



L^AT_EX *Multivariable Calculus*

Sun for morning, moon for night, and you forever.

作者: Lyshmily.Y & 木易

组织: Lyshmily.Y

时间: December 13, 2024

版本: V.2.0

邮箱: yjlpku.outlook.com & 845307723@qq.com



在没有结束前，总要做很多没有意义的事，这样才可以在未来某一天，用这些无意义的事去堵住那些讨厌的缺口



目录

目录

A

1

第 1 部分 * 高数 (下)

第 1 章 多元函数微分	3
1.1 多元函数微分概念	3
1.2 链式法则	5
1.3 隐函数存在定理	6
1.4 多元函数极值和最值	6
第 2 章 二重积分	9
2.1 二重积分概念和性质	9
2.2 二重积分的对称性	10
2.3 二重积分计算	11
第 3 章 常微分方程	14
3.1 一阶微分方程	15
3.1.1 可分离变量型微分方程	15
3.1.2 齐次型微分方程	16
3.1.3 一阶线性微分方程	16
3.1.4 伯努利方程	16
3.1.5 二阶可降阶微分方程	17
3.2 高阶线性微分方程	17
3.2.1 二阶常系数线性微分方程	17
3.2.2 欧拉方程	18
3.2.3 高阶常系数齐次线性微分方程	19

第 4 章 无穷级数	20
4.1 常数项级数	20
4.2 敛散性判别	21
4.2.1 正项级数判别	21
4.2.2 交错级数判别	23
4.2.3 一般项级数判别	23
4.2.4 常见级数敛散性推论	23
4.3 函数项级数	24
4.3.1 幂级数	25
4.3.2 幂级数收敛域	25
4.3.3 幂级数求和函数	26
4.3.4 重要展开式	27
4.3.5 函数展开成幂级数	28
4.4 傅里叶级数	28
4.4.1 三角函数集 Γ 的归一正交性	28
4.4.2 周期函数的傅里叶级数	29
4.4.3 任意对称区间中的傅里叶展开	30
4.4.4 周期延拓	30
4.4.5 逐点收敛性理论	31
第 5 章 空间解析几何	32
5.1 向量代数	32
5.2 空间平面和直线	33
5.2.1 平面	33
5.2.2 直线	34
5.3 空间曲面和曲线	35
5.3.1 空间曲线的切线和法平面	40
5.3.2 空间曲面的切平面和法线	41
5.4 场论初步	42
5.4.1 方向导数	42
5.4.2 梯度	42
5.4.3 散度和旋度	43
第 6 章 三重积分	44
6.1 三重积分定义和性质	44
6.2 三重积分对称性	46
6.3 三重积分计算方法	46
6.4 三重积分应用	48

第 7 章 第一型曲线和曲面积分	51
7.1 第一型曲线积分.....	51
7.1.1 第一型曲线积分定义和性质	51
7.1.2 第一型曲线积分的对称性	52
7.1.3 第一型曲线积分计算	53
7.2 第一型曲面积分.....	54
7.2.1 第一型曲面积分定义和性质	54
7.2.2 第一型曲面积分的对称性	55
7.2.3 第一型曲面积分计算	56
7.3 第一型曲线积分和曲面积分应用.....	56
第 8 章 第二型曲线和曲面积分	59
8.1 第二型曲线积分.....	59
8.1.1 第二型曲线积分定义和性质	59
8.1.2 第二型曲线积分计算	60
8.2 第二型曲面积分.....	61
8.2.1 第二型曲面积分定义和性质	61
8.2.2 第二型曲面积分计算	62



第一部分

高数(下)



第 1 部分目录

第 1 章 多元函数微分	3
1.1 多元函数微分概念	3
1.2 链式法则	5
1.3 隐函数存在定理	6
1.4 多元函数极值和最值	6
第 2 章 二重积分	9
2.1 二重积分概念和性质	9
2.2 二重积分的对称性	10
2.3 二重积分计算	11
第 3 章 常微分方程	14
3.1 一阶微分方程	15
3.2 高阶线性微分方程	17
第 4 章 无穷级数	20
4.1 常数项级数	20
4.2 敛散性判别	21
4.3 函数项级数	24
4.4 傅里叶级数	28
第 5 章 空间解析几何	32
5.1 向量代数	32
5.2 空间平面和直线	33
5.3 空间曲面和曲线	35
5.4 场论初步	42
第 6 章 三重积分	44
6.1 三重积分定义和性质	44
6.2 三重积分对称性	46
6.3 三重积分计算方法	46
6.4 三重积分应用	48
第 7 章 第一型曲线和曲面积分	51
7.1 第一型曲线积分	51
7.2 第一型曲面积分	54
7.3 第一型曲线积分和曲面积分应用	56
第 8 章 第二型曲线和曲面积分	59
8.1 第二型曲线积分	59
8.2 第二型曲面积分	61

第 1 章 多元函数微分

内容提要

- 连续、偏导、可微、全微分
- 多元函数极值和最值
- 链式法则
- 拉格朗日数乘法
- 隐函数存在定理

1.1 多元函数微分概念

定义 1.1.1 (邻域)

1. δ 邻域: 设 $P_0(x_0, y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点, $U(P_0, \delta)$ 表示以 P_0 为中心, 半径为 δ 的圆盘, 即 $U(P_0, \delta) = \{(x, y) | \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$
2. 去心 δ 邻域: $\dot{U}(P_0, \delta) = \{(x, y) | 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$

定义 1.1.2 (多元函数极限)

设函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上有定义, $P_0(x_0, y_0) \in D$ 或为区域 D 边界上的一点, 如果对于任意给定的正数 ε , 总存 $\delta > 0$, 使得当点 $P(x, y) \in D$ 且 $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ 时, 对应的函数值 $f(x, y)$ 都满足不等式 $|f(x, y) - A| < \varepsilon$, 那么称函数 $f(x, y)$ 当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时的极限为 A , 记为 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$

定义 1.1.3 (连续)

设函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上有定义, $P_0(x_0, y_0) \in D$ 或为区域 D 边界上的一点, 如果 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, 那么称函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续, 如果函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上每一点都连续, 那么称函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上连续

定义 1.1.4 (偏导数)

设函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 邻域内有定义, 若极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ 存在, 我们将这记作 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数, 记作:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \quad z'_x \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

类似地, 可以定义 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处对 y 的偏导数, 记作:

$$\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \quad z'_y \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

对偏导数进一步求偏导数, 可以得到高阶偏导数: $f''_{xx}(x, y), f''_{yy}(x, y), f''_{xy}(x, y), f''_{yx}(x, y)$

定义 1.1.5 (可微)

函数 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处的全增量 $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ 可表示为:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

其中 A, B 只与 x, y 相关, 称 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微, $A\Delta x + B\Delta y$ 是 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处的全微分.

$$dz = A\Delta x + B\Delta y = Adx + Bdy$$

1. 可微必要条件: $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微 $\Rightarrow f(x, y)$ 在点 (x, y) 处偏导数必定存在

$$\text{且} \begin{cases} A = \frac{\partial z}{\partial x} \\ B = \frac{\partial z}{\partial y} \end{cases}$$

2. 可微充分条件: $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处偏导数连续 $\Rightarrow f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微

定义 1.1.6 (偏导数连续性)

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} f'_x(x, y_0) \\ f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{y \rightarrow y_0} f'_y(x_0, y) \end{cases}$$

如果这两个极限相等, 就称偏导数在此点连续

定义 1.2.2 (全微分形式不变性)

设 $z = f(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, 如果 $f(u, v)$, $u(x, y)$, $v(x, y)$ 分别有连续偏导数, 则复合函数 $z = f(u, v)$ 在 (x, y) 处的全微分:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

1.3 隐函数存在定理**定理 1.3.1 (隐函数存在定理 1)**

如果函数 $F(x, y)$ 满足一下条件:

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某一个邻域内具有连续偏导数
3. $F'(x_0, y_0) \neq 0$

那么方程 $F(x, y) = 0$ 在点 (x_0, y_0) 的某一个邻域内能够确定唯一的连续且具有连续导数的函数 $y = f(x)$, 满足 $F(x, f(x)) = 0$ 且 $y_0 = y(x_0)$, 且有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

定理 1.3.2 (隐函数存在定理 2)

如果函数 $F(x, y, z)$ 满足一下条件:

1. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
2. $F(x, y, z)$ 在 (x_0, y_0, z_0) 的某一个邻域内具有连续偏导数
3. $F'(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

那么方程 $F(x, y, z) = 0$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 的某一个邻域内能够确定唯一的连续且具有连续导数的函数 $z = f(x, y)$, 满足 $F(x, y, z(x, y)) = 0$ 且 $z_0 = z(x_0, y_0)$, 且有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

1.4 多元函数极值和最值**定义 1.4.1 (多元函数极值和最值)**

极值

设函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处有定义

1. 如果存在邻域 $U(P_0, \delta)$, 使得对于任意 $(x, y) \in U(P_0, \delta)$, 都有 $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, 那么称 $f(x_0, y_0)$ 是函数 $f(x, y)$ 的一个极大值
2. 如果存在邻域 $U(P_0, \delta)$, 使得对于任意 $(x, y) \in U(P_0, \delta)$, 都有 $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$, 那么

称 $f(x_0, y_0)$ 是函数 $f(x, y)$ 的一个极小值

最值

1. 如果对于区域 D 上的任意 (x, y) , 都有 $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, 那么称 $f(x_0, y_0)$ 是函数 $f(x, y)$ 的一个最大值
2. 如果对于区域 D 上的任意 (x, y) , 都有 $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$, 那么称 $f(x_0, y_0)$ 是函数 $f(x, y)$ 的一个最小值

无条件极值

定义 1.4.2 (多元函数极值)

二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取极值的必要条件:

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$$

二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取极值的充分条件:

$$\begin{cases} f'_{xx}(x_0, y_0) = A \\ f'_{xy}(x_0, y_0) = B \\ f'_{yy}(x_0, y_0) = C \end{cases} \quad \Delta = AC - B^2 \Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0, \begin{cases} A > 0, & \min \\ A < 0, & \max \end{cases} \\ \Delta < 0, \text{非极值} \\ \Delta = 0, \text{方法失效} \end{cases}$$

条件极值

定义 1.4.3 (拉格朗日数乘法)

求目标函数 $u = f(x, y, z)$ 在条件 $\begin{cases} g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 下的最值

构造辅助函数: $F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z)$

令

$$\begin{cases} F'_x = f'_x + \lambda g'_x + \mu h'_x = 0 \\ F'_y = f'_y + \lambda g'_y + \mu h'_y = 0 \\ F'_z = f'_z + \lambda g'_z + \mu h'_z = 0 \\ F'_\lambda = g(x, y, z) = 0 \\ F'_\mu = h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

得到所有的备选点 P_i , 计算 $f(P_i)$ 得到最大值和最小值.

注

1. 在不封闭曲线上求最值, 可以用拉格朗日数乘法, 但是要注意边界条件
2. 闭区域上多元函数的最值, 分为两部分, 第一部分是在区域内部求最值, 第二部分是在区域边界求最值; 前者利用驻点, 后者利用拉格朗日数乘法, 两者结合求最值



第2章 二重积分

内容提要

- 二重积分定义
- 极坐标和直角坐标下的二重积分
- 积分次序
- 变量替换

2.1 二重积分概念和性质

定义 2.1.1 (二重积分)

$f(x, y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数, 将有界闭区域 D 任意分割为 n 个小闭区域

$$D = \bigcup_{i=1}^n D_i$$

$\Delta\sigma_i$ 是 D_i 的面积, 任取 $(\varepsilon_i, \eta_i) \in D_i$, 作乘积 $f(\varepsilon_i, \eta_i)\sigma_i$, 并求和 $\sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i, \eta_i)\sigma_i$, 当

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \{\lambda | \lambda = \max\{d_i (i = 1, 2, \dots, n)\}, d_i \text{ 是 } D_i \text{ 区域的直径}\} = 0$ 时, 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i, \eta_i)\sigma_i$ 存在, 且与 D 的分割方法和 (ε_i, η_i) 的取法无关, 那么称此极限为 $f(x, y)$ 在区域 D 上的二重积分, 记作 $\iint_D f(x, y)d\sigma$

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i, \eta_i)\sigma_i$$

其中 $f(x, y)$ 称为被积函数, $f(x, y)ds$ 称为被积表达式, x, y 是积分变量, D 是积分区域

二重积分的几何意义

二重积分 $\iint_D f(x, y)d\sigma$ 表示区域 D 上以 $f(x, y)$ 为曲顶的曲顶柱体的体积

推论 2.1.1

- (1). $\iint_D 1 d\sigma = \iint_D d\sigma = S_D$, S_D 是 D 的面积
 (2). $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上可积, $f(x, y)$ 在 D 上必有界
 (3). 积分的线性性质

$$\iint_D [k_1 f(x, y) + k_2 g(x, y)] d\sigma = k_1 \iint_D f(x, y) d\sigma + k_2 \iint_D g(x, y) d\sigma$$

- (4). 积分的可加性

设 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 内可积, 且 $D_1 \cup D_2 = D, D_1 \cap D_2 = \emptyset$

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma$$

- (5). 积分的保号性 设 $f(x, y), g(x, y)$ 在有界闭区域 D 内可积, 且 $f(x, y) \leq g(x, y)$

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma \Rightarrow \left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| = \iint_D |f(x, y)| d\sigma$$

- (6). 估值定理

设 M, m 分别是 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 内的最大值和最小值

$$mS_D \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq MS_D$$

- (7). 中值定理

设 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 内连续

$$\exists (\xi, \eta) \in D, \text{ s.t. } \iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) S_D$$

2.2 二重积分的对称性

定理 2.2.1 (对称性)

1. 普通对称性

(i). 区域 D 关于 $x = a$ 对称, 我们有:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma & f(2a - x) = f(x) \\ 0 & f(2a - x) = -f(x) \end{cases}$$

特别的, 当 $a = 0$ 时, 我们有:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma & f(-x) = f(x) \\ 0 & f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

(ii). 区域 D 关于 $y = b$ 对称, 我们有:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma & f(x, 2b - y) = f(x, y) \\ 0 & f(x, 2b - y) = -f(x, y) \end{cases}$$

特别的, 当 $b = 0$ 时, 我们有:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma & f(x, -y) = f(x, y) \\ 0 & f(x, -y) = -f(x, y) \end{cases}$$

2. 轮换对称性

区域 D 关于 $x = y$ 对称, 我们有:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(y, x) d\sigma = \frac{1}{2} \iint_D [f(x, y) + f(y, x)] d\sigma$$

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma & f(x, y) = f(y, x) \\ 0 & f(x, y) = -f(y, x) \end{cases}$$

3. 区域 D 关于原点对称, 我们有:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma & f(-x, -y) = f(x, y) \\ 0 & f(-x, -y) = -f(x, y) \end{cases}$$



2.3 二重积分计算

定义 2.3.1 (直角坐标系)

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} \int_a^b dx \int_{h(x)}^{g(x)} f(x, y) dy \\ \int_a^b dy \int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y) dx \end{cases}$$



定义 2.3.2 (极坐标系)

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D'} r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta$$



定义 2.3.3 (换元法)

令 $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$, 是 (x, y) 面到 (u, v) 面的一对一映射, 且 $x = x(u, v), y = y(u, v)$ 有一阶连续偏导数

$$J = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right\|$$

$$\iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{D_{uv}} f[x(u, v), y(u, v)] \cdot J du dv$$

变量替换

$$d\sigma_1 = du dv \quad d\sigma_2 = |l \times m|$$

$$\begin{cases} x(u, v + dv) - x(u, v) = x'_v dv \\ x(u + du, v) - x(u, v) = x'_u du \\ y(u, v + dv) - y(u, v) = y'_v dv \\ y(u + du, v) - y(u, v) = y'_u du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l = (x'_u du, y'_u du) \\ m = (x'_v dv, y'_v dv) \end{cases}$$

$$d\sigma_2 = (x'_u y'_v - x'_v y'_u) dv du = \left\| \begin{array}{cc} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{array} \right\| d\sigma_1$$

Example

例题 2.1.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

证明

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy$$

$$\begin{aligned}
 I^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \\
 &= \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr \\
 &= \frac{\pi}{4} \\
 I &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}
 \end{aligned}$$

例题 2.2.

$$\int_0^a f(x) dx \int_0^a \frac{1}{f(x)} dx \geq a^2$$

证明

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^a f(x) dx \int_0^a \frac{1}{f(x)} dx = \iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq a}} \frac{f(x)}{f(y)} dx dy \\
 2I &= \iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq a}} \frac{f(x)}{f(y)} dx dy + \iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq a}} \frac{f(y)}{f(x)} dx dy \\
 &\geq \iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq a}} 2 dx dy \\
 &= 2a^2 \\
 I &\geq a^2
 \end{aligned}$$



第 3 章 常微分方程

内容提要

- 微分方程概念、解和通解
- 一阶微分方程
- 伯努利方程
- (非) 齐次二阶常系数线性微分方程
- 欧拉方程
- 高阶线性微分方程

定义 3.0.1 (微分方程及其阶)

表示未知函数及其导数 (或者微分) 与自变量之间关系的方程称为微分方程, 一般写为:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \text{ 或 } y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

微分方程中未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶.

定义 3.0.2 (常微分方程)

未知函数是一元函数的微分方程称为常微分方程.

定义 3.0.3 (线性微分方程)

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

形如上述的微分方程称为 n 阶线性微分方程, 其中 $a_k(x) (k = 0, 1, 2, \dots, n)$ 都是自变量 x 的函数, $a_k(x) \not\equiv 0$, 当 $a_k(x) (k = 0, 1, 2, \dots, n)$ 都是常数时, 又称方程为 n 阶常系数线性微分方程; 若右端 $f(x) \equiv 0$, 则称方程为 n 阶齐次线性微分方程, 否则称其为 n 阶非齐次线性微分方程.

定义 3.0.4 (微分方程的解和通解)

- 若将函数代入微分方程, 使方程成为恒等式, 则该函数称为**微分方程的解**, 微分方程解的图形称为**积分曲线**
- 若微分方程的解中含有的独立常数的个数等于微分方程的阶数, 则该解称为**微分方程的通解**.

定义 3.0.5 (初始条件和特解)

确定通解中常数的条件就是**初始条件**, 如 $y(x_0) = a_0, y'(x_0) = a_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$, 其中 a_0, a_1, \dots, a_{n-1} 为 n 个给定的数, 确定通解中的常数后, 解就成为**特解**.

3.1 一阶微分方程

3.1.1 可分离变量型微分方程

3.1.1.1 直接可分离

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) = f(x)g(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

3.1.1.2 换元后可分离

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \Rightarrow \begin{cases} u = ax + by + c \\ \frac{du}{dx} = a + b \frac{dy}{dx} \\ \frac{du}{dx} = a + bf(u) \end{cases} \Rightarrow \int \frac{du}{a + bf(u)} = \int dx$$

注

- 在换元过程中, 可能会因为定义域问题漏掉某些解, 这些解称为**奇解**.
- 非线性微分方程的所有解等于通解和奇解的并集; 线性微分方程的所有解等于通解, 没有奇解.

3.1.2 齐次型微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{y}{x} \\ \frac{dy}{dx} = \frac{d(ux)}{dx} = u + x \frac{du}{dx} \\ u + x \frac{du}{dx} = \varphi(u) \end{cases} \Rightarrow \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$$

3.1.3 一阶线性微分方程

定义 3.1.1 (一阶线性微分方程)

$$y' + p(x)y = q(x), p(x) \text{ 和 } q(x) \text{ 是已知的连续函数}$$

定理 3.1.1 (一阶线性微分方程解)

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int e^{\int p(x)dx} q(x) dx + C \right]$$

注

$$\begin{aligned} e^{\int p(x)dx} y' + p(x) e^{\int p(x)dx} y &= q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \\ \left[e^{\int p(x)dx} y \right]' &= q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \\ e^{\int p(x)dx} y &= \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} + C \\ y &= e^{-\int p(x)dx} \left[\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} + C \right] \end{aligned}$$

3.1.4 伯努利方程

定义 3.1.2 (伯努利方程)

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$$

定理 3.1.2

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = q(x) \Rightarrow \begin{cases} z = y^{1-n} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{1}{1-n} y^{-n} \frac{dy}{dx} \end{cases} \Rightarrow (1-n) \frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x)$$

我们可以得到:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x) \Rightarrow z = e^{-\int(1-n)p(x)dx} \left[e^{\int(1-n)p(x)dx} \cdot q(x) + C \right]$$



3.1.5 二阶可降阶微分方程

定义 3.1.3 (二阶可降阶微分方程)

1. $y'' = f(y, y') \Leftrightarrow F(y, y', y'') = 0$

我们令: $p = y'$, 则

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p'p \Rightarrow p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

2. $y'' = f(x, y') \Leftrightarrow F(x, y', y'') = 0$

我们令: $p(x) = y'$, 则

$$y'' = \frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx} = f(x, p)$$



3.2 高阶线性微分方程

3.2.1 二阶常系数线性微分方程

定义 3.2.1 (二阶常系数线性微分方程)

二阶常系数齐次微分方程:

$$y'' + py' + py = 0$$

二阶常系数非齐次微分方程:

$$y'' + py' + py = f(x)$$



定理 3.2.1 (二阶常系数齐次线性微分方程解)

对于二阶常系数齐次 x 线性微分方程:

特征方程: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

- 当方程有两个不同的实数根 λ_1, λ_2 , 微分方程通解:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

- 当方程有两个相同的实根 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, 微分方程通解:

$$y = C_1 + C_2 x e^{\lambda x}$$

- 当方程有两个不同的虚根 $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$, 微分方程通解:

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$



定理 3.2.2 (二阶常系数非齐次线性微分方程解)

对于二阶常系数非齐次线性微分方程:

$$y'' + py' + py = f(x)$$

通解为二阶常系数齐次线性微分方程的通解加上特解: $y_0 = y^* + y$

1. 当 $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ 时, 特解 y^* :

$$y^* = e^{\alpha x} x^k Q_n(x)$$

- 当 α 不是特征方程的根, $k = 0$
- 当 α 是特征方程的一个根, $k = 1$
- 当 α 是特征方程的重根, $k = 2$

2. 当 $f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + P_m(x) \sin \beta x)$ 时, 特解 y^* :

$$y^* = e^{\alpha x} x^k (Q_l^{(1)}(x) \cos \beta x + Q_l^{(2)}(x) \sin \beta x), \quad l = \max\{m, n\}$$

- 当 $\alpha \pm i\beta$ 不是特征方程的根, $k = 0$
- 当 $\alpha \pm i\beta$ 是特征方程的根, $k = 1$

**3.2.2 欧拉方程****定义 3.2.2 (欧拉方程)**

形如以下形式的微分方程:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + px \frac{dy}{dx} + qy = f(x)$$

1. 当 $x > 0$ 时, 令 $x = e^t, t = \ln x; \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dt^2}$$

原微分方程可化为:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = f(e^t)$$

2. 当 $x < 0$ 时, 令 $x = -e^t, t = \ln(-x); \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dt^2}$$

原微分方程可化为:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = f(-e^t)$$

3.2.3 高阶常系数齐次线性微分方程

定义 3.2.3 (高阶常系数齐次线性微分方程)

$n(n \geq 3)$ 阶常系数齐次线性微分方程称为高阶常系数齐次线性微分方程。

命题 3.2.1 (n 阶常系数线性微分方程解)

特征方程:

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = 0$$

1. r 是单实数根, 通解包含 Ce^{rx}
2. r 是 k 重实数根, 通解包含 $(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_k x^{k-1})e^{rx}$
3. r 是单复根, 通解包括 $e^{rx}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$
4. r 是二重复根, 通解包括 $e^{rx}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x + C_3 x \cos \beta x + C_4 x \sin \beta x)$



第 4 章 无穷级数

内容提要

- ☐ 常数项级数
- ☐ 敛散性判别
- ☐ 收敛域和收敛半径
- ☐ 函数项级数
- ☐ 幂级数
- ☐ 和函数和函数展开式
- ☐ 傅里叶级数

4.1 常数项级数

定义 4.1.1 (级数定义)

给定一个无穷数列 $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$, 将其各项相加得到 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

我们将 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 称为无穷级数, 简称为级数, 其中 u_n 是无穷级数的通项, 如果 u_n 是常数项, 则称为常数项级数; 如果 u_n 是函数, 则称为函数项级数

定义 4.1.2 (级数敛散性)

级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的敛散性研究:

引入 $S_n = \sum_{i=1}^n u_i$, 我们称 S_n 是无穷级数的部分和, 我们定义:

(1). 当 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$ 时, 我们称级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛.

(2). 当 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \infty$ 或者不存在时, 我们称级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散.

推论 4.1.1

(1). 当 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛时, 我们有: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (必要条件)

(2). 当 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n, \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛时, 且这两个级数的和分别为 $S, T, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha u_n + \beta v_n)$ 收敛, 且级数和为 $\alpha S + \beta T$

(3). 改变级数任意有限项, 不会改变该级数的敛散性

(4). 收敛级数的任意项加括号所得到的新级数仍收敛, 且其和不变

4.2 敛散性判别

4.2.1 正项级数判别

(1). 定义法

定理 4.2.1 (收敛原则)

$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow S_n$ 有界

证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 是正项级数, $u_n \geq 0, S_n$ 单调递增

S_n 有界, 单调有界准则: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ 存在, 原级数收敛

(2). 比较判别法

定理 4.2.2 (比较判别法)

两个正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$, 若从某一项起满足 $u_n \leq v_n$:

若 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 发散

若 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛



(3). 比较判别法的极限形式

定理 4.2.3 (比较判别法的极限形式)

两个正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n (v_n \neq 0)$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = A$

- (i). $A = 0$, 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛
- (ii). $0 < A < +\infty$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 有相同的敛散性
- (iii). $A = +\infty$, 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散



(4). 比值判别法 (达朗贝尔判别法)

定理 4.2.4 (比值判别法)

正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

- (i). $\rho < 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛
- (ii). $\rho > 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散
- (iii). $\rho = 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 敛散性不确定



(5). 根值判别法 (柯西判别法)

定理 4.2.5 (根值判别法)

正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

- (i). $\rho < 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛
- (ii). $\rho > 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散
- (iii). $\rho = 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 敛散性不确定



(6). 积分判别法

定理 4.2.6 (积分判别法)

正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, 若存在在 $[1, +\infty)$ 上单调减少的非负函数 $f(x)$, 使得 $u_n = f(n)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 敛散性相同



4.2.2 交错级数判别

定理 4.2.7 (莱布尼茨判别法)

u_n 单调不增且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛



4.2.3 一般项级数判别

定义 4.2.1

$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 是原级数的绝对值级数

(i). 如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 收敛, 称其绝对收敛

(ii). 如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 发散, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 称其条件收敛



4.2.4 常见级数敛散性推论

推论 4.2.1

设 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n, \sum_{n=1}^{+\infty} v_n, \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ 是任意项级数

$$\begin{cases} v_n = \frac{u_n + |u_n|}{2} \\ w_n = \frac{|u_n| - u_n}{2} \end{cases}$$

(1). a, b, c 是非零常数, 且 $au_n + bv_n + cw_n = 0$, 在 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n, \sum_{n=1}^{+\infty} v_n, \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ 中只要有二个级数收敛, 另一个级数必收敛

(2). 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 收敛 \Rightarrow 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛; 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散 \Rightarrow 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 发散

(3). 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ 收敛 \Rightarrow 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n}$ 绝对收敛 $\quad \left| \frac{u_n}{n} \right| \leq \frac{1}{2} \left(u_n^2 + \frac{1}{n^2} \right)$

- (4). 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 和级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ 收敛性不确定 $u_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$
- (5). 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ 收敛性不确定 $u_n = (-1)^n \frac{1}{n}$
- (6). 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$ 收敛性不确定 $u_n = (-1)^n \frac{1}{\ln n}$
- (7). 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛; 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n}$ 和级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n-1}$ 收敛性不确定

4.3 函数项级数

定义 4.3.1 (函数项级数)

设函数列 $\{u_n(x)\}$ 定义在区间 I 上, 称

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

为定义在区间 I 上的函数项级数, 记作 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$, 当 x 取确定的值 x_0 时, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 成为常数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$

定义 4.3.2 (收敛点和发散点)

- (1). 若给定 $x_0 \in I$, 有 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$ 收敛, 则称 $x = x_0$ 是函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的收敛点
- (2). 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$ 发散, 则称 $x = x_0$ 是函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的发散点

定义 4.3.3 (收敛域)

函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的所有收敛点的集合称为函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的收敛域

4.3.1 幂级数

定义 4.3.4 (幂级数)

若 $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ 的一般项 $u_n(x)$ 是 x 的 n 次幂函数, 则称 $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ 为幂级数

标准形式:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

一般形式:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$$

其中 $a_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 为幂级数的系数

4.3.2 幂级数收敛域

定理 4.3.1 (阿贝尔定理)

阿贝尔定理

当幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ 在 $x = x_1 (x_1 \neq 0)$ 处收敛时, $\forall x < |x_1|$, 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ 都收敛
当幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ 在 $x = x_2 (x_2 \neq 0)$ 处发散时, $\forall x > |x_2|$, 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ 都发散

定理 4.3.2 (收敛域和收敛半径)

(1). 不缺项幂级数 (充分条件):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$$

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0 \\ 0, & \rho = \infty \\ \infty, & \rho = 0 \end{cases}$$

区间 $(-R, R)$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ 的收敛区间; 幂级数的收敛域为 $(-R, R)$ or $[-R, R]$ or $(-R, R]$ or $[-R, R)$

(2). 缺项幂级数或一般项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$, 利用正项级数判别法中的比值判别法 (充分条

件):

$$\rho(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| < 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} < 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (a, b)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(a) \text{ 和 } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(b) \text{ 敛散性}$$

(3). 对级数提出或者乘以因式 $(x - x_0)^k$ 或者平移, 收敛半径不变

(4). 对级数逐项求导, 收敛半径不变, 收敛域可能缩小

(5). 对级数逐项积分, 收敛半径不变, 收敛域可能扩大



4.3.3 幂级数求和函数

定义 4.3.5 (幂级数的和函数)

在幂级数收敛域上, 记 $S(x)$ 是幂级数的和函数:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$



定理 4.3.3 (运算法则)

幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_a 和 R_b , 且 $R_a \neq R_b$

(i).

$$k \sum_{n=0}^n a_n x^n = \sum_{n=0}^n k a_n x^n, |x| < R_a$$

(ii).

$$\sum_{n=0}^n a_n x^n \pm \sum_{n=0}^n b_n x^n = \sum_{n=0}^n (a_n \pm b_n) x^n, |x| < \min\{R_a, R_b\}$$

(iii).

$$\sum_{n=0}^n a_n x^n \sum_{n=0}^n b_n x^n = \sum_{n=0}^n \left(\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \right) x^n$$



推论 4.3.1

(i). 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上连续

(ii). 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上可积分, 且有逐项积分公式, 收敛半径

不变, 收敛域可能变大

$$\int_0^x S(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} (x \in I)$$

(iii). 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 $(-R, R)$ 上可导, 且有逐项求导公式, 收敛半径不变, 收敛域可能变小

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} (|x| < R)$$

4.3.4 重要展开式

定理 4.3.4

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, -\infty < x < +\infty$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, -1 < x < 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, -1 < x \leq 1$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, -\infty < x < +\infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, -\infty < x < +\infty$$

$$\tan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, -1 \leq x \leq 1$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

$$= \begin{cases} x \in (-1, 1), & \alpha \leq -1 \\ x \in (-1, 1], & -1 < \alpha < 0 \\ x \in [-1, 1], & \alpha > 0 \text{ \& } \alpha \notin \mathbb{N}_+ \\ x \in (-\infty, +\infty), & \alpha \in \mathbb{N}_+ \end{cases}$$



4.3.5 函数展开成幂级数

定义 4.3.6

泰勒级数: $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处存在任意阶导数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

麦克劳林级数: $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处存在任意阶导数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$



4.4 傅里叶级数

定义 4.4.1 (傅里叶级数)

考虑到三角函数是周期函数, 任意一个以 2π 为周期的函数 $f(x)$, 能写成一系列三角函数 $\sin(nx)$ 和 $\cos(nx)$ 的线性组合:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$f(x)$ 三角函数分解被称为傅里叶级数或傅里叶展开, 也被称为三角级数



4.4.1 三角函数集 Γ 的归一正交性

定义 4.4.2 (内积、正交和范数)

考虑 $[-\pi, \pi]$ 上的函数 $f(x)$ 构成的无限维空间, 我们希望用正交的向量组来表示一般的向量(函数), 我们定义函数内积、正交和范数概念

(1). 内积

$$\forall f, g \in V, (f \cdot g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

(2). 正交

$$\forall f, g \in V, (f \cdot g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = 0 \Rightarrow f \perp g$$

(3). 范数

$$\forall f \in V, \|f\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

定义 4.4.3 (三角函数集 Γ 的归一正交性)

定义在 $[-\pi, \pi]$ 上的函数空间中存在一系列范数为 1 且正交的向量组, 考虑 $[-\pi, \pi]$ 上的三角函数组

$$\Gamma = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \dots \right\}$$

$$\forall f \in \Gamma, \|f\| = 1, \forall f, g \in \Gamma, f \cdot g = 0 \Rightarrow f \perp g$$

不妨设

$$\begin{cases} f_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin mx \\ f_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \end{cases} \quad \begin{cases} g_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx \\ g_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \end{cases}$$

$$\begin{cases} \|f_1\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx \right)^{\frac{1}{2}} = 1 \\ \|g_1\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx \right)^{\frac{1}{2}} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} f_1 \cdot g_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos mx dx = 0 \\ f_1 \cdot f_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0 (m \neq n) \\ g_1 \cdot g_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0 (m \neq n) \end{cases}$$

4.4.2 周期函数的傅里叶级数

定理 4.4.1 (周期为 2π 函数的傅里叶级数)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

三角函数分解, a_n, b_n 是傅里叶级数系数:

$$\begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos^2 nx dx \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin^2 nx dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \end{cases}$$

记作: 2π 周期函数 $f(x)$ 的傅里叶级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

定理 4.4.2 (周期为 2π 奇偶函数的傅里叶级数)

(1). $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 为奇函数, 傅里叶级数为正弦级数:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx \Rightarrow b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

(2). $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 为偶函数, 傅里叶级数为余弦级数:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx \Rightarrow a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

4.4.3 任意对称区间中的傅里叶展开

定义 4.4.4 (任意对称区间中的傅里叶展开)

设 $f(x)$ 定义域为 $[-l, l]$, 令 $y = \frac{x\pi}{l}, y \in [-\pi, \pi]$

$$g(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos ny + b_n \sin ny) \Rightarrow f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{l}x + b_n \sin \frac{n\pi}{l}x)$$

傅里叶系数:

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l}x dx, & n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l}x dx, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

4.4.4 周期延拓

定义 4.4.5 (周期延拓)

(1). 周期延拓: $[-\pi, \pi] \rightarrow (-\infty, +\infty)$

(2). 奇延拓: $[0, \pi] \rightarrow [-\pi, \pi]$ 且 $f(x)$ 为奇函数, 正弦级数

(3). 偶延拓: $[0, \pi] \rightarrow [-\pi, \pi]$ 且 $f(x)$ 为偶函数, 余弦级数

4.4.5 逐点收敛性理论

定理 4.4.3 (狄利克雷收敛定理)

$f(x)$ 以 $2l$ 为周期的可积函数, 在 $[-l, l]$ 上 $f(x)$ 满足条件:

- (1). 连续或者只有有限个第一类间断点
- (2). 至多有有限个极值点

$f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-l, l]$ 上处处收敛, 其和函数 $S(x)$ 满足

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ 为连续点} \\ \frac{f(x_-) + f(x_+)}{2}, & x \text{ 为间断点} \\ \frac{f(-l_+) + f(l_-)}{2}, & x = \pm l \end{cases}$$



定理 4.4.4 (帕塞瓦尔公式)

$f(x)$ 是 2π 周期函数, $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 有界可积, 傅里叶系数满足:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$



推论 4.4.1 (常见级数和)

- (1). $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$
- (2). $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
- (3). $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \ln 2$
- (4). $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = 2$
- (5). $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} = \frac{e + e^{-1}}{2}$
- (6). $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$
- (7). $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+2}{(2n+1)!} = \sin 1 + \cos 1$





第5章 空间解析几何

内容提要

- 向量代数
- 空间平面和直线
- 空间曲线和曲面
- 切线和法平面、法线和切平面
- 方向导数和梯度、散度和旋度

5.1 向量代数

定义 5.1.1 (向量代数)

- (1). 方向角: 非零向量 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 与 x, y, z 轴所成夹角 α, β, γ 称为向量 \mathbf{a} 的方向角
(2). 方向余弦: $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 称为向量 \mathbf{a} 的方向余弦, $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \cos \beta = \frac{a_y}{|\mathbf{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \cos \gamma = \frac{a_z}{|\mathbf{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

设 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z), \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$

- (3). 夹角

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$
$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

- (4). 投影

$$\text{Prj}_b \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

(5). 叉积

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$$



5.2 空间平面和直线

5.2.1 平面

定义 5.2.1 (平面方程)

假设平面的法向量 $\mathbf{n} = (A, B, C)$

(1). 一般式

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

(2). 点法式

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

(3). 截距式, 平面过 $(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$ 三点

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

(4). 三点式 $P_i(x_i, y_i, z_i) (i = 1, 2, 3)$ 不共线

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \end{vmatrix} = 0$$



5.2.2 直线

定义 5.2.2 (直线方程)

假设直线的方向向量 $\tau = (l, m, n)$, $P(x_0, y_0, z_0)$ 是直线上的一点

(1). 一般式

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, & \mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, & \mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) \\ \tau = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 \end{cases}$$

(2). 点向式

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

(3). 参数式

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

(4). 两点式

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_2}$$

定理 5.2.1 (位置关系)

(1). 点到直线的距离公式

点 $M(x, y, z)$ 到直线 $L: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ 的距离

$$d = \frac{|\tau \times \overrightarrow{M_0M}|}{|\tau|} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ l & m & n \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

二维平面:

$$d = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

(2). 点到平面距离公式

点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离, $P(x, y, z)$ 是平面上任意一点

$$d = |\text{Prj}_n \overrightarrow{P_0P}| = \frac{|A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

(3). 直线和直线

设 $\tau_1(l_1, m_1, n_1), \tau_2(l_2, m_2, n_2)$ 分别是 L_1, L_2 的方向向量

$$\begin{cases} L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \tau_1 \perp \tau_2 \Leftrightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \\ L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \tau_1 \parallel \tau_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \end{cases}$$

L_1, L_2 的夹角 $\theta = \arccos \frac{|\tau_1 \cdot \tau_2|}{|\tau_1||\tau_2|}, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

(4). 平面和平面

设 $n_1(A_1, B_1, C_1), n_2(A_2, B_2, C_2)$ 分别是 π_1, π_2 的法向量

$$\begin{cases} \pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow n_1 \perp n_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0 \\ \pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow n_1 \parallel n_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \end{cases}$$

π_1, π_2 的夹角 $\theta = \arcsin \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1||n_2|}, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$



5.3 空间曲面和曲线

定义 5.3.1 (空间曲线)

(1). 一般式

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

(2). 参数方程式

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$$

(3). 空间曲线在坐标面的投影

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

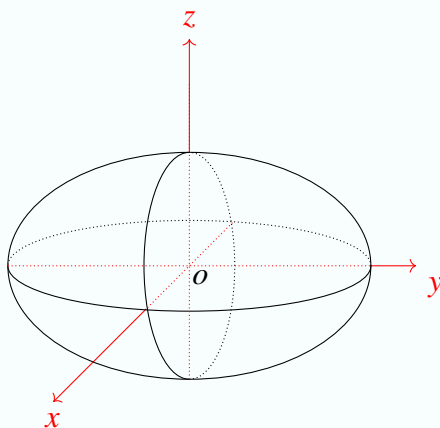
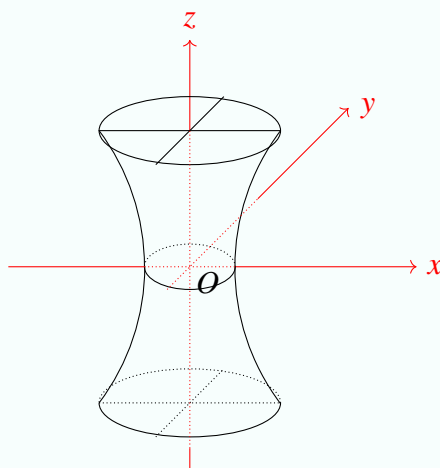


定义 5.3.2 (空间曲面)

(1). 一般曲面方程

$$F(x, y, z) = 0$$

(2). 二次曲面

(a). 椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 图 5.1: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (b). 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 图 5.2: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (c). 双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

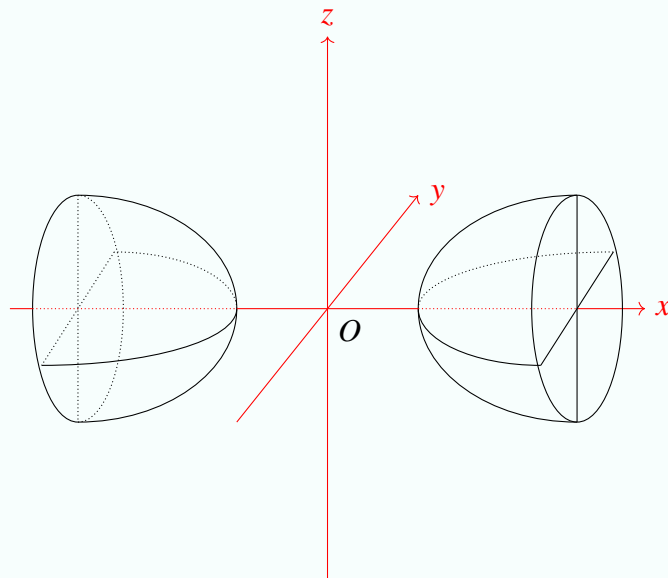


图 5.3: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

(d). 椭圆抛物面 $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z (p, q > 0)$

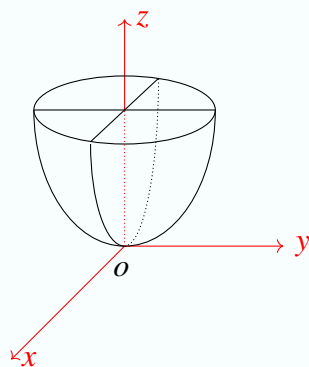


图 5.4: $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z (p, q > 0)$

(f). 椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$

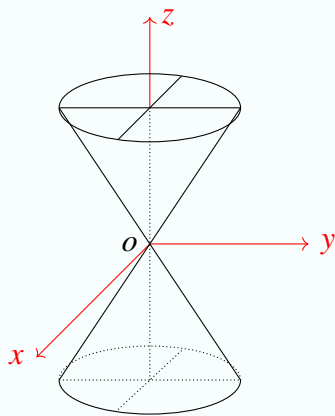


图 5.5: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$

(g). 双曲抛物面 $-\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$ ($p, q > 0$)

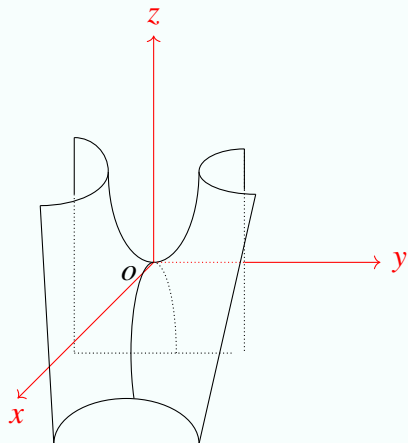


图 5.6: $-\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$ ($p, q > 0$)

(h). 双曲抛物面 $z = xy$

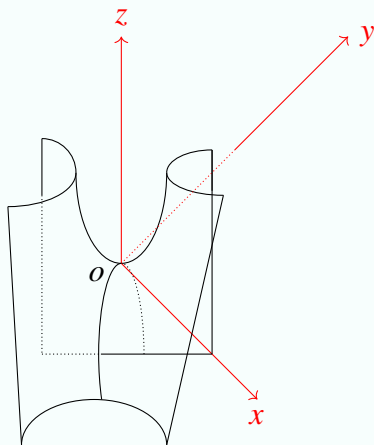


图 5.7: $z = xy$

(i). 椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

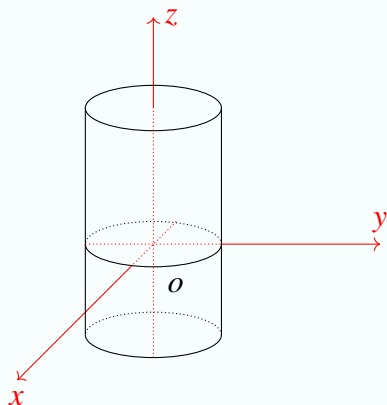


图 5.8: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(j). 双曲柱面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

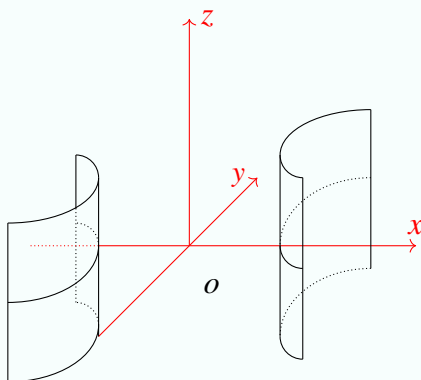


图 5.9: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

(k). 抛物柱面 $y = ax^2$

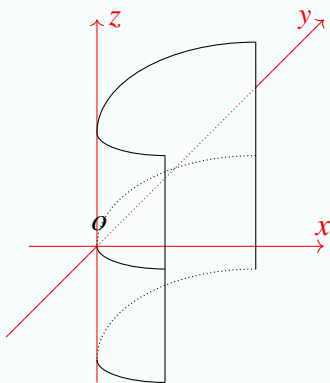


图 5.10: $y = ax^2$

(3). 旋转曲面

曲线 $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 绕直线 $L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ 旋转一周形成的旋转曲面,

直线 L 的方向向量 $\tau = (l, m, n)$

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 是曲线 Γ 上任意一点, $P(x, y, z)$ 是 M_1 绕直线 L 旋转一周形成的纬圆上异于 M_1 的一点:

$$\begin{cases} \tau \perp \overrightarrow{M_1 P} \\ |\overrightarrow{M_1 M_0}| = |\overrightarrow{P M_0}| \\ F(x_1, y_1, z_1) = 0 \\ G(x_1, y_1, z_1) = 0 \end{cases}$$

5.3.1 空间曲线的切线和法平面

定义 5.3.3 (曲线切线和法平面)

(1). 参数方程

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$$

在 $t = t_0$ 时, 点 $P_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ 处切线的方向向量 $\mathbf{n} = (f'(t_0), g'(t_0), h'(t_0))$

切线方程

$$\frac{x-x_0}{f'(t_0)} = \frac{y-y_0}{g'(t_0)} = \frac{z-z_0}{h'(t_0)}$$

法平面方程

$$f'(t_0)(x-x_0) + g'(t_0)(y-y_0) + h'(t_0)(z-z_0) = 0$$

(2). 一般式

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处切线的方向向量

$$\tau = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \end{vmatrix} = (A, B, C)$$

切线方程

$$\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C}$$

法平面方程

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

5.3.2 空间曲面的切平面和法线

定义 5.3.4

(1). $F(x, y, z) = 0$, 点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 处切平面法向量 $\mathbf{n} = \{F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0)\}$

切平面方程

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0$$

法线方程

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$$

(2). $z = f(x, y)$, 点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 处切平面法向量 $\mathbf{n} = \{f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1\}$

切平面方程

$$f'_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0$$

法线方程

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$$

5.4 场论初步

5.4.1 方向导数

定义 5.4.1 (方向导数)

设三元函数 $u = u(x, y, z)$ 在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的某空间邻域内 $U \subset R^3$ 有定义, l 是从 P_0 出发的一条射线, $P(x, y, z)$ 为 l 上且在 U 中的任意一点:

$$\begin{cases} x - x_0 = \Delta x = t \cos \alpha \\ y - y_0 = \Delta y = t \cos \beta \\ z - z_0 = \Delta z = t \cos \gamma \end{cases}$$

$t = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ 表示 $|PP_0|$, 如果下面极限存在:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{u(P) - u(P_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{u(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) - u(x_0, y_0, z_0)}{t}$$

我们将此极限称为 $u = f(x, y, z)$ 在 P_0 处沿着 l 的方向导数, 记作 $\frac{\partial u}{\partial l}|_{P_0}$

定理 5.4.1 (方向导数计算公式)

$$\frac{\partial u}{\partial l}|_{P_0} = u'_x \cos \alpha + u'_y \cos \beta + u'_z \cos \gamma$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为方向 l 的方向余弦

5.4.2 梯度

定义 5.4.2 (梯度)

设三元函数 $u = u(x, y, z)$ 在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 处具有一阶偏导数, 定义下面为 $u = u(x, y, z)$ 在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的梯度:

$$\text{grad } u|_{P_0} = (u'_x(P_0), u'_y(P_0), u'_z(P_0))$$

梯度和方向导数之间的关系:

$$\frac{\partial u}{\partial l}|_{P_0} = \text{grad } u|_{P_0} \cdot l = |\text{grad } u|_{P_0}| |l| \cos \theta$$

5.4.3 散度和旋度

定义 5.4.3 (散度和旋度)

设向量场 $A(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$

散度

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

旋度

$$\operatorname{rot} A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$





第 6 章 三重积分

内容提要

- 三重积分定义和性质
- 三重积分的对称性
- 三重积分计算
- 变量替换
- 重心公式、转动惯量和万有引力

6.1 三重积分定义和性质

定义 6.1.1 (三重积分)

设 $f(x, y, z)$ 是空间有界闭区域 Ω 上的有界函数, 将 Ω 任意分为 n 个小闭区域

$$\Delta v_1, \Delta v_2, \cdots, \Delta v_n$$

其中 Δv_i 表示第 i 个小闭区域, 也表示第 i 个小闭区域的体积, 在每一个 Δv_i 中任意取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) , 作乘积 $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 并求和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$, 如果当 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \{\lambda | \lambda = \max\{\Delta v_i \text{ 的直径}, i = 1, 2, \cdots, n\}\} = 0$ 时, 求和的极限总是存在, 与 Δv_i 的分法以及点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的选取无关, 称此极限为函数 $f(x, y, z)$ 在闭区域 Ω 上的三重积分, 记作

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

其中 $f(x, y, z)$ 称为被积函数, Ω 称为积分区域, $f(x, y, z)dv$ 称为被积表达式, dv 称为体积微元, x, y, z 称为积分变量, $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$ 称为积分和

物理意义

设一物体占有 $Oxyz$ 上闭区域 Ω , 在点 (x, y, z) 处的密度为 $\rho(x, y, z)$, 假定 $\rho(x, y, z)$ 在 Ω

上连续, 物体质量 $M = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dv$

推论 6.1.1

(1). 当 $f(x, y, z)$ 在闭区域 Ω 上连续时, 三重积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$ 一定存在; 当 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上可积, $f(x, y, z)$ 在 Ω 上必有界

(2). $\iiint_{\Omega} 1 dv = \iiint_{\Omega} dv = V$, V 是 Ω 的体积

(3). 积分线性性质

$$\iiint_{\Omega} [k_1 f(x, y, z) \pm k_2 g(x, y, z)] dv = k_1 \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \pm k_2 \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dv$$

(4). 积分的可加性

设 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上可积, 且 $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset, \Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv + \iiint_{\Omega_2} f(x, y, z) dv$$

(5). 积分保号性

设 $f(x, y, z)$ 和 $g(x, y, z)$ 在 Ω 上可积, 且在 Ω 上, $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \leq \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dv \Rightarrow \left| \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \right| \leq \iiint_{\Omega} |f(x, y, z)| dv$$

(6). 估值定理

设 M, m 分别是 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上的最大值和最小值, V 是 Ω 的体积

$$mV \leq \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv \leq MV$$

(7). 中值定理

设 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上连续, V 是 Ω 的体积

$$\exists (\xi, \eta, \zeta) \in \Omega, \text{ s.t. } \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = f(\xi, \eta, \zeta) V$$

6.2 三重积分对称性

定义 6.2.1 (普通对称性)

(1). Ω 关于平面 xOz 对称

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \begin{cases} 2 \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv & f(x, y, z) = f(x, -y, z) \\ 0 & f(x, y, z) = -f(x, -y, z) \end{cases}$$

(2). Ω 关于平面 yOz 对称

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \begin{cases} 2 \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv & f(x, y, z) = f(-x, y, z) \\ 0 & f(x, y, z) = -f(-x, y, z) \end{cases}$$

(3). Ω 关于平面 xOy 对称

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \begin{cases} 2 \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dv & f(x, y, z) = f(x, y, -z) \\ 0 & f(x, y, z) = -f(x, y, -z) \end{cases}$$

定义 6.2.2 (轮换对称性)

若将 x, y, z 任意两个交换位置后, 积分区域 Ω 保持不变

$$\iiint_{\Omega} f(x) dv = \iiint_{\Omega} f(y) dv = \iiint_{\Omega} f(z) dv$$

6.3 三重积分计算方法

定义 6.3.1 (直角坐标系)

(1). 先一后二

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iint_{D_{xy}} d\sigma \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

一般用于空间区域 Ω 无侧面或者侧面为柱面, 转化为二重积分, 积分区域为空间区域 Ω 在 $xOy(yOz, xOz)$ 平面的投影

(2). 先二后一

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_a^b dz \iint_{D_z} f(x, y, z) d\sigma$$

适用于旋转体, 旋转曲面方程 $z = z(x, y)$

定义 6.3.2 (换元法)

令 $\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$, 且 $(x, y, z) \rightarrow (u, v, w)$ 是一一映射, $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$ 有一阶连续偏导数

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\iiint_{\Omega_{xyz}} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega_{uvw}} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$

定义 6.3.3 (柱面坐标系)

令 $\begin{cases} x = r \cos \theta, & \theta \in [0, 2\pi] \\ y = r \sin \theta, & \theta \in [0, 2\pi] \\ z = z \end{cases}$, 且 $(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, z)$ 是一一映射, $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$ 有一阶连续偏导数

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

$$\iiint_{\Omega_{xyz}} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Omega_{r\theta z}} dr d\theta \int_{z_1(r, \theta)}^{z_2(r, \theta)} r f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) dz$$

定义 6.3.4 (球面坐标系)

$$\text{令 } \begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, & \theta \in [0, 2\pi] \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, & \theta \in [0, 2\pi], \text{ 且 } (x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \varphi) \text{ 是一一映射, } x = r \sin \varphi \cos \theta, y = \\ z = r \cos \varphi, & \varphi \in [0, \pi] \end{cases}$$

$r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \varphi$ 有一阶连续偏导数

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi & 0 & -r \sin \varphi \end{vmatrix} = r^2 \sin \varphi$$

$$\iiint_{\Omega_{xyz}} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega_{r\varphi\theta}} r^2 \sin \varphi f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) dr d\theta d\varphi$$

6.4 三重积分应用

定理 6.4.1 (重心公式)

对于空间物体, 体密度 $\rho(x, y, z)$, Ω 是物体所占的空间区域, 重心 $O(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) dv}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dv} \\ \bar{y} = \frac{\iiint_{\Omega} y \rho(x, y, z) dv}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dv} \\ \bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z \rho(x, y, z) dv}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dv} \end{cases}$$

当密度函数为 $\rho(x, y, z)$ 为常数, 重心就是形心

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} x dv}{\iiint_{\Omega} dv} \\ \bar{y} = \frac{\iiint_{\Omega} y dv}{\iiint_{\Omega} dv} \\ \bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z dv}{\iiint_{\Omega} dv} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \iiint_{\Omega} x dv = \bar{x} \cdot V \\ \iiint_{\Omega} y dv = \bar{y} \cdot V \\ \iiint_{\Omega} z dv = \bar{z} \cdot V \end{cases}$$

定理 6.4.2 (转动惯量 $I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$)

对于空间物体, 体密度 $\rho(x, y, z)$, Ω 是物体所占的空间区域

(1). x 轴

$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dv$$

(2). y 轴

$$I_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dv$$

(3). z 轴

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dv$$

(4). 原点 O

$$I_O = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dv$$


定理 6.4.3 (万有引力 $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$)

对于空间物体, 体密度 $\rho(x, y, z)$, Ω 是物体所占的空间区域, 计算该物体对物体外一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处质量为 m 的质点的引力 $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$

$$\begin{aligned} F_x &= Gm \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \cos \alpha dv \\ &= Gm \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)(x - x_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_y &= Gm \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{(y - y_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \cos \beta dv \\&= Gm \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)(y - y_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} \\F_z &= Gm \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{(z - z_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \cos \gamma dv \\&= Gm \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)(z - z_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$





第 7 章 第一型曲线和曲面积分

内容提要

- 第一型曲线积分的定义和性质
- 第一型曲线积分对称性
- 第一型曲面积分的定义和性质
- 第一型曲面积分对称性
- 弧长、曲面面积、重心、转动惯量和万有引力

7.1 第一型曲线积分

7.1.1 第一型曲线积分定义和性质

定义 7.1.1 (第一型曲线积分)

设 L 是 xOy 平面内一条光滑曲线弧, 函数 $f(x, y)$ 在 L 上有界, 在 L 上任意插入一系列的点 M_1, M_2, \dots, M_{n-1} 将 L 分成 n 小段, 设第 i 段的弧长为 Δs_i , 在第 i 段上任意取一点 (ζ_i, η_i) , 作乘积 $f(\zeta_i, \eta_i)\Delta s_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 并求和 $\sum_{i=1}^n f(\zeta_i, \eta_i)\Delta s_i$, 当 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \{\lambda | \lambda = \max\{\Delta s_i, i = 1, 2, \dots, n\} = 0\}$ 时, 求和极限存在, 且与 Δs_i 的分法以及 (ζ_i, η_i) 的取法无关, 称此极限为函数 $f(x, y)$ 在曲线 L 上对弧长的曲线积分或第一型曲线积分, 记作 $\int_L f(x, y)ds$

$$\int_L f(x, y)ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i, \eta_i)\Delta s_i$$

其中 $f(x, y)$ 称为被积函数, $f(x, y)ds$ 称为被积表达式, x, y 是积分变量, L 是积分弧. 对于函数 $f(x, y, z)$ 在空间曲线 Γ 上的第一型曲线积分

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z)ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i$$

物理意义

1. 设一物体在 xoy 平面内一光滑曲线弧 L 上, 物体在 L 上的线密度为 $\rho(x, y)$, 则物体的质量 $m = \int_L \rho(x, y) ds$
2. 设一物体在空间曲线 Γ 上, 物体在 Γ 上的线密度为 $\rho(x, y, z)$, 则物体的质量 $m = \int_{\Gamma} \rho(x, y, z) ds$

推论 7.1.1

(1). $\int_{\Gamma} ds = l_{\Gamma}$, 其中 l_{Γ} 是 Γ 的长度

(2). 设 $f(x, y, z)$ 在 Γ 上可积, 其在 Γ 上必有界

(3). 积分线性性质

$$\int_{\Gamma} [k_1 f(x, y, z) + k_2 g(x, y, z)] ds = k_1 \int_{\Gamma} f(x, y, z) ds + k_2 \int_{\Gamma} g(x, y, z) ds$$

(4). 积分可加性

设 $f(x, y, z)$ 在 Γ 上可积, 且 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset, \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \int_{\Gamma_1} f(x, y, z) ds + \int_{\Gamma_2} f(x, y, z) ds$$

(5). 积分保号性

设 $f(x, y, z), g(x, y, z)$ 在 Γ 上可积, 且在 Γ 上 $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds \leq \int_{\Gamma} g(x, y, z) ds \Rightarrow \left| \int_{\Gamma} f(x, y, z) ds \right| \leq \int_{\Gamma} |f(x, y, z)| ds$$

(6). 估值定理设 M, m 分别是 $f(x, y, z)$ 在 Γ 上的最大值和最小值, l_{Γ} 的长度

$$ml_{\Gamma} \leq \int_{\Gamma} f(x, y, z) ds \leq Ml_{\Gamma}$$

(7). 中值定理

设 $f(x, y, z)$ 在 Γ 上连续, l_{Γ} 是 Γ 的长度

$$\exists (\xi, \eta, \zeta) \in \Gamma, \text{ s.t. } \int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = f(\xi, \eta, \zeta) l_{\Gamma}$$

7.1.2 第一型曲线积分的对称性

定义 7.1.2 (普通对称性)

(1). Γ 关于平面 xoz 对称

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \begin{cases} 2 \int_{\Gamma_1} f(x, y, z) ds & f(x, y, z) = f(x, -y, z) \\ 0 & f(x, y, z) = -f(x, -y, z) \end{cases}$$

(2). Γ 关于平面 $yo z$ 对称

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \begin{cases} 2 \int_{\Gamma_1} f(x, y, z) ds & f(x, y, z) = f(-x, y, z) \\ 0 & f(x, y, z) = -f(-x, y, z) \end{cases}$$

(3). Γ 关于平面 xoy 对称

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \begin{cases} 2 \int_{\Gamma_1} f(x, y, z) ds & f(x, y, z) = f(x, y, -z) \\ 0 & f(x, y, z) = -f(x, y, -z) \end{cases}$$

定义 7.1.3 (轮换对称性)

若将 x, y, z 任意两个交换位置后, 积分区域 Γ 保持不变

$$\int_{\Gamma} f(x) ds = \int_{\Gamma} f(y) ds = \int_{\Gamma} f(z) ds$$

7.1.3 第一型曲线积分计算

定理 7.1.1 (平面曲线)

(1). $L: y = f(x), x \in [a, b]$

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

(2). $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t)] \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

(3). $L: r = r(\theta), \theta \in [\theta_1, \theta_2]$

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta$$

定理 7.1.2 (空间曲线)

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta] \Rightarrow ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$



7.2 第一型曲面积分

7.2.1 第一型曲面积分定义和性质

定义 7.2.1 (第一型曲面积分)

设曲面 Σ 是光滑的, 函数 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上有界, 将 Σ 任意分为 n 个小块 $\Delta\Sigma_i$, $\Delta\Sigma_i$ 表示曲面 $\Delta\Sigma_i$ 的面积, 在 $\Delta\Sigma_i$ 上任意取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) , 作乘积 $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta\Sigma_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 并求和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta\Sigma_i$, 当 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \{\lambda | \lambda = \max\{\Delta\Sigma_i\}, i = 1, 2, \dots, n\} = 0$ 时, 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta\Sigma_i$ 存在, 且与 $\Delta\Sigma_i$ 的分法和 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的取法无关, 称此极限为函数 $f(x, y, z)$ 在曲面 Σ 上对面积的曲面积分或第一型曲面积分, 记作 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta\Sigma_i$$

其中 $f(x, y, z)$ 称为被积函数, $f(x, y, z) dS$ 称为被积表达式, x, y, z 是积分变量, Σ 是积分曲面

物理意义

设一曲面物体 Σ , 曲面密度为 $\rho(x, y, z)$, 则物体的质量 $m = \iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) dS$



推论 7.2.1

- (1). $\int_{\Sigma} dS = S$, 其中 S 是 Σ 的面积
- (2). 设 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上可积, 其在 Σ 上必有界
- (3). 积分线性性质

$$\iint_{\Sigma} [k_1 f(x, y, z) + k_2 g(x, y, z)] dS = k_1 \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS + k_2 \iint_{\Sigma} g(x, y, z) dS$$

- (4). 积分可加性

设 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上可积, 且 $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset, \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS$$

- (5). 积分保号性

设 $f(x, y, z), g(x, y, z)$ 在 Σ 上可积, 且在 Σ 上 $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS \leq \iint_{\Sigma} g(x, y, z) dS \Rightarrow \left| \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS \right| \leq \iint_{\Sigma} |f(x, y, z)| dS$$

(6). 估值定理

设 M, m 分别是 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上的最大值和最小值, S_{Σ} 表示 Σ 的面积

$$mS_{\Sigma} \leq \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS \leq MS_{\Sigma}$$

(7). 中值定理

设 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上连续, S_{Σ} 是 Σ 的面积

$$\exists (\xi, \eta, \zeta) \in \Sigma, \text{ s.t. } \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = f(\xi, \eta, \zeta) S_{\Sigma}$$

7.2.2 第一型曲面积分的对称性

定义 7.2.2 (普通对称性)

(1). Σ 关于平面 xOz 对称

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \begin{cases} 2 \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS & f(x, y, z) = f(x, -y, z) \\ 0 & f(x, y, z) = -f(x, -y, z) \end{cases}$$

(2). Σ 关于平面 yOz 对称

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \begin{cases} 2 \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS & f(x, y, z) = f(-x, y, z) \\ 0 & f(x, y, z) = -f(-x, y, z) \end{cases}$$

(3). Σ 关于平面 xOy 对称

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \begin{cases} 2 \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS & f(x, y, z) = f(x, y, -z) \\ 0 & f(x, y, z) = -f(x, y, -z) \end{cases}$$

定义 7.2.3 (轮换对称性)

若将 x, y, z 任意两个交换位置后, 积分区域 Σ 保持不变

$$\iint_{\Sigma} f(x) dS = \iint_{\Sigma} f(y) dS = \iint_{\Sigma} f(z) dS$$

7.2.3 第一型曲面积分计算

定理 7.2.1 (投影法)

1. 曲面投影 xoy 平面

设曲面 Σ 的方程为 $z = z(x, y)$, 则 Σ 的面积元素 $dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

2. 曲面投影 $yo z$ 平面

设曲面 Σ 的方程为 $x = x(y, z)$, 则 Σ 的面积元素 $dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz$$

3. 曲面投影 xoz 平面

设曲面 Σ 的方程为 $y = y(x, z)$, 则 Σ 的面积元素 $dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz$$

7.3 第一型曲线积分和曲面积分应用

1. 曲线长度和曲面面积

定理 7.3.1 (曲线弧长和曲面面积)

$$L_{\Gamma} = \int_{\Gamma} ds$$

$$S_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} dS$$

2. 重心

定理 7.3.2 (重心公式)

(1). 光滑曲线, 对于光滑曲线 Γ , 线密度 $\rho(x, y, z)$, 重心 $O(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\int_{\Gamma} x\rho(x, y, z)ds}{\int_{\Gamma} \rho(x, y, z)ds} \\ \bar{y} = \frac{\int_{\Gamma} y\rho(x, y, z)ds}{\int_{\Gamma} \rho(x, y, z)ds} \\ \bar{z} = \frac{\int_{\Gamma} z\rho(x, y, z)ds}{\int_{\Gamma} \rho(x, y, z)ds} \end{cases}$$

当密度函数为 $\rho(x, y, z)$ 为常数, 重心就是形心

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\int_{\Gamma} xds}{\int_{\Gamma} ds} \\ \bar{y} = \frac{\int_{\Gamma} yds}{\int_{\Gamma} ds} \\ \bar{z} = \frac{\int_{\Gamma} zds}{\int_{\Gamma} ds} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_{\Gamma} xds = \bar{x} \cdot l_{\Gamma} \\ \int_{\Gamma} yds = \bar{y} \cdot l_{\Gamma} \\ \int_{\Gamma} zds = \bar{z} \cdot l_{\Gamma} \end{cases}$$

(2). 光滑曲面, 对于光滑曲面 Σ , 曲面密度 $\rho(x, y, z)$, 重心 $O(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\int_{\Sigma} x\rho(x, y, z)dS}{\int_{\Sigma} \rho(x, y, z)dS} \\ \bar{y} = \frac{\int_{\Sigma} y\rho(x, y, z)dS}{\int_{\Sigma} \rho(x, y, z)dS} \\ \bar{z} = \frac{\int_{\Sigma} z\rho(x, y, z)dS}{\int_{\Sigma} \rho(x, y, z)dS} \end{cases}$$

当密度函数为 $\rho(x, y, z)$ 为常数, 重心就是形心

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\int_{\Sigma} x dS}{\int_{\Sigma} dS} \\ \bar{y} = \frac{\int_{\Sigma} y dS}{\int_{\Sigma} dS} \\ \bar{z} = \frac{\int_{\Sigma} z dS}{\int_{\Sigma} dS} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_{\Sigma} x dS = \bar{x} \cdot S_{\Sigma} \\ \int_{\Sigma} y dS = \bar{y} \cdot S_{\Sigma} \\ \int_{\Sigma} z dS = \bar{z} \cdot S_{\Sigma} \end{cases}$$

3. 转动惯量**定义 7.3.1 (转动惯量: $I = mr^2$)**

(1). 光滑曲线, 对于光滑曲线 Γ , 线密度 $\rho(x, y, z)$

对 x 轴: $I_x = \int_L (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)ds$

对 y 轴: $I_y = \int_L (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)ds$

对 z 轴: $I_z = \int_L (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) ds$

对坐标原点 O : $I_O = \int_L (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds$

(2). 光滑曲面, 对于光滑曲线 Σ , 面密度 $\rho(x, y, z)$

对 x 轴: $I_x = \iint_{\Sigma} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dS$

对 y 轴: $I_y = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dS$

对 z 轴: $I_z = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dS$

对坐标原点 O : $I_O = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dS$

4. 万有引力

定义 7.3.2 (引力公式: $F = \frac{GMm}{r^2}$)

(1). 光滑曲线, 对于光滑曲线 Γ , 线密度 $\rho(x, y, z)$

$$F_x = Gm \int_{\Gamma} \frac{\rho(x, y, z)(x - x_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} ds$$

$$F_y = Gm \int_{\Gamma} \frac{\rho(x, y, z)(y - y_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} ds$$


$$F_z = Gm \int_{\Gamma} \frac{\rho(x, y, z)(z - z_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} ds$$

(2). 光滑曲面, 对于光滑曲面 Σ , 面密度 $\rho(x, y, z)$

$$F_x = Gm \iint_{\Sigma} \frac{\rho(x, y, z)(x - x_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} dS$$

$$F_y = Gm \iint_{\Sigma} \frac{\rho(x, y, z)(y - y_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} dS$$

$$F_z = Gm \iint_{\Sigma} \frac{\rho(x, y, z)(z - z_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} dS$$



第 8 章 第二型曲线和曲面积分

内容提要

- 第二型曲线积分的定义和性质
- 第二型曲面积分定义和性质
- 格林公式和斯托克斯公式
- 高斯公式

8.1 第二型曲线积分

8.1.1 第二型曲线积分定义和性质

定义 8.1.1 (第二型曲线积分)

在变力场中, $\mathbf{F} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ 沿着曲线 L 从 A 点到 B 点的做功
二维平面

$$W = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

三维空间

$$W = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Gamma} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

推论 8.1.1

(1). 线性性质

$$\int_{\Gamma} (k_1 \mathbf{F}_1 \pm \mathbf{F}_2) d\mathbf{s} = k_1 \int_{\Gamma} \mathbf{F}_1 d\mathbf{s} + k_2 \int_{\Gamma} \mathbf{F}_2 d\mathbf{s}$$

(2). 积分有向性

$$\int_{\widehat{AB}} \mathbf{F} ds = - \int_{\widehat{BA}} \mathbf{F} ds$$

(3). 积分可加性

$$\int_{\widehat{AB}} \mathbf{F} ds = \int_{\widehat{AC}} \mathbf{F} ds + \int_{\widehat{CB}} \mathbf{F} ds$$

8.1.2 第二型曲线积分计算

8.1.2.1 参数方程转定积分

定理 8.1.1

1. 二维平面

$$L = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$$

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt$$

2. 三维空间

$$\Gamma = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t), z(t))x'(t) dt \\ &+ Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) dt \\ &+ R(x(t), y(t), z(t))z'(t) dt \end{aligned}$$

8.1.2.2 格林公式

定理 8.1.2 (格林公式)

设平面有界区域 D 由光滑曲线 L 围成, L 取正向 (左手在内侧), $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 上有一阶连续偏导数

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

- L 是非封闭区域, 且在区域 D 内满足 $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, 补线使其成为封闭区域

- L 是封闭区域, 且在区域 D 内有奇点, 且除奇点之外满足 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$$\oint_L Pdx + Qdy = \oint_{L_1} Pdx + Qdy$$

- 平面曲线积分与路径无关 $\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Leftrightarrow u = Pdx + Qdy$

8.1.2.3 斯托克斯公式

定理 8.1.3 (斯托克斯公式)

设 Ω 是某空间区域, Σ 是 Ω 内分片光滑有向曲面, Γ 是 Σ 的边界, 方向和 Σ 法向量成右手系, 函数 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在 Ω 内有连续的一阶偏导数

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dx dz & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$



8.2 第二型曲面积分

8.2.1 第二型曲面积分定义和性质

定义 8.2.1 (第二型曲线积分)

在向量场中, 存在向量函数 $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$, Σ 是向量场中某一有向光滑曲面, \mathbf{n} 是 Σ 的单位法向量, \mathbf{F} 在 Σ 上的通量

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy$$



推论 8.2.1

(1). 线性性质

$$\iint_{\Sigma} (k_1 \mathbf{F}_1 \pm \mathbf{F}_2) dS = k_1 \iint_{\Sigma} \mathbf{F}_1 dS + k_2 \iint_{\Sigma} \mathbf{F}_2 dS$$

(2). 积分有向性

$$\iint_{\Sigma^+} \mathbf{F} d\mathbf{S} = - \iint_{\Sigma^-} \mathbf{F} d\mathbf{S}$$

(3). 积分可加性

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma_1} \mathbf{F} d\mathbf{S} + \iint_{\Sigma_2} \mathbf{F} d\mathbf{S}$$

8.2.2 第二型曲面积分计算

8.2.2.1 投影转二重积分

•

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy$$

• 每一项的符号由 \mathbf{n} 的方向决定

$$\begin{cases} \cos\alpha > 0 \rightarrow dydz \\ \cos\beta > 0 \rightarrow dx dz \\ \cos\gamma > 0 \rightarrow dx dy \end{cases}$$

8.2.2.2 高斯公式

定理 8.2.1 (高斯公式)

设空间有界闭区域 Ω 由分片光滑封闭曲面 Σ 围成, Σ 取外侧, 函数 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在 Ω 内有连续的一阶偏导数

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv$$