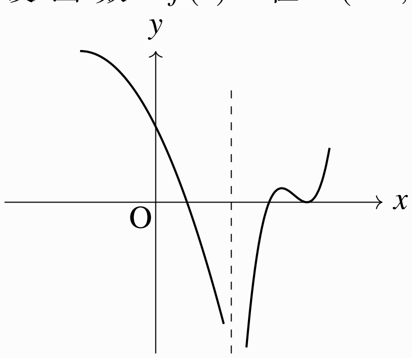
例题 28.1.

设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$ 且 $f'(0)=0$, 则:

- A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
- B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
- C. $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点
- D. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

例题 28.2.

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 其导函数图形如图所示, 则:



- A. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点
- B. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点

- C. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 1 个拐点
- D. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点

February 2

例题 28.3.

曲线 $y = x\ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$ $(x > 0)$ 的渐近线方程为:

例题 28.4.

曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 渐近线的条数为:

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

February 3

例题 28.5.

设函数 $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$, 求

(1). 函数的增减区间及极值

(2). 函数图像的凹凸区间及拐点

(3). 渐近线

(4). 作出其图形

例题 28.6.

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内, 方程 $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$:

- A. 无实根
- B. 有且仅有一个实根
- C. 有且仅有两个实根

- D. 有无穷多个实根

February 4

例题 28.7.

函数 $f(x)=\ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为:

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

例题 28.8.

设 $f(x)=x^2(1-x)^2$, 则方程 $f''(x)=0$ 在 $(0,1)$ 上:

- A. 无实根
- B. 有且仅有一个实根
- C. 有且仅有两个实根
- D. 有且仅有三个实根

February 5

例题 28.9.

设常数 $k>0$, 设函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点个数为:

- A. 3
- B. 2
- C. 1
- D. 0

例题 28.10.

证明: 当 $x>0, \ln(1+\dfrac{1}{x})>\dfrac{1}{1+x}$

February 6

例题 28.11.

证明: $x>0, \arctan x+\dfrac{1}{x}>\dfrac{\pi}{2}$

例题 28.12.

设 p, q 是大于 1 的常数, 且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 证明: $\forall x>0, \dfrac{1}{p} x^{p}+\dfrac{1}{q} \geq x$

February 7

例题 28.13.

设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续, 在 $(0,3)$ 内可导, 且 $f(0)+f(1)+f(2)=3, f(3)=1$, 证明:

$$\exists \xi \in(0,3), \text{ s.t. } f'(\xi)=0$$

例题 28.14.

设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有二阶导数, 且 $f(a)=f(b)=0, f'(a) f'(b)>0$, 证明:

$$\exists \xi \in(a, b), \eta \in(a, b), \text{ s.t. } f(\xi)=0, f''(\eta)=0$$

28.2 Week II

February 8

例题 28.15.

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a)=f(b)=0$, 证明:

(1). $\exists \xi \in(a, b), \text{ s.t. } f'(\xi)+f(\xi)=0$

(2). $\exists \eta \in(a, b), \text{ s.t. } f'(\eta)-f(\eta)=0$

(3). $\exists \zeta \in(a, b), \text{ s.t. } f'(\zeta)+\lambda f(\zeta)=0$

例题 28.16.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(1)=0$, 证明:

$$\exists \xi \in (0,1),\ s.t.\ \xi f'(\xi)+f(\xi)=0$$

February 9

例题 28.17.

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=\frac{1}{3}$, 证明:

$$\exists \xi \in \left(0,\frac{1}{2}\right), \eta \in \left(\frac{1}{2},1\right),\ s.t.\ f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$$

例题 28.18.

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 a,b 同号, 证明:

$$\exists \xi, \eta \in (a,b),\ s.t.\ abf'(\xi)=\eta^2 f'(\eta)$$

February 10

例题 28.19.

求下列的不定积分

(1). $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}dx$

(2). $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx$

例题 28.20.

求下列的不定积分

(1). $\displaystyle\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)}dx$

(2). $\displaystyle\int (1+\ln x)(\ln x+\ln\ln x)dx$

February 11

例题 28.21.

求下列的不定积分

(1). $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+x^3}dx$

(2). $\displaystyle\int \frac{1-x}{1+x^3}dx$

例题 28.22.

求下列的不定积分

(1). $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^3}$

(2). $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^3}dx$

February 12

例题 28.23.

已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2 x$, 求 $\int x f'(x)dx$

例题 28.24.

设 $f(\ln x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$, 求 $\int f(x)dx$

February 13

例题 28.25.

$$\int \max(1, x^2)dx$$

例题 28.26.

设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x dx, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx, P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$

- A. $N<P<M$
- B. $M<P<N$
- C. $N<M<P$
- D. $P<M<N$

February 14

例题 28.27.

设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx, K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx$

- A. $M>N>K$
- B. $M>K>N$
- C. $K>M>N$
- D. $K>N>M$

例题 28.28.

设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}dx, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}dx$

- A. $I_1>I_2>1$
- B. $1>I_1>I_2$
- C. $I_2>I_1>1$
- D. $1>I_2>I_1$

28.3 Week III

February 15

例题 28.29.

$$\int_{-2}^{2}\left[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right]dx$$

例题 28.30.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x|[x^3 + \sin^2 x] \cos^2 x dx$$

February 16

例题 28.31.

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin x} dx$$

例题 28.32.

$$\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x(1 - \ln x)}}$$

February 17

例题 28.33.

$$\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$

February 18

例题 28.34.

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx$$

例题 28.35.

已知函数 $f(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^4} dt$, 则 $\int_0^1 x^2 f(x) dx$

February 19

例题 28.36.

已知 $f(x)$ 连续,$\int_0^x tf(x-t)dt = 1-\cos x$, 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

例题 28.37.

设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 2-x & 1 < x \le 2 \end{cases}$, 记 $F(x) = \int_0^x f(t)dt (0 \le x \le 2)$, 则有:

- A. $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} & 0 \le x \le 1 \\ 2x - \dfrac{x^2}{2} & 1 < x \le 2 \end{cases}$
- B. $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} & 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{1}{3} + 2x - \dfrac{x^2}{2} & 1 < x \le 2 \end{cases}$
- C. $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} & 0 \le x \le 1 \\ -\dfrac{7}{6} + 2x - \dfrac{x^2}{2} & 1 < x \le 2 \end{cases}$
- D. $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} & 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{x^3}{3} + 2x - \dfrac{x^2}{2} & 1 < x \le 2 \end{cases}$

February 20

例题 28.38.

设 $x \ge -1$, 求 $\int_{-1}^x (1-|t|)dt$

例题 28.39.

设 $x = x(t)$ 由方程 $\sin t - \displaystyle\int_1^{x-t} e^{-u^2} du = 0$ 所确定, 试求 $\dfrac{d^2x}{dt^2}\Big|_{t=0}$

February 21

例题 28.40.

设函数 $f(x)=\int_0^1 |t(t-x)|dt(0<x<1)$, 求 $f(x)$ 的极值、单调区间及曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间

例题 28.41.

下列反常积分中发散的是:

- A. $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$
- B. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$
- C. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$
- D. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$

28.4 Week IV

February 22

例题 28.42.

$$\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x+3}$$

例题 28.43.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{1+x}+e^{3-x}}$$

February 23

例题 28.44.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}dx$$

例题 28.45.

已知抛物线通过 x 轴上的两点 $A(1,0), B(3,0)$

(1). 求证: 两坐标轴与该抛物线所围图形的面积等于 x 轴与该抛物线所围图形的面积

(2). 计算上述两平面图形绕 x 轴旋转一周所产生的两个旋转体体积之比

February 24

例题 28.46.

求心形线 $r = a(1 + \cos\theta)$ $(a > 0)$ 所围图形的面积

例题 28.47.

已知平面区域 $D = \{(x, y)|0 \le y \le \dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}, x \ge 1\}$

(1). 求 D 的面积

(2). 求 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积

February 25

例题 28.48.

某水库的闸门形状为等腰梯形, 它的两条底边各长 $10m$ 和 $6m$, 高为 $20m$, 较长的底边与水面相齐, 求闸门的一侧所受水的压力

例题 28.49.

一个半径为 $R(m)$ 的球形贮水箱盛满了水, 如果把箱中的水从顶部全部抽出, 需要作的功

February 26

例题 28.50.

方程 $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$ 的通解

例题 28.51.

方程 $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$ 的通解

February 27

例题 28.52.

方程 $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$ 满足条件 $y|_{x=1} = 0$ 的特解

例题 28.53.

方程 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x + y^4}$ 的通解

February 28

例题 28.54.

$$\int \frac{x \ln x + x \ln^2 x}{2 + x \ln x} dx$$

例题 28.55.

$$\int \frac{\sin 2x \sin^2 x}{2 + \cos^4 x} dx$$

February 29

例题 28.56.

$$\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

例题 28.57.

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x(1+\sin^2 x)}dx$$

第 29 章 March

29.1 Week I

March 1

例题 29.1.

$$\int \frac{1}{\cos^3 x} dx$$

例题 29.2.

$$\int \frac{2+x}{(1+x^2)^2} dx$$

March 2

例题 29.3.

$$\int \frac{\arcsin \sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx$$

例题 29.4.

$$\int e^x \arcsin \sqrt{1-e^{2x}} dx$$

March 3

例题 29.5.

已知 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, 求 $\int f(x)dx$

例题 29.6.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\cos^2 x dx$$

March 4

例题 29.7.

$$\int_0^{\pi^2} \sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx$$

例题 29.8.

$$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}dx$$

March 5

例题 29.9.

$$\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}dx$$

例题 29.10.

$$\int_1^2 (x-1)^2(x-2)^2dx$$

March 6

例题 29.11.

$$\int_{-2}^{2} x\ln(1+e^x)dx$$

例题 29.12.

设 D 是由曲线 $xy+1=0$ 与直线 $y+x=0$ 及 $y=2$ 围成的有界区域, 求 D 的面积

March 7

例题 29.13.

设 D 是由曲线 $y=x^2$ 与 $y=x$ 围成的有界区域, 求区域 D 分别绕直线 $y=0, x=0, x=1, x=2$ 旋转所得旋转体的体积

例题 29.14.

方程 $y''+4y'+4y=e^{-2x}$ 满足条件 $y(0)=1, y'(0)=0$ 的特解

29.2 Week II

March 8

例题 29.15.

具有特解 $y_1=e^{-x}, y_2=2xe^{-x}, y_3=3e^x$ 的三阶常系数线性齐次方程为:

- A. $y'''-y''-y'+y=0$
- B. $y'''+y''-y'-y=0$
- C. $y'''-6y''+11y'-6y=0$
- D. $y'''-2y''-y'+2y=0$

例题 29.16.

方程 $y''-2y'=xe^{2x}$ 的特解形式为:

- A. $y=axe^{2x}$
- B. $y=(ax+b)e^{2x}$
- C. $y=x(ax+b)e^{2x}$

- D. $y = x^2(ax+b)e^{2x}$

March 9

例题 29.17.

方程 $y'' + y = e^x + 1 + \sin x$ 的特解形式为:

- A. $ae^x + b + c\sin x$
- B. $ae^x + b + c\cos x + d\sin x$
- C. $ae^x + b + x(c\cos x + d\sin x)$
- D. $y = ae^x + b + cx\sin x$

例题 29.18.

设函数 $f(x)$ 具有一阶连续导数, 且满足 $f(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f'(t)dt + x^2$, 求 $f(x)$ 表达式

March 10

例题 29.19.

设 L 是一条平面曲线, 其上任意一点 $P(x, y)(x > 0)$ 到坐标原点的距离恒等于该点处切线在 y 轴上的截距, 且 L 经过 $(\frac{1}{2}, 0)$, 求曲线 L 的渐近线方程为

例题 29.20.

二元函数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处:

- A. 不连续
- B. 两个偏导数都不存在
- C. 偏导数存在但不可微
- D. 可微

March 11

例题 29.21.

二元函数 $f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处两个偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$ 存在, 是 $f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续的:

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 不充分不必要条件

例题 29.22.

已知 $f(x, y) = \sin\sqrt{x^4 + y^4}$

- A. $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ 都存在
- B. $f'_x(0,0)$ 不存在, $f'_y(0,0)$ 存在
- C. $f'_x(0,0)$ 存在, $f'_y(0,0)$ 不存在
- D. $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ 都不存在

March 12

例题 29.23.

设 $f(x, y) = \dfrac{2x + y^2}{1 + y^2\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$, 求 $df(0,0)$

例题 29.24.

已知 $dF(x, y) = xye^x dx + (f(x) + y^2)dy$, 且 $f(x)$ 有连续一阶导数, $f(x) = 0$, 求 $F(x, y)$

March 13

例题 29.25.

设函数 $f(x, y)$ 可微, 且对于任意 x, y 都有 $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0$, $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$, 则下列结论正确的是:

- A. $f(1,1) > f(0,0)$
- B. $f(-1,1) > f(0,0)$
- C. $f(-1,-1) > f(0,0)$
- D. $f(1,-1) > f(0,0)$

例题 29.26.

设 $z=(x+e^y)^x$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)}$

March 14

例题 29.27.

设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z+y\ln z-\arctan(2xy)=1$ 确定, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,2)}$

例题 29.28.

设 $f(x,y,z)=e^x+y^2z$, 其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x+y+z+xyz=0$ 所确定的隐函数, 求 $f_x'(0,1,-1)$

29.3 Week III

March 15

例题 29.29.

设 $z=xyf(\frac{y}{x})$, 其中 $f(u)$ 可导, 求 $xz_x'+yz_y'$

例题 29.30.

设 $z=e^{xy}+f(x+y,xy)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, 其中 $f(u,v)$ 有二阶连续偏导数

March 16

例题 29.31.

已知 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取得极小值

- A. $f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)=0$
- B. $f_{xx}''(x_0,y_0)f_{yy}''(x_0,y_0)-(f_{xy}''(x_0,y_0))^2>0$, 且 $f_{xx}''(x_0,y_0)>0$
- C. $f(x_0,y)$ 在 y_0 处取得极大值
- D. $f(x,y_0)$ 在 x_0 处取得极小值

例题 29.32.

设函数 $f(x), g(x)$ 均有二阶连续导数, 满足 $f(0) > 0, g(0) < 0$, 且 $f'(0) = g'(0) = 0$, 则函数 $z = f(x)g(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件

- A. $f''(0) < 0, g''(0) > 0$
- B. $f''(0) < 0, g''(0) < 0$
- C. $f''(0) > 0, g''(0) > 0$
- D. $f''(0) > 0, g''(0) < 0$

March 17

例题 29.33.

已知函数 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = (ay - x^2)dx + (ax - y^2)dy, (a > 0)$, 函数 $f(x, y)$

- A. 无极值点
- B. 点 (a, a) 为极小值点
- C. 点 (a, a) 为极大值点
- D. 是否有极值点与 a 的取值有关

例题 29.34.

设函数 $z = f(xy, yg(x))$, 其中 f 函数具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导且在 $x = 1$ 处取得极值 $g(1) = 1$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}|_{(1,1)}$

March 18

例题 29.35.

求函数 $f(x, y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值

例题 29.36.

求 $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$ 在椭圆域 $D = \left\{(x, y)|x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\right\}$ 上的最大值和最小值

March 19

例题 29.37.

交换二次积分的积分次序 $(a>0)$

(1). $\displaystyle\int_0^2 dx\int_{\frac{x^2}{4}}^{3-x} f(x,y)dy$

(2). $\displaystyle\int_0^a dy\int_0^{\sqrt{ay}} f(x,y)dx+\int_a^{2a} dy\int_0^{2a-y} dx$

例题 29.38.

设 $f(x)$ 是连续函数, 则 $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$ 等价于:

- A. $\int_0^1 dx\int_0^{x-1} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$
- B. $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)dy$
- C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$
- D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

March 20

例题 29.39.

设函数 $f(t)$ 连续, 则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{2\cos\theta}^2 f(r^2)rdr$

- A. $\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)dy$
- B. $\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2+y^2)dy$
- C. $\int_0^2 dy\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)dx$
- D. $\int_0^2 dy\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x^2+y^2)dx$

例题 29.40.

计算二重积分

(1). $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(2x+3y)^2d\sigma$

(2). $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1} dy\int_y^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}}dx$

(3). $\displaystyle\int_0^1 dy\int_y^1 \sqrt{x^2-y^2}dx$

(4). $\int_0^1 dy \int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^3}\right) dx$

(5). $\iint\limits_D \left(xy^5 - 1\right) dxdy, D = \left\{(x,y) | -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \sin x \le y \le 1\right\}$

(6). $\iint\limits_D x^2 y dxdy$, 其中 D 是由双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 以及直线 $y = 0, y = 1$ 所围成的平面区域

(7). $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2} dxdy, D = \{(x,y) | 0 \le y \le x, x^2+y^2 \le 2x\}$

(8). $\iint\limits_D r^2 \sin\theta \sqrt{1 - r^2\cos 2\theta} dr d\theta, D = \left\{(r,\theta) | 0 \le r \le \sec\theta, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\right\}$

March 21

引理 29.3.1 (估值定理)

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n f(x) dx$$

其中 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导 $\Rightarrow |f(x)| \le M, M$ 是 $|f(x)|$ 在 $[0,1]$ 上的最大值

$$0 \le \int_0^1 x^n f(x) dx \le \int_0^1 M x^n dx = \frac{M}{n+1}$$

夹逼准则:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M}{n+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n f(x) dx = 0$$

$$\begin{cases} \sin x < x \\ \ln(1+x) < x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \sin^n x f(x) dx = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln^n(1+x) f(x) dx = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n x^n f(x) dx$$

其中 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 (n+1)x^n f(x)dx - \int_0^1 x^n f(x)dx \\
&= \int_0^1 f(x)d(x^{n+1}) - \int_0^1 x^n f(x)dx \\
&= f(x)x^{n+1}|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 x^{n+1} f'(x)dx \\
&= f(1) - \int_0^1 x^{n+1} f'(x)dx
\end{aligned}
$$

$$\lim_{n\to+\infty} I = f(1) - \lim_{n\to oo} \int_0^1 x^{n+1} f'(x)dx = f(1)$$

例题 29.41.

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{nx^n}{1+e^x}dx$$

例题 29.42.

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right]$$

29.4 Week IV

March 22

例题 29.43.

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}dx$$

例题 29.44.

$$\int_{\frac{1}{6}}^{+\infty} \frac{1}{x} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \right] dx$$

March 23

例题 29.45.

已知函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin x^2\cos y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 求 $f_x'(0,0),f_y'(0,0)$

例题 29.46.

设 $z=e^{xy}+f(x+y,xy)$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, 其中 $f(u,v)$ 有二阶连续偏导数

March 24

例题 29.47.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^4}\prod_{k=1}^{2n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$$

例题 29.48.

设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$, 求 $dz|_{(0,1)}$

March 25

引理 29.4.1 (特殊反常积分)

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\begin{cases}p>1 & \text{收敛}\\ p\le1 & \text{发散}\end{cases}$$

$$\int_0^1\frac{1}{x^p}dx\begin{cases}0<p<1 & \text{收敛}\\ p\ge1 & \text{发散}\end{cases}$$

$$\int_0^1\frac{\ln x}{x^p}dx\begin{cases}0<p<1 & \text{收敛}\\ p\ge1 & \text{发散}\end{cases}$$

例题 29.49.

反常积分 $\int_0^1 x^a(1-x)^b\ln x dx$ 收敛, 求 a,b 取值范围

例题 29.50.

$$\int\frac{x^2}{(x\cos x-\sin x)(x\sin x+\cos x)}dx$$

March 26

例题 29.51.

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x^2}}{(x^2+\frac{1}{2})^2}dx$$

March 27

例题 29.52.

已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$, 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$

例题 29.53.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x(1+\ln^2 x)}dx$$

March 28

例题 29.54.

$$\int\frac{2x^4}{1+x^6}dx$$

例题 29.55.

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(1-\cos\frac{\alpha}{n})(\alpha>0)$ 敛散性

March 29

例题 29.56.

设 $u_n=(-1)^n\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n^2$ 的敛散性

例题 29.57.

已知 $y^2(x-y)=x^2$, 求 $\int\frac{1}{y^2}dx$

March 30

引理 29.4.2 (对称积分变换)

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_0^a[f(x)+f(-x)]\,dx$$

例题 29.58.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3x}{1+\cos x-\sin x}dx$$

例题 29.59.

已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛, 求 α 取值范围

March 31

例题 29.60.

求级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 的和函数

例题 29.61.

求二重积分 $\iint\limits_D y^2dxdy$ 和 $\iint\limits_D(x+2y)dxdy$, 其中 D 是由参数方程 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $,t\in[0,2\pi]$

第 30 章 April

30.1 Week I

April 1

例题 30.1.

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sin(n+k)\right]$ 敛散性

例题 30.2.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{2(\sec x-1)}-\sqrt[3]{6(x-\sin x)}}{\int_0^{x^2}\arctan(e^{\sqrt{t}}-1)dt}$$

April 2

例题 30.3.

级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}[sin\frac{1}{n}-k\ln(1-\frac{1}{n})]$ 收敛, 求 k 的值

例题 30.4.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^3dx$$

April 3

例题 30.5.

级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|, \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$、$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n a_{n+1}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 敛散性

例题 30.6.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x - \cos x} dx$$

April 4

例题 30.7.

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\cot x}{e^{-2x}} + \frac{1}{e^{-x}\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$$

例题 30.8.

判断下列命题是否正确

(i). $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(u_{2n+1} + u_{2n})$ 收敛, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ 收敛

(ii). $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ 发散

April 5

例题 30.9.

$(1+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$

例题 30.10.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

April 6

例题 30.11.

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

例题 30.12.

$y = x^2$ 与 $y = mx$ 围成的部分绕着 $y = mx(m > 0)$ 旋转一周得到的旋转体体积 V

April 7

例题 30.13.

$f(x)$ 在 $(2, 4)$ 上二阶导数连续,$f(3) = 0$, 求证: $f''(\varepsilon) = 3\int_2^4 f(x)dx$

例题 30.14.

$f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 0$, 其反函数为 $g(x)$, 若 $\int_0^{f(x)} g(t)dt = x^2e^x$, 求 $f(x)$

30.2 Week II

April 8

例题 30.15.

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{2^n}(x+1)^{2n+1}$ 收敛区间

例题 30.16.

证明:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx = \frac{n\pi}{2}$$

April 9

例题 30.17.

方程 $F(cx - az, cy - bz) = 0$ 确立了函数 $z = z(x, y)$, 求 $a\dfrac{\partial z}{\partial x} + b\dfrac{\partial z}{\partial y}$

例题 30.18.

设函数 f, g 均可微, 且 $z = f\left[xy, \ln x + g(xy)\right]$, 求 $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y}$

April 10

例题 30.19.

$f'(x)$ 连续, $|f'(x)| \le M$, $\int_0^1 f(x)dx = 0$, 证明:

$$\forall a \in [0,1], \left|\int_0^a f(x)dx\right| \le \frac{M}{8}$$

例题 30.20.

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x-1)^n$ 的收敛域

April 11

例题 30.21.

设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 和 $\frac{1}{3}$, 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2}{b_n^2} x^n$ 收敛半径

例题 30.22.

$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, 计算 $f''_{xy}(0,0)$ 和 $f''_{yx}(0,0)$

April 12

例题 30.23.

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $f(0) = f(1) = 0, \min\limits_{x\in[0,1]}\{f(x)\} = -1$, 证明:

$$\exists \varepsilon \in (0,1),\ s.t.\ f''(\varepsilon) \ge 8$$

例题 30.24.

设 m, n 均是正整数, 证明: $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 收敛性与 m, n 无关

April 13

例题 30.25.

设数列 a_n 单调减少, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0, S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k (n = 1, 2\ldots)$ 无界, 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x-1)^n$ 收敛域

例题 30.26.

判断函数 $f(x,y) = \begin{cases} y\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq 0 \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处是否连续, 是否可微, 一阶偏导数是否连续

April 14

例题 30.27.

将 $f(x) = \dfrac{5x-12}{x^2+5x-6}$ 展开为 x 的幂级数

例题 30.28.

证明: $f_x'(x,y)$ 和 $f_y'(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续, $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微

30.3 Week III

April 15

例题 30.29.

将函数 $f(x) = \ln(1-x-2x^2)$ 展开为 x 的幂级数, 并指出其收敛区间

例题 30.30.

设 $f(x), g(x)$ 在 $x\in[0,1]$ 上的导数连续, 且 $f(0) = 0, f'(x)\geq 0, g'(x)\geq 0$, 证明:

$$\forall a\in[0,1], \int_0^a g(x)f'(x)dx + \int_0^1 f(x)g'(x)dx \geq f(a)g(1)$$

April 16

例题 30.31.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调递减, 证明:

$$\forall \lambda \in (0,1), \int_0^\lambda f(x)dx > \lambda \int_0^1 f(x)dx$$

例题 30.32.

$z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2), \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, f(1)=0, f'(1)=1$, 求 $f(x)$ 表达式

April 17

例题 30.33.

将 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数

例题 30.34.

微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 通解

April 18

例题 30.35.

方程 $x^3+y^3=3axy(a>0)$ 确定隐函数 $y=y(x)$, 求 $y=y(x)$ 的斜渐近线

例题 30.36.

已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$, 当 $\Delta x\to 0, \alpha$ 是 Δx 的高阶无穷小, $y(0)=\pi$, 求 $y(1)$

April 19

例题 30.37.

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2n+1)x^n$ 收敛域, 并求其和函数

例题 30.38.

微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\frac{1}{2}(\frac{y}{x})^3$, 满足 $y|_{x=1}=1$ 的特解

April 20

例题 30.39.

求微分方程 $(x+y)dx+(y-x)dy=0$ 满足 $y(1)=-1$ 的特解

例题 30.40.

$f(x,y)$ 连续, 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-xy}{x^2+y^2}=1$, 判断 $f(0,0)$ 是极大值还是极小值

April 21

例题 30.41.

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{2n+1}-1)x^{2n}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)$

例题 30.42.

求微分方程 $(y+x^3)dx-2xdy=0$ 满足 $y|_{x=1}=\frac{6}{5}$ 的特解

30.4 Week IV

April 22

例题 30.43.

求微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 的特解

例题 30.44.

$f(x,y)=x^4+2y^2-3x^2y$ 判断 $f(0,0)$ 处极值情况

April 23

例题 30.45.

$$\int_0^{+\infty}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^x e^{-t^2}dt\right]dx$$

例题 30.46.

设 $F(x) = f(x)g(x)$, 其中函数 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足以下条件: $f'(x) = g(x), g'(x) = f'(x)$, 且 $f(0) = 0, f(x) + g(x) = 2e^x$

(i). 求 $F(x)$ 满足的一阶微分方程

(ii). 求 $F(x)$ 表达式

April 24

例题 30.47.

求级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$

例题 30.48.

已知 $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}(x \geq 0), g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$, 求 $f(g(x))$

April 25

例题 30.49.

已知 $y_1 = (1+x^2)^2 - \sqrt{1+x^2}, y_2 = (1+x^2)^2 + \sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个解, 求 $q(x)$

例题 30.50.

设 $z = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数,$f_y' \neq 0$, 证明: 对任意的常数 k, 曲线 $f(x, y) = k$ 是直线的充分必要条件为

$$(f_y')^2 f_{xx}'' - 2f_x'f_y'f_{xy}'' + (f_x')^2 f_{yy}'' = 0$$

April 26

例题 30.51.

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$ 敛散性

例题 30.52.

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^{\alpha}}$ 敛散性

April 27

例题 30.53.

设连续函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加, 下列说法正确的是:

- A. $\tan f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加
- B. $f'(x)>0, x\in(-\infty,+\infty)$
- C. $\int_{-1}^{x} \dfrac{f(t)}{1+f^2(t)}dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加
- D. $\int_{-1}^{e^x} \dfrac{1}{1+f^2(t)}dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加

例题 30.54.

下列微分方程是以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x, (C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R})$ 为通解的微分方程为:

- A. $y'''+y''-4y'-4y=0$
- B. $y'''+y''+4y'+4y=0$
- C. $y'''-y''-4y'+4y=0$
- D. $y'''-y''+4y'-4y=0$

April 28

例题 30.55.

设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 连续可导, 证明:

$$\int_0^a dx\int_0^x \frac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dy=\pi[f(a)-f(0)]$$

例题 30.56.

$f(x)$ 连续且为奇函数, 下列函数一定是偶函数的是:

- A. $\int_0^x du\int_a^u tf(t)dt$
- B. $\int_a^x du\int_0^u f(t)dt$
- C. $\int_0^x du\int_a^u f(t)dt$
- D. $\int_a^x du\int_0^u tf(t)dt$

April 29

例题 30.57.

证明: $\int_0^1 dx \int_0^1 (xy)^{xy} dy = \int_0^1 x^x dx$

例题 30.58.

微分方程 $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(1 + \cos 2x)$ 的特解可以设为哪种形式:

- A. $Ae^{2x} + e^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$
- B. $Axe^{2x} + e^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$
- C. $Ae^{2x} + xe^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$
- D. $Axe^{2x} + xe^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$

April 30

例题 30.59.

$f(x)$ 连续且为偶函数, 下列函数一定是偶函数的是:

- A. $\int_0^x (x - t^2) f(t) dt$
- B. $\int_a^x f(x - t) dt$
- C. $\int_0^x (x - 2t) f(t) dt$
- D. $\int_a^x (x - 2t) f(t) dt$

例题 30.60.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\int_1^x t^{-5} dt}{\int_1^x t^{-3} dt}$$

第 31 章 May

31.1 Week I

May 1

例题 31.1.

求二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$ 的通解

例题 31.2.

求微分方程 $y'' - 2y' - e^{2x} = 0$ 满足条件 $y(0) = 1, y'(0) = 1$ 的解

May 2

例题 31.3.

设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 连续,$f(x) > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{x}}$, 求 $f(x)$

例题 31.4.

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{4^n}{5^n - 3^n}$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^3 - 1}}$ 敛散性

May 3

例题 31.5.

设函数 $f(x)$ 连续, 且对于任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$, 恒有 $f(x+1) = -f(x)$, 下面结论不正确的是:

- A. $f(x)$ 是以 2 为周期的函数
- B. $\int_0^x [f(t) - f(-t)]dt$ 是以 2 为周期的函数
- C. $\int_0^x f(t)dt - \frac{x}{2}\int_0^2 f(t)dt$ 是以 2 为周期的函数
- D. $f'(x)$ 是以 2 为周期的函数

例题 31.6.

求微分方程 $y'' + y = 4\sin x$ 的通解

May 4

例题 31.7.

求微分方程 $y'' + y = \sin x + x\cos 2x$ 的通解

例题 31.8.

$$\lim_{x\to 0}\int_0^{2x} du \int_0^{\sqrt{2ux-u^2}} \frac{cos(t-u)^2}{\ln(1+x|x|)}dt$$

May 5

例题 31.9.

下列函数中原函数必为周期函数的是:

- A. $|\sin x|$
- B. $\sin^4 x$
- C. $\dfrac{1}{1+\sin^2 x}$
- D. $\dfrac{\sin x}{1+\sin^4 x}$

例题 31.10.

设 $y = \frac{1}{2}e^{2x} + (x - \frac{1}{3})e^x$ 是二阶常系数线性微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个特解, 求 a, b, c

- A. $a = -3, b = 2, c = -1$
- B. $a = 3, b = 2, c = -1$

- C. $a=-3, b=2, c=1$
- D. $a=3, b=2, c=1$

May 6

例题 31.11.

设 $F(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin x-a\cos x\right|dx$, 求 $F(a)$ 的最小值

例题 31.12.

设 $f(x)$ 连续且以 T 为周期, 则下列函数以 T 为周期的是:

- A. $\int_0^x f(t)dt$
- B. $\int_{-x}^0 f(t)dt$
- C. $\int_0^x f(t)dt-\int_{-x}^0 f(t)dt$
- D. $\int_0^x f(t)dt+\int_{-x}^0 f(t)dt$

May 7

例题 31.13.

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^3)}$$

例题 31.14.

设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+2\int_0^x f(t)dt=x^2$, 求 $f(x)$

31.2 Week II

May 8

例题 31.15.

设连续函数 $f(x)$ 满足 $x\int_0^1 f(tx)dt=f(x)+x$, 求 $f(x)$

例题 31.16.

求抛物线 $y=x^2$ 和直线 $x-y-2=0$ 之间的最短距离

May 9

例题 31.17.

设 $f(x)$ 二阶可导, $f(-x)=-f(x), f(x+1)=f(x), x\in(-\infty,+\infty)$, 且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\sin(x-1)}=1$

- A. $f''(99)\le f'(100)\le f(101)$
- B. $f(99)=f(100)<f'(101)$
- C. $f'(99)\le f(100)<f''(101)$
- D. $f(99)<f'(100)=f''(100)$

例题 31.18.

设连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x(x-t)f(t)dt+e^{-x}-1$, 求 $f(x)$

May 10

例题 31.19.

设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)dt$, 求 $f(x)$

例题 31.20.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$$

May 11

例题 31.21.

设 $f(x)$ 是连续的正值函数, 且单调减少, 证明:

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx}\le\frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}$$

例题 31.22.

$$\iint\limits_D\frac{1}{\arcsin\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1, x^2+y^2\ge y, x\ge 0, y\ge 0\}$

May 12

例题 31.23.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 在 $(0,1)$ 内可导, $\int_0^1 f(x)dx=1$, 证明:

$$\exists \xi \neq \eta \in (0,1),\ s.t.\ f(\xi)+3f(\eta)=4f(\xi)f(\eta)$$

例题 31.24.

函数 $\dfrac{|x|e^{\frac{1}{x-1}}\ln(x-1)^2}{x(x-1)(x-2)}$ 在下列哪个区间内无界:

- A. $(-\infty,0)$
- B. $(0,1)$
- C. $(1,2)$
- D. $(2,+\infty)$

May 13

例题 31.25.

求 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \dfrac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$ 和 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to1}} \left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{\frac{y^2}{\sin\frac{2}{x}}}$

例题 31.26.

$$\int_0^\pi \left(e^{-\cos x}-e^{\cos x}\right)dx$$

May 14

例题 31.27.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\arctan e^x)\sin^2 x dx$$

例题 31.28.

设 $f(x)=\int_0^x f(x-t)\sin t dt+x$, 求 $f(x)$

31.3 Week III

May 15

例题 31.29.

下列函数在区间 (0, 1) 内无界的是:

- A. $\int_0^x \frac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}dt$
- B. $\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$
- C. $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1-t)^3}}dt$
- D. $\int_0^x \frac{1}{(t-1)^2}\sin\frac{1}{t-1}dt$

例题 31.30.

$$\iint\limits_D \frac{x^3 \sin y \cos y e^{\sqrt{x^2+2}}}{\sqrt{x^2\cos^2 y+2\sqrt{x^2+2}}}dxdy$$

,其中 $D=\{(x,y)|\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le \frac{\pi}{2}\}$

May 16

例题 31.31.

已知函数 $f(x)=\frac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{x^\alpha}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界, 求 α 取值范围:

- A. $(0,+\infty)$
- B. $(0,3]$
- C. $(0,2)$
- D. $(1,3]$

例题 31.32.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos(\frac{\pi}{4}-x)\cos x}dx$$

May 17

例题 31.33.

$$\iint\limits_D \frac{1}{xy}dxdy, D=\{(r,\theta)|\frac{\cos\theta}{4}\le r\le\frac{\cos\theta}{2}, \frac{\sin\theta}{4}\le r\le\frac{\sin\theta}{2}\}$$

例题 31.34.

当 n 充分大时, $a-\dfrac{1}{n}<a_n<a+\dfrac{1}{n}$ 是数列 a_n 收敛于 a 的什么条件:

- A. 充分必要条件
- B. 必要条件但非充分条件
- C. 充分条件但非必要条件
- D. 既非充分也非必要条件

May 18

例题 31.35.

$$\iint\limits_D \left|x^2+y^2-\sqrt{2}(x+y)\right| dxdy, D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 4\}$$

例题 31.36.

设 $f(x)$ 可积, 则下列结论正确的是:

- A. 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=0$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=A$, 则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=A$
- B. 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=0$, 且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=A$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=A$
- C. 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)=A$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$
- D. 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n \dfrac{|f(t)|}{1+t^2}dt=A$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x \dfrac{|f(t)|}{1+t^2}dt=A$

May 19

例题 31.37.

设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1, g(x,y)=f\left(xy,\frac{1}{2}(x^2-y^2)\right)$, 求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$

例题 31.38.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\sin x\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx$$

May 20

例题 31.39.

$$\iint_D \frac{1}{3x^2+y^2}dxdy$$

D 是由 $\begin{cases} x^2+y^2-xy=1 \\ x^2+y^2-xy=2 \end{cases}$ 和直线 $\begin{cases} y=\sqrt{3}x \\ y=0 \end{cases}$ 围成

例题 31.40.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $\forall x,y\in\mathbb{R}, |f(x)-f(y)|\le M|x-y|$, 求证:

$$\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})\right|\le\frac{M}{2n}$$

May 21

例题 31.41.

已知数列 $\{x_n\}$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{x_{n+1}}=\int_0^1 e^{-x^2}dx$

- A. $\lim\limits_{n\to+\infty}=0$
- B. $\lim\limits_{n\to+\infty}=\infty$
- C. $\lim\limits_{n\to+\infty}=a(a\neq 0)$
- D. $\lim\limits_{n\to+\infty}$ 不存在但不是 ∞

例题 31.42.

设 $f(x,y)$ 二阶偏导数连续, $f(1,y)=f(x,1)=0$, $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=a$, 其中 $D\in[0,1]\times[0,1]$, 求 $\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)d\sigma$

31.4 Week IV

May 22

例题 31.43.

设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx(n=0,1,2,\cdots)$

(1). 证明: 数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2},(n=2,3,\cdots)$

(2). 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$

注

(1). 我们可以得到:

$$a_{n+1}-a_n=\int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x^2}dx-\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^1 (x-1)x^n\sqrt{1-x^2}dx<0$$

我们可以得到数列 $\{a_n\}$ 单调递减.
我们还有:

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx\\
&= -\frac{1}{3}\int_0^1 x^{n-1}d(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\\
&= \frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}(1-x^2)dx\\
&= \frac{n-1}{3}a_{n-2}-\frac{n-1}{3}a_n\\
a_n &= \frac{n-1}{n+2}a_{n-2}
\end{aligned}$$

(2). 我们由 (1) 知道,$\{a_n\}$ 单调递减且 $a_n>0$, 我们得到:

$$\begin{cases} a_n<a_{n-1}\\ a_{n-1}<a_{n-2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}<1\\ \dfrac{a_n}{a_{n-2}}<\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\end{cases}$$

我们由夹逼定理可以得到:

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-2}}=1\\ \lim\limits_{n\to+\infty}1=1\end{cases}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=1$$

综上所述, 我们得到: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=1$

例题 31.44.

$xy'-(2x^2+1)y=x^2(x\geq 1)$, 且 $y(1)=a$, 讨论 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)$

May 23

例题 31.45.

已知当 n 充分大时, $|a_n| \le |b_n| \le |c_n|$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} |c_n|$

- A. $\lim\limits_{n\to\infty} (|a_n| - b_n)$
- B. $\lim\limits_{n\to\infty} (|b_n| - c_n)$
- C. $\lim\limits_{n\to\infty} (|b_n| - c_n)$
- D. $\lim\limits_{n\to\infty} (|b_n| - a_n)$

例题 31.46.

$$\lim_{n\to+\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+3n})$$

May 24

例题 31.47.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\left[\frac{1}{n+\ln 1} + \frac{2}{n+\ln 2} + \cdots + \frac{n}{n+\ln n}\right]$$

引理 31.4.1 (斯特林公式)

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$$

注

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} &= \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{n}(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n})} \\
&= e^{-\int_0^1 \ln x dx} \\
&= e
\end{aligned}$$

例题 31.48.

$f(x) > 0, f(x)f''(x) \ge [f'(x)]^2, f(0) = 1$, 证明: $f(x) \ge e^{f'(0)x}$

May 25

例题 31.49.

设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)=f(b)=0$, 证明: $|f(x)| \leq \frac{1}{2}\int_a^b |f'(x)|dx$

例题 31.50.

$$\iint_D \ln|sin(x-y)|dxdy, D=\{(x,y)|0\leq x\leq y\leq 2\pi\}$$

May 26

例题 31.51.

设 $x_n=(1+\dfrac{1}{n^2})(1+\dfrac{2}{n^2})\cdots(1+\dfrac{n}{n^2})$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

例题 31.52.

若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数, 且满足 $\varphi(2) > \varphi(1), \varphi(2) > \int_2^3 \varphi(x)dx$, 证明: $\exists\xi \in (1,3)$, $s.t.\ \varphi''(x)<0$

May 27

例题 31.53.

设 $x_0=0, x_n=\dfrac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

例题 31.54.

$$\lim_{n\to+\infty}\int_n^{n+1} x^2\sin\frac{1}{x}dx$$

May 28

例题 31.55.

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n+1}{\sqrt{n^5-n+2}}$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$ 敛散性

例题 31.56.

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x)dx=A$, 求 $\int_0^1 dx\int_x^1 dy\int_x^y f(x)f(y)f(z)dz$

May 29

例题 31.57.

判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2+(-1)^n}{n^2}$ 敛散性

例题 31.58.

$$\iint_D \left|\frac{x+y}{2}-x^2-y^2\right|dxdy, D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$$

May 30

例题 31.59.

设 $f(x,y)$ 在区域 $0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1$ 上连续, $f(0,0)=0$, 且 $f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, $f_y'(0,0)=1$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}dt\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)du}{1-e^{-\frac{x^4}{4}}}$$

例题 31.60.

设 $f(x)=1-\cos x$, 求 $\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{\cos x})(1-\sqrt[3]{\cos x})(1-\sqrt[4]{\cos x})(1-\sqrt[5]{\cos x})}{f\{f[f(x)]\}}$

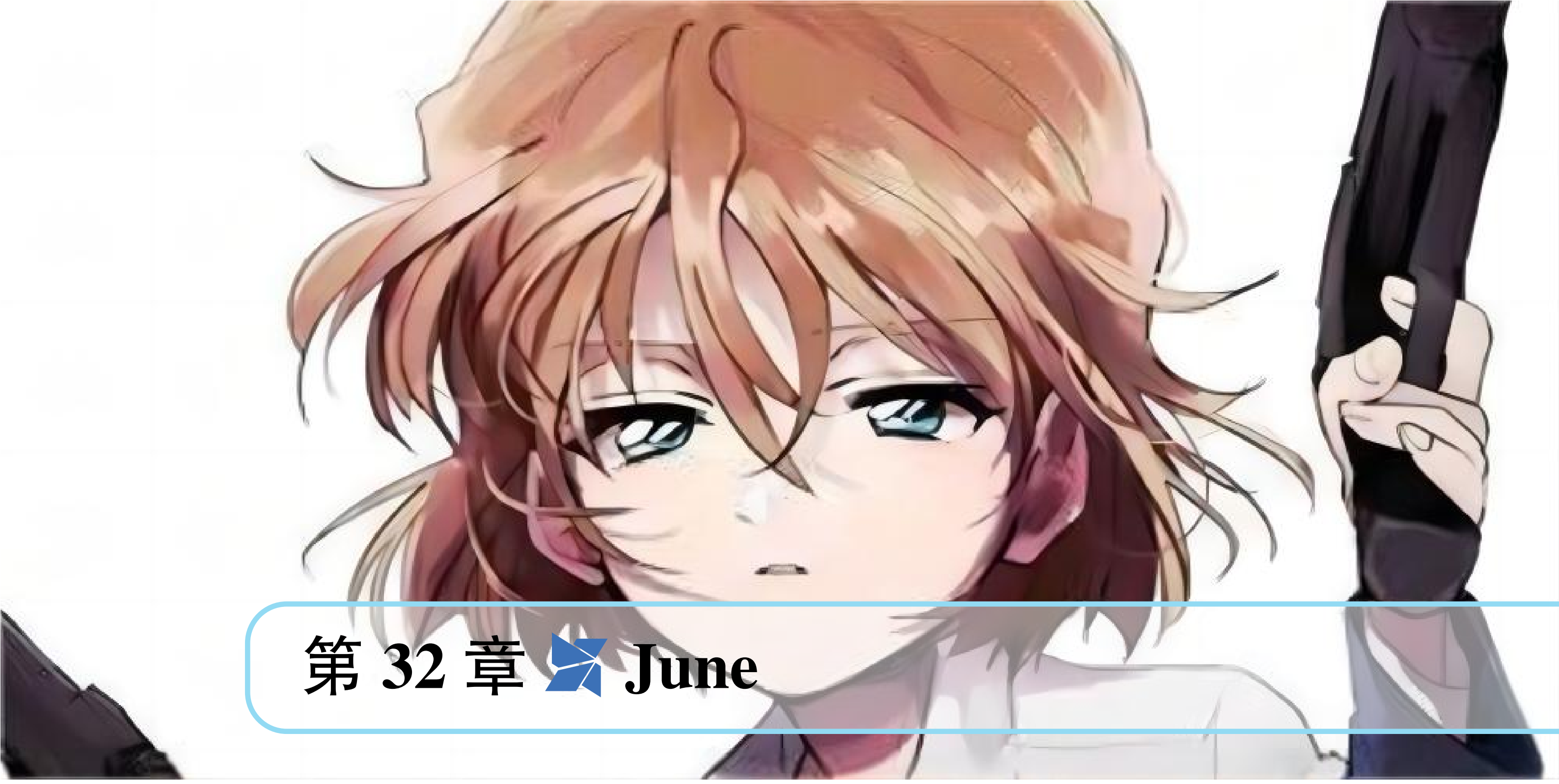
May 31

例题 31.61.

$z(x,y)=\int_0^x dt\int_t^x f(t+y)g(yu)du$, f 和 g' 连续, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

例题 31.62.

$F(x)=\int_0^x e^{tx-t^2}dt$, 求 $F'(x)$



第 32 章 June

32.1 Week I

June 1

例题 32.1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin x)-x}{\arctan x-\arcsin x}$$

例题 32.2.

设 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足 $x_1=y_1=\frac{1}{2}, x_{n+1}=\sin x_n, y_{n+1}=y_n^2$, 判断 x_n 和 y_n 的阶数

- A.$\{x_n\}$ 比 $\{y_n\}$ 高阶
- B.$\{y_n\}$ 比 $\{x_n\}$ 高阶
- C.$\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 等价
- D.$\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 同阶不等价

June 2

例题 32.3.

$f(x)$ 可微, 且 $x=\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t-x)dt$, 求 $f(x)$

June 3

例题 32.4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1-\sqrt[3]{1-\sqrt{1-x}}}-1}{(1+x)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}-1}$$

例题 32.5.

$y''+ay'=f(x)(a>0), f(+\infty)=b$, 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}y''(x)$

June 4

例题 32.6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3+\sin x^2)^x-3^{\sin x}}{x^3}$$

例题 32.7.

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n(n+1)x^n$ 和函数

June 5

例题 32.8.

设 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 连续可导, $f'(x)\geq 0$, 证明:

$$\left|\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx dx\right|\leq\frac{2}{n}[f(2\pi)-f(0)]$$

例题 32.9.

证明: $\left|\int_x^{x+1}\sin t^2 dt\right|\leq\frac{1}{x}(x>0)$

June 6

例题 32.10.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}$$

例题 32.11.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

June 7

例题 32.12.

设函数 $u = f(x, y, x)$ 有连续偏导数, 且 $z = z(x, y)$ 由方程 $xe^x - ye^y = ze^z$ 所确定, 求 du

例题 32.13.

设 $u = f(x, y, z), \varphi(x, y, z) = 0, y = \sin x$ 确定了函数 $u(x)$, 其中 f, φ 具有一阶偏导数, 且 $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$, 求 $\frac{du}{dx}$

32.2 Week II

June 8

例题 32.14.

$$\lim_{t \to 0^+} \lim_{x \to +\infty} \frac{\int_0^{\sqrt{t}} dx \int_{x^2}^{t} \sin y^2 dy}{\left[\left(\frac{2}{\pi} \arctan \frac{x}{t^2}\right)^x - 1\right] \int_0^t (e^{\sqrt{u}} - 1) du}$$

例题 32.15.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2[1 - \ln(e^x + \sin x)]}{x}$$

June 9

例题 32.16.

$f(x)$ 二阶可导, $f(a) = f'(a) = f''(a) = f(b) = 0$, 证明:

$$\exists \xi \in (a, b), \ s.t. \ (\xi - a)^2 f''(\xi) - 2f(\xi) = 0$$

例题 32.17.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$$

June 10

例题 32.18.

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数, $f(0)=f(2)=0$, $M=\max\limits_{x\in[0,2]}\{|f(x)|\}$, 证明:

(1). $\exists\xi\in(0,2),\ s.t.\ |f'(\xi)|\geq M$

(2). $\forall x\in(0,2), |f'(x)|\leq M\to M=0$

例题 32.19.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x^2}{2}-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$$

June 11

例题 32.20.

证明方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1(n\geq 2)$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 内有且仅有一个实数根, 记作 x_n, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$

例题 32.21.

方程 $\cos x+\cos^2 x+\cdots+\cos^n x=1(n\geq 2)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{3})$ 的根 x_n, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$

June 12

例题 32.22.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x^2-2(1-\cos x)\sin x}{x^5}$$

例题 32.23.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(2\sqrt[n]{n}-1)^n}{n^2}$$

June 13

例题 32.24.

设 $f'(0)=0, f''(0)$ 存在, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f[\ln(1+x)]}{x^3}$

例题 32.25.

求椭圆 $x^2+2xy+3y^2-8y=0$ 与直线 $x+y=8$ 的最短距离

June 14

例题 32.26.

证明 $\tan x=x$ 在区间 $(n\pi, n\pi+\dfrac{\pi}{2})$ 内存在实根 x_n, 并求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)$

例题 32.27.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\arctan\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{b}\arctan\sqrt{\frac{x}{b}}\right)$$

32.3 Week III

June 15

例题 32.28.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\left|\arcsin(\sin t)\right|dt}{x}$$

引理 32.3.1 (周期函数积分性质)

$f(x)=\int_0^x|\sin t|dt$

(i). 设 n 为正整数, 当 $n\pi\le x\le(n+1)\pi$, 证明: $2n\le f(x)\le 2(n+1)$

(ii). 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x|\sin t|dt}{x}$

定理 32.3.1 (周期函数性质)

$f(x)$ 是周期函数, 我们有:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\frac{\int_0^T f(x)dx}{T}$$

例题 32.29.

设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\int_0^x f(x-t)dt}{\int_0^x tf(t-x)dt}$

June 16

例题 32.30.

$$f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$$

(i). 证明: $\exists \xi \in (1,2),\ s.t. f(\xi) = (2-\xi)e^{\xi^2}$
(ii). 证明: $\exists \eta \in (1,2),\ s.t. f(2) = e^{\eta^2}\eta \ln 2$

例题 32.31.

设函数 $f(x)$ 连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 2$, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x e^{xt}\arctan(x-t)^2 dt}{\int_0^x tf(x-t)dt}$

June 17

例题 32.32.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导, $f(0)=0, f(1)=1$, 证明:

$$\exists \xi \in (0,1),\ s.t. \xi f''(\xi) + (1+\xi)f'(\xi) = 1+\xi$$

例题 32.33.

已知微分方程 $y' + y = f(x)$, 其中 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数, 证明: 该微分方程存在唯一的以 T 为周期的解

June 18

例题 32.34.

$f(x)$ 一阶连续可导, 且 $f(0)=0, f'(0)\neq 0$, 求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{x^2} f(t)dt}{x^2\int_0^x f(t)dt}$

例题 32.35.

设 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$, $f'(0)=2$, 求 $f(x)$

June 19

例题 32.36.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x[\int_u^x u^2\arctan(1+tu)dt]du}{(\int_0^x\ln(1+t)dt)^2}$$

例题 32.37.

设 $f'(x)$ 在 $[0,2]$ 连续, 证明: $\left|f(2)\right|\le\dfrac{1}{2}\left|\int_0^2 f(x)dx\right|+\int_0^2\left|f'(x)\right|dx$

June 20

例题 32.38.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明: $\max\limits_{0\le x\le1}\{|f(x)|\}\le\int_0^1[|f(x)|+|f'(x)|]$

例题 32.39.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t\left|\sin t\right|dt}{x^2}$$

June 21

例题 32.40.

已知 $|A|=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\\2^2&3^2&4^2&5^2\\2^3&3^3&4^3&5^3\end{vmatrix}$, 求 $\sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=1}^{4}A_{ij}$

例题 32.41.

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x}\int_x^{x^2}(1+\frac{1}{2t})^t\sin\frac{1}{\sqrt{t}}dt$$

32.4 Week IV

June 22

例题 32.42.

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & a+b & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & a+b & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a+b \end{vmatrix}$$

例题 32.43.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{x^2}$$

June 23

例题 32.44.

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2} dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right)$$

例题 32.45.

$$A = \begin{pmatrix} a^n & (a+1)^n & \cdots & (a+n)^n \\ a^{n-1} & (a+1)^{n-1} & \cdots & (a+n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a+1 & \cdots & a+n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

求伴随矩阵 A^* 的所有元素之和

June 24

例题 32.46.

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)+\int_0^x t(1+t)^{\frac{1}{t}}dt}\right]$$

例题 32.47.

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+j^2}$$

June 25

例题 32.48.

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}$$

例题 32.49.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x^3-x^2+\frac{x}{2}+1)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+x^2+x+1}\right]$$

June 26

例题 32.50.

求 $\sum\limits_{n=1}^{100}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 的整数部分

例题 32.51.

设 $f(x)$ 是满足 $\int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t-x)f(t)dt=\cos^4 x$ 的连续函数, 求 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的平均值

June 27

例题 32.52.

$$|A|=\begin{vmatrix} a+x_1 & a+x_1^2 & \cdots & a+x_1^n \\ a+x_2 & a+x_2^2 & \cdots & a+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+x_n & a+x_n^2 & \cdots & a+x_n^n \end{vmatrix}(a\neq 0)$$

范德蒙行列式应用

求行列式:

$$|A|=\begin{vmatrix} a+x_1 & a+x_2 & \cdots & a+x_n \\ a^2+x_1^2 & a^2+x_2^2 & \cdots & a^2+x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n+x_1^n & a^n+x_2^n & \cdots & a^n+x_n^n \end{vmatrix}(a\neq 0)$$

例题 32.53.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left[\ln(1+\sin^2 x)-6(\sqrt[3]{2-\cos x}-1)\right]$$

June 28

例题 32.54.

$$\int_0^1 x\arcsin 2\sqrt{x-x^2}dx$$

例题 32.55.

设 $a_n\geq 0$, 且 $\{na_n\}$ 有界, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ 收敛

June 29

例题 32.56.

A 是三阶矩阵, $\forall i,j\in\{1,2,3\}, a_{ij}=A_{ij}, a_{33}=1$, 证明: A 是正交矩阵

例题 32.57.

证明: $e^{\int_0^1 f(x)dx} \le \int_0^1 e^{f(x)}dx$

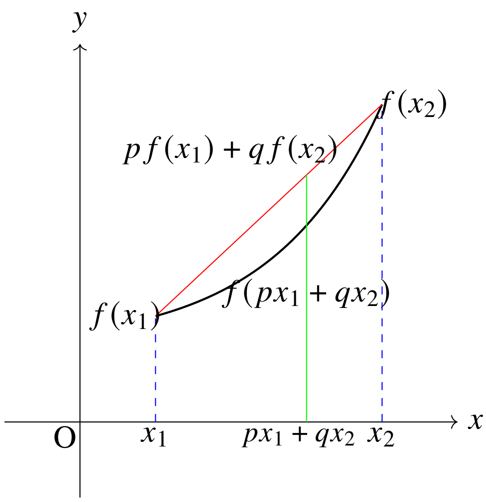


图 32.1: 凹函数性质

June 30

例题 32.58.

$$\lim_{x\to 0}\int_0^x \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^{\frac{1}{\int_0^t \ln(1+u)du}} \cot x dt$$

例题 32.59.

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 xf(x)dx = 1$, $\int_0^1 f(x)dx = 0$, 证明:

$$\exists \xi \in (0,1),\ s.t. \left|f(\xi)\right| \ge 4$$

第六部分

每日一题 II

第 6 部分目录

第 33 章 July

33.1 Week I

July 1

例题 33.1.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}\right]^{x^2\ln x}$$

例题 33.2.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 导函数连续, 且 $\int_0^1 x^2 f'(x)dx=1$, 证明:

(1). $\exists\xi\in(0,1),\ s.t. f'(\xi)=3$

(2). $f(1)=\int_0^1 f(x)dx=0\rightarrow\exists\eta\in(0,1),\ s.t.\ f'(\eta)=-\dfrac{6}{7}$

July 2

例题 33.3.

设 $f(x)$ 连续, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$

$$\lim_{x\to0}\left[1+\int_0^x tf(x^2-t^2)dt\right]^{\frac{1}{(\tan x-x)\ln(1+x)}}$$

例题 33.4.

设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的周期为 1 的周期函数且满足 $0 \le f(x) \le 1$, $\int_0^1 f(x)dx = 1$, 证明:

$$x \in [0,13], \int_0^{\sqrt{x}} f(t)dt + \int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)dt + \int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)dt \le 11$$

July 3

例题 33.5.

设 $D = \{(x,y)|0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\}$, $f(x,y)$ 在 D 上连续, $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = 0$, $\iint\limits_D xyf(x,y)dxdy = 1$, 证明:

$$\exists(\xi,\eta) \in D,\ s.t.\ \left|f'(\xi,\eta)\right| \ge \frac{2}{4\ln 2 + 3}$$

1.

例题 33.6.

$$\lim_{x\to+\infty} (x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}}$$

July 4

例题 33.7.

已知 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{\pi^2}{6}$

(1). 证明: $a_{2n} = \frac{1}{4}a_n + b_n (n = 1, 2, \cdots)$

(2). $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{3}{4}\right)$

注

- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$
- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{24}$

例题 33.8.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(xe^x)-e^{-\frac{x^2}{2}e^{2x}}}{x^\alpha}=\beta\neq 0, \text{求 } \alpha,\beta$$

July 5

例题 33.9.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}dx(a>0)$$

$\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 积分技巧

- 倒代换
- 分割为 $\int_0^1 f(x)+\int_1^{+\infty} f(x)dx$
- 利用正切三角换元法

例题 33.10.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^\alpha}=\beta\neq 0, \text{求 } \alpha,\beta$$

July 6

例题 33.11.

设 $f(x)=\dfrac{1}{1+3x+9x^2}$, 求 $f^{(100)}(0)$

例题 33.12.

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-e^{x^2-2x}}{x^2}=2, \text{求 } a,b$$

July 7

例题 33.13.

$$\lim_{x\to 0}\frac{n!x^n-\sin x\sin 2x\cdots\sin nx}{x^{n+2}}$$

例题 33.14.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})+ax^2+bx^3}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^2, \text{求 } a,b$$

注

$x\to 0,\ x\sim\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

我们可以得到:

$$[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^3+\cdots$$

我们可以得到: $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的泰勒展开式:

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

33.2 Week II

July 8

例题 33.15.

设 n 阶矩阵 A,B 满足 $AB+aA+bB+cE=O$, 其中 $ab\neq c$, 证明:

(1). $A+bE$ 与 $B+aE$ 均为可逆矩阵

(2). $AB=BA$

1.

例题 33.16.

已知常数 $a>0, bc\neq 0$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[x^a\ln(1+\frac{x}{b})-x]=c$, 求 a,b,c

July 9

例题 33.17.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{6n}}\frac{\sin y}{y}dy+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{3}{6n}}\frac{\sin y}{y}dy+\cdots+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{(2n-1)}{6n}}\frac{\sin y}{y}dy\right]$$

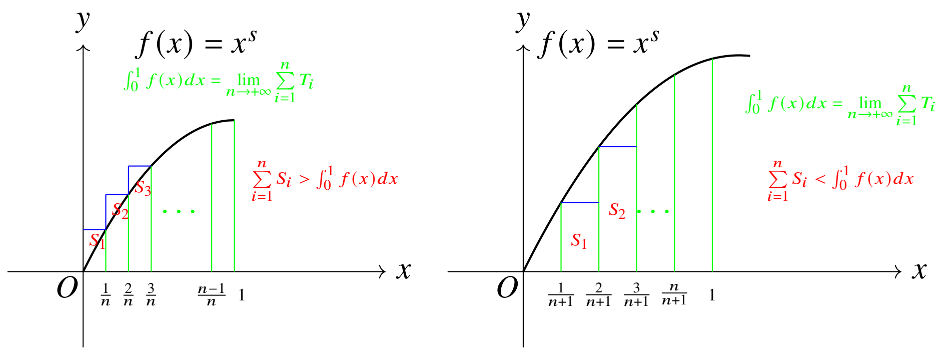
例题 33.18.

设 A 为 n 阶反对称矩阵, 证明: 对于任意向量 x, 均有 $x^T(A+E)x \geq 0$

July 10

例题 33.19.

$$\frac{n^{s+1}}{s+1} < 1^s + 2^s + \cdots + n^s < \frac{(n+1)^{s+1}}{s+1}(s>0)$$



(a) 定积分定义示意图 α (b) 定积分定义示意图 β

图 33.1: 积分和求和关系图

例题 33.20.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^{p+1}+2^{p+1}+\cdots+n^{p+1}}{n(1^p+2^p+\cdots+n^p)}(p>0)$$

July 11

例题 33.21.

已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求 A^{99}

例题 33.22.

设 3 阶实对称矩阵 A 特征值为 $\lambda_1=-1, \lambda_2=\lambda_3=1, \lambda_1$ 的特征向量为 $\xi_1=[0,1,1]^T$, 求 A

July 12

例题 33.23.

设 A 是任意的 $m \times n$ 矩阵, 证明: 方程组 $A^T Ax = A^T b$ 一定有解

例题 33.24.

设 A 为 3 阶实对称矩阵, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha = (1,0,1)^T$ 是矩阵 A 特征值 3 的一个特征向量, 若 $r(3E - A) > 1$, 且 $A^2 - 4E + 3E = 0$, 下列选项错误的是:

- A. 矩阵 A 必可相似对角化
- B. 矩阵 B 不可以相似对角化
- C. 矩阵方程 $AX - XB = 0$ 有可逆解
- D. $r(3E - A) = 2$

July 13

例题 33.25.

求 $f(x) = \sqrt{4x^2 + x}\ln(2 + \dfrac{1}{x})$ 的斜渐近线

例题 33.26.

当 $x \to 0$ 时, 下列无穷小量最高阶的是:

- A. $(1+x)^{x^2} - 1$
- B. $e^{x^4 - 2x} - 1$
- C. $\int_0^{x^2} \sin t^2 dt$
- D. $\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}$

July 14

例题 33.27.

求曲线 $y = \sqrt{x^4 - 3x^3 + 4}$ 在 $x \to +\infty$ 方向的渐进二次曲线

例题 33.28.

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 个 n 维列向量, 证明: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关的充要条件为:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{vmatrix} \neq 0$$

33.3 Week III

July 15

例题 33.29.

当 $x\to 0^+$ 时, 下列无穷小量中最高阶的是:

- A. $\int_0^{1-\cos x}\frac{\sin t}{t}dt$
- B. $\int_0^x t\tan\sqrt{x^2-t^2}dt$
- C. $\int_{\sin x}^{1-\sqrt{\cos x}} e^{xt}\ln(1+t^3)dt$
- D. $\int_{\sin x}^x \sqrt{\sin^3 t}dt$

例题 33.30.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)}$$

定理 33.3.1 (常用泰勒级数)

- $$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!},\ x\in\mathbb{R}$$

- 欧拉公式: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1+i\theta+\frac{(i\theta)^2}{2!}+\frac{(i\theta)^3}{3!}+\cdots+\frac{(i\theta)^n}{n!}+\cdots \\ &= [1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^k\theta^{2k}}{2k}+\cdots]+i[\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^k\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\theta^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

- $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\ x \in \mathbb{R}$$
- $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x \in \mathbb{R}$$
- $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,\ x \in (-1, 1)$$
- $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n,\ x \in (-1, 1)$$
- $$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+x} dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1},\ x \in (-1, 1]$$
- $$\ln(1-x) = -\int_0^x \frac{1}{1-x} dx = -[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots] = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1},\ x \in [-1, 1)$$

命题 33.3.1 (扩展泰勒级数)

- $$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n},\ x \in (-1, 1)$$
- $$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},\ x \in [-1, 1]$$
- $$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots,\ x \in (-1, 1)$$
- $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^{2n},\ x \in (-1, 1)$$
- $$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1},\ x \in (-1, 1)$$
- $$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x \in \mathbb{R}$$
- $$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x \in \mathbb{R}$$

命题 33.3.2 (常用数列和)

- $$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$$
- $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}=\ln 2$$
- $$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

July 16

例题 33.31.

设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$, A 的每行元素之和为 a, 且 $|A|=b$, 将 A 中的每个元素加 k 得到矩阵 $B=(a_{ij}+k)_{3\times 3}$, 求 $|B|$

例题 33.32.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$$

July 17

例题 33.33.

设 A 是 3 阶矩阵, 且满足 $|A-2E|=|A-3E|=|A-4E|=3$, 求 $|A-E|$

例题 33.34.

设 $f(x)$ 连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=1, \alpha(x)=\int_0^{\sqrt{x}}\frac{\ln(1+t^4)}{f(t)}dt, \beta(x)=\int_0^{\sin x}\frac{\sqrt{1+t^3}-1}{f(t)}dt$, 则当 $x\to 0^+$ 时, $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的:

- A. 等价无穷小
- B. 同阶但非等价无穷小
- C. 高阶无穷小
- D. 低阶无穷小

July 18

例题 33.35.

证明: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 收敛, 并求其和

例题 33.36.

当 $x\to 0$ 时, $2\arctan x-\ln\frac{1+x}{1-x}$ 是 x 的 n 阶无穷小, 求 n

July 19

例题 33.37.

关于函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy & xy\neq 0\\ x & y=0\\ y & x=0\end{cases}$, 下列结论正确的是:

- A. $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=1$
- B. $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big|_{(0,0)}=1$
- C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$
- D. $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=0$

例题 33.38.

求幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{x^{2n+2}}{n+1}$ 和函数

July 20

例题 33.39.

当 $x\to 0^+$ 时, $(1+x)^{\frac{1}{x}}-(e+ax+bx^2)$ 是比 x^2 高阶的无穷小, 求 a,b

例题 33.40.

设 $f(x)$ 二阶可导, $f(0)=0$, 证明:

$$\exists\xi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\ s.t.\ f''(\xi)=3f'(\xi)\tan\xi+2f(\xi)$$

July 21

例题 33.41.

设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$, 求 a,b,c

例题 33.42.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{(1+x)^{\frac{1}{x}}}-(1+x)^{\frac{e}{x}}}{x^2}$$

33.4 Week IV

July 22

例题 33.43.

设函数 $f(x)=\sec x$ 在 $x=0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $1+ax+bx^2$, 求 a,b

例题 33.44.

设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 二阶导数连续, 证明:

$$\exists\xi\in[-1,1],\ s.t.\ \int_{-1}^{1}xf(x)dx=\frac{2f'(\xi)+\xi f''(\xi)}{3}$$

July 23

例题 33.45.

函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)\big|x-1\big|}{e^{\frac{1}{x-2}}\ln|x|}$ 的可去间断点个数

例题 33.46.

设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,$f(x)$ 为连续函数,$\varphi(x)$ 有间断点, 下列命题正确的是:

- A. $f(x)[|\varphi(x)|+\varphi^2(x)]$ 必有间断点
- B. 若 $f(x)$ 单调, 则 $\dfrac{\varphi(x)}{|f(x)|}$ 必有间断点
- C. $\dfrac{\varphi(x)}{1+f^2(x)}$ 必有间断点
- D. $f(x)\varphi(x)$ 必有间断点

July 24

例题 33.47.

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是 n 阶矩阵 A 的 m 个两两互异的特征值 $(m \le n)$, 对应的特征向量分别为 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$, 令 $\eta = \sum\limits_{k=1}^{m} \xi_k$

证明: $\eta, A\eta, A^2\eta, \cdots, A^{m-1}\eta$ 线性无关

例题 33.48.

设 $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n} + x^{2n}}}$, $f(x)$ 在其定义域内:

- A. 连续
- B. 有 1 个可去间断点
- C. 有 1 个跳跃间断点
- D. 有 1 个第二类间断点

July 25

例题 33.49.

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^{y^2}}{\sqrt{x}}\right) dy$$

例题 33.50.

设 $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x^{n+2} - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$, 函数 $f(x)$:

- A. 仅有 1 个间断点
- B. 仅有 2 个间断点, 其中 1 个可去间断点, 1 个无穷间断点
- C. 仅有 2 个间断点, 2 个都是跳跃间断点
- D. 有 2 个跳跃间断点和 1 个可去间断点

July 26

例题 33.51.

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$$

例题 33.52.

$$\int_0^1 \sin(\ln\frac{1}{x})\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$$

July 27

例题 33.53.

设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 且 $\frac{f(x)-2x}{e^{x-1}-1}-\frac{1}{\ln x}$ 在 $x=1$ 的某去心邻域有界, 求 $f(1)$

例题 33.54.

设 α,β 均为 3 维单位列向量, $\alpha^T\beta=\frac{1}{2}$, $A=\alpha\beta^T+\beta\alpha^T$, 求二次型 x^TAx 在正交变换下的标准型

变式

$A=\alpha\beta^T$, 求二次型 $f=x^TAx$ 在正交变换下的标准型.

July 28

例题 33.55.

已知函数 $f(x)=\frac{(x^2+a^2)(x-1)}{e^{\frac{1}{x}}+b}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有一个可去间断点和一个跳跃间断点, 求 a,b

例题 33.56.

$$\int\frac{x^2(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}+1)}e^xdx$$

July 29

例题 33.57.

函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$, 判断 $x=0$ 处连续性、可导性以及极值情况

例题 33.58.

$A=(a_{ij})_{3\times3}$ 是实对称矩阵, A 的每行元素之和为 0, 设 2, 3 是 A 的非零特征值, 求 a_{11} 对应的代数余子式

July 30

例题 33.59.

下列函数在 $x=0$ 处不可导的是:

- A. $\int_0^x(|t|+t)dt$
- B. $|x|[x+\int_0^{|x|}e^{t^2}dt]$
- C. $|\tan x-\sin x|$
- D. $\sin|x|+\cos|x|$

例题 33.60.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 证明:

$$\exists\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\in(a,b)(\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_n),\ s.t.\ f'(\xi_1)f'(\xi_2)\cdots f'(\xi_n)=\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]^n$$

July 31

例题 33.61.

已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有定义, 且 $\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)=0$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f[\varphi(x)]-f(0)}{\varphi(x)}$ 存在和 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导之间关系

1.

例题 33.62.

设存在连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=1+\lambda\int_x^1 f(y)f(y-x)dy$, 证明: $\lambda\le\dfrac{1}{2}$

第 34 章 August

34.1 Week I

August 1

例题 34.1.

已知 $f(x)$ 为奇函数, $f'_+(0)$ 存在和 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导关系

例题 34.2.

$$\int_0^1 dx \int_{1-x}^{2-x} e^{(x+y)^2}(\sin^2 x+\cos^2 y)dy+\int_1^2 dx \int_0^{2-x} e^{(x+y)^2}(\sin^2 x+\cos^2 y)dy$$

August 2

例题 34.3.

已知函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内可导, $f'(x_0)>0$ 与 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内单调递增关系

例题 34.4.

$I_n=\int_1^{+\infty}\dfrac{\sqrt{t-1}}{t^n}dt\ (n\geq 2)$, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{I_{n+1}}{I_n}$

August 3

例题 34.5.

设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某个邻域内有定义, 下列命题中正确的个数:

- A. 若 $f'(x_0)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续
- B. 若 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续
- C. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续
- D. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续

例题 34.6.

A 为 3 阶实对称矩阵, 特征值为 $0,1,1$, 且 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\a\\0\end{bmatrix}, \alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\a\end{bmatrix}$ 是 A 的两个不同的特征向量, 若 $A(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_2$, 求矩阵 A

August 4

例题 34.7.

设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sqrt{\frac{(1+x^2)\sqrt{x}}{e^{x-1}}}+\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{1+x^2}}$ 在点 $(1,\sqrt{2})$ 处相切, 求 $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)+1-\sqrt{2}]^{\frac{1}{\ln x}}$

例题 34.8.

求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2+mx_3)(2x_1+3x_2+nx_3)$ 的正惯性指数

August 5

例题 34.9.

确定函数 $g(x)=\left|x^3-x-\sin x\right|$ 不可导的点的个数

例题 34.10.

设 A 为 n 阶矩阵, n 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是方程组 $Ax=0$ 的基础解系, $\exists\beta_i$, $s.t.$ $A\beta_i=\alpha_i(i=1,2,\cdots,t)$, 分析下列命题正确的个数

- A. 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性无关
- B. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性无关
- C. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 均是方程组 $A^2x=0$ 的解

- D. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 均是方程组 $A^2x = 0$ 的基础解系

August 6

例题 34.11.

设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x^4 & x < 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$, 若 $y = f[g(x)]$, 求 $\frac{dy}{dx}\big|_{x=1}$ 和 $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0}$

例题 34.12.

设 A 为 3 阶矩阵, α 为 3 维列向量, $A^2\alpha \neq 0, A^3\alpha = 0$, 下列说法错误的是:

- A. A 只有 0 特征值
- B. $r(A) = 2$
- C. A 能相似对角化
- D. A 不是对称矩阵

August 7

例题 34.13.

设 $\varphi(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 函数 $f(x)$ 可导, 求 $F(x) = f[\varphi(x)]$ 的导数

例题 34.14.

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上导函数连续, $f(0) = f(\frac{1}{2}) = f(1) = 0, \left|f'(x)\right| \leq M$, 求证:

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \leq \frac{M}{8}$$

34.2 Week II

August 8

例题 34.15.

设 A 是 n 阶矩阵, 下列说法错误的是:

- A. 对于任意的 n 维列向量 ξ, 有 $A\xi = 0$, 则 $A = 0$
- B. 对于任意的 n 维列向量 ξ, 有 $\xi^T A\xi = 0$, 则 $A = 0$
- C. 对于任意的 n 阶矩阵 B, 有 $AB = 0$, 则 $A = 0$
- D. 对于任意的 n 阶矩阵 B, 有 $B^T AB = 0$, 则 $A = 0$

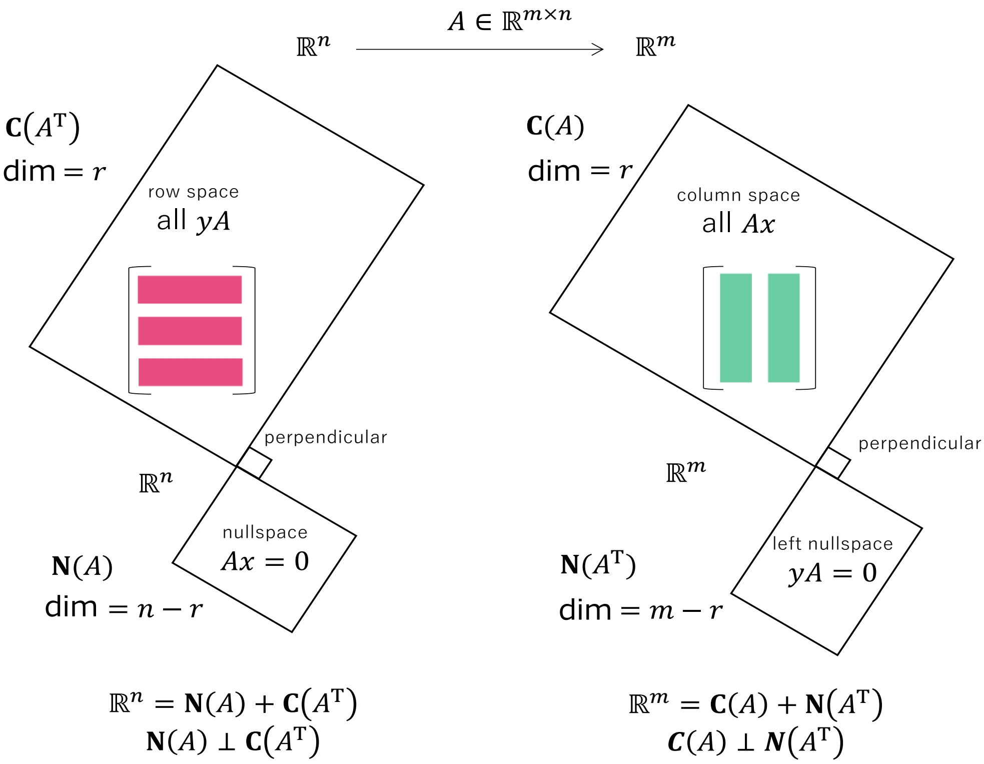


图 34.1: 四个子空间

例题 34.16.

设函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f[(x+h)^2] - f(x^2+h)}{h} = 1, f(1) = 1$, 求 $f(x)$

August 9

例题 34.17.

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上导函数连续, $f(0) = f(1) = 0$, 证明:

$$\int_0^1 f^2(x)dx \le \frac{1}{8}\int_0^1 [f'(x)]^2 dx$$

定理 34.2.1 (积分形式柯西不等式)

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$$

我们知道 $\forall t \in \mathbb{R}$, 我们有:

$$[tf(x)-g(x)]^2 \ge 0 \Rightarrow t^2f^2(x)-2tf(x)g(x)+g^2(x) \ge 0$$

我们对上式子两边在区间 $[a,b]$ 上积分, 可以得到:

$$t^2\int_a^b f^2(x)dx - 2t\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \ge 0$$

我们可以得到一个关于 t 的一元二次方程方程:

$$At^2+Bt+C \ge 0, \text{其中} \begin{cases} A=\int_a^b f^2(x)dx \\ B=-2\int_a^b f(x)g(x)dx \\ C=\int_a^b g^2(x)dx \end{cases} \Rightarrow B^2-4AC \le 0$$

我们得到:

$$4\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 - 4\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx \le 0$$

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$$

例题 34.18.

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+\frac{1}{2}\right]^{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}$$

August 10

例题 34.19.

设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin x-\int_x^y \varphi(u)du=0$ 所确定, 其中可导函数 $\varphi(u)>0$, 且 $\varphi(0)=\varphi'(0)=1$, 求 $y''(0)$

例题 34.20.

设 $a_n=\int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}dx$

(1). 证明: $\dfrac{1}{2(n+1)} \le a_n \le \dfrac{1}{2n}(n=1,2,\cdots)$

(2). 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left[\dfrac{1}{2n}-\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x}dx\right]$ 绝对收敛

August 11

例题 34.21.

设 $x = x(y)$ 是函数 $y = \ln x + e^x$ 的反函数, 求 $\dfrac{d^2x}{dy^2}$

例题 34.22.

设 $a_0 = 1, a_1 = 0, a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}(na_n + a_{n-1})(n = 1, 2, 3\cdots)$, $S(x)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的和函数

(1). 证明: 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径不小于 1

(2). 证明: $(1 - x)S'(x) - xS(x) = 0, x \in (-1, 1)$, 并求出 $S(x)$ 的表达式

August 12

例题 34.23.

设 $y = y(x)$ 由 $e^y \sin t - y + 1 = 0$ 和 $x = \begin{cases} \dfrac{e^t - 1}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$ 所确定, 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}$

例题 34.24.

下列命题正确的是:

- A. 设 A 为 3 阶矩阵, 若 A 的特征值 $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$, 则 $r(A) = 2$
- B. 设 A 为 3 阶非零矩阵, 若 $A^2 = 0$, 则 $r(A) = 1$
- C. 设 A, B 为 3 阶矩阵, 若 A 与 B 等价, 则 $|A| = |B|$
- D. 设 A, B 为 3 阶实对称矩阵, 若 A 与 B 合同, 则 $|A| = |B|$

August 13

例题 34.25.

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{2nx + x^2}{2n^2}\right)^{-n} & x \neq 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2\left[\dfrac{n}{(n+1)^2} + \dfrac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \dfrac{n}{(n+n)^2}\right] & x = 0 \end{cases}$$

求 $\int f(x)dx$

例题 34.26.

已知函数 $f(x) = x^2 \ln(1-x)$, 当 $n \geq 3$ 时, 求 $f^{(n)}(0)$

August 14

例题 34.27.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $f(0) = f(1) = -2$, 证明: $\exists \xi \in (0,1)$, $s.t.\ f'(\xi) - f(\xi) = \xi$

例题 34.28.

设数列 $\{u_n\}$ 满足 $u_1 = 1, u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{u_n + 1}(n = 1, 2, \cdots)$, 证明数列 $\{u_n\}$ 收敛, 并求其极限

34.3 Week III

August 15

例题 34.29.

$$f(x) = \int_1^x \frac{\arctan t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}} \ln(1+t^2)} dt$$

求 $\int_0^1 \dfrac{x}{1+x^2} f(x) dx$

例题 34.30.

设 $f(x) = \dfrac{1}{1+2x+4x^2}$, 求 $f^{(100)}(0)$

August 16

例题 34.31.

证明:

$$\exists x_1, x_2, x_3 \in (0,2)(x_1 < x_2 < x_3),\ s.t.\ \frac{1-\ln(1+x_1)}{(1+x_1)^2} x_3 = \frac{1-\ln(1+x_2)}{(1+x_2)^2}(2 - x_3)$$

例题 34.32.

$$y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

(1). 证明: $(1-x^2)y^{(n+1)}-(2n+1)xy^{(n)}-n^2y^{(n-1)}=0(n\geq 1)$

(2). 求 $y^{(n)}(0)$

August 17

例题 34.33.

$$f(x)=\lim_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$$

求 $f(x)$ 的间断点, 并指出其类型

例题 34.34.

证明:

$$\int_0^{\pi} xa^{\sin x}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\cos x}dx\geq\frac{\pi^3}{4}$$

August 18

例题 34.35.

设函数 $f(x)=\begin{cases} x|x| & x\leq 0, \\ x\ln x & x>0, \end{cases}$, $x=0$ 处 $f(x)$ 的可导性判断、$x=0$ 是否为 $f(x)$ 的极值点

例题 34.36.

$f(x)=\prod\limits_{n=1}^{100}\left(\tan\frac{\pi x^n}{4}-n\right)$, 求 $f'(1)$

我们令 $g(x)=\prod\limits_{n=2}^{100}\left(\tan\frac{\pi x^n}{4}-n\right)$, 我们得到:

$$f(x)=(\tan\frac{\pi x}{4}-1)g(x)$$

$$f'(x)=\frac{\pi}{4\cos^2\frac{\pi x}{4}}g(x)+g'(x)(\tan\frac{\pi x}{4}-1)$$

$$f'(1)=\frac{\pi}{2}g(1)=\frac{\pi}{2}\times(1-2)\times(1-3)\cdots\times(1-100)=-\frac{\pi}{2}99!$$

August 19

例题 34.37.

$$f(x)=\begin{cases}\int_0^x \cos\frac{1}{t}dt & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases},\text{求 } f'(0)$$

例题 34.38.

$f(x)$ 可导, 且满足 $x=\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t-x)dt$, 求 $f(x)$ 以及 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left|f(x)\right|^6 dx$

August 20

例题 34.39.

设函数 $f(x)=\int_{-1}^x t\ln|t|dt, x=0$ 处 $f(x)$ 的可导性判断、$x=0$ 是否为 $f(x)$ 的极值点

例题 34.40.

函数 $f(x)=(x+1)\left|x^2-1\right|$ 驻点和极值点个数

August 21

例题 34.41.

$f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内二阶可导, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right]=\frac{1}{3}$, 求 $f(0), f'(0)$ 和 $f''(0)$

例题 34.42.

设 $f(x)$ 连续, 且 $x>1, f(x)\left[\int_0^x f(t)dt+1\right]=\frac{xe^x}{2(1+x)^2}$, 求 $f(x)$

34.4 Week IV

August 22

例题 34.43.

设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f'(0)=0, \lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)+f(x)-f(-x)}{|x|}=1$, 下列说法正确的是:

- A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 极大值
- B. $f''(0)>0, f(0)$ 是 $f(x)$ 极小值

- C. $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
- D. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极值点, $(0, f(0))$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

例题 34.44.

$$\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{t}{\cos\theta}}\frac{\sin(r^2\sin\theta\cos\theta)}{\sin\theta}dr$$

August 23

例题 34.45.

设 $f(x)$ 连续, 且 $f(x)\neq 0, f(1)=\sqrt{2}$

$$\forall x, y \in(-\infty,+\infty), f(x+y)-f(x)=\int_x^{x+y}\frac{t}{f(t)}(t^2+1)dt$$

求 $f(x)$

例题 34.46.

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续, 在 $(0,+\infty)$ 恒正, $x>0, [f(x)]^3\leq 3\int_0^x f^2(t)dt$, 证明:

$$x\geq 0, f(x)\leq x$$

August 24

例题 34.47.

$f(x)=\dfrac{x|x|}{1+x}$, 求 $f(x)$ 的凹凸区间和渐近线

例题 34.48.

函数 $f(x)$ 具有二阶连续的导数, 曲线 $y=f(x)$ 既关于 y 轴对称也关于直线 $x=1$ 对称, 求 $\int_{-2}^{2}(x-2024)f''(x)dx$

August 25

例题 34.49.

设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} x+y & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1 \\ 0 & others \end{cases}$

(1). 求 $\max\{X,Y\}$ 的分布函数和概率密度

(2). 求 $\min\{X,Y\}$ 的分布函数和概率密度

例题 34.50.

曲线 $y=x(1+\arcsin\dfrac{2}{x})$ 的斜渐近线

August 26

例题 34.51.

$$\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{x^2-x+1}dx$$

例题 34.52.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$$

August 27

例题 34.53.

$f(x)=\arctan x$, 求 $f^{(n)}(0), n\in\{2k+1, k\in\mathbb{Z}^+\}$

例题 34.54.

设 $f(x)=\begin{cases} ax+1 & x<0 \\ be^x & x\ge 0 \end{cases}$ 为可导函数, 求 $\int f(\ln x)dx$

August 28

例题 34.55.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, $f(a)=a, \int_a^b f(x)dx=\dfrac{1}{2}(b^2-a^2)$, 证明:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1$$

例题 34.56.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x}{(1+2^x)(1+\cos^2 x)} dx$$

August 29

例题 34.57.

$$\int_0^1 \frac{\arctan e^{2x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} dx$$

例题 34.58.

求曲线 $y = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+x^2}$ 的渐近线所围区域的面积

August 30

例题 34.59.

随机变量 X 服从分布 $X \sim E(1)$, 随机变量 Y 服从分布 $Y \sim B(1, \frac{1}{2})$, X, Y 相互独立, 随机变量 $Z = X - Y$, 求 $f_z(Z)$

例题 34.60.

设 $f(x)$ 是单调可导函数,$f(-\frac{\pi}{2}) = -f(\frac{\pi}{2})$, $g(x)$ 是 $f(x)$ 反函数

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{f(x)} g(t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \left(\frac{1}{1+e^{-|t|}} + \frac{\sin t}{1+e^{-\frac{\pi}{2}}}\right) \sin t dt$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

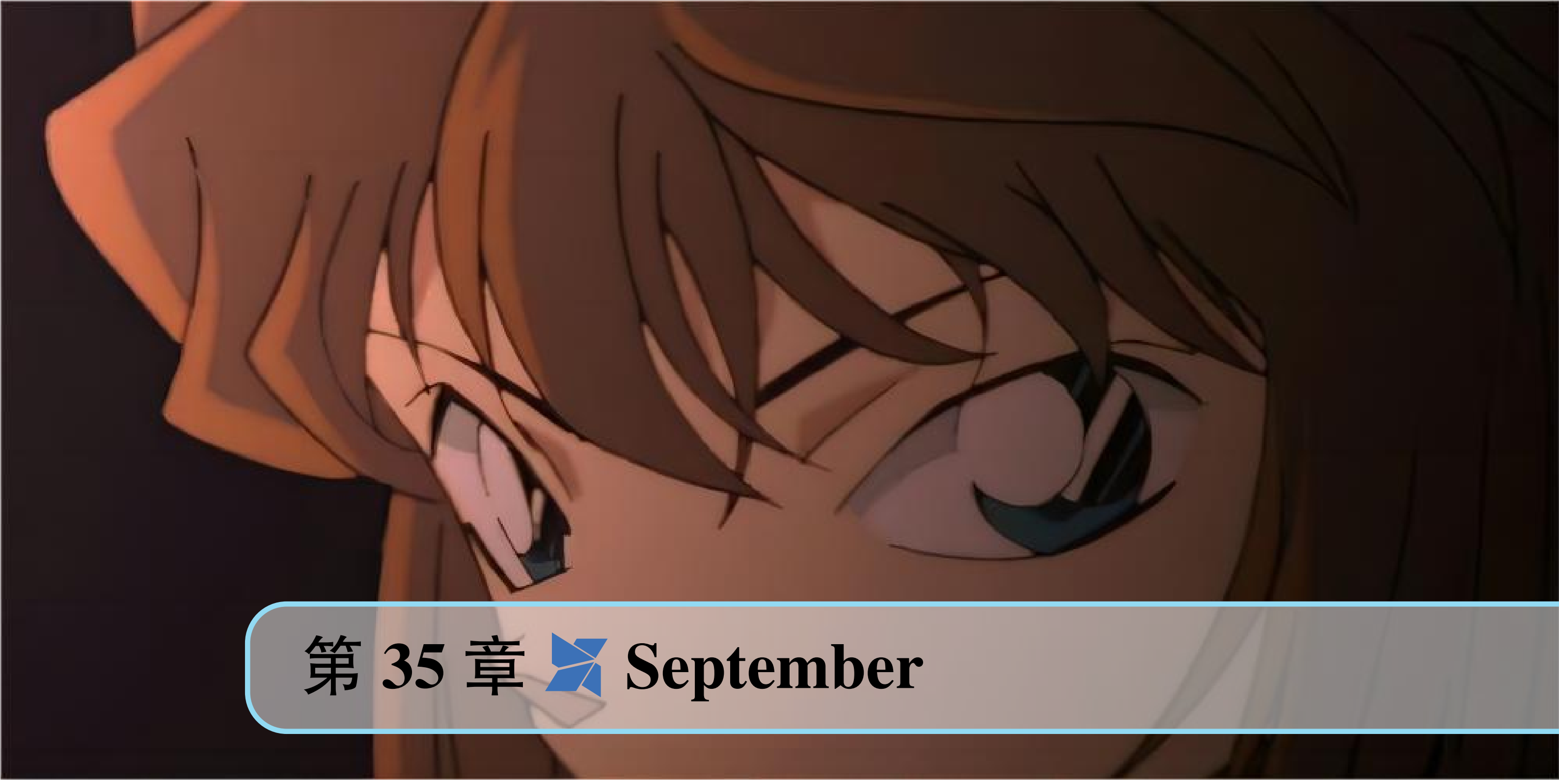
August 31

例题 34.61.

设 $f(x) = \arctan x \cdot e^{ax}$, 且 $f'''(0) = 2$, 求 a^2

例题 34.62.

设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 的导函数连续,$f(0) = 0$, $\left|f'(x) - f(x)\right| \le 1$, 证明: $|f(x)| \le e^x - 1$



第 35 章 September

35.1 Week I

September 1

例题 35.1.

求曲线 $y = \dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}(x > 0)$ 的斜渐近线

例题 35.2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$$

September 2

例题 35.3.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^n x} dx$$

例题 35.4.

设随即变量 (X, Y) 的联合概率密度为: $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{21}{4}x^2y & x^2 \le y \le 1 \\ 0 & others \end{cases}$, 求 $P\{Y \ge 0.75 | X = 0.5\}$

September 3

例题 35.5.

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$, 其中 $g(x)$ 在 $x=0$ 的一个邻域内有二阶导数, 且 $g(0)=0$, $g'(0)=0$, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处

- A. 不连续
- B. 连续, 但 $f'(0)$ 不存在
- C. $f'(0)$ 存在, 但 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续
- D. $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

例题 35.6.

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, $a_n=\int_0^1 f(nx)dx$, 证明: $k>0$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n^2}{n^k}$ 收敛

September 4

例题 35.7.

已知方程 $x^5-5x+k=0$ 有三个不同的实数根, 求 k 的取值范围

例题 35.8.

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)}dx$$

September 5

例题 35.9.

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$$

例题 35.10.

$$\lim_{x\to 0}\int_{\ln(1+x)}^{x}\frac{(1-2t)^{\frac{1}{t}}}{t^2}dt$$

September 6

例题 35.11.

已知 $f(x) = [x]\sin \pi x$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 求 $f'(x)$

例题 35.12.

设函数 $f(x) = ax - b\ln x(a > 0)$ 有两个零点, 求 $\frac{b}{a}$ 的取值范围

September 7

例题 35.13.

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x+\sqrt{1-x^2}}dx$$

例题 35.14.

$$\int_0^1 \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}dx$$

35.2 Week II

September 8

例题 35.15.

$$\lim_{n\to+\infty}\left[1+\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right)\right]^n$$

例题 35.16.

设 $f_n(x) = \tan^n x(n = 1, 2, \cdots)$, 且曲线 $y = \tan^n x$ 在点 $x = \frac{\pi}{4}$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(x_n, 0)$, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n)$

September 9

例题 35.17.

设 A 是 3 阶实对称矩阵, 且不可逆

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot A = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 3 \\ -12 & -6 & 12 \end{bmatrix}$$

求 A

例题 35.18.

已知方程 $\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} = k$ 在区间 $(0,1)$ 有实数根, 求 k 的取值范围

September 10

例题 35.19.

设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$, 则下列关于 $y = \dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}$ 的命题正确的个数

- A. 有垂直渐近线
- B. 有水平渐近线
- C. 有斜渐近线
- D. 是有界函数

例题 35.20.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$$

September 11

例题 35.21.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1-x^2+x^4)}{(1+x^2)\ln x} dx$$

例题 35.22.

已知函数 $f(x)$ 三阶可导, 则下列命题中不是 $(0, f(0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点的必要条件的有:

- A. $\exists\delta>0, f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调下降,$f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加
- B. $\exists\delta>0, x\in(-\delta,\delta), f''(-x)=-f''(x)$
- C. $f''(0)=0, f'''(0)\neq 0$

September 12

例题 35.23.

下列命题正确的是:

- A. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=a$, 则 $f'(x_0)=a$
- B. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 不存在, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处不可导
- C. 若 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续, 则在 x_0 的某邻域内 $f'(x)$ 存在
- D. 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导,$g(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导, 则 $f(x)\cdot g(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导

例题 35.24.

证明不等式和求极限

(1). 证明: $\dfrac{1}{n}-\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n^2}$, $(n\in\mathbb{N}^*)$

(2). 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n^2+i}{n^2}$

September 13

例题 35.25.

设区域 $D_1:\{(x,y)|0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1\}$,$D_2:\{(x,y)|x^2+y^2\leq r^2,\ (r>0)\}$, 比较 $I=\iint\limits_{D_1}(\cos x^2+\sin y^2)\,dxdy$, $J=\iint\limits_{D_1}\sqrt{2}dxdy$, $K=\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{D_2}e^{x^2-y^2}\cos(x+y)dxdy$ 大小

1.

例题 35.26.

证明: 若在区间 I 上 $f^{(n)}(x)\neq 0$, 则方程 $f(x)=0$ 在 I 上最多 n 个实数根

September 14

例题 35.27.

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $(0,+\infty)$ 上 $f'(x)>0$, 下列命题正确的是:

- A. 若 $f(0)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在
- B. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2024$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=2024$
- C. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=1$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$
- D. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=1$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt=\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在

例题 35.28.

讨论 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x^m|\ln x|^n}{1+x^k}dx$ 的敛散性

35.3 Week III

September 15

例题 35.29.

函数 $y=\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$, 下列说法正确的是:

- A. 当 n 无论为偶数还是奇数时, 函数都取极值
- B. 当 n 无论为偶数还是奇数时, 函数都不取极值
- C. 当 n 为偶数时, 函数取极值; 当 n 为奇数时, 函数不取极值
- D. 当 n 为偶数时, 函数不取极值; 当 n 为奇数时, 函数取极值

例题 35.30.

设 $f(x)$ 连续, $g(x)=f(x)\cdot\int_0^x f(t)dt$ 单调不增, 证明: $f(x)\equiv 0$

September 16

例题 35.31.

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导, $f''(x)\neq 0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{xf'(x)}=\alpha>0$, 且 $\exists x_0\in\mathbb{R}$, $s.t.$ $f(x_0)<0$, 证明: 方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上恰有两个实数根

例题 35.32.

讨论 $\int_0^{+\infty}\frac{(1+x^p)\ln|\ln x|}{x^q}dx$ 的敛散性

September 17

例题 35.33.

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内可导,$g(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续, 且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)}{x}=0$, $f'(x)=\sin^2x+\int_0^x g(x-t)dt$, 则下列命题正确的是:

- A. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点
- B. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点
- C. $(0,f(0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点
- D. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0,f(0))$ 不是 $y=f(x)$ 的拐点

例题 35.34.

设 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 是来自正态总体 X 的简单随机样本,$Y_1=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_6}{6}$,$Y_2=\frac{X_7+X_8+X_9}{3}$, $S^2=\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{9}(X_i-Y_2)^2$, $Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}$, 证明: $Z\sim t(2)$

September 18

例题 35.35.

设函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上可导, 且 $f'(x)>f(x)>0$, 下列命题正确的是:

- A. $\frac{f(-2)}{f(-1)}>1$
- B. $\frac{f(0)}{f(-1)}>e$
- C. $\frac{f(1)}{f(-1)}<e^2$
- D. $\frac{f(2)}{f(-1)}<e^3$

例题 35.36.

$D=\left\{(p,q)\middle|\ \int_0^{+\infty}\frac{x^p|x-1|^q}{(x+1)\ln x\ln(x+2)}dx\ \text{收敛}\right\}$, 求 D 绕 q 轴旋转一周扫过的体积

September 19

例题 35.37.

设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 下列哪些命题是 $\int_0^x f(t)dt$ 是以 T 为周期的周期函数的充分条件:

- A. $\int_0^T [f(t) - f(-t)]\, dt = 0$
- B. $f(-x) = f(x)$
- C. $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ 收敛

例题 35.38.

设随机变量 X 和 Y 独立同分布,X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$, 令 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$, 求 $D(Z)$

September 20

例题 35.39.

已知常数 $k \geq \ln 2 - 1$, 证明: $(x-1)(x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1) \geq 0$

例题 35.40.

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(n-1)^3}{n(n+1)} x^n$ 的和函数 $S(x)$

September 21

例题 35.41.

设 $f(x) = x[\frac{1}{x}]$, $[\frac{1}{x}]$ 表示不超过 $\frac{1}{x}$ 的最大整数, 求 $f(x)$ 的间断点并判断其类型

例题 35.42.

设 $f(x, y)$ 在全平面上有连续的偏导数, 且 $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, 证明: $f(x, y)$ 为常数

35.4 Week IV

September 22

例题 35.43.

设函数 $f(x)$ 二阶可导, $f(0)=1, f'(0)=0, \forall x \geq 0, f''(x)-5f'(x)+6f(x) \geq 0$, 证明:

$$f(x) \geq 3e^{2x}-2e^{3x}(x \geq 0)$$

例题 35.44.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!(n+1)}$$

September 23

例题 35.45.

$$\iint_D \left[x(1-y^3)+y(1+x^3)\right] dxdy$$

其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2 \leq 2x+2y\}$

例题 35.46.

设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx dx$, 证明:

$$a_n=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}(n \geq 1)$$

September 24

例题 35.47.

设三元二次型 $f=x^TAx$ 正定, 其中 $x=(x_1,x_2,x_3)^T$, A 为实对称矩阵, 则下列说法不正确的是:

- A. 仅在 $x=0$ 处 f 取得最小值
- B. 齐次方程组 $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3}=0 \end{cases}$ 只有零解

- C. 二阶偏导数矩阵 $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{3\times 3} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}$ 是正定矩阵
- D. $\exists \alpha \in \mathbb{R}^3 \neq 0,\ s.t.\ A = \alpha\alpha^T \to f = (\alpha^T x)^2$

例题 35.48.

证明:

$$\left|\frac{\sin x - \sin y}{x - y} - \cos y\right| \leq \frac{1}{2}\left|x - y\right| (x \neq y)$$

September 25

例题 35.49.

求幂级数 $\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{n^2 + 3n + 4}{2^n (n+1)!} x^{2n}$ 的和函数 $S(x)$

例题 35.50.

设线性方程组 $Ax = \alpha$ 有解, $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ 无解, 则下列结论正确的是:

- A. $r(B, \beta) = r(B) + 1$
- B. $r\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix} < r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + 1$
- C. $r\left[B^T(B, \beta)\right] > r(B^T B)$
- D. $r\left[(A^T, B^T)\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix}\right] = r\left[(A^T, B^T)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right]$

September 26

例题 35.51.

已知 $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^{\ln(3\cos x)} - 3^{\ln x}}{x^k \ln x} = c (c \neq 0)$, 求 c, k

例题 35.52.

设 $f(x, y)$ 在 $D = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$ 内具有连续的偏导数, 且在边界上取值为 0, 证明:

$$f(0,0) = \lim_{\xi \to 0^+} \frac{-1}{2\pi} \iint_{D_1} \frac{x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}}{x^2 + y^2} dxdy$$

其中 $(D_1 = \{(x, y)|\xi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\})$

September 27

例题 35.53.

设 $f(x)$ 二阶可导, $f(x) > 0, \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1}{x} = 1$, 且 $f(x)f''(x) > [f'(x)]^2$, 下列命题一定成立的是:

- A. $e^{-x}f(x) \geq 1$
- B. $e^{-x}f(x) < 1$
- C. $\dfrac{\ln f(x)}{x} < 1$
- D. $\dfrac{\ln f(x)}{x} > 1$

例题 35.54.

求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 x^n$ 的和函数 $S(x)$

September 28

例题 35.55.

$$\lim_{x \to +\infty} \left[(x+2)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+\sin x}} \right]$$

例题 35.56.

设 A 为 n 阶方阵, β 为 n 维非零列向量, 且 $r\begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} < r\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix}$, 下列说法正确的是:

- A. $\begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ 必有非零解

- B. $\begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ 只有零解
- C. 方程组 $Ax = \beta$ 必无解
- D. 方程组 $Ax = \beta$ 必有解

September 29

例题 35.57.

设 $X \sim N(0,1)$, 求 $E(X^4 e^X)$

例题 35.58.

设 $f(x)$ 为非负连续函数, $x > 0$, $\int_0^x f(x)f(x-t)dt = x^3$, 求 $f(x)$

September 30

例题 35.59.

$a_{n+2} = \dfrac{2}{n+2}a_{n+1} + \dfrac{3}{(n+2)(n+1)}a_n (n \geq 0), a_0 = 0, a_1 = 1$, 已知 $a_3 > a_4 > a_5$, 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$

例题 35.60.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = 2$, $\int_0^1 f(x)dx = 1$

(1). 证明: $\exists \xi \in (0,1)$, $s.t.\ f'(\xi) = f(\xi) - 2\xi + 2$

(2). 证明: $\exists \eta \in (0,1)$, $s.t.\ f''(\eta) = 0$

(3). 证明: $\exists \zeta \in (0,1)$, $s.t.\ \int_0^\zeta f(t)dt + \zeta f(\zeta) = 2\zeta$

(4). 证明: $\exists \mu \in (0,1)$, $s.t.\ \mu f(\mu) = 2\int_0^\mu f(t)dt$

第 36 章 October

36.1 Week I

October 1

例题 36.1.

设 $I=\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos x^2 dx$, $J=\int_0^{\sqrt{\pi}}\cos x^2 dx$, $K=\int_0^{\pi}\sqrt{x}\cos x dx$, 比较 I,J,K 的大小

例题 36.2.

已知曲线 $L: y=x^2-1(-1\le x\le 2)$, 方向从 $A(-1,0)$ 到 $B(2,3)$, 求 $\int_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$

October 2

例题 36.3.

$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}(x>0)$, 求 $\int f(x)dx$

例题 36.4.

$f(x)$ 连续,$f(x+2)-f(x)=\sin x$, $\int_0^2 f(x)dx=0$, 求 $\int_1^3 f(x)dx$

注

构造辅助函数: $F(x) = \int_x^{x+2} f(t)dt$

$$\begin{cases} F'(x) = f(x+2) - f(x) = \sin x \\ F(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x) = -\cos x + 1 \\ F(1) = \int_1^3 f(x)dx = 1 - \cos 1 \end{cases}$$

October 3

例题 36.5.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=1, f(1)=0$, 证明:

(1). $\exists \xi_1, \xi_2 \in (0,1)(\xi_1 \neq \xi_2),\ s.t.\ f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = -2$

(2). $\exists \eta, \zeta \in (0,1)(\eta \neq \zeta),\ s.t.\ f'(\eta)f'(\zeta) = 1$

例题 36.6.

设 $f(x) = \int_{-1}^{x} t\cos t dt, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 则曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴所围成的图形面积为:

- A. $2\int_0^1 x\sin x dx$
- B. $2\int_0^1 x^2 \sin x dx$
- C. $2\int_0^1 x\cos x dx$
- D. $2\int_0^1 x^2 \cos x dx$

October 4

例题 36.7.

设 Γ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z = x + y$ 的交线, 从 z 轴正向往负向看去为逆时针, 计算积分 $\oint_\Gamma xzdx + xdy + \frac{y^2}{2}dz$

例题 36.8.

$$\int \frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$$

October 5

例题 36.9.

$F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t dt$, 求 $F(x)$

例题 36.10.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $I=\int_0^1 f(x)dx\neq 0$, 证明:

$$\exists \xi,\eta\in(0,1)(\xi\neq\eta),\ s.t.\ \frac{1}{f(\xi)}+\frac{1}{f(\eta)}=\frac{2}{I}$$

October 6

例题 36.11.

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义, 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内可导, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 存在,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分条件为:

- A $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在
- B $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}$ 存在
- C $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续
- D $\int_0^x f(t)dt$ 在点 $x=0$ 处可导

例题 36.12.

$$\int x\arctan x\cdot\ln(1+x^2)dx$$

October 7

例题 36.13.

设 $\Gamma=\begin{cases}x=2\sqrt{1-y^2}\\ z=x+y\end{cases}$, 从 z 轴正向往负向看去为逆时针, 计算曲线积分 $\int_\Gamma \frac{ydx+zdy+xdz}{x^2+y^2+z^2}$

例题 36.14.

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是以 T 为最小正周期的连续奇函数, 下列函数中不是周期函数的个数:

- A. $\int_a^x f(t)dt$
- B. $\int_{-x}^a f(t)dt$
- C. $\int_{-x}^x tf(t)dt$
- D. $\int_{-x}^x t^2 f(t)dt$

36.2 Week II

October 8

例题 36.15.

设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布,$X \sim N(1,3^2), Y \sim N(0,4^2)$, 且满足 $\rho_{XY} = -\frac{1}{2}, Z = \frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$

(1). 求 $E(Z)$ 与 $D(Z)$

(2). 求 ρ_{XZ}

(3). 证明 X 与 Z 是否独立

例题 36.16.

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{xy}}dxdy, D = \{(x,y)|(\frac{x}{2}+\frac{y}{4})^2 \leq \frac{x}{6}, x, y \geq 0\}$$

注

令

$$\begin{cases} \sqrt{x} = m \\ \sqrt{y} = n \end{cases} \qquad D' = \{(m,n)|\frac{(m-\frac{1}{\sqrt{6}})^2}{2} + \frac{n^2}{4} = \frac{1}{12}(m,n>0)\}$$

雅可比行列式: $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial m} & \frac{\partial x}{\partial n} \\ \frac{\partial y}{\partial m} & \frac{\partial y}{\partial n} \end{vmatrix} = 4mn$

$$dxdy = 4mndmdn \Rightarrow \iint_D \frac{1}{\sqrt{xy}}dxdy = \iint_{D'} 4dmdn$$

$$I = 4S_{D'} = 2ab\pi = 2\pi \times \frac{1}{\sqrt{6}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}$$

October 9

例题 36.17.

$$\int \frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}dx$$

例题 36.18.

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足 $f(x) = f(x-\pi) + \sin x$, 且 $f(x) = x, x \in [0,\pi)$, 求 $\int_{\pi}^{3\pi} f(x)dx$

October 10

例题 36.19.

$$\int \frac{\cos^3 x - 2\cos x}{1+\sin^2 x + \sin^4 x}dx$$

例题 36.20.

下列积分中, 与积分 $I = \int_0^1 \frac{1}{2}xe^{-\sqrt{x}}dx$ 值最接近的是

- A. $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$
- B. $\int_0^1 xe^{-x}dx$
- C. $\int_0^1 x^2e^{-x}dx$
- D. $\int_0^1 x^4e^{-x}dx$

October 11

例题 36.21.

$f(x) = \dfrac{(\sqrt[n]{x}-1)^n}{x+1}$, 求 $f^{(n)}(1)(n \geq 2)$

例题 36.22.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶导数连续, $f(1)=f'(1)=0, D=\{(x,y)|0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1\}$, 证明:

(1). $\iint\limits_D f(x)dxdy=\iint\limits_D x^2yf''(x)dxdy$

(2). $\exists\xi,\eta\in(0,1),\ s.t.\ \xi^2f''(\xi)=2f'(\eta)(\xi-1)$

October 12

例题 36.23.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\left(\arctan e^x+\int_0^x e^{t^2}dt\right)}{1+\cos^2 x}dx$$

例题 36.24.

若 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(ax)}{x^n}dx$ 收敛, 求 n 的取值范围

October 13

例题 36.25.

设 $0<a<1, I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin ax}{\sin x}dx,\ I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan ax}{\tan x}dx$, 比较 I_1, I_2 和 $\frac{\pi a}{4}$ 的大小

例题 36.26.

$$\iint\limits_D\frac{\tan^3 x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

其中 $D=\{(x,y)|y\geq|x|,(x^2+y^2)^3\leq y^4\}$

October 14

例题 36.27.

已知 $\int_1^{+\infty}\left(\frac{2x^2+bx+a}{2x^2+ax}-1\right)dx=0$, 求 a,b

例题 36.28.

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)}{n+\frac{1}{k}}-\ln n\right]$$

36.3 Week III

October 15

例题 36.29.

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^4)}$$

例题 36.30.

设随机变量 $Y=min\{|X|,1\}$, 其中 X 为随机变量, 且密度函数为 $f(x)=\dfrac{k}{1+x^2}(x\in\mathbb{R},k\equiv C)$, 下列说法不正确的是:

- A. $k=\dfrac{1}{\pi}$
- B. $E(X)=0$
- C. Y 没有概率密度
- D. $E(Y)=\dfrac{\ln(2e^{\frac{\pi}{2}})}{\pi}$

October 16

例题 36.31.

求 $y=e^{-x}\sqrt{\sin x}(0\le x<+\infty)$ 绕 x 轴旋转一周的旋转体体积

例题 36.32.

已知 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^\alpha}dx$ 收敛, 求 α 的取值范围

October 17

例题 36.33.

设随机变量 X,Y 相互独立, 且 $X\sim N(0,1),Y\sim B(n,p),0<p<1$, 且 $X+Y$ 的分布函数:

- A. 是连续函数
- B. 恰有 $n+1$ 个间断点

- C. 恰有 1 个间断点
- D. 有无穷个间断点

例题 36.34.

微分方程 $\cos^4 x\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\cos^2 x(1-\sin x\cos x)\dfrac{dy}{dx}+y=e^{-\tan x}$, 求该微分方程在 $t=\tan x$ 变换下所得的 y 对 t 的微分方程, 并求出其通解

October 18

例题 36.35.

$$\iint\limits_D \arcsin(2\sqrt{x-x^2})dxdy, D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le x\}$$

例题 36.36.

设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^{n+1}-x^2}{x^n+1}$,$F(x)=\int_0^x f(t)dt$, 下列说法正确的是:

- A. $f(x)$ 有 1 个间断点,$F(x)$ 有 1 个不可导点
- B. $f(x)$ 有 1 个间断点,$F(x)$ 有 2 个不可导点
- C. $f(x)$ 有 2 个间断点,$F(x)$ 有 1 个不可导点
- D. $f(x)$ 有 2 个间断点,$F(x)$ 有 2 个不可导点

October 19

例题 36.37.

$x\ge 0$, 连续函数 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 非负, 且满足方程 $\int_0^{x^2} f(x^2)f(t)dt=\dfrac{1}{2}(\sqrt{1+x^2}-1)$, $F(0)=0$, 求 $f(x)$

例题 36.38.

证明:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

October 20

例题 36.39.

设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有连续的一阶导数, $f'(x)=\frac{1}{1+f^2(x)}\left[\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})}\right]$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在

例题 36.40.

函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, $f(0)=1$ 且满足等式:

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0$$

(1). 求 $f'(x)$

(2). 证明: $x\geq 0, e^{-x}\leq f(x)\leq 1$

October 21

例题 36.41.

设 $f(x)=\int_{-1}^x(1-|t|)dt(x\geq -1)$, 求曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的面积

例题 36.42.

设函数 $f(x)$ 连续, $f'(0)$ 存在, $\forall x,y\in\mathbb{R}, f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}$, 且 $f'(0)=\frac{1}{2}$, 求 $f(x)$

36.4 Week IV

October 22

例题 36.43.

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上具有二阶连续导数, $f(0)=f'(0)=0, f''(0)=1, \forall x>0, u(x)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距, 当 $x\to 0^+$ 时, 下列等价无穷小不成立的是:

- A. $f(x)\sim\frac{x^2}{2}$
- B. $x\cdot f(u(x))\sim\frac{u(x)\cdot f(x)}{2}$
- C. $\int_0^x u(t)dt\sim\frac{x^2}{4}$

- D. $\int_0^{f(x)} u(t)dt \sim \frac{x^4}{4}$

例题 36.44.

比较 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}dx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2}dx$ 的大小

October 23

例题 36.45.

求曲线 $y = \frac{x^2}{1+x^2}$ 与其渐近线所围区域绕该渐近线旋转所得旋转体体积

例题 36.46.

设 A 是 n 阶矩阵, A 的第 i 行第 j 列元素为 a_{ij}, 满足 $a_{ij} = i \cdot j$, 下列命题正确的是:

- A. $r(A) = 1$
- B. 矩阵 A 不可相似对角化
- C. 矩阵 A 的特征值之和为 $\sum_{k=1}^{n} k$
- D. 矩阵 A 的特征值之和为 $\sum_{k=1}^{n} k^2$

October 24

例题 36.47.

$$\iint\limits_D \frac{1}{x^4+y^2}dxdy, D = \{(x,y)|y \geq x^2+1\}$$

例题 36.48.

$$\iint\limits_D \frac{1}{x^4+y^2}dxdy, D = \{(x,y)|x \geq 1, y \geq x^2\}$$

October 25

例题 36.49.

曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=mx(m>0)$ 在第一象限内所围成的图形绕该直线旋转所形成的旋转体的体积 V

例题 36.50.

设函数 $f(x,y)=\begin{cases}(xy+a|x|+b\sqrt{|y|})\arctan\dfrac{1}{|x|+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, 下列说法中正确的是:

- A. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性和 a,b 的取值有关
- B. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数存在的充要条件是 $ab=0$
- C. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微的充要条件是 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数存在
- D. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微, 则 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极值点

October 26

例题 36.51.

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, $f'(x)+f^2(x)\geq 0$, $f(0)=1$, $f(x)\neq 0$, 证明: $f(x)\geq\dfrac{1}{x+1}$

例题 36.52.

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $\int_0^1 f(x)dx=0$

- A. 当 $f'(x)<0$ 时,$f(\frac{1}{2})<0$
- B. 当 $f''(x)<0$ 时,$f(\frac{1}{2})<0$
- C. 当 $f'(x)>0$ 时,$f(\frac{1}{2})<0$
- D. 当 $f''(x)>0$ 时,$f(\frac{1}{2})<0$

October 27

例题 36.53.

$f(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2 & x^3\\ 1 & 2 & 4 & 8\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, 求曲线 $y=f(x)$ 在 $(-1,2)$ 内存在水平切线的条数

例题 36.54.

已知正值连续函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调减少,$\forall a,b(0<a<b<1)$, 下列结论不正确的是

- A. $a\int_0^b f(x)dx > b\int_0^a f(x)dx$
- B. $b\int_0^a f(x)dx > a\int_0^b f(x)dx$
- C. $a\int_0^b \sqrt{f(x)}dx < b\int_0^a \sqrt{f(x)}dx$
- D. $b\int_0^a \sqrt{f(x)}dx < a\int_0^b \sqrt{f(x)}dx$

October 28

例题 36.55.

设函数 $\varphi(x,y)$ 的全微分为 $dz=(2x-y^2-2y)dx+(-2xy-2x+y^3+3y)dy$,$f(x,y)$ 连续, 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{\varphi(x,y)}=-1$

- A. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点
- B. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点
- C. 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点
- D. 不能确定点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点

例题 36.56.

求 $\int_L \dfrac{|y|}{x^2+y^2+z^2}ds$, 其中 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x^2+y^2=2ax \qquad (a>0)\\ a\ge 0\end{cases}$

October 29

例题 36.57.

设 $I_1=\int_0^\pi \dfrac{x\sin^2 x}{1+e^{\cos^2 x}}dx$,$I_2=\int_0^\pi \dfrac{\sin^2 x}{1+e^{\cos^2 x}}dx$, $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^2 x}{1+e^{\sin^2 x}}dx$, 比较 I_1,I_2,I_3 的大小

例题 36.58.

设 $f(u,v)$ 有一阶偏导数,$f(x,1-x)=1, f_1'(x,1-x)=x$

(1). 设 $z(t)=f(\cos t,\sin t)$, 计算 $z'(0)$

(2). 证明: $f(u,v)$ 在单位圆周上至少存在两个不同的点满足方程: $v\dfrac{\partial f}{\partial u}=u\dfrac{\partial f}{\partial v}$

October 30

例题 36.59.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续可导,$\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{2}$, $\int_0^1 xf(x)dx=\frac{3}{2}$, 证明: $\exists\xi\in(0,1)$, $s.t.\ f'(\xi)=3$

例题 36.60.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos^3 x)(1-\cos^{17} x)}{\frac{x^2}{2}-\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)!}t^{2n+1}dt}$$

October 31

例题 36.61.

设偶函数 $f(t)$ 具有连续的导函数, 且满足 $f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\le 4t^2} f(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2})dxdy$, 求方程 $\int_0^x\sqrt{1+4\pi t^2}dt+\int_{\cos x}^0\frac{1+4\pi t^2}{f(t)}dt=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内根的个数

例题 36.62.

设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=f(2)=0, f(1)=a>0$ 且 $f''(x)<0$

- A. $\int_0^2 f(x)dx>a$
- B. $\int_0^2 f(x)dx<a$
- C. $\int_0^1 f(x)dx>\int_1^2 f(x)dx$
- D. $\int_0^1 f(x)dx<\int_1^2 f(x)dx$

第 37 章 November

37.1 Week I

November 1

例题 37.1.

设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2\sin x}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处

- A. 不连续
- B. 连续但不可导
- C. 可导但不可微
- D. 可微

例题 37.2.

$$\iint\limits_D \frac{1-x^3y^2}{(y+2\sqrt{1-x^2})^2}dxdy$$

其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1,-y\leq x\leq y\}$

November 2

例题 37.3.

$$\iiint\limits_{\Omega}(mx+ly+nz)^2dv$$

其中 $\Omega=\{(x,y,x)|x^2+y^2+z^2\le a^2(a>0)\}$

例题 37.4.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上导函数连续,$f'(a)=f'(b)$, 证明:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$$

November 3

例题 37.5.

下列函数在 $(0,0)$ 点可微的是:

- A. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$
- B. $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$
- C. $\varphi(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$
- D. $\psi(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

例题 37.6.

已知 $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-c)=k$

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^3&b^3&c^3&d^3\\a^4&b^4&c^4&d^4\end{vmatrix}$$

November 4

例题 37.7.

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_{x+y}^1 \frac{\sin z}{z} dz$$

例题 37.8.

已知函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的某邻域内有定义, 则 $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} f_x'(x,0) = f_x'(0,0) \\ \lim\limits_{y\to 0} f_y'(0,y) = f_y'(0,0) \end{cases}$ 和 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微关系

November 5

例题 37.9.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$$

A 是 n 阶可逆矩阵 $(b \neq 0)$, 求 A^{-1}

例题 37.10.

求微分方程 $y'' + (4x + e^{2y})(y')^3 = 0$ 的通解, 其中 $y' \neq 0$

November 6

例题 37.11.

设 $f(x)$ 二阶可导, $f^2(x) - f^2(y) = f(x+y) - f(x-y)$

(1) 证明: $f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$

(2) 若 $f''(1) = f(1) = 1$, 求 $f(x)$

例题 37.12.

$$z = \frac{x\cos(y-1) - (y-1)\cos x}{1 + \sin x + \sin(y-1)}$$

求 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)}$

November 7

例题 37.13.

已知 A 是正交矩阵, $A^* = A^T$ 和 $|A| = 1$ 关系

例题 37.14.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{i}}\right)$$

37.2 Week II

November 8

例题 37.15.

已知 $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, 求 $f''_{xy}(0,0) \cdot f''_{yx}(0,0)$

例题 37.16.

设矩阵 $A = (a_{ij})$ 满足 $a_{ij} = A_{ij}, a_{11} = -1$, 求 $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的解

November 9

例题 37.17.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{\sqrt{x^3}} dx$$

例题 37.18.

方程 $x = e^{\sin^n x} (n = 1, 2, \cdots)$

(1). 证明方程在 $(\frac{\pi}{2}, e)$ 内有唯一实数根

(2). 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n - \frac{\pi}{2}}}$

November 10

例题 37.19.

若 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1, \begin{cases} z=\sin y & x=0 \\ z=\sin x & y=0 \end{cases}$, 求 $z(x,y)$

例题 37.20.

设矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ 满秩, 直线 $l_1: \dfrac{x-a_1}{a_1-a_2}=\dfrac{y-b_1}{b_1-b_2}=\dfrac{z-c_1}{c_1-c_2}$ 与直线 $l_2: \dfrac{x-a_1}{a_2-a_3}=\dfrac{y-b_1}{b_2-b_3}=\dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$ 关系

November 11

例题 37.21.

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求 A^n

例题 37.22.

求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n^2}{(n+1)!}x^n$ 的和函数 $S(x)$

November 12

例题 37.23.

设可微函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-f(x,y), f(0,\dfrac{\pi}{2})=1$, 且 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{f(0,y+\frac{1}{n})}{f(0,y)}\right]^n=e^{\cot y}$, 求 $f(x,y)$

例题 37.24.

$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可微, $|f'(x)| < kf(x)(0<k<1)$

(1). $\exists\xi\in(-\infty,+\infty)$, $s.t.$ $\ln f(\xi)=\xi$

(2). 设 $a_n=\ln f(a_{n-1})(n=1,2,\cdots)$, 证明 $\{a_n\}$ 收敛

November 13

例题 37.25.

设 $f(x)$ 有连续一阶导数,$[xy-yf(x)]dx+[f(x)+y^2]dy=du(x,y)$, 且 $f(0)=-1$, 求 $u(x,y)$

例题 37.26.

(1). $\displaystyle\int_0^{\ln 2}dy\int_{e^y}^{2}\frac{e^{xy}}{x^x-1}dx$

(2). $\displaystyle\int_0^1 dx\int_x^1 ydy\int_y^1\sqrt{1+z^4}dz$

November 14

例题 37.27.

$f(x)$ 在 $x=0$ 处 $n+1$ 阶可导, $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0, f^{(n)}(0)=a$, 求 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(e^x-1)-f(x)}{x^{n+1}}$

例题 37.28.

函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z}+\dfrac{xyz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}=1$ 确定, 求 $dz|_{(0,0)}$

37.3 Week III

November 15

例题 37.29.

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有一阶连续导数

$$\forall\Sigma\in\mathbb{R}^3(x>0),\ \oiint_\Sigma e^{-x}f(x)dydz+y\sqrt{e^x-1}f^2(x)dzdx=0$$

求 $f(x)$

例题 37.30.

设 $f(t)$ 在 $[t,+\infty)$ 上有连续二阶导数, 且 $f(1)=0, f'(1)=1, z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, 求 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最大值

November 16

例题 37.31.

设 $u=f(x,y,z), z=z(x,y)$ 是由方程 $\varphi(x+y,z)=1$ 所确定的隐函数, 其中 f 和 φ 有二阶连续偏导数且 $\varphi_2\neq 0$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, du, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$

例题 37.32.

设函数 $z=z(x,y)$ 的微分 $dz=(2x+12y)dx+(12x+4y)dy$ 且 $z(0,0)=0$, 求函数 $z=z(x,y)$ 在 $4x^2+y^2\leq 25$ 上的最大值

November 17

例题 37.33.

求累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$ 的等价形式

例题 37.34.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} \rho^2 d\rho + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dy$$

November 18

例题 37.35.

$$\int_0^1 dy \int_y^1 \sqrt{2xy-y^2}dx$$

例题 37.36.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{2n+1}}\left[\int_1^{\frac{1}{2n}}e^{-y^2}dy+\int_1^{\frac{3}{2n}}e^{-y^2}dy+\cdots+\int_1^{\frac{2n-1}{2n}}e^{-y^2}dy\right]$$

November 19

例题 37.37.

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

其中 $D=[0,1]\times[0,1]$

例题 37.38.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\left[\sin\theta+\cos\theta\sqrt{1+r^2\sin^2\theta}\right]r^2dr$$

November 20

例题 37.39.

$$\begin{cases} I_1=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}d\sigma \\ I_2=\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}d\sigma \\ I_3=\iint\limits_D(1-\cos\sqrt{x^2+y^2})d\sigma \end{cases}$$

其中 $D=\{(x,y)||x|+|y|\le\frac{\pi}{2}\}$, 比较 I_1,I_2,I_3 的大小

例题 37.40.

$$\begin{cases} I_1=\iint\limits_D(2x^2+\tan(xy^2))dxdy \\ I_2=\iint\limits_D(x^2y+2\tan(y^2))dxdy \\ I_3=\iint\limits_D(|xy|+y^2)dxdy \end{cases}$$

其中 $D=\{(x,y)||x|+|y|\le1\}$, 比较 I_1,I_2,I_3 的大小

November 21

例题 37.41.

可微函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(x)dx$, 且 $f(0) = 1$, 求 $f(x)$

例题 37.42.

设 $f(x)$ 是可导函数, 且 $f(0) = 0, g(x) = \int_0^1 xf(tx)dt$ 满足方程 $f'(x) + g'(x) = x$, 则由曲线 $y = f(x), y = e^{-x}$ 及直线 $x = 0, x = 2$ 围成的平面图形的面积

37.4 Week IV

November 22

例题 37.43.

设函数 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f'(x) = f(1-x), f(0) = 1$, 求 $f(x)$

例题 37.44.

设函数 $f(x)$ 连续, $\lim\limits_{x\to 0}[1 + f(x)]^{\frac{1}{x^4}} = a(a > 0)$, 且

$$\forall x, h \in \mathbb{R}, f(x+h) = \int_x^{x+h} t\left[f(t+h) + t^2\right]dt + f(x)$$

求 $f(x)$ 表达式和常数 a

November 23

例题 37.45.

设 $f(x)$ 为 $[0, +\infty)$ 上的正值连续函数, 已知曲线 $y = \int_0^x f(u)du$ 和 x 轴及直线 $x = t(t > 0)$ 所围成区域绕 y 轴旋转所得体积与曲线 $y = f(x)$ 和两坐标轴及直线 $x = t(t > 0)$ 所围区域的面积之和为 t^2, 求曲线 $y = f(x)$ 的方程

例题 37.46.

下列级数收敛的是:

- A. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{\ln(n!)}$
- B. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (2 - \dfrac{1}{n})^n \ln(1 + \dfrac{1}{n2^n})$
- C. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-2)^n n^2 + e^n}{ne^n}$

- D. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^n}{3^n - 2^n}$

November 24

例题 37.47.

下列级数条件收敛的是:

- A. $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$
- B. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \ln(1 + \frac{1}{n})$
- C. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left[(-1)^n + \ln n\right]}{n}$
- D. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$

例题 37.48.

讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}$ 敛散性

November 25

例题 37.49.

已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1} - b_n)$ 条件收敛, 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n^2$ 的敛散性

例题 37.50.

已知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则下列级数一定收敛的是:

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n}$
- B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$
- C. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$
- D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^3 + a_n^2}$

November 26

例题 37.51.

已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 下列四个级数一定收敛的个数:

- A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$
- B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$
- C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{2n}-a_{2n-1})$
- D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}^2-a_n^2)$

例题 37.52.

设 a_n 为曲线 $y=\sin x, (0\le x\le n\pi)$ 与 x 轴所围区域绕 x 轴旋转所得到旋转体的体积, 求级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\pi^2}{2a_{n+1}}$ 的和

November 27

例题 37.53.

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{nt^{n-1}}{1+e^{xt}}dt$$

求 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$

例题 37.54.

证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 收敛并求其和

November 28

例题 37.55.

设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$, 其中 n 为正整数

(1). 若 $n\ge 2$, 计算 I_n+I_{n-2}

(2). 设 p 为实数, 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n I_n^p$ 的绝对收敛性和条件收敛性

例题 37.56.

设幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{x^{2n+2}}{n+1}$

(1). 求该幂级数的收敛区间以及和函数

(2). 求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{(2n+1)!!}\frac{1}{n+1}$ 的和

(3). $2f(\frac{1}{\sqrt{2}})-1=\frac{\pi^2}{8}-1$

November 29

例题 37.57.

设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续可微,λ 为实数, 证明: 当且仅当 $f(x)e^{\lambda x}$ 单调不减时,$f'(x)+\lambda f(x)$ 单调不减

例题 37.58.

$\Omega=\{(x,y,z)|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$, 求 $\iiint\limits_{\Omega}(3x+2y+z)^2dv$

November 30

例题 37.59.

设曲线 $C:x^2+y^2=2x$, 求 $\oint_C\frac{(x+y+1)^2}{(x-1)^2+y^2}ds$

例题 37.60.

设曲面 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=2y$, 求 $\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+2y^2+3z^2)dS$

第 38 章 December

38.1 Week I

December 1

例题 38.1.

计算曲线积分 $I=\oint_L \dfrac{xdy-ydx}{x^2+xy+y^2}$, 其中 L 为 $|x|+|y|=1$, 其方向为逆时针方向

例题 38.2.

计算曲线积分 $I=\oint_L \left[\dfrac{4x-y}{4x^2+y^2}-\dfrac{y}{(x-1)^2+y^2}\right]dx+\left[\dfrac{x+y}{4x^2+y^2}+\dfrac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\right]dy$, 其中 L 是 $x^2+y^2=4$, 方向为逆时针方向

December 2

例题 38.3.

设 Ω 是由平面曲线 $\begin{cases}4y^2+z^2=4\\ x=0\end{cases}$ $(z\geq 0)$ 绕 z 轴旋转一周形成的空间曲面, 取上侧, 计算曲面积分:

$$I=\iint_{\Omega}\frac{x^2ydydz+y^2zdzdx+(z^2+1)dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+(\frac{z}{2})^2+3}}$$

例题 38.4.

设函数 $f(x,y,z)$ 在区域 $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1\}$ 上具有连续一阶偏导数, 且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 计算:

$$\iiint\limits_{\Omega}(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z})dxdydz$$

December 3

例题 38.5.

设 A 为三阶方阵, 并有可逆矩阵 $P=(p_1,p_2,p_3)$, $p_i(i=1,2,3)$ 为三维列向量, 使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(1). 证明: p_1,p_2 是方程 $(E-A)x=0$ 的解, p_3 是方程 $(E-A)x=-p_2$ 的解, 且 A 不可相似对角化

(2). 当 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-1&-2\\-1&1&2\end{pmatrix}$ 时, 求可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

例题 38.6.

已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x f(x)+\sin x}{x^2}=1$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+\sin x}{x^2}$

December 4

例题 38.7.

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内可导, 且 $f(0)+3f'(0)=1$, 求:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_x^{\ln(1+x)}f(x+t)dt+[\sin x-\ln(1+x)]\,f(x)}{x^3}$$

例题 38.8.

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x}{(e^x-1)\cos\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{(1+\sin x^2)^{\frac{1}{x}}-1}}$$

December 5

例题 38.9.

设 $f(x)$ 连续, 且 $f(0)\neq 0$, 求 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+\int_0^x(x-t)f(t)dt\right]^{\frac{1}{x\int_0^x f(x-t)dt}}$

例题 38.10.

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶导数连续, $f(1)\leq 0$, $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-|x|]=0$, 证明:

(1). $\exists\xi\in(1,+\infty),\ s.t.\ f'(\xi)>1$

(2). $\exists\eta\in(-\infty,+\infty),\ s.t.\ f''(\eta)=0$

December 6

例题 38.11.

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{2x}|t-x|\sin t\,dt}{|x|^3}$$

例题 38.12.

求使得 $\oint_L(2y^3-3y)dx-x^3dy$ 的值最大的平面正向边界曲线 L

December 7

例题 38.13.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{(1+x)^{\frac{1}{x}}}-(1+x)^{\frac{e}{x}}}{x^2}$$

例题 38.14.

设曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与平面 $z=x$ 的交线为 L, 起点为 $A(0,1,0)$, 终点为 $B(0,-1,0)$, 求 $\oint_L(x+y-z)dx+|y|dz$

38.2 Week II

December 8

例题 38.15.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\ln(1+\frac{k}{n^2})$$

例题 38.16.

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n}{n^2+n+\ln 1}+\frac{n}{n^2+n+\ln 2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+\ln n}\right]^n$$

December 9

例题 38.17.

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right]^n$$

例题 38.18.

以下两个矩阵, 可以用同一个可逆矩阵 **P** 相似对角化的是:

- A. $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$
- B. $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$
- C. $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$
- D. $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

December 10

例题 38.19.

设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上一阶可导, $f(0)=0$, $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得最大值 $M, x_0\in(0,2)$, 且 $f'(x)\le M$, 证明:

(1). 当 $x \in [0, x_0]$ 时, 有 $f(x) = Mx$
(2). $M = 0$

例题 38.20.

设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 对任意的正整数, 满足 $a_n < b_n < a_{n+1}$, 则:

- A. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- B. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均发散, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$
- C. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 具有相同的敛散性
- D. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 具有不同的敛散性

December 11

例题 38.21.

若可逆线性变换 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ 可将二次型 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$ 化为规范型 $y_1^2 + y_2^2$, 同时将二次型 $g(x_1, x_2) = -x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$ 化为标准型 $k_1y_1^2 + k_2y_2^2$, 求可逆矩阵 $\mathbf{P}$ 及 k_1, k_2 的值

例题 38.22.

设有数列 $\{x_n\}$, 已知 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$, 求下列说法正确的个数:

- (1). $\{x_n\}$ 必收敛
- (2). 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 必收敛
- (3). 若 $\{x_n\}$ 有界, 则 $\{x_n\}$ 必收敛
- (4). 若 $\{x_{3n}\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 必收敛

December 12

例题 38.23.

设 $f(x)$ 有连续一阶导数, 且 $0 < f'(x) \leq \dfrac{\ln(2+x^2)}{2(1+x^2)}$, 数列 $x_0 = a, x_n = f(x_{n-1})(n = 1, 2, \cdots)$, 证明:

(1). 极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n$ 存在且是方程 $f(x) = x$ 的唯一实根

(2). 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [f(x_n) - x_n]$ 收敛

(3). 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [x_n - A]$ 绝对收敛, 其中 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = A$

例题 38.24.

设 $f(x)=x+a\ln(1+x)+\dfrac{bx\sin x}{1+x^2}, g(x)=cx^3$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小

- A. $a=1, b=-\dfrac{1}{2}, c=\dfrac{1}{3}$
- B. $a=1, b=-\dfrac{1}{2}, c=-\dfrac{1}{3}$
- C. $a=-1, b=\dfrac{1}{2}, c=-\dfrac{1}{3}$
- D. $a=-1, b=-\dfrac{1}{2}, c=-\dfrac{1}{3}$

December 13

例题 38.25.

设 $f(x)$ 为连续函数,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\ln(1+x)}{x^2}=2, F(x)=\int_0^x tf(x-t)dt$, 当 $x\to 0$ 时, $F(x)-\dfrac{1}{2}x^2$ 与 bx^k 为等价无穷小, 其中常数 $b\neq 0$,k 为正整数, 求 $k, b, f(0), f'(0)$

例题 38.26.

设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2e^{(n+1)x}+1}{e^{nx}+x^n+1}, f(x)$

- A. 仅有一个可去间断点
- B. 仅有一个跳跃间断点
- C. 有两个可去间断点
- D. 有两个跳跃间断点

December 14

例题 38.27.

下列命题成立的是:

- A. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f[\varphi(x)]-f(0)}{\varphi(x)}$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导
- B. 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f[\varphi(x)]-f(0)}{\varphi(x)}=f'(0)$
- C. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)-f(0)}{\sqrt{x^2}}$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导
- D. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sqrt[3]{x})-f(0)}{\sqrt{x^2}}$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

例题 38.28.

设 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧, 求 $\displaystyle\oiint_{\Sigma}\frac{dydz}{x}+\frac{dzdx}{y}+\frac{dxdy}{z}$

38.3 Week III

December 15

例题 38.29.

设 $f(x)$ 在 x_0 点可导,α_n,β_n 为趋于零的正项数列, 求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}$

例题 38.30.

设函数 $\varphi(x)=\displaystyle\int_0^{\sin x}f(tx^2)dt$, 其中 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(0)=2$

(1). 求 $\varphi'(x)$

(2). 讨论 $\varphi'(x)$ 的连续性

December 16

例题 38.31.

设 $x=\int_0^1 e^{tu^2}du, y=y(t)$ 由方程 $t-\displaystyle\int_1^{y+t}e^{-u^2}du=0$ 所确定, 求:

(1). $\dfrac{dy}{dt}\Big|_{t=0}, \dfrac{d^2y}{dt^2}\Big|_{t=0}, \dfrac{dx}{dt}\Big|_{t=0}, \dfrac{d^2x}{dt^2}\Big|_{t=0}$

(2). $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=0}, \dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}$

例题 38.32.

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sin x}{x^3} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 处处连续, 求 $f''(0)$

- A. 0
- B. 不存在
- C. $\dfrac{1}{60}$
- D. $-\dfrac{a}{10}$

December 17

例题 38.33.

设方程 $a^x = bx(a > 1)$ 有两个不同的实根, 求常数 a, b 应满足的关系式

例题 38.34.

设 $y(x)$ 满足 $y'' + 2ay' + b^2y = 0(a > b > 0), y(0) = 1, y'(0) = 1$, 求 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$

December 18

例题 38.35.

设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty]$ 上二阶可导, 且 $f(0) = 0, f''(x) < 0$, 则当 $0 < a < x < b$ 时, 下面哪个选项正确:

- A. $af(x) > xf(a)$
- B. $bf(x) > xf(b)$
- C. $xf(x) < bf(b)$
- D. $xf(x) > af(a)$

例题 38.36.

设 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f(1) = 6, f'(1) = 0$, 且当 $x \geq 1, x^2f''(x) - 3xf'(x) - 5f(x) \geq 0$, 证明: 当 $x \geq 1$ 时,$f(x) \geq x^5 + \frac{5}{x}$

December 19

例题 38.37.

设 $f(x) = \int_0^x t|x - t|dt - \frac{x^2}{6}$, 求:
(1). 函数 $f(x)$ 的极值和曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间和拐点
(2). 曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴围成的区域的面积及绕 y 轴旋转所得旋转体的体积

例题 38.38.

求曲线 $y = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1 + x^2}$ 的渐近线

December 20

例题 38.39.

设 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上二阶可导, 且 $|f(x)| \leq 1$, 又 $[f(0)]^2 + [f'(0)]^2 = 4$, 证明: $\exists\xi \in (-2,2)$, $s.t.\ f''(\xi) + f(\xi) = 0$

例题 38.40.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 $n+1$ 阶导数, 且 $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0(k = 0,1,2,\cdots,n)$, 证明: $\exists\xi \in (a,b)$, $s.t.\ f^{(n+1)}(\xi) = f(\xi)$

December 21

例题 38.41.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$, 证明:

(1). $\exists\xi,\eta \in (0,1)$, $s.t.\ [1+\eta f(\eta)]f'(\xi) = f'(\eta) + f^2(\eta)$

(2). $\exists\xi,\eta \in (0,1), \xi < \eta$, $s.t.\ f'(xi) + f'(\eta) = 2$

例题 38.42.

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $f(1) > g(1), f(0) > g(0)$, $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx$, 证明: $\exists\xi \in (0,1)$, $s.t.\ f''(\xi) > g''(\xi)$

38.4 Week IV

December 22

例题 38.43.

设 α 为正整数, 且反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$ 收敛, 求 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$

例题 38.44.

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续且单调,$f(x+2) - f(x) = 4(x+2), f(0) = 1$, $\int_1^9 f^{-1}(x)dx = \frac{28}{3}$, 其中 $f^{-1}(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数, 求 $\int_1^3 f(x)dx$

December 23

例题 38.45.

求曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 与直线 $y=x$ 及 $y=2$ 所围区域绕 $y=2$ 旋转所得旋转体的体积

例题 38.46.

设曲线 $y=\sin x(0\le x\le n\pi, n=1,2,\cdots)$ 和 x 轴围成的区域为 A, 区域 A 绕 y 轴旋转所得旋转体体积为 S_n

(1). 求 S_n

(2). 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{S_1}{n^3+1^3}+\dfrac{S_2}{n^3+2^3}+\cdots+\dfrac{S_n}{n^3+n^3}]$

December 24

例题 38.47.

设 $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx$, 证明:

$$\exists\xi,\eta\in(0,1),\xi\neq\eta,\ s.t.\ f'(\xi)=g'(\xi)[f(\eta)-f(\xi)]$$

例题 38.48.

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有连续导数, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}n[\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(a+\frac{k(b-a)}{n})]=\frac{b-a}{2}[f(a)-f(b)]$$

December 25

例题 38.49.

设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续

(1). 证明 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}f(x)|\sin nx|dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(x)dx$

(2). 求极限 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}|\sin nx|\ln(1+x)dx$

例题 38.50.

设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x+y)\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, 则 $f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处

- A. 不连续
- B. 两个偏导数都不存在
- C. 两个偏导数存在但不可微
- D. 可微

December 26

例题 38.51.

$\lim\limits_{x\to 0 y\to 0}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 是函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微的:

- A. 充分必要条件
- B. 必要条件但非充分条件
- C. 充分条件但非必要条件
- D. 既非充分也非必要条件

例题 38.52.

设 $f_x(x_0,y_0)$ 存在,$f_y(x_0,y_0)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续, 证明: $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微

December 27

例题 38.53.

设 $u=u(\sqrt{x^2+y^2})$ 具有连续的二阶偏导数, 且满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+u=x^2+y^2$, 试求函数 u 的表达式

例题 38.54.

设 $f(x,y)$ 有二阶连续导数,$g(x,y)=f(e^{xy},x^2+y^2)$ 且 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)+x+y-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0$, 证明: $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点取得极值, 判断此极值是极大值还是极小值, 并求出此极值

December 28

例题 38.55.

设区域 D 由 $x^2+y^2\le 2x+2y$ 所确定, 求 $\iint\limits_D[x(1-y^3)+y(1+x^3)]d\sigma$

例题 38.56.

设 $D=\{(x,y)|0\le x\le 2,0\le y\le 2\}$

(1). 计算 $b=\iint\limits_D |xy-1|d\sigma$

(2). 设 $f(x,y)$ 在 D 上连续, 且 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=0,\ \iint\limits_D xyf(x,y)d\sigma=1$, 证明: $\exists(\xi,\eta)\in D,\ s.t.\ |f(\xi,\eta)|\ge\dfrac{1}{b}$

例题 38.57.

求 $I=\oint\limits_L (y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$, 其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=2bx$ 与柱面 $x^2+y^2=2ax(b>a>0)$ 的交线 $(z\ge 0)$, L 的方向规定为沿 L 的方向运动时, 从 z 轴正往下看, 曲线 L 所围球面部分总在左边

December 29

例题 38.58.

设 $f(x)$ 有一阶连续导数,$(xy-yf(x))dx+(f(x)+y^2)dy=du(x,y)$, 其中 $f(0)=-1,u(0,0)=0$, 则函数 $u(x,y)$ 在条件 $xy=1,x>0$ 下最值情况:

- A. 最大值为 $\dfrac{5}{3}$
- B. 最大值为 5
- C. 最小值为 -3
- D. 最小值为 $\dfrac{1}{3}$

例题 38.59.

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, 区域 D 由不等式 $x^2+y^2\le t^2(t\ge 0),x\ge 0,y\ge 0$ 所确定, 且 $f(t)=2\iint\limits_D [(x-1)^2+(y+1)^2]f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy+\dfrac{t^4}{4}+t^2$, 求 $f(x)$

例题 38.60.

设 $f(x,y)$ 连续, 且 $f(x,y)=x^2-y^2+\int\limits_L \dfrac{yf(x,y)dx+xf(x,y)dy}{x^2+y^2}$, 其中 L 是从点 $A(-1,0)$ 到 $B(1,0)$ 的上半圆周 $y=\sqrt{1-x^2}$, 求 $f(x,y)$

December 30

例题 38.61.

设函数 $f(x)$ 满足 $xf'(x)-3f(x)+6x^2=0$, 且由曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=1$ 与 x 轴围成的平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积最小, 求 D 的面积

例题 38.62.

下列级数中条件收敛的是:

- A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$
- B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\ln(1+\dfrac{1}{n})$
- C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n[(-1)^n+\ln n]}{n}$
- D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$

例题 38.63.

已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处的梯度 $\mathbf{grad}f(1,1)=2i-j$, 求函数 $f(x,y)$ 在该点沿曲线 $e^{x-1}+xy=2$ 在该点处切线方向 (与 y 轴正向夹角小于 $\frac{\pi}{2}$) 的方向导数

December 31

例题 38.64.

下列结论正确的是:

- A. 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n, \sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别是 R_1,R_2, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n$ 的收敛半径为 $R=\min\{R_1,R_2\}$
- B. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $R=2$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}|=\dfrac{1}{2}$
- C. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}$ 的收敛半径为 $\sqrt{R}$
- D. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ 的收敛半径为 $\sqrt{R}$

例题 38.65.

设 $a_0=0, a_1=1, a_{n+1}=3a_n+4a_{n-1}(n=1,2,3,\cdots)$

(1). 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

(2). 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n!}x^n$ 的收敛域以及和函数

例题 38.66.

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $\int_0^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛, 令 $a_n = \int_0^1 f(nx)dx$, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{n^\alpha}(\alpha > 0)$ 收敛

第七部分

Summary

第 7 部分目录

第 39 章 Summary

39.1 柯西收敛准则

定理 39.1.1 (柯西收敛准则)

柯西极限存在准则, 又称柯西收敛准则, 给出某个式子 (数列、数项级数、函数等) 收敛的一个充分必要条件, 主要应用在数列、数项级数、函数、反常积分、函数列和函数项级数等的收敛性判断中

命题 39.1.1 (柯西收敛准则: 数列)

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^{+},\ s.t.\ n, m > N, |a_n - a_m| < \varepsilon$$

满足条件的 $\{a_n\}$ 称为柯西序列, 上述定理也可表述为: 数列 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当 $\{a_n\}$ 是柯西序列

证明

(1). 必要性:

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \eta$, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_0 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_0$ 时, $|a_n - \eta| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, 我们有:

$$\begin{cases} \forall n > N_0, s.t.\ |a_n - \eta| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \forall m > N_0, s.t.\ |a_m - \eta| < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow |x_n - x_m| = |(x_n - \eta) - (x_m - \eta)| \le |x_n - \eta| + |x_m - \eta| \le \varepsilon$$

(2). 充分性:

命题 39.1.2 (柯西收敛准则: 数项级数)

数项级数收敛的充要条件:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+,\ s.t.\ m > n > N, |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_m| < \varepsilon$$

证明

不妨设数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的部分和为 S_n, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛当且仅当 $\lim_{n\to+\infty} S_n$ 存在
数列的柯西收敛准则:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+,\ s.t.\ n, m > N, |S_n - S_m| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_m| < \varepsilon$$

命题 39.1.3 (柯西收敛准则: 函数)

(1). $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 收敛的充要条件:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ s.t.\ x_1, x_2 \in \mathring{U}(x_0, \delta), |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

(2). $\lim_{x\to\infty} f(x)$ 收敛的充要条件:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,\ s.t.\ |x_1|, |x_2| > |X|, |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

命题 39.1.4 (柯西收敛准则: 反常积分)

1. 无穷积分

(1). $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的充要条件:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,\ s.t.\ q > p > X([p, q] \subset [a, +\infty)), |\int_p^q f(x)dx| < \varepsilon$$

(2). $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ 收敛的充要条件:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,\ s.t.\ p < q < -X([p, q] \subset (-\infty, a]), |\int_p^q f(x)dx| < \varepsilon$$

2. 瑕积分

(1). $\int_a^b f(x)dx$ 收敛的充要条件:($x = a$ 是瑕点)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ s.t.\ a < p < q < a + \delta([p, q] \subset [a, b]), |\int_p^q f(x)dx| < \varepsilon$$

(2). $\int_a^b f(x)dx$ 收敛的充要条件:($x = b$ 是瑕点)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ s.t.\ b-\delta < p < q < b([p,q] \subset [a,b]), |\int_p^q f(x)dx| < \varepsilon$$

命题 39.1.5 (柯西收敛准则: 函数列和函数项级数)

39.2 双曲函数

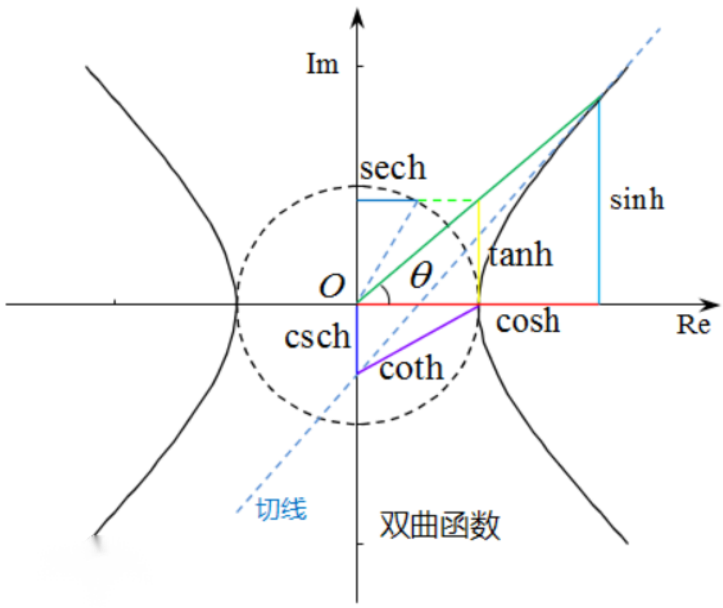


图 39.1: 双曲函数示意图

定义 39.2.1 (双曲函数)

双曲函数是一种类似于三角函数的一类函数, 基本的函数有双曲正弦函数和双曲余弦函数, 借由指数函数定义

1. 双曲正弦函数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

2. 双曲余弦函数

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \to [1, +\infty]$$

3. 双曲正切函数

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \to (-1, 1)$$

恒等式:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 = 1$$

$$\sinh x = -i \sin ix, \quad \cosh x = \cos ix$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

定义 39.2.2 (反双曲函数)

1. 反双曲正弦函数

$$\operatorname{arsinh} x = ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad (arsinhx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

2. 反双曲余弦函数

$$\operatorname{arcosh} x = ln(x + \sqrt{x^2-1}), \quad (arcoshx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

3. 反双曲正切函数

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} ln(\frac{1+x}{1-x}), \quad (artanhx)' = \frac{1}{1-x^2}$$

39.3 两类欧拉积分

定义 39.3.1 (*Gamma* 函数和 *Beta* 函数)

1. *Gamma* 函数 (欧拉第一类积分)

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = B(q,p)$$

$$B(a,b) = (\frac{x^a(1-x)^b}{a})\Big|_0^1 + \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-2}dx$$

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a}\int_0^1 (x-1+1)x^{a-1}(1-x)^{b-2}$$

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a}[B(a,b-1) - B(a,b)]$$

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1)$$

特别的:

$$B(m,n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$$

2.*Beta* 函数 (第二类欧拉积分)

$$\Gamma(\alpha)=\begin{cases}\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx\\ 2\int_0^{+\infty}x^{2\alpha-1}e^{-x^2}dx\end{cases}$$

$$\Gamma(\alpha)=(-x^{\alpha-1}e^{-x})\Big|_0^{+\infty}+(\alpha-1)\int_0^{+\infty}x^{\alpha-2}e^{-x}dx$$

$$\boxed{\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)}(\alpha>1)$$

有两个特别的 α, 分别是 $\alpha=\frac{1}{2}$ 和 $\alpha=1$:

$$\begin{cases}\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1 & \alpha=1\\ \int_0^{+\infty}x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx=2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi} & \alpha=\frac{1}{2}\end{cases}$$

特别的

$$\boxed{\Gamma(n+1)=n!}$$

3. 两类积分之间的关系

转换公式:

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

39.4 多项式函数极值点和拐点

定理 39.4.1 (代数基本定理)

任何一个一元 n 次复系数多项式, 都恰好有 n 个复根, 且可以表示为 n 个一次因式的乘积

推论 39.4.1 (曲线的极值点和拐点)

曲线上的可导点不可能同时是极值点和拐点, 不可导点可能同时是极值点和拐点

命题 39.4.1 (多项式函数极值点和拐点个数: 命题一)

多项式函数 $f(x)=(x-a)^n(n>1)$, 当 n 为奇数时, $(a,0)$ 是 $f(x)$ 的拐点, 当 n 为偶数时, $x=a$ 是 $f(x)$ 的极值点

证明

$$\begin{cases}f'(x)=n(x-a)^{n-1}\\ f''(x)=n(n-1)(x-a)^{n-2}\end{cases}$$

当 n 为偶数时, $f'(a)=0$ 且

$$\exists\delta>0, x\in(a-\delta,a), f'(x)<0; x\in(a,a+\delta), f'(x)>0$$

当 n 为偶数时, $x=a$ 是 $f(x)$ 的极值点
当 n 为奇数时, $f''(a)=0$ 且

$$\exists\delta>0, x\in(a-\delta,a), f''(x)<0; x\in(a,a+\delta), f''(x)>0$$

当 n 为奇数时, $(a,0)$ 是 $f(x)$ 的拐点

命题 39.4.2 (多项式函数极值点和拐点个数: 命题二)

多项式函数 $f(x)=(x-a)^n g(x)(n>1), g(a)\neq 0$, 当 n 为奇数时, $(a,0)$ 是 $f(x)$ 的拐点, 当 n 为偶数时, $x=a$ 是 $f(x)$ 的极值点

证明

$$\begin{cases} f'(x)=(x-a)^{n-1}\left[ng(x)+(x-a)g'(x)\right] \\ f''(x)=(x-a)^{n-2}\left[n(n-1)g(x)+2n(x-a)g'(x)+(x-a)^2g''(x)\right] \end{cases}$$

当 n 为偶数时, 不妨假设 $g(a)>0$, 极限的保号性:

$$\exists\delta_1>0, s.t.\ x\in U(a,\delta_1), g(a)>0$$

当 $x\in U(a,\delta_1), f(x)=(x-a)^n g(x)\geq f(a)=0, x=a$ 是 $f(x)$ 的一个极值点
当 n 为奇数时, $x\to a, (x-a), (x-a)^2$ 是无穷小量, $g'(a), g''(a)$ 都是定值

$$\exists\delta_2>0, s.t.\ x\in U(a,\delta_2), 2n(x-a)g'(x)+(x-a)^2g''(x)\leq|n(n-1)g(x)|$$

$x\in U(a,\delta_2), \left[n(n-1)g(x)+2n(x-a)g'(x)+(x-a)^2g''(x)\right]>0$, $f''(x)$ 与 $(x-a)^{n-2}$ 符号相同
当 $x\in(a-\delta_2,a), f''(x)<0; x\in(a,a+\delta_2), f''(x)>0$, $(a,0)$ 是 $f(x)$ 的一个拐点

命题 39.4.3 (多项式函数极值点和拐点个数: 命题三)

讨论多项式函数 $P_n(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{p_i}$ 极值点和拐点个数, 其中满足:

$$p_i\in\mathbb{Z}^+, p_1<p_2<\cdots<p_k, a_i\in\mathbb{R}$$

推论 39.4.2 (极值点和拐点个数)

假设 $P_n(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{p_i}$, 其中 k_1 个 p_i 为奇数 (大于 1), k_2 个 p_i 为偶数, k_0 个 $p_i=1$, 满足 $k_0+k_1+k_2=k$

- $P_n(x)$ 的极值点个数 $k-1+k_2=k_0+k_1+2k_2-1$
- $P_n(x)$ 的拐点个数 $k+2k_1+k_2-2=k_0+3k_1+2k_2-2$

证明

(1). 极值点个数

$P_n(x)$ 是多项式函数, 在 $\mathbb{R}$ 上 n 阶可导

$$\begin{cases} P_n(x)\text{极值点满足: } P_n'(x)=0 \\ P_n(x)\text{拐点满足: } P_n''(x)=0 \end{cases}$$

$P(x)$ 有 k 个实数根, k 个实数根的重数分别为 $p_1,p_2,\cdots,p_k$, 且 $\sum_{i=1}^{k}p_i=n$

$$\text{不妨设}\begin{cases} k_0=N(p_i=1) \\ k_1=N(p_i\in\{2k+1,k\in\mathbb{Z}^+\}) \\ k_2=N(p_i\in\{2k,k\in\mathbb{Z}^+\}) \end{cases}$$

$$P_n'(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{p_i-1}\left[\sum_{i=1}^{k}p_i\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(x-a_j)\right)\right]$$

当 $p_i\geq 2(i=k_0+1,k_0+2,\cdots,k)$ 时, $x=a_i$ 是 $P_n'(x)$ 的一个零点, 此类零点一共有 $k-k_0$ 个, $P_n'(x)$ 有 p_i-1 重根 a_i

$P_n'(x)$ 此类的零点个数为 $n_1=\sum_{i=k_0+1}^{k}(p_i-1)=n-k$

将 $P(x)$ 的 k 个零点按照从小到大排列: $a_1,a_2,\cdots,a_k$

罗尔定理:

$$\exists\xi_i\in(a_i,a_{i+1})(i=1,2,\cdots,k-1),\ s.t.\ P'(\xi_i)=0$$

$P_n'(x)$ 此类的零点个数为 $n_1=k-1$ 个; $P_n'(x)$ 是 $n-1$ 次多项式函数, 至多有 $n-1$ 个复根, $P_n'(x)$ 有 $n-k+k-1=n-1$ 个实数根, 其中前面 $n-k$ 个根中存在重根情况

推论 39.4.3 (多项式函数零点)

$P_n(x)$ 有 n 个实数根 (含重根), 那么 $P_n'(x),P_n''(x),\cdots,P_n^{(n-1)}(x)$ 的根全部是实数

$P_n'(x)$ 的两类零点

$$P_n'(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{p_i-1}f(x)$$

第一类零点:

pro 39.4.2: 当 p_i 为偶数, a_i 是 $P_n(x)$ 的极值点, 共有 k_2 个极值点

第二类零点:

$f(\xi_i)=0(\xi_i\in(a_i,a_{i+1}))$, 当 $x\in U(\xi_i,\delta)$ 时, 只有 $(x-\xi_i)$ 这一项符号改变, 因此 $x=\xi_i$ 是 $P_n(x)$ 极值点, 共有 $k-1$ 个极值点

综上, $P_n(x)$ 的极值点个数为 $k-1+k_2=k_0+k_1+2k_2-1$

(2). 拐点个数

类比极值点个数的方法, 求 $P_n'(x)$ 极值点个数

$$P_n'(x)=\sum_{i=1}^{k}p_i\left[(x-a_1)^{p_1-1}(x-\xi_1)(x-a_2)^{p_2-1}\cdots(x-\xi_{k-1})(x-a_k)^{p_k-1}\right]$$

$P_n'(x)$ 的极值点有两类：

i. 第一类是 $P_n'(x)$ 相邻两个零点之间的点, 也是 $P_n''(x)$ 的极值点, 共有 k_1+k_2+k-2 个

ii. 第二类是 $P_n'(x)$ 的部分零点, 也是 $P_n''(x)$ 的极值点, 当 p_i-1 为偶数, $x=a_i$ 是 $P_n''(x)$ 的极值点, 共有 k_1 个

综上, $P_n(x)$ 的拐点个数为 $k+2k_1+k_2-2$

39.5 阿达玛不等式

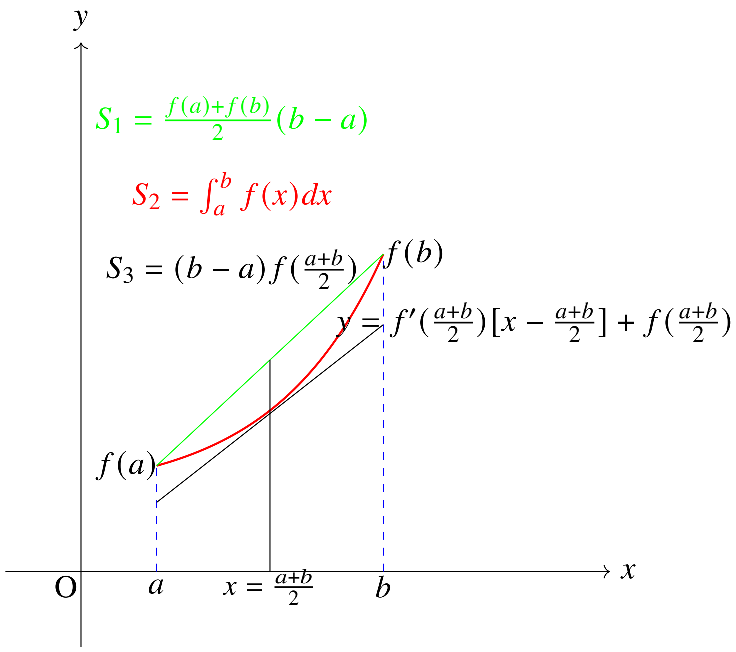


图 39.2: *Hadamard* 不等式

定理 39.5.1 (Hadamard 不等式)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x) \geq 0$, 下面不等式成立:

$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq \frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$$

39.6 特殊曲线

定义 39.6.1 (特殊曲线)

几类特殊曲线的面积、弧长、旋转体体积

1. 心形线 $\quad r = a(1+\cos\theta)$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta d\theta} = 8a$$

$$S = \int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta = 3\pi a^2$$

2. 摆线 $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1-\cos\theta) \end{cases}$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta d\theta} = 8a$$

$$S=\int_0^{2a\pi} f(x)dx=\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos\theta)^2 d\theta=3\pi a^2$$

3. 星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a\cos^3\theta \\ y=a\sin^3\theta \end{cases}$

$$L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sin\theta\cos\theta d\theta=6a$$

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sin^4\theta\cos^2\theta=\frac{3\pi}{8}a^2$$

4. 三叶玫瑰线 $\rho=a\cos 3\theta \quad \rho=a\sin 3\theta$

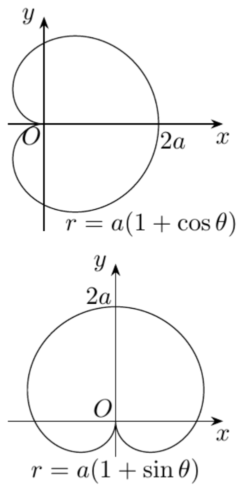
$$L=6\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{a^2\cos^2 3\theta+9a^2\sin^2 3\theta d\theta}=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+8\sin^2 t}dt$$

$$S=3\int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2\cos^2 3\theta d\theta=\frac{\pi a^2}{4}$$

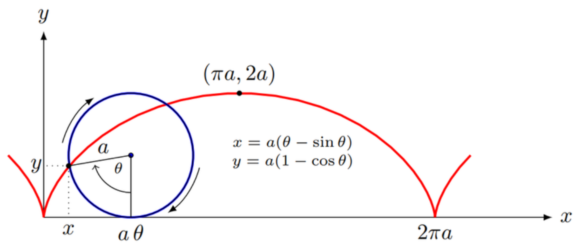
5. 伯努利双扭线 $\rho^2=a^2\cos 2\theta$

$$L=4\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}+\cos^2 2\theta d\theta}=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-\cos^2\theta+\cos^3\theta}{\cos\theta}}d\theta$$

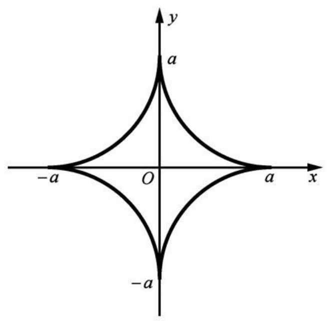
$$S=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta d\theta=a^2$$



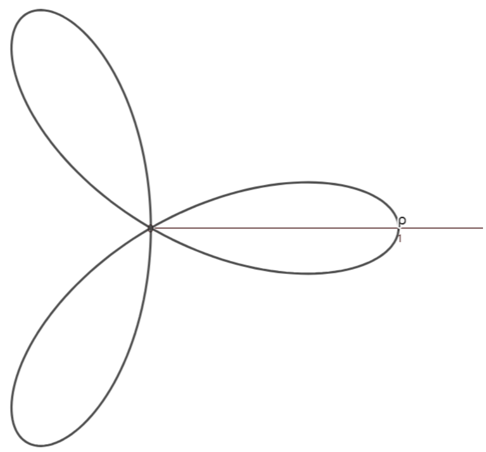
(a) 心形线



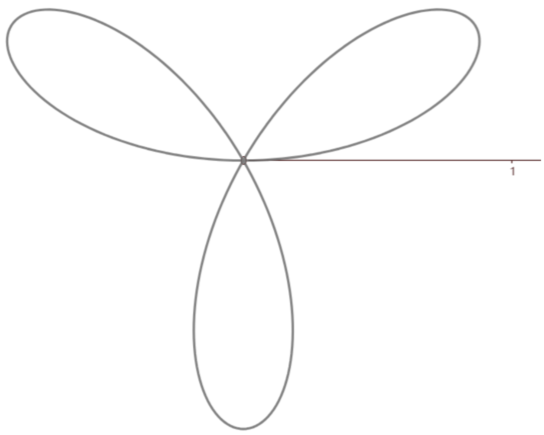
(b) 摆线



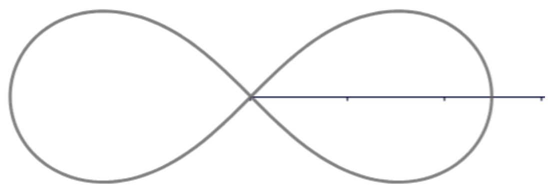
(c) 星形线



(d) 三叶玫瑰线 $\rho = a\cos 3\theta$



(e) 三叶玫瑰线 $\rho = a\sin 3\theta$



(f) 伯努利双扭线 $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$

图 39.3: 曲线图形

39.7 谱分解定理

定义 39.7.1 (代数重复度)

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 是矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的相异特征值, 其重数分别为 $r_1, r_2, \cdots, r_k$, 称 r_i 为矩阵 A 的特征值 λ_i 的代数重复度

定义 39.7.2 (几何重复度)

齐次方程组 $Ax = \lambda_i x (i = 1, 2, \cdots, k)$ 的解空间 V_{λ_i} 称为 A 的对应于特征值 λ_i 的特征空间, V_{λ_i} 的维数称为 A 的特征值 λ_i 的几何重复度

定义 39.7.3 (单纯矩阵)

若矩阵 A 的每一个特征值的代数重复度与几何重复度相等, 矩阵 A 为单纯矩阵

定义 39.7.4 (幂等矩阵)

若 A 为方阵, 且 $A^2 = A$, 称 A 为幂等矩阵

推论 39.7.1 (幂等矩阵 A 性质)

- A 的特征值只能为 0 或者 1
- A 一定可以相似对角化
- A 是单纯矩阵, 且其 $Jordan$ 标准型为 $\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$, 其中 r 为 A 的秩
- $rank(A) = tr(A)$
- $Ax = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}(A)$

证明

(1). A 的特征值只能为 0 或者 1

不妨设 λ 是 A 的特征值

$$\begin{cases} Ax = \lambda x \\ A^2 = A \end{cases} \Rightarrow \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda \in \{0, 1\}$$

(2). A 一定可以相似对角化

$$\begin{cases} A + (I - A) = I \\ A(I - A) = O \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r(A) + r(I - A) \geq n \\ r(A) + r(I - A) \leq n \end{cases} \Rightarrow r(A) + r(I - A) = n$$

$$\begin{cases}(I-A)x=0\\ Ax=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}V_{\lambda_1}=n-r(I-A)=r(A)\\ V_{\lambda_0}=n-r(A)=r(I-A)\end{cases} \Rightarrow V_{\lambda_1}+V_{\lambda_0}=n$$

A 有 n 个线性无关的特征向量 $\Leftrightarrow$ A 一定可以相似对角化
(3). A 可以相似对角化, 存在可逆矩阵 P, 满足

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} I_r & O\\ O & O\end{bmatrix}(\lambda_0=0,\lambda_1=1)$$

(4). $tr(A)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=r=rank(A)$
(5). $Ax=x \Rightarrow x\in N(I-A)=R(A)$

定理 39.7.1 (谱分解定理)

设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是单纯矩阵, 矩阵 A 有 k 个相异特征值 λ_i $(i=1,2,\cdots,k)$, $\exists G_i\in\mathbb{R}^{n\times n}(i=1,2,\cdots,k)$, 使得

$$A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i G_i$$

此式称为矩阵 A 的谱分解, $G_1,G_2,\cdots,G_k$ 称为 A 的族谱, 且满足以下性质:

- 幂等性: $G_i^2=G_i$
- 分离性: $G_iG_j=0(i\neq j)$
- 可加性: $\sum_{i=1}^{k}G_i=E_n$

证明
(1). 当 $k=n$ 时:
A 是单纯矩阵 $\Rightarrow$ A 可以相似对角化

$$\exists P(P^{-1}P=E),\ s.t.\ P^{-1}AP=\Lambda=diag\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$$

不妨设 $P=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n)$, $P^{-1}=\begin{bmatrix}\omega_1^T\\ \omega_2^T\\ \vdots\\ \omega_n^T\end{bmatrix}$

$$A=P\Lambda P^{-1}=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\omega}_1^T\\ \boldsymbol{\omega}_2^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{\omega}_n^T\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_1\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{\omega}_i^T$$

令 $G_i=\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{\omega}_i^T(i=1,2,\cdots,n)$

$$\begin{cases}PP^{-1}=E_n\\ P^{-1}P=E_n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{\omega}_i^T\boldsymbol{v}_j=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{\omega}_i^T=\sum\limits_{i=1}^{n}G_i=E_n\end{cases}$$

$$\forall i,j\in\{1,2,\cdots,n\},G_iG_j=\boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{\omega}_i^T\boldsymbol{v}_j)\boldsymbol{\omega}_j^T$$

$$G_iG_j=\begin{cases}\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{\omega}_i^T=G_i & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

(2). 当 $k<n$ 时:

A 是单纯矩阵 $\Rightarrow$ A 可以相似对角化, 矩阵 A 的 k 个特征值分别对应 $r_i(i=1,2,\cdots,k)$ 个线性无关的特征向量

不妨设

$$\begin{cases}P=(\boldsymbol{v}_{11},\boldsymbol{v}_{12},\cdots,\boldsymbol{v}_{1r_1},\boldsymbol{v}_{21},\boldsymbol{v}_{22},\cdots,\boldsymbol{v}_{2r_2},\cdots,\boldsymbol{v}_{k1},\boldsymbol{v}_{k2},\cdots,\boldsymbol{v}_{kr_k})\\ P^{-1}=(\boldsymbol{\omega}_{11}^T,\boldsymbol{\omega}_{12}^T,\cdots,\boldsymbol{\omega}_{1r_1}^T,\boldsymbol{\omega}_{21}^T,\boldsymbol{\omega}_{22}^T,\cdots,\boldsymbol{\omega}_{2r_2}^T,\cdots,\boldsymbol{\omega}_{k1}^T,\boldsymbol{\omega}_{k2}^T,\cdots,\boldsymbol{\omega}_{kr_k}^T)\end{cases}$$

$$P^{-1}AP=\Lambda\Rightarrow A=P\Lambda P^{-1}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\sum_{j=1}^{r_i}\boldsymbol{v}_{ij}\boldsymbol{\omega}_{ij}^T$$

令 $G_i=\sum\limits_{j=1}^{r_i}\boldsymbol{v}_{ij}\boldsymbol{\omega}_{ij}^T\Rightarrow A=\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_kG_i$

$$G_iG_j=\left(\sum_{p=1}^{r_i}\boldsymbol{v}_{ip}\boldsymbol{\omega}_{ip}^T\right)\left(\sum_{q=1}^{r_j}\boldsymbol{v}_{jq}\boldsymbol{\omega}_{jq}^T\right)$$

$$\begin{cases}P^{-1}P=E_n\\ PP^{-1}=E_n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{r_i}\boldsymbol{\omega}_{ij}^T\boldsymbol{v}_{ij}=E_n\\ \sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{r_i}\boldsymbol{v}_{ij}\boldsymbol{\omega}_{ij}^T=\sum\limits_{i=1}^{k}G_i=E_n\end{cases}\Rightarrow\boldsymbol{\omega}_{ip}^T\boldsymbol{v}_{jq}=\begin{cases}1 & i=j,p=q\\ 0 & i\neq j\ or\ p\neq q\end{cases}$$

$$G_iG_j=\begin{cases}0 & i\neq j\\ G_i & i=j\end{cases}$$

综上, A 是单纯矩阵 $\Rightarrow A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_iG_i$

命题 39.7.1

矩阵 A 是单纯矩阵等价为存在 k 个矩阵 $G_i,(i=1,2,\cdots,k)$ 满足:

- $G_iG_j=\begin{cases}G_i & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$
- $\sum_{i=1}^{k}G_i=E_n$
- $A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_iG_i$
- $f(A)$ 为任意多项式

$$f(A)=\sum_{i=1}^{k}f(\lambda_i)G_i$$

- $A^m=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^mG_i$

证明

$$\begin{cases}G_iG_j=\begin{cases}G_i & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\\ \sum_{i=1}^{k}G_i=E_n\\ A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_iG_i\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A^m=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^mG_i\\ f(A)=\sum_{i=1}^{k}f(\lambda_i)G_i\end{cases}$$

$$\begin{cases}G_iG_j=\begin{cases}G_i & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\\ \sum_{i=1}^{k}G_i=E_n\\ A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_iG_i\end{cases}\Rightarrow A\text{可相似对角化}$$

矩阵 $G_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为幂等矩阵, 不妨设 $dim\mathbb{R}(G_i)=r_i$

$$r_i = tr(G_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} r_i = \sum_{i=1}^{k} tr(G_i) = tr(\sum_{i=1}^{k} G_i) = tr(E_n) = n$$

取 X_i 为 $\mathbb{C}(G_i)$ 的基列构成的矩阵, $X = (X_1, X_2, \cdots, X_k)$ 是方阵, 且 G_i 的列向量都可以由 X_i 列向量线性表出

$$G_i = (X_i\boldsymbol{\beta}_1, X_i\boldsymbol{\beta}_2, \cdots, X_i\boldsymbol{\beta}_n) = X_iY_i$$

$$XY = (X_1, X_2, \cdots, X_k)\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_k \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{k} X_iY_i = \sum_{i=1}^{k} G_i = E_n$$

X, Y 均为可逆矩阵

$$YX = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_k \end{bmatrix}(X_1, X_2, \cdots, X_k) = \begin{bmatrix} Y_1X_1 & Y_1X_2 & \cdots & Y_1X_k \\ Y_2X_1 & Y_2X_2 & \cdots & Y_2X_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ Y_kX_1 & Y_kX_2 & \cdots & Y_kX_k \end{bmatrix} = E_n = \begin{bmatrix} E_{r_1} & O & \cdots & O \\ O & E_{r_2} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & E_{r_k} \end{bmatrix}$$

$$Y_iX_j = \begin{cases} E_{r_i} & i = j \\ O & i \neq j \end{cases} \Rightarrow G_iX_j = \begin{cases} X_i & i = j \\ O & i \neq j \end{cases}$$

幂等矩阵性质:

$$\begin{aligned}
AX &= \left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i G_i\right)(X_1, X_2, \cdots, X_k) \\
&= \left[\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i G_i\right)X_1, \left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i G_i\right)X_2, \cdots, \left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i G_i\right)X_k\right] \\
&= (\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \cdots, \lambda_k X_k) \\
&= (X_1, X_2, \cdots, X_k)\begin{bmatrix} \lambda_1 E_{r_1} & O & \cdots & O \\ O & \lambda_2 E_{r_2} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & \lambda_k E_{r_k} \end{bmatrix} \\
&= X\Lambda \Rightarrow A = X\Lambda X^{-1}
\end{aligned}$$

综上:

$$\begin{cases} G_i G_j = \begin{cases} G_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \\ \sum\limits_{i=1}^{k} G_i = E_n \\ A = \sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i G_i \end{cases} \Rightarrow A\text{是单纯矩阵}$$

推论 39.7.2 (谱族 G_i 推论)

- $AG_i = G_i A = \lambda_i G_i$

$$\begin{cases} AG_i = \left(\sum\limits_{j=1}^{k}\lambda_j G_j\right)G_i = \lambda_i G_i \\ G_i A = G_i\left(\sum\limits_{j=1}^{k}\lambda_j G_j\right) = \lambda_i G_i \end{cases} \Rightarrow AG_i = G_i A = \lambda_i G_i$$

- G_i 是唯一的, A 的族谱是唯一的
- $f(A) = f(\lambda_1)G_1 + f(\lambda_2)G_2 + \cdots + f(\lambda_k)G_k$

定理 39.7.2 (谱分解唯一性)

不妨假设 $F_1, F_2, \cdots, F_k$ 满足:

$$\begin{cases} F_iF_j = 0 & i \neq j \\ F_i^2 = F_i \\ A = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i F_i \\ \sum\limits_{i=1}^{k} F_i = E_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} AG_i = G_iA = \lambda_i G_i \\ AF_i = F_iA = \lambda_i F_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AG_iF_j = \lambda_i G_iF_j \\ \lambda_i G_iF_j = G_iAF_j \\ G_iAF_j = \lambda_j G_iF_j \end{cases} \Rightarrow G_iF_j = 0 (i \neq j)$$

$$G_i = G_i(\sum_{j=1}^{k} F_j) = G_iF_i = (\sum_{j=1}^{k} G_j)F_i = F_i$$

综上, 矩阵 A 的谱分解是唯一的