LaTeX main

Sun for morning, moon for night, and you forever.

作者：Lyshmily.Y & 木易

组织：Lyshmily.Y

时间：July 26, 2024

版本：V.1.0

邮箱：yjlpku.outlook.com & 845307723@qq.com

在没有结束前，总要做很多没有意义的事，这样才可以在未来某一天，用这些无意义的事去堵住那些讨厌的缺口

目录

3 第 3 部分 * 线代

5 第 5 部分 * 每日一题 I

6 第 6 部分 * 每日一题 II

第一部分

高数(上)

第 1 部分目录

第 1 章 预备知识

第 2 章 数列极限

第 3 章 函数极限和连续

第 4 章 一元微分学

4.1 一元微分学概念

定义 4.1.1 (导数)

设 $y=f(x)$ 定义在区间 I 上, 自变量在 $x=x_0$ 处增加一个增量 Δx 时, 其中 $x_0\in I, x_0+\Delta\in I$, 函数值的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, 如果极限 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在, 那么称此极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数, 记为 $f'(x_0)$ 或 $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$ 或 $\dfrac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}$

定义 4.1.2 (导数的几何意义)

函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 是函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的切线的斜率

定理 4.1.1 (导数存在充要条件)

函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导的充要条件是: 函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 存在且相等

定义 4.1.3 (微分)

设 $y=f(x)$ 定义在区间 I 上, 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导, 那么函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微分为 $dy=f'(x_0)dx$, 其中 dx 是自变量 x 的增量, dy 是因变量 y 的增量

4.2 一元微分学计算

定理 4.2.1 (基本求导公式)

1. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
2. $(a^x)' = a^x \ln a$ $\quad (\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$
3. $(e^x)' = e^x$ $\quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
4. $(\sin x)' = \cos x$ $\quad (\cos x)' = -\sin x$
5. $(\tan x)' = \sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
6. $(\sec x)' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = \tan x \sec x$
7. $(\csc x)' = \dfrac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x \csc x$
8. $(\cot x)' = -\csc^2 x$
9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{x^2+1}$
12. $\left(\ln(x+\sqrt{x^2+a})\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$
13. $\left(\ln(x+\sqrt{x^2-a})\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-a}}$

定理 4.2.2 (导数四则运算)

1. 和差法则: $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
2. 积法则: $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
3. 商法则: $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
4. 复合函数求导: $F[G(x)]' = F[G(x)]' \cdot G'(x)$

定理 4.2.3 (高阶导数)

1. $\sin^{(n)} x = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$ $\quad \sin^{(n)}(ax+b) = a^n \sin(ax+b+\frac{n\pi}{2})$
2. $\cos^{(n)} x = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$ $\quad \cos^{(n)}(ax+b) = a^n \cos(ax+b+\frac{n\pi}{2})$
3. $[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ $\quad [\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$
4. $(\dfrac{1}{ax+b})^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$

5. 莱布尼茨公式: $(uv)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{i}{n} u^{(i)} v^{(n-i)}$

定理 4.2.4 (泰勒公式)

1. 欧拉公式: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
2. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$
3. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{2n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$
4. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{2n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$
5. $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} x^{2n-1}, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
6. $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}, x \in (-1, 1)$
7. $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, x \in (-1, 1)$
8. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots, x \in (-1, 1]$
9. $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \cdots, x \in [-1, 1)$
10. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$

定理 4.2.5 (特殊函数导函数)

1. 隐函数导数:

$$F(x, y) = 0 \Rightarrow F'(x, y) \cdot y' = 0$$

2. 指对数函数求导:

$$\ln y = \ln f(x) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad y = a^{f(x)} \Rightarrow y = e^{f(x)\ln a}$$

3. 反函数导数: $x = \varphi(y), y = f(x)$ 记 $x'_y = \varphi'(y), y'_x = f'(x)$

(1). 一阶导数: $x'_y y'_x = 1 \Rightarrow \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

(2). 二阶导数: $x''_{yy} = -\frac{y''_x}{(y'_x)^3} \qquad y''_{xx} = -\frac{x''_{yy}}{(x'_y)^3}$

4. 参数方程导数: $x = x(t), y = y(t)$

(1). 一阶导数: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$

(2). 二阶导数: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{\frac{dy}{dx}}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dx}\left[\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt}\right]$

4.3 函数图像

定义 4.3.1 (函数图像要点)

1. 定义域 (间断点)
2. 奇偶性
3. 渐近线 (铅垂、水平、斜)

> **Points**
>
> (1).
>
> $$\begin{cases} \text{水平渐近线}: \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a \Rightarrow y = a \\ \text{铅垂渐近线}: \lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Rightarrow x = a \\ \text{斜渐近线}: \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - ax = b \Rightarrow y = ax + b \end{cases}$$
>
> (2). 在同一个趋向方向中水平渐近线和斜渐进线只能有一个
>
> (3). 间断点处看铅垂渐近线, $\pm\infty$ 处看水平渐近线和斜渐近线

4. 单调性和极值
5. 凹凸性和拐点

4.3.1 函数极值点和拐点

定义 4.3.2 (极值点)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义, 如果对去心邻域内任意一 x, 均有 $f(x) < f(x_0)$(或$f(x) > f(x_0)$), 我们称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极小值 (或极大值).

定义 4.3.3 (驻点)

一阶导数为 0 的点称为驻点; 对于多元函数而言, 驻点是一阶偏导数都为 0 的点.

定义 4.3.4 (拐点)

连续函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续,x_0 是区间的内点, 当函数 $f(x)$ 经过点 $(x_0, f(x_0))$ 时, 函数的凹凸性发生改变, 则称 $(x_0, f(x_0))$ 是函数 $f(x)$ 的拐点.

注

- 驻点是导数为 0 的点, 不一定是极值点
- 极值点导数可能存在, 也可能不存在; 当导数存在时,$f'(x_0) = 0$
- 拐点处二阶导数可能存在, 也可能不存在; 当二阶导数存在时,$f''(x_0) = 0$

第 5 章 一元积分学

第 6 章 中值定理

6.1 定理性质和证明

定理 6.1.1 (有界和最值定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 我们有: $m \le f(x) \le M$

其中 m, M 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值

定理 6.1.2 (介值定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 我们有: $m \le f(x) \le M$

其中 m, M 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值

$\forall \mu \in [m, M]$, $\exists \xi \in [a,b]$, $s.t.\ f(\xi) = \mu$

定理 6.1.3 (平均值定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 我们有: $m \le f(x) \le M$

其中 m, M 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值

当 $a \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le b, \exists \xi \in [a,b]$, $s.t.\ f(\xi) = \dfrac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$

定理 6.1.4 (零点定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且我们有 $f(a)f(b) < 0, \exists \xi \in (a,b)$, $s.t.\ f(\xi) = 0$

定理 6.1.5 (费马定理)

$f(x)$ 在 x_0 处可导, 且 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 极值点, 我们有: $f'(x_0) = 0$

证明: 我们不妨假设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取极大值

我们利用极值点的定义得到:

$$\begin{cases} f'_{-}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0 \\ f'_{+}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \ge 0 \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, $f'_{+}(x_0) = f'_{-}(x_0) = f(x_0) = 0$

定理 6.1.6 (罗尔定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a) = f(b)$, 则 $\exists \xi \in (a,b)$, $s.t.\ f'(\xi) = 0$

证明: 由最值定理我们可以得到 $m \le f(x) \le M$

(1). $m = M$ 时,$f(x) = C \Rightarrow f'(x) = 0$

(2). $m < M$ 时, 又因为 $f(a) = f(b)$, 我们知道在区间 (a,b) 中至少存在一个最值 (最大值或者最小值)

不妨假设在 $x = \xi$ 时,$f(\xi)$ 取得最值, 此时 $x = \xi$ 一定是 $f(x)$ 极值点, 由费马定理我们得到: $f'(\xi) = 0$

定理 6.1.7 (拉格朗日中值定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 则 $\exists \xi \in (a,b)$, $s.t.\ \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$

证明: 构造函数 $g(x) = f(x)(b-a) - [f(b) - f(a)]x$, 我们有:

$$g(a) = g(b) = bf(a) - af(b)$$

由罗尔定理得到: $\exists \xi \in (a,b)$, $s.t.\ g'(\xi) = 0$

$$f'(\xi)(b-a) = f(b) - f(a) \Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

定理 6.1.8 (柯西中值定理)

$f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $g'(x) \ne 0$,$\exists \xi \in (a,b)$, $s.t.\ \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

证明: 构造函数 $F(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x)$

$$F(a) = F(b) = \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)}$$

由罗尔定理得到:

$$\exists \xi \in (a,b),\ s.t.\ F'(\xi) = 0$$

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi) \Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

定理 6.1.9 (泰勒公式)

(1). 带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内 $n+1$ 阶导数存在, 对邻域内任意一点 x, 我们有:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

(2). 带佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式

设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导, 则存在 x_0 的一个邻域, 对于该邻域内任意一点 x, 我们有:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

定理 6.1.10 (积分中值定理)

(1). 一元函数积分中值定理

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.$ $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

证明: 构造函数 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$

由拉格朗日中值定理得到:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ F'(\xi)=\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}\Rightarrow\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$$

(2). 二元函数积分中值定理

$f(x,y)$ 在 D 上连续, 则 $\exists(\xi,\eta)\in D$, $s.t.$ $\iint_D f(x,y)dxdy=S_D f(\xi,\eta)$

(3). 广义积分中值定理

$f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $g(x)$ 不变号, 我们有:

$$\exists\xi\in[a,b],\ s.t.\ \int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

设 $f(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 连续,$g(x,y)$ 平面有界闭区域 D 可积且不变号, 我们有:

$$\exists(\xi,\eta)\in D,\ s.t.\ \iint\limits_D f(x,y)g(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)d\sigma$$

注

我们构造函数: $F(x)=\int_a^x f(t)g(t)dt$, $G(x)=\int_a^x g(t)dt$,$F'(x)=f(x)g(x),G'(x)=g(x)$

我们利用柯西中值定理可以得到:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}\Rightarrow\frac{f(\xi)g(\xi)}{g(\xi)}=\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

我们可以得到:

$$f(\xi)\int_a^b g(x)dx=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

6.2 定理扩展

定理 6.2.1

1. 导数零点定理

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'_+(a)f'_-(b)<0$, 则 $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.\ f'(\xi)=0$

证明: 我们不妨假设 $f_+(a)>0$, $f'_-(b)<0$

由极限定义得到:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0\\ \lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x)>f(a)\\ f(x)>f(b)\end{cases}$$

我们得到 $f(x)$ 一定在 (a,b) 内取得最大值, 由费马定理得到: $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.\ f'(\xi)=0$

2. 导数介值定理 (达布定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'_+(a)\neq f'_-(b)$, 对于任意介于 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 之间的值 η, 我们都有 $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.\ f'(\xi)=\eta$

证明: 我们不妨假设 $f_+(a)=m$, $f'_-(b)=M\ (M>m)$

$g(x)=f(x)-\eta x$, $g'(x)=f'(x)-\eta$

$g'_+(a)=f'_+(a)-\eta<0\ g'_-(b)=f'_-(b)-\eta>0$

我们利用极限的保号性得到:

$$\begin{cases}\exists\delta_1>0,s.t.g(x)<g(a),\ x\in(a,a+\delta_1)\\ \exists\delta_2>0,s.t.g(x)<g(b),\ x\in(b-\delta_2,b)\end{cases}$$

$g(x)$ 是连续可导函数, 由费马定理, 我们得到: $g(x)$ 最小值一定在 (a,b) 内取得, 且 $g'(\xi)=0\to f'(\xi)-\eta=0$

综上所述, 我们得到 $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.\ f'(\xi)=\eta$

6.3 具体应用和题型

1. 证明: $\exists \xi \in (a,b),\ s.t. f'(\xi)=0$ 或者 $f'(\xi)=k$ 或者 $f''(\xi)=0$

注

这种方法比较简单, 应用于许多定理的证明, 比如拉格朗日中值定理、柯西中值定理的证明

2. 证明原函数或者导函数的零点个数

命题 6.3.1

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 且 $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 0$, 证明: $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有两个零点

解

我们不妨设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, 我们有:

$$F'(x)=f(x),\ F(0)=F(1)=0$$

又因为:

$$\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 xdF(x) = xF(x)|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 F(x)dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 F(x)dx = 0$$

我们用积分中值定理得到:

$$\exists c \in (0,1),\ s.t.\ F(c) = \int_0^1 xf(x)dx = 0$$

我们得到: $F(0)=F(c)=F(1)=0$, 我们使用两次罗尔定理得到:

$$\begin{cases} \exists \xi_1 \in (0,c),\ s.t. F'(\xi_1)=f(\xi_1)=0 \\ \exists \xi_2 \in (c,1),\ s.t. F'(\xi_2)=f(\xi_2)=0 \end{cases}$$

我们得到: $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有两个零点

命题 6.3.2

假设某 n 次多项式 $P_n(x)$ 的一切根均为实数根, 证明: $P_n'(x), P_n''(x), \cdots, P_n^{n-1}(x)$ 也仅有实根

解

我们不妨假设: $P_n(x)=A(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}\cdots(x-x_k)^{r_k}$, 其中 $r_1+r_2+\cdots+r_k=n$

我们得到:

$$\begin{aligned}P_n'(x) &= r_1A(x-x_1)^{r_1-1}(x-x_2)^{r_2}+\cdots(x-x_k)^{r_k}\\&+ r_2A(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2-1}\cdots(x-x_k)^{r_k}\\&+ \cdots\\&+ r_kA(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}\cdots(x-x_k)^{r_k-1}\\&= A(x-x_1)^{r_1-1}(x-x_2)^{r_2-1}\cdots(x-x_k)^{r_k-1}f(x)\end{aligned}$$

其中 $f(x)=r_1(x-x_2)\cdots(x-x_k)+\cdots+r_k(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})$

我们得到: $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 也为 $P_n'(x)$ 的实数根, 一共有 $r_1-1+r_2-1+\cdots+r_k-1=n-k$ 个

我们在区间 $(x_i,x_{i+1}),(i=1,2,\cdots,k-1)$ 中使用罗尔定理, 我们得到 $P_n'(x)$ 在区间 $(x_i,x_{i+1}),(i=1,2,\cdots,k-1)$ 至少存在 $k-1$ 个实数零点

综上 $P_n'(x)$ 至少存在 $n-1$ 个实数零点,$P_n'(x)$ 至多有 $n-1$ 个实数根,$P_n'(x)$ 的根全为实数根

对于 $P_n''(x),\cdots,P_n^{n-1}(x)$, 同理可证

3. 某些利用泰勒定理或者中值定理的题目利用辅助函数, 使用罗尔定理解决

命题 6.3.3

设 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 二阶可导, $f(0)=0, f(1)=1, f(4)=2$, 证明: $\exists\xi\in(0,4),\ s.t. f''(\xi)=-\frac{1}{3}$ ♠

解

我们构造辅助函数: $F(x)=f(x)+\frac{x^2}{6}-\frac{7x}{6}$

$$F(0)=F(1)=F(4)=0$$

我们在区间 $(0,1)$ 和区间 $(1,4)$ 上使用罗尔定理得到:

$$\begin{cases}\exists\xi_1\in(0,1),\ s.t. F'(\xi_1)=f'(\xi_1)+\frac{\xi_1}{3}-\frac{7}{6}=0\\ \\ \exists\xi_2\in(1,4),\ s.t. F'(\xi_2)=f'(\xi_2)+\frac{\xi_2}{3}-\frac{7}{6}=0\end{cases}$$

我们对 $F'(x)$ 在区间 (ξ_1,ξ_2) 上使用罗尔定理, 得到:

$$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2),\ s.t. F''(\xi)=f''(\xi)+\frac{1}{3}=0\Rightarrow f''(\xi)=-\frac{1}{3}$$

综上所述,$\exists\xi\in(0,4),\ s.t. f''(\xi)=-\frac{1}{3}$

注: 泰勒展开

我们将 $f(x)$ 在 $x=1$ 处泰勒展开得到:

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-1)^2$$

我们分别令 $x=0,x=4$ 得到:

$$\begin{cases} f(0)=f(1)-f'(1)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}=0,\ \xi_1\in(0,1) \\ f(4)=f(1)+3f'(1)+\dfrac{9f''(\xi_2)}{2}=2,\ \xi_2\in(1,4) \end{cases}$$

我们将 $f'(1)$ 消去, 得到:

$$3f''(\xi_1)+9f''(\xi_2)=-2$$

(i). 当 $f''(\xi_1)=f''(\xi_2)$ 时,$f''(\xi_1)=f''(\xi_2)=-\dfrac{1}{3}$, 命题成立

(ii). 当 $f''(\xi_1)\neq f''(\xi_2)$, 我们不妨假设 $f''(\xi_1)<f''(\xi_2)$, 我们可以得到:

$$\begin{cases} f''(\xi_1)<-\dfrac{1}{3} \\ f''(\xi_2)>-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

我们由达布定理可以知道: $\exists\xi_3\in(\xi_1,\xi_2),\ s.t.f''(\xi_3)=-\dfrac{1}{3}$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi\in(0,4),\ s.t.f''(\xi)=-\dfrac{1}{3}$

命题 6.3.4

设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 在 $(0,2)$ 内三阶可导, 且 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=2, f(1)=1, f(2)=6$, 证明: $\exists\xi\in(0,2), s.t.f'''(\xi)=9$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=f(x)-\dfrac{3}{2}x^3+\dfrac{5}{2}x^2-2x$

$$F(0)=F(1)=F(2)=0, F'(0)=0$$

我们对 $F(x)$ 在区间 $(0,1)$ 和区间 $(1,2)$ 上使用罗尔定理得到:

$$\begin{cases} \exists\xi_1\in(0,1),\ s.t.F'(\xi_1)=f'(\xi_1)-\dfrac{9}{2}\xi_1^2+5\xi_1-2=0 \\ \exists\xi_2\in(1,2),\ s.t.F'(\xi_2)=f'(\xi_2)-\dfrac{9}{2}\xi_1^2+5\xi_2-2=0 \end{cases}$$

我们对 $F'(x)$ 在区间 $(0,\xi_1)$ 和区间 (ξ_1,ξ_2) 上使用罗尔定理得到:

$$\begin{cases} \exists\eta_1 \in (0,\xi_1),\ s.t.F''(\eta_1) = f''(\eta_1) - 9\eta_1 + 5 = 0 \\ \exists\eta_2 \in (\xi_1,\xi_2),\ s.t.F'(\eta_2) = f''(\eta_2) - 9\eta_2 + 5 = 0 \end{cases}$$

我们对 $F''(x)$ 在区间 (η_1,η_2) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi \in (\eta_1,\eta_2),\ s.t.F'''(\xi) = f'''(\xi) - 9 = 0$$

综上所述,$\exists\xi \in (0,2), s.t.f'''(\xi) = 9$

命题 6.3.5

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导,$f(0) = 0, f(1) = 1, \int_0^1 f(x)dx = 1$, 证明: $\exists\eta \in (0,1)$, $s.t.f''(\eta) < -2$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = f(x) + 3x^2 - 4x$

$$F(0) = F(1) = 0, \int_0^1 F(x) = 0$$

由积分中值定理, 我们得到:

$$\exists c \in (0,1),\ s.t.F(c) = 0$$

我们对 $F(x)$ 在区间 $(0,c)$ 和区间 $(c,1)$ 上使用罗尔定理得到:

$$\begin{cases} \exists\xi_1 \in (0,c),\ s.t.F'(\xi_1) = f'(\xi_1) + 6\xi_1 - 4 = 0 \\ \exists\xi_2 \in (c,1),\ s.t.F'(\xi_2) = f'(\xi_2) + 6\xi_2 - 4 = 0 \end{cases}$$

我们对 $F''(x)$ 在区间 (ξ_1,ξ_2) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi \in (\xi_1,\xi_2),\ s.t.F''(\xi) = f''(\xi) + 6 = 0$$

综上所述,$\exists\xi \in (0,1), s.t.f''(\xi) = -6 < -2$

命题 6.3.6

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导,$f(0) = f(1) = 0$, $[f(x)]_{min} = -1$, 证明: $\exists\xi \in (0,1)$, $s.t.f''(\xi) \geq 8$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = f(x) - 4x^2 + 4x$

$$[f(x)]_{min} = -1 \Rightarrow \exists c \in (0,1).\ s.t.f(c) = -1$$

(1). $c=\dfrac{1}{2}$, 此时 $F(\dfrac{1}{2})=0$

(2). $c\in(0,\dfrac{1}{2})$, 此时:

$$\begin{cases} F(c)=f(c)-4c^2+4c=4c-4c^2=-(2c-1)^2<0 \\ F(\dfrac{1}{2})=f(\dfrac{1}{2})+1\geq 0 \end{cases}$$

根据零点定理, 我们得到: $\exists c_1\in(c,\frac{1}{2})$, $s.t.F(c_1)=0$

(3). $c\in(\dfrac{1}{2},1)$, 此时:

$$\begin{cases} F(c)=f(c)-4c^2+4c=4c-4c^2=-(2c-1)^2<0 \\ F(\dfrac{1}{2})=f(\dfrac{1}{2})+1\geq 0 \end{cases}$$

根据零点定理, 我们得到: $\exists c_2\in(\frac{1}{2},c)$, $s.t.F(c_2)=0$

综上三种情况, 我们知道: $\exists\eta\in(0,1)$, $s.t.F(\eta)=0$

我们对 $F(x)$ 在区间 $(0,\eta)$ 和区间 $(\eta,1)$ 上使用罗尔定理得到:

$$\begin{cases} \exists\xi_1\in(0,\eta),\ s.t.F'(\xi_1)=f'(\xi_1)-8\xi_1+4=0 \\ \exists\xi_2\in(\eta,1),\ s.t.F'(\xi_2)=f'(\xi_2)-8\xi_1+4=0 \end{cases}$$

我们对 $F'(x)$ 在区间 (ξ_1,ξ_2) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2),\ s.t.F''(\xi)=f''(\xi)-8=0$$

综上所述,$\exists\xi\in(0,1),s.t.f''(\xi)=8\geq 8$

注: 泰勒展开

我们由 $[f(x)]_{min}=-1$, 且 $f(0)=f(1)=0$ 得到,$f(x)$ 一定在 $(0,1)$ 内部取的最小值, 我们不妨设 $f(c)=-1$, 我们由费马定理可得 $f'(c)=0$

我们将 $f(x)$ 在 $x=c$ 处进行泰勒展开得到:

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2$$

我们令 $x=0$ 和 $x=1$ 得到:

$$\begin{cases} f(0)=f(c)-f'(c)c+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}c^2=0 \\ f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\dfrac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2=0 \end{cases}$$

我们有: $f(c) = -1,\ f'(c) = 0$, 上面两个式子:

$$f''(\xi_1) = \frac{2}{c^2}, f''(\xi_2) = \frac{2}{1-c^2}$$

当 $c \in (0, \frac{1}{2}], f'(\xi_1) \geq 8$; 当 $c \in (\frac{1}{2}, 1), f''(\xi_2) \geq 8$
综上所述,$\exists \xi \in (0, 1), s.t. f''(\xi) \geq 8$

命题 6.3.7

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导,$f(a) = g(a)$,$f(b) = g(b)$, 并且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 (a, b) 内存在相等的最大值, 证明: $\exists \xi \in (a, b), s.t. f''(\xi) = g''(\xi)$ ♠

解

我们构造辅助函数: $F(x) = f(x) - g(x)$

$$F(a) = F(b) = 0$$

$f(x), g(x)$ 在区间 (a, b) 内存在相等的最大值, 我们不妨假设 $f(x), g(x)$ 分别在 x_1, x_2 处取得最大值,$f(x_1) = g(x_2) = a$

(1). $x_1 = x_2$, 此时 $F(x_1) = F(x_2) = 0$

(2). $x_1 < x_2$, 此时 $F(x_1) = f(x_1) - g(x_1) \geq 0,\ F(x_2) = f(x_2) - g(x_2) \leq 0$

$\exists x_3 \in [x_1, x_2]\ s.t. F(x_3) = 0$

(3). $x_1 > x_2$, 此时 $F(x_1) = f(x_1) - g(x_1) \leq 0,\ F(x_2) = f(x_2) - g(x_2) \geq 0$

$\exists x_4 \in [x_2, x_1],\ s.t. F(x_4) = 0$

综上三种情况, 我们知道: $\exists \eta \in (a, b),\ s.t. F(\eta) = 0$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a, η) 和区间 (η, b) 上使用罗尔定理得到:

$$\begin{cases} \exists \xi_1 \in (a, \eta),\ s.t. F'(\xi_1) = f'(\xi_1) - g'(\xi_1) = 0 \\ \exists \xi_2 \in (\eta, b),\ s.t. F'(\xi_2) = f'(\xi_2) - g'(\xi_2) = 0 \end{cases}$$

我们对 $F'(x)$ 在区间 (ξ_1, ξ_2) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2),\ s.t. F''(\xi) = f''(\xi) - g''(\xi) = 0$$

综上所述,$\exists \xi \in (a, b), s.t. f''(\xi) = g''(\xi)$

命题 6.3.8 (♠♠)

设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 三阶连续可导,$f(-1) = 0$,$f'(0) = 0$,$f(1) = 1$, 证明: $\exists \xi \in (-1, 1)$, $s.t. f'''(\xi) = 3$ ♠

解

我们构造辅助函数: $F(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^3 - \left(\frac{1}{2} - f(0)\right)x^2 - f(0)$

$$F(-1) = F(0) = F(1) = 0, F'(0) = 0$$

我们对 $F(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 上使用罗尔定理:

$$\begin{cases} \exists \xi_1 \in (-1,0),\ s.t. F'(\xi_1) = f'(\xi_1) - \frac{3}{2}\xi_1^2 - (1-2f(0))\,\xi_1 = 0 \\ \\ \exists \xi_2 \in (0,1),\ s.t. F'(\xi_2) = f'(\xi_2) - \frac{3}{2}\xi_2^2 - (1-2f(0))\,\xi_2 = 0 \end{cases}$$

我们对 $F'(x)$ 在区间 $(\xi_1,0)$ 和 $(0,\xi_2)$ 上使用罗尔定理:

$$\begin{cases} \exists \eta_1 \in (\xi_1,0),\ s.t. F''(\eta_1) = f''(\eta_1) - 3\eta_1 + 2f(0) - 1 = 0 \\ \exists \eta_2 \in (0,\xi_2),\ s.t. F''(\eta_2) = f''(\eta_2) - 3\eta_2 + 2f(0) - 1 = 0 \end{cases}$$

我们对 $F''(x)$ 在区间 (η_1,η_2) 上使用罗尔定理:

$$\exists \xi \in (\eta_1,\eta_2),\ s.t. F'''(\xi) = f'''(\xi) - 3 = 0 \Rightarrow f'''(\xi) = 3$$

综上所述,$\exists \xi \in (-1,1), s.t. f'''(\xi) = 3$

注: 泰勒展开

我们将 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处进行泰勒展开得到:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}x^3$$

我们令 $x = 1$ 和 $x = -1$, 且 $f'(0) = 0$, 得到:

$$\begin{cases} f(1) = f(0) + \frac{f''(0)}{2} + \frac{f'''(\xi_1)}{6} = 1 \\ \\ f(-1) = f(0) + \frac{f''(0)}{2} - \frac{f'''(\xi_2)}{6} = 0 \end{cases}$$

上面两式相减得到:

$$\frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{6} = 1$$

我们不妨设 $f'''(x)$ 在 $[-1,1]$ 上最大值 M, 最小值 m, 我们得到:

$$\frac{m}{6} \le \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{6} \le \frac{M}{6} \Rightarrow m \le 3 \le M$$

由介值定理得到: $\exists \xi \in (-1,1), s.t. f'''(\xi) = 3$

4. 复合函数的导函数或原函数的零点问题: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$

命题 6.3.9

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,(a,b) 可导,$f(a)=f(b)=0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=x^2f(x)$

$$F(a)=F(b)=0$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a,b) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.F'(\xi)=2\xi f(\xi)+\xi^2f'(\xi)=0$$

(1). 当 $\xi\neq0\Rightarrow 2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

(2). 当 $\xi=0$ 时,$F(a)=F(0)=F(b)=0.$

我们对 $F(x)$ 在区间 $(a,0)$ 和区间 $(0,b)$ 上使用罗尔定理得到:

$$\begin{cases}\exists\xi_1\in(a,0),\ s.t.F'(\xi_1)=2\xi_1f(\xi_1)+\xi_1^2f'(\xi_1)=0\\ \exists\xi_2\in(0,b),\ s.t.F'(\xi_2)=2\xi_2f(\xi_2)+\xi_2^2f'(\xi_2)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2f(\xi_1)+\xi_1f'(\xi_1)=0,\ \xi_1\in(a,0)\\ 2f(\xi_2)+\xi_2f'(\xi_2)=0,\ \xi_2\in(0,b)\end{cases}$$

综上所述,$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

命题 6.3.10

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,(a,b) 可导,$f(a)=f(b)=0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b), s.t.f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=xf(x)$

$$F(a)=F(b)=0$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a,b) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.F'(\xi)=f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$$

综上所述,$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

命题 6.3.11

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,(a,b) 可导,$a>0,f(a)=0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b), s.t.f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$

解

原命题等价于: $\exists\xi\in(a,b), s.t.\dfrac{a}{\xi-b}f(\xi)-f'(\xi)=0$

我们构造辅助函数: $F(x)=(x-b)^af(x)$

$$F(a)=F(b)=0$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a,b) 上使用罗尔定理得到:

$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.F'(\xi)=a(\xi-b)^{a-1}f(\xi)+(\xi-b)^a f'(\xi)=0\Rightarrow af(\xi)+(\xi-b)f'(\xi)=0$

综上所述,$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$

命题 6.3.12

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,(a,b) 可导,$f(a)=f(b)=0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b),s.t.f'(\xi)+f^2(\xi)=0$ ♠

解

我们构造辅助函数: $F(x)=f(x)e^{\int_a^x f(t)dt}$

$$F(a)=F(b)=0$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a,b) 上使用罗尔定理:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.F'(\xi)=e^{\int_a^\xi f(t)dt}(f'(\xi)+f^2(\xi))=0$$

综上,$\exists\xi\in(a,b),s.t.f'(\xi)+f^2(\xi)=0$

5. 罗尔定理与费马定理相结合

命题 6.3.13

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续,$(0,1)$ 可导,$f(0)=1,f(1)=\frac{1}{2}$, 证明: $\exists\xi\in(0,1),s.t.f'(\xi)+f^2(\xi)=0$ ♠

解

(1). 假设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上无零点

我们构造辅助函数: $F(x)=-\dfrac{1}{f(x)}+x$

$$F(0)=F(1)=-1$$

我们对 $F(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上使用罗尔定理:

$$\exists\xi\in(0,1),\ s.t.F'(\xi)=\frac{f'(\xi)+f^2(\xi)}{f^2(\xi)}=0$$

(2). 假设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上至少两个零点, 我们假设: $f(x_1)=f(x_2)=\cdots=0$

我们构造辅助函数: $F(x)=f(x)e^{\int_a^x f(t)dt}$

$$F(x_1)=F(x_2)=0$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (x_1,x_2) 上使用罗尔定理:

$$\exists\xi\in(x_1,x_2),\ s.t.F'(\xi)=e^{\int_a^\xi f(t)dt}(f'(\xi)+f^2(\xi))=0$$

(3). 假设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上只有一个零点,$f(x_0)=0$,$x=x_0$ 一定是最小值点.

我们由费马定理可得: $f'(x_0)=0$

$$\exists x_0\in(0,1),\ s.t.f'(x_0)+f^2(x_0)=0$$

综上,$\exists\xi\in(0,1),s.t.f'(\xi)+f^2(\xi)=0$

命题 6.3.14

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,(a,b) 可导, 且存在 $c \in (a,b)$, $s.t.f'(c) = 0$, 证明: $\exists\xi \in (a,b),s.t.f'(\xi) = \dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = (f(x) - f(a))e^{\frac{x}{a-b}}$

$$F'(x) = e^{\frac{x}{a-b}}[f'(x) + \frac{f(x)-f(a)}{a-b}]$$

$$F(a) = 0,\ F(c) = (f(c) - f(a))e^{\frac{c}{a-b}},\ F'(c) = -e^{\frac{c}{a-b}}\frac{f(c)-f(a)}{b-a}$$

(1). 当 $f(a) = f(c)$ 时, 我们对 $F(x)$ 在区间 (a,c) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi \in (a,c)\ ,s.t.F'(c) = e^{\frac{c}{a-b}}[f(c) - \frac{f(c)-f(a)}{a-b}] = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$$

(2). 当 $f(a) \neq f(c)$ 时, 我们不妨假设 $f(a) > f(c)$, 此时我们有:

$$F(a) = 0,\ F(c) < 0,\ F'(c) > 0$$

此时 $F(x)$ 在区间 $[a,c]$ 上的最小值一定在区间内, 我们不妨设 $F(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得最小值, 此时 $F'(x_0) = 0$

$$\exists x_0 \in (a,c), s.t.f'(x_0) = \frac{f(x_0)-f(a)}{b-a}$$

综上所述,$\exists\xi \in (a,b),s.t.f'(\xi) = \dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$

命题 6.3.15

$f(x)$ 在 $[-2,2]$ 二阶可导,$|f(x)| < 1,[f(0)]^2 + [f'(0)]^2 = 4$, 证明: $\exists\xi \in (-2,2),s.t.f(\xi) + f''(\xi) = 0$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = f(x)\sin x + f'(x)\cos x$

我们有:

$$F(-\frac{\pi}{2}) = -f(\frac{\pi}{2}),\ F(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}),\ F(0) = f'(0)$$

$$F'(x) = f'(x)\sin x + f(x)\cos x + f''(x)\cos x - f'(x)\sin x = \cos x[f(x) + f''(x)]$$

命题 6.3.16

设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 二阶可导,$2f(0) = \int_0^2 f(x)dx = f(2) + f(3)$, 证明: $\exists\xi \in (0,3),s.t.f''(\xi) - 2f'(\xi) = 0$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=e^{-2x}f'(x)$

$$F'(x)=e^{-2x}[f''(x)-2f'(x)]$$

根据积分中值定理:

$$\exists\xi_1\in(0,2),\ s.t.\int_0^2 f(x)dx=2f(\xi_1)=2f(0)$$

我们得到: $\exists\xi_1\in(0,2),\ s.t.f(\xi_1)=f(0)$

我们对 $f(x)$ 在区间 $(0,\xi_1)$ 上使用罗尔定理:

$$\exists\eta_1\in(0,\xi_1),\ s.t.f'(\eta_1)=0$$

由介值定理得到: $\exists\xi_2\in(2,3),\ s.t.f(2)+f(3)=2f(\xi_2)=\int_0^2 f(x)dx\Rightarrow f(\xi_2)=f(\xi_1)$

我们对 $f(x)$ 在区间 (ξ_1,ξ_2) 上使用罗尔定理:

$$\exists\eta_2\in(\xi_1,\xi_2),\ s.t.f'(\eta_2)=0$$

$$F(\eta_1)=F(\eta_2)=0$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (η_1,η_2) 上使用罗尔定理:

$$\exists\xi\in(\eta_1,\eta_2),\ s.t.F'(\xi)=e^{-2\xi}[f''(\xi)-2f'(\xi)]=0$$

综上所述,$\exists\xi\in(0,3)$,$s.t.f''(\xi)-2f'(\xi)=0$

6. 一阶导数在二阶导数和原函数之间的关系

命题 6.3.17

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导,$f(a)=f(b)=0$,$f'_+(a)f'_-(b)>0$ 证明: $\exists\xi\in(a,b)$,$s.t.f''(\xi)=f(\xi)$ ♠

解

我们构造辅助函数: $F(x)=e^{-x}[f(x)+f'(x)]$, $G(x)=e^{x}f(x)$

$$F'(x)=e^{-x}[-f(x)-f'(x)+f'(x)+f''(x)]=e^{-x}[f''(x)-f(x)]$$

此时: $G(a)=G(b)=0$, 又因为 $f'_+(a)f'_-(b)>0$, 我们不妨设 $f'_+(a)>0, f'_-(b)>0$

我们有:

$$\begin{cases} f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0 \\ f'_-(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}>0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\in(a,a+\sigma_1), f(x)>f(a)=0 \\ x\in(b-\sigma_2,b), f(x)<f(b)=0 \end{cases}$$

$$\exists c\in(a,b),\ s.t.f(c)=f(a)=f(b)=0$$

我们对 $G(x)$ 在区间 (a,c) 和区间 (c,b) 上使用罗尔定理得到:

$$\begin{cases} \exists x_1\in(a,c),\ s.t.G'(x_1)=e^{x_1}(f(x_1)+f'(x_1))=0\Rightarrow\exists x_1, s.t.F(x_1)=0 \\ \exists x_2\in(c,b),\ s.t.G'(x_2)=e^{x_2}(f(x_2)+f'(x_2))=0\Rightarrow\exists x_2, s.t.F(x_2)=0 \end{cases}$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (x_1,x_2) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(x_1,x_2),\ s.t.F'(\xi)=e^{-\xi}[f''(\xi)-f(\xi)]=0\Rightarrow f''(\xi)=f(\xi)$$

综上所述,$\exists\xi\in(a,b),s.t.f''(\xi)=f(\xi)$

命题 6.3.18

设 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 二阶可导,$f''(x)\neq f(x)$, 证明: $\exists\xi\in(0,2\pi),s.t.\tan\xi=\dfrac{2f'(\xi)}{f(\xi)-f''(\xi)}$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=f(x)\sin x$

我们有: $F(0)=F(\pi)=F(2\pi)=0$

我们对 $F(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 和区间 $(\pi,2\pi)$ 上使用罗尔定理得到:

$$\begin{cases}\exists x_1\in(0,\pi),\ s.t.F'(x_1)=f'(x_1)\sin x_1+f(x_1)\cos x_1=0\\ \exists x_2\in(\pi,2\pi),\ s.t.F'(x_2)=f'(x_2)\sin x_2+f(x_2)\cos x_2=0\end{cases}$$

我们对 $F'(x)$ 在区间 (x_1,x_2) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(x_1,x_2),\ s.t.F''(\xi)=f''(\xi)\sin\xi+f'(\xi)\cos\xi+f'(\xi)\cos\xi-f(\xi)\sin\xi$$
$$\sin\xi(f(\xi)-f''(\xi))=2f'(\xi)\cos\xi$$

当 $\xi=\frac{\pi}{2}$ 或者 $\xi=\frac{3\pi}{2}$ 时, 此时 $f(\xi)=f''(\xi)$, 与题干矛盾.

综上所述,$\exists\xi\in(0,2\pi),s.t.\tan\xi=\dfrac{2f'(\xi)}{f(\xi)-f''(\xi)}$

命题 6.3.19

设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 二阶可导, 证明: $\forall a>0,\exists c\in(2a,4a),s.t.f(4a)-2f(3a)+f(2a)=a^2f''(c)$

解

我们构造辅助函数 $F(x)=f(x+a)-f(x)$, 原命题转化为:

$$\exists c\in(2a,4a),\ s.t.F(3a)-F(2a)=a^2f''(c)$$

我们由拉格朗日中值定理得到:

$$\exists\xi\in(2a,3a),\ s.t.F(3a)-F(2a)=aF'(\xi)=a[f'(\xi+a)-f'(\xi)]$$

由拉格朗日中值定理得到:

$$\exists c\in(\xi,\xi+a)\subset(3a,4a),\ s.t.f'(\xi+a)-f'(\xi)=af''(c)$$

我们得到:

$$\forall a>0,\exists c\in(2a,4a),\ s.t.f(4a)-2f(3a)+f(2a)=a^2f''(c)$$

7. 分析法, 具体问题具体分析

命题 6.3.20

设 $f(x)$ 在 $[\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi]$ 可导,$f(\frac{3}{4}\pi) = f(\frac{7}{4}\pi) = 0$, 证明: $\exists\xi \in (\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi), s.t. f'(\xi) + f(\xi) = \cos\xi$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = e^x[f(x) - \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x]$

$$F(\frac{3\pi}{4}) = F(\frac{7\pi}{4}) = 0$$

我们对 $F(x)$ 在区间 $(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$ 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi \in (\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}),\ s.t. F'(\xi) = e^{\xi}[f'(\xi) + f(\xi) - \cos\xi] = 0$$

综上所述,$\exists\xi \in (\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi), s.t. f'(\xi) + f(\xi) = \cos\xi$

命题 6.3.21

设 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 可导, 证明: $\exists\xi \in (1, 2), s.t. \xi f'(\xi) - f(\xi) = f(2) - 2f(1)$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = \dfrac{f(x) + f(2) - 2f(1)}{x}$

我们得到: $F(1) = F(2) = f(2) - f(1)$

$$F'(x) = \frac{xf'(x) - f(x) - f(2) + 2f(1)}{x^2}$$

我们对 $F(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi \in (0, 1),\ s.t. F'(\xi) = 0 \Rightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) - f(2) + 2f(1) = 0$$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi \in (1, 2), s.t. \xi f'(\xi) - f(\xi) = f(2) - 2f(1)$

注: 柯西中值定理

我们构造辅助函数: $F(x) = \dfrac{f(x)}{x},\ G(x) = \dfrac{1}{x}$

$$F'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2},\ G'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

我们对 $F(x), G(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上使用柯西中值定理得到:

$$\exists\xi \in (1, 2),\ s.t. \frac{F(2) - F(1)}{G(2) - G(1)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

又因为:

$$\begin{cases} \dfrac{F(2)-F(1)}{G(2)-G(1)} = 2f(1)-f(2) \\ \dfrac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = f(\xi)-\xi f'(\xi) \end{cases} \Rightarrow \exists \xi \in (1,2), s.t. \xi f'(\xi)-f(\xi) = f(2)-2f(1)$$

综上所述, 我们得到: $\exists \xi \in (1,2), s.t. \xi f'(\xi)-f(\xi) = f(2)-2f(1)$

命题 6.3.22

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,(a,b) 可导,$g'(x) \neq 0$, 证明: $\exists \xi \in (a,b), s.t. \dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = [f(x)-f(a)][g(x)-g(b)]$

我们有: $F(a) = F(b) = 0$

$$F'(x) = f'(x)[g(x)-g(b)] + g'(x)[f(x)-f(a)]$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a,b) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists \xi \in (a,b),\ s.t. F'(\xi) = f'(\xi)[g(\xi)-g(b)] + g'(\xi)[f(\xi)-f(a)] \Rightarrow \frac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

综上所述, 我们得到: $\exists \xi \in (a,b), s.t. \dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

命题 6.3.23

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导,$f(0) = 0, \forall x \in (0,1), f(x) > 0$, 证明: $\exists \xi \in (0,1), s.t. \dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = f(x)f(1-x)$

我们有: $F(0) = F(1) = 0$

$$F'(x) = f'(x)f(1-x) - f(x)f'(1-x)$$

我们对 $F(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上使用罗尔定理得到:

$$\exists \xi \in (0,1),\ s.t. F'(\xi) = f'(\xi)f(1-\xi) - f(\xi)f'(1-\xi) \Rightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi\in(0,1),s.t.\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

命题 6.3.24

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导,$f(0)=0,\forall x\in(0,1),f(x)>0$, 证明: $\forall a>0,\exists\xi\in(0,1),s.t.a\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=f^a(x)f(1-x)$

我们有: $F(0)=F(1)=0$

$$F'(x)=af^{a-1}(x)f'(x)f(1-x)-f^a(x)f'(1-x)=f^{a-1}(x)[af'(x)f(1-x)-f(x)f'(1-x)]$$

我们对 $F(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(0,1),\ s.t.F'(\xi)=f^{a-1}(\xi)[af'(\xi)f(1-\xi)-f(\xi)f'(1-\xi)]=0$$

由因为 $\forall x\in(0,1),\ f(x)>0\Rightarrow f^{a-1}(\xi)>0$

我们得到:

$$af'(\xi)f(1-\xi)-f(\xi)f'(1-\xi)=0\Rightarrow a\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$

综上所述, 我们得到: $\forall a>0,\exists\xi\in(0,1),s.t.a\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

命题 6.3.25

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导,$f(a)=0,\forall x\in(a,b],f(x)>0$, 证明: $\forall m,n>0,\ \exists\lambda,\mu\in(0,1),s.t.\dfrac{f'(\lambda)}{f(\lambda)}=\dfrac{mf'(\mu)}{nf(\mu)}$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=f^m(x)f^n(a+b-x)$

我们得到: $F(a)=F(b)=0$

$$F'(x)=mf^{m-1}(x)f'(x)f^n(a+b-x)-nf^m(x)f^{n-1}(a+b-x)$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a,b) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.F'(\xi)=0\Rightarrow mf'(\xi)f(a+b-\xi)=nf(\xi)f'(a+b-\xi)$$

我们得到: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\dfrac{mf'(\xi)}{nf(\xi)}=\dfrac{f'(a+b-\xi)}{f(a+b-\xi)}$

我们取 $\lambda=a+b-\xi,\ \mu=\xi$, 我们可以得到:

$$\forall m,n>0,\ \exists\lambda,\mu\in(0,1),\ s.t.\frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)}=\frac{mf'(\mu)}{nf(\mu)}$$

命题 6.3.26

设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导,$g''(x)\neq 0$,$g(a)=g(b)=f(a)=f(b)=0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$,$s.t.\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=f'(x)g(x)-f(x)g'(x)$

我们有: $F(a)=F(b)=0$

$$F'(x)=f''(x)g(x)+f'(x)g'(x)-f'(x)g'(x)-f(x)g''(x)=f''(x)g(x)-f(x)g''(x)$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a,b) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.F'(\xi)=0\Rightarrow f''(\xi)g(\xi)-f(\xi)g''(\xi)=0$$

综上所述,$\exists\xi\in(a,b)$,$s.t.\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

命题 6.3.27

设 $f(x)$ 二阶可导,$f(1)>0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$, 证明: $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有两个根.

解

我们构造辅助函数: $F(x)=f(x)f'(x)$

我们有: $F'(x)=f(x)f''(x)+[f'(x)]^2$

我们由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$ 可以得到:

$$\begin{cases} f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0 \\ \exists\xi>0,\ x\in(0,\xi),f(x)<0 \end{cases}$$

我们由零点定理可以得到:

$$\exists c\in(0,1),\ s.t.f(c)=0$$

我们对 $f(x)$ 在区间 $(0,c)$ 上使用罗尔定理可以得到:

$$\exists\eta\in(0,c),\ s.t.f'(\eta)=0$$

我们可以得到: $F(0)=F(\eta)=F(c)=0$

我们对 $F(x)$ 在区间 $(0,\eta)$ 和区间 (η,c) 上使用罗尔定理得到:

$$\begin{cases} \exists x_1\in(0,\eta),\ s.t.F'(x_1)=0\Rightarrow f(x_1)f''(x_1)+[f'(x_1)]^2=0 \\ \exists x_2\in(\eta,c),\ s.t.F'(x_2)=0\Rightarrow f(x_2)f''(x_2)+[f'(x_2)]^2=0 \end{cases}$$

综上所述, 我们得到 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有两个根 $x_1\in(0,\eta)$; $x_2\in(\eta,c)$.

命题 6.3.28

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导,$f'(a)=f'(b)=0$,$f(x)>0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$,$s.t.f(\xi)f''(\xi)-[f'(\xi)]^2=0$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

我们有: $F(a)=F(b)=0$

$$F'(x)=\frac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a,b) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.F'(\xi)=0\Rightarrow f''(\xi)f(\xi)-[f'(\xi)]^2=0$$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi\in(a,b)$,$s.t.f(\xi)f''(\xi)-[f'(\xi)]^2=0$

命题 6.3.29

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导,$f'(a)=f'(b)=0$,$f(x)>0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$,$s.t.f(\xi)f''(\xi)-2[f'(\xi)]^2=0$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$

我们有: $F(a)=F(b)=0$

$$F'(x)=\frac{f''(x)f(x)-2[f'(x)]^2}{f^3(x)}$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a,b) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.F'(\xi)=0\Rightarrow f''(\xi)f(\xi)-2[f'(\xi)]^2=0$$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi\in(a,b)$,$s.t.f(\xi)f''(\xi)-2[f'(\xi)]^2=0$

命题 6.3.30

设 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 二阶可导,$|f(x)|<1$,$[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$, 证明: $\exists\xi\in(-2,2)$,$s.t.f''(\xi)+f(\xi)=0$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=f^2(x)+f'^2(x)$

我们有: $F(0)=4$

$$F'(x)=2f(x)f'(x)+2f'(x)f''(x)=2f'(x)[f(x)+f''(x)]$$

我们利用拉格朗日中值定理可以得到:

$$\begin{cases} \exists x_1 \in (0,2),\ s.t. f(2)-f(0)=2f'(x_1) \\ \exists x_2 \in (-2,0),\ s.t. f(-2)-f(0)=-2f'(x_2) \end{cases}$$

又因为: $|f(x)|<1 \Rightarrow -1<f(x)<1 \Rightarrow \begin{cases} f(2)-f(0)\in(-2,2) \\ f(-2)-f(0)\in(-2,2) \end{cases}$

我们得到:

$$\begin{cases} |f'(x_1)|<1 \\ |f'(x_2)|<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x_1)=f^2(x_1)+f'^2(x_1)<2 \\ F(x_2)=f^2(x_2)+f'^2(x_2)<2 \end{cases}$$

$F(0)=4>F(x_1), F(0)=4>F(x_2)$, 我们知道 $F(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 最大值一定在区间内部取得, 我们不妨假设 $F(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得最大值, 我们由费马定理可以得到:

$$F'(x_0)=0 \Rightarrow f'(x_0)[f'(x_0)+f(x_0)]=0$$

(i). 假设 $f'(x_0)=0$,$F(x_0)=f^2(x_0)<1$, 这与 $F(x_0)=M$ 是最大值 $M\geq 4$ 矛盾!!!

(ii). $f'(x_0)\neq 0 \Rightarrow f'(x_0)+f(x_0)=0$

我们取 $\xi=x_0$, 我们得到: $\exists\xi\in(-2,2), s.t. f''(\xi)+f(\xi)=0$

8. 拉格朗日中值定理和柯西中值定理

命题 6.3.31

设 $a,b>0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b).\ s.t. ae^b-be^a=(1-\xi)e^\xi(a-b)$

解

我们构造辅助函数: $f(x)=\dfrac{e^x}{x},\ g(x)=\dfrac{1}{x}$

我们对 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 (a,b) 上使用柯西中值定理得到:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

我们有:

$$\begin{cases} \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{ae^b-be^a}{a-b} \\ \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{\frac{e^\xi-\xi e^\xi}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}=(1-\xi)e^\xi \end{cases}$$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi\in(a,b).\ s.t. ae^b-be^a=(1-\xi)e^\xi(a-b)$

命题 6.3.32

设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 可导, 证明: $\exists\xi\in(1,2)$,$s.t. f(2)-f(1)=\frac{1}{2}\xi^2f'(\xi)$

解

我们构造辅助函数: $g(x) = \frac{1}{x}$

我们对 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上使用柯西中值定理得到:

$$\exists \xi \in (1,2),\ s.t. \frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

我们有:

$$\begin{cases} \frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)} = -2[f(2)-f(1)] \\ \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = -\xi^2 f'(\xi) \end{cases} \Rightarrow f(2)-f(1) = \frac{1}{2}\xi^2 f'(\xi)$$

综上所述, 我们可以得到: $\exists \xi \in (1,2), s.t. f(2)-f(1) = \frac{1}{2}\xi^2 f'(\xi)$

命题 6.3.33

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,(a,b) 可导, 证明: $\exists \xi \in (1,2), s.t. 2\xi[f(b)-f(a)] = (b^2-a^2)f'(\xi)$ ♠

解

我们构造辅助函数: $g(x) = x^2$

我们对 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上使用柯西中值定理得到:

$$\exists \xi \in (1,2),\ s.t. \frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

我们有:

$$\begin{cases} \frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)} = \frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2} \\ \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{2\xi} \end{cases} \Rightarrow 2\xi[f(b)-f(a)] = (b^2-a^2)f'(\xi)$$

综上所述, 我们可以得到: $\exists \xi \in (1,2), s.t. 2\xi[f(b)-f(a)] = (b^2-a^2)f'(\xi)$

9. 双中值问题

命题 6.3.34

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导,$f(a) = f(b) = 1$, 证明: $\exists \xi_1, \xi_2 \in (a,b), s.t. e^{\xi_2-\xi_1}[f'(\xi_2)+f(\xi_2)] = 1$ ♠

解

我们构造辅助函数: $F(x) = e^x f(x)$

$$F'(x) = e^x[f'(x)+f(x)]$$

我们由拉格朗日中值定理得到:

$$\exists \xi \in (a,b),\ s.t. F(b)-F(a) = F'(\xi)(b-a) \Rightarrow \frac{e^b f(b)-e^a f(a)}{b-a} = e^{\xi}[f(\xi)+f'(\xi)]$$

我们有: $f(a) = f(b) = 1 \Rightarrow \frac{e^b f(b)-e^a f(a)}{b-a} = \frac{e^b-e^a}{b-a}$

我们构造辅助函数: $g(x) = e^x$

我们由拉格朗日中值定理得到:

$$\exists\eta \in (a,b),\ s.t.\frac{e^b - e^a}{b-a} = g'(\eta) = e^\eta$$

我们可以得到:

$$e^\eta = e^\xi[f(\xi) + f'(\xi)]$$

我们取 $\xi_1 = \eta$, $\xi_2 = \xi$, 我们得到: $\exists\xi_1,\xi_2 \in (a,b), s.t. e^{\xi_2-\xi_1}[f'(\xi_2) + f(\xi_2)] = 1$

注

我们如果取 $\xi_1 = \xi_2$, 原命题直接转化为: $\exists\xi \in (a,b),\ s.t. f'(x) + f(x) - 1 = 0$

我们构造辅助函数: $F(x) = e^x[f(x) - 1]$,$F(a) = F(b) = 0$

$$F'(x) = e^x[f'(x) + f(x) - 1]$$

我们在区间 $[a,b]$ 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi \in (a,b),\ s.t. F'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) + f(\xi) - 1 = 0$$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi_1 = \xi_2 \in (a,b), s.t. e^{\xi_2-\xi_1}[f'(\xi_2) + f(\xi_2)] = 1$

命题 6.3.35

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,(a,b) 可导, 且 $a > 0$, 证明: $\exists\xi,\eta \in (a,b), s.t. f'(\xi) = (a+b)\frac{f'(\eta)}{2\eta}$

解

我们构造辅助函数: $g(x) = x^2$

我们对 $f(x), g(x)$ 在区间 (a,b) 上使用柯西中值定理得到:

$$\exists\eta \in (a,b),\ s.t.\frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = \frac{f'(\eta)}{2\eta} \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = (a+b)\frac{f'(\eta)}{2\eta}$$

我们对 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上使用拉格朗日中值定理得到:

$$\exists\xi \in (a,b),\ s.t.\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi,\eta \in (a,b), s.t. f'(\xi) = (a+b)\frac{f'(\eta)}{2\eta}$

注

我们令 $\xi = \eta$, 原命题转化为: $\exists\sigma,\ s.t. f'(\sigma)[1 - \frac{a+b}{2\sigma}] = 0$

我们取 $\sigma = \frac{a+b}{2}$, 原命题得证明

命题 6.3.36

设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 连续,$(1,2)$ 可导, 且 $f'(x)\neq 0$, 证明: $\exists\xi,\eta,\gamma\in(1,2), s.t.\dfrac{f'(\gamma)}{f'(\xi)}=\dfrac{\xi}{\eta}$

解

我们构造辅助函数: $g(x)=\ln x$

我们对 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上使用柯西中值定理得到:

$$\exists\xi\in(1,2),\ s.t.\frac{f(2)-f(1)}{\ln 2-\ln 1}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}=\xi f'(\xi)$$

我们对 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上使用拉格朗日中值定理得到:

$$\exists\gamma\in(1,2),\ s.t.\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f'(\gamma)$$

我们得到: $\dfrac{f'(\gamma)}{f'(\xi)}=\xi\ln 2$

综上所述, 我们得到: 取 $\xi,\gamma\in(1,2),\eta=\dfrac{1}{\ln 2}\in(1,2), s.t.\dfrac{f'(\gamma)}{f'(\xi)}=\dfrac{\xi}{\eta}$

注

我们取 $\xi=\gamma=\eta\in(a,b),\ s.t.\dfrac{f'(\gamma)}{f'(\xi)}=\dfrac{\xi}{\eta}$ 恒成立

命题 6.3.37

设 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 二阶连续可导,$f'(0)=0$, 证明: $\exists\xi,\eta,\omega\in(0,\frac{\pi}{2}), s.t.f'(\xi)=\frac{\pi}{2}\eta\cdot\sin 2\xi\cdot f''(\omega)$

解

我们将要证的式子进行一些变形:

$$\frac{f'(\xi)}{\sin 2\xi}=\frac{\pi}{2}\eta f''(\omega)$$

后面的部分我们对 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上使用拉格朗日中值定理得到:

$$\exists\eta\in(0,\frac{\pi}{2}),\ s.t.f(\frac{\pi}{2})-f(0)=\frac{\pi}{2}f'(\eta)$$

又因为 $f'(0)=0$, 我们可以得到:

$$\exists\omega\in(0,\eta),\ s.t.f'(\eta)=f'(\eta)-f'(0)=\eta f''(\omega)$$

原命题转化为证明: $\exists\xi\in(0,\dfrac{\pi}{2}),\ s.t.\dfrac{f'(\xi)}{\sin 2\xi}=f(\frac{\pi}{2})-f(0)$

我们构造辅助函数: $g(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x$

我们对 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上使用柯西中值定理得到:

$$\exists\xi\in(0,\frac{\pi}{2}),\ s.t.\frac{f(\frac{\pi}{2})-f(0)}{g(\frac{\pi}{2})-g(0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\Rightarrow f(\frac{\pi}{2})-f(0)=\frac{f'(\xi)}{\sin 2\xi}$$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi,\eta,\omega\in(0,\frac{\pi}{2}),s.t.f'(\xi)=\frac{\pi}{2}\eta\cdot\sin 2\xi\cdot f''(\omega)$

命题 6.3.38

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续,$(0,1)$ 可导,$f(0)=0,\ f(1)=1$, 证明:

(1).$\exists c\in(0,1),\ s.t.f(c)=1-c$

(2).$\exists\xi,\eta\in(0,1),(\xi\neq\eta)\ s.t.f'(\xi)f'(\eta)=1$

解

(1). 我们构造辅助函数: $F(x)=f(x)+x-1,F(0)=f(0)-1=-1<0,\ F(1)=F(1)=1>0$ $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上连续, 我们由零点定理可以得到:

$$\exists c\in(0,1),\ s.t.F(c)=0\Rightarrow f(c)=1-c$$

(2). 我们分别对 $F(x)$ 在区间 $(0,c)$ 和区间 $(c,1)$ 上使用拉格朗日中值定理得到:

$$\begin{cases}\exists x_1\in(0,c),\ s.t.\dfrac{F(c)-F(0)}{c}=F'(x_1)\Rightarrow\dfrac{1}{c}=f'(x_1)+1\\ \exists x_2\in(c,1),\ s.t.\dfrac{F(1)-F(c)}{c}=F'(x_2)\Rightarrow\dfrac{1}{1-c}=f'(x_2)+1\end{cases}$$

我们取 $\xi=x_1\in(0,c),\ \eta=x_2\in(c,1),\ s.t.f'(\xi)f'(\eta)=\dfrac{1-c}{c}\dfrac{c}{1-c}=1$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi,\eta\in(0,1),(\xi\neq\eta)\ s.t.f'(\xi)f'(\eta)=1$

命题 6.3.39

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续,$(0,1)$ 可导,$f(0)=0,\ f(1)=1$, 证明:

(1).$\exists c\in(0,1),\ s.t.f(c)=\frac{1}{2}$

(2).$\exists\xi,\eta\in(0,1),(\xi\neq\eta)\ s.t.\dfrac{1}{f'(\xi)}+\dfrac{1}{f'(\eta)}=2$

解

(1). 我们由 $f(0)=0,\ f(1)=1$, 我们由介值定理得到:

$$\exists c\in(0,1),\ s.t.f(c)=\frac{1}{2}$$

(2). 我们分别对 $f(x)$ 在区间 $(0,c)$ 和区间 $(c,1)$ 上使用拉格朗日中值定理得到:

$$\begin{cases}\exists x_1\in(0,c),\ s.t.\dfrac{f(c)-f(0)}{c}=f'(x_1)\Rightarrow\dfrac{1}{2c}=f'(x_1)\\ \exists x_2\in(\dfrac{1}{2},1),\ s.t.\dfrac{f(1)-f(c)}{1-c}=f'(x_2)\Rightarrow\dfrac{1}{2-2c}=f'(x_2)\end{cases}$$

我们取 $\xi=x_1\in(0,c),\ \eta=x_2\in(c,1),\ s.t.\dfrac{1}{f'(\xi)}+\dfrac{1}{f'(\eta)}=2c+2-2c=2$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi,\eta\in(0,1),(\xi\neq\eta)\ s.t.\dfrac{1}{f'(\xi)}+\dfrac{1}{f'(\eta)}=2$

命题 6.3.40

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导,$f(0)=0,\ f(1)=1,\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为正数, 证明: 存在互不相等的 $\xi_i\in(0,1),\ s.t.\dfrac{\lambda_1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{\lambda_2}{f'(\xi_2)}+\cdots+\dfrac{\lambda_n}{f'(\xi_n)}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$

解

由 $f(0)=0,\ f(1)=1$, 我们由介值定理可以得到: $\exists x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\in(0,1)$ 满足:

$$\begin{cases} f(x_1)=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} \\ f(x_2)=\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} \\ \cdots\cdots \\ f(x_{n-1})=\dfrac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{n-1}}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} \end{cases}$$

在区间 $(0,x_1),(x_1,x_2),\cdots,(x_{n-1},1)$ 上使用拉格朗日中值定理得到:

$$\frac{x_{i+1}-x_i}{f(x_{i+1})-f(x_i)}=\frac{1}{f'(\xi_i)}$$

$$\begin{cases} \exists\xi_1\in(0,x_1),\ s.t.x_1-0=\dfrac{\lambda_1}{f'(\xi_1)(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)} \\ \exists\xi_1\in(x_1,x_2),\ s.t.x_2-x_1=\dfrac{\lambda_2}{f'(\xi_2)(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)} \\ \cdots\cdots \\ \exists\xi_1\in(x_{n-1},1),\ s.t.1-x_{n-1}=\dfrac{\lambda_n}{f'(\xi_n)(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)} \end{cases}$$

上面 n 个式子相加得到:

$$Left=1=\frac{\lambda_1}{f'(\xi_1)(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}+\frac{\lambda_2}{f'(\xi_2)(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}+\cdots+\frac{\lambda_n}{f'(\xi_n)(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}=Right$$

两边同时乘以 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$, 我们得到原命题.

综上所述, 我们得到: 存在互不相等的 $\xi_i\in(0,1),\ s.t.\dfrac{\lambda_1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{\lambda_2}{f'(\xi_2)}+\cdots+\dfrac{\lambda_n}{f'(\xi_n)}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$

命题 6.3.41

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导,$f(0)=0,\ f(1)=1$, 证明: 存在互不相等的 $\xi_i\in(0,1),\ s.t.\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{f'(\xi_i)}=n$

解

我们令 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$, 即可证明.

由 $f(0)=0,\ f(1)=1$, 我们由介值定理可以得到: $\exists x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\in(0,1)$ 满足:

$$\begin{cases} f(x_1)=\frac{1}{n} \\ f(x_2)=\frac{2}{n} \\ \cdots\cdots \\ f(x_{n-1})=\frac{n-1}{n} \end{cases}$$

在区间 $(0,x_1),(x_1,x_2),\cdots,(x_{n-1},1)$ 上使用拉格朗日中值定理得到:

$$\frac{x_{i+1}-x_i}{f(x_{i+1})-f(x_i)}=\frac{1}{f'(\xi_i)}$$

$$\begin{cases} \exists\xi_1\in(0,x_1),\ s.t.x_1-0=\dfrac{1}{nf'(\xi_1)} \\ \exists\xi_1\in(x_1,x_2),\ s.t.x_2-x_1=\dfrac{1}{nf'(\xi_2)} \\ \cdots\cdots \\ \exists\xi_1\in(x_{n-1},1),\ s.t.1-x_{n-1}=\dfrac{1}{nf'(\xi_n)} \end{cases}$$

上面 n 个式子相加得到:

$$Left=1=\frac{1}{nf'(\xi_1)}+\frac{1}{nf'(\xi_2)}+\cdots+\frac{1}{nf'(\xi_n)}=Right$$

两边同时乘以 n, 我们得到原命题

综上所述, 我们得到: 存在互不相等的 $\xi_i\in(0,1),\ s.t.\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{f'(\xi_i)}=n$

命题 6.3.42

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导,$f(0)=0,\ f(1)=1$, 证明: $\xi\neq\eta\in(0,1),\ s.t.\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$ ♠

解

由 $f(0)=0,\ f(1)=1$, 我们由介值定理可以得到: $\exists c\in(0,1)$ 满足:

$$f(c)=\frac{a}{a+b}$$

在区间 $(0,c),(c,1)$ 上使用拉格朗日中值定理得到:

$$\begin{cases} \exists\xi\in(0,c),\ s.t.c-0=\dfrac{a}{f'(\xi)(a+b)} \\ \exists\eta\in(c,1),\ s.t.1-c=\dfrac{b}{f'(\eta)(a+b)} \end{cases}$$

上面两个式子相加得到: $\dfrac{a}{f'(\xi)(a+b)}+\dfrac{b}{f'(\eta)(a+b)}=1$

综上所述, 我们得到: $\xi\neq\eta\in(0,1),\ s.t.\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$

命题 6.3.43

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导,$f(0)=0,\ f(1)=\frac{1}{4}$, 证明: $\xi\neq\eta\in(0,1),\ s.t. f'(\xi)+f'(\eta)=\eta-\xi$

解

我们将原命题进行转换:

$$\xi\neq\eta\in(0,1),\ s.t.[f'(\xi)+\xi]+[f'(\eta)-\eta]=0$$

我们构造两个辅助函数: $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{2}x^2,h(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}x^2$

我们在区间 $(0,c)$ 上对 $g(x)$ 用拉格朗日中值定理, 在区间 $(c,1)$ 上对 $h(x)$ 用拉格朗日中值定理:

$$\begin{cases}\exists\xi\in(0,c),\ s.t.\dfrac{g(c)-g(0)}{c}=g'(\xi)\Rightarrow\dfrac{f(c)+\frac{c^2}{2}}{c}=f'(\xi)+\xi\\ \exists\eta\in(c,1),\ s.t.\dfrac{h(1)-h(c)}{1-c}=h'(\eta)\Rightarrow\dfrac{\frac{c^2}{2}-f(c)-\frac{1}{4}}{1-c}=f'(\eta)-\eta\end{cases}$$

我们令 $c=\dfrac{1}{2}$, 上面两式相加得到:

$$f'(\xi)+\xi+f'(\eta)-\eta=0$$

综上所述, 我们得到: $\xi\in(0,\frac{1}{2}),\eta\in(\frac{1}{2},1),\ s.t. f'(\xi)+f'(\eta)=\eta-\xi$

命题 6.3.44

设 $f(x)\in C[0,1],\int_0^1 f(x)dx\neq0$, 证明: 存在互异的三个数 $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in[0,1]$, 满足下列不等式:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)dx&=\left[\frac{1}{1+\xi_1^2}\int_0^{\xi_1}f(x)dx+f(\xi_1)\arctan\xi_1\right]\xi_3\\&=\left[\frac{1}{1+\xi_2^2}\int_0^{\xi_2}f(x)dx+f(\xi_2)\arctan\xi_2\right](1-\xi_3)\end{aligned}$$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=\arctan x\int_0^x f(t)dt,\ F(0)=0,\ F(1)=\frac{\pi}{4}\int_0^1 f(x)dx$

$$F'(x)=\frac{1}{1+x^2}\int_0^x f(t)dt+f(x)\arctan x$$

原命题转化为证明:

存在互异的三个数 $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in[0,1],\ s.t.\dfrac{1}{2}F(1)=F'(\xi_1)\xi_3=F'(\xi_2)(1-\xi_3)$

我们不妨设存在 $c\in(0,1)$, 我们分别在 $(0,c)$ 和 $(c,1)$ 上对 $F(x)$ 应用拉格朗日中值定理得到:

$$\begin{cases}\exists x_1\in(0,c),\ s.t.\dfrac{F(c)-F(0)}{c}=F'(x_1)\\ \exists x_2\in(c,1),\ s.t.\dfrac{F(1)-F(c)}{1-c}=F'(x_2)\end{cases}$$

我们令 $F(c)=\frac{1}{2}F(c)\in(0,F(1)),(F(1)>0)$,$\xi_3=c\in(0,1)$,$\xi_1\in(0,\xi_3)$,$\xi_2\in(\xi_3,1)$, 我们可以得到:

$$\frac{1}{2}F(1)=F'(\xi_1)\xi_3=F'(\xi_2)(1-\xi_3)$$

综上所述, 我们得到: 存在互异的三个数 $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in[0,1]$, 满足下列不等式:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)dx &= \left[\frac{1}{1+\xi_1^2}\int_0^{\xi_1} f(x)dx+f(\xi_1)\arctan\xi_1\right]\xi_3\\ &= \left[\frac{1}{1+\xi_2^2}\int_0^{\xi_2} f(x)dx+f(\xi_2)\arctan\xi_2\right](1-\xi_3)\end{aligned}$$

命题 6.3.45

设 $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导,$\int_0^1 f(x)dx=3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx$, 证明: 存在两个不同的点 $\xi,\eta\in(0,1)$,$s.t.f'(\xi)=g'(\xi)[f(\eta)-f(\xi)]$

解

我们由 $\int_0^1 f(x)dx=3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx\Rightarrow\int_0^{\frac{2}{3}} f(x)dx=2\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx$

我们由积分中值定理得到:

$$\begin{cases}\exists x_1\in(0,\frac{2}{3}),\ s.t.\int_0^{\frac{2}{3}} f(x)dx=\frac{2}{3}f(x_1)\\ \exists x_2\in(\frac{2}{3},1),\ s.t.\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx=\frac{1}{3}f(x_2)\end{cases}\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$$

我们构造辅助函数: $F(x)=[f(x)-f(x_1)]e^{g(x)}$, $F(x_1)=F(x_2)=0$

$$F'(x)=e^{g(x)}\{f'(x)+g'(x)[f(x)-f(x_1)]\}$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (x_1,x_2) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(x_1,x_2),\ s.t.F'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)+g'(\xi)[f(\xi)-f(x_1)]$$

我们令 $\eta=x_1$, 我们得到: $\exists\xi\in(x_1,x_2)$, $\eta=x_1$, $s.t.f'(\xi)=g'(\xi)[f(\eta)-f(\xi)]$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi,\eta\in(0,1)$,$s.t.f'(\xi)=g'(\xi)[f(\eta)-f(\xi)]$

10. 泰勒展开应用

命题 6.3.46

设 $f(x)$ 二阶连续可导,$f''(x)\neq 0$, 若 $f(x+h)=f(x)+f'(x+\theta h)h(0<\theta<1)$, 证明: $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}$

解

我们利用泰勒公式将 $f(x+h)$ 展开:

$$\begin{cases} f(x+h) = f(x) + f'(x+\theta h)h(0<\theta<1) \\ f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\eta)}{2!}h^2,\ \eta \in (x, x+h)\ or\ \eta \in (x+h, x) \end{cases} \Rightarrow f'(x+\theta h) - f'(x) = \frac{f''(\eta)}{2!}h$$

我们对 $f'(x)$ 在区间 $(x, x+\theta h)$ 上使用拉格朗日中值定理得到:

$$\exists \xi \in (x, x+\theta h),\ s.t f'(x+\theta h) - f'(x) = \theta h f''(\xi) \Rightarrow \theta = \frac{f''(\eta)}{2f''(\xi)}$$

$$\lim_{h\to 0}\theta = \lim_{h\to 0}\frac{f''(\eta)}{2f''(\xi)} = \frac{1}{2}$$

综上所述, 我们得到: $\lim\limits_{h\to 0}\theta = \dfrac{1}{2}$

命题 6.3.47

设 $f(x)$ 有 $n+1$ 阶导数, 若 $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^n(a+\theta h)}{n!}h^n(0<\theta<1)$, 且 $f^{(n+1)}(a) \neq 0$.

证明: $\lim\limits_{h\to 0}\theta = \dfrac{1}{n+1}$

解

我们利用泰勒公式将 $f(a+h)$ 展开:

$$\begin{cases} f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^n(a+\theta h)}{n!}h^n(0<\theta<1) \\ f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}h^n + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1},\ \xi \in (a, a+h)\ or\ \xi \in (a+h, a) \end{cases}$$

我们由上面的两个式子可以得到:

$$\frac{f^n(a+\theta h)}{n!}h^n = \frac{f^n(a)}{n!}h^n + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1} \Rightarrow f^{(n)}(a+\theta h) - f^{(n)}(a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1}h$$

我们对 $f^{(n)}(x)$ 在区间 $(a, a+h)$ 上使用拉格朗日中值定理得到:

$$\exists \eta \in (a, a+h),\ s.t. f^{(n)}(a+\theta h) - f^{(n)}(a) = \theta h f^{(n+1)}(\eta) \Rightarrow \theta = \frac{1}{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{f^{(n+1)}(\eta)}$$

$$\lim_{h\to 0}\theta = \lim_{h\to 0}\frac{1}{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{f^{(n+1)}(\eta)} = \frac{1}{n+1}$$

命题 6.3.48

设 $f(x)$ 有 n 阶连续导数, $f^{(k)}(x_0) = 0(k=2,3,\cdots,n-1)$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, $f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0+\theta h)$, 其中 $\theta \in (0,1)$, 证明: $\lim\limits_{h\to 0}\theta = \dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$

解

我们利用泰勒公式将 $f(x+h)$ 展开, 得到:

$$\begin{cases} f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0+\theta h) \\ f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1},\ \xi\in(x_0,x_0+h)\ or\ \xi\in(x_0+h, \end{cases}$$

由于 $f^{(k)}(x_0)=0(k=2,3,\cdots,n-1)$, 我们得到:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n \Rightarrow f'(x_0+\theta h)-f'(x_0)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^{n-1}$$

我们利用泰勒公式将 $f'(x_0+\theta h)$ 展开:

$$f'(x_0+\theta h)=f'(x_0)+f''(x_0)\theta h+\frac{f^{(3)}(x_0)}{2!}(\theta h)^2+\cdots+\frac{f^{n-1}(x_0)}{(n-2)!}(\theta h)^{n-2}+\frac{f^{(n)}(\eta)}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1},\eta\in(x_0,x_0+\theta h)\ or\ \eta\in($$

我们利用: $f^{(k)}(x_0)=0(k=2,3,\cdots,n-1)$, 我们得到:

$$f'(x_0+\theta h)=f'(x_0)+\frac{f^{(n)}(\eta)}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1}$$

我们得到:

$$\theta^{n-1}=\frac{f^{(n)}\xi}{nf^{(n)}(\eta)} \Rightarrow \lim_{h\to 0}\theta^{n-1}=\frac{1}{n}$$

综上所述, 我们得到: $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$

命题 6.3.49

设 $f(x)=\arctan x, x\in[0,a]$, 若 $f(a)-f(0)=af'(\theta a),\theta\in(0,1)$, 求 $\lim\limits_{a\to 0}\theta^2$

解

我们可知:

$$f(a)=\arctan a,\ f(0)=0,\ f'(x)=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow f'(a\theta)=\frac{1}{1+\theta^2a^2}$$

$$f(a)-f(0)=af'(\theta a)\Rightarrow \frac{a}{1+\theta^2a^2}=\arctan a\Rightarrow \theta^2=\frac{a-\arctan a}{a^2\arctan a}$$

原极限等价于:

$$I=\lim_{a\to 0}\theta^2=\lim_{a\to 0}\frac{a-\arctan a}{a^2\arctan a}=\frac{1}{3}$$

命题 6.3.50

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的邻域内四阶可导,$|f^{(4)}(x)|\le M(M>0)$, 证明: 对此邻域上任意一个不同于 x_0 的点 a, 我们有

$$\left|f''(x_0)-\frac{f(a)+f(b)-2f(x_0)}{(a-x_0)^2}\right|\le\frac{M}{12}(a-x_0)^2,\ a+b=2x_0$$

解

我们利用泰勒展开公式, 将 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处展开, 得到:

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_(0))+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f^{(3)}(x_0)}{6}(x-x_0)^3+\frac{f''(\xi)}{24}(x-x_0)^4, \xi \in (x, x_0)\ or\ \xi \in (x_0, x)$$

我们得到:

$$\begin{cases} f(a) = f(x_0) + f'(x_0)(a - x_(0)) + \frac{f''(x_0)}{2}(a - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{6}(a - x_0)^3 + \frac{f''(\xi_1)}{24}(a - x_0)^4 \\ f(b) = f(x_0) + f'(x_0)(b - x_(0)) + \frac{f''(x_0)}{2}(b - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{6}(b - x_0)^3 + \frac{f''(\xi_2)}{24}(b - x_0)^4 \end{cases}$$

由于: $a + b = 2x_0$, 我们将上面两式相加:

$$f(a) + f(b) - 2f(0) = f''(x_0)(a - x_0)^2 + \frac{[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)]}{24}(a - x_0)^4$$

$$\left|f''(x_0) - \frac{f(a) + f(b) - 2f(x_0)}{(a - x_0)^2}\right| = \left|\frac{[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)]}{24}(a - x_0)^2\right| \le \frac{M}{12}(a - x_0)^2$$

综上所述, 我们得到:

$$\left|f''(x_0) - \frac{f(a) + f(b) - 2f(x_0)}{(a - x_0)^2}\right| \le \frac{M}{12}(a - x_0)^2,\ a + b = 2x_0$$

命题 6.3.51

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 三阶连续可导, 证明:

$$\exists \xi \in (a, b),\ s.t. f(b) = f(a) + f'(\frac{a + b}{2})(b - a) + \frac{(b - a)^3}{24}f'''(\xi)$$

♠

解

我们利用泰勒公式, 将 $f(x)$ 在 $x = \frac{a + b}{2}$ 处展开, 得到:

$$f(x) = f(\frac{a + b}{2})+f'(\frac{a + b}{2})(x-\frac{a + b}{2})+\frac{f''(\frac{a+b}{2})}{2}(x-\frac{a + b}{2})^2+\frac{f^{(3)}(\xi)}{6}(x-\frac{a + b}{2})^3, \xi \in (x, \frac{a + b}{2})$$

我们得到:

$$\begin{cases} f(a) = f(\frac{a+b}{2}) + f'(\frac{a+b}{2})(\frac{a-b}{2}) + \frac{f''(\frac{a+b}{2})}{2}(\frac{a-b}{2})^2 + \frac{f^{(3)}(\xi_1)}{6}(\frac{a-b}{2})^3,\ \xi_1 \in (a, \frac{a+b}{2}) \\ f(b) = f(\frac{a+b}{2}) + f'(\frac{a+b}{2})(\frac{b-a}{2}) + \frac{f''(\frac{a+b}{2})}{2}(\frac{b-a}{2})^2 + \frac{f^{(3)}(\xi_2)}{6}(\frac{b-a}{2})^3,\ \xi_2 \in (\frac{a+b}{2}, b) \end{cases}$$

上面两式相减, 得到:

$$f(b) - f(a) = f'(\frac{a + b}{2})(b - a) + \frac{(b - a)^3}{48}[f^{(3)}(\xi_1) + f^{(3)}(\xi_2)]$$

由介值定理我们得到:

$$\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2),\ s.t. f^{(3)}(\xi) = \frac{f^{(3)}(\xi_1) + f^{(3)}(\xi_2)}{2}$$

综上所述, 我们得到:

$$\exists \xi \in (a, b),\ s.t. f(b) = f(a) + f'(\frac{a + b}{2})(b - a) + \frac{(b - a)^3}{24}f'''(\xi)$$

常数 K 值法

我们构造辅助函数: $F(x)=f(x)-f(a)-f'(\frac{a+x}{2})(x-a)+k(x-a)^3$

其中 k 是使得 $f(b)-f(a)-f'(\frac{a+b}{2})(b-a)+k(b-a)^3$ 成立的常数.

我们有: $F(a)=F(b)=0$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a,b) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.F'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=\frac{1}{2}f''(\frac{a+\xi}{2})(\frac{\xi-a}{2})+f'(\frac{a+\xi}{2})+3k(\xi-a)^2$$

我们将 $f(x)$ 在 $x=\frac{\xi+a}{2}$ 处展开:

$$f'(\xi)=f'(\frac{\xi+a}{2})+f''(\frac{\xi+a}{2})(\frac{\xi-a}{2})+\frac{f^{(3)}(\eta)}{2}(\frac{\xi-a}{2})^2$$

我们对比两式,$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.f(b)=f(a)+f'(\frac{a+b}{2})(b-a)+\frac{1}{24}f'''(\xi)(b-a)^3$

命题 6.3.52

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶连续可导, 证明:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.f(a)-2f(\frac{a+b}{2})+f(b)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$$

解

我们利用泰勒公式, 将 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 处展开, 得到:

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\xi)}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2,\ \xi\in(x,\frac{a+b}{2})$$

我们得到:

$$\begin{cases} f(a)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(\frac{a-b}{2})+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}(\frac{a-b}{2})^2,\ \xi_1\in(a,\frac{a+b}{2}) \\ f(b)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(\frac{b-a}{2})+\dfrac{f''(\xi_2)}{2}(\frac{b-a}{2})^2,\ \xi_2\in(\frac{a+b}{2},b) \end{cases}$$

上面两式相加, 得到:

$$f(b)+f(a)=2f(\frac{a+b}{2})+\frac{(b-a)^2}{8}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]$$

由介值定理我们得到:

$$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2),\ s.t.f''(\xi)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$$

综上所述, 我们得到:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.f(a)-2f(\frac{a+b}{2})+f(b)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$$

常数 K 值法

我们构造辅助函数: $F(x)=f(x)+f(a)-2f(\frac{x+a}{2})-k(x-a)^2$

其中 k 是使 $f(a)-2f(\dfrac{a+b}{2})+f(b)=k(b-a)^2$ 成立的值

我们有: $F(a)=F(b)=0$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a,b) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.F'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=f'(\frac{\xi+a}{2})+4k(\frac{\xi-a}{2})$$

我们将 $f'(\xi)$ 在 $x=\frac{\xi+a}{2}$ 处泰勒展开得到:

$$\exists\eta,\ s.t.f'(\xi)=f'(\frac{\xi+a}{2})+f''(\eta)(\xi-\frac{\xi+a}{2})$$

我们对比上面两个式子可以得到: $k=\dfrac{f''(\eta)}{4}$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.f(a)-2f(\dfrac{a+b}{2})+f(b)=\dfrac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$

命题 6.3.53

$f(x)$ 在 $[a,b]$上$n(n\geq 2)$ 阶可导, 满足 $f^{(i)}(a)=f^{(i)}(b)=0(i=1,2,\cdots,n-1)$, 证明:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.|f^{(n)}(\xi)|\geq\frac{2^{n-1}n!}{(b-a)^n}|f(b)-f(a)|$$

解

我们利用泰勒公式将 $f(x)$ 在 $x=a$ 和 $x=b$ 处进行泰勒展开:

$$\begin{cases} f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\dfrac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!}(x-a)^n,\ \xi_1\in(a,x) \\ f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\cdots+\dfrac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!}(x-b)^{n-1}+\dfrac{f^{(n)}(\xi_2)}{n!}(x-b)^n,\ \xi_2\in(x,b) \end{cases}$$

我们令上面两个式子中 $x=\dfrac{a+b}{2}$, 且有 $f^{(i)}(a)=f^{(i)}(b)=0(i=1,2,\cdots,n-1)$, 我们得到:

$$\begin{cases} f(\dfrac{a+b}{2})=f(a)+\dfrac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!}(\frac{b-a}{2})^n \\ f(\dfrac{a+b}{2})=f(b)+\dfrac{f^{(n)}(\xi_2)}{n!}(\frac{a-b}{2})^n \end{cases}\Rightarrow f(b)-f(a)=\frac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!}(\frac{b-a}{2})^n-\frac{f^{(n)}(\xi_2)}{n!}(\frac{a-b}{2})^n$$

我们得到:

$$\frac{2^{n-1}n!|f(b)-f(a)|}{(b-a)^n}=\frac{|(-1)^nf^{(n)}(\xi_2)+f^{(n)}(\xi_1)|}{2}\leq\frac{|f^{(n)}(\xi_2)|+|f^{(n)}(\xi_1)|}{2}$$

我们由介值定理可以得到:

$$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2),\ s.t.f^{(n)}(\xi)=\frac{f^{(n)}(\xi_1)+f^{(n)}(\xi_2)}{2}$$

综上所述, 我们得到:

$$\exists\xi \in (a,b),\ s.t.|f^{(n)}(\xi)| \geq \frac{2^{n-1}n!}{(b-a)^n}|f(b)-f(a)|$$

命题 6.3.54

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导, 且 $|f(x)| \leq a$, $|f''(x)| \leq b$, 证明: $|f'(x)| \leq 2a+\frac{b}{2}$

解

我们利用泰勒公式将 $f(x)$ 在 x 处展开, 我们可以得到:

$$\begin{cases} f(0) = f(x)+f'(x)(0-x)+f''(\xi_1)(0-x)^2,\ \xi_1 \in (0,x) \\ f(1) = f(x)+f'(x)(1-x)+f''(\xi_2)(1-x)^2,\ \xi_2 \in (x,1) \end{cases}$$

上面两式相减, 我们得到:

$$f(1)-f(0) = f'(x)+f''(\xi_2)(1-x)^2-f''(\xi_1)x^2 \Rightarrow |f'(x)| = |f(1)-f(0)+f''(\xi_1)x^2-f''(\xi_2)(1-x)^2|$$

由绝对值三角不等式可得:

$$|f'(x)| \leq |f(1)|+|f()|+|f''(\xi_1)|x^2+|f''(\xi_2)|(1-x)^2 \leq 2a+b[x^2+(1-x)^2] \leq 2a+b$$

综上所述, 我们得到: $|f'(x)| \leq 2a+\frac{b}{2}$

命题 6.3.55

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 三阶可导, 且 $f(x)$ 和 $f'''(x)$ 有界, 证明: $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上也有界

解

我们不妨设 $|f(x)| \leq a$, $|f'''(x)| \leq b$

(1). 当 $x>1$ 时, 我们将 $f(x)$ 在 x 处泰勒展开:

$$\begin{cases} f(x+1) = f(x)+f'(x)+\dfrac{f''(x)}{2}+\dfrac{f^{(3)}(\xi_1)}{6} \\ f(x-1) = f(x)-f'(x)+\dfrac{f''(x)}{2}-\dfrac{f^{(3)}(\xi_2)}{6} \end{cases}$$

上面两式子相加得到:

$$|f''(x)| = |f(x+1)+f(x-1)-2f(x)+\frac{f'''(\xi_1+f'''(\xi_2))}{6}| \leq 4a+\frac{b}{3}$$

(2). $0<x\leq 1$ 时,$|f''(x)| = |f''(x)-f''(0)+f''(0)| \leq |xf'''(\xi)|+|f''(0)| \leq b+|f'''(0)|$

综上所述, 我们得到: $f''(x)$ 有界, 我们记 $|f''(x)|<c$

下面来证明: $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界

(1). 当 $x>1$ 时, 我们将 $f(x)$ 在 x 处泰勒展开:

$$f(x+1) = f(x)+f'(x)+\frac{f''(\xi_1)}{2}$$

$$|f'(x)| = |f(x+1) - f(x) - \frac{f''(\xi_1)}{2}| \le 2a + \frac{c}{2}$$

(2). 当 $0 < x \le 1$ 时,$|f'(x)| = |f'(x) - f'(0) + f'(0)| \le |xf''(\eta)| + |f'(0)| \le c + |f'(0)|$

综上所述, 我们得到: $f'(x)$ 有界

命题 6.3.56

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 二阶可导, 记 $M_i = max|f^{(i)}(x)|(i = 0, 1, 2)$, 证明: $M_1^2 \le 4M_0M_2$

解

我们将 $f(x)$ 在 x 处进行泰勒展开:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2$$

我们得到:

$$|f'(x)| = |\frac{f(x+h)}{h} - \frac{f''(\xi)}{2}h| \le |\frac{f(x+h)}{h}| + |\frac{f''(\xi)}{2}h| \Rightarrow M_1 \le \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2}{2}h$$

我们有: $M_1 \le \max\{\frac{2M_0}{h} + \frac{M_2}{2}h\} \Rightarrow M_1 \le 2\sqrt{M_0M_2} \Rightarrow M_1^2 \le 2M_0M_2$

命题 6.3.57

$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 二阶可导, 记 $M_i = max|f^{(i)}(x)|(i = 0, 1, 2)$, 证明: $M_1^2 \le 2M_0M_2$

解

对于 $\forall h > 0$, 我们有:

$$\begin{cases} f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi_1)}{2}h^2 \\ f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(\xi_2)}{2}h^2 \end{cases}$$

两式相减:

$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + \frac{f''(\xi_1)}{2}h^2 - \frac{f''(\xi_2)}{2}h^2 \Rightarrow |f'(x)| = |\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{f''(\xi_1)}{4}h - \frac{f''(\xi_1)}{4}h|$$

我们得到:

$$|f'(x)| \le \frac{M_0}{h} + \frac{M_2}{2}h \Rightarrow M_1 \le \max\{\frac{M_0}{h} + \frac{M_2}{2}h\}$$

我们由基本不等式得到: $M_1^2 \le 2M_0M_2$

11. 广义罗尔定理

命题 6.3.58

1. $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, 且 $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = A$, 证明: $\exists\xi \in (a, b)$, $s.t. f'(\xi) = 0$
2. $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内可导, 且 $f(0) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = A$, 证明: $\exists\xi \in (0, +\infty)$, $s.t. f'(\xi) = 0$

3.$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可导, 且 $0 \le f(x) \le \frac{x}{1+x^2}$, 证明: $\exists\xi > 0,\ s.t. f'(\xi) = \dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$

4.$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可导,$f(0)=1$, 且 $|f(x)| \le e^{-x}$, 证明: $\exists\xi > 0,\ s.t. f'(\xi)+e^{-\xi}=0$

解

1. 我们构造辅助函数: $g(x) = \begin{cases} f(x),\ x \in (a,b) \\ A, x = a\ or\ x = b \end{cases}$

我们可以得到 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 我们由罗尔定理可得:

$$\exists\xi \in (a,b),\ s.t. g'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = 0$$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi \in (a,b),\ s.t. f'(\xi) = 0$

2. 我们构造辅助函数: $g(x) = \begin{cases} f(tanx),\ x \in [0,\frac{\pi}{2}) \\ A,\ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

我们可以得到 $g(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续,$(0,\frac{\pi}{2})$ 上可导, 且 $g(0) = g(\frac{\pi}{2}) = A$.

我们对 $g(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上使用罗尔定理可以得到:

$$\exists\eta \in (0,\frac{\pi}{2}),\ s.t. f'(\tan\eta) = 0 \Rightarrow \exists\xi \in (0,+\infty),\ s.t. f'(\xi) = 0$$

综上所述, 我们可以得到: $\exists\xi \in (0,+\infty),\ s.t. f'(\xi) = 0$

3. 我们构造辅助函数: $g(x) = f(x) - \dfrac{x}{1+x^2}$

我们由: $0 \le f(x) \le \dfrac{x}{1+x^2}$, 由夹逼定理得到:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \end{cases}$$

我们得到: $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, 我们由第一问的结论可以得到:

$$\exists\xi \in (0,+\infty),\ s.t. g'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$$

4. 我们构造辅助函数: $g(x) = f(x) - e^{-x}$

$$g'(x) = f'(x) + e^{-x},\ g(0) = 0$$

我们由夹逼定理: $0 \le |f(x)| \le e^{-x}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

我们得到: $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, 我们由第一问的结论可以得到:

$$\exists\xi \in (0,+\infty),\ s.t. g'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) + e^{-\xi} = 0$$

12. 常数 K 值法

命题 6.3.59

$f(x)$ 在 (a,b) 上三阶可导, 证明:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t. f(b)=f(a)+\frac{f'(a)+f'(b)}{2}(b-a)-\frac{1}{12}f'''(\xi)(b-a)^3$$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f'(a)+f'(x)}{2}(x-a)+k(x-a)^3$, 其中 k 是使得 $f(b)=f(a)+\dfrac{f'(a)+f'(b)}{2}(b-a)-k(b-a)^3$ 成立的常数.

我们有: $F(a)=F(b)=0$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a,b) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t. F'(\xi)=0\Rightarrow f'(a)=f'(\xi)+f''(\xi)(a-\xi)-6k(a-\xi)^3$$

我们将 $f'(a)$ 在 $x=\xi$ 处进行泰勒展开:

$$f'(a)=f'(\xi)+f''(\xi)(a-\xi)+f^{(3)}(\xi)(a-\xi)^3$$

我们取 $k=-\dfrac{f^{(3)}(\xi)}{12}$ 满足上式,$\exists k=-\dfrac{f^{(3)}(\xi)}{12}$, $s.t. f(b)=f(a)+\dfrac{f'(a)+f'(b)}{2}(b-a)-\frac{1}{12}f'''(\xi)(b-a)^3$

命题 6.3.60

$f(x)$ 在 (a,b) 上三阶可导, 证明:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t. \int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{4}\left[f(a)+3f(\frac{a+2b}{3})\right]-\frac{(b-a)^4}{216}f'''(\xi)$$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=\int_a^x f(t)dt-\frac{b-a}{4}[f(a)+3f(\frac{a+2x}{3})]+k(x-a)^4$

其中 k 是使 $\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{4}\left[f(a)+3f(\frac{a+2b}{3})\right]-k(b-a)^4$ 成立的值

$$F(a)=F(b)=0$$

$$F'(x)=f(x)-\frac{f(a)+3f(\frac{a+2x}{3})}{4}-\frac{x-a}{2}f'(\frac{a+2x}{3})+4k(x-a)^3,\ F'(a)=0$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a,b) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t. F'(\xi)=0$$

我们对 $F'(x)$ 在区间 (a,ξ) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\eta\in(a,\xi),\ s.t. F''(\eta)=0\Rightarrow f'(\eta)=f'(\frac{a+2\eta}{3})+f''(\frac{a+2\eta}{3})(\eta-\frac{a+2\eta}{3})-12k(x-a)^2$$

我们将 $f'(\eta)$ 在 $x=\dfrac{a+2\eta}{3}$ 处进行泰勒展开得到:

$$f'(\eta)=f'(\frac{a+2\eta}{3})+f''(\eta)(x-\frac{a+2\eta}{3})+\frac{f'''(c)}{2}(x-\frac{a+2\eta}{3})^2$$

我们对比两个式子, 可以发现 $k = -\dfrac{f'''(c)}{216}$

我们取 $k = -\dfrac{f'''(c)}{216}$ 满足上式

$$\exists \xi \in (a,b),\ s.t. \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{4}\left[f(a) + 3f(\frac{a+2b}{3})\right] - \frac{(b-a)^4}{216} f'''(\xi)$$

命题 6.3.61

设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, 且 $f(x)$ 在区间 $[a_1, a_n]$ 上二阶可导,$c \in [a_1, a_n]$,$f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_n) = 0$, 证明:

$$\exists \xi \in (a_1, a_n),\ s.t. f(c) = \frac{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

解

(i). 当 $c = a_i$ 时,$f(c) = f(a_i) = 0, c - a_i = 0$, 原命题等价于 $0 \equiv 0$

(ii). 当 $c \neq a_i$ 时, 我们构造辅助函数: $F(x) = f(x) - k\dfrac{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}{n!}$

其中 k 满足 $F(c) = 0 \Rightarrow k = \dfrac{n!f(x)}{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}$

我们发现: $F(x)$ 一共有 $x_1, x_2, \cdots, x_n, c$, 共计 $n+1$ 个零点.

我们多次使用罗尔定理可以得到:

$$\exists \xi \in (a_1, a_n),\ s.t. F^{(n)}(\xi) = 0 \Rightarrow f^{(n)}(\xi) = k$$

我们取 $k = f^{(n)}(\xi)$, 我们可以得到: $f^{(n)}(\xi) = \dfrac{n!f(x)}{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}$

综上所述,

$$\exists \xi \in (a_1, a_n),\ s.t. f(c) = \frac{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

命题 6.3.62

$f(x)$ 在 (a,b) 上二阶可导, 证明:

$$\forall c \in (a,b), \exists \xi \in (a,b),\ s.t. \frac{f''(\xi)}{2} = \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(a-b)(c-b)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = \dfrac{k}{2}(a-x)(a-c)(c-x) - f(a)(c-x) - f(x)(a-c) + f(c)(a-x)$

其中 k 满足: $k = 2[\dfrac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{f(b)}{(a-b)(c-b)} + \dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)}]$

我们有: $F(a) = F(b) = F(c) = 0$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a,c) 和区间 (c,b) 上使用罗尔定理得到:

$$\begin{cases} \exists \xi \in (a,c),\ s.t. F'(\xi) = 0 \\ \exists \eta \in (c,b),\ s.t. F'(\eta) = 0 \end{cases}$$

我们对 $F'(x)$ 在区间 (ξ,η) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\gamma\in(\xi,\eta),\ s.t.F''(\gamma)=0\Rightarrow k=f''(\gamma)$$

我们证明: $\exists\gamma\in(a,b),\ s.t.f''(\gamma)=k=2[\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(a-b)(c-b)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}]$

综上所述, 我们得到:

$\forall c\in(a,b),\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\frac{f''(\xi)}{2}=\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(a-b)(c-b)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$

第 7 章 一元微积分应用

7.1 一元微分学应用

7.1.1 相关变化率

定义 7.1.1

$$y=y(x)\left\{\begin{array}{l} y=y(t) \\ x=x(t) \end{array}\right. \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

7.1.2 几何应用

定义 7.1.2 (曲率和曲率半径)

设 $y(x)$ 二阶可导, 则曲线 $y=y(x)$ 在其上点 $(x_0, y(x_0))$ 处的曲率公式表示为:

$$k=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

曲率半径:

$$R=\frac{1}{k}=\frac{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

7.2 一元积分学应用

7.2.1 几何应用

7.2.1.1 平面图形面积

定义 7.2.1 (定积分几何意义)

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

S 表示的是由 $y=0, y=f(x)$ 和 $x=a, x=b$ 四条直线围成的平面图形的面积.

7.2.1.2 平面曲线弧长

定理 7.2.1 (平面曲线的弧长)

(i). 直角坐标 $y=f(x)$

$$s=\int_a^b \sqrt{1+[y'(x)]^2}dx$$

(ii). 极坐标 $r=r(\theta)$

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}d\theta$$

(iii). 参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$$

7.2.1.3 旋转体体积

定理 7.2.2 (旋转体体积)

(i). 绕 x 轴旋转

$y=f(x)$ 与 $x=a, x=b$ 围成的几何图形绕 x 轴旋转得到的几何体体积 V:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

(ii). 绕 y 轴旋转

$y=f(x)$ 与 $x=a, x=b$ 围成的几何图形绕 y 轴旋转得到的几何体体积 V:

$$V=2\pi\int_a^b x|f(x)|dx$$

7.2.1.4 旋转曲面表面积

定理 7.2.3 (曲线旋转得到的曲面的表面积)

(i). 直角坐标

$$S = 2\pi \int_a^b |y(x)|\sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx$$

(ii). 参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |y(t)|\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt$$

7.2.1.5 函数平均值和形心坐标

定理 7.2.4 (平均值和形心坐标)

(i). 平均值

$$\overline{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

(ii). 形心坐标

$$\begin{cases} \overline{x} = \frac{\iint x d\sigma}{\iint d\sigma} = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx} \\ \overline{y} = \frac{\iint y d\sigma}{\iint d\sigma} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx} \end{cases}$$

7.2.2 物理应用

7.2.2.1 抽水做工

定义 7.2.2 (抽水做工)

1. 建立坐标系
2. 确立横截面积表达式
3. $W = \rho g \int_a^b xA(x)dx$

7.2.2.2 水压力

定义 7.2.3 (水中受到的压力)

1. 建立坐标系
2. 建立横截面积表达式: $S = (f(x) - h(x))dx$
3. $F = \rho g \int_a^b x(f(x) - h(x))dx$

7.3 微分方程应用

第 8 章 无穷级数

定义 8.0.1

给定一个无穷数列 $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$, 将其各项相加得到 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$, 即:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

我们将 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 称为无穷级数, 简称为级数, 其中 u_n 是无穷级数的通项, 如果 u_n 是常数项, 则称为常数项级数; 如果 u_n 是函数, 则称为函数项级数

定义 8.0.2 (级数敛散性)

级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的敛散性研究:

引入 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$, 我们称 S_n 是无穷级数的部分和, 我们定义:

(1). 当 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$ 时, 我们称级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛.

(2). 当 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \infty$ 或者不存在时, 我们称级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散.

推论 8.0.1

(1). 当 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛时, 我们有: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (必要条件)

(2). 当 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n, \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛时, 且这两个级数的和分别为 $S, T, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha u_n + \beta v_n)$ 收敛, 且级数和为 $\alpha S + \beta T$

(3). 如果存在去掉 m 项的级数 $\sum_{n=m}^{+\infty} u_n$ 收敛, 原级数收敛; 反之亦然

8.1 常数项级数

常数项级数敛散性判别方法

1. 正项级数判别

(1). 定义法

定理 8.1.1 (收敛原则)

$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n$ 有界

证明 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 是正项级数,$u_n > 0, S_n$ 单调递增

如果 S_n 有界, $\lim_{n\to+\infty} S_n$ 存在, 原级数收敛; 反之亦然

(2). 比较判别法

定理 8.1.2

存在无穷级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n, \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$, 若从某一项起满足 $u_n < v_n$, 我们有下面的推论:

若 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 发散

若 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛

(3). 比较判别法的极限形式

定理 8.1.3

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = A$$

(i). $A = 0$, 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛,$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛

(ii). $0 < A < +\infty, \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 有相同的敛散性

(iii). $A=+\infty$, 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 发散, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散

(4). 比值判别法

定理 8.1.4

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$$

(i). $\rho<1$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛

(ii). $\rho>1$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散

(iii). $\rho=1$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 敛散性不确定

(5). 根植判别法 (柯西判别法)

定理 8.1.5

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$$

(i). $\rho<1$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛

(ii). $\rho>1$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散

(iii). $\rho=1$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 敛散性不确定

2. 交错级数判别

定理 8.1.6 (莱布尼茨判别法)

u_n 单调不增且 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛

3. 任意项级数判别

定义 8.1.1

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|u_n|$ 是原级数的绝对值级数

(i). 如果 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|u_n|$ 收敛, 称其**绝对收敛**

(ii). 如果 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|u_n|$ 发散,$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛, 称其**条件收敛**

定理 8.1.7

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|u_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛
2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(u_n>0)$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n^2$ 收敛

证明

1. 我们构造级数 $v_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}(u_n+|u_n|)$, 我们发现当 $u_n<0$ 时,$v_n=0$; 当 $u_n>0$ 时,$v_n=u_n$, 我们得到:

$$0\leq v_n\leq|u_n|$$

我们得到 $v_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}(u_n+|u_n|)$ 收敛, 由收敛级数的可加性得到:

级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(2v_n-|u_n|)$ 收敛

综上,$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛

2. 我们由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛可以得到:

$$\exists M>0,\ s.t.|u_n|<M\Rightarrow 0<u_n^2<Mu_n$$

我们得到 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n^2$ 收敛

8.2 幂级数

定义 8.2.1 (幂级数)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\dots$$

级数的每一项都是函数项, 函数的定义域 I, 当 $x=x_0$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x_0)$ 就是常数项级数.

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x_0)$ 收敛的 x_0 点被称为**收敛点**, 所有收敛点的集合被称为**收敛域**

定义 8.2.2

幂级数标准形式:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \dots$$

幂级数的一般形式:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \dots$$

定理 8.2.1 (阿贝尔定理)

幂级数收敛域判定 (阿贝尔定理):

当幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ 在 $x = x_1$ 处收敛时, $\forall x < |x_1|$, 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ 都收敛

当幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ 在 $x = x_2$ 处发散时, $\forall x > |x_2|$, 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ 都发散.

对于标准幂级数求收敛域, 我们利用公式法:

定理 8.2.2

$\lim\limits_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \rho$

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, \rho \neq 0 \\ 0, \rho = \infty \\ \infty, \rho = 0 \end{cases}$$

我们将 $(-R, R)$ 称为幂级数的收敛区间

幂级数的收敛域为 $(-R, R)$ or $[-R, R]$ or $(-R, R]$ or $[-R, R)$

8.3 幂级数求和函数

定义 8.3.1 (幂级数的和函数)

在幂级数收敛域上, 我们称 $S(x)$ 是幂级数的和函数:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

定理 8.3.1 (可积性与可导性)

(i). 幂级数和函数 $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ 在收敛域上连续

(ii). 幂级数在收敛域 I 上可积, 有逐项积分公式 (收敛域 $I'\geq I$)

$$\int_0^x S(t)dt=\int_0^x(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n)dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},x\in I$$

(iii). 幂级数在收敛域 I 上可导, 有逐项求导公式 (收敛域 $I'\leq I$)

$$S'(x)=(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n)'=\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^{n-1},x\in I$$

8.3.1 重要展开式

定理 8.3.2

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,-\infty<x<+\infty$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\ldots,-1<x<1$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+\ldots,-1<x<1$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^nx^{n+1}}{n+1}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},-1<x\leq 1$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},-\infty<x<+\infty$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^nx^{2n}}{2n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},-\infty<x<+\infty$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

8.4 函数展开成幂级数

定义 8.4.1

泰勒级数: ($f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处存在任意阶导数)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

麦克劳林级数: ($f(x)$ 在点 $x=0$ 处存在任意阶导数)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

8.5 傅里叶级数

将满足特定条件的周期函数用一个序列的正弦函数叠加表示, 这种表示我们称为傅里叶级或者三角级数

定义 8.5.1 (傅里叶级数)

设 $f(x)$ 是周期函数且满足狄利克雷收敛定律

$f(x)=A_0+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)$ 是函数的傅里叶展开, 展开式是傅里叶级数. 通过一些变量代换, 可以得到:

$$f(x)=A_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

三角函数族的正交性

定义 8.5.2

$\{1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x,\ldots,\sin nx,\cos nx\ldots\}$ 被称为三角函数族, 满足任意两个不同的函数之积在 $[-\pi,\pi]$ 上的定积分 $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx=0$

利用三角函数族的正交性这一性质, 我们可以求出傅里叶级数的傅里叶系数:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}A_0\sin nxdx+\int_{-\pi}^{\pi}b_n\sin^2 nxdx\Rightarrow b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}A_0\cos nxdx+\int_{-\pi}^{\pi}a_n\cos^2 nxdx\Rightarrow a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}A_0dx\Rightarrow A_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

定理 8.5.1

$$f(x)\ \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

其中傅里叶系数 a_n,b_n 表达式:

$$\begin{cases}a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx, n=0,1,2,\cdots\\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx, n=1,2,\cdots\end{cases}$$

定理 8.5.2

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$S(x)=\begin{cases} f(x), x\ is\ contiue \\ \dfrac{\lim\limits_{x\to x^+}f(x)+\lim\limits_{x\to x^-}f(x)}{2}, x\ is\ uncontiue \\ \dfrac{\lim\limits_{x\to x^+}f(x)+\lim\limits_{x\to x^-}f(x)}{2}, x=\pm\pi \end{cases}$$

任意对称区间中的傅里叶展开

定义 8.5.3

设 $f(x)$ 定义域为 $[-l,l]$, 我们令 $t=\frac{x\pi}{l}, t\in[-\pi,\pi]$

我们得到:

$$g(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\to f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l})$$

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cos nt dt, n=0,1,2,\cdots \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin nt dt, n=1,2,\cdots \end{cases}$$

我们进行变量代换:

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx, n=0,1,2,\cdots \\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx, n=1,2,\cdots \end{cases}$$

正弦级数和余弦级数

当 $f(x)$ 有奇偶性时,$a_n=0\ or\ b_n=0$;

$$f(x)=f(-x), b_n=0, a_n=\frac{2}{l}\int_{-l}lf(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx$$

$$f(x)=-f(-x), a_n=0, b_n=\frac{2}{l}\int_{-l}lf(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

总结

1. p 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$, 当 $p>1$ 时, 级数收敛; 当 $p\leq 1$ 时, 级数发散
2. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛, $\lim_{n\to+\infty}S_n=e$

第 9 章 常微分方程

定义 9.0.1

方程 $F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0$ 是微分方程, 当函数为一元函数时, 是常微分方程; 函数最高阶导数的阶数是微分方程的阶数.

9.1 一阶微分方程

分离变量型

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

一阶线性微分方程

定义 9.1.1

$$y'+p(x)y=q(x)$$

定理 9.1.1 (一阶线性微分方程解)

$$e^{\int p(x)dx}(y'+p(x)y)=e^{\int p(x)dx}q(x)\Rightarrow\left[e^{\int p(x)dx}y\right]'=e^{\int p(x)dx}q(x)$$

$$e^{\int p(x)dx}y=\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+C$$

$$y=e^{-\int p(x)dx}(\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+C)$$

9.2 二阶可降解微分方程

定义 9.2.1

1. $y'' = f(y, y')$

我们令: $p = y'$, 则

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p' = f(y, p)$$

2. $y'' = f(x, y')$

我们令: $p(x) = y'$, 则

$$y'' = \frac{dp}{dx} = f(x, p)$$

9.3 二阶常系数微分方程

定义 9.3.1 (二阶常系数微分方程)

齐次二阶常系数微分方程:

$$y'' + py' + py = 0$$

非齐次性二阶常系数微分方程:

$$y'' + py' + py = f(x)$$

定理 9.3.1

对于齐次性二阶常系数微分方程:

特征方程: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

1. 当方程有两个不同的实数根 λ_1, λ_2, 微分方程通解:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

2. 当方程有两个相同的实根 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, 微分方程通解:

$$y = C_1 + C_2 x e^{\lambda x}$$

3. 当方程有两个不同的虚根 $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$, 微分方程通解:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$$

定理 9.3.2 (二阶常系数微分方程解)

对于非齐次性二阶常系数微分方程:

$$y'' + py' + py = f(x)$$

通解为齐次性二阶常系数微分方程的通解加上特解: $y_0 = y^* + y$

1. 当 $f(x) = e^{\alpha x}Q_n(x)$ 时, 特解 y^*:

$$y^* = e^{\alpha x}x^k P_n(x)$$

(i). 当 α 不是特征方程的根,$k = 0$
(ii). 当 α 是特征方程的一个根,$k = 1$
(iii). 当 α 是特征方程的重根,$k = 2$
2. 当 $f(x) = e^{\alpha x}(Q_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$ 时, 特解 y^*:

$$y^* = e^{\alpha x}x^k(P_l^1(x)\cos\beta x + P_l^2(x)\sin\beta x), \quad l = max\{m, n\}$$

(i). 当 $\alpha \pm i\beta$ 不是特征方程的根,$k = 0$
(ii). 当 $\alpha \pm i\beta$ 是特征方程的根,$k = 1$

9.4 伯努利方程

定义 9.4.1 (伯努利方程)

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

定理 9.4.1

原方程可化简为:

$$y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

不妨设:

$$z = y^{1-n}, \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

原方程为:

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x)$$

9.5 欧拉方程

定义 9.5.1 (欧拉方程)

形如以下形式的微分方程:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + px\frac{dy}{dx} + qy = f(x)$$

1. 当 $x > 0$ 时, 令 $x = e^t, t = \ln x; \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

原微分方程可化为:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+p\frac{dy}{dt}+qy=f(e^t)$$

2. 当 $x<0$ 时, 令 $x=-e^t, t=\ln(-x)$; $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$, 同理可得

♣

第 10 章 二重积分

10.1 概念和性质

定义 10.1.1 (二重积分)

三维空间中曲顶柱体的体积:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma$$

类比于一元定积分的概念, 我们可以得到很好相似的性质:

$$\int_a^b 1dx = b-a \qquad \iint\limits_{D} 1d\sigma = S_D$$

定理 10.1.1 (对称性)

1. 普通对称性

区域 D 关于 x 轴或者 y 轴对称, 且被积函数 $f(x,y)$ 满足 $f(x,y)+f(-x,y)=0$ 或者 $f(x,y)+f(x,-y)=0$, 我们得到 $\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma=0$

2. 轮换对称性

只要区域 D 是关于直线 $y=x$ 对称,$I=\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{D} f(y,x)d\sigma$

10.2 计算

1. 直角坐标 (重要的是积分次序)

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \begin{cases} \int_a^b dx \int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)dy \\ \int_a^b dy \int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)dx \end{cases}$$

2. 极坐标计算 (二重积分变量替换公式)

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D'} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)drd\theta$$

3. 变量替换

设 D 和 D' 是平面上两个 (有界) 区域,D 到 D' 的对应 $\varphi : (u,v) \to (x,y)$ (这里 $x = x(u,v), y = y(u,v)$ 连续可微), 称为变量替换, 要求 φ 在一个面积为 0 的集合外是 $1-1$, 我们有:

$$dxdy = J_\varphi(u,v)dudv, J_\varphi(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

注

$$d\sigma_1 = dudv \quad d\sigma_2 = |l \times m|$$

$$\begin{cases} x(u,v+dv) - x(u,v) = x'_v dv \\ x(u+du,v) - x(u,v) = x'_u du \\ y(u,v+dv) - y(u,v) = x'_v dv \\ y(u+du,v) - y(u,v) = y'_u du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l = (x'_u du, y'_u du) \\ m = (x'_v dv, y'_v dv) \end{cases}$$

$$d\sigma_2 = (x'_u y'_v - x'_v y'_u)dvdu = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} d\sigma_1$$

10.3 二重积分解决一元积分

几个比较经典的例子:

1. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$

2. $\int_0^a f(x)dx \int_0^a \frac{1}{f(x)}dx \geq a^2$

第二部分

高数 (下)

第 2 部分目录

第 11 章 多元函数微分

11.1 多元函数微分概念

定义 11.1.1 (多元函数极限)

设二元函数 $f(x,y)$ 定义域为 D,$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，如果存在常数 A 使得 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0, s.t.\ P(x,y)\in D\cap(P_0,\delta)$, 都有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$, 我们将 A 称作函数 $f(x,y)$ 在 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限，记作:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$$

♣

定义 11.1.2 (连续)

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

♣

定义 11.1.3 (偏导数)

设函数 $f(x,y)$ 在 (x,y) 邻域有定义，若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$ 存在，我们将这记作 $f(x,y)$ 对 x 的偏导数，记作:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ z'_x\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=f'_x(x,y)$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}=f'_y(x,y)$$

对偏导数进一步求偏导数，我们可以得到混合偏导数: $f''_{xx}(x,y), f''_{yy}(x,y), f''_{xy}(x,y)$

♣

定义 11.1.4 (可微)

函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全增量 $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ 可表示为:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

我们称 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微,$A\Delta x + B\Delta y$ 是 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全微分.

$$dz = A\Delta x + B\Delta y = Adx + Bdy$$

定义 11.1.5 (偏导数连续性)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f'_x(x,y)$$

如果这两个极限相等, 我们就称偏导数在此点连续.

11.2 链式法则

定义 11.2.1 (链式法则)

$$z = f(u,v), u = \varphi(x,y), v = \phi(x,y)$$

我们可以得到偏导数 (6 项):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

高阶偏导数:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \left(\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} + \left(\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$$

11.3 隐函数求导法则

定理 11.3.1 (隐函数存在定理 1)

设函数 $F(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一个邻域内有连续偏导数,$F(x_0,y_0)=0, F'_y\neq 0$, 则方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 的某一个邻域内能够确定唯一的连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$, 满足 $y_0=f(x_0)$, 且 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}$

定理 11.3.2 (隐函数存在定理 2)

设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一个邻域内有连续偏导数,$F(x_0,y_0,z_0)=0, F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, 则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某一个邻域内能够确定唯一的连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$, 满足 $z_0=f(x_0,y_0)$, 且满足:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

11.4 多元函数极值和最值

无条件极值

定义 11.4.1 (多元函数极值)

二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取极值的必要条件:

$$f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$$

二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取极值的充分条件:

$$\begin{cases} f'_{xx}(x_0,y_0)=A \\ f'_{xy}(x_0,y_0)=B \\ f'_{yy}(x_0,y_0)=C \end{cases},\quad \Delta=AC-B^2\Rightarrow\begin{cases} \Delta>0,\begin{cases} A>0, min \\ A<0, max \end{cases} \\ \Delta<0, not\ max, not\ min \\ \Delta=0 \end{cases}$$

条件极值

定义 11.4.2 (拉格朗日数乘法)

求目标函数 $u=f(x,y,z)$ 在条件 $\begin{cases} g(x,y,z)=0 \\ h(x,y,z)=0 \end{cases}$ 下的最值

构造辅助函数: $F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)+\mu h(x,y,z)$

令

$$\begin{cases} F'_x = f'_x + \lambda g'_x + \mu h'_x = 0 \\ F'_y = f'_y + \lambda g'_y + \mu h'_y = 0 \\ F'_z = f'_z + \lambda g'_z + \mu h'_z = 0 \\ F'_\lambda = g(x, y, z) = 0 \\ F'_\mu = h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

得到所有的备选点 P_i, 计算 $f(P_i)$ 得到最大值和最小值.

第 12 章 空间解析几何

12.1 向量代数

定义 12.1.1

1. 方向角: 非零向量 a 与 x, y, z 轴所成夹角 α, β, γ 称为向量 a 的方向角.
2. 方向余弦: $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为向量 a 的方向余弦.

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|a|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|a|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|a|}$$

3. 投影:

$$Prj_b a = \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{|b|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

♣

12.2 空间平面和直线

12.2.1 平面

定义 12.2.1 (平面方程)

1. 一般式: $Ax + By + Cz + D = 0$
2. 点法式: $A(x - x_0) + B(y - y_0 + C(z - z_0) = 0$
3. 截距式: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

4. 三点式: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \end{vmatrix} = 0$,(平面过不共线的三点 $P(x_i, y_i, z_i)$)

12.2.2 直线

定义 12.2.2 (直线方程)

1. 一般式: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = 0, n_1 = (A_1, B_1, C_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z = 0, n_2 = (A_2, B_2, C_2) \end{cases}$,n_1, n_2 不平行

2. 点向式: $\dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$,$(x_0, y_0, z_0)$ 是直线上的点,(l, m, n) 是直线的方向向量

3. 参数式: $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$,(x_0, y_0, z_0) 是直线上的点,(l, m, n) 是直线的方向向量

4. 两点式: $\dfrac{x-x_1}{x_1-x_2} = \dfrac{y-y_1}{y_1-y_2} = \dfrac{z-z_0}{z_1-z_2}$,$(x_1, y_1, z_1)$ 和 (x_2, y_2, z_2) 是直线上的点

12.3 空间曲面和曲线

定义 12.3.1 (空间曲面和曲线)

1. 空间曲线:

(i). 一般式: $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$, 是两个曲面的交线

(ii). 参数方程式: $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$,$t \in [\alpha, \beta]$ 为参数

(iii). 空间曲线在坐标面的投影:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

2. 空间曲面

$$F(x,y,z)=0$$

12.3.1 空间曲线的切线和法平面

定义 12.3.2 (曲线切线和法平面)

(i). 参数方程式: $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \\ z=h(t) \end{cases}$ 在 $t=t_0$ 时, 点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处

切线的方向向量: $\mathbf{n}=(f'(t_0),g'(t_0),h'(t_0))$

切线方程为: $\dfrac{x-x_0}{f'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{g'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{h'(t_0)}$

曲线法平面: $f'(t_0)(x-x_0)+g'(t_0)(y-y_0)+h'(t_0)(z-z_0)=0$

(ii). 一般式: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

切线的方向向量: $\left(\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}\right)$

切线方程为: $\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}}=\dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}}=\dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}}$

曲线法平面: $\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}(x-x_0)+\begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}(y-y_0)+\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}(z-z_0)=0$

12.3.2 空间曲面的切平面和法线

定义 12.3.3

曲面的切平面和法线

1. 曲面方程: $F(x,y,z)=0$

法向量: $\mathbf{n}=(F'_x(x,y,z),F'_y(x,y,z),F'_z(x,y,z))$

切平面方程: $F'_x(x,y,z)(x-x_0)+F'_y(x,y,z)(y-y_0)+F'_z(x,y,z)(z-z_0)=0$

法线方程: $\dfrac{x-x_0}{F'_x(x,y,z)}=\dfrac{y-y_0}{F'_y(x,y,z)}=\dfrac{z-z_0}{F'_z(x,y,z)}$

2. 曲面方程: $z=f(x,y)$

法向量: $\mathbf{n}=(f'_x(x,y),f'_y(x,y),-1)$

切平面方程: $f'_x(x,y)(x-x_0)+f'_y(x,y)(y-y_0)-(z-z_0)=0$

法线方程: $\dfrac{x-x_0}{f'_x(x,y)}=\dfrac{y-y_0}{f'_y(x,y)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$

12.4 场论初步

12.4.1 方向导数

定义 12.4.1 (方向导数)

设三元函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某空间邻域内 $U\subset R^3$ 有定义,l 是从 P_0 出发的一条射线,$P(x,y,z)$ 为 l 上且在 U 中的任意一点, 我们有:

$$\begin{cases} x-x_0=\Delta x=t\cos\alpha \\ y-y_0=\Delta y=t\cos\beta \\ z-z_0=\Delta z=t\cos\gamma \end{cases}$$

$t=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$ 表示 $|PP_0|$, 如果下面极限存在:

$$\lim\lim_{t\to 0}\frac{u(P)-u(P_0)}{t}=\lim\lim_{t\to 0}\frac{u(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-u(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

我们将此极限称为 $u=f(x,y,z)$ 在 P_0 处沿着 l 的方向导数, 记作 $\frac{\partial u}{\partial l}|_{P_0}$

定理 12.4.1 (方向导数计算公式)

$$\frac{\partial u}{\partial l}|_{P_0} = u'_x \cos\alpha + u'_y \cos\beta + u'_z \cos\gamma$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为方向 l 的方向余弦.

12.4.2 梯度

定义 12.4.2 (梯度)

设三元函数 $u = u(x, y, z)$ 在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 处具有一阶偏导数, 定义下面为 $u = u(x, y, z)$ 在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的梯度:

$$\mathbf{guad}\ u|_{P_0} = (u'_x(P_0), u'_y(P_0), u'_z(P_0))$$

梯度和方向导数之间的关系:

$$\frac{\partial u}{\partial l}|_{P_0} = \mathbf{guad}\ u|_{P_0} \bullet \mathbf{l} = |\mathbf{guad}\ u|_{P_0}||l|\cos\theta$$

12.4.3 散度和旋度

定义 12.4.3 (散度和旋度)

设向量场 $A(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$

散度:

$$div\ A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

旋度:

$$rot\ A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

第 13 章 三重积分

定义 13.0.1 (三重积分)

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv$$

我们将 $f(x,y,z)$ 看作空间区域 dv 内的密度, 积分表示的就是空间区域的质量,$M = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv$, 特别的, 当 $f(x,y,z)=1$ 时, 三重积分表示的积分区域 Ω 的体积.

13.1 三重积分对称性

13.1.1 普通对称性

定义 13.1.1

设 Ω 关于平面 xoz 对称, 我们有:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \begin{cases} 2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)dv, f(x,y,z)=f(x,-y,z) \\ 0, f(x,y,z)=-f(x,-y,z) \end{cases}$$

13.1.2 轮换对称性

定义 13.1.2

若将 x,y,z 任意两个交换位置后积分区域 Ω 保持不变, 我们有:

$$\iiint_{\Omega} f(x)dv = \iiint_{\Omega} f(y)dv = \iiint_{\Omega} f(z)dv$$

13.2 三重积分计算方法

13.2.1 直角坐标系

定义 13.2.1

1. 先一后二:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iint\limits_{D} d\sigma \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

适用于空间区域无侧面, 能" 压扁" 到一个坐标平面内.

2. 先二后一法:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \int_a^b dz \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)d\sigma$$

适用于旋转体, 不能 "压扁" 到一个坐标平面

13.2.2 柱面坐标系

定义 13.2.2 (柱坐标替换)

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \int_a^b dz \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)d\sigma$$

利用极坐标和直角坐标公式转换:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iint\limits_{D_{r\theta}} drd\theta \int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} rf(r\cos\theta, r\sin\theta, z)dz$$

13.2.3 球面坐标系

定义 13.2.3 (球面坐标替换)

令 $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$,我们有: $dv = r^2\sin\varphi drd\theta$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint\limits_{\Omega} r^2\sin\varphi f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)drd\theta d\varphi$$

其中: $\varphi \in [0,\pi]$, $\theta \in [0,2\pi]$

第 14 章 第一型曲线和曲面积分

14.1 第一型曲线积分

定义 14.1.1 (第一型曲线积分)

$$\int_{\Gamma} f(x,y)ds \quad \int_{\Gamma} f(x,y,z)ds$$

我们将 $f(x,y,z)$ 称为曲线的线密度, 第一型曲线积分的意义是求曲线的质量, 类比定积分, 定积分是在直线上积分, 曲线积分则是在曲线上积分.

特别的, 我们有: $\int_{\Gamma} ds = L_{\Gamma}$

定理 14.1.1 (曲线积分的求解)

1. 空间曲线

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad ,t \in [\alpha,\beta] \\ z = z(t) \end{cases}$$

我们有: $ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}dt$

$$\int_L f(x,y,z)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}dt$$

2. 平面曲线

(i). $L: \ y = f(x), \quad x \in [a,b]$

$$\int_L f(x,y)ds = \int_a^b f(x,y)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$$

(ii). $L:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t\in[\alpha,\beta]$

$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$$

(iii). $L:\ r = r(\theta),\quad \theta\in[\theta_1,\theta_2]$

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}d\theta$$

14.2 第一型曲面积分

定义 14.2.1 (第一型曲面积分)

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS$$

我们将 $f(x,y,z)$ 称为曲面的面密度, 第一型曲面积分的意义是求曲面的质量, 类比二重积分, 二重积分是在平面上积分, 曲面积分则是在曲面上积分.

特别的, 我们有: $\iint_\Sigma dS = S_\Sigma$

定理 14.2.1

$$z = f(x,y) \quad F(x,y,z) = 0$$

我们将曲面 Σ 投影到任意一个平面, 这里以 xoy 为例,$dS = \sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}d\sigma$

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z)\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}d\sigma$$

14.2.1 应用

1. 重心、形心
2. 转动惯量

定义 14.2.2 (转动惯量: $I = mr^2$)

(i). 平面物体:

对 x 轴: $I_x = \iint\limits_D y^2\rho(x,y)d\sigma$

对 y 轴: $I_y = \iint\limits_D x^2\rho(x,y)d\sigma$

对坐标原点 O: $I_O = \iint\limits_D (x^2+y^2)\rho(x,y)d\sigma$

(ii). 空间物体:

对 x 轴: $I_x = \iiint\limits_\Omega (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dv$

对 y 轴: $I_y = \iiint\limits_\Omega (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dv$

对 z 轴: $I_z = \iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dv$

对坐标原点 O: $I_O = \iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)dv$

(iii). 光滑曲线

对 x 轴: $I_x = \int\limits_L (y^2+z^2)\rho(x,y,z)ds$

对 y 轴: $I_y = \int\limits_L (x^2+z^2)\rho(x,y,z)ds$

对 z 轴: $I_z = \int\limits_L (x^2+y^2)\rho(x,y,z)ds$

对坐标原点 O: $I_O = \int\limits_L (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)ds$

(iiii). 曲面

对 x 轴: $I_x = \iint\limits_\Sigma (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dS$

对 y 轴: $I_y = \iint\limits_\Sigma (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dS$

对 z 轴: $I_z = \iint\limits_\Sigma (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dS$

对坐标原点 O: $I_O = \iint\limits_\Sigma (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)dS$

♣

3. 引力

定义 14.2.3 (引力公式: $F = \frac{GMm}{r^2}$)

(i). xoy 平面

$$F_x = GM\iint\limits_D \frac{\rho(x,y)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}d\sigma$$

$$F_y = GM\iint\limits_D \frac{\rho(x,y)(y-y_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}d\sigma$$

$$F_z = GM\iint\limits_D \frac{\rho(x,y)(z-z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}d\sigma, z=0$$

(ii). 空间物体

$$F_x = GM\iiint\limits_\Omega \frac{\rho(x,y)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}dv$$

$$F_y = GM \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x,y)(y-y_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} dv$$

$$F_z = GM \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x,y)(z-z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} dv$$

(iii). 曲线

$$F_x = GM \int\limits_{L} \frac{\rho(x,y)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} ds$$

$$F_y = GM \int\limits_{L} \frac{\rho(x,y)(y-y_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} ds$$

$$F_z = GM \int\limits_{L} \frac{\rho(x,y)(z-z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} ds$$

(iiii). 曲面

$$F_x = GM \iint\limits_{\Sigma} \frac{\rho(x,y)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} dS$$

$$F_y = GM \iint\limits_{\Sigma} \frac{\rho(x,y)(y-y_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} dS$$

$$F_z = GM \iint\limits_{\Sigma} \frac{\rho(x,y)(z-z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} dS$$

第 15 章 第二型曲线和曲面积分

15.1 第二型曲线积分

定义 15.1.1 (第二型曲线积分)

物理意义: 变力沿曲线做功

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad \int_\Gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

15.1.1 格林公式

定理 15.1.1

格林公式: (第二型曲线积分 → 二重积分)

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma$$

前提条件: L 取正向, 左手在内侧,L 闭合. 一般适用于平面曲线

15.1.2 斯托克斯公式

定理 15.1.2 (斯托克斯公式)

斯托克斯公式: (第二型曲线积分 → 第一型曲面积分)

$$\oint_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

15.2 第二型曲面积分

定义 15.2.1 (第二型曲面积分)

物理意义: 向量场通过一个曲面的通量

$$\iint\limits_{\Omega} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$$

15.2.1 高斯公式

定理 15.2.1 (高斯公式)

高斯公式: (第二型曲面积分 $\longrightarrow$ 三重积分)

$$\iint\limits_{\Omega} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy = \iiint\limits_{\Omega} (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dv$$

第三部分

线代

第 3 部分目录

第 16 章 行列式

16.1 定义

定义 16.1.1

行列式的定义:

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

(i). 几何定义

n 阶行列式 D_n 的几何意义是 n 维空间中由 n 阶行列式中的 n 个向量围成的 n 维空间体的体积. 比较特别的有:

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = S$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = V$$

(ii). 逆序数法定义

n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\dots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\dots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}$$

(iii). 行列式展开定理

余子式和代数余子式

行列式中任意一项 a_{ij} 所在行和列去掉后的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式 M_{ij}

行列式中任意一项 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$

行列式按照某一行或者某一列展开:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \end{cases}$$

16.2 性质

推论 16.2.1

行列式的性质:

性质 1 行列互换, 行列式的值不变, 即**行列等价**, 我们有 $|A| = |A^T|$

性质 2 行列式中某行或者某列元素全为 0, 行列式的值为 0, 我们有 $|A| = 0$

性质 3 行列式某行或者某列有公因子 $k(k \neq 0)$, 我们得到下面的式子:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 4 行列式某一行或者某一列元素均为两个元素之和, 我们可以拆成两个行列式之和,

我们得到:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5 行列式两行或者两列互换, 行列式的值相反.

性质 6 行列式中两行或者两列成比例, 行列式的值为 0.

性质 7 行列式中某一行加上另一行的 k 倍, 行列式的值不变.

16.3 几类特殊的行列式

定义 16.3.1

(i). 上三角行列式和下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

(ii). 副三角行列式

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \dots a_{n1}$$

(iii). 拉普拉斯展开式

设 A 为 m 阶矩阵,B 为 n 阶矩阵, 则:

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$$

(iiii). 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)$$

16.4 常见行列式计算技巧

定理 16.4.1

技巧方法

1. 所有行或者所有列之和相等

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} \xrightarrow[{[1]+\sum_{i=2}^{n}[i]}]{} [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \dots & b \\ 1 & a & b & \dots & b \\ 1 & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \dots & a \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2,3,\dots n]{ⓝ-①}$$

$$[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

有几个特别的例子:

$$\begin{vmatrix} b & b & \dots & b & a \\ b & b & \dots & a & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & a & \dots & b & b \\ a & b & \dots & b & b \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

(i). 当 $a=0,b=1$ 时,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)$$

(ii). 当 $a=2,b=1$ 时,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix} = n+1$$

(ii). 当 $a=x$ 时,

$$\begin{vmatrix} x & b & b & \dots & b \\ b & x & b & \dots & b \\ b & b & x & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \dots & x \end{vmatrix} = [x+(n-1)b](x-b)^{n-1}$$

2. 递推式

简单来说,就是 n 阶行列式按照某行或者某列一次展开得到的 $n-1$ 阶行列式和原来有相同的结构,我们可以利用上下阶行列式的关系找出递推公式.

$$D = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

(i). 归纳法

$D_1 = 1 - a$

$D_2 = (-1)^{2+1}(-a)a + D_1$

$D_3 = (-1)^{3+1}(-a)a^2 + D_2$

$D_4 = (-1)^{4+1}(-a)a^3 + D_3$

$D_4 = a^4 - a^3 + a^2 - a + 1$

(ii). 递推法

$D_4 = (-1)^{4+1}(-a)a^3 + D_3$

$D_3 = (-1)^{3+1}(-a)a^2 + D_2$

$D_2 = (-1)^{2+1}(-a)a + D_1$

$D_1 = 1 - a$

$D_4 = a^4 - a^3 + a^2 - a + 1$

第 17 章 矩阵

17.1 矩阵的定义和运算

定义 17.1.1 (矩阵的定义和运算)

1. 矩阵的定义

由 $m \times n$ 个数 a_{ij} $(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$ 排成的 m 行 n 列的矩形表格

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为一个 $m \times n$ 矩阵, 简记作 A 或者 $(a_{ij})_{m\times n}(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$, 当 $m = n$ 时, 称 A 为 n 阶方阵或者 n 阶矩阵.

2. 矩阵的运算

(i). 加减

$$C = A \pm B = (a_{ij})_{m\times n} \pm (b_{ij})_{m\times n} = (c_{ij})_{m\times n}$$

其中,$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$

(ii). 数乘

$$kA = k(a_{ij})_{m\times n} = (ka_{ij})_{m\times n}$$

特别的, 我们有: $|kA| = k^n|A|$, $k \geq 2$

(iii). 矩阵乘法

设 A 是 $m \times s$ 矩阵,B 是 $s \times n$ 矩阵, 矩阵 A, B 可以相乘 (必须满足左乘矩阵的列数和右乘

矩阵的行数相等), 乘积 AB 是 $m\times n$ 矩阵, 记 $C=AB=(c_{ij})_{m\times n}$, 我们有:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj},(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

(iiii). 矩阵转置

将 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的行列互换得到的 $n\times m$ 矩阵称为 A 的转置矩阵, 记作 A_T, 我们有:

$$A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

关于矩阵转置, 我们有几个常用的结论:

- $(A^T)^T=A$
- $(kA)^T=k(A)^T$
- $(A+B)^T=A^T+B^T$
- $(AB)^T=B^TA^T$
- 当 $m=n$ 时,$|A^T|=|A|$

(iv). 矩阵的幂

A 是 n 阶方阵,$A^m=\overbrace{AA\cdots A}^{m个}$ 称为 A 的 m 次幂

关于矩阵的幂, 我们需要注意:

- $(A\pm B)^2=A^2+b^2\pm AB\pm BA$
- $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$
- $(AB)^m=\overbrace{(AB)(AB)\cdots(AB)}^{m个}$
- 当 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 时,$f(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_nA^n$

(v). 方阵乘积行列式

A,B 是同阶方阵, 我们有 $|AB|=|A||B|$

定义 17.1.2 (向量的内积和正交)

1. 内积和模

设 $\alpha=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T,\beta=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^T$, 则称:

$$\alpha^T\beta=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nB_n$$

为向量 α,β 的内积, 记作 $(\alpha,\beta)\Rightarrow(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta$

$||\alpha||=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}$ 称为向量 α 的模, 特别的当 $||\alpha||=1$ 时, 称 α 为单位向量.

2. 正交

当 $\alpha^T\beta=0$ 时, 称向量 α,β 是正交向量

3. 标准正交向量组

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 满足:

$$\alpha_i^T\alpha_j=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$$

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是标准或单位正交向量.

4. 施密特正交化

线性无关的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的标准正交化公式:

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\cdots\cdots$$

$$\beta_n=\alpha_n-\frac{(\alpha_n,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_n,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_n,\beta_{n-1})}{(\beta_{n-1},\beta_{n-1})}\beta_{n-1}$$

得到的 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是正交向量组, 我们将 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 单位化得到:

$$\eta_1=\frac{\beta_1}{||\beta_1||},\ \eta_2=\frac{\beta_2}{||\beta_2||},\ \cdots,\ \eta_n=\frac{\beta_n}{||\beta_n||}$$

则 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是一个标准正交向量组.

定义 17.1.3 (重要矩阵)

(1). 零矩阵

所有元素均为 0 的矩阵, 记作 O

(2). 单位矩阵

主对角线元素均为 1, 其余元素全为 0 的 n 阶方阵, 称为 n 阶单位矩阵, 记作 E 或 I

(3). 数量矩阵

数 k 和单位矩阵乘积得到的矩阵被称为数量矩阵

(4). 对角矩阵

非主对角线元素均为 0 的矩阵称为对角矩阵

(5). 上 (下) 三角矩阵

当 $i>(<)j$ 时,$a_{ij}=0$ 的矩阵称为上 (下) 三角矩阵

(6). 对称矩阵

满足条件 $A^T=A$ 的矩阵称为对称矩阵, $A^T=A\Leftrightarrow a_{ij}=a_{ji}$

(7). 反对称矩阵

满足条件 $A^T=-A$ 的矩阵称为对称矩阵, $A^T=A \Leftrightarrow \begin{cases} a_{ij}=-a_{ji}, i\neq j \\ a_{ii}=0 \end{cases}$

(8). 正交矩阵

设 A 是 n 阶方阵, 满足 $A^TA=E$, 我们称 A 是正交矩阵.

A 是正交矩阵 $\Leftrightarrow A^TA=E \Leftrightarrow A^T=A^{-1} \Leftrightarrow A$ 的行 (列) 向量组是标准正交向量组

(9). 分块矩阵

$$A=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} B_1, & B_2, & \cdots, & B_n \end{bmatrix}$$

特别的, 我们有: $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} A^n & O \\ O & B^n \end{bmatrix}$

17.2 矩阵的逆和伴随矩阵

定义 17.2.1 (矩阵的逆和伴随矩阵)

1. 逆矩阵

A, B 是 n 阶方阵,E 是 n 阶单位矩阵, 若 $AB=BA=E$, 则称 A 是可逆矩阵, 并称 B 是 A 的逆矩阵, 且逆矩阵唯一, 我们将 A 的逆矩阵记作 A^{-1}

矩阵 A 可逆的充要条件为: $|A|\neq 0$, 且当 $|A|\neq 0$ 时, 我们有:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

(i). 逆矩阵的性质和公式

- $(A^{-1})^{-1}=A$
- AB可逆, $(AB)^{-1}=B^{-1}A_{-1}$
- 当$k\neq 0, (kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$
- $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$
- A^T可逆, $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

2. 伴随矩阵

将行列式 $|A|$ 的 n^2 个元素的代数余子式按照如下的形式排列成的矩阵称为 A 的伴随矩

阵, 记作 A^*.

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

我们有

$$AA^* = A^*A = |A|E \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

(i). 伴随矩阵的性质和公式

- 对于任意n阶方阵, 我们有$|A^*| = |A|^{n-1}$
- 当$|A| \neq 0, A^* = |A|A^{-1}$, $A = |A|(A^*)^{-1}$
- 我们已知$AA^* = A^*A = |A|E$, 将A替换为A^*, A^T, A^{-1}仍然成立

17.3 初等变换和初等矩阵

定义 17.3.1 (初等变换和初等矩阵)

1. 初等变换

(1). 用一个非零常数乘以矩阵的某一行 (列)

(2). 互换矩阵中的某两行 (列) 的位置

(3). 将矩阵的某一行 (列) 的 k 倍加到另一行 (列)

2. 初等矩阵

由单位矩阵经过一次初等变换后得到的矩阵被称为初等矩阵.

(1).$E_i(k)$ 表示 E 的第 i 行 (列) 乘 k 倍

(2).E_{ij} 表示 E 的第 i 行 (列) 与第 j 行 (列) 互换位置

(3).$E_{ij}(k)$ 表示 E 的第 j 行 (列) 的 k 倍加到第 i 行 (列)

3. 初等矩阵的性质和公式

(1). 对任意一个矩阵进行初等变换, 我们可以理解为用对应的初等矩阵左乘或者右乘原矩阵 (行变换为左乘, 列变换为右乘)

(2). 初等矩阵都是可逆矩阵

(3).可逆矩阵可以表示为有限个初等矩阵的乘积, 若A为可逆矩阵, 存在

初等矩阵$P_1, P_2, \cdots, P_s$, s.t.$A = P_1P_2\cdots P_s$

(4). 初等变换不会改变矩阵的秩

设 A 是 $m \times n$ 矩阵,P, Q 分别是 m, n 阶可逆矩阵, 我们有

$$r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ)$$

总结

求解逆矩阵的方法:

1. 利用伴随矩阵和原矩阵的关系: $AA^* = A^*A = |A|E$, 求解 $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$
2. 利用高斯-若尔当型解法, 利用初等行 (列) 变换, 来求解逆矩阵:

$$\begin{bmatrix} A & E \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} E & A^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{bmatrix} E \\ A^{-1} \end{bmatrix}$$

17.4 等价矩阵和矩阵的秩

定义 17.4.1 (等价矩阵和矩阵的秩)

1. 等价矩阵

设 A, B 均为 $m \times n$ 矩阵, 若存在可逆矩阵 $P_{m\times m}, Q_{n\times n}$, 使得 $PAQ = B$, 则称 A, B 是等价矩阵, 我们记作 $A \cong B$

我们不难发现, 矩阵 A, B 等价的充要条件为: $rank(A) = rank(B)$, 对于任意矩阵 $A_{m\times n}$, 存在可逆矩阵 P, Q, 使得: $PAQ = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$, 后者称为 A 的等价标准型, 且 $r = rank(A)$

2. 矩阵的秩

设 A 是 $m \times n$ 矩阵,A 中最高阶非零子式的阶数称为矩阵 A 的秩, 记作 $r(A)$.

这也等价于存在 k 阶子式子不为零, 任意 $k+1$ 阶子式子全为零, 我们记 $r(A) = k$.

特别的, 对于方阵而言:

$$r(A_{n\times n}) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A\text{可逆}$$

3. 有关秩的重要结论

设 A 是 $m \times n$ 矩阵,B 是满足有关矩阵运算要求的矩阵, 我们有

- $0 \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$
- $r(kA) = r(A), k \neq 0$
- $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$
- $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$
- $r(A^*) = \begin{cases} n, r(A) = n \\ 1, r(A) = n-1 \\ 0, r(A) < n-1 \end{cases}$ 其中A为n阶方阵.

证明

(1). $r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$

我们假设 $A_{m\times n}$, $B_{n\times s}$

我们不妨将 B, C 按行写成行向量形式:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}, \ C = AB = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \cdots + a_{1n}\beta_n \\ a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{2n}\beta_n \\ \vdots \\ a_{m1}\beta_1 + a_{m2}\beta_2 + \cdots + a_{mn}\beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$$

我们可以得到: AB的行向量都可以由B的行向量线性表出.

$$r(AB) \le r(B)$$

同理, 我们不妨将 A, C 按列写成列向量形式

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \cdots, & \alpha_n \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix}, \ C = AB = \begin{bmatrix} \gamma_1, & \gamma_2, & \cdots, & \gamma_s \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \cdots, & \alpha_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns}\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}b_{11}\alpha_1+b_{21}\alpha_2+\cdots+b_{n1}\alpha_n\\ b_{12}\alpha_1+b_{22}\alpha_2+\cdots+b_{n2}\alpha_n\\ \vdots\\ b_{1s}\alpha_1+a_{2s}\alpha_2+\cdots+a_{ns}\alpha_n\end{bmatrix}^T\\
&= \begin{bmatrix}\gamma_1, & \gamma_2, & \cdots, & \gamma_s\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

我们可以得到: AB的列向量都可以由A的列向量线性表出.

$$r(AB)\le r(A)$$

$$\text{由} r(AB)\le r(A),\ r(AB)\le r(B)\Rightarrow r(AB)\le min\{r(A),r(B)\}$$

(2).$r(A+B)\le r(A)+r(B)$
我们假设

$$A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s],B=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s],[A,B]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s]$$

$$A+B=[\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_s+\beta_s]$$

可以由$[A,B]$的列向量线性表出 $\Rightarrow r(A+B)\le r([A,B])\Rightarrow r(A+B)\le r(A)+r(B)$

(3).$A_{m\times k},B_{k\times n}$, 我们有 $r(A)+r(B)-k\le r(AB)$
我们设 $A_{m\times k},B_{k\times n}$, 我们有:

$$\begin{bmatrix}E_m & -A\\ O & E_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & O\\ E_k & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_k & -B\\ O & E_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}O & -AB\\ E_k & O\end{bmatrix}$$

$$r(Left)\ge r(A)+r(B),\ r(Right)=r(AB)+k\Rightarrow r(A)+r(B)-k\le r(AB)$$

(4).$r(A^*)=\begin{cases} n, r(A)=n \\ 1, r(A)=n-1 \\ 0, r(A)<n-1 \end{cases}$ 其中A为n阶方阵. 我们有: $AA^*=|A|E$

(i). 当$r(A)=n$, A是可逆矩阵 $\Rightarrow |A|\neq 0$

$$AA^*=|A|E \Rightarrow |A^*|=|A|^{n-1}\neq 0 \Rightarrow A^*\text{是可逆矩阵}, r(A^*)=n$$

(ii). 当$r(A)=n-1$

存在$n-1$阶子式行列式不为0, 我们得到A^*中至少有一个元素不为0, $r(A^*)\geq 1$

$AA^*=|A|E=O \Rightarrow r(A)+r(A^*)\leq n \Rightarrow r(A^*)\leq 1$

$$r(A^*)\geq 1,\ r(A^*)\leq 1 \Rightarrow r(A^*)=1$$

(iii). 当$r(A)<n-1$, 我们得到A的任意$n-1$阶子式行列式值为0, $A^*=O$

$$A^*=O \Rightarrow r(A^*)=0$$

总结

1. 计算仔细小心, 稳步前进
2. $AA^*=|A|E$!!!!
3. 注意: $(AB)^T=B^TA^T$, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
4. 如果某一个矩阵的列向量均为某一个固定列向量的倍数, 则这个矩阵可以写为 $A=\alpha\beta^T$,α, β 均为列向量, 方便计算 A^n.

第 18 章 向量组

18.1 向量和向量组的线性相关性

定义 18.1.1 (向量的定义和运算)

1. n 维向量,n 个数构成的有序数组 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 称为一个 n 维向量, 记作 $\alpha = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$,$\alpha$ 称为 n 维行向量,α^T 称为 n 维列向量, 其中 a_i 称为向量的第 i 个分量.

2. 向量间运算

(i). 加法

$$\alpha + \beta \overset{\text{def}}{\Longrightarrow} [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n]$$

(ii). 数乘

$$k\alpha \overset{\text{def}}{\Longrightarrow} [ka_1, ka_2, \cdots, ka_n]$$

(iii). 内积和叉积

内积

$$\alpha\dot{\beta} \overset{\text{def}}{\Longrightarrow} \sum_{i=1}^{n} a_i b_1$$

叉积：$\alpha = [a_1, a_2, a_3]$, $\beta = [b_1, b_2, b_3]$

$$\alpha\dot{\beta} \overset{\text{def}}{\Longrightarrow} \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

定义 18.1.2 (线性相关和线性表出)

1. 线性组合

设有 m 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 和 m 个数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$, 向量

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$$

称作向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 的线性组合.

2. 线性表出

如果向量 β 可以表示为向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 的线性组合, 即存在 m 个数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$, 使得

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$$

我们称向量 β 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 线性表出.

3. 线性相关

对于向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$, 如果存在 m 个不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$, 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

我们称向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 线性相关线性相关.

4. 线性无关

对于向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$, 如果不存在 m 个不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$, 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

当且仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时上式成立, 我们称向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 线性相关线性无关.

定理 18.1.1 (判别线性相关性的七大定理)

定理一

向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n$ 线性相关的充要条件为: 至少有一个向量可以由其余的 $n-1$ 个向量线性表出.

逆否命题:

向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n$ 线性无关的充要条件为: 任意一个向量都不可以由其余的 $n-1$ 个向量线性表出.

证明

(i). 必要性

向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性相关, 我们得到存在不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$, 使得:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

我们不妨假设 $k_1 \neq 0$, 我们可以得到:

$$\alpha_1 = -\frac{k_1}{k_1}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_n}{k_1}\alpha_n$$

至少有一个向量可以由其余的 $n-1$ 个向量线性表出

(ii). 充分性

如果有一个向量可以由其余的 $n-1$ 个向量线性表出, 我们不妨假设 α_1 可以由其余的 $n-1$ 个向量线性表出, 我们得到:

$$\alpha_1 = k_2\alpha_2 + k_2\alpha_3 + \cdots + k_n\alpha_n \Rightarrow 1\alpha_1 - k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

存在不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_n (k_1 = 1)$, 使得:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性相关

定理 二

若向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性无关,$\beta, \alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性相关, 则 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性表出, 且表示法唯一.

证明

(i). 证明存在性

$\beta, \alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性相关, 存在不全为 0 的数 $k_\beta, k_1, k_2, \cdots, k_n$, 使得:

$$k_\beta \beta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

假设 $k_\beta = 0$, 我们得到:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

此时得到不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 使得: $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性无关, 矛盾!!!

我们得到 $k_\beta \neq 0$, 我们可以得到:

$$\beta = -\frac{k_1}{k_\beta}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_\beta}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_n}{k_\beta}\alpha_n$$

向量 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性表出, 证毕

(ii). 证明唯一性 (反证法)

假设向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 对 β 存在两种不同的线性表出, 我们可以得到:

$$\begin{cases} \beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_n\alpha_n \\ \beta = h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + \cdots + h_n\alpha_n \end{cases}$$

两式相减, 得到:

$$(l_1 - h_1)\alpha_1 + (l_2 - h_2)\alpha_2 + \cdots + (l_n - h_n)\alpha_n = 0$$

至少存在 $l_i - h_i \neq 0, i \in (1, n)$, 这说明向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性相关, 矛盾!!!

我们证明了 β 的线性表出的唯一性.

定理 三

如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_s$ 线性表出, 且 $t > s$, 则 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性相关.

如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_s$ 线性表出, 且 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性相关, 则 $t \leq s$.

证明

向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$ 线性表出, 我们得到:

$$\begin{cases}\beta_1=l_{11}\alpha_1+l_{12}\alpha_2+\cdots+l_{1s}\alpha_s\\ \beta_2=l_{21}\alpha_1+l_{22}\alpha_2+\cdots+l_{2s}\alpha_s\\ \cdots\cdots\\ \beta_t=l_{t1}\alpha_1+l_{t2}\alpha_2+\cdots+l_{ts}\alpha_s\end{cases}$$

我们要证明是否存在不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_t$, 使得:

$$\begin{aligned}k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_t\beta_t &= 0\\ k_1(l_{11}\alpha_1+l_{12}\alpha_2+\cdots+l_{1s}\alpha_s) &+\\ k_2(l_{21}\alpha_1+l_{22}\alpha_2+\cdots+l_{2s}\alpha_s) &+\\ \cdots+k_t(l_{t1}\alpha_1+l_{t2}\alpha_2+\cdots+l_{ts}\alpha_s) &= 0\end{aligned}$$

即:

$$(\sum_{i=1}^{t}k_il_{i1})\alpha_1+(\sum_{i=1}^{t}k_il_{i2})\alpha_2+\cdots+(\sum_{i=1}^{t}k_il_{is})\alpha_s=0$$

当 $\sum_{i=1}^{t}k_il_{i1}=\sum_{i=1}^{t}k_il_{i2}=\cdots=\sum_{i=1}^{t}k_il_{is}=0$ 显然满足, 此时我们得到一个关于 $k_1,k_2,\cdots,k_t$ 的 t 元方程组, 一共有 s 个方程,$t>s$ 时, 未知数个数大于方程数量, 原方程组一定存在非零解.

我们得到存在不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_t$, 使得:

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_t\beta_t=0$$

我们得到: $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性相关, 证毕.

定理四

设 m 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$, 其中

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= [a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1}]^T\\ \alpha_2 &= [a_{12},a_{22},\cdots,a_{n2}]^T\\ &\cdots\cdots\\ \alpha_m &= [a_{1m},a_{2m},\cdots,a_{nm}]^T\end{aligned}$$

向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 线性相关的充要条件时齐次线性方程组

$$AX=0$$

有非零解, 也等价于零空间非零.

$$A=[\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix},\ X=[x_1,x_2,\cdots,x_m]^T$$

逆否命题:

向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 线性无关的充要条件时齐次线性方程组

$$AX=0$$

只有零解, 也等价于零空间为零.

证明

(i). 必要性

向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 线性无关, 我们得到存在不全为 0 的数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$, 使得:

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$$

$$x_1[a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1}]^T+x_2[a_{12},a_{22},\cdots,a_{n2}]^T+\cdots+x_m[a_{1m},a_{2m},\cdots,a_{nm}]^T=0$$

存在不全为 0 的数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 是方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m=0 \end{cases}$$

有非零解, 证毕

(ii). 充分性

方程组 $AX=0$ 有非零解, 我们得到存在不全为 0 的数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 使得:

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$$

此时向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 线性相关, 证毕.

定理 五

如果向量 β 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$ 线性表出, 等价于非齐次方程组方程 $AX=\beta$ 有解; 如果向量 β 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$ 线性表出, 等价于非齐次方程组方程 $AX=\beta$ 无解.

证明

向量 β 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$ 线性表出, 我们可以得到存在不全为 0 的数 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 使得:

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0\Rightarrow[\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_s\end{bmatrix}=\beta$$

方程组 $AX=\beta$ 有非零解.

定理 六

如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n$, 一部分向量线性相关, 那么整个向量组也线性相关.
逆否命题:
如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n$ 线性无关, 其任意部分向量组也线性无关.

证明

我们不妨设 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_j$ $(j<n)$ 线性相关, 我们得到存在不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_j$ 使得:

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_j\alpha_j=0$$

我们取 $k_1,k_2,\cdots,k_j,k_{j+1}=k_{j+2}=\cdots=k_n=0$, 我们得到:

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_j\alpha_j+0\alpha_{j+1}+\cdots+0\alpha_n=0$$

$k_1,k_2,\cdots,k_j,k_{j+1}=k_{j+2}=\cdots=k_n=0$ 不全为 0, 整个向量组也线性相关.

定理 七

如果一组 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n$ 线性无关, 那么把这些向量各任意添加 m 个分量得到的新向量组 $(n+m)$维$\alpha_1^*,\alpha_2^*\cdots,\alpha_n^*$ 线性无关; 如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n$ 线性相关, 那他们各去掉相同的若干个分量所得到的新向量组也是线性相关.

18.2 极大线性无关组和向量组的秩

定义 18.2.1 (极大线性无关组)

在向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$, 如果存在部分向量组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2}\cdots,\alpha_{i_r}$ 满足:

- $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2}\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性无关.
- 向量组中任意向量α_i, $(i=1,2,\cdots,s)$都可以被向量组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2}\cdots,\alpha_{i_r}$线性表出.

则称向量组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2}\cdots,\alpha_{i_r}$ 是原向量组的一个极大线性无关组.

我们注意到: 一个向量组的极大线性无关组不唯一, 对于线性无关的向量组, 它的极大线性无关组是自身.

定义 18.2.2 (向量组的秩)

向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$ 的极大线性无关组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2}\cdots,\alpha_{i_r}$ 中所含向量的个数 r 称为向量组的秩, 记作:

$$rank(\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s)=r \text{ 或 } r=(\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s)=r$$

性质 1.

- $r(A)$(矩阵的秩) $=r(A$列向量$)$(列秩) $=r(A$行向量$)$(行秩)
- 初等行变换和列变换不改变矩阵的秩
- $A\xrightarrow{\text{初等行变换}}B$, A的行向量与B的行向量是等价向量组
- 设向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$及$\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_t$,若$\beta_i(i=1,2,\cdots,t)$均可由$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$线性表出, 则:

$$r(\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s)\le r(\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_t)$$

18.3 等价向量组

定义 18.3.1 (等价向量组)

设两个向量组: (I) $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$, (II) $\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_t$, 若 (I) 中向量 α_i, $(i=1,2,\cdots,s)$ 均可由 (II) 中向量线性表出, 则称向量组 (I) 可由向量组 (II) 线性表出; 若向量组 (I) 和向量组 (II) 互相线性表出, 称向量组 (I) 与向量组 (II) 是等价向量组, 记作 (I) $\cong$ (II).

性质 1.

- (I) ≅ (I)
- 如果 (I) ≅ (II), 则 (II) ≅ (I)
- 如果 (I) ≅ (II), (II) ≅ (III), 则 (I) ≅ (III)
- 向量组和它的极大线性无关组是等价向量组

18.4 向量空间

定义 18.4.1 (向量空间)

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中线性无关的有序向量, 对于任意向量 $\alpha\in\mathbb{R}^n$ 均可由向量组 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 线性表出, 我们将表出式记:

$$\alpha=a_1\xi_1+a_2\xi_2+\cdots+a_n\xi_n$$

我们称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 基向量的个数 n 称为向量空间的维度,$[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T$ 是向量 α 在基向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的坐标.

定义 18.4.2 (基变换)

如果 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 和 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中的两个基, 其有关系:

$$[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{bmatrix}=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]C$$

上式是由基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 到基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的基变换公式, 矩阵 C 是由基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 到基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的过渡矩阵,C 的第 i 列即是 η_i 在基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 下的坐标, 过渡矩阵 C 为可逆矩阵.

定义 18.4.3 (坐标变换)

设向量 α 在基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 和基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 下的坐标为别是 $\mathbf{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T,\mathbf{y}=[y_1,y_2,\cdots,y_n]^T$

$$\alpha=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]\mathbf{x}=[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]\mathbf{y}$$

不妨假设由基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 到基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的过渡矩阵 C, 我们有:

$$[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]=[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]C$$

我们得到:

$$\mathbf{x}=C\mathbf{y}\Leftrightarrow\mathbf{y}=C^{-1}\mathbf{x}$$

第 19 章 线性方程组

19.1 具体型方程组

19.1.1 齐次方程组

定义 19.1.1 (齐次方程组)

1. 形式

方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

称为 m 个方程,n 个未知数的齐次方程组.

其向量形式为:

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$$

其中:

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} (j = 1, 2, \cdots, n)$$

方程组的矩阵形式为:

$$A_{m\times n}X = 0$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

2. 有解的条件

(i). 当 $r(A)=n$时, ($\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关), 方程组只有零解.

(ii). 当 $r(A)=r<n$时, ($\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关), 方程组有非零解, 且有 $n-r$ 个线性无关解.

3. 解的性质

如果 $A\xi_1=0,\ A\xi_2=0, \forall k_1,k_2\in\mathbb{R},\ A(k_1\xi_1+k_2\xi_2)=0$

4. 基础解系和解的结构

(1). 基础解系

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 满足:

- $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是方程组的解
- $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关
- 方程组$AX=0$的任意一个解均可以由$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性表出

我们称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为方程组 $AX=0$ 的基础解系.

(2). 通解

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为方程组 $AX=0$ 的基础解系, 则 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$ 是方程组 $AX=0$ 的通解, 其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}\in\mathbb{R}$

19.1.2 非齐次方程组

定义 19.1.2 (非齐次方程组)

1. 形式

方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

称为 m 个方程,n 个未知数的非齐次方程组.

其向量形式为:

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$$

其中:

$$\alpha_i=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{bmatrix}(j=1,2,\cdots,n),\ \beta=\begin{bmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{mj}\end{bmatrix}$$

方程组的矩阵形式为:

$$A_{m\times n}X=\beta$$

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

矩阵 $\left[\begin{array}{cccc:c}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_{1j}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_{2j}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_{mj}\end{array}\right]$ 记作为矩阵 A 的增广矩阵, 简记为 $\left[\begin{array}{c:c}A&\beta\end{array}\right]$

2. 有解的条件

(i).$r(A)\neq r([A,\beta])$, 方程组无解.(β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表出)

(ii). $r(A)=r([A,\beta])=n$, 方程组有唯一解

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{线性无关},\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{线性相关}$$

(iii).$r(A)=r([A,\beta])<n$, 方程组有无穷多组解.

3. 解的性质

设 η_1,η_2,η_3 是非齐次方程组 $AX=\beta$ 的解,ξ 是对应齐次方程组 $AX=0$ 的解, 我们有:

- $\eta_1-\eta_2$是$AX=0$的解
- $k\xi+\eta$是方程组$AX=\beta$的解

4. 解的结构

(1). 特解

η是非齐次性方程组$AX=\beta$的一个特解

(2). 通解

设 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$ 是方程组 $AX=0$ 的通解, 其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}\in\mathbb{R}$, 我们可以得到非齐次性方程组的通解:

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta$$

19.2 两个方程组的公共解

定义 19.2.1 (两个方程组的公共解)

(1). 齐次性线性方程组 $A_{m\times n}X=0$ 和 $B_{m\times n}X=0$ 的公共解是满足方程组 $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} X=0$ 的解.

(2). 非齐次性性线性方程组 $A_{m\times n}X=\alpha$ 和 $B_{m\times n}X=\beta$ 的公共解是满足方程组 $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} X=\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ 的解.

(3). 给出方程组 $A_{m\times n}X=0$ 的通解 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s$, 代入第二个方程组 $B_{m\times n}X=0$ 得到 $k_i(i=1,2,\cdots,s)$ 之间的关系, 代回方程 $A_{m\times n}X=0$

(4). 给出方程组 $A_{m\times n}X=0$ 的基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 和方程组 $B_{m\times n}X=0$ 的基础解系 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$, 公共解为:

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s=l_1\eta_1+l_2\eta_2+\cdots+l_t\eta_t$$

19.3 同解方程组

定义 19.3.1 (同解方程组)

如果两个方程组 $A_{m\times n}X=0$ 和 $B_{m\times n}X=0$ 有完全相同的解, 则称它们为同解方程组.

- $AX=0$的解满足$BX=0$并且$BX=0$的解满足$AX=0$
- $r(A)=r(B)$并且$AX=0$的解满足$BX=0(BX=0$的解满足$AX=0)$
- $r(A)=r(B)=r(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix})$

第 20 章 特征值和特征向量 2012.08.18

20.1 特征值和特征向量定义

定义 20.1.1 (特征值和特征向量)

设 A 是 n 阶矩阵,λ 为常数, 存在非零列向量 ξ, 满足:

$$A\xi = \lambda\xi$$

则称 λ 为 A 的特征值,ξ 是 A 对应于特征值 λ 的特征向量

注

$$(\lambda E - A)\xi = O \Rightarrow |\lambda E - A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) = 0$$

上面右边是关于 λ 的特征多项式, 也是 A 的特征方程:

$$\lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$$

我们得到:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \\ \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = |A| \end{cases}$$

推论 20.1.1 (特征向量)

- k重特征值至多只有k个线性无关的特征向量
- 若ξ_1, ξ_2是A的属于不同特征值λ_1, λ_2的特征向量,λ_1, λ_2线性无关
- 若ξ_1, ξ_2是A的属于同一特征值λ的特征向量
  $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 (k_1, k_2$不同时为0)仍然是$A$属于特征值$\lambda$的特征向量

表 20.1: 常用特征值和特征向量

矩阵	A	kA	A^k	$f(A)$	A^{-1}	A^*	$P^{-1}AP$
特征值	λ	$k\lambda$	λ^k	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\|A\|}{\lambda}$	λ
特征向量	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	$P^{-1}\xi$

20.2 相似

定义 20.2.1 (矩阵的相似)

设 A, B 是两个 n 阶方阵, 若存在 n 阶可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP = B$, 则称 A 相似于 B, 记作 $A \sim B$

注

(1). $A \sim A$ 反身性

(2). $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ 对称性

(3). $A \sim B,\ B \sim C \Rightarrow A \sim C$ 传递性

推论 20.2.1 (相似矩阵)

(1).$A \sim B$, 我们得到:

- $r(A) = r(B)$
- $|A| = |B|$
- $|\lambda A - E| = |\lambda B - E|$
- A, B具有相同的特征值

(2).$A \sim B$, 我们得到:

- $A^m \sim B^m$
- $f(A) \sim f(B)$

(3).$A \sim B$且A可逆, 我们得到:

- $A^{-1} \sim B^{-1}$
- $f(A^{-1}) \sim f(B^{-1})$

(4).$A \sim B$, 我们得到:

- $A^T \sim B^T$
- $A^* \sim B^*$

20.2.1 矩阵的相似对角化

定义 20.2.2 (相似对角化)

设 A 是 n 阶方阵, 若存在 n 阶可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$, 其中 Λ 是对角矩阵, 则称 A 可相似对角化, 记作 $A \sim \Lambda$, 称 Λ 为 A 的相似标准型

注

$$P = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n], \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \Lambda \Rightarrow AP = P\Lambda$$

$$A[\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n] = [\lambda_1\xi_1, \lambda_2\xi_2, \cdots, \lambda_n\xi_n] \Rightarrow A\xi_i = \lambda_i\xi_i (i = 1, 2, \cdots, n)$$

推论 20.2.2 (对角化)

- n阶矩阵A可相似对角化 $\Leftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量
- n阶矩阵A可相似对角化 $\Leftrightarrow$ 对于每个k_i重特征值都有k_i个特征向量
- A有n个特征值 $\Rightarrow$ n阶矩阵A可相似对角化
- n阶矩阵A为实对称矩阵 $\Rightarrow$ A可相似对角化

20.2.2 实对称矩阵的相似对角化

定义 20.2.3 (实对称矩阵相似对角化)

$A^T = A$且A中元素全为实数, 我们把A称作实对称矩阵

性质

- 实对称矩阵必可相似对角化, 特征值为实数, 特征向量为实向量
- 实对称矩阵属于不同特征值的特征向量互相正交
- $\exists$正交矩阵Q, s.t. $Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \Lambda$

第 21 章 二次型

21.1 二次型定义

定义 21.1.1 (二次型)

n 元变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + & \cdots & +2a_{1n}x_1x_n \\ +a_{22}x_2^2 + & \cdots & +2a_{2n}x_2x_n \\ + & \cdots & \\ & & +a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为 n 元二次型, 简称为二次型.

我们令 $a_{ij} = a_{ji}$, 我们可以得到:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n + \cdots + a_{n1}x_nx_1 + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

我们令

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

二次型可表示为: $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, A 为二次型 $f(\mathbf{x})$ 的矩阵

21.2 二次型的标准型和规范型

定义 21.2.1 (线性变换)

对于 n 元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 令:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \qquad \cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

记

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}, \ \mathrm{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

上面的线性变化可写作:

$$\mathrm{x} = C\mathrm{y}$$

我们把这种变换称为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的**线性变换**, 如果线性变换矩阵 C 可逆,$|C| \neq 0$, 则称为**可逆线性变换**.

我们有:

$$f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^T A\mathrm{x},\ \mathrm{x} = C\mathrm{y} \Rightarrow f(\mathrm{x}) = (C\mathrm{y})^T A(C\mathrm{y}) = \mathrm{y}^T(C^T AC)\mathrm{y}$$

如果我们记 $B = C^T AC$, 我们得到

$$f(\mathrm{x}) = y^T By = g(\mathrm{y})$$

二次型 $f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^T A\mathrm{x}$ 通过线性变换 $\mathrm{x} = C\mathrm{y}$ 得到了一个新二次型 $g(\mathrm{y}) = y^T By$

定义 21.2.2 (矩阵合同)

设 A,B 为 n 阶矩阵, 若存在可逆矩阵 C, 使得:

$$B = C^T AC$$

则称 A,B 合同, 记作 $A \simeq B$, 其对应的二次型 $f(\mathrm{x})$ 与 $g(\mathrm{y})$ 为合同二次型.

注

(1). $A \simeq A$ 反身性

(2). $A \simeq B \Rightarrow B \simeq A$ 对称性

(3). $A \simeq B,\ B \simeq C \Rightarrow A \simeq C$ 传递性

定义 21.2.3 (标准型和规范型)

1. 二次型中只有平方项, 而没有交叉项 (所有交叉项系数全为 0), 形如:

$$d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$$

的二次型为标准二次型.

2. 在标准二次型中, 如果二次型的系数 $d_i = \{0, 1, -1\}$, 这样的二次型称为规范型二次型.

3. 二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ 合同于标准型 $d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$, 则称 $d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$ 为二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ 的合同标准型.

4. 二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ 合同于规范型 $x_1^2+\cdots++x_p^2-x_{p+1}^2-x_q^2$, 则称 $x_1^2+\cdots++x_p^2-x_{p+1}^2-x_q^2$ 为二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ 的合同规范型.

5. 任何二次型都可以通过可逆线性变换化为标准型或者规范型, 对任意实对称矩阵 A, 必存在可逆矩阵 C, 使得 $C^TAC = \Lambda$

6. 任何二次型都可以通过正交变换化为标准型, 对任意实对称矩阵 A, 必存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^{-1}AC = Q^TAQ = \Lambda$

♣

定义 21.2.4 (惯性定理)

无论用什么样的可逆线性变换得到的二次型标准型或者规范型, 标准型或者规范型中正项个数 p, 负项个数 q 都是不变的,p 被称为正惯性指数,q 被称为负惯性指数.

♣

注

(1). 二次型的秩为r, $r = p + q$

(2). 两个二次型合同的充要条件为有相同的正、负惯性指数, 或者相同的秩及正 (负) 惯性指数

21.3 正定二次型

定义 21.3.1 (正定矩阵)

n 元二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \mathbf{x}^TA\mathbf{x}$, 对于任意 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T \neq 0$, 都有 $\mathbf{x}^TA\mathbf{x} > 0$, 则称 f 为正定二次型, 二次型对应的矩阵 A 为正定矩阵.

推论 21.3.1 (二次型正定充要)

- f正定 $\Leftrightarrow$ f正惯性指数$p = n$
- f正定 $\Leftrightarrow$ $\exists$可逆矩阵D, s.t. $A = D^TD$
- f正定 $\Leftrightarrow$ $A \simeq E$
- f正定 $\Leftrightarrow$ A的所有特征值$\lambda_i > 0$
- f正定 $\Leftrightarrow$ A的全部顺序主子式大于0

♠

推论 21.3.2 (二次型正定必要)

- f 正定 $\Rightarrow a_{ii} > 0$
- f 正定 $\Rightarrow |A| > 0$

第四部分

概率论

第 4 部分目录

第 22 章 随机事件和概率

定义 22.0.1 (随机试验)

- 试验可以在相同条件下重复进行
- 试验的所有结果是明确可知道的, 并且不止一个
- 每一次试验出现哪一个结果, 事先并不确定

定义 22.0.2 (随机事件)

- 每一次试验中可能出现也可能不出现的结果称为随机事件
- 在试验中一定发生的事件为必然事件, 一定不发生的事件为不可能事件

定义 22.0.3 (样本空间)

- 随机试验的每一个可能的结果称为样本点, 记作ω
  样本点的全体组成的几何称为样本空间, 记作$\Omega \Rightarrow \Omega = \{\omega\}$
- 由一个样本点构成的事件为基本事件
- 随机事件A是由若干个基本事件组成 $\Rightarrow A \subset \Omega$

22.1 事件的关系和运算

定义 22.1.1 (事件间关系)

- 包含: 事件A发生, 事件B发生 $\Rightarrow A \subset B$
- 相等: $A \subset B,\ B \subset A \Rightarrow A = B$
- 相容: $AB \neq \varnothing$
- 互斥: $AB = \varnothing$
- 对立: $A \cup B = \Omega, A \cap B = \varnothing$

定义 22.1.2 (运算法则)

- 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- 分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $De\ Morgan's\ laws$: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

22.2 概率定义

定义 22.2.1 (概率定义)

1. 描述性定义

通常将随机事件 A 发生的可能性大小的度量 (非负值) 称为事件 A 发生的概率, 记作 $P(A)$

2. 统计性定义

在相同条件下做重复实验, 事件 A 出现的次数 k 和总的试验次数 n 的比 $\frac{k}{n}$ 称为事件 A 在这 n 次试验中出现的频率. 当试验次数 n 足够大时, 频率将稳定于某个常数 p,n 越大, 频率偏离 p 的可能性越小, 我们把这个常数 p 称为事件 A 发生的概率.

3. 公理化定义

设随机事件的样本空间为 Ω, 如果对于每一个事件 A 都有一个确定的实数 $P(A)$, 且事件函数 $P(*)$ 满足:

- 非负性: $P(A) \geq 0$
- 规范性: $P(\Omega) = 1$
- 可列可加性: 对于任意两个互不相容的事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$, 我们有:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

22.3 古典概率型和几何概率型

定义 22.3.1 (古典概率型)

古典概率型样本空间满足:

- 只有有限个基本事件
- 每个基本事件都是等可能发生

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{事件}A\text{所含的基本事件的个数}}{\text{样本空间内的基本事件个数}}$$

定义 22.3.2 (几何概率型)

几何概率型样本空间满足:

- 无限个基本事件
- 每个基本事件都是等可能发生
- 样本空间是一个可以度量的有界区域

$$P(A)=\frac{S_A\text{的几何度量}}{\text{样本空间内的几何度量}}$$

22.4 概率论基本公式

定义 22.4.1 (性质和基本公式)

- $0\le P(A)\le 1, P(\varnothing)=0, P(\Omega)=1$
- $A\subset B\Rightarrow P(B-A)=P(B)-P(A), P(B)\ge P(A)$
- $P(\overline{A})=1-P(A)$
- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

定义 22.4.2 (公式)

定理 22.4.1 (条件概率公式)

A,B 是两个任意事件, 如果 $P(A)>0$, 我们称在 A 发生的条件下 B 发生的概率为条件概率, 我们记作 $P(B|A)$.

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

定理 22.4.2 (乘法公式)

$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件, 且 $P(A_i)>0,(i=1,2,\cdots,n), P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$, 我们有:

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

特别的, 当 $n=2$ 时, 我们有:

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$$

定理 22.4.3 (全概率公式)

如果有完备事件组 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$, 满足 $\bigcup_{i=1}^n A_i=1, A_iA_j=\varnothing$, 对于任意事件 B, 我们有:

$$B=\bigcup_{i=1}^n A_iB,\ P(B)=\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

定理 22.4.4 (贝叶斯公式)

如果有完备事件组 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$, 满足 $\bigcup_{i=1}^n A_i = 1, A_iA_j = \varnothing$, 对于任意事件 B, 我们有:

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_jB)}{P(B)} = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}, j = 1,2,\cdots,n$$

22.5 事件独立性和独立重复实验

定义 22.5.1 (定义)

1. 事件的独立性

(1). 描述性定义

事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意一个事件 A_i 发生的概率不受其他 $n-1$ 个事件的影响, 我们称这 n 个事件相互独立.

(2). 数学定义

A, B 为两个事件, 如果我们有: $P(AB) = P(A)P(B)$, 则称事件 A, B 相互独立.

2. 试验的独立性

如果各个试验的结果是相互独立的, 我们称这些试验是相互独立的, 试验序列 $\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ 中任意两个试验 E_i, E_j, 在这两个试验中任意两个结果 A_{ip}, A_{iq} 满足: $P(A_{ip}A_{jq}) = P(A_{ip})P(A_{jq})$, 我们称试验序列相互独立.

注

相互独立 $\Longrightarrow$ 两两独立, 两两独立 $\not\Longrightarrow$ 相互独立

第 23 章 一维随机变量及其分布

23.1 一维随机变量

定义 23.1.1 (随机变量)

设随机试验 E 的样本空间 $\Omega=\{\omega\}$ 满足: $\forall\omega\in\Omega$ 都有唯一的实数 $X(\omega)$ 与之对应, 且对任意实数 x, 都有 $\{\omega|X(\omega)\le x,\omega\in\Omega\}$ 是随机事件, 我们则称定义在 Ω 上的单值函数 $X(\omega)$ 是随机变量.

定义 23.1.2 (分布函数)

设 X 是随机变量,x 是任意实数, 称函数 $F(x)=P(X\le x)$ 为随机变量 X 的分布函数, 或者称 X 服从 $F(x)$ 分布, 记作 $X\sim F(x)$

- $F(x)$ 是单调不减函数,$\forall x_1\le x_2$, 我们有 $F(x_1)\le F(x_2)$
- $F(x)$ 是右连续函数, 我们有 $\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x_0^+)=F(x_0)$
- $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0,\ F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$
- $P\{X\le a\}=F(a),\ P\{X<a\}=F(a^-),\ P\{X=a\}=F(a)-F(a^-)$

23.2 一维离散型随机变量

定义 23.2.1 (一维离散型随机变量)

随机变量 X 只能取有限个值 $x_1,x_2,\cdots$, 则称 X 为离散型随机变量, 我们有:

$$P\{X=x_i\}=p_i,i=1,2,\cdots$$

我们将上面的式子称为随机变量 X 的分布列、分布律或者概率分布, 记作 $X\sim p_i$, 概率

分布通常用表格或者矩阵形式表示.

X	x_1	x_2	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$

或 $X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$

数列 $\{p_i\}$ 是离散型随机变量的概率分布的充要条件为: $p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

我们假设离散型随机变量的概率分布为: $P(X = x_i) = p_1$, 我们得到离散型随机变量 X 的分布函数:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

对实轴上任意集合 B, 我们有:

$$P(X \in B) = \sum_{x_i \in B} P(X = x_i)$$

$$P(a < X \leq b) = P(x \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

定义 23.2.2 (常见离散型随机变量分布)

(1).0-1分布

$X \sim B(1, p)$

$$P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$$

(2).二项分布

$X \sim B(n, p)$, 试验次数为 n, 成功概率为 p, 随机变量 X 为成功次数

$$P(X = k) = C_k^n p^k (1 - p)^{n-k}, (k = 0, 1, 2, \cdots, n), 0 < p < 1$$

(3).泊松分布

$X \sim P(\lambda)$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, (k = 0, 1, 2, \cdots), 0 < p < 1$$

(4).几何分布

$X \sim G(p)$

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p, (k = 1, 2, \cdots), 0 < p < 1$$

(5).超几何分布

$X \sim H(n, N, M)$

$$P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, (max\{0, n - M + N\} \leq k \leq min\{M, n\})$$

23.3 一维连续型随机变量

定义 23.3.1 (连续型随机变量分布函数和密度函数)

随机变量 X 的分布函数可以表示为:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt, t\in\mathbb{R}$$

其中 $f(x)$ 是非负可积函数, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$, 我们称 X 是连续型随机变量,$f(x)$ 是随机变量 X 的**概率密度函数**, 记作 $X\sim f(x)$

对于连续型随机变量 X, 我们有:

$$P(X=c)=0$$

$$P(a<X<b)=P(a\le X<b)=P(a<X\le b)=P(a\le X\le b)$$

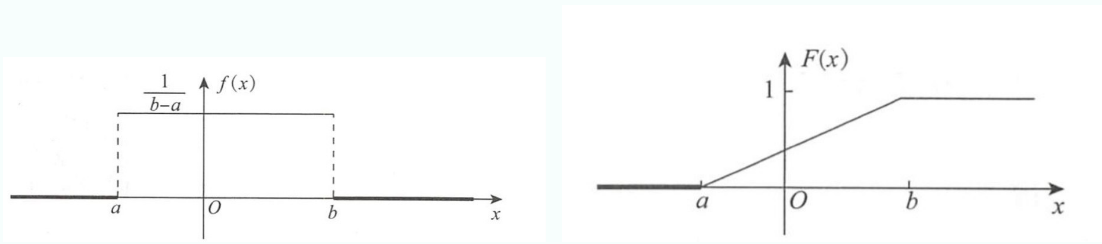
$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx$$

定义 23.3.2 (常见连续型随机变量分布)

(1).均匀分布

$X\sim U(a,b)$,X 的概率密度函数 $f(x)$ 和分布函数 $F(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & x\le a\text{或}x\ge b\end{cases},\quad F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x<b\\ 1, & x\ge b\end{cases}$$

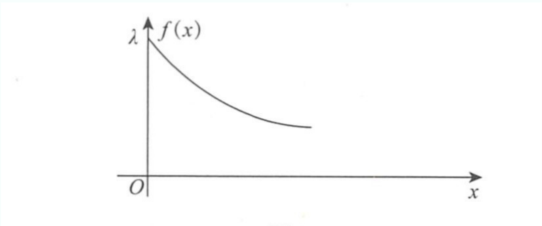


(a) 概率密度 (b) 分布函数

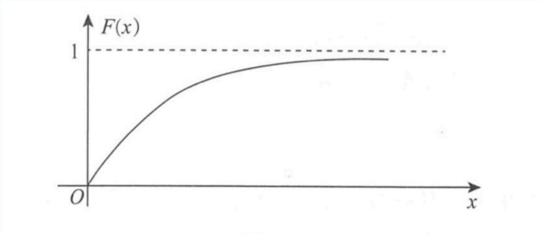
(2).指数分布

$X\sim E(\lambda)X$ 的概率密度函数 $f(x)$ 和分布函数 $F(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},\quad F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}\quad(\lambda>0)$$



(c) 概率密度



(d) 分布函数

(3).正态分布

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$,X 的概率密度 $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}, (-\infty < x < +\infty)$$

特别的, 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时,$X \sim f(x)$ 是标准正态分布:

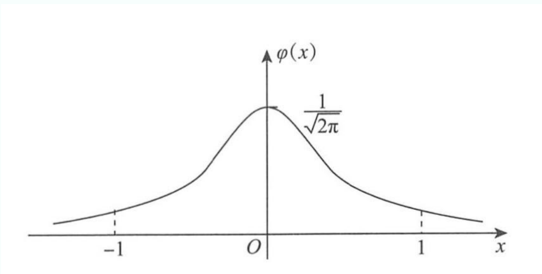
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, (-\infty < x < +\infty)$$

关于正态分布, 我们有:

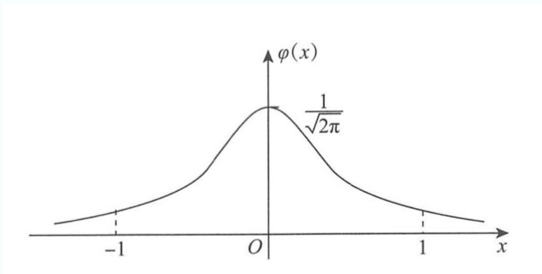
$$F(x) = P(X \le x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

$$P(a \le x \le b) = \Phi(\frac{b-u}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

$$F(\mu - x) + F(\mu + x) = 1,\ aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$



(e) 概率密度



(f) 分布函数

23.4 一维随机变量函数的分布

定义 23.4.1

设 X 是随机变量, 函数 $y = g(x)$, 以随机变量 X 作为自变量的函数 $Y = g(X)$ 也是随机变量, 称为随机变量函数.

我们一般有离散型 $\rightarrow$ 离散型和连续型 $\rightarrow$ 离散型两种随机变量函数.

第 24 章 多维随机变量及其分布

24.1 基本概念

定义 24.1.1 (n 维随机变量)

如果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是定义在同一个样本空间 Ω 上的 n 个随机变量，我们称 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 n 维随机向量.

对于任意的 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，我们把 n 元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

称为 n 维随机向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的**联合分布函数**

特别的，当 $n = 2$ 时，记 (X, Y) 为**二维随机变量**或者**二维随机向量**，我们称 $F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\}$ 为二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数，记作：

$$(X, Y) \sim F(x, y) \Leftrightarrow F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\}$$

随机变量 X 与 Y 的分布函数 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 分别称为随机变量关于 (X, Y) 关于 X 和 Y 的边缘分布函数.

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < +\infty\} = F(x, +\infty)$$

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X < +\infty, Y \le y\} = F(+\infty, y)$$

注

二维随机变量联合分布性质

(1). 单调性 (单调不减)

$$\forall x,\ 当 y_1 < y_2 时, F(x, y_1) \le F(x, y_2)$$

$$\forall y,\ 当 x_1 < x_2 时, F(x_1, y) \le F(x_1, y)$$

(2). 右连续性

$$\lim_{x \to x_0^+} F(x, y) = F(x_0 + 0, y) = F(x_0, y)$$

$$\lim_{y \to y_0^+} F(x, y) = F(x, y_0 + 0) = F(x, y_0)$$

(3). 有界性

$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0,\ F(+\infty, +\infty) = 1$$

(4). 非负性 $\forall x_1 < x_2, y_1 < y_2$, 我们有:

$$F(x_1 < x \le x_2, y_1 < y \le y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \ge 0$$

♣

24.2 二维离散型随机变量

表 24.1: 离散型二维随机变量概率分布

$X \backslash Y$	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$P\{X = x_i\}$
x_1	p_{11}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	p_{1*}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	p_{i*}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$P\{Y = y_j\}$	p_{*1}	$\cdots$	p_{*j}	$\cdots$	1

定义 24.2.1 (二维离散型随机变量)

1. 概率分布

二维随机变量 (X, Y) 只能取有限对值或可列对值 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n), \cdots$, 则称

(X,Y) 为离散型随机变量,(X,Y) 满足概率分布:

$$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\},i,j=1,2,\cdots$$

上面的式子称为 (X,Y) 的联合分布律, 记作 $(X,Y)\sim p_{ij}$, 如表格 24.1所示

数列$\{p_{ij}\},i,j=1,2,\cdots$是某一二维随机变量的概率分布的充要条件:

$$p_{ij}\geq 0,\ \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1$$

2. 联合分布函数、边缘分布、条件分布

(1). 联合分布函数

$$F(x,y)=P\{X\leq x,Y\leq y\}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}$$

(2). 边缘分布

X 的边缘分布:

$$p_{i*}=P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},(i=1,2,\cdots)$$

Y 的边缘分布:

$$p_{*j}=P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij},(j=1,2,\cdots)$$

(3). 条件分布

X 在 $Y=y_j$ 下的条件分布:

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{*j}},i=1,2,\cdots$$

Y 在 $X=x_i$ 下的条件分布:

$$P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i*}},j=1,2,\cdots$$

24.3 二维连续型随机变量

定义 24.3.1 (二维连续型随机变量)

1. 联合分布函数、概率密度

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv,(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$F(x,y)$ 是二维随机变量 (X,Y) 的概率分布函数,$f(x)$ 是二维随机变量 (X,Y) 的概率密度函数.

$$f(x,y) \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy$$

注

- $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续, 我们有: $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}|_{(x_0,y_0)} = f(x_0,y_0)$
- $F(x,y)$ 连续且可导, $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$

2. 边缘分布函数、边缘概率密度

$(X,Y) \sim f(x,y)$,X 的边缘分布函数和边缘概率密度:

边缘分布函数

$$F_X(x) = F(x,+\infty) = \int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dv\right]du$$

边缘概率密度

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$(X,Y) \sim f(x,y)$,Y 的边缘分布函数和边缘密度函数:

边缘分布函数

$$F_Y(y) = F(+\infty,y) = \int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)du\right]dv$$

边缘概率密度

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

3. 条件分布函数、条件概率密度

$(X,Y) \sim f(x,y)$,X 在 $Y=y$ 条件下的条件分布函数和条件概率密度:

条件概率密度

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, (f_Y(y) > 0)$$

条件分布函数

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx$$

$(X,Y) \sim f(x,y)$,Y 在 $X=x$ 条件下的条件分布函数和条件概率密度:

条件概率密度

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, (f_X(x) > 0)$$

条件分布函数

$$F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(y|x)dy = \int_{-\infty}^{y} \frac{f(x,y)}{f_X(x)}dy$$

定义 24.3.2 (常见二维分布)

(1). 二维均匀分布

(X,Y) 在有界区域 D 服从均匀分布,(X,Y) 的概率密度为:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{S_D}, & (x,y) \in D \\ 0, \text{其他} \end{cases} \quad S_D\text{是区域的面积}$$

(2). 二维正态分布

(X,Y) 概率密度为:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$$

其中 $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1$, 我们称 (X,Y) 服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 的二维正态分布, 记作 $(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$

注

- $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$,$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$,$\rho$ 是 X 与 Y 的相关系数

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_1\sigma_2}$$

- X 和 Y 的条件分布都是正态分布
- $aX + bY(a \neq 0\text{或者}b \neq 0)$ 服从正态分布
- X, Y 相互独立的充要条件为 X, Y 不相关 $\Leftrightarrow \rho = 0$

24.4 独立性

定义 24.4.1 (独立性)

1. 概念

设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布 $F(x,y)$, 边缘分布分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 如果对任意实数 (x,y), 我们都有:

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \Leftrightarrow X\text{和}Y\text{相互独立}$$

- 随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立 $\Leftrightarrow F(x_1, x_1, \cdots, x_n) = F(x_1)\ldots F(x_2)\cdots F(x_n)$
- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 则其中任意 $k(2 \leq k \leq n)$ 个随机变量也相互独立

- 两个多维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 与 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)$ 相互独立, 我们有:

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)=F_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ldots F_2(y_1,y_2,\cdots,y_m)$$

- (X,Y) 为独立的二维随机变量, 边缘分布和条件分布相等, 边缘概率密度与条件概率密度相等.$(P\{Y=y_j\}>0,\ P\{X=x_i\}>0)$

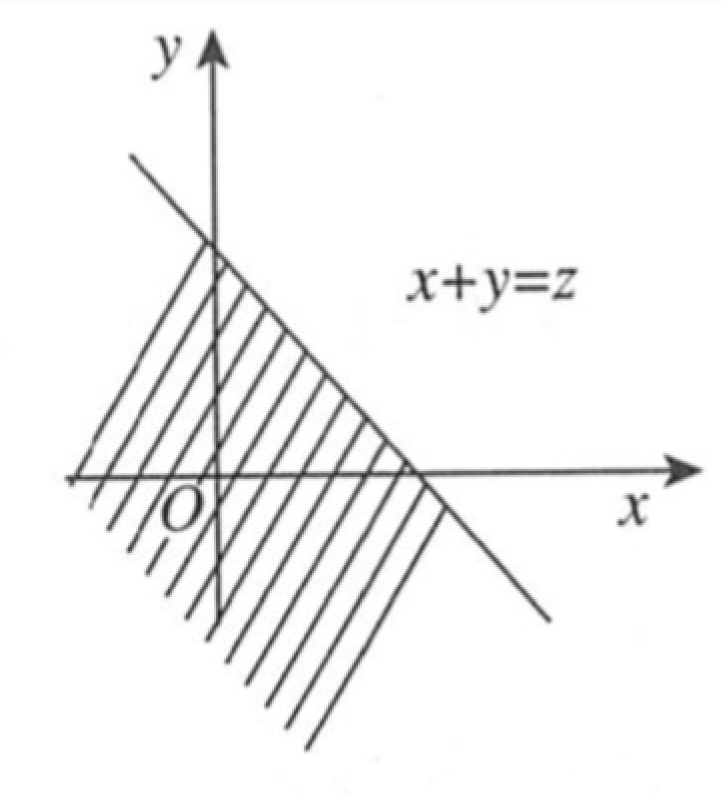
$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=P\{X=x_i\},\ P\{Y=y_j|X=x_i\}=P\{Y=y_j\}$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=f_X(x)(f_Y(y)>0),\ f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=f_Y(y)(f_X(x)>0)$$

定义 24.4.2 (连续型多维随机变量函数的分布)

$(X,Y)\sim f(x,y)$

(1). 和的分布



(a) $X+Y$

$Z=X+Y$

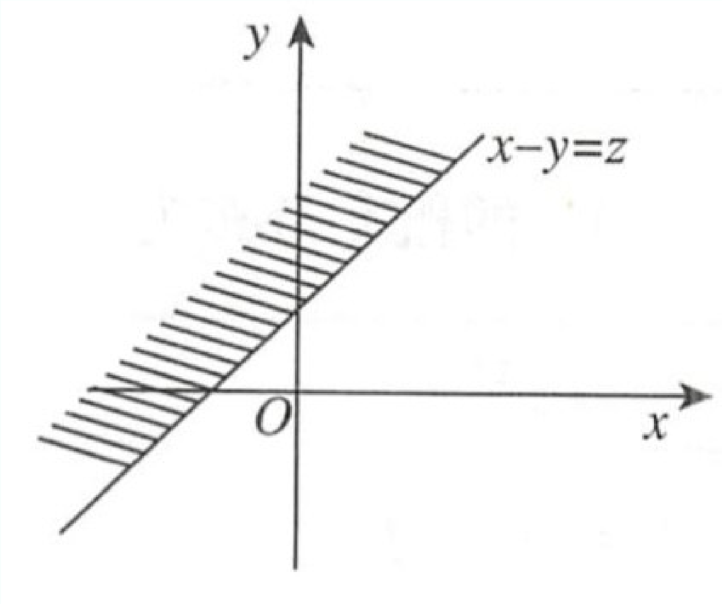
分布函数:

$$F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}=\iint\limits_{D_z:x+y\le z} f(x,y)d\sigma=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z-x}f(x,y)dy\\ \int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{z-y}f(x,y)dx\end{cases}$$

概率密度:

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)dy \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx \end{cases}$$

(2). 差的分布



(b) $X-Y$

$Z = X - Y$

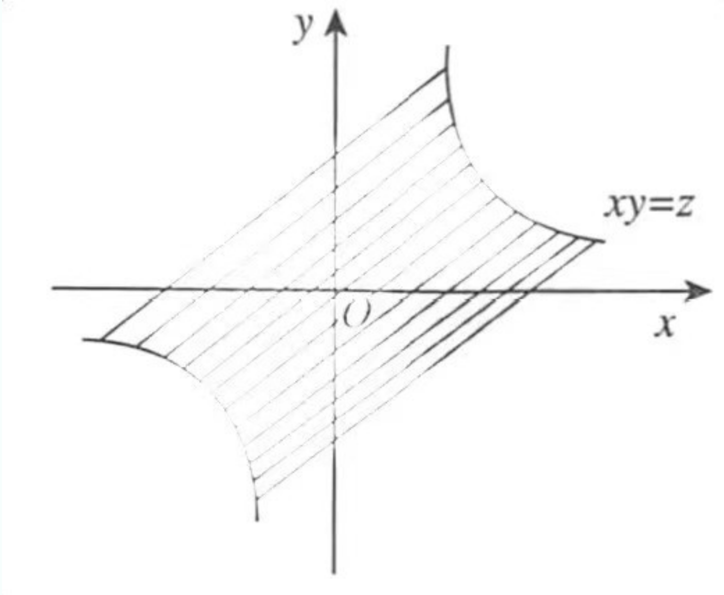
分布函数:

$$F_Z(z) = P\{X - Y \le z\} = \iint\limits_{D_z: x-y\le z} f(x, y)d\sigma = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{x-z}^{+\infty} f(x, y)dy \\ \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{y+z} f(x, y)dx \end{cases}$$

概率密度:

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z+y, y)dy \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, x-z)dx \end{cases}$$

(3). 积的分布



(c) XY

$Z=XY$

分布函数:

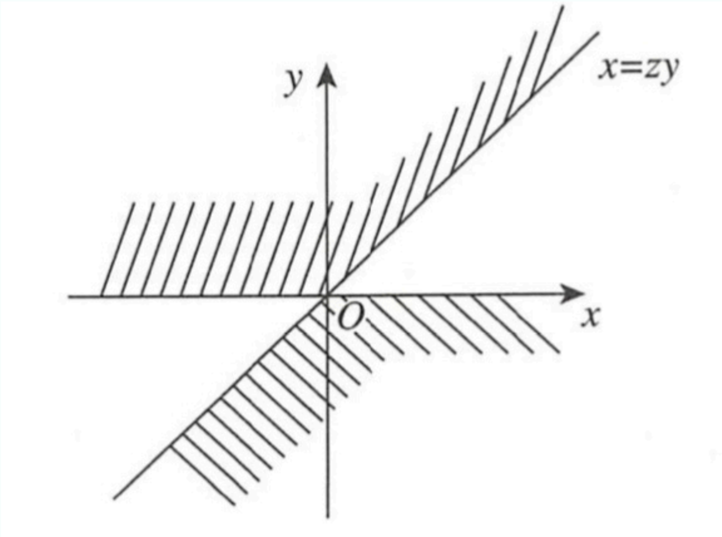
$$F_Z(z) = P\{XY \le z\} = \iint\limits_{D_z: xy\le z} f(x,y)d\sigma$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{0} dy \int_{\frac{z}{y}}^{+\infty} f(x,y)dx + \int_{0}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{\frac{z}{y}} f(x,y)dx \\ \int_{-\infty}^{0} dx \int_{\frac{z}{x}}^{+\infty} f(x,y)dy + \int_{0}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{\frac{z}{x}} f(x,y)dy \end{cases}$$

概率密度:

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{0} (-\frac{1}{y}) f(\frac{z}{y}, y)dy + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{y} f(\frac{z}{y}, y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|y|} f(\frac{z}{y}, y)dy \\ \int_{-\infty}^{0} (-\frac{1}{x}) f(x, \frac{z}{x})dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x} f(x, \frac{z}{x})dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f(x, \frac{z}{x})dx \end{cases}$$

(4). 商的分布



(d) $\frac{X}{Y}$

$Z=\dfrac{X}{Y}$
分布函数:

$$F_Z(z)=P\{\frac{X}{Y}\le z\}=\iint\limits_{D_z:\frac{X}{Y}\le z} f(x,y)d\sigma=\int_{-\infty}^{0}dy\int_{zy}^{+\infty}f(x,y)dx+\int_{0}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{zy}f(x,y)dx$$

概率密度:

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\int_{-\infty}^{0}(-y)f(zy,y)dy+\int_{0}^{+\infty}yf(zy,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(zy,y)dy$$

(5).$max\{X,Y\}$

$Z=max\{X,Y\}$
分布函数:

$$\begin{aligned} F_Z(z)=P\{Z\le max\{X,Y\}\} &= P\{X\le z\}\cup P\{Y\le z\}\\ &= P\{X\le z\}+P\{Y\le z\}-P\{X\le z,Y\le z\}\\ &= F_X(z)+F_Y(z)-F(z,z)\end{aligned}$$

概率密度:

$$f_Z=F_Z'(z)=f(z,z)$$

(6).$min\{X,Y\}$

$Z=min\{X,Y\}$
分布函数:

$$F_Z(z)=P\{Z\le min\{X,Y\}\}=P\{X\le z,Y\le z\}=F(z,z)\Rightarrow F_{max}(z)=F(z,z)$$

概率密度:

$$f_Z=F_Z'(z)=f_X(z)+f_Y(z)-f(z,z)$$

注

- n 个相互独立的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$,$Z_1 = max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$, $Z_2 = min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$,$Z_1, Z_2$ 的分布函数:

$$F_{max}(z) = F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)$$

$$F_{min}(z) = 1 - [1 - F_{Z_1}(z)][1 - F_{Z_2}(z)]\cdots[1 - F_{Z_n}(z)]$$

- $X_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 独立同分布, 我们有:

$$F_{max}(x) = [F(x)]^n,\ f_{max}(x) = n[F(x)]^{n-1}f(x)$$

$$F_{min}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n,\ f_{min}(x) = nf(x)[1 - F(x)]^{n-1}$$

表 24.2: 常见分布可加性

X	Y	$X+Y$
$B(n,p)$	$B(m,p)$	$B(n+m,p)$
$P(\lambda_1)$	$P(\lambda_2)$	$P(\lambda_1+\lambda_2)$
$N(\mu_1,\sigma_1^2)$	$N(\mu_2,\sigma_2^2)$	$N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$
$\chi^2(n)$	$\chi^2(m)$	$\chi^2(n+m)$

第 25 章 随机变量的数字特征

25.1 一维随机变量的数字特征

定义 25.1.1 (数学期望)

1. X 是离散型随机变量,X 的分布列为 $p_i = P\{X = x_i\}(i = 1, 2, \cdots, n)$, 如果级数 $\sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i$ 绝对收敛, 我们称随机变量 X 的数学期望存在, 并将其记作 $E(X)$.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i$$

2. X 是连续型随机变量,X 的概率密度为 $f(x)$, 如果积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ 绝对收敛, 我们称随机变量 X 的数学期望存在, 并将其记作 $E(X)$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

- a_i为常数,$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$
- $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$, $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$
- X与Y相互独立 $\Rightarrow$ $E(XY) = E(X)E(Y), E\left[g_1(X) \ldots g_2(Y)\right] = E\left[g_1(X)\right] \ldots E\left[g_2(Y)\right]$
- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 我们有:

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i),\ E\left[\prod_{i=1}^{n} g_i(X_i)\right] = \prod_{i=1}^{n} E\left[g_i(X_i)\right]$$

定义 25.1.2 (方差和标准差)

设 X 是随机变量, 如果 $E[(X-EX)^2]$ 存在, 我们将 $E[(X-EX)^2]$ 记作 X 的方差 $D(X)(DX)$:

$$D(X)=E[(X-EX)^2]=E(X^2)-[E(X)]^2$$

我们将 $\sqrt{D(X)}$ 称为随机变量的**标准差**或者**均方差**, 记作 $\sigma(X)$.

- $DX\geq 0,\ E(X^2)=DX+(EX)^2$
- $D(c)=0,\ c$为常数
- $D(aX+b)=a^2D(X),\ D(X+b)=D(X)$
- $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2Cov(X,Y)$
- $X^*=\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ 是 X 的标准化随机变量,$E(X^*)=0, D(X^*)=1$
- 如果X和Y相互独立, 我们得到

$$D(aX+bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)$$

- $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是相互独立, 我们有:

$$D\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2D(X_i)$$

$$D\left(\sum_{i=1}^{n}g_i(X_i)\right)=\sum_{i=1}^{n}D\left[g_i(X_i)\right]$$

定义 25.1.3 (切比雪夫不等式)

如果随机变量 X 的期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 都存在, 对任意 $\varepsilon>0$, 我们都有:

$$\boxed{P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}\text{或者}P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}}$$

注

25.2 二维随机变量的数字特征

定义 25.2.1 (数学期望)

设 X,Y 为随机变量,$g(X,Y)$ 为 X,Y 的函数 (g 是连续函数)

1. (X,Y) 是离散型随机变量, 联合分布为:

$$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}(i,j=1,2,\cdots)$$

级数 $\sum_i \sum_j g(x_i, y_j)p_{ij}$ 绝对收敛, 我们定义:

$$E[g(X,Y)] = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j)p_{ij}$$

2. (X,Y) 是连续型随机变量, 概率密度为 $f(x,y)$, 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy$ 绝对收敛, 我们定义:

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy$$

定义 25.2.2 (协方差与相关系数)

如果随机变量 X 与 Y 的方差存在且 $D(X) > 0, D(Y) > 0$, 我们定义随机变量 X,Y 的协方差 $Cov(X,Y)$:

$$Cov(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

其中 $E(XY)$:

$$E(XY) = \begin{cases} \sum_i \sum_j x_i y_i p_{ij}, & (X,Y)\text{是离散型随机变量} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy, & (X,Y)\text{是连续型随机变量} \end{cases}$$

我们将 $\rho_{XY} = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$ 定义为随机变量 X,Y 的**相关系数**.

- $\rho_{XY} = 0 \Rightarrow X,Y$不相关
- $\rho_{XY} \neq 0 \Rightarrow X,Y$相关
- 对称性 $Cov(X,Y) = Cov(Y,X),\ Cov(X,X) = D(X),\ \rho_{XX} = 1$
- 线性 $Cov(aX + b, Y) = aCov(X,Y),\ Cov(X_1 + X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$

表 25.1: 常用分布表

名称	概率分布	均值	方差	参数范围
两点分布	$P(X=k)=p^k q^{1-k}$ $(k=0,1)$	p	pq	$0<p<1$ $q=1-p$
二项分布 $B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^k p^x q^{n-k}$ $(x=0,1,\cdots,n)$	np	npq	$0<p<1$ $q=1-p$ $n\in N$
泊松分布 $P(\lambda)$	$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $(k=0,1,2,\cdots)$	λ	λ	$\lambda>0$
超几何分布 $H(n,N,M)$	$P(X=k)=\frac{C_{N-M}^{n-k}C_M^k}{C_N^n}$ $(k=0,1,\cdots min\{M,n\})$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{n(N-n)(N-M)M}{N^2(N-1)}$	$n,N,M\in N$ $n\le N,M\le N$
几何分布 $G(p)$	$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$ $(k=0,1,\cdots)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$0<p<1$ $q=1-p$
均匀分布 $U(a,b)$	$p(x)=\frac{1}{b-a}(a\le x\le b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^3}{12}$	$0<p<1$ $q=1-p$ $r\in\mathbb{R}$
指数分布 $E(\lambda)$	$p(x)=\lambda e^{-\lambda x}(x>0)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\lambda>0$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2	$\sigma>0$
Γ分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$	$p(x)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}(x>0)$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$\alpha>0$ $\beta>0$

第 26 章 大数定理和中心极限定理

26.1 依概率收敛

定义 26.1.1 (依概率收敛)

设随机变量 X 与随机变量序列 $\{X_n\}(n=1,2,3,\cdots)$, 如果对于任意 $\varepsilon>0$, 我们有:

$$\lim_{n\Rightarrow\infty} P\{|X_n-X|\geq\varepsilon\}=0\text{或者}\lim_{n\Rightarrow\infty} P\{|X_n-X|<\varepsilon\}=1$$

我们称随机变量序列 $\{X_n\}$ **依概率收敛于随机变量** X, 记作:

$$\lim_{n\Rightarrow\infty} X_n=X(P)\text{或者}X_n\xrightarrow{P}X(n\Rightarrow\infty)$$

26.2 大数定理

定理 26.2.1 (切比雪夫大数定理)

假设 $\{X_n\}(n=1,2,\cdots)$ 是相互独立的随机变量序列, 如果方差 $D(X_i)$ 存在且一致有上界, 即存在常数 $C,\forall i\geq 1,s.t.D(X_i)\leq C,\{X_n\}$ 服从大数定理.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$$

定理 26.2.2 (伯努利大数定理)

假设 μ_n 是 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数, 在每次试验中事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$, 则 $\frac{\mu_n}{n}\xrightarrow{P}p$.

$$\forall\varepsilon>0,\lim_{n\Rightarrow\infty} P\{|\frac{\mu_n}{n}-p|<\varepsilon\}=1$$

定理 26.2.3 (辛钦大数定理)

假设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，如果 $E(X_i) = \mu, (i = 1, 2, \cdots)$ 存在，则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \mu$.

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \Rightarrow \infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu| < \varepsilon\} = 1$$

26.3 中心极限定理

定理 26.3.1 (列维-林德伯格定理)

假设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，如果 $E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2 > 0, (i = 1, 2, \cdots)$ 存在,$\forall x \in \mathbb{R}$, 我们有:

$$\lim_{n \Rightarrow \infty} P\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

注

- 定理满足X_n独立同分布、方差和期望存在
- $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$
- $P\{a < \sum_{i=1}^{n} X_i < b\} \approx \Phi(\frac{b - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}) - \Phi(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n}\sigma})$

定理 26.3.2 (棣莫弗-拉普拉斯定理)

假设随机变量 $Y_n \sim B(n, p), (0 < p < 1, n \geq 1)$,$\forall x \in \mathbb{R}$, 我们有:

$$\lim_{n \Rightarrow \infty} P\{\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

这一部分的内容我推荐一个 B 站视频观看.

- 中心极限定理
- 正态分布

第 27 章 数理统计

27.1 总体和样本

定义 27.1.1 (统计概念和统计量)

1. **总体**: 研究对象的全体称为总体

2. **样本**: n 个相互独立且与总体具有相同概率分布的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 所组成的整体 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 称为来自总体 X, 容量为 n 的一个**简单随机样本**, 一次抽样结果的具体的 n 个数值 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的一个观测值.

3. **样本分布**

假设总体的分布函数 $F(x)$, 概率密度函数 $f(x)$, 样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数和概率密度:

$$\text{离散型: } P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i = x_i\}$$

$$\text{连续型分布函数: } F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i)$$

$$\text{连续型概率密度: } f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

27.2 统计量及其分布

定义 27.2.1

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本,$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 n 元函数, 如果函数 g 中不含任何参数, 我们称 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一个**统计量**.

1. **常用统计量**

(1). 数字特征

- **样本均值 (一阶原点矩)** $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
- **样本方差 (二阶中心矩)** $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_1 - \overline{X})^2$
- **样本** k阶原点矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, (k = 1, 2, \cdots)$
- **样本** k阶中心矩 $B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k, (k = 2, \cdots)$

(2). 顺序统计量

将样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的 n 个观测值从小到大顺序排序得到:

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)} \leq$$

随机变量 $X_{(k)}$ 称作第 k 顺序统计量,$X_{(1)}$ 为最小顺序统计量,$X_{(n)}$ 为最大顺序统计量.

注

假设总体期望 $E(X) = \mu$, 总体方差为 $D(X) = \sigma^2$,$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体的一个样本,$\overline{X}, S^2$ 分别为样本的均值和方差, 我们有:

1.$E(X_i) = \mu$

2.$D(X_i) = \sigma^2$

3.$E(\overline{X}) = E(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}) = E(X) = \mu$

4.$E(S^2) = D(X) = \sigma^2$

5.$D(\overline{X}) = \frac{1}{n}D(X) = \frac{\sigma^2}{n}$

定义 27.2.2 (三大分布)

1. χ^2 分布

随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 且都服从标准正态分布, 则随机变量 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 服从自由度为 n 的卡方分布 $\chi^2(n)$, 记作 $X \sim \chi^2(n)$.

α 分位点: 对于给定的$\alpha(0 < \alpha < 1)$, 满足

$$P\{\chi^2 > \chi_\alpha^2(n)\} = \int_{\chi_\alpha^2(n)}^{+\infty} f(x)dx$$

的 $\chi_\alpha^2(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 分布上的 α 分位点.

- $X_1 \sim \chi^2(n_1)$, $X_2 \sim \chi^2(n_2)$,X_1, X_2 相互独立, 我们有: $X_1 + X_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$
- $X \sim \chi^2(n) \Rightarrow E(X) = n, D(X) = 2n$

2. t 分布

设随机变量 $X \sim N(0,1)$,$Y \sim \chi^2(n)$,X, Y 相互独立, 记随机变量 $t = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布, 记作 $t \sim t(n)$

- $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$
- t 分布概率密度关于 x 轴对称

3. F 分布

设随机变量 $X \sim \chi^2(n_1)$,$Y \sim \chi^2(n_2)$, 且 X, Y 相互独立, 则 $F = \dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从自由度为 (n_1, n_2) 的 F 分布, 记作 $F \sim F(n_1, n_2)$.

- $F \sim F(n_1, n_2) \Rightarrow \dfrac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$
- $F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \dfrac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}$

♣

注

正态总体条件下常见结论:

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本,$\overline{X}, S^2$ 分别是样本的均值和方差.

1. $\overline{X} \sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow \dfrac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$
2. $\dfrac{1}{\sigma^2} \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$
3. $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum\limits_{i=1}^{n} (\dfrac{X_i - \overline{X}}{\sigma})^2 \sim \chi^2(n)$
4. $\overline{X}$ 和 S^2 相互独立,$\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1)$
5. σ未知时: $\dfrac{n(\overline{X} - \mu)^2}{S^2} \sim F(1, n-1)$

27.3 参数的点估计

定义 27.3.1 (矩估计和最大似然估计)

1. 概念

设总体 X 的分布函数 $F(x, \theta)$, 其中 θ 是一个未知参数,$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体的一个样本, 由样本构造一个适当的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 作为参数 θ 的估计, 称统计量为参数的估计量,$\theta = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$.

2. 矩估计法

设总体分布中有 k 个未知的参数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$, 来自总体 X 的一组样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$,

如果 X 的原点矩 $E(X^l)(l=1,2,\cdots,k)$ 存在, 我们令样本的原点矩 = 总体原点矩:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^l = E(X^l) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x^l f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)dx \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^l P\{X=x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\} \end{cases}$$

3. 最大似然估计法对未知参数 θ 进行估计, 在该参数可能的取值范围 I 中选取, 使用使样本观测值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 最大的参数 $\hat{\theta}$ 作为参数 θ 的估计值.

(1). 总体 X 是离散型分布, 分布函数的参数为 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$, 样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 出现取值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的概率为:

$$P\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$$

我们得到似然函数:

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)$$

$$\exists\hat{\theta}\in I,\ s.t. L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\hat{\theta}) = max_{\theta\in I}L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)$$

(2). 总体 X 是连续型分布, 概率密度为 $f(x;\theta),\theta \in I$, 样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 出现取值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的概率为:

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)$$

$$\exists\hat{\theta}\in I,\ s.t. L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\hat{\theta}) = max_{\theta\in I}L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)$$

我们得到了参数的最大似然估计 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

估计量的评判标准

1. 无偏性
2. 有效性 (最小方差性)
3. 一致性 (相和性)

27.4 参数的区间估计

定义 27.4.1 (概念)

设 θ 是总体 X 的一个未知参数, 对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$, 如果由样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 确定的两个统计量 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 满足:

$$P\{\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\theta<\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}=1-\alpha$$

则称随机区间 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 是 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的**置信区间**,$\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 分别称为**置信上限和置**

信下限,$1-\alpha$ 为置信水平,α 为显著性水平.

表 27.1: 正态总体均值的置信区间

待估参数	其他参数	枢轴量分布	置信区间
μ	σ^2已知	$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$
μ	σ^2未知	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$

27.5 假设检验

定义 27.5.1 (统计性检验)

1. H_0: 虚无假设, H_1: 备择假设
2. 双边检验和单侧检验
3. 正态总体下的六大检查和拒绝域
   - σ^2已知, μ未知, H_0: $\mu=\mu_0$, H_1: $\mu\neq\mu_0$
     $$\text{拒绝域}: (-\infty,\mu_0-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}})\cup(\mu_0+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},+\infty)$$
   - σ^2未知, μ未知, H_0: $\mu=\mu_0$, H_1: $\mu\neq\mu_0$
     $$\text{拒绝域}: (-\infty,\mu_0-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))\cup(\mu_0+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),+\infty)$$
   - σ^2已知, μ未知, H_0: $\mu\le\mu_0$, H_1: $\mu>\mu_0$
     $$\text{拒绝域}: (\mu_0+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},+\infty)$$
   - σ^2已知, μ未知, H_0: $\mu\ge\mu_0$, H_1: $\mu<\mu_0$
     $$\text{拒绝域}: (-\infty,\mu_0-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}})$$
   - σ^2未知, μ未知, H_0: $\mu\le\mu_0$, H_1: $\mu>\mu_0$
     $$\text{拒绝域}: (\mu_0+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),+\infty)$$
   - σ^2未知, μ未知, H_0: $\mu\ge\mu_0$, H_1: $\mu<\mu_0$
     $$\text{拒绝域}: (-\infty,\mu_0-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$$

第五部分

每日一题 I

第 5 部分目录

第 28 章 January

28.1 Week I

January 1

1. 已知 $f(x+1)$ 的定义域为 $[0,a]$,$(a>0)$, 求 $f(x)$ 定义域

解

$f(x+1)$ 的定义域为 $[0,a]$, 则 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,a-1]$

2. 已知 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 并求出定义域

解

由题意得: $f[\varphi(x)]=1-x \Rightarrow e^{\varphi^2(x)}=1-x$, 因此: $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}, x\geq 1$

3. 设

$$g(x)=\begin{cases}2-x, x\leq 0\\ x+2, x>0\end{cases}$$

,

$$f(x)=\begin{cases}x^2, x<0\\ -x, x\geq 0\end{cases}$$

求 $g[f(x)]$

解

由题意得:

$$g[f(x)]=\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ x+2, & x\geq 0\end{cases}$$

4. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}1-2x^2, x<-1\\ x^3, -1\leq x\leq 2\\ 12x-16, x>2\end{cases}$$

求 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式

解

$$g(x)=\begin{cases}-\sqrt{\frac{1-x}{2}}, & x\in(-\infty,-1)\\ \sqrt[3]{x}, & x\in[-1,8]\\ \frac{x+16}{12}, & x\in(8,+\infty)\end{cases}$$

5. 证明: 定义在 $[-a,a]$ 上的任意一个函数 $f(x)$ 都可以表示为一个奇函数和一个偶函数之和

解

令 $g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$, 我们有:

$$\begin{cases}g(-x)=\dfrac{f(-x)+f(x)}{2}=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}=g(x)\\ h(-x)=\dfrac{f(-x)-f(x)}{2}=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}=-h(x)\\ f(x)=g(x)+h(x)\end{cases}$$

其中 $g(x)$ 是偶函数, $h(x)$ 是奇函数

6. 判断函数 $f(x)=x\tan x\cdot e^{\sin x}$ 的奇偶性、单调性、周期性和有界性

解

$f(x)$ 定义域为 $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi), k\in\mathbb{Z}$, 关于原点对称

(1). 奇偶性: $f(-x)=x\tan x\cdot e^{-\sin x}\neq -f(x),\quad f(-x)\neq f(x)$

$f(x)$ 是非奇非偶函数

(2). 单调性: $f'(x)=\tan x\cdot e^{\sin x}+x\sec^2 x\cdot e^{\sin x}+x\tan x\cos x\cdot e^{\sin x}=e^{\sin x}\left[\tan x+x\sin x+x\sec^2 x\right]$

$f(x)$ 不是单调函数

(3). 有界性: $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 时, $f(x)>\frac{x\tan x}{e}$, 函数 $g(x)=\frac{x\tan x}{e}$ 为无界函数

$f(x)$ 是无界函数

(4). 周期性: $f(x+2\pi)=(x+2\pi)\tan(x+2\pi)\cdot e^{\sin(x+2\pi)}=(x+2\pi)\tan x\cdot e^{\sin x}\neq f(x)$

$f(x)$ 不是周期函数

7. 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界

- A. $(-1,0)$
- B. $(0,1)$
- C. $(1,2)$
- D. $(2,3)$

解

(1). $x\to 0^-, f(x)\to -\frac{\sin 2}{4}, x\to 0^+, f(x)\to \frac{\sin 2}{4}$

(2). $x\to 1^-, f(x)\to +\infty, x\to 1^+, f(x)\to -\infty$

(3). $x\to 2^-, f(x)\to -\infty, x\to 2^+, f(x)\to \infty$

$f(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 有界

8. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned}
I&=\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{(n-1)n}{2}}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n-1)}{2}\right]}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}+\sqrt{\frac{(n-1)n}{2}}}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{2}n}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

9. 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2(4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})}+x(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(1+\frac{\sin x}{x^2})}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}} \\
&=1
\end{aligned}
$$

10. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I^+ &= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right) \\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} \\
&=0+1=1 \\
I^- &= \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right) \\
&= \lim_{x\to 0^-}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x} \\
&=2-1=1
\end{aligned}
$$

综上所述, 原极限 $I=1$

January 2

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-(x^2-x)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\\
&=1
\end{aligned}
$$

2. 求极限 $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}\cdot\frac{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{1+\tan x-1-\sin x}{x(1-\cos x)\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x(1-\cos x)\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{\frac{1}{2}x^3\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}\\
&=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

3. 已知 $\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos 2x}{ax^b}=1$, 求 a,b

解 利用泰勒展开式:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos 2x}{ax^b} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1+x^2+\frac{x^4}{2}-1+\frac{4x^2}{2!}-\frac{8x^4}{4!}}{ax^b} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{3x^2-\frac{x^4}{6}}{ax^b} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{3}{a}=1
\end{aligned}
$$

因此我们有: $a=3, b=2$

4. 已知 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$, 下列结论正确的个数为

- A. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$
- B. $\lim\limits_{x\to x_0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi}}=e$
- C. 当 $x\to x_0$ 时,$\sin\varphi(x)\sim\varphi(x)$
- D. 若 $\lim\limits_{u\to 0}f(u)=A$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=A$

解

正确的个数: 0, 令 $\varphi(x)=0, x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$, A,B,C,D 四个选项均不正确

5. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\arctan x}{\sin x-\tan x}$

解 原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\arctan x}{\sin x-\tan x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{-\frac{1}{2}x^3} \\
&= -1
\end{aligned}
$$

6. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{x}{\ln(1+x)}}{x}$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{x}{\ln(1+x)}}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

7. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}}\\
&= \lim_{x\to+\infty} e^{x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})}\\
&= \lim_{x\to+\infty} e^{x-x^2(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2})}\\
&= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{2}}\\
&= e^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

8. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos(\sin x)}{x^4}$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)}{x^4}(\text{Lagrange's Mean Value Theorem})\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin\xi(x-\sin x)}{x^4}, \xi\in(\sin x\sim x)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin\xi}{6x}\\
&= -\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

我们由夹逼定理: $\sin\xi\in(\sin x\sim x)\to\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\xi}{x}=1$

9. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned}I=&\lim_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+1)-\arctan x](\text{Lagrange's Mean Value Theorem})\\=&\lim_{x\to+\infty}x^2\frac{1}{1+\xi^2},\xi\in(x,x+1)\\=&1\end{aligned}$$

我们由夹逼定理: $\xi\in(x,x+1)\to\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+(x^2)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+(x+1)^2}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+\xi^2}=1$

10. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2[\arctan\dfrac{a}{n}-\arctan\dfrac{a}{n+1}]$

解

由归结原理, 原极限等价于:

$$\begin{aligned}I=&\lim_{x\to\infty}x^2[\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1}](\text{Lagrange's Mean Value Theorem})\\=&\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2}{x(x+1)}\frac{1}{1+\xi^2},\xi\in(\frac{a}{x},\frac{a}{x+1})\\=&a\end{aligned}$$

我们由夹逼定理: $\xi\in(\dfrac{a}{x},\dfrac{a}{x+1})\to\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a}{x+1}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\xi=0$

January 3

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}]$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned}I=&\lim_{x\to+\infty}[\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}](\text{Lagrange's Mean Value Theorem})\\=&\lim_{x\to+\infty}\cos\xi(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}),\xi\in(\sqrt{x},\sqrt{x+1})\\=&\lim_{x\to+\infty}\cos\xi(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}})\\=&0\end{aligned}$$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}[\dfrac{1}{\ln(1+x^2)}-\dfrac{1}{\ln(1+\tan^2x)}]$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x^2)} - \frac{1}{\ln(1+\tan^2 x)}\right] \\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+\tan^2 x)-\ln(1+x^2)}{\ln(1+x^2)\ln(1+\tan^2 x)}\right](\text{Lagrange's Mean Value Theorem}) \\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{(\tan x+x)(\tan x-x)}{x^4\xi}\right], \xi\in(1+x^2, 1+\tan^2 x) \\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{2x\cdot\frac{x^3}{3}}{x^4}\right] \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

我们由夹逼定理: $\xi\in(1+x^2, 1+\tan^2 x) \to \lim\limits_{x\to 0}(1+x^2) = \lim\limits_{x\to 0}(1+\tan^2 x) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\xi = 1$

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x^2)} - \frac{1}{\sin^2 x}\right]$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x^2)} - \frac{1}{\sin^2 x}\right] \\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin^2 x-\ln(1+x^2)}{\ln(1+x^2)\sin^2 x}\right] \\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin^2 x - x^2 + x^2 - \ln(1+x^2)}{x^4}\right] \\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin^2 x - x^2}{x^4}\right] + \lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2-\ln(1+x^2)}{x^4}\right] \\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{(\sin x+x)(\sin x-x)}{x^4}\right] + \lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{1}{2}x^4}{x^4}\right] \\
&= \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0}\left[\frac{-2x\cdot\frac{1}{6}x^3}{x^4}\right] \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

我们由夹逼定理: $\xi\in(1+\sin^2 x, 1+x^2) \to \lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 x) = \lim\limits_{x\to 0}(1+x^2) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\xi = 1$

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}} \\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{2\ln(x+2^x)}{x}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln(x+2^x)}{x}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(x+2^x-1)}{x}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln 2x}{x}} \\
&= e^{2+2\ln 2} \\
&= 4e^2
\end{aligned}
$$

5. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}} = e$, 求 k

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}} \\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{\sin kx}\ln\frac{1-\tan x}{1+\tan x}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin kx}\ln(1-\frac{2\tan x}{1+\tan x})} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}-\frac{2\tan x}{(1+\tan x)sinkx}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}-\frac{2x}{kx}} \\
&= e^{-\frac{2}{k}} = e
\end{aligned}
$$

综上所述, $k = -2$

6. 若 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x + ax^2 + bx)^{\frac{1}{x^2}} = 1$, 求 a, b

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}(e^x + ax^2 + bx)^{\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln(e^x+ax^2+bx)} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+ax^2+bx-1}{x^2}} \qquad \text{(Taylor's Formula)} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(a+\frac{1}{2})x^2+(b+1)x+o(x^2)}{x^2}} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

综上所述, $a = -\dfrac{1}{2}, b = -1$

7. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} \\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\arctan x}{x}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\arctan x}{x}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\ln(1+\frac{\arctan x - x}{x})} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\frac{\arctan x - x}{x}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}-\frac{2x^3}{3x^3}} \\
&= e^{-\frac{2}{3}}
\end{aligned}
$$

8. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n\tan\frac{1}{n})^{n^2}$

解

由归结原理, 原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to\infty}(x\tan\frac{1}{x})^{x^2}\\
&= \lim_{x\to\infty} e^{x^2\ln(x\tan\frac{1}{x})}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to\infty} x^2\ln(x\tan\frac{1}{x})}\\
&= e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(\frac{\tan t}{t})}{t^2}}\\
&= e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{2\tan t}{(1-\tan t)t}}\\
&= e^2
\end{aligned}
$$

9. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$

解

由归结原理, 原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to\infty} e^{x\ln(\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}))}\\
&= \lim_{x\to\infty} e^{x\ln(\frac{1+\tan(\frac{1}{x})}{1-\tan(\frac{1}{x})})}\\
&= \lim_{t\to 0} e^{\frac{1+\tan t}{t(1-\tan t)}}\\
&= e^2
\end{aligned}
$$

10. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x(e^x-1)}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}\\
&= e^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

January 4

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0} e^{\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}} \\
&= e^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x + 2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0} e^{\dfrac{2x\sin x+\cos 2x-1}{x^4}} \quad \text{(Taylor's Formula)} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x(x-\frac{x^3}{6})-2x^2+\frac{2}{3}x^4}{x^4}} \\
&= e^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}
$$

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{\dfrac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{\cos x(1-\tan x)}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{\cos x}} \\
&= e^{-\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$

解

5. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^n}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\right)^{x}$

解

6. 求极限 $\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$

解

7. 求极限 $\lim_{n\to\infty} n\left[e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}-1\right]$

解

8. 设 $a>0, a\neq 1$, 且 $\lim_{x\to+\infty} x^{p}(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})=\ln a$, 求 p

解

9. 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{\cos x})(1-\sqrt[3]{\cos x})\cdots(1-\sqrt[n]{\cos x})}{(1-\cos x)^{n-1}}$

解

10. 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin^2 x+e^{x})-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$

解

January 5

1. 已知极限 $\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^{k}}=c$, 其中 k, c 为常数, 且 $c\neq 0$, 求 k, c

2. 若 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x^4}{x^4}-\frac{f(x)}{x^3}\right)=2$, 则当 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 是 x 的:

- A. 等价无穷小
- B. 同阶但非等价无穷小
- C. 高阶无穷小
- D. 低阶无穷小

3. 当 $x\to 0$ 时,$\alpha(x)=k^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 时等价无穷小, 求 k

4. 当 $x\to 0^{+}$ 时, 与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量为:

- A. $1-e^{\sqrt{x}}$
- B. $\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$
- C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$

- D. $1-\cos\sqrt{x}$

5. 设 $\alpha_1 = x(\cos\sqrt{x}-1), \alpha_2 = \sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x}), \alpha_3 = \sqrt[3]{x+1}-1$, 当 $x \to 0^+$ 时, 以上 3 个无穷小量从低阶到高阶的排序为:

- A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
- B. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$
- C. $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3$
- D. $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$

6. 函数 $f(x) = \dfrac{(e^{\frac{1}{x}+e})\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的第一类间断点是:

- A. 0
- B. 1
- C. $-\dfrac{\pi}{2}$
- D. $\dfrac{\pi}{2}$

7. 设函数 $f(x) = \dfrac{\ln |x}{|x-1|}\sin x$, 则 $f(x)$ 有

- A. 1 个可去间断点,1 个跳跃间断点
- B. 1 个可去间断点,1 个无穷间断点
- C. 2 个跳跃间断点
- D. 2 个无穷间断点

8. 函数 $f(x) = \dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为:

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

9. 函数 $f(x) = \dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为:

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

10. 设函数 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$, 讨论函数的间断点, 其结论为:

- A. 不存在间断点
- B. 存在间断点 $x=1$

- C. 存在间断点 $x=0$
- D. 存在间断点 $x=-1$

January 6

1. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{h\to 0}\frac{f(h^2)}{h^2}=1$, 则:
- A. $f(0)=0$ 且 $f'_{-}(0)$ 存在
- B. $f(0)=1$ 且 $f'_{-}(0)$ 存在
- C. $f(0)=0$ 且 $f'_{+}(0)$ 存在
- D. $f(0)=0$ 且 $f'_{+}(0)$ 存在

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内有定义, 若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时, 恒有 $|f(x)|\le x^2$, 则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的:
- A. 间断点
- B. 连续而不可导的点
- C. 可导的点, 且 $f'(0)=0$
- D. 可导的点, 且 $f'(0)\neq 0$

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\cos\frac{1}{x^{\beta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ $(\alpha>0,\beta>0)$, 若 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则:
- A. $\alpha-\beta>1$
- B. $0<\alpha-\beta\le 1$
- C. $\alpha-\beta>2$
- D. $0<\alpha-\beta\le 2$

4. 曲线 $x+y+e^{2xy}=0$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线方程

5. (1). 设函数 $u(x),v(x)$ 可导, 利用导数定义证明:$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$
(2). 设函数 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$ 可导,$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$, 写出 $f(x)$ 的求导公式

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, x\ge 1\\ 2x-1, x<1\end{cases}$,$y=f(f(x))$, 则 $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$

7. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $xy+e^y=x+1$ 确定的隐函数, 则 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}$

8. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t - \ln(1+t) \\ y = t^3 + t^2 \end{cases}$ 所确定, 则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

9. 设 $y = x^2 2^x$, 求 $y^{(n)}$

10. 设 $y = \dfrac{1}{x^2-1}$, 求 $y^{(n)}$

January 7

1. 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数, 且 $f'(x) = [f(x)]^2$, 则当 n 为大于 2 的正整数时,$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是:

- A. $n![f(x)]^{n+1}$
- B. $n[f(x)]^{n+1}$
- C. $[f(x)^{2n}]$
- D. $n![f(x)]^{2n}$

2. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且对任意 x_1, x_2, 当 $x_1 > x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则:

- A. 对任意 $x, f'(x) > 0$
- B. 对任意 $x, f'(-x) \leq 0$
- C. 函数 $f(-x)$ 单调增加
- D. 函数 $-f(-x)$ 单调增加

3. 设 $f(x), g(x)$ 是恒大于零的可导函数, 且 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$, 当 $a < x < b$ 时, 有:

- A. $f(x)g(b) > f(b)g(x)$
- B. $f(x)g(a) > f(a)g(x)$
- C. $f(x)g(x) > f(b)g(b)$
- D. $f(x)g(x) > f(a)g(a)$

4. 设 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = -1$, 其中 n 为大于 1 的整数, 则在点 $x = a$ 处:

- A. $f(x)$ 的导数存在, 且 $f'(a) \neq 0$
- B. $f(x)$ 取得极大值
- C. $f(x)$ 取得极小值
- D. $f(x)$ 是否取得极值与 n 的取值有关

5. 设 $f(x)$ 的导数在 $x = a$ 处连续, 又 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{x-a} = -1$, 则:

- A. $x = a$ 是 $f(x)$ 的极小值点
- B. $x = a$ 是 $f(x)$ 的极大值点

- C. $(a, f(a))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
- D. $x = a$ 不是 $f(x)$ 的极值点,$(a, f(a))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

6. 曲线 $y = (x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为:

7. 已知函数 $y = f(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$, 若 $f'(x_0) = 0(x_0 \neq 0)$, 则:

- A. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
- B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
- C. $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
- D. $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,$(x_0, f(x_0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

8. 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$ 且 $f'(0) = 0$, 则:

- A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
- B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
- C. $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
- D. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,$(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

9. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 其导函数图形如图所示, 则:

- A. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点
- B. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 3 个拐点
- C. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 1 个拐点
- D. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点

10. 曲线 $y = x\ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)(x > 0)$ 的渐近线方程为:

28.2 Week II

January 8

1. 曲线 $y = \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 渐近线的条数为:

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

2. 设函数 $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$, 求

(1). 函数的增减区间及极值

(2). 函数图像的凹凸区间及拐点

(3). 渐近线

(4). 作出其图形

3. 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内, 方程 $|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x=0$:

- A. 无实根
- B. 有且仅有一个实根
- C. 有且仅有两个实根
- D. 有无穷多个实根

4. 函数 $f(x)=\ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为:

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

5. 设 $f(x)=x^2(1-x)^2$, 则方程 $f''(x)=0$ 在 $(0,1)$ 上:

- A. 无实根
- B. 有且仅有一个实根
- C. 有且仅有两个实根
- D. 有且仅有三个实根

6. 设常数 $k>0$, 设函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点个数为:

- A. 3
- B. 2
- C. 1
- D. 0

7. 证明: 当 $x>0$ 时, 有不等式 $\ln(1+\dfrac{1}{x})>\dfrac{1}{1+x}$

8. 证明: 当 $x>0$ 时, 有不等式 $\arctan x+\dfrac{1}{x}>\dfrac{\pi}{2}$

9. 设 p,q 是大于 1 的常数, 并且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 证明: 对于任意的 $x>0$, 有 $\dfrac{1}{p}x^p+\dfrac{1}{q}\geq x$

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续, 在 $(0,3)$ 内可导, 且 $f(0)+f(1)+f(2)=3, f(3)=1$, 试证明: 必存在 $\xi\in(0,3), s.t.\ f'(\xi)=0$

January 8

1. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有二阶导数, 且 $f(a)=f(b)=0, f'(a)f'(b)>0$, 试证明: 存在 $\xi\in(a,b)$ 和 $\eta\in(a,b)$,$s.t.\ f(\xi)=0$ 且 $f''(\eta)=0$

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a)=f(b)=0$, 试证明:

(1). $\exists\xi\in(a,b), s.t.\ f'(\xi)+f(\xi)=0$

(2). $\exists\eta\in(a,b), s.t.\ f'(\eta)-f(\eta)=0$

(3). $\exists\zeta\in(a,b), s.t.\ f'(\zeta)+\lambda f(\zeta)=0$

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(1)=0$, 试证明:$\exists\xi\in(0,1), s.t.\ \xi f'(\xi)=-f(\xi)$

4. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=\dfrac{1}{3}$, 证明: 存在 $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right), \eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right), s.t.\ f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$

5. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 a,b 同号, 证明: 存在 $\xi,\eta\in(a,b), s.t.\ abf'(\xi)=\eta^2 f'(\eta)$

6. 求下列的不定积分

(1). $\int\dfrac{1}{\cos x}dx$

(2). $\int\dfrac{1}{\sin x}dx$

7. 求下列的不定积分

(1). $\int\dfrac{x+1}{x(1+xe^x)}dx$

(2). $\int(1+\ln x)(\ln x+\ln\ln x)dx$

8. 求下列的不定积分

(1). $\int\dfrac{1+1}{1+x^3}dx$

(2). $\int\dfrac{1-x}{1+x^3}dx$

9. 求下列的不定积分

(1). $\int\dfrac{dx}{1+x^3}$

(2). $\int \frac{x}{1+x^3}dx$

10. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2 x$, 求 $\int xf'(x)dx$

January 9

1. 设 $f(\ln x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$, 求 $\int f(x)dx$

2. 计算不定积分 $\int \max(1,x^2)dx$

3. 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 xdx, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx, P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$, 则有:

- A. $N<P<M$
- B. $M<P<N$
- C. $N<M<P$
- D. $P<M<N$

4. 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx, K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx$, 则有:

- A. $M>N>K$
- B. $M>K>N$
- C. $K>M>N$
- D. $K>N>M$

5. 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}dx, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}dx$, 则:

- A. $I_1>I_2>1$
- B. $1>I_1>I_2$
- C. $I_2>I_1>1$
- D. $1>I_2>I_1$

6. 求定积分 $\int_{-2}^{2}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}]dx$

7. 求定积分 $\int_{-\pi}^{\pi}|x|[x^3+\sin^2 x]\cos^2 xdx$

8. 求定积分 $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx$

9. 求定积分 $\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$

10. 求定积分 $\int_0^1 \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$

January 10

1. 求定积分 $\int_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$

2. 已知函数 $f(x)=\int_1^x \sqrt{1+t^4}dt$, 则 $\int_0^1 x^2 f(x)dx$

3. 已知 $f(x)$ 连续,$\int_0^x tf(x-t)dt = 1-\cos x$, 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

4. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, 0\le x\le 1 \\ 2-x, 1<x\le 2 \end{cases}$, 记 $F(x)=\int_0^x f(t)dt(0\le x\le 2)$, 则有:

- A. $F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}, 0\le x\le 1 \\ 2x-\dfrac{x^2}{2}, 1<x\le 2 \end{cases}$
- B. $F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}, 0\le x\le 1 \\ \dfrac{1}{3}+2x-\dfrac{x^2}{2}, 1<x\le 2 \end{cases}$
- C. $F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}, 0\le x\le 1 \\ -\dfrac{7}{6}+2x-\dfrac{x^2}{2}, 1<x\le 2 \end{cases}$
- D. $F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}, 0\le x\le 1 \\ \dfrac{x^3}{3}+2x-\dfrac{x^2}{2}, 1<x\le 2 \end{cases}$

5. 设 $x\ge -1$, 求 $\int_{-1}^x (1-|t|)dt$

6. 设 $x=x(t)$ 由方程 $\sin t - \int_1^{x-t} e^{-u^2}du = 0$ 所确定, 试求 $\dfrac{d^2x}{dt^2}|_{t=0}$

7. 设函数 $f(x)=\int_0^1 |t(t-x)|dt(0<x<1)$, 求 $f(x)$ 的极值、单调区间及曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间

8. 下列反常积分中发散的是:

- A. $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$
- B. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$
- C. $\int_0^{+\infty} \dfrac{\arctan x}{1+x^2}dx$

- D. $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$

9. 求 $I=\int_5^{+\infty}\frac{dx}{x^2-4x+3}$

10. 求 $I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^{1+x}+e^{3-x}}$

January 11

1. 求 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}dx$

2. 已知抛物线通过 x 轴上的两点 $A(1,0),B(3,0)$
(1). 求证: 两坐标轴与该抛物线所围图形的面积等于 x 轴与该抛物线所围图形的面积
(2). 计算上述两平面图形绕 x 轴旋转一周所产生的两个旋转体体积之比

3. 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ 所围图形的面积

4. 已知平面区域 $D=\{(x,y)|0\le y\le\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}},x\ge 1\}$
(1). 求 D 的面积 (2). 求 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积

5. 某水库的闸门形状为等腰梯形, 它的两条底边各长 $10m$ 和 $6m$, 高为 $20m$, 较长的底边与水面相齐, 求闸门的一侧所受水的压力

6. 一个半径为 $R(m)$ 的球形贮水箱盛满了水, 如果把箱中的水从顶部全部抽出, 需要作的功

7. 方程 $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$ 的通解

8. 方程 $y'=1+x+y^2+xy^2$ 的通解

9. 方程 $(y+\sqrt{x^2+y^2})dx-xdy=0$ 满足条件 $y|_{x=1}=0$ 的特解

10. 方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+y^4}$ 的通解

January 12

1. 求不定积分 $\int\frac{x\ln x+x\ln^2 x}{2+x\ln x}dx$

2. 求不定积分 $\int \frac{\sin 2x \sin^2 x}{2+\cos^4 x}dx$

3. 求不定积分 $\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

4. 求不定积分 $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x(1+\sin^2 x)}dx$

5. 求不定积分 $\int \frac{1}{\cos^3 x}dx$

6. 求不定积分 $\int \frac{2+x}{(1+x^2)^2}dx$

7. 求不定积分 $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}dx$

8. 求不定积分 $\int e^x \arcsin\sqrt{1-e^{2x}}dx$

9. 已知 $f(\ln x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$, 求 $\int f(x)dx$

10. 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\cos^2 x dx$

January 13

1. 求定积分 $\int_0^{\pi^2} \sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx$

2. 求定积分 $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}dx$

3. 求定积分 $\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}dx$

4. 求定积分 $\int_1^2 (x-1)^2(x-2)^2dx$

5. 求定积分 $\int_{-2}^2 x\ln(1+e^x)dx$

6. 设 D 是由曲线 $xy+1=0$ 与直线 $y+x=0$ 及 $y=2$ 围成的有界区域, 求 D 的面积

7. 设 D 是由曲线 $y=x^2$ 与 $y=x$ 围成的有界区域, 求区域 D 分别绕直线 $y=0, x=0, x=1, x=2$ 旋转所得旋转体的体积

8. 方程 $y''+4y'+4y=e^{-2x}$ 满足条件 $y(0)=1, y'(0)=0$ 的特解

9. 具有特解 $y_1=e^{-x}, y_2=2xe^{-x}, y_3=3e^{x}$ 的三阶常系数线性齐次方程为:
- A. $y'''-y''-y'+y=0$
- B. $y'''+y''-y'-y=0$
- C. $y'''-6y''+11y'-6y=0$
- D. $y'''-2y''-y'+2y=0$

10. 方程 $y''-2y'=xe^{2x}$ 的特解形式为:
- A. $y=axe^{2x}$
- B. $y=(ax+b)e^{2x}$
- C. $y=x(ax+b)e^{2x}$
- D. $y=x^2(ax+b)e^{2x}$

January 14

1. 方程 $y''+y=e^x+1+\sin x$ 的特解形式为:
- A. $ae^x+b+c\sin x$
- B. $ae^x+b+c\cos x+d\sin x$
- C. $ae^x+b+x(c\cos x+d\sin x)$
- D. $y=ae^x+b+cx\sin x$

2. 设函数 $f(x)$ 具有一阶连续导数, 且满足 $f(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f'(t)dt+x^2$, 求 $f(x)$ 表达式

3. 设 L 是一条平面曲线, 其上任意一点 $P(x,y)(x>0)$ 到坐标原点的距离恒等于该点处切线在 y 轴上的截距, 且 L 经过 $(\frac{1}{2},0)$, 求曲线 L 的渐近线方程为

4. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处:
- A. 不连续
- B. 两个偏导数都不存在
- C. 偏导数存在但不可微
- D. 可微

5. 二元函数 $f(x)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f_x'(x_0,y_0), f_y'(x_0,y_0)$ 存在, 是 $f(x)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续的:
- A. 充分不必要条件

- B. 必要不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 不充分不必要条件

6. 已知 $f(x,y)=\sin\sqrt{x^4+y^4}$, 则:

- A. $f_x'(0,0), f_y'(0,0)$ 都存在
- B. $f_x'(0,0)$ 不存在, $f_y'(0,0)$ 存在
- C. $f_x'(0,0)$ 存在, $f_y'(0,0)$ 不存在
- D. $f_x'(0,0), f_y'(0,0)$ 都不存在

7. 设 $f(x,y)=\dfrac{2x+y^2}{1+y^2\sqrt{1+x^2+y^2}}$, 则 $df(0,0)$

8. 已知 $dF(x,y)=xye^x dx+(f(x)+y^2)dy$, 且 $f(x)$ 有连续一阶导数, $f(x)=0$, 求 $F(x,y)$

9. 设函数 $f(x,y)$ 可微, 且对于任意 x,y 都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0, \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$, 则下列结论正确的是:

- A. $f(1,1)>f(0,0)$
- B. $f(-1,1)>f(0,0)$
- C. $f(-1,-1)>f(0,0)$
- D. $f(1,-1)>f(0,0)$

10. 设 $z=(x+e^y)^x$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}_{(1,0)}$

January 15

1. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z+y\ln z-\arctan(2xy)=1$ 确定, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}_{(0,2)}$

2. 设 $f(x,y,z)=e^x+y^2z$, 其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x+y+z+xyz=0$ 所确定的隐函数, 求 $f_x'(0,1,-1)$

3. 设 $z=xyf(\dfrac{y}{x})$, 其中 $f(u)$ 可导, 求 $xz_x'+yz_y'$

4. 设 $z=e^{xy}+f(x+y,xy)$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, 其中 $f(u,v)$ 有二阶连续偏导数

5. 已知 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取得极小值, 则:

- A. $f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)=0$
- B. $f_{xx}''(x_0,y_0)f_{yy}''(x_0,y_0)-(f_{xy}''(x_0,y_0))^2>0$, 且 $f_{xx}''(x_0,y_0)>0$

- C. $f(x_0,y)$ 在 y_0 处取得极大值
- D. $f(x,y_0)$ 在 x_0 处取得极小值

6. 设函数 $f(x),g(x)$ 均有二阶连续导数, 满足 $f(0)>0,g(0)<0$, 且 $f'(0)=g'(0)=0$, 则函数 $z=f(x)g(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是:
- A. $f''(0)<0,g''(0)>0$
- B. $f''(0)<0,g''(0)<0$
- C. $f''(0)>0,g''(0)>0$
- D. $f''(0)>0,g''(0)<0$

7. 已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $dz=(ay-x^2)dx+(ax-y^2)dy,(a>0)$, 则函数 $f(x,y)$:
- A. 无极值点
- B. 点 (a,a) 为极小值点
- C. 点 (a,a) 为极大值点
- D. 是否有极值点与 a 的取值有关

8. 设函数 $z=f(xy,yg(x))$, 其中 f 函数具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}|_{(1,1)}$

9. 求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值

10. 求 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)|x^2+\dfrac{y^2}{4}\le 1\right\}$ 上的最大值和最小值

January 16

1. 交换二次积分的积分次序 $(a>0)$

(1). $\int_0^2 dx\int_{\frac{x^2}{4}}^{3-x} f(x,y)dy$

(2). $\int_0^a dy\int_0^{\sqrt{ay}} f(x,y)dx+\int_a^{2a} dy\int_0^{2a-y} dx$

2. 设 $f(x)$ 是连续函数, 则 $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$ 等价于:
- A. $\int_0^1 dx\int_0^{x-1} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$
- B. $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)dy$
- C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$
- D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

3. 设函数 $f(t)$ 连续, 则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{2\cos\theta}^2 f(r^2)rdr$

- A. $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} f(x^2+y^2) dy$
- B. $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2+y^2) dy$
- C. $\int_0^2 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{x^2+y^2} f(x^2+y^2) dx$
- D. $\int_0^2 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x^2+y^2) dx$

4. 计算二重积分

(1). $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} (2x+3y)^2 d\sigma$

(2). $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{y}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx$

(3). $\int_0^1 dy \int_y^1 \sqrt{x^2-y^2} dx$

(4). $\int_0^1 dy \int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^3}\right) dx$

(5). $\iint\limits_D \left(xy^5-1\right) dxdy, D = \left\{(x,y) | -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \sin x \le y \le 1\right\}$

(6). $\iint\limits_D x^2 y dxdy$, 其中 D 是由双曲线 $x^2-y^2=1$ 以及直线 $y=0, y=1$ 所围成的平面区域

(7). $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2} dxdy, D = \left\{(x,y) | 0 \le y \le x, x^2+y^2 \le 2x\right\}$

(8). $\iint\limits_D r^2 \sin\theta \sqrt{1-r^2\cos 2\theta} dr d\theta, D = \left\{(r,\theta) | 0 \le r \le \sec\theta, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\right\}$

28.3 Week III

28.4 Week IV

第 29 章 February

第 30 章 March

第 31 章 April

31.1 Week I

31.2 Week II

31.3 Week III

31.4 Week IV

April 21

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2(\arctan \frac{a}{x} - \arctan \frac{a}{x+1})$

解

令 $f(x) = \arctan x$, 由拉格朗日中值定理得:

$$\arctan \frac{a}{x} - \arctan \frac{a}{x+1} = f'(\varepsilon)(\frac{a}{x} - \frac{a}{x+1}), \varepsilon \in (\frac{a}{x+1}, \frac{a}{x})$$

原极限等价于:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+\varepsilon^2} \frac{ax^2}{x(x+1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+\varepsilon^2} \lim_{x \to +\infty} \frac{ax^2}{x(x+1)}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a}{x+1} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a}{x} = 0$, 夹逼准则得到: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{1+\varepsilon^2} = 1$

原极限: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2(\arctan \frac{a}{x} - \arctan \frac{a}{x+1}) = 2$

2. $\int_0^1 dy \int_y^1 \sqrt{x^2 - y^2} dx$

解

积分区域是由直线 $x=1, y=0, y=x$ 围成的一个三角形, 采用极坐标方法计算二重积分:

$$\theta\in[0,\frac{\pi}{4}], r\in[0,\frac{1}{\cos x}]$$

原二重积分等价于:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}r^2\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}dr$$

化简得到:

$$\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}\frac{1}{\cos^3\theta}d\theta=\frac{1}{3}\int_0\frac{\pi}{4}\sqrt{1-\tan^2\theta}d\tan\theta$$

我们有: $\int\sqrt{1-x^2}dx=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\frac{\arcsin x}{2}+C$

因此, 原二重积分:

$$\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-\tan^2\theta}d\tan\theta=\frac{1}{3}(\frac{\tan\theta\sqrt{1-\tan^2\theta}}{2}+\frac{\arcsin\theta}{2})|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{12}$$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{nx^n}{1+e^x}dx$

引理 31.4.1 (第一积分中值定理)

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1x^nf(x)dx$$

其中 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导, 则: $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1x^nf(x)dx=0$ $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导,$|f(x)|\le M$ 因此:

$$0\le\int_0^1x^nf(x)dx\le\int_0^1Mx^ndx=\frac{M}{n+1}$$

由夹逼准则得到:

$$\lim_{n\to+\infty}0=0\qquad\lim_{n\to+\infty}\frac{M}{n+1}=0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1x^nf(x)dx=0$$

利用不等式: $x>\sin x; x>\ln(1+x)$, 可以将上面的式子进行一些变换

引理 31.4.2

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1nx^nf(x)dx$$

利用引理 31.4.1, 原极限可以化为:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1(n+1)x^nf(x)dx=\lim_{n\to+\infty}\int_0^1f(x)dx^n=\lim_{n\to+\infty}[(f(x)x^n)|_0^1-\int_0^1f'(x)x^ndx]=f(1)$$

解

令: $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$
利用引理, 我们得到:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{nx^n}{1+e^x}dx=f(1)=\frac{1}{1+e}$$

April 22

1. $\int_0^1 dy\int_y^1(\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2})dx$

解

积分区域是由直线 $y=0,y=1,x=1$ 围成的三角形, 交换积分次序, 原二重积分等价于:

$$\int_0^1 dx\int_0^x(\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2})dy=\int_0^1 e^{x^2}dx-\int_0^1 dx\int_0^x e^{y^2}dy$$

后面的二重积分再次交换积分次序:

$$\int_0^1 dy\int_y^1 e^{y^2}dx=\int_0^1(e^{y^2}-ye^{y^2})dy$$

原二重积分化为:

$$\int_0^1 e^{x^2}dx-\int_0^1(e^{y^2}-ye^{y^2})dy=\int_0^1 xe^{x^2}dx=(\frac{1}{2}e^{y^2})|_{x=0}^{x=1}=\frac{e-1}{2}$$

2. $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$

解

两个等价无穷小:

$$x\to0,\sqrt{1+x^2}-1\sim\frac{1}{2}x^2,x\sim\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

设 $f(x)=\ln x,f'(x)=\frac{1}{x}$
原极限可以化为:

$$\lim_{x\to0}-\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\ln(1+x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})\ln(1+x)}\overset{Lagrange}{\longrightarrow}\lim_{x\to0}-\frac{f'(\varphi)(\sqrt{1+x^2}-1)}{x^2}=\lim_{x\to0}-\frac{1}{2}f'(\varphi)$$

$$1+x<\varphi<x+\sqrt{1+x^2},\lim_{x\to0}(x+1)=\lim_{x\to0}\sqrt{1+x^2}=1\overset{squeezetheorem}{\longrightarrow}f'(\varphi)=1$$

原极限: $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]=-\dfrac{1}{2}$

3. $\int\dfrac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}dx$

解

我们有: $2+\sin 2x = 1+(\sin x+\cos x)^2$

不妨设 $I = A(\sin x+\cos x), J = B(\cos x - \sin x)$

$I + J = \sin x \Rightarrow A = \dfrac{1}{2}, B = -\dfrac{1}{2}$

原不定积分化为:

$$\int \frac{I+J}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}}dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}dx - \int \frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}}dx\right)$$

原不定积分为:

$$\frac{1}{2}\left[\arcsin\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}} - \ln(\sin x+\cos x+\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2})\right]+C$$

April 23

1. 区域 D 是由曲线 $y=\sin x, x=\pm\dfrac{\pi}{2}, y=1$ 围成, 求 $\iint\limits_D (xy^5-1)dxdy$

解

$$\iint\limits_D (xy^5-1)dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^{1} (xy^5-1)dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{6} - \frac{x\sin^6}{6} + \sin x - 1\right) dx = -\pi$$

2. $\int_{\frac{1}{6}}^{+\infty} \dfrac{1}{x}\left[\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right] dx$

解

$$\begin{cases} \left[\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right] = 0, x \geq 1 \\ \left[\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right] = 1, \dfrac{1}{4} \leq x \leq 1 \\ \left[\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right] = 2, \dfrac{1}{6} \leq x \leq \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

原积分为:

$$\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{4}} \frac{2}{x}dx + \int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{x}dx = 2\ln 3$$

3. 已知函数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^2 \cos y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 求 $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$

解

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2}|\Delta x|$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)}{\Delta y}=0$$

$f'_x(0,0)$ 不存在, $f'_y(0,0)=0$

April 24

1. $\iint\limits_D x^2ydxdy$, 区域 D 是由曲线 $x^2-y^2=1$ 以及直线 $y=0, y=1$ 围成的平面区域的面积

解

原二重积分等价于:

$$\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}}x^2ydx=\int_0^1\frac{2}{3}y(1+y^2)^{\frac{3}{2}}dy=\frac{8\sqrt{2}-2}{15}$$

2. 设 $z=e^{xy}+f(x+y,xy)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, 其中 $f(u,v)$ 有二阶连续偏导数

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}+f'_1(x+y,xy)+yf'_2(x+y,xy)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(1+xy)e^{xy}+f''_{11}(x+y,xy)+xf''_{12}(x+y,xy)+f'_2(x+y,xy)+y(f''_{21}(x+y,xy)+xf''_{22}(x+y,xy))$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(1+xy)e^{xy}+f''_{11}(x+y,xy)+xyf''_{22}(x+y,xy)+(x+y)f''_{12}(x+y,xy)+f'_2(x+y,xy)$$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^4}\prod\limits_{k=1}^{2n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$

解

原极限等价于:

$$\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{n}\ln(\prod_{k=1}^{2n}(n^2+k^2))-4\ln n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{n}\ln(\prod_{k=1}^{2n}(1+(\frac{k}{n})^2))}=e^{\int_0^2\ln(1+x^2)dx}$$

$$\int_0^2\ln(1+x^2)dx=x\ln(1+x^2)|_{x=0}^{x=2}-\int_0^2\frac{x^2}{1+x^2}dx=2\ln 5-2+\arctan 2$$

原极限: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^4}\prod\limits_{k=1}^{2n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}=25e^{\arctan 2-2}$

April 25

1. $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, 其中 $D=\{(x,y)|0\le y\le x,\ x^2+y^2\le 2x\}$

解

采用极坐标积分方法:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2dr=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\theta d\theta=\frac{10\sqrt{2}}{9}$$

2. 设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{x\to0,y\to1}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$, 求 $dz|_{(0,1)}$

解

$$dz|_{(0,1)}=2dx-dy$$

April 26

1. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos2\theta}drd\theta$, 其中 $D=\left\{(r,\theta)|0\le r\le\sec\theta,0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$

解

原二重积分化为直角坐标形式:

$$I=\iint\limits_{D'}y\sqrt{1+y^2-x^2}dxdy$$

其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le1,0\le y\le x\}$

$$I=\int_0^1dx\int_0^xy\sqrt{1+y^2-x^2}dy=\frac{1}{3}\left[\int_0^1(1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}})dx\right]=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}$$

2. $\int_0^1x^a(1-x)^b\ln xdx$

引理 31.4.3 (特殊反常积分)

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\begin{cases}p>1,\ 收敛\\ p\le1,\ 发散\end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx \begin{cases} 0 < p < 1, \text{收敛} \\ p \geq 1, \text{发散} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p}dx \begin{cases} 0 < p < 1, \text{收敛} \\ p \geq 1, \text{发散} \end{cases}$$

解

我们发现这个题可能的瑕点为 $x = 0,\ x = 1$

$$x \to 1^-, f(x) = x^a(1-x)^b \ln x \sim -(1-x)^{b+1} \Rightarrow 0 < -(b+1) < 1 \Rightarrow -2 < b < -1$$

$$x \to 0^+, f(x) = x^a(1-x)^b \ln x \sim x^a \ln x = \frac{\ln x}{x^{-a}} \Rightarrow 0 < -a < 1 \Rightarrow -1 < a < 0$$

(1).$x = 1, x = 0$ 均为瑕点, 我们得到:

$$\begin{cases} -2 < b < -1 \\ -1 < a < 0 \end{cases}$$

(2).$x = 1$ 是瑕点,$x = 0$ 不是瑕点, 我们有:

$$\begin{cases} a > 0 \\ -2 < b < -1 \end{cases}$$

(3).$x = 0$ 是瑕点,$x = 1$ 不是瑕点, 我们有:

$$\begin{cases} -1 < a < 0 \\ b > -1 \end{cases}$$

3. $\int \frac{x^2}{(x\cos x - \sin x)(x \sin x + \cos x)}dx$

解

$$\int \frac{x(x\cos x - x\sin x) + x\sin x(x\sin x + \cos x)}{(x\cos x - \sin x)(x\sin x + \cos x)}dx = \int \frac{x\cos x}{x\sin x + \cos x}dx + \int \frac{x\sin x}{x\cos x - \sin x}dx$$

$$\int \frac{x\cos x}{x\sin x + \cos x}dx = \ln(x\sin x + \cos x) + C$$

$$\int \frac{x\sin x}{x\cos x - \sin x}dx = \ln(x\cos x + \sin x) + C$$

原不定积分为:

$$\int \frac{x^2}{(x\cos x - \sin x)(x\sin x + \cos x)}dx = \ln(x\sin x + \cos x) + \ln(x\cos x + \sin x) + C$$

4. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x^2+\frac{1}{2})^2} dx$

引理 31.4.4 (特殊积分)

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy$$

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} re^{-r^2} dr = \frac{\pi}{2}(-\frac{1}{2}e^{-r^2})|_{r=0}^{r=+\infty} = \frac{\pi}{4}$$

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

解

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x^2+\frac{1}{2})^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{2x} d(\frac{4x^2}{2x^2+1}) = \frac{e^{-x^2}}{2x}\frac{4x^2}{2x^2+1}|_{x=0}^{x=+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{4x^2}{2x^2+1}\frac{e^{-x^2}(-4x^2-2)}{4x^2} dx$$

$$\Downarrow$$

$$I = \frac{2xe^{-x^2}}{2x^2+1}|_{x=0}^{x=+\infty} + 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2xe^{-x^2}}{2x^2+1} = \frac{2e^{-x^2}}{2x+\frac{1}{x}} = 0 \quad \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{-x^2}}{2x^2+1} = 0$$

因此, 我们得到原定积分为:

$$I = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

April 27

1. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{1+\cos x - \sin x} dx$

引理 31.4.5 (对称积分变换)

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a (f(x)+f(-x))dx$$

解

由引理 31.4.5 , 我们得到:

$$f(x) = \frac{\cos^3 x}{1+\cos x - \sin x}, f(-x) = \frac{\cos^3 x}{1+\cos x + \sin x}$$

原定积分等价于:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^3 x}{1+\cos x-\sin x}+\frac{\cos^3 x}{1+\cos x+\sin x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2(1+\cos x)\cos^3 x}{2\cos x(1+\cos x)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx=\frac{\pi}{4}$$

April 28

1. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=8$

解

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2,\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=3$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=8$$

2. $\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{x(1+\ln^2 x)}dx$

解

令 $t=\dfrac{1}{x},x=\dfrac{1}{t},dx=-\dfrac{1}{t^2}dt$

原反常积分等价于:

$$\int_0^{+\infty}\frac{t\arctan\frac{1}{t}}{1+\ln^2 t}\frac{1}{t^2}dt=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\frac{1}{x}}{x(1+\ln^2 x)}dx$$

两式相加得到:

$$2I=\int_0^{+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}}{x(1+\ln^2 x)}dx=\frac{\pi}{2}\arctan\ln x|_0^{+\infty}=\frac{\pi^2}{2}$$

$$I=\frac{\pi^2}{4}$$

3. $\int\dfrac{2x^4}{1+x^6}dx$

解

$$\int\frac{2x^4}{1+x^6}dx=\int\frac{x^4-1}{1+x^6}dx+\int\frac{x^4+1}{1+x^6}dx=\int\frac{x^2+1}{1+x^4-x^2}dx+\int\frac{x^4-x^2+1+x^2}{1+x^6}dx$$

$$\int\frac{x^2-1}{1+x^4-x^2}dx=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{3}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{3}}\right|+C$$

$$\int \frac{x^4 - x^2 + 1 + x^2}{1 + x^6} dx = \arctan x + \frac{1}{3} \arctan x^3 + C$$

April 29

1. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (1 - \cos \frac{\alpha}{n}), \quad \alpha > 0$ 绝对收敛

解

$$n \to +\infty, 1 - \cos \frac{\alpha}{n} \sim \frac{\alpha^2}{2n^2}$$

原级数和 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\alpha^2}{2n^2}$ 同敛散性, 后者绝对收敛.

April 30

1. 设 $u_n = (-1)^n \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$, 判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 和级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ 的敛散性

解

比较判别法的极限形式:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$$

级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$ 和级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 同敛散性.

判断交错级数 u_n 敛散性, 我们有: $\ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$ 单调递减, 且 $\lim_{n \to +\infty} \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}) = 0$

我们有级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 发散, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 条件收敛.

比较判别法的极限形式:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln^2(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})}{\frac{1}{n}} = 1$$

级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ 发散.

2. 已知 $y^2(x - y) = x^2$, 求 $\int \frac{1}{y^2} dx$

解

隐函数转为参数方程

令 $\frac{y}{x}=t$, 我们有 $xt^2(1-t)=1$, 我们得到参数方程:

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{t^2(1-t)} \\ y=\dfrac{1}{t(1-t)} \end{cases}$$

原不定积分:

$$\int t^2(t-1)^2\frac{t(3t-2)}{t^4(1-t)^2}dt=\int(3-\frac{2}{t})dt=3t-2\ln t+C$$

第 32 章 May

32.1 Week I

May 1

1. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛, 求 α 取值范围.

解

p 级数敛散性:

$$\begin{cases} 2-\alpha>0 \\ 2-\alpha\le 1 \end{cases} \Rightarrow 1\le\alpha<2$$

比较判别法的极限形式:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}}=1\Rightarrow\alpha-\frac{1}{2}>1\Rightarrow\alpha>\frac{3}{2}$$

我们得到 α 取值范围 $\dfrac{3}{2}<\alpha<2$

2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

解

$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$,$S'(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{2n!}x^{2n}$.
我们得到:

$$S(x)+S'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n=e^x$$

原问题转化为微分方程: $y'+y=e^x$ 的求解, 且 $y(0)=0$

一阶微分方程的求解公式:

$$y'+p(x)y=q(x)\Rightarrow y=e^{-\int p(x)dx}(e^{\int p(x)dx}q(x)+C)$$

我们得到: $S(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

3. 求二重积分 $\iint\limits_D y^2dxdy$ 和 $\iint\limits_D(x+2y)dxdy$, 其中 D 是由参数方程 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$,$t\in[0,2\pi]$

解

积分区域是摆线, $x\in[0,2\pi a]$, 二重积分可以化为:

$$\iint\limits_D y^2dxdy=\int_0^{2\pi a}dx\int_0^{y(x)}y^2dy=\int_0^{2\pi a}\frac{1}{3}y^3(x)dx$$

$$\int_0^{2\pi a}\frac{1}{3}y^3(x)dx=\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}a^3(1-\cos t)^3(a-a\cos t)dt=\frac{2}{3}\int_0^{\pi}(2\sin^2 t)^4dt$$

华里士公式:

$$\frac{2}{3}\int_0^{\pi}(2\sin^2 t)^4dt=\frac{2}{3}\times16\times\frac{7}{8}\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{35\pi}{12}$$

二重积分 $\iint\limits_D(x+2y)dxdy$ 可化为:

$$\int_0^{2\pi a}dx\int_0^{y(x)}(x+2y)dy=\int_0^{2\pi a}(y^2(x)+xy(x))dx$$

$$I=\int_0^{2\pi}[a^2(1-\cos t)^2+a^2(t-\sin t)(1-\cos t)](a-a\cos t)dt$$

$$I=a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt+a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2(t-\sin t)dt$$

$$I_1=2\int_0^{\pi}(2\sin^2 t)^3dt=5\pi$$

$$I_2=\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos x)^2(x+\pi+\sin x)dx=2\pi\int_0^{\pi}(1+\cos x)^2dx=3\pi^2$$

May 2

1. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sin(n+k))$ 敛散性

解

设 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$,$u_n<a_n$

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 部分和 $S_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$$

原级数绝对收敛.

2. $\lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{2(\sec x-1)}-\sqrt[3]{6(x-\sin x)}}{\int_0^{x^2}\arctan(e^{\sqrt{t}}-1)dt}$

解

对于变上限积分, 当 $x\to0, g(x)\to0, h(x)\to0$, 我们有:

$$\lim_{x\to0^+}\int_0^{g(x)} h(t)dt \Rightarrow \lim_{x\to0^+}\int_0^{G(x)} H(t)dt, x\to0, f(x)\sim F(x), h(x)\sim H(x)$$

我们得到原极限等价于:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{2(\sec x-1)}-\sqrt[3]{6(x-\sin x)}}{\frac{2}{3}x^3} = \lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{2(\sec x-1)}-\sqrt{2\frac{1}{2}x^2}+\sqrt[3]{6\frac{1}{6}x^3}-\sqrt[3]{6(x-\sin x)}}{\frac{2}{3}x^3}$$

前一个极限:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{2(\sec x-1)}-\sqrt{2\frac{1}{2}x^2}}{\frac{2}{3}x^3} = \lim_{x\to0^+}\frac{2(\sec x-1-\frac{1}{2}x^2)}{\frac{2}{3}x^3(\sqrt{2(\sec x-1)}+x)}$$

我们有: $\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{2(\sec x-1)}+x}{2x} = 1$

前一个极限:

$$I_1 = \frac{3}{2}\frac{1-\cos x-\frac{1}{2}x^2\cos x}{x^4\cos x} = \frac{5}{16}$$

同理可得:

$$I_2 = -\lim_{x\to0^+}\frac{3}{2}\frac{\sqrt[3]{6\frac{x-\sin x}{x^3}}-1}{x^2} = -\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2}\frac{6(x-\sin x)-x^3}{x^5} = \frac{1}{40}$$

原极限为: $I = I_1 + I_2 = \frac{27}{80}$

May 3

1. 级数 $\sum_{n=2}^{+\infty}[sin\frac{1}{n} - k\ln(1-\frac{1}{n})]$ 收敛, 求 k 的值.

解

泰勒公式和级数的比较判别法极限形式

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{sin\frac{1}{n}-kln(1-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to+0}\frac{sinx-kln(1-x)}{x}$$

分子利用泰勒展开式得到:

$$x \to 0, \sin x - kln(1-x) \sim x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + kx + k\frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim (1+k)x + o(x)$$

我们得到:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{sin\frac{1}{n} - k\ln(1-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1+k$$

当且仅当 $k=-1$ 时, 级数收敛, 因为当 $k \neq -1$ 时, 原级数敛散性和 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ 一致, 级数发散.

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^3 dx$

解

原定积分:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)^3 dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x dx$$

令 $tanx = t, x = \arctan t, dx = \frac{1}{1+t^2}dt, t \in [0,1]$, 原定积分为:

$$I = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}dt^2 = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t}{1+t}dt = \frac{\ln 2 - 1}{2}$$

May 4

1. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|, \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n, \sum_{n=1}^{+\infty} a_n a_{n+1}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 敛散性

解

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n} \quad b_n = (-1)^n \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

a_n 收敛,$|a_n|$ 发散;
a_n 收敛,$(-1)^n a_n$ 发散;
b_n 收敛,$b_n b_{n+1}$ 发散;

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x - \cos x} dx$

解

原定积分内有瑕点, 原积分等价于:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x - \cos x}dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x - \cos x}dx$$

我们有: $\int \frac{1}{\sin x - \cos x} dx = \ln|\frac{1-\cos(x-\frac{\pi}{4})}{\sin(x-\frac{\pi}{4})}| + C$
我们可以得到原反常积分发散.

3. $\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\cot x}{e^{-2x}} + \frac{1}{e^{-x}\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$

解

原极限等价于:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2e^x - \frac{1}{2}x^2\sin 2xe^{2x} - \sin^2 x}{x^4} = -\frac{7}{6}$$

May 5

1. 判断下列命题是否正确
(i). $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{2n+1}+u_{2n})$ 收敛,$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ 收敛
(ii). $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 则 $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ 发散.

解

(i). $u_n = (-1)^n$, 第一个排除
(ii). 正项级数比较判别法

2. $(1+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$, 求 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}$

解

我们有:

$$(1+\sqrt{3})^{n+1} = (1+\sqrt{3})^n(1+\sqrt{3}) = (a_n + b_n\sqrt{3})(1+\sqrt{3})$$

我们得到:

$$(a_n+3b_n) + (a_n+b_n)\sqrt{3} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

我们化简得:

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{\frac{a_n}{b_n}+3}{\frac{a_n}{b_n}+1}$$

不妨设 $x_n = \frac{a_n}{b_n}$, 我们有 $x_{n+1} = 1 + \frac{2}{x_n+1}$,$x_1 = 1$
因为 $1 < x_1 < \sqrt{3}, x_n > 1$, 我们得到:

$$0 < |x_{n+1} - \sqrt{3}| = |1 + \frac{2}{x_n+1} - (1 + \frac{2}{\sqrt{3}+1})| = \frac{2}{(x_n+1)(\sqrt{3}+1)}|x_n - \sqrt{3}|$$

化简得:

$$0 < |x_{n+1} - \sqrt{3}| < \frac{1}{\sqrt{3}+1}|x_n - \sqrt{3}| = \frac{1}{(\sqrt{3}+1)^{n-1}} a_1$$

夹逼定理得到: $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n - \sqrt{3}| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{3}$

May 6

1. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

解

令 $x = \sec t, t \in [1, \frac{\pi}{2}], dx = \tan t \sec t dt$, 我们有:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t \tan t}{\sec^2 t \tan t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 1$$

2. $\int_0^1 \frac{xdx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

解

令 $x = \sin t, t \in [0, \frac{\pi}{2}], dx = \cos t dt$, 我们有:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \cos t}{(2-\sin^2 t)\cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{2-\sin^2 t} dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\cos t}{\cos^2 t + 1} = -\arctan(\cos t)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

3. $y = x^2$ 与 $y = mx$ 围成的部分绕着 $y = mx(m > 0)$ 旋转一周得到的旋转体体积 V

解

$$V = \int_0^L \pi r^2 dl = \int_0^m \pi r^2 \sqrt{1+m^2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}} \int_0^m x^2(m-x)^2 dx = \frac{m^5\pi}{30\sqrt{1+m^2}}$$

May 7

1. $f(x)$ 在 $(2,4)$ 上二阶导数连续,$f(3) = 0$, 求证: $f''(\varepsilon) = 3\int_2^4 f(x)dx$

解

设 $F(x) = \int_2^x f(x)dx$, 原命题转化为证明:

$$\text{已知} F(2) = 0, F'(3) = 0, \text{求证} F'''(\varepsilon) = 3F(4)$$

$F(x)$ 在 $x = 3$ 处的泰勒展开式为:

$$F(x) = F(3) + F'(3)(x-3) + \frac{F''(3)}{2}(x-3)^2 + \frac{F'''(\varepsilon_1)}{6}(x-3)^3$$

我们得到:

$$\begin{cases} F(2)=F(3)-F'(3)+\frac{F''(3)}{2}-\frac{F'''(\varepsilon_1)}{6}, \varepsilon_1\in(2,3) \\ F(4)=F(3)+F'(3)+\frac{F''(3)}{2}+\frac{F'''(\varepsilon_2)}{6}, \varepsilon_2\in(3,4) \end{cases}$$

我们得到: $F(4)=\dfrac{F'''(\varepsilon_1)+F'''(\varepsilon_2)}{6}$

由平均值定理得到:

$$\exists\varepsilon_3\in(\varepsilon_1,\varepsilon_2),\ s.t\ F'''(\varepsilon_3)=\frac{F'''(\varepsilon_1)+F'''(\varepsilon_2)}{2}$$

我们得到: $F(4)=\dfrac{F'''(\varepsilon_3)}{3}$, 证毕

2. $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导,$f(0)=0$, 其反函数为 $g(x)$, 若 $\int_0^{f(x)} g(t)dt=x^2e^x$, 求 $f(x)$

解

我们对 $\int_0^{f(x)} g(t)dt=x^2e^x$ 左右两边同时对 x 求导:

$$g(f(x))f'(x)=(x^2+2x)e^x\Rightarrow f'(x)=(x+2)e^x$$

我们得到: $f(x)=(x+1)e^x+C, f(0)=1+C=0, C=-1$

$$f(x)=(x+1)e^x-1$$

32.2 Week II

May 8

1. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{2^n}(x+1)^{2n+1}$ 收敛区间

解

求解收敛半径的两种方法:

(i).$\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

(ii).$\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$

本题中采用第二种方法: $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2}\sqrt[n]{\ln n}=\dfrac{1}{2}$

此题中幂级数只有奇数项, 收敛半径 $R=\sqrt{\dfrac{1}{\rho}}=\sqrt{2}$

原幂级数收敛区间: $(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})$

2. 证明: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sin nx}{\sin x}\right)^2dx=\dfrac{n\pi}{2}$

解

我们不妨设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\sin nx}{\sin x})^2dx$, 我们有:

$$a_1=\frac{\pi}{2}$$

$$a_{n+1}-a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(n+1)x-\sin^2 nx}{\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx$$

我们令 $c_n=a_{n+1}-a_n$,$c_0=\frac{\pi}{2}$

$$c_{n+1}-c_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+3)x-\sin(2n+1)x}{\sin x}dx$$

我们利用和差化积公式得到:

$$c_{n+1}-c_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin[(2n+2)x+x]-\sin[(2n+2)x-x]}{\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos(2n+2)x}{\sin x}dx=0\Rightarrow c_n=\frac{\pi}{2}$$

我们得到: a_n 是等差数列,$a_n=\dfrac{n\pi}{2}$

3. 由方程 $F(cx-az,cy-bz)=0$ 确立了函数 $z=z(x,y)$, 求 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}$

解

隐函数求导法则: $G(x,y,z)=F(u,v),\begin{cases}u=cx-az\\v=cy-bz\end{cases}$, 我们有:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}=\dfrac{cF'_1}{aF'_1+bF'_2}\\\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}=\dfrac{cF'_2}{aF'_1+bF'_2}\end{cases}$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$$

May 9

1. 设函数 f,g 均可微, 且 $z=f[xy,\ln x+g(xy)]$, 求 $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}$

解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf'_1+(\frac{1}{x}+yg')f'_2\\\dfrac{\partial z}{\partial y}=xf'_1+xg'f'_2\end{cases}$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=f'_2$$

2. $f'(x)$ 连续, $|f'(x)| \le M$, $\int_0^1 f(x)dx = 0$, 证明: $\forall a \in [0,1]$, $|\int_0^a f(x)dx| \le \dfrac{M}{8}$

解

我们令: $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 原命题等价于:

$$|F''(x)| \le M, F(0) = F(1) = 0, \forall a \in [0,1], |F(x)| \le \frac{M}{8}$$

利用泰勒反向展开:

$$\begin{cases} F(0) = F(x) + F'(x)(0-x) + \dfrac{F''(\varepsilon_1)}{2}(0-x)^2 & ① \\ F(1) = F(x) + F'(x)(1-x) + \dfrac{F''(\varepsilon_2)}{2}(1-x)^2 & ② \end{cases}$$

我们利用 $(1-x)$①$+x$② 得到:

$$F(x) = -\frac{F''(\varepsilon_1)}{2}x^2(1-x) - \frac{F''(\varepsilon_2)}{2}x(1-x)^2$$

$$|F(x)| \le \frac{M}{2}[x^2(1-x) + x(1-x)^2] = \frac{M}{8}$$

May 10

1. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x-1)^n$ 的收敛域

解

先求幂级数收敛半径:

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n+(-2)^n}{n}} = 3 \Rightarrow r = \frac{1}{3}$$

原幂级数中心点 $x=1$, 收敛区间为 $(\frac{2}{3},\frac{4}{3})$, 我们验证端点值 $x=\frac{2}{3}, x=\frac{4}{3}$

当 $x = d\frac{2}{3}$ 时, 原幂级数为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^n+(-2)^n}{(-3)^n n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n}{n3^n}$, 原级数收敛.

当 $x = d\frac{4}{3}$ 时, 原幂级数为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-2)^n}{n3^n}$, 原级数发散.

幂级数收敛域为 $[\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3})$

2. 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ 和 $\dfrac{1}{3}$, 则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n^2}{b_n^2}x^n$ 收敛半径为

解 由题意知:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} |\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{3}{\sqrt{5}} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} |\dfrac{b_{n+1}}{b_n}| = 3 \end{cases}$$

后面幂级数收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}$, 我们有:

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}|\frac{a_{n+1}^2b_n^2}{a_n^2b_{n+1}^2}|=\frac{9}{5}\frac{1}{9}=\frac{1}{5}\Rightarrow R=5$$

(有些许问题)

May 11

1. $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0) \\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$, 计算 $f''_{xy}(0,0)$ 和 $f''_{yx}(0,0)$

解

$$\begin{cases} f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0 \\ f'_y(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_x=\dfrac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2}+\dfrac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \\ f'_y=\dfrac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}-\dfrac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\end{cases}$$

$$\begin{cases} f''_{xy}(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y}=-1 \\ f''_{yx}(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x}=1\end{cases}$$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $f(0)=f(1)=0,\min\limits_{x\in[0,1]}\{f(x)\}=-1$, 证明: $\exists\varepsilon\in(0,1)$, 使得 $f''(\varepsilon)\geq 8$

解

$f(0)=f(1)=0,\min\limits_{x\in[0,1]}\{f(x)\}=-1$, 由费马定理我们得到:

$$\exists x_0\in(0,1),f'(x_0)=0$$

我们利用泰勒展开,$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒展开式:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\eta)}{2}(x-x_0)^2,\eta\in x\sim x_0$$

(1). 当 $x=0$ 时,$f(0)=-1+\dfrac{f''(\eta_1)}{2}x_0^2=0\Rightarrow f''(\eta_1)=\dfrac{2}{x_0^2}$

(2). 当 $x=0$ 时,$f(1)=-1+\dfrac{f''(\eta_2)}{2}(1-x_0)^2=0\Rightarrow f''(\eta_1)=\dfrac{2}{(1-x_0)^2}$

我们不妨记 $f''(\eta) = max(f''(\eta_1), f''(\eta_2))$, 利用不等式的知识, 我们得到:

$$f''(\eta) \geq \frac{2}{(\frac{1}{2})^2} = 8$$

我们得到: $\exists\varepsilon = \eta \in (0,1)$, 使得 $f''(\varepsilon) \geq 8$

3. 设 m,n 均是正整数, 证明: $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 收敛性与 m,n 无关

解

令 $f(x) = \dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} = x^{-\frac{1}{n}}[\ln(1-x)]^{-\frac{2}{m}}$

我们需要讨论 $x \to 0^+$ 和 $x \to 1^-$ 两个可能的瑕点

(i). $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = x^{\frac{2}{m}-\frac{1}{n}} = \begin{cases} 0, \frac{2}{m} > \frac{1}{n} \\ 1, \frac{2}{m} = \frac{1}{n} \\ +\infty, \frac{2}{m} < \frac{1}{n} \end{cases}$

(ii). $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$

综合 (i)(ii), 我们知道 $x = 1$ 一定是 $f(x)$ 的瑕点,$x = 0$ 在一定情况下是 $f(x)$ 的瑕点.

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = I_1 + I_2$$

(1). 我们讨论 I_2 的收敛性, 我们比较 $f(x)$ 和 $\dfrac{1}{\sqrt[m]{1-x}}$:

$$\lim_{x\to1^-} \frac{f(x)}{\frac{1}{\sqrt[m]{1-x}}} = \sqrt[m]{\frac{\ln^2(1-x)}{\frac{1}{1-x}}} \overset{t=1-x}{\Longrightarrow} \lim_{t\to0^+} \sqrt[m]{t\ln^2 t} = 0$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx < \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt[m]{1-x}}dx$$

后面的定积分收敛,I_2 收敛

(2). 我们讨论 I_1 的收敛性, 我们比较 $f(x)$ 和 $\dfrac{1}{\sqrt[n]{x}}$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{\sqrt[n]{x}}} = \lim_{x\to0^+} \sqrt[m]{\ln^2(1-x)} = 0$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt[n]{x}}dx$$

后面的定积分收敛,I_1 收敛.

I 积分收敛, 与 m,n 的取值无关.

May 12

1. 设数列 a_n 单调减少, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0, S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k (n = 1, 2 \ldots)$ 无界, 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x-1)^n$ 收敛域.

解

我们不难发现幂级数的中心点为 $x = 1$, 数列 a_n 单调减少, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 \Rightarrow a_n$ 是正项级数.

(i). 当 $x = 0$ 时, 我们得到幂级数为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$, 莱布尼兹判别法得到级数收敛, 由阿贝尔定理我们得到: $x \in (0, 2)$, 级数收敛.

(ii). 当 $x = 2$ 时, 我们得到幂级数为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, 级数发散, 由阿贝尔定理我们得到: $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, 级数发散.

综合 (i)(ii), 我们的得到幂级数收敛域为 $[0, 2)$

2. 多元函数连续、偏导数、可微、一阶偏导数连续

验证函数 $f(x, y) = \begin{cases} y \arctan \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x, y) \neq 0 \\ 0, (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 处是否连续, 是否可微, 一阶偏导数的值和是否连续.

解

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} y\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} y\frac{\pi}{2} = 0 = f(0, 0)$$

(i).$f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续.

$$f_x'(0, 0) = \lim_{x\to0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$$

$$f_y'(0, 0) = \lim_{y\to0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \arctan\frac{1}{|y|} = \frac{\pi}{2}$$

(ii).$f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处偏导数为 $f_x'(0, 0) = 0, f_y'(0, 0) = \dfrac{\pi}{2}$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{f(x, y) - f_x'(0, 0)(x-0) - f_y'(0, 0)(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = y\frac{\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

(iii).$f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.

公式法求 $f(x, y)$ 偏导数:

$$f_x' = y\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}(-x)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} = -xy\frac{(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}}{1+x^2+y^2}$$

$$f_y' = \arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - y^2\frac{(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}}{1+x^2+y^2}$$

我们得到一阶偏导数在 $(0,0)$ 处的极限:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0} f_x'(x,0)=0=f_x'(0,0)\\ \lim\limits_{y\to 0} f_y'(0,y)=\dfrac{\pi}{2}=f_y'(0,0)\end{cases}$$

(iiii). 原函数一阶偏导数在 $(0,0)$ 处连续.

May 13

1. 将 $f(x)=\dfrac{5x-12}{x^2+5x-6}$ 展开为 x 的幂级数.

解

$$\frac{5x-12}{x^2+5x-6}=\frac{6}{x+6}+\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1+\frac{x}{6}}+\frac{1}{1-x}$$

我们由常见幂级数展开式得到:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n,\ -1<x<1$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n,\ -1<x<1$$

我们可以得到:

$$\frac{1}{1+\frac{x}{6}}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\frac{x}{6})^n,-1<\frac{x}{6}<1$$

我们可以得到:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\frac{x}{6})^n+\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{(-1)^n}{6^n})x^n,-1<x<1$$

2. 证明: $f_x'(x,y)$ 和 $f_y'(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续,$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微.

解

由题意得:

$$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\dfrac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}=f_x'(x_0,y_0)\Rightarrow f(x,y_0)-f(x_0,y_0)=f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+\alpha(x,y)\\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\dfrac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}=f_y'(x_0,y_0)\Rightarrow f(x_0,y)-f(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)+\beta(x,y)\end{cases}$$

我们要证明函数在 (x_0,y_0) 处可微, 我们只需要证明:

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)+o(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})$$

$$\begin{aligned} f(x,y)-f(x_0,y_0) &= (f(x,y)-f(x_0,y))+(f(x_0,y)-f(x_0,y_0)) \\ &= f'_x(\varepsilon_1,y)(x-x_0)+f'_y(x,\varepsilon_2)(y-y_0) \\ &= \left[f'_x(\varepsilon_1,y)-f'_x(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\right](x-x_0) \\ &+ \left[f'_y(x,\varepsilon_2)-f'_y(x_0,y_0)+f'_y(x_0,y_0)\right](y-y_0) \\ &= dz+\alpha_1(x,y)+\beta_1(x,y) \end{aligned}$$

我们有:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\alpha_1(x,y)=0 \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\beta_1(x,y)=0$$

证毕.

May 14

1. 将函数 $f(x)=\ln(1-x-2x^2)$ 展开为 x 的幂级数, 并指出其收敛区间.

解

$$\ln(1-x-2x^2)=\ln(1+x)+\ln(1-2x)$$

我们根据:

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},-1<x\le 1$$

得到上面式子的展开式:

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},-1<x\le 1$$

$$\ln(1-2x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2x)^n}{n},-1<-2x\le 1$$

我们得到 $f(x)$ 的展开式为:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}[\frac{(-1)^n-2^n}{n}]x^n,-\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}$$

函数 $f(x)$ 的收敛区间为 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

2. 设 $f(x),g(x)$ 在 $x\in[0,1]$ 上的导数连续, 且 $f(0)=0,f'(x)\ge 0,g'(x)\ge 0$, 证明: $\forall a\in[0,1]$, 有 $\int_0^a g(x)f'(x)dx+\int_0^1 f(x)g'(x)dx\ge f(a)g(1)$

解

我们设 $F(x)=\int_0^x g(t)f'(t)dt+\int_0^1 f(t)g'(t)dt-f(x)g(1)$.

我们有:

$$F'(x)=g(x)f'(x)-g(1)f'(x)=f'(x)[g(x)-g(1)]$$

我们知道: $f'(x) \geq 0, g'(x) \geq 0 \Rightarrow g(x) \leq g(1), x \in [0,1]$
我们得到: $F'(x) \leq 0 \Rightarrow F(x)$单调递减

$$F(x) \geq F(1) = \int_0^1 g(x)df(x) + \int_0^1 f(x)g'(x)dx - f(1)g(1) = -f(0)g(0) = 0$$

原命题得证, 证毕.

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调递减, 证明: $\lambda \in (0,1), \int_0^\lambda f(x)dx > \lambda \int_0^1 f(x)dx$

解

我们构造: $F(x) = \dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}$
我们对 $F(x)$ 求导得到:

$$F'(x) = \frac{xf(x) - \int_0^x f(t)dt}{x^2}$$

我们令 $G(x) = xf(x) - \int_0^x f(t)dt$, 我们得到:

$$G'(x) = f(x) + xf'(x) - f(x) = xf'(x),\ x \in [0,1]$$

我们已知 $f(x)$在$[0,1]$上连续且单调递减,我们可以得到$f'(x) < 0,\ x \in (0,1)$
我们得出: $G'(x) < 0,\ x \in (0,1)$
$G(x)$在$(0,1)$上单调递减,$G(x) < G(0) = 0 \Rightarrow F'(x) < 0,\ x \in (0,1), F(x)$单调递减 我们得到:

$$F(x) > F(1) \Rightarrow \frac{\int_0^x f(t)dt}{x} > \frac{\int_0^1 f(x)dx}{1}$$

即 $\forall \lambda \in (0,1), \int_0^\lambda f(x)dx > \lambda \int_0^1 f(x)dx$

4. $z = (x^2+y^2)f(x^2+y^2), \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, f(1) = 0, f'(1) = 1$, 求 $f(x)$ 表达式

解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xf(x^2+y^2) + 2x(x^2+y^2)f'(x^2+y^2) \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2yf(x^2+y^2) + 2y(x^2+y^2)f'(x^2+y^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f(x^2+y^2) + 4x^2f'(x^2+y^2) + (6x^2+2y^2)f'(x^2+y^2) + 4x^2(x^2+y^2)f''(x^2+y^2) \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2f(x^2+y^2) + 4y^2f'(x^2+y^2) + (6y^2+2x^2)f'(x^2+y^2) + 4y^2(x^2+y^2)f''(x^2+y^2) \end{cases}$$

我们可以得到:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4f(u) + 12uf'(u) + 4u^2f''(u) = 0,\ u = x^2+y^2$$

问题转化为:

$$u^2 f''(u)+3uf'(u)+f(u)=0 \Rightarrow (u^2 f''(u)+2uf'(u))+(uf'(u)+f(u))=[u^2 f'(u)+uf(u)]'=0$$

我们得到: $u^2 f'(u)+uf(u)=C$, 又因为 $f(1)=0, f'(1)=1 \Rightarrow C=1$

我们得到一个一阶线性微分方程: $uf'(u)+f(u)=\dfrac{1}{u}$

利用公式法, 我们得到:

$$(uf(u))'=\frac{1}{u} \Rightarrow uf(u)=\ln u+C_2 \Rightarrow uf(u)=\ln u$$

我们得到: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

32.3 Week III

May 15

1. 将 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数

解

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}, -1<x^2<1$$

我们有:

$$f(x)-f(0)=\int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}dx$$

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x (-1)^n x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

$f(0)=\dfrac{\pi}{4}$, 我们有: $f(x)=\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, -1<x<1$

2. 微分方程 $y'=\frac{y(1-x)}{x}$ 通解

解

分离变量

原微分方程可以化为:

$$\begin{array}{lll} (i) & y\neq 0 & \dfrac{1}{y}dy=(\dfrac{1}{x}-1)dx \\ (ii) & y=0 & y'(x)=0, \text{满足条件} \end{array}$$

针对 (i), 我们同时求不定积分得到:

$$\ln|y| = \ln|x| - x + C_1 \Rightarrow \ln|y| = \ln|cxe^{-x}| \Rightarrow y = cxe^{-x}$$

综合 (i)(ii), 我们得到微分方程通解: $y = Cxe^{-x}, C \in \mathbb{R}$

3. 隐函数渐近线 $x^3 + y^3 = 3axy, a > 0$, 求 $y = y(x)$ 的斜渐近线.

解

令 $t = \dfrac{y}{x} \to y = tx$

我们得到: $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$ 当 $x \to \infty, t \to -1$

我们得到:

(i).

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to-1^-} t = -1 \\ b &= \lim_{x\to+\infty} (y - ax) = \lim_{t\to-1^-} (\frac{3at^2}{1+t^3} + \frac{3at}{1+t^3}) = -a \end{aligned}$$

(ii).

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to-1^+} t = -1 \\ b &= \lim_{x\to-\infty} (y - ax) = \lim_{t\to-1^+} (\frac{3at^2}{1+t^3} + \frac{3at}{1+t^3}) = -a \end{aligned}$$

斜渐近线为: $y = -x - a$

4. 已知函数 $y = y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y = \dfrac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha$, 当 $\Delta x \to 0$,α 是 Δx 的高阶无穷小,$y(0) = \pi$, 求 $y(1)$

解

我们由题意得到微分方程:

$$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{1+x^2}dx \Rightarrow \ln|y| = \arctan x + C \Rightarrow y = Ce^{\arctan x}$$

由 $y(0) = \pi, \Rightarrow C = \pi$, 我们得到$y(x)$表达式 : $y(x) = \pi e^{\arctan x} \Rightarrow y(1) = \pi e^{\frac{\pi}{4}}$

May 16

1. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域, 并求其和函数.

解

(i). 先求幂级数收敛半径:

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+3}{2n+1} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\rho} = 1$$

(ii). 验证两个端点

当 $x = \pm 1$ 时, 幂级数对应的级数发散.

我们得到原幂级数的收敛域为 $(-1, 1)$.

$$S(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 2x[\sum_{n=1}^{+\infty} x^n]' + \frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2}, -1 < x < 1$$

2. 微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{1}{2}(\frac{y}{x})^3$, 满足 $y|_{x=1} = 1$ 的特解

解

令 $z = \frac{y}{x}$, 我们得到 : $y = xz \Rightarrow \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$

原微分方程可化为:

$$(z + x\frac{dz}{dx}) = z - \frac{1}{2}z^3 \text{满足} z|_{x=1} = 1$$

我们可以得到: $-\frac{2}{z^3}dz = \frac{1}{x}dx \Rightarrow \frac{1}{z^2} = \ln x + c$

我们有$z|_{x=1} = 1$, 得到 : $1 + \ln x = \frac{1}{z^2} \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{1+\ln x}$

我们得到: $\frac{dy}{dx}|_{(1,1)} = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt{1+\ln x}}$

3. 求微分方程 $(x+y)dx + (y-x)dy = 0$满足条件$y(1) = -1$的特解

解

我们对微分方程进行一些简单的变形:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$$

我们令 $z = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$

原微分方程可以化简为:

$$\frac{1}{x}dx = \frac{1-z}{1+z^2}dz \Rightarrow \ln|x| = \arctan z - \ln\sqrt{z^2+1} + C$$

即: $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \arctan\frac{y}{x} + C$, 由$y(1) = -1$得到$C = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}$

我们得到微分方程的特解为: $\ln\sqrt{x^2+y^2} - \arctan\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}$

4. $f(x,y)$连续 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - xy}{x^2+y^2} = 1$, $f(0,0)$是极大值还是极小值?

解

极小值点, 理由如下: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-xy}{x^2+y^2}=1$, 我们可以得到在 $(0,0)$ 的一个去心邻域内, 我们有:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= xy+(x^2+y^2)(1+\alpha)=\frac{1}{2}(x+y)^2+(x^2+y^2)(\frac{1}{2}+\alpha) \\ \text{其中} & \lim_{(x,y)\to(0,0)}\alpha=0 \end{aligned}$$

我们得到在 $(0,0)$ 的一个邻域内,$f(x,y)\geq 0$, $f(0,0)$是极小值

May 17

1. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\dfrac{1}{2n+1}-1)x^{2n}$在区间$(-1,1)$内的和函数$S(x)$

解

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}-\sum_{n=1}^{+\infty}x^{2n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}-\frac{x^2}{1-x^2}$$

(i). 当 $x\neq 0$, $S(x)=\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}-\dfrac{x^2}{1-x^2}=\dfrac{1}{x}\int_0^x\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^{2n}-\dfrac{x^2}{1-x^2}$

$$S(x)=\frac{\ln\frac{1-x}{1+x}}{2x}-\frac{1}{1-x^2}$$

(ii). 当 $x=0$,$S(x)=0$.

综上,$S(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\dfrac{1-x}{1+x}}{2x}-\dfrac{1}{1-x^2}, 0<|x|<1\\ 0, x=0\end{cases}$

2. 微分方程 $(y+x^3)dx-2xdy=0$满足$y|_{x=1}=\dfrac{6}{5}$的特解为

解

我们对微分方程化简: $y'-\dfrac{1}{2x}y=\dfrac{x}{2}\Rightarrow(\frac{y}{\sqrt{x}})'=\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{2}$

我们得到: $y=\dfrac{x^3+C\sqrt{x}}{5}$, $y|_{x=1}=\dfrac{6}{5}\Rightarrow C=5$

原微分方程的解: $y=\dfrac{x^3+5\sqrt{x}}{5}$

3. 微分方程 $xy'+2y=x\ln x$满足$y(1)=-\frac{1}{9}$的特解为

解

原微分方程可化为: $y'+\dfrac{2}{x}y=\ln x\Rightarrow(x^2y)'=x^2\ln x$

原微分方程的解为: $y = \dfrac{\int x^2 \ln x dx + C}{x^2} \Rightarrow y = \dfrac{x(3\ln x - 1)}{9} + \dfrac{C}{x^2}$

我们由 $y(1) = -\dfrac{1}{9}$ 得到: $y = \dfrac{x(3\ln x - 1)}{9}$

4.$f(x,y) = x^4 + 2y^2 - 3x^2y$, $f(0,0)$是极大值还是极小值?

解

$f(0,0)$ 不是极值点, 理由如下:

$$f(x,y) = (x^2 - \frac{3}{2}y)^2 - \frac{1}{4}y^2$$

(i). 当 $y = 0, f(x,y) \geq 0$

(ii). 当 $x^2 = \dfrac{3}{2}y, f(x,y) \leq 0$

May 18

1.$\int_0^{+\infty} \left[\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^x e^{-t^2} dt\right] dx$

解

方法 1: 分部积分法

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^x e^{-t^2} dt\right] dx = x\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^x e^{-t^2} dt\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^x e^{-t^2} dt}{\frac{1}{x}} - \frac{1}{2}d(e^{-x^2}) = \frac{1}{2}$$

方法 2: 二重积分交换积分次序

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^x e^{-t^2} dt\right] dx = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt - \int_0^x e^{-t^2} dt\right] dx$$

我们得到:

$$\int_0^{+\infty} (\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt) dx = \int_0^{+\infty} dt \int_0^t e^{-t^2} dx = \int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt = \frac{1}{2}$$

2. 设 $F(x) = f(x)g(x)$, 其中函数 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足以下条件: $f'(x) = g(x), g'(x) = f'(x)$, 且 $f(0) = 0, f(x) + g(x) = 2e^x$

(i). 求 $F(x)$ 满足的一阶微分方程

(ii). 求 $F(x)$ 表达式

解

(i). 我们有:

$$F'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) = f^2(x) + g^2(x) = (f(x) + g(x))^2 - 2f(x)g(x)$$

我们得到 $F(x)$ 满足的微分方程为: $F'(x)+2F(x)=4e^{2x}$

(ii). 我们利用一阶线性微分方程公式得到:

$$(e^{2x}F(x))'=4e^{4x}\Rightarrow F(x)=\frac{e^{4x}+C}{e^{2x}}$$

由 $f(0)=0\Rightarrow F(0)=1+C=0\Rightarrow C=-1, F(x)=e^{2x}-e^{-2x}$

3. 求级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$

解

我们引入幂级数:

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2-1}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2}(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1})x^n=\frac{1}{2}(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n-1}-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1})$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n-1}=x(\sum_{n=2}^{+\infty}\int_0^x x^{n-2}dx)=x\int_0^x(\sum_{n=2}^{+\infty}x^{n-2})dx=-x\ln(1-x)$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}}{x}=\frac{\sum_{n=2}^{+\infty}\int_0^x x^n dx}{x}=\frac{\int_0^x(\sum_{n=2}^{+\infty}x^n)dx}{x}=-\frac{x}{2}-1-\frac{\ln(1-x)}{x}$$

原幂级数的和函数为:

$$S(x)=\frac{1}{2}(-x\ln(1-x)+\frac{\ln(1-x)}{x}+\frac{x}{2}+1),-1<x<1$$

我们得到: $S(\frac{1}{2})=\frac{5}{8}-\frac{3\ln 2}{4}$

May 19

1. 已知 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}\quad(x\geq 0), g(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$, 求 $f(g(x))$

解

我们易得到: $f(x)=\begin{cases}x^2, x\geq 2\\ 2x, \frac{1}{2}<x<2\\ 1, 0\leq x\leq\frac{1}{2}\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}-x, |x|>1\\ 0, x=1\\ 1, -1\leq x<1\end{cases}$.

我们可以得到:

$$f(g(x))=\begin{cases}x^2, x\leq -2\\ -2x, -2<x<-1\\ 2, -1\leq x<1\\ 1, x=1\end{cases}$$

2. 已知 $y_1=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$,$y_2=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解, 求 $q(x)$

解

由题意得:

$$\begin{cases} y_1'+p(x)y_1=q(x) \\ y_2'+p(x)y_2=q(x) \end{cases} \Rightarrow (y_1-y_2)'+p(x)(y_1-y_2)=0 \Rightarrow p(x)=-\frac{(y_1-y_2)'}{y_1-y_2}$$

我们得到: $p(x)=-\dfrac{x}{1+x^2}$

任意带入一个方程: $q(x)=y_1'+p(x)y_1=3x(1+x^2)$

3. 设 $z=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,$f_y'\neq 0$, 证明: 对任意的常数 k, 曲线 $f(x,y)=k$ 是直线的充分必要条件为 $(f_y')^2f_{xx}''-2f_x'f_y'f_{xy}''+(f_x')^2f_{yy}''=0$

解

$f(x,y)=k$为直线 $\Rightarrow f(x,y)=ax+by+c=k$

(i). 必要性

$f(x,y)=k$为直线 $\Rightarrow f_{xx}''=f_{yy}''=f_{xy}''=0$, 我们可以得到:

$$(f_y')^2f_{xx}''-2f_x'f_y'f_{xy}''+(f_x')^2f_{yy}''=0$$

(ii). 充分性

我们记 $\begin{cases} f_x'=f_1' \\ f_y'=f_2' \\ f_{xx}''=f_{11}'' \\ f_{xy}''=f_{12}'' \\ f_{yx}''=f_{21}'' \\ f_{yy}''=f_{22}'' \end{cases}$, 我们将 $f(x,y)=k$ 对 x 求导:

$$f_1'+f_2'\frac{dy}{dx}=0$$

再次对等式两边对 x 求导:

$$f_{11}''+f_{12}''\frac{dy}{dx}+(f_{21}''+f_{22}''\frac{dy}{dx})\frac{dy}{dx}+f_2'\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

若要证明 $f(x,y)=k$ 是直线, 我们只需要证明:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0\Rightarrow f_{11}''+f_{12}''\frac{dy}{dx}+(f_{21}''+f_{22}''\frac{dy}{dx})\frac{dy}{dx}=0$$

由隐函数求导公式: $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{f_1'}{f_2'}$, 我们化简上式:

$$f_{11}''+f_{12}''(-\frac{f_1'}{f_2'})+(f_{21}''-f_{22}''\frac{f_1'}{f_2'})(-\frac{f_1'}{f_2'})=\frac{(f_2'')^2f_{11}''-2f_1'f_2'f_{12}''+(f_1')^2f_{22}''}{(f_2'')^2}=0$$

令分子为 0 即可:

$$(f_2'')^2f_{11}''-2f_1'f_2'f_{12}''+(f_1')^2f_{22}''=0\Rightarrow(f_y')^2f_{xx}''-2f_x'f_y'f_{xy}''+(f_x')^2f_{yy}''=0$$

May 20

1. 判断级数的敛散性 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

解

我们不妨记 $u_n=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

级数的部分和 $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$

$$\begin{aligned}S_n&=(\sqrt{3}-\sqrt{2})-(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots\\&+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\\&=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{2}-\sqrt{1})\end{aligned}$$

我们得到: $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=1-\sqrt{2}$, 原级数收敛

2. 判断级数的敛散性 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^\alpha}$

解 我们有:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$n\to+\infty,\quad\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\sim\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^\alpha}\sim\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

我们可以得到:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^\alpha}\begin{cases}\text{收敛},\alpha>\dfrac{1}{2}\\\text{发散},\alpha\le\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

3. 设连续函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加, 下列说法正确的是:

- A. $\tan f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加

- B. $f'(x) > 0, \quad x \in (-\infty, +\infty)$
- C. $\int_{-1}^{x} \dfrac{f(t)}{1+f^2(t)}dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加
- **D**. $\int_{-1}^{e^x} \dfrac{1}{1+f^2(t)}dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加

解

(i). 对于 $f(x) = x^3$: $f'(x) \geq 0, tan f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不单调,A、B 错误
(ii). 令 $F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{f(t)}{1+f^2(t)}dt, F'(x) = \frac{f(x)}{1+f^2(x)}, f(x)$ 正负性未知, 无法判断函数单调性,C 错误
(iii) 令 $F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{1}{1+f^2(t)}dt, F'(x) = \frac{1}{1+f^2(x)} > 0, F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增.
正确答案: D

4. 下列微分方程是以 $y = C_1e^x + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x, (C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R})$ 为通解的微分方程为:

- A. $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$
- B. $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$
- C. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$
- D. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$

解

我们易得: $y = C_1e^x + C_4e^0(A\cos 2x + B\sin 2x)$

我们可以得到原三阶微分方程对应的特征方程的三个根 $x_1 = 1$, $x_2 = 2i$, $x_3 = -2i$, 特征方程为: $(r-1)(r^2+4) = 0 \Rightarrow r^3 - r^2 + 4r - 4 = 0$

我们得到微分方程表达式为: $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$, 故答案选 D

5. 设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 连续可导, 证明: $\int_0^a dx \int_0^x \dfrac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dy = \pi[f(a) - f(0)]$

解

原二重积分等价于:

$$\begin{aligned} \int_0^a dy \int_y^a \frac{f'(y)}{\sqrt{(\frac{a-y}{2})^2 - (x - \frac{a+y}{2})^2}}dx &= \int_0^a f'(y)[\arcsin(\frac{2x-a-y}{a-y})]|_y^a dy \\ &= \pi \int_0^a f'(y)dy = \pi[f(a) - f(0)] \end{aligned}$$

May 21

1. $f(x)$ 连续且为奇函数, 下列函数一定是偶函数的是:

- A. $\int_0^x du \int_a^u tf(t)dt$
- B. $\int_a^x du \int_0^u f(t)dt$

- C. $\int_0^x du \int_a^u f(t)dt$
- D. $\int_a^x du \int_0^u tf(t)dt$

解

(i). 对于 A、C, 我们交换二重积分的积分次序:

A: $\int_0^x du \int_a^0 tf(t)dt + \int_0^x du \int_0^u tf(t)dt = x\int_a^0 tf(t)dt + \int_0^x t^2 f(t)dt$, 前一个是奇函数, 后一个是偶函数

C: $\int_0^x du \int_a^u f(t)dt = \int_0^x du \int_a^0 f(t)dt + \int_0^x du \int_0^u f(t)dt$, 前一个是奇函数, 后一个是奇函数

(ii). 对于 B、D, 我们交换二重积分的积分次序:

$$B: \int_a^0 du \int_0^u f(t)dt + \int_0^x du \int_0^u f(t)dt = \int_a^x tf(t)dt, \text{奇函数}$$

$$D: \int_a^0 du \int_0^u tf(t)dt + \int_0^x du \int_0^u tf(t)dt = \int_a^x t^2 f(t)dt, \text{偶函数}$$

此题答案为: D

2. 证明: $\int_0^1 dx \int_0^1 (xy)^{xy} dy = \int_0^1 x^x dx$

解

我们令 $xy = t, y = \frac{1}{x}t$, 我们得到原二重积分为: $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{x} t^t dt$.
我们交换二重积分的积分次序:

$$\int_0^1 dt \int_t^1 \frac{1}{x} t^t dx = -\int_0^1 t^t \ln t dt = -\int_0^1 x^x \ln x dx$$

我们只需要证明:

$$-\int_0^1 x^x \ln x dx = \int_0^1 x^x dx \Rightarrow \int_0^1 x^x(1+\ln x)dx = \int_0^1 e^{x\ln x} d(x\ln x) = 0$$

证毕.

3. 微分方程 $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(1+\cos 2x)$ 的特解可以设为哪种形式:

- A. $Ae^{2x} + e^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$
- B. $Axe^{2x} + e^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$
- C. $Ae^{2x} + xe^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$
- D. $Axe^{2x} + xe^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$

解

原微分方程对应的特征方程为: $r^2 - 4r + 8 = 0 \Rightarrow r_1 = 2+2i,\ r_2 = 2-2i$
齐次微分方程的通解为: $e^{2x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$
对于方程: $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}$, 特解为: $C_1 e^{2x}$

对于方程: $y''-4y'+8y=e^{2x}\cos 2x$, 特解为: $xe^{2x}(C_2\cos 2x+C_3\sin 2x)$

我们得到方程的特解形式为: $y=C_1e^{2x}+xe^{2x}(C_2\cos 2x+C_3\sin 2x)$, 故此答案选 C

32.4 Week IV

May 22

1. $f(x)$ 连续且为偶函数, 下列函数一定是偶函数的是:

- A. $\int_0^x (x-t^2)f(t)dt$
- B. $\int_a^x f(x-t)dt$
- C. $\int_0^x (x-2t)f(t)dt$
- D. $\int_a^x (x-2t)f(t)dt$

解

令 $f(x)=1$, 我们得到:

(i).$\int_0^x (x-t^2)f(t)dt=\int_0^x (x-t^2)dt=x^2-\dfrac{x^3}{3}$ 非奇非偶函数

(ii).$\int_a^x f(x-t)dt=\int_a^x dt=x-a$, 当$a=0$时为奇函数

(iii).$\int_0^x (x-2t)f(t)dt=\int_0^x (x-2t)dt=-\dfrac{x^2}{2}$, 偶函数

(iiii). $\int_a^x (x-2t)f(t)dt=\int_a^x (x-2t)dt=-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{ax}{2}+a^2$, 当$a=0$时为偶函数

故答案为: C

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x t^{-5}dt}{\int_1^x t^{-3}dt}$

解

原极限为: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{1}{4x^4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$

3. 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的通解为

解

原微分方程对应的特征方程为: $r^2-4r+3=0\Rightarrow r_1=1,\ r_2=3$

齐次微分方程的通解为: $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$

我们设方程的特解为: $y^*=Ae^{2x}\Rightarrow A(4-8+3)e^{2x}=2e^{2x}\Rightarrow A=-2$

我们得到原微分方程的通解为:

$$y=-2e^{2x}+C_1e^x+C_2e^{3x}, C_1, C_2\in\mathbb{R}$$

4. 求微分方程 $y''-2y'-e^{2x}=0$ 满足条件 $y(0)=1, y'(0)=1$ 的解.

解

原微分方程对应的特征方程为: $r^2-2r=0\Rightarrow r_1=0,\ r_2=2$
我们得到齐次微分方程的通解: $y=C_1e^{2x}+C_2$
我们设微分方程的特解为:

$$y^*=Axe^{2x}\Rightarrow A(4+4x-2-4x)e^{2x}=e^{2x}\Rightarrow A=\frac{1}{2}$$

我们得到方程的解为: $y=C_1e^{2x}+C_2+\frac{1}{2}xe^{2x}$
又因为 $y(0)=1,y'(0)=1\Rightarrow$, 我们得到:

$$\begin{cases}C_1+C_2=1\\2C_1+\frac{1}{2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=\frac{1}{4}\\C_2=\frac{3}{4}\end{cases}$$

原微分方程的解: $y=\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}+\frac{3}{4}$

5. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续,$f(x)>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$,$\lim\limits_{h\to0}\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}}$, 求 $f(x)$

解

我们得到:

$$\lim_{h\to0}e^{\frac{1}{h}\ln(1+\frac{f(x+hx)-f(x)}{f(x)})}=\lim_{h\to0}e^{\frac{1}{h}\frac{f(x+hx)-f(x)}{f(x)}}=e^{\frac{1}{x}}$$

我们进而得到:

$$\lim_{h\to0}\frac{x}{f(x)}\frac{f(x+x)-f(x)}{hx}=\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x^2}$$

即: $\ln f(x)=-\frac{1}{x}+C$, 又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$, 两边同时取 $x\to+\infty$ 的极限:

$$\lim_{x\to+\infty}\ln f(x)=\lim_{x\to+\infty}(-\frac{1}{x}+C)\Rightarrow C=0$$

我们得到: $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$

May 23

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n}{5^n-3^n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}-1}$ 敛散性

解

采取抓大头的方式, 利用级数判别方法中的比较法的极限形式

(i). $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(\frac{4^n}{5^n-3^n})^n}{(\frac{4}{5})^n}=1\Rightarrow$ 原级数和级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(\frac{4}{5})^n$ 同敛散性, 原级数收敛

(ii). $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n^3}-1}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}}=1\Rightarrow$ 原级数和级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ 同敛散性, 原级数收敛

2. 设函数 $f(x)$ 连续, 且对于任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$, 恒有 $f(x+1) = -f(x)$, 下面结论不正确的是:

- A. $f(x)$是以 2 为周期的函数
- B. $\int_0^x [f(t) - f(-t)]dt$是以 2 为周期的函数
- C. $\int_0^x f(t)dt - \frac{x}{2}\int_0^2 f(t)dt$是以 2 为周期的函数
- D. $f'(x)$是以 2 为周期的函数

解

我们得到: $\begin{cases} f(x+1) + f(x) = 0 \\ f(x+2) + f(x+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x+2) = f(x)$

我们得到: $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数,A 正确

我们由原函数和导函数周期性关系得到:

$$f(x)\text{周期函数}, \int_0^x f(t)dt\text{周期函数} \Leftrightarrow \int_0^T f(x)dx = 0$$

对于 B 选项, 我们发现 $g(x) = f(x) - f(-x)$, $g(x)$是奇函数

$g(x)$是周期函数, 且 $\int_{-1}^1 g(x)dx = 0 \Rightarrow \int_0^x g(t)dt$是周期函数

对于 C 选项, 我们得到: $\int_0^x [f(t) - \frac{\int_0^2 f(x)dx}{2}]dt$

我们只需要证明:

$$\int_0^2 [f(t) - \frac{\int_0^2 f(x)dx}{2}]dt = 0$$

不妨设 $\int_0^2 f(x)dx = A$, 我们有:

$$\text{左边} = \int_0^2 [f(t) - \frac{A}{2}]dt = \int_0^2 f(x)dx - A = 0 \Rightarrow \text{原命题得证}$$

对于 D 选项, 我们未知 $f(x)$ 是否可导, 故此题答案选 D

3. 求微分方程: $y'' + y = 4\sin x$ 的通解

解

特征方程为: $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = i,\ r_2 = -i$

齐次微分方程的通解为: $y = A\sin x + B\cos x$

非齐次微分方程特解: $y^* = x(C_1\sin x + C_2\cos x) \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = -2 \end{cases}$

原微分方程的通解为: $y = -2x\cos x + A\sin x + B\cos x, A、B \in \mathbb{R}$

4. 求微分方程: $y'' + y = \sin x + x\cos 2x$ 的通解

解

特征方程为: $r^2+1=0 \Rightarrow r_1=i,\ r_2=-i$

齐次微分方程的通解为: $y=A\sin x+B\cos x$

非齐次微分方程特解:

$$y_1^*=x(C_1\sin x+C_2\cos x)\Rightarrow\begin{cases}C_1=0\\C_2=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow y_1^*=-\frac{x}{2}\cos x$$

$$y_1^*=(Ax+B)\sin 2x+(Cx+D)\cos 2x)\Rightarrow\begin{cases}C=-\frac{1}{3}\\A=D=0\\B=\frac{4}{9}\end{cases}\Rightarrow y_2^*=-\frac{x}{3}\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x$$

原微分方程的通解为: $y=y_1^*+y_2^*+A\sin x+B\cos x, A$、$B\in\mathbb{R}$

5.$\lim\limits_{x\to 0}\int_0^{2x}du\int_0^{\sqrt{2ux-u^2}}\dfrac{cos(t-u)^2}{\ln(1+x|x|)}dt$

解

我们不难发现此题需要分左右极限分别来求:

$$I_{左}=\lim_{x\to 0}\frac{-\iint\limits_{D_1}\cos(t-u)^2d\sigma}{-x^2}$$

由二元函数的积分中值定理:

$$\iint\limits_{D_1}\cos(t-u)^2d\sigma=S_{D_1}f(\varepsilon_1,\varphi_1),(\varepsilon_1,\varphi_1)在以(0,x)为半径,x为半径的圆内$$

$$I_{左}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2\pi}{2}}{-x^2}\cos(\varepsilon_1-\varphi_1)^2=\frac{\pi}{2}$$

$$I_{右}=\lim_{x\to 0}\frac{\iint\limits_{D_2}\cos(t-u)^2d\sigma}{x^2}$$

由二元函数的积分中值定理:

$$\iint\limits_{D_2}\cos(t-u)^2d\sigma=S_{D_2}f(\varepsilon_2,\varphi_2),(\varepsilon_2,\varphi_2)在以(0,x)为半径,x为半径的圆内$$

$$I_{右}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2\pi}{2}}{x^2}\cos(\varepsilon_2-\varphi_2)^2=\frac{\pi}{2}$$

综上所述: $I=\frac{\pi}{2}$

May 24

1. 下列函数中原函数必为周期函数的是:

- A. $|\sin x|$
- B. $\sin^4 x$
- C. $\dfrac{1}{1+\sin^2 x}$
- D. $\dfrac{\sin x}{1+\sin^4 x}$

解

原函数为周期函数, 只需满足函数为周期函数, 且 $\int_0^T f(t)dt = 0$

对于四个选项: A, B, C对应的$f(t)$在一个周期中函数值大于 0, $\int_0^T f(t)dt > 0$

此题答案选 D

2. 设 $y = \dfrac{1}{2}e^{2x} + (x - \frac{1}{3})e^x$ 是二阶常系数线性微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个特解, 则:

- A. $a = -3,\ b = 2,\ c = -1$
- B. $a = 3,\ b = 2,\ c = -1$
- C. $a = -3,\ b = 2,\ c = 1$
- D. $a = 3,\ b = 2,\ c = 1$

解

我们可以得到特征方程的两根: $r_1 = 1,\ r_2 = 2 \Rightarrow$ 特征方程为: $r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow a = -3,\ b = 2$

我们将特解 $y* = xe^x$ 代入微分方程, 得到: $c = -1$, 故此题选 A

3. 设 $F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - a\cos x|dx$, 求 $F(a)$ 的最小值

解

$$F(a) = \sqrt{a^2+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(x+\varphi)|dx, \text{其中} \begin{cases} \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \\ \sin\varphi = -\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases}$$

(1).$a > 0,\ \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$

$$\frac{F(a)}{\sqrt{a^2+1}} = \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}+\varphi} |\sin t|dt = 2\int_0^{-\varphi} \sin t dt + \int_{-\varphi}^{\frac{\pi}{2}+\varphi} \sin t dt = 2 - \cos\varphi + \sin\varphi = 2 - \frac{a+1}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\begin{aligned}F(a) &= 2\sqrt{a^2+1}-(a+1)\\ F'(a) &= \frac{2a-\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}}\\ \text{当}x &= \frac{\sqrt{3}}{3}, F(a)_{min}=\sqrt{3}-1\end{aligned}$$

(2).$a<0,\ \varphi\in(0,\frac{\pi}{2})$

$$\frac{F(a)}{\sqrt{a^2+1}}=\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}+\varphi}|\sin t|dt=\cos\varphi+\sin\varphi=\frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$F(a) = 1-a,\ F(a)\geq 1,\ F(a)_{min}=1$$

综上,$F(a)_{min}=\sqrt{3}-1$

May 25

1. 设 $f(x)$ 连续且以 T 为周期, 则下列函数以 T 为周期的是:

- A. $\int_0^x f(t)dt$
- B. $\int_{-x}^0 f(t)dt$
- C. $\int_0^x f(t)dt-\int_{-x}^0 f(t)dt$
- D. $\int_0^x f(t)dt+\int_{-x}^0 f(t)dt$

解

我们知道如果原函数也为周期函数, 那么必有: $\int_0^T f(t)dt=0$

对于 A,B 选项, 我们自然可以排除掉, 没有任何附加条件

对于 C,D 选项

$$C\Rightarrow\int_0^x[f(t)-f(-t)]dt\text{奇函数}\Rightarrow\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[f(t)-f(-t)]dt=0$$

$$D\Rightarrow\int_0^x[f(t)+f(-t)]dt\text{偶函数}$$

故此题答案选 C

2. $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{(1+x^2)(1+x^3)}$

解

令 $x=\frac{1}{t}, t\in(0,+\infty), dx=-\frac{1}{t^2}dt$, 原积分等价于:

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{t^3}{(1+t^2)(1+t^3)}dt=\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{(1+x^2)(1+x^3)}dx$$

$$2I=\int_0^{+\infty}\frac{1+x^3}{(1+x^2)(1+x^3)}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}$$

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^3)}=\frac{\pi}{4}$$

3. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+2\int_0^x f(t)dt=x^2$, 求 $f(x)$

解

令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt, F'(x)=f(x)$, 原微分方程等价于:

$$F'(x)+2F(x)=x^2\Rightarrow[e^{2x}F(x)]'=x^2e^{2x}$$
$$e^{2x}F(x)=\int x^2e^{2x}dx\Rightarrow e^{2x}F(x)=\frac{x^2e^{2x}}{2}-\frac{xe^{2x}}{2}+\frac{e^{2x}}{4}+C$$

我们得到:

$$F(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+Ce^{-2x}$$

$f(x)=F'(x)=x-\frac{1}{2}-2Ce^{-2x}, f(0)=-\frac{1}{2}-2C=0\Rightarrow C=-\frac{1}{4}$

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-2x}+x-\frac{1}{2}$$

4. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $x\int_0^1 f(tx)dt=f(x)+x$, 求 $f(x)$

解

对于 $x\int_0^1 f(tx)dt$, 令 $u=tx, t=\dfrac{u}{x}, dt=\dfrac{du}{x}$, 原微分方程为:

$$\int_0^x f(u)du=f(x)+x$$

令 $F(x)=\int_0^x f(u)du=f(x)+x, F'(x)=f(x)$, 原微分方程等价于:

$$F(x)-F'(x)=x\Rightarrow[e^{-x}F(x)]'=-xe^{-x}$$
$$e^{-x}F(x)=\int(-xe^{-x})dx=(x+1)e^{-x}+C\Rightarrow F(x)=Ce^x+x+1$$
$$f(x)=F'(x)=Ce^x+1, f(0)=0\Rightarrow C=-1$$
$$f(x)=1-e^x$$

5. 求抛物线 $y=x^2$ 和直线 $x-y-2=0$ 之间的最短距离

解

方法一 (不太严谨):

设抛物线上任意一点坐标 $P(x_0, y_0)$, 点 P 到直线 $x-y-2=0$ 的距离为:

$$d = \frac{|x_0 - x_0^2 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{(x_0-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}{\sqrt{2}}$$

$$d_{min} = \frac{7\sqrt{2}}{8}$$

方法二:

我们设抛物线上一点 P 坐标为 (x, y), 直线 $x-y-2=0$ 上一点 Q 坐标 (α, β), 我们得到 $|PQ|^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2$.

我们令 $f(x, y, \alpha, \beta, \lambda, \mu) = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + \lambda(y - x^2) + \mu(\alpha - \beta - 2)$

我们令:

$$\begin{cases} f'_x = 2(x-\alpha) - 2\lambda x = 0 \\ f'_y = 2(y-\beta) + \lambda = 0 \\ f'_\alpha = -2(x-\alpha) + \mu = 0 \\ f'_\beta = -2(y-\beta) - \mu = 0 \\ f'_\lambda = y - x^2 = 0 \\ f'_\mu = \alpha - \beta - 2 = 0 \end{cases}$$

我们解得:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \\ \alpha = \frac{11}{8} \\ \beta = -\frac{5}{8} \\ \lambda = -\frac{7}{4} \\ \mu = -\frac{7}{4} \end{cases}$$

$$f(x, y, \alpha, \beta, \lambda, \mu)_{min} = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{11}{8}, -\frac{5}{8}, -\frac{7}{4}, -\frac{7}{4}) = \frac{7\sqrt{2}}{8}$$

May 26

1. 设 $f(x)$ 二阶可导,$f(-x) = -f(x), f(x+1) = f(x), x \in (-\infty, +\infty)$, 且 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)}{\sin(x-1)} = 1$, 则

- A. $f''(99) \le f'(100) \le f(101)$
- B. $f(99) = f(100) < f'(101)$
- C. $f'(99) \le f(100) < f''(101)$
- D. $f(99) < f'(100) = f''(100)$

解

由题意知道:

$$f(x), f'(x), f''(x)\text{周期为}1, f(x), f''(x)\text{是奇函数, 且}f(1)=0$$
$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{\sin(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=1$$

我们从而得到: $f(n)=0, f'(n)=1, f''(n)=0$

此题答案选 B

2. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x (x-t)f(t)dt+e^{-x}-1$, 求 $f(x)$

解

原微分方程等价于:

$$\int_0^x f(t)dt=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt+e^{-x}-1$$

对微分方程左右两边对 x 求导, 得到:

$$f(x)=\int_0^x f(t)dt-e^{-x}$$

我们令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt, f(x)=F'(x)$, 上式等价于:

$$F(x)-F'(x)=e^{-x}\Rightarrow[e^{-x}F(x)]'=-e^{-2x}$$
$$F(x)=Ce^x+\frac{1}{2}e^{-x}$$
$$f(x)=F'(x)=Ce^x-\frac{1}{2}e^{-x}, f(0)=-1\Rightarrow C=-\frac{1}{2}$$
$$f(x)=-\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}$$

3. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)dt$, 求 $f(x)$

解

对微分方程左右两边对 x 求导, 得到:

$$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)dt$$

令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt, f(x)=F'(x)$, 上式等价于:

$$F''+F=\cos x$$

特征方程为 $r^2+1=0, r_1=i,\ r_2=-i$, 方程通解为 $F(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$

特解设为 $F(x)=x(A\cos x+B\sin x)$, 代入得到:

$$A=0,\ B=\frac{1}{2}$$
$$F(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{x}{2}\sin x$$

$$f(x)=F'(x)=C_2\cos x-C_1\sin x+\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x\Rightarrow\begin{cases}f(0)=0\\f'(0)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=0\\C_2=0\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x$$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$

解

典型的区间再现

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan(\frac{\pi}{4}-x))dx$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\ln 2-\ln(1+\tan x))dx$$

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2dx=\frac{\ln 2}{4}\pi$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx=\frac{\ln 2}{8}\pi$$

5. 设 $f(x)$ 是连续的正值函数, 且单调减少, 证明: $\dfrac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx}\le\dfrac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}$

解

原命题等价于:

$$\int_0^1 xf^2(x)dx\int_0^1 f(y)dy-\int_0^1 xf(x)dx\int_0^1 f^2(y)dy\le 0$$

$$I=\iint\limits_D[xf(x)f(y)(f(x)-f(y))]dxdy,D=\{0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1\}$$

积分区域关于 $y=x$ 对称, 我们交换 x,y 位置, 得到

$$2I=\iint\limits_D[f(x)f(y)(f(x)-f(y))(x-y)]dxdy,D=\{0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1\}$$

我们知道 $f(x)$ 单调递减, 且 $f(x)>0$, 我们得到:

$$f(x)f(y)>0,\ (x-y)(f(x)-f(y))\le 0\Rightarrow I\le 0,\text{证毕}$$

6. $\iint\limits_D\dfrac{1}{\arcsin\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, 其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1,\ x^2+y^2\ge y,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$

解

利用极坐标公式进行代换,$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$, 我们得到:

$$I = \iint\limits_{D_1} \frac{r}{\arcsin r} dr d\theta, \theta \in (0, \frac{\pi}{2}),\ r \in (\sin\theta, 1)$$

上面的积分可以化为:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\sin\theta}^1 \frac{r}{\arcsin r} dr = \int_0^1 dr \int_0^{\arcsin r} \frac{r}{\arcsin r} d\theta = \frac{1}{2}$$

$$\iint\limits_{D} \frac{1}{\arcsin\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = \frac{1}{2}$$

May 27

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $\int_0^1 f(x)dx = 1$, 证明: $\exists \xi \neq \eta \in (0,1)$, s.t. $f(\xi) + 3f(\eta) = 4f(\xi)f(\eta)$

解

我们令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 我们有:

$$F(0) = 0,\ F(1) = 1, F(x)\text{在}[0,1]\text{连续},\text{在}(0,1)\text{可导}$$

原命题转化为证明:

$$\exists \xi \neq \eta \in (0,1), \text{s.t. } F'(\xi) + 3F'(\eta) = 4F'(\xi)F'(\eta)$$

上面的式子我们进行一些变形:

$$\exists \xi \neq \eta \in (0,1), \text{s.t. } \frac{1}{F'(\eta)} + \frac{3}{F'(\xi)} = 4$$

$F(x)$在$[0,1]$连续, $F(0) = 0, F(1) = 1$,$\exists c \in (0,1)$s.t. $F(c) = \frac{1}{4}$.

由拉格朗日中值定理我们得到:

$$\exists \xi \in (0,c), \eta \in (c,1), \text{s.t.} \begin{cases} \dfrac{F(c)-F(0)}{c} = F'(\xi) \\ \dfrac{F(1)-F(c)}{1-c} = F'(\eta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{F'(\xi)} = 4c \\ \dfrac{1}{F'(\eta)} = \frac{4}{3}(1-c) \end{cases}$$

$$\frac{1}{F'(\xi)} + \frac{3}{F'(\eta)} = 4c + 4(1-c) = 4$$

$$\exists \xi \neq \eta \in (0,1), \text{s.t. } f(\xi) + 3f(\eta) = 4f(\xi)f(\eta), \text{证毕}$$

2. 函数 $\dfrac{|x|e^{\frac{1}{x-1}}\ln(x-1)^2}{x(x-1)(x-2)}$ 在下列哪个区间内无界:

- A. $(-\infty, 0)$
- B. $(0,1)$

- C. $(1,2)$
- D. $(2,+\infty)$

解

$$\lim_{x\to0^-}\frac{-2x\ln(1-x)}{2ex}=0,\ \lim_{x\to0^+}\frac{2x\ln(1-x)}{2ex}=0$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{2e^{\frac{1}{x-1}}\ln(1-x)}{1-x}=0,\ \lim_{x\to1^+}\frac{2e^{\frac{1}{x-1}}\ln(x-1)}{1-x}=\infty$$

$$\lim_{x\to2}\frac{2e\ln(x-1)}{x-2}=2e$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x-1)}{(x-1)(x-2)}=0,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{-2\ln(1-)}{(x-1)(x-2)}=0$$

答案:C

3. 计算极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$ 和 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to1}}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{\frac{y^2}{\sin\frac{2}{x}}}$

解

$$I_1=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1+x^2+y^2-1}{(x^2+y^2)(\sqrt{1+x^2+y^2}+1)}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}+1}=\frac{1}{2}$$

$$I_2=\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to1}}e^{\frac{y^2}{\sin\frac{2}{x}}}\ln(1+\frac{1}{xy})$$

$$I_2=\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to1}}e^{\frac{xy^2}{2}\frac{1}{xy}}=e^{\frac{1}{2}}$$

4. $\int_0^\pi(e^{-\cos x}-e^{\cos x})\,dx$

解

区间再现

原积分等价于:

$$I=\int_0^\pi(e^{\cos x}-e^{-\cos x})\,dx$$

$$2I=0\Rightarrow I=0$$

5. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\arctan e^x)\sin^2 x dx$

解

区间再现
原积分等价于:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - \arctan e^x) \sin^2 x dx$$

$$2I = \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{4}$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\arctan e^x) \sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{8}$$

6. 设 $f(x) = \int_0^x f(x-t)\sin t dt + x$, 求 $f(x)$

解

我们有: $\int_0^x f(x-t)\sin t dt = \sin x \int_0^x f(t)\cos t dt - \cos x \int_0^x f(t)\sin t dt$
原微分方程等价于:

$$f(x) = \sin x \int_0^x f(t)\cos t dt - \cos x \int_0^x f(t)\sin t dt + x$$

两边对 x 求导得到:

$$f'(x) = 1 + \cos x \int_0^x f(t)\cos t dt + \sin x \int_0^x f(t)\sin t dt$$

再次两边对 x 求导得到:

$$f''(x) = f(x) + \cos x \int_0^x f(t)\sin t dt - \sin x \int_0^x f(t)\cos t dt \Rightarrow f''(x) = f(x) + x - f(x)$$

$$f''(x) = x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + C_1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{6}x^3 + C_1 x + C_2$$

我们有: $f(0) = 0,\ f'(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 1,\ C_2 = 0$

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + x$$

May 28

1. 下列函数在区间 $(0,1)$ 内无界的是:

- A. $\int_0^x \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} dt$
- B. $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$
- C. $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1-t)^3}} dt$
- D. $\int_0^x \frac{1}{(t-1)^2} \sin \frac{1}{t-1} dt$

解

$A \quad f(x)=\int_0^x \frac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}dt=e^{-\frac{1}{x}}$

$B \quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$C \quad f(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1-t)^3}}dt=\frac{2}{\sqrt{1-x}}-2,\ f(1)\to+\infty$

$D \quad f(x)=\int_0^x \frac{1}{(t-1)^2}\sin\frac{1}{t-1}dt=\cos\frac{1}{x-1}+\frac{\pi}{2}$ 有界

答案:C

May 29

1. $I=\iint\limits_D \frac{x^3\sin y\cos y e^{\sqrt{x^2+2}}}{\sqrt{x^2\cos^2 y+2\sqrt{x^2+2}}}dxdy$, 其中$D=\{(x,y)|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le\frac{\pi}{2}\}$

解

原二重积分可以化为:

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{D'}\frac{r^2\sin\theta\cos\theta e^{\sqrt{r^2+2}}}{\sqrt{r^2\cos^2\theta+2\sqrt{r^2+2}}}rdrd\theta,\ \text{其中}D'=\{(r,\theta)|\,0\le r\le 1,\ \theta\in(0,\frac{\pi}{2})\}\\
&= \iint\limits_{D''}\frac{xye^{\sqrt{x^2+y^2+2}}}{\sqrt{x^2+2\sqrt{x^2+y^2+2}}}dxdy\\
&= \int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{ye^{\sqrt{x^2+y^2+2}}}{\sqrt{x^2+y^2+2}}dy\\
&= e^{\sqrt{3}}\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx-\int_0^1\frac{xe^{\sqrt{x^2+2}}}{\sqrt{x^2+2}}dx\\
&= e^{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-\sqrt{2})-e^{\sqrt{3}}+e^{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

2. 已知函数 $f(x)=\frac{\int_0^x\ln(1+t^2)dt}{x^\alpha}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界, 则 α 的取值范围为:

- A. $(0,+\infty)$
- B. $(0,3]$
- C. $(0,2)$
- D. $(1,3]$

解

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界, 我们可以得到:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)\text{和}\lim_{x\to 0}f(x)\text{存在}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^{3-\alpha}}{\alpha(\alpha-1)(1+x^2)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^{3-\alpha}}{\alpha(\alpha-1)}$$

我们得到:

$$\begin{cases} 3-\alpha \geq 0 \\ 3-\alpha \leq 2 \\ \alpha \neq 1 \end{cases} \Rightarrow 1 < \alpha \leq 3$$

综上所述, 答案:D

May 30

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos(\frac{\pi}{4}-x)\cos x} dx$

解

区间再现

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\pi}{4}-x}{\cos(\frac{\pi}{4}-x)\cos x} dx$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\pi}{4}}{\cos(\frac{\pi}{4}-x)\cos x} dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x + \sin x \cos x} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\tan x}{1+\tan x} = \frac{\ln 2\sqrt{2}\pi}{4}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos(\frac{\pi}{4}-x)\cos x} dx = \frac{\ln 2\sqrt{2}\pi}{8}$$

2. 计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{1}{xy} dxdy,\ D = \{(r,\theta)|\frac{\cos\theta}{4} \leq r \leq \frac{\cos\theta}{2}, \frac{\sin\theta}{4} \leq r \leq \frac{\sin\theta}{2}\}$

解

二重积分积分区域如下图所示:

$$I = 2\iint_{D_{ACB}} \frac{1}{xy} dxdy = 2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\frac{\cos\theta}{4}}^{\frac{\sin\theta}{2}} \frac{1}{r\sin\theta\cos\theta} dr$$

$$I = 2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln 2\tan\theta}{\sin\theta\cos\theta} d\theta = 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln 2t}{t} dt = \ln^2 2$$

3. 当n充分大时, $a-\frac{1}{n} < a_n < a+\frac{1}{n}$是数列$a_n$收敛于$a$的什么条件?

- A. 充分必要条件
- B. 必要条件但非充分条件
- C. 充分条件但非必要条件

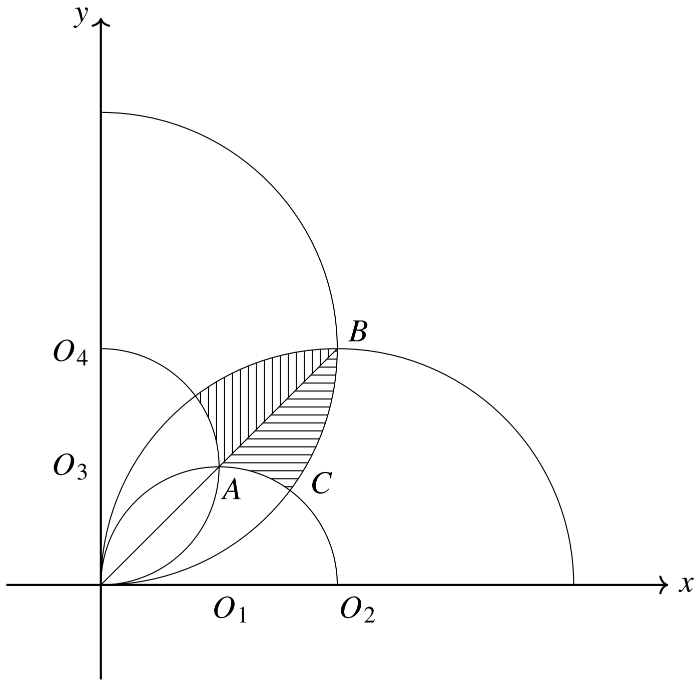


图 32.1: 二重积分区域示意图

- D. 既非充分也非必要条件

解

(i). 充分性:

$a-\dfrac{1}{n}<a_n<a+\dfrac{1}{n}$, 由夹逼定理得到:

$$\lim_{n\to+\infty}(a-\frac{1}{n})<\lim_{n\to+\infty}a_n<\lim_{n\to+\infty}(a+\frac{1}{n})$$

我们有: $\lim\limits_{n\to+\infty}(a-\frac{1}{n})=\lim\limits_{n\to+\infty}(a+\frac{1}{n})=a$ 因此:

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=a\Rightarrow \text{充分性成立}$$

(ii). 必要性

$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists N_0>0,$ 当 $n>N_0, |a_n-a|<\varepsilon$

我们得到:

$n>N_0, a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$, 当 $\dfrac{1}{N_0+1}<\varepsilon$, 我们不能得到 $a-\dfrac{1}{n}<a_n<a+\dfrac{1}{n}$, 必要性不成立

答案: C

4. $\iint\limits_D|x^2+y^2-\sqrt{2}(x+y)|dxdy,\ D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 4\}$

解

原二重积分等价于:

$$I = I_1 + 2I_2 = \iint\limits_{D} [x^2 + y^2 - \sqrt{2}(x + y)]dxdy + 2\iint\limits_{D_1} [\sqrt{2}(x + y) - (x^2 + y^2)]dxdy$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r(r^2 - \sqrt{2}r(\sin\theta + \cos\theta))dr = \int_0^{2\pi} (4 - \frac{8\sqrt{2}}{3}(\sin\theta + \cos\theta))d\theta = 8\pi$$

$$I_2 = \iint\limits_{D_1} [\sqrt{2}(x + y) - (x^2 + y^2)]dxdy, D_1 : (x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (y - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 \leq 1$$

做变量替换: $\begin{cases} x - \frac{\sqrt{2}}{2} = R\cos\alpha \\ y - \frac{\sqrt{2}}{2} = R\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow dxdy = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(R, \alpha)}\right| dRd\alpha = RdRd\alpha$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^1 (1 - R^2)RdR = \frac{\pi}{2}$$

$$I = I_1 + 2I_2 = 9\pi$$

May 31

1. 设 $f(x)$ 可积, 则下列结论正确的是:

- A.如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$, 则 $\lim\limits_{x\to0} f(x) = A$
- B.如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, 且 $\lim\limits_{x\to0} f(x) = A$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$
- C.如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = A$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$
- D.如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{|f(t)|}{1 + t^2}dt = A$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{|f(t)|}{1 + t^2}dt = A$

解

针对于此题, 我们需要区分几个概念:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \text{只要求在}x\text{邻域内有定义, 不要求}x\text{处有定义}$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = A, f(x)\text{单调}, \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = A$$

对于 A, 我们只能得到在 $x = 0$ 的邻域内的一组特殊的离散点满足极限的定义, 其余点未知, 我们举一个反例,$x_n = \frac{1}{n\pi}$, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$

对于 B, 我们举出一个反例 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, x \neq 0 \\ 2 \end{cases}$,$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, n\text{为奇数} \\ 0, n\text{为偶数} \end{cases}$

对于 C, 不清楚 $f(x)$ 单调性, 举一个反例,$f(x) = \sin\pi x$

对于 D, 利用积分的几何意义知道 $g(x) = \int_0^x \frac{|f(t)|}{1 + t^2}dt$ 单调递增

答案:D.

2. 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$, 又 $g(x,y)=f(xy,\frac{1}{2}(x^2-y^2))$, 求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$

解

我们令 $\begin{cases} u=xy \\ v=\dfrac{1}{2}(x^2-y^2) \end{cases}$

我们有:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=y\dfrac{\partial f}{\partial u}+x\dfrac{\partial f}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=x\dfrac{\partial f}{\partial u}-y\dfrac{\partial f}{\partial v} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}=y(y\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+x\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v})+\dfrac{\partial f}{\partial v}+x(y\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+x\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}) \\ \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x(x\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}-y\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v})-\dfrac{\partial f}{\partial v}-y(x\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}-y\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}) \end{cases}$$

我们得到:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=(x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=x^2+y^2$$

3. $\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{x\sin x\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx$

解

区间再现

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x(\frac{\pi}{2}-\arctan e^x)}{1+\cos^2 x}dx$$

$$2I=\frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

令 $J=\int_0^{\pi}\dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$$J=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx\Rightarrow 2J=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi^2}{2}$$

$$J=\frac{\pi^2}{4},I=\frac{\pi}{2}J=\frac{\pi^3}{8}$$

4. 求 $\iint\limits_D \frac{1}{3x^2+y^2}dxdy$, D是由$x^2+y^2-xy=1$, $x^2+y^2-xy=2$和直线$y=\sqrt{3}x$, $y=0$围成

解

原二重积分等价于:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{r_1}^{r_2}\frac{r}{3r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}dr,\text{其中}\begin{cases}r_1=\sqrt{\dfrac{1}{1-\sin\theta\cos\theta}}\\ r_2=\sqrt{\dfrac{2}{1-\sin\theta\cos\theta}}\end{cases}$$

$$I=\frac{\ln 2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin^2\theta+3\cos^2\theta}d\theta=\frac{\ln 2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3+\tan^2\theta}d\tan\theta$$

$$I=\frac{\ln 2}{2\sqrt{3}}\arctan(\frac{\tan\theta}{\sqrt{3}})|_0^{\sqrt{3}}=\frac{\pi\ln 2}{8\sqrt{3}}$$

第 33 章 June

33.1 Week I

June 1

1. $f(x)$在$[0,1]$上连续, $\forall x,y\in\mathbb{R}$, $|f(x)-f(y)|\le M|x-y|$, 求证: $\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})\right|\le\frac{M}{2n}$

解

引理 33.1.1 (积分和求和)

$$\int_0^1 f(x)dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)dx$$

我们利用上面的式子, 对不等式的左边进行处理:

$$\text{左边}: \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)dx-\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(\frac{k}{n})dx\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}[f(x)-f(\frac{k}{n})]dx\right|$$

由绝对值不等式得到:

$$\text{左边}\le\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|[f(x)-f(\frac{k}{n})]\right|dx\le\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}M(\frac{k}{n}-x)dx$$

$$\text{左边}\le M\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n^2}=\frac{M}{2n}=\text{右边}$$

June 2

1. 已知数列 $\{x_n\}$, 且 $\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{x_{n+1}}=\int_0^1 e^{-x^2}dx$, 则:

- A. $\lim\limits_{n\to+\infty}=0$
- B. $\lim\limits_{n\to+\infty}=\infty$
- C. $\lim\limits_{n\to+\infty}=a\ (a\neq 0)$
- D. $\lim\limits_{n\to+\infty}$不存在但不是$\infty$

解

首先我们可以得到:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=a,\ a\in(0,1)$$

我们由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{x_{n+1}}=a\Rightarrow|x_n|=a|x_{n+1}|<|x_{n+1}|\Rightarrow x_n$单调递增

我们假设 x_n 有上界

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}x_{n+1}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{x_{n+1}}=1\neq a\text{矛盾!!!}$$

答案:B

2. 设 $f(x,y)$二阶偏导数连续, $f(1,y)=f(x,1)=0, \iint\limits_D f(x,y)dxdy=a$, 其中 $D\in[0,1]\times[0,1]$, 计算 $\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)d\sigma$

解

原二重积分可以化为:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xdx\int_0^1 ydf'_x(x,y) &= \int_0^1 x\left[yf'_x(x,y)|_{y=0}^{y=1}-\int_0^1 f'_x(x,y)dy\right]dx\\
&= -\int_0^1 xdx\int_0^1 f'_x(x,y)dy\\
&= -\int_0^1 dy\int_0^1 xdf(x,y)\\
&= -\int_0^1\left[xf(x,y)|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 f(x,y)dx\right]dy\\
&= \int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy=a
\end{aligned}$$

$$\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)d\sigma=\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy=a$$

3. 设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx\ (n=0,1,2,\cdots)$

(1).证明: 数列$\{a_n\}$单调减少, 且$a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2},\ (n=2,3,\cdots)$

(2). 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$

解

(1). 我们令 $x=\sin t,\ t\in[0,\frac{\pi}{2}],\ dx=\cos t dt$, 我们有:

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\cos^2 t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2} t dt$$

$$a_0=\frac{\pi}{4},\ a_1=\frac{1}{3}$$

根据华里士公式, 我们有:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1, n\text{为大于 1 的奇数}\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, n\text{为正偶数}\end{cases}$$

$$a_n-a_{n-1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2} t dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1} t dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1} t dt$$

$$a_n-a_{n-1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}-(1-\sin t)^2\sin^{n-1} t dt<0\Rightarrow a_n<a_{n-1}\Rightarrow\{a_n\}\text{单调递减}$$

(i). 当 n 为奇数时, 我们有:

$$\begin{cases}a_n=(1-\frac{n+1}{n+2})\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1\\ a_{n-2}=(1-\frac{n-1}{n})\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_n=\frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1\\ a_{n-2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1\end{cases}$$

$$a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$$

(i). 当 n 为偶数数时, 我们有:

$$\begin{cases}a_n=(1-\frac{n+1}{n+2})\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\\ a_{n-2}=(1-\frac{n-1}{n})\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_n=\frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\\ a_{n-2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$$

综上所述,数列$\{a_n\}$单调减少, 且$a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2},\ (n=2,3,\cdots)$

(2). 我们不妨设 $b_n=\frac{a_n}{a_{n-1}},\ (n=1,2,\cdots)$

$b_1=\frac{4}{3\pi}$, 当 $n\geq 2$ 是, 我们有:

$$b_nb_{n-1}=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\frac{n-1}{n+2}$$

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$

$$A^2=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+2}=1\Rightarrow A=1(A>0)$$

我们来严格证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=1$

原命题转换为:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N>0,\text{当}n>N\text{时},|\frac{a_n}{a_{n-1}}-1|<\epsilon$$

$$\int_0^1(1-x)x^{n-1}\sqrt{1-x^2}dx<\varepsilon\int_0^1x^{n-1}\sqrt{1-x^2}dx\Rightarrow\int_0^1(1-x-\varepsilon)x^{n-1}\sqrt{1-x^2}dx<0$$

$$\int_0^{1-\varepsilon}(1-x-\varepsilon)x^{n-1}\sqrt{1-x^2}dx<\int_{1-\varepsilon}^1(x+\varepsilon-1)x^{n-1}\sqrt{1-x^2}dx$$

$$\text{左式}<(1-\varepsilon)^{n-1}\int_0^1x^{n-1}\sqrt{1-x^2}dx=P(1-\varepsilon)^{n-1}$$

$$\text{右式}>\int_{1-\frac{\varepsilon}{2}}^1(x+\varepsilon-1)x^{n-1}\sqrt{1-x^2}dx>(1-\frac{\varepsilon}{2})^{n-1}\int_{1-\frac{\varepsilon}{2}}^1(x+\varepsilon-1)\sqrt{1-x^2}dx>Q(1-\frac{\varepsilon}{2})^{n-1}$$

其中 P,Q 均为与 n 无关的正数, 我们只需找到 N, 使得 $Q(1-\dfrac{\varepsilon}{2})^{n-1}>P(1-\varepsilon)^{n-1}$

$$n>[1+\frac{\ln P-\ln Q}{\ln(1-\frac{\varepsilon}{2})-\ln(1-\varepsilon)}]$$

综上,$\forall\varepsilon>0,\ \exists N=[1+\dfrac{\ln P-\ln Q}{\ln(1-\frac{\varepsilon}{2})-\ln(1-\varepsilon)}]+1>0,\text{当}n>N\text{时},|\dfrac{a_n}{a_{n-1}}-1|<\epsilon$

注

(1). 我们可以得到:

$$a_{n+1}-a_n=\int_0^1x^{n+1}\sqrt{1-x^2}dx-\int_0^1x^n\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^1(x-1)x^n\sqrt{1-x^2}dx<0$$

我们可以得到数列 $\{a_n\}$ 单调递减.

我们还有:

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx \\ &= -\frac{1}{3}\int_0^1 x^{n-1}d(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}(1-x^2)dx \\ &= \frac{n-1}{3}a_{n-2}-\frac{n-1}{3}a_n \\ a_n &= \frac{n-1}{n+2}a_{n-2} \end{aligned}$$

(2). 我们由 (1) 知道,$\{a_n\}$ 单调递减且 $a_n > 0$, 我们得到:

$$\begin{cases} a_n < a_{n-1} \\ a_{n-1} < a_{n-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \\ \dfrac{a_n}{a_{n-2}} < \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \end{cases}$$

我们由夹逼定理可以得到:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-2}} = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$$

综上所述, 我们得到: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = 1$

June 3

1.$xy' - (2x^2+1)y = x^2(x \geq 1)$, 且 $y(1) = a$, 讨论 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$

解

我们得到微分方程:

$$y' - (2x+\frac{1}{x})y = x \Rightarrow (e^{\int(-2x-\frac{1}{x})dx}y)' = xe^{\int(2x+\frac{1}{x})dx}$$

$$y = xe^{x^2}(\int_1^x e^{-t^2}dt + C)$$

我们由: $y(1) = a \Rightarrow C = \dfrac{a}{e}$

原问题转化为:

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{x^2}(\int_1^x e^{-t^2}dt + \frac{a}{e})$$

我们有:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

原极限可以写作:

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{x^2}(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^1 e^{-t^2}dt + \frac{a}{e})$$

(i). 当 $a = e(\int_0^1 e^{-t^2}dt - \frac{\sqrt{\pi}}{2})$

洛必达法则:

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{x^2}(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^1 e^{-t^2}dt + \frac{a}{e}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{-2x^2-1} = -\frac{1}{2}$$

(ii). 当 $a \neq e(\int_0^1 e^{-t^2}dt - \frac{\sqrt{\pi}}{2})$, 极限不存在.

2. 已知当 n 充分大时,$|a_n| \leq |b_n| \leq |c_n|$, 且 $\lim_{x\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} |c_n|$, 则:

- A. $\lim_{x\to\infty}(|a_n| - b_n)$
- B. $\lim_{x\to\infty}(|b_n| - c_n)$
- C. $\lim_{x\to\infty}(|b_n| - c_n)$
- D. $\lim_{x\to\infty}(|b_n| - a_n)$

解

我们有: $\lim_{x\to\infty} x_n = A \Rightarrow \lim_{x\to\infty} |x_n| = A$

我们假设: $\lim_{x\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} |c_n| = A$

我们得到: $\lim_{x\to\infty} |a_n| = A$

根据夹逼定理: $\lim_{x\to\infty} |b_n| = A$

我们已知的极限有 $\lim_{x\to\infty} a_n, \lim_{x\to\infty} |a_n|, \lim_{x\to\infty} |b_n|, \lim_{x\to\infty} |c_n|$

答案:D.

June 4

1. $\lim_{n\to+\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+3n})$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+3n} - \pi n) &= \lim_{n\to+\infty} \sin^2(\frac{3n\pi}{\sqrt{n^2+3n}+n}) \\ &= \sin^2(\frac{3\pi}{2}) = 1\end{aligned}$$

June 5

1. $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\left[\frac{1}{n+\ln 1}+\frac{2}{n+\ln 2}+\cdots+\frac{n}{n+\ln n}\right]$

解

我们不妨设 $b_n=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\left[\frac{1}{n+\ln 1}+\frac{2}{n+\ln 2}+\cdots+\frac{n}{n+\ln n}\right]$

$$a_n=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}[\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}],\quad c_n=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}[\frac{1}{n+\ln n}+\frac{2}{n+\ln n}+\cdots+\frac{n}{n+\ln n}]$$

我们得到:

$$c_n<b_n<a_n\Rightarrow\frac{n+1}{2(n+\ln n)}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}<b_n<\frac{n+1}{2n}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

我们有: $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2(n+\ln n)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$

对于 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

引理 33.1.2 (斯特林公式)

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$$

我们可以知道: $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$

注

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}&=\lim_{n\to+\infty}e^{-\frac{1}{n}(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n})}\\&=e^{-\int_0^1\ln x dx}\\&=e\end{aligned}$$

我们得到: $\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}b_n=\frac{e}{2}$

由夹逼定理, 我们得到: $\lim_{n\to+\infty}b_n=\frac{e}{2}$

2. $f(x)>0, f(x)f''(x)\geq[f'(x)]^2, f(0)=1$, 证明: $f(x)\geq e^{f'(0)x}$

解

这个题还有第一问: $f(x_1)f(x_2)\geq f^2(\frac{x_1+x_2}{2})$

我们由:

$$f(x)f''(x)\geq[f'(x)]^2\Rightarrow\text{可以构造出函数}\frac{f'(x)}{f(x)}\text{单调递增}$$

我们将 $f(x_1)f(x_2) \ge f^2(\frac{x_1+x_2}{2})$ 取对数得到:

$$\ln f(x_1) + \ln f(x_2) \ge 2\ln f(\frac{x_1+x_2}{2})$$

我们构造函数 $g(x) = \ln f(x)$

原命题转化为: $\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2} \ge g(\frac{x_1+x_2}{2})$

我们只需要证明: $g(x)$是凹函数, $g''(x) \ge 0$

我们有:

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)},\ g''(x) = \frac{f(x)f''(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)} \ge 0$$

$g(x)$为凹函数 $\Rightarrow \frac{g(x_1)+g(x_2)}{2} \ge g(\frac{x_1+x_2}{2})$

我们证明了: $f(x_1)f(x_2) \ge f^2(\frac{x_1+x_2}{2})$

$$g''(x) \ge 0 \Rightarrow g'(x) \ge g'(0) = \frac{f'(0)}{f(0)}$$

我们可以理解为: $g(x)$始终大于$g(0)$处的切线

$$g(x) \ge g'(0)x + g(0) \Rightarrow \ln f(x) \ge f'(0)x \Rightarrow f(x) \ge e^{f'(0)x}$$

3. 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明: $|f(x)| \le \frac{1}{2}\int_a^b |f'(x)|dx$

解

我们可以得到:

$$f(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)tdt,\ f(x) = -(f(b) - f(x)) = -\int_x^b f'(t)tdt$$

我们得到:

$$\begin{cases} |f(x)| = |\int_a^x f'(t)tdt| \le \int_a^x |f'(t)|dt \\ |f(x)| = |\int_x^b f'(t)tdt| \le \int_x^b |f'(t)|dt \end{cases} \Rightarrow 2|f(x)| \le \int_a^b |f'(x)|dx$$

我们证明: $|f(x)| \le \frac{1}{2}\int_a^b |f'(x)|dx$

June 6

1. $\iint_D \ln|sin(x-y)|dxdy,\ D = \{(x,y)|0 \le x \le y \le 2\pi\}$

解

利用二重积分换元公式: $\begin{cases} u = y - x \\ v = x \end{cases} \Rightarrow dudv = dxdy,\ 0 \le u \le \pi - v, 0 \le v \le \pi$

我们得到原二重积分等价于:

$$I=\int_0^{\pi} du\int_0^{\pi-u}\ln(sinu)dudv=\int_0^{\pi}(\pi-u)\ln(\sin u)du$$

利用区间再现公式:

$$2I=\pi\int_0^{\pi}\ln(\sin u)du\Rightarrow I=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin u)du$$

$$I=-\frac{\ln 2\pi^2}{2}$$

引理 33.1.3 (区间再现例子)

- $\int_0^{\pi}\ln(\sin x)dx=\int_0^{\pi}\ln(\cos x)dx=-\dfrac{\ln 2\pi}{2}$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\tan x)dx=0$

注

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)dx$$

我们有:

$$\begin{aligned}2I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x\cos x)dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln 2dx\\&=I-\frac{\ln 2\pi}{2}\\I&=-\frac{\ln 2\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$$

2. 设 $x_n=(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n\to\infty} e^{\ln(1+\frac{1}{n^2})} e^{\ln(1+\frac{2}{n^2})} \cdots e^{\ln(1+\frac{n}{n^2})} \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n^2}} e^{\frac{2}{n^2}} \cdots e^{\frac{n}{n^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n(n+1)}{2n^2}} \\ &= e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

引理 33.1.4 (不等式放缩)

- 琴生不等式: $\frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$
- 琴生不等式: $x \le \tan x \le \frac{4}{\pi}x, x \in [0, \frac{\pi}{4}]$
- 泰勒不等式: $\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x,\ x \in [0, +\infty)$

我们利用不等式放缩:

$$\frac{k}{n^2+k} \le \ln(1+\frac{k}{n^2}) \le \frac{k}{n^2} \Rightarrow \frac{k}{n^2+n} \le \ln(1+\frac{k}{n^2}) \le \frac{k}{n^2}$$

我们得到:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+n} \le \sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{k}{n^2}) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{2}$$

由夹逼定理, 我们得到: $\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{k}{n^2}) = \frac{1}{2} \Rightarrow I = e^{\frac{1}{2}}$

3. 若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数, 且满足 $\varphi(2) > \varphi(1)$,$\varphi(2) > \int_2^3 \varphi(x)dx$, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (1,3)$,$s.t.\varphi''(x) < 0$

解

我们有积分中值定理得到:

$$\exists \eta \in (2,3),\ s.t. \int_2^3 \varphi(x)dx = \varphi(\eta)$$

我们由拉格朗日中值定理得到:

$$\begin{cases} \exists \xi_1 \in (1,2),\ s.t. \dfrac{\varphi(2)-\varphi(1)}{2-1} = \varphi'(\xi_1) > 0 \\ \exists \xi_2 \in (2,\eta),\ s.t. \dfrac{\varphi(\eta)-\varphi(2)}{\eta-2} = \varphi'(\xi_2) < 0 \end{cases}$$

我们在区间 (ξ_1,ξ_2) 内使用拉格朗日中值定理得到:

$$\exists\xi_3\in(\xi_1,\xi_2),\ s.t.\frac{\varphi(\xi_2)-\varphi(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}=\varphi'(\xi_3)<0$$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi\in(1,3),s.t.\varphi''(x)<0$

June 7

1. 设 $x_0=0,x_n=\dfrac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$

解

我们有: $x_1=1,x_2=\dfrac{3}{2},x_n>0$

我们使用数学归纳法来证明 x_n 单调递增: $(x_{n+1}>x_n)$

(1). 当 $n=1$ 时,$x_2>x_1$ 成立

(2). 当 $n\geq 1$ 时, 假设 $n=k$ 时,$x_{k+1}>x_k$, 我们有:

$$x_{k+1}=\frac{1+2x_k}{1+x_k}>x_k\Rightarrow 1+2x_k-x_k>0$$

当 $n=k+1$ 时:

$$x_{k+2}=\frac{1+2\dfrac{1+2x_k}{1+x_k}}{1+\dfrac{1+2x_k}{1+x_k}}=\frac{3+5x_k}{2+3x_k}$$

$$x_{k+2}-x_{k+1}=\frac{3+5x_k}{2+3x_k}-\frac{1+2x_k}{1+x_k}=\frac{1+2x_k-x_k^2}{(2+3x_k)(1+x_k)}>0$$

我们证明: x_n 单调递增, 且 $x_n-2x_n-1<0\Rightarrow|x_n|<3$

$\{x_n\}$ 单调递增且有上界, 我们得到 x_n 极限必定存在, 我们不妨设:

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=A(A>0)\Rightarrow A=\frac{1+2A}{1+A}\Rightarrow A=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_n^{n+1}x^2\sin\dfrac{1}{x}dx$

解

我们有:

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}x\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=+\infty$$

我们有: $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_n^{n+1}x^2\sin\dfrac{1}{x}dx=+\infty$

3. 判断级数的敛散性: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n+1}{\sqrt{n^5-n+2}}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$

解

我们运用比较判别法的极限形式:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n+1}{\sqrt{n^5-n+2}}}{n^{-\frac{3}{2}}}=1$$

原级数收敛.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}}{2n^{-\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2}$$

原级数收敛.

4. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x)dx=A$, 求 $\int_0^1 dx\int_x^1 dy\int_x^y f(x)f(y)f(z)dz$

解

我们不妨设: $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, $F(0)=0, F(1)=A$, 原积分等价于:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)[F(y)-F(x)]dy\\
&= \int_0^1 f(x)dx\int_x^1 f(y)F(y)dy-\int_0^1 f(x)F(x)dx\int_x^1 f(y)dy\\
&= \int_0^1 f(x)[\frac{F^2(1)}{2}-\frac{F^2(x)}{2}]dx-\int_0^1 f(x)F(x)[F(1)-F(x)]dx\\
&= \frac{A^3}{2}-\frac{A^3}{6}-\frac{A^3}{2}+\frac{A^3}{3}\\
&= \frac{A^3}{6}
\end{aligned}$$

33.2 Week II

June 8

1. 设 $2x_1=1, 2x_{n+1}=1-x_n^2$, $n=1,2,\cdots$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$

解

我们有: $x_1=\frac{1}{2}, x_{n+1}=\frac{1}{2}-\frac{x_n^2}{2}\Rightarrow x_n\in(0,\frac{1}{2})$

我们发现数列 $\{x_n\}$ 不单调, 不能使用单调有界准则来判断.

方法一

使用夹逼定理, 先假定极限存在求出后证明:

$$a=\sqrt{2}-1 \Rightarrow a=\frac{1-a^2}{2}$$

$$|x_n-a|=|\frac{1-x_n^2}{2}-\frac{1-a^2}{2}|=|\frac{x_{x_{n-1}^2-a^2}}{2}|\leq\frac{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}{2}|x_{n-1}-a|\leq\cdots\leq(\frac{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}{2})^{n-1}|x_1-a|$$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}{2})^{n-1}=0$$

由夹逼定理: $\lim_{n\to\infty}|x_n-a|=0$

方法二

构造无穷级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_{n+1}-x_n)$, 证明此级数收敛.

$$|a_{n+1}-a_n|=|\frac{a_{n-1}^2-a_n^2}{2}|\leq\frac{1}{2}|a_n-a_{n-1}|\leq\cdots\leq\frac{1}{2^{n-1}}|a_2-a_1|$$

我们知道级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛, 由比较判别法我们知道级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}|x_{n+1}-x_n|$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 收敛

我们得到:

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}-x_1\text{存在}\Rightarrow\text{数列}\{x_n\}\text{极限存在}$$

方法三

用奇数项和偶数项极限相等推出数列 $\{x_n\}$ 极限存在

我们可以证明奇数项和偶数项单调递减, 如果极限存在奇数项和偶数项极限存在且相等.

我们不妨设: $\lim_{n\to\infty}x_{2n}=A$, $\lim_{n\to\infty}x_{2n-1}=B$

我们有:

$$\begin{cases}2A=1-B^2\\2B=1-A^2\end{cases}\Rightarrow A=B=\sqrt{2}-1$$

不妨设 $\lim_{n\to\infty}x_n=A(A>0)$, 我们对 $2x_{n+1}=1-x_n^2$ 两边同时取极限得到:

$$2A=1-A^2\Rightarrow A=\sqrt{2}-1$$

引理 33.2.1 (不单调数列极限)

(1). 夹逼准则

从定义出发, 证明: $|x_n - a|$ 极限为 0. (2). 构造无穷级数

我们构造出无穷级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_{n+1}-x_n)$, 证明这个级数收敛即可证明出数列 $\{x_n\}$ 极限存在.

(3) 奇数项和偶数项极限存在且相等

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = A$$

命题 33.2.1

设 $x_1 = 1, x_n = 1 + \frac{1}{1+x_{n-1}}, (n = 1, 2, \cdots)$, 证明极限 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在并求出此极限

解

我们发现: $x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = \frac{7}{5}, x_4 = \frac{17}{12} \Rightarrow x_1 < x_3, x_2 > x_4$

我们发现 x_n 不单调, 我们考虑数列 $\{x_n\}$ 的奇数项和偶数项.

我们不妨假设 $x_{2k-1} < x_{2k+1}, x_{2k} > x_{2k+2}$

我们有:

$$x_{2k+3} = 1 + \frac{1}{1+x_{2k+2}} > 1 + \frac{1}{1+x_{2k}} = x_{2k+1}$$

$$x_{2k+4} = 1 + \frac{1}{1+x_{2k+3}} < 1 + \frac{1}{1+x_{2k+1}} = x_{2k+2}$$

我们得到奇数项单调递增, 偶数项单调递减, 我们不妨假设:

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = A(A > 0), \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = B(B > 0)$$

我们有:

$$\begin{cases} A = 1 + \dfrac{1}{1+B} \\ B = 1 + \dfrac{1}{1+A} \end{cases} \Rightarrow A = B = \sqrt{2}$$

命题 33.2.2

设 $x_1 = 1, 2x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n^2 + \frac{1}{n^2}}, (n = 1, 2, \cdots)$, 证明极限数列 $\{x_n\}$ 收敛.

解

我们有: $x_1 = 1, x_n \geq 1$

$$2x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n^2 + \frac{1}{n^2}} \Rightarrow x_n > 0, 且x_{n+1} > x_n$$

我们不好找出 x_n 的上界, 我们要证明 x_n 收敛, 可以转化为证明:

$$级数\sum_{n=1}^{+\infty}(x_{n+1}-x_n)收敛$$

$$x_{n+1}-x_n=\frac{\frac{1}{n^2}}{2(\sqrt{x_n+\frac{1}{n^2}}+x_n)}\leq\frac{1}{4n^2}$$

级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{4n^2}$ 收敛, 我们由比较判别法得到原级数收敛.
数列 $\{x_n\}$ 收敛, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

命题 33.2.3

设 $x_0=1,x_{n+1}=\dfrac{1}{x_n^3+4},(n=0,1,2,\cdots)$, 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求出此极限

解

我们有: $x_1=\dfrac{1}{5},x_2=\dfrac{125}{601},x_n\in(0,1)$

$$|x_{n+1}-x_n|=\frac{1}{x_n^3+4}-\frac{1}{x_{n-1}^3+4}=\frac{|x_n-x_{n-1}^3|}{(x_n^3+4)(x_{n-1}^3+4)}\leq\frac{3}{16}|x_n-x_{n-1}|\leq\cdots\leq(\frac{3}{16})^n|x_1-x_0|$$

级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\dfrac{3}{16})^n$ 收敛, 根据比较判别法, 我们得到:

$$\text{级数}\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n-x_{n-1})\text{收敛}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n-x_0\text{存在}$$

我们不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A(A>0)$, 我们有:

$$A=\frac{1}{A^3+4}\Rightarrow A^4+4A-1=0$$

A 是方程 $x^4+4x-1=0$ 的唯一正根.

2. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2+(-1)^n}{n^2}$ 敛散性

解

我们不妨设: $a_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2}{n^2},b_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}-\frac{1}{n^2}$
我们根据莱布尼茨判别法得到: a_n 收敛,b_n 收敛, 原级数收敛.

3. $\iint_D|\dfrac{x+y}{2}-x^2-y^2|dxdy,D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq1\}$

解

原二重积分可化为:

$$I=\iint_D|\frac{1}{8}-(x-\frac{1}{4})^2-(y-\frac{1}{4})^2|dxdy,D:\{(x,y)|x^2+y^2\leq1\}$$

$$I=\iint_D(x^2+y^2-\frac{x+y}{2})dxdy-2\iint_{D'}(x^2+y^2-\frac{x+y}{2})dxdy$$

其中:

$$D = \{(x,y)|x^2+y^2 \le 1\},\ D' = \{(x,y)|(x-\frac{1}{4})^2+(y-\frac{1}{4})^2 \le \frac{1}{8}\}$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 [r^3 - \frac{r^2}{2}(\sin\theta+\cos\theta)]dr - 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}} [r^3 - \frac{r^2}{2}(\sin\theta+\cos\theta)]dr$$

$$I = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{24}\int_0^{\pi} \sin^4\theta d\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{64} = \frac{33\pi}{64}$$

4. 设 $f(x,y)$ 在区域 $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ 上连续,$f(0,0)=0$, 且 $f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处可微,$f_y'(0,0)=1$, 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\int_0^{x^2} dt \int_x^{\sqrt{t}} f(t,u)du}{1-e^{-\frac{x^4}{4}}}$

解

我们交换积分次序得到:

$$\begin{aligned} I &= -\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x du \int_0^{u^2} f(t,u)dt}{\frac{x^4}{4}} \\ &= -\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} f(t,x)dt}{x^3} \end{aligned}$$

我们由积分中值定理得到:

$$\exists \xi \in (0,x^2),\ s.t. \int_0^{x^2} f(t,x)dt = x^2 f(\xi,x)$$

原极限可以化为:

$$I = -\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 f(\xi,x)}{x^3} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{f(\xi,x)}{x}$$

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微, 我们得到:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(0,0) + f_x'(0,0)\Delta x + f_y'(0,0)\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$$

我们有:

$$f(\xi,x) = f(0,0) + f_x'(0,0)\xi + f_y'(0,0)x + o(\sqrt{(\xi)^2+x^2}) = f_x'(0,0)\xi + x + o(\sqrt{\xi^2+x^2})$$

我们知道:

$$0 < \xi < x^2 \to \lim_{x\to 0} \frac{\xi}{x} = 0$$

$$0 < \sqrt{\xi^2+x^2} < \sqrt{(x^4+x^2} \to \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\xi^2+x^2}}{x} = 0$$

我们得到原极限 $I = -1$

June 9

1. 设 $f(x)=1-\cos x$, 则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\sqrt{\cos x})(1-\sqrt[3]{\cos x})(1-\sqrt[4]{\cos x})(1-\sqrt[5]{\cos x})}{f\{f[f(x)]\}}$

解

我们有:

$$\begin{cases} x\to0,\sqrt{\cos x}-1=\sqrt{1+\cos x-1}-1\sim\frac{1}{2}(\cos x-1)\\ x\to0,\sqrt[3]{\cos x}-1=\sqrt[3]{1+\cos x-1}-1\sim\frac{1}{3}(\cos x-1)\\ x\to0,\sqrt[4]{\cos x}-1=\sqrt[4]{1+\cos x-1}-1\sim\frac{1}{4}(\cos x-1)\\ x\to0,\sqrt[5]{\cos x}-1=\sqrt[5]{1+\cos x-1}-1\sim\frac{1}{5}(\cos x-1)\end{cases}$$

原极限为:

$$\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{120}(1-\cos x)^4}{\dfrac{1}{8}(1-\cos x)^4}=\frac{1}{15}$$

2. $z(x,y)=\int_0^x dt\int_t^x f(t+y)g(yu)du$,$f$和$g'$ 连续, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解

我们交换积分次序:

$$z(x,y)=\int_0^x du\int_0^u f(t+y)g(yu)dt$$

我们得到:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=g(xy)\int_0^x f(t+y)dt$$

我们令 $t+y=u,t=u-y,dt=du$, 我们得到:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=g(xy)\int_y^{x+y}f(u)du$$

我们得到:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xg'(xy)\int_y^{x+y}f(t)dt+g(xy)[f(x+y)-f(y)]$$

June 10

1.$F(x)=\int_0^x e^{tx-t^2}dt$, 求 $F'(x)$

解

$$F(x)=\int_0^x e^{\frac{x^2}{4}-(t-\frac{x}{2})^2}dt=e^{\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{-(t-\frac{x}{2})^2}dt$$

令 $t-\frac{x}{2}=u, t=u+\frac{x}{2}, dt=du$, 我们得到:

$$F(x)=e^{\frac{x^2}{4}}\int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}}e^{-u^2}du$$

$$F'(x)=\frac{x}{2}e^{\frac{x^2}{4}}\int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}}e^{-u^2}du+e^{\frac{x^2}{4}}e^{-1\frac{x^2}{4}}=\frac{x}{2}e^{\frac{x^2}{4}}\int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}}e^{-u^2}du+1$$

2.$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan(\sin x)-x}{\arctan x-\arcsin x}$

解

原极限等价于:

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan(\sin x)-\sin x}{\arctan x-\arcsin x}+\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{\arctan x-\arcsin x}$$

$$I_1=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}\sin^3 x}{-\frac{1}{2}x^3}=-\frac{2}{3}$$

$$I_2=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{6}x^3}{-\frac{1}{2}x^3}=\frac{1}{3}$$

$$I=I_1+I_2=-\frac{1}{3}$$

3. 设 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足 $x_1=y_1=\frac{1}{2}$,$x_{n+1}=\sin x_n$,$y_{n+1}=y_n^2$, 判断 x_n 和 y_n 的阶数

- A.$\{x_n\}$比$\{y_n\}$高阶
- B.$\{y_n\}$比$\{x_n\}$高阶
- C.$\{x_n\}$和$\{y_n\}$等价
- D.$\{x_n\}$和$\{y_n\}$同阶不等价

解

我们用数学归纳法来证明:

$$0<y_n\leq x_n\leq\frac{1}{2}$$

(1). 当 $n=1$ 时, 上式显然成立

(2). 假设当 $n=k$ 时上式成立

(3). 当 $n=k+1$ 时:

$$x_{k+1}=\sin x_k<\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$y_{k+1}=y_k^2<\frac{1}{2}$$

$$\text{我们有}x_k\geq\sin x_k\geq x_k^2\geq y_k^2\Rightarrow x_{k+1}\geq y_{k+1}$$

我们得到:

$$\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} < \frac{\frac{1}{2}y_n}{\frac{2}{\pi}x_n} = \frac{\pi}{4}\frac{y_n}{x_n} < (\frac{\pi}{4})^n$$

两边取极限, 由夹逼定理可以得到:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{y_n}{x_n} = 0$$

4.$f(x)$ 可微, 且 $x = \int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t-x)dt$, 求 $f(x)$

解

我们对方程后面部分 $\int_0^x tf(t-x)dt$ 进行换元, 得到:

$$\int_0^x tf(t-x)dt = x \in_{-x}^0 f(-t)dt + \int_{-x}^0 tf(t)dt$$

我们对方程两边对 x 求导, 得到:

$$f(x) + \int_0^x f(-t)dt = 1 \Rightarrow f'(x) + f(-x) = 0 \Leftrightarrow f'(-x) + f(x) = 0$$

我们继续对 x 求导得到:

$$f''(x) - f'(-x) = 0 \Rightarrow f''(x) + f(x) = 0$$

$$f(x) = c_1\sin x + c_2\cos x, f(0) = 1, f'(0) = -1 \Rightarrow c_1 = -1.c_2 = 1$$

$$f(x) = \cos x - \sin x$$

June 11

1. $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt[4]{1-\sqrt[3]{1-\sqrt{1-x}}}-1}{(1+x)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}-1}$

解

原极限等价于:

$$I = -\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{1-x}}}{x^{-\frac{2}{3}}\ln(1+x)} = -\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{1+\sqrt{1-x}}} = -\frac{1}{4\sqrt[3]{2}}$$

2.$y'' + ay' = f(x), a > 0, f(+\infty) = b$, 求 $\lim_{x\to+\infty} y''(x)$

解

我们由 $y''+ay'=f(x),a>0$, 利用一阶线性微分方程通解公式得到:

$$y'=e^{-ax}\left(\int_0^x e^{at}f(t)dt+C\right)$$

我们得到:

$$\lim_{x\to+\infty} y'=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{at}f(t)dt+C\right)}{e^{ax}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{ax}f(x)}{ae^{x-1}}=\frac{b}{a}$$

我们又有: $y''+ay'=f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} y''=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ay']=0$$

June 12

1.$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(3+\sin x^2)^x-3^{\sin x}}{x^3}$

解

我们令 $f(x)=e^x$, 由拉格朗日中值定理得到:

$$\exists\xi\in(x\ln 3,x\ln(3+x^2)),\ s.t.e^{x\ln(3+x^2)}-e^{\sin x\ln 3}=e^{\xi}[x\ln(3+\sin x^2)-\sin x\ln 3]$$

由夹逼定理得到:

$$\lim_{x\to0}x\ln 3=\lim_{x\to0}x\ln(3+x^2)=0\Rightarrow\lim_{x\to0}e^{\xi}=1$$

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to0}e^{\xi}\lim_{x\to0}\frac{[x\ln(3+\sin x^2)-x\ln 3+x\ln 3-\sin x\ln 3]}{x^3}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{[x\ln(3+\sin x^2)-x\ln 3]}{x^3}+\lim_{x\to0}\frac{x\ln 3-\sin x\ln 3}{x^3}\\ &= \frac{2+\ln 3}{6}\end{aligned}$$

综上所述, 原极限 $I=\dfrac{2+\ln 3}{6}$

2.$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n(n+1)x^n$

解

幂级数的收敛域:

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}=1\Rightarrow R=1,\text{幂级数收敛域为}(-1,1)$$

原幂级数可化为:

$$
\begin{aligned}
S(x) &= x\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^{n-1} \\
&= x\sum_{n=1}^{+\infty}(x^{n+1})'' \\
&= x\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n+1}\right)'' \\
&= x\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'' \\
&= \frac{-2x}{(x-1)^3}, x\in(-1,1)
\end{aligned}
$$

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 连续可导,$f'(x)\geq 0$, 证明:

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx\right| \leq \frac{2}{n}[f(2\pi)-f(0)]$$

解

由分部积分法:

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx\right| &= \frac{1}{n}\left|\int_0^{2\pi} f(x) d\cos nx\right| \\
&= \frac{1}{n}\left|f(x)\cos nx|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(x)\cos nx dx\right| \\
&\leq \frac{1}{n}[f(2\pi)-f(0)] + |\int_0^{2\pi} f'(x)\cos nx dx| \\
&= \frac{1}{n}[f(2\pi)-f(0)] + |\int_0^{2\pi} f'(x) dx| \\
&= \frac{2}{n}[f(2\pi)-f(0)]
\end{aligned}
$$

4. 证明 $\left|\int_x^{x+1}\sin t^2 dt\right| \leq \frac{1}{x}$

解

分部积分:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\left|\int_x^{x+1}\frac{1}{t}d\cos t^2\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\frac{1}{t}\cos t^2|_x^{x+1} + \int_x^{x+1}\frac{1}{t^2}\cos t^2 dt\right| \\ &\leq \frac{1}{2}[\left|\frac{1}{t}\cos t^2|_x^{x+1}\right| + \left|\int_x^{x+1}\frac{1}{t^2}dt\right|] \\ &= \frac{1}{2}[\frac{\cos x^2}{x} - \frac{\cos(x+1)^2}{x+1} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}] \\ &\leq \frac{1}{x} \end{aligned}$$

June 13

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$

解

原极限可以写作:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 1}\frac{x-e^{x\ln x}}{1-x+\ln(1+x-1)}(\text{泰勒展开}) \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x-(1+x(x-1))}{1-x+(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}$

解

原级数等价于:

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n\to+\infty} u_n \\ &= \lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}) \\ &= \lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{(n+1)!}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

3. 设函数 $u=f(x,y,x)$ 有连续偏导数, 且 $z=z(x,y)$ 由方程 $xe^x-ye^y=ze^z$ 所确定, 求 du

解

我们得到关于 x, y, z 的方程 $F(x, y, z)$, 利用隐函数导数公式:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{(x+1)e^x}{(z+1)e^z}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{(y+1)e^y}{(z+1)e^z}$$

我们得到:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = f_1 + f_3\dfrac{\partial z}{\partial x} = f_1 + f_3\dfrac{(x+1)e^x}{(z+1)e^z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = f_2 + f_3\dfrac{\partial z}{\partial y} = f_1 - f_3\dfrac{(y+1)e^y}{(z+1)e^z} \end{cases}$$

$$du = (f_1 + f_3\frac{(x+1)e^x}{(z+1)e^z})dx + (f_1 - f_3\frac{(y+1)e^y}{(z+1)e^z})dy$$

4. 设 $u = f(x, y, z)$,$\varphi(x^2, e^y, z) = 0$,$y = \sin x$ 确定了函数 $u(x)$, 其中 f, φ 具有一阶偏导数, 且 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$, 求 $\dfrac{du}{dx}$

解

复合函数偏导数:

$$\frac{du}{dx} = f_1 + f_2\frac{dy}{dx} + f_3(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx})$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \ \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x\varphi_1}{\varphi_3}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{e^y\varphi_2}{\varphi_3}$$

我们最终得到 $\dfrac{du}{dx}$:

$$\frac{du}{dx} = f_1 + f_2\cos x - f_3\frac{2x\varphi_1 + e^{\sin x}\cos x\varphi_2}{\varphi_3}$$

5.

$$\lim_{t\to0^+}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{\sqrt{t}} dx \int_{x^2}^t \sin y^2 dy}{\left[\left(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{x}{t^2}\right)^x - 1\right]\int_0^t (e^{\sqrt{u}} - 1)du}$$

解

原极限可以化为:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{t\to 0^+}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^t dy\int_0^{\sqrt{t}}\sin y^2 dy}{[e^{x\ln(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{x}{t^2})}-1]\int_0^t(e^{\sqrt{u}}-1)du} \\ &= \lim_{t\to 0^+}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^t\sqrt{y}\sin y^2 dy}{\int_0^t(e^{\sqrt{u}}-1)du[e^{-\frac{x\pi}{2}\arctan\frac{t^2}{x}}-1]} \\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^t\sqrt{y}\sin y^2 dy}{[e^{-\frac{2t^2}{\pi}}-1]\int_0^t(e^{\sqrt{u}}-1)du} \\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}}}{-\frac{4}{3\pi}t^{\frac{7}{2}}} \\ &= -\frac{3\pi}{14} \end{aligned}$$

June 14

1. 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2[1-\ln(e^x+\sin x)]}{x}$

解

原极限可化为:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0}\frac{e^2[e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}-2}+\ln(e^x+\sin x)-1]}{x} \\ I_1 &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\ln(1+x)}{x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x)-2x}{x^2}=-1 \\ I_2 &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+e^x+\sin x-1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x-1}{x}=2 \\ I &= e^2(I_1+I_2)=e^2 \end{aligned}$$

2. $f(x)$ 二阶可导,$f(a)=f'(a)=f''(a)=f(b)=0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.(\xi-a)^2f''(\xi)-2f(\xi)=0$

解

我们令 $g(x)=(x-a)^2, g'(x)=2(x-a), g''(x)=2$

原式等价于: $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.g(\xi)f''(\xi)-g''(\xi)f(\xi)=0$

我们构造辅助函数: $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

$$F'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

我们对分子继续求导:

$$(f'(x)g(x)-g'(x)f(x))'=f''(x)g(x)+f'(x)g'(x)-g''(x)f(x)-g'(x)f'(x)=f''(x)g(x)-g''(x)f(x)$$

此时 $F(x)=\dfrac{f(x)}{(x-a)^2},\lim\limits_{x\to a}F(x)=0$, 我们构造:

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{(x-a)^2},x\in(a,b]\\ 0,x=a\end{cases}$$

$F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $F(a)=F(b)=0$

我们在区间 (a,b) 上对 $F(x)$ 使用罗尔定理得到:

$$\exists c\in(a,b),\ s.t.F'(c)=0\Rightarrow(c-a)^2f'(c)-2(c-a)f(c)=0$$

对于函数 $H(x)=(x-a)^2f'(x)-2(x-a)f(x)$, 我们有: $H(a)=H(c)=0$

我们对 $H(x)$ 在区间 (a,c) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(a,c),\ s.t.H'(\xi)=0\Rightarrow(\xi-a)^2f''(\xi)-2f(\xi)=0$$

33.3 Week III

June 15

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$

解

由拉格朗日中值定理:

$e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e^{\frac{1}{2x}\ln(1+2x)}=e^{\xi}(\dfrac{1}{x}\ln(1+x)-\dfrac{1}{2x}\ln(1+2x)),\xi\in(\dfrac{1}{x}\ln(1+x),\dfrac{1}{2x}\ln(1+2x))$

原极限可化为:

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to0}\frac{e^{\xi}[\frac{1}{x}\ln(1+x)-\frac{1}{2x}\ln(1+2x)]}{x}\\&=\lim_{x\to0}e^{\xi}\frac{2\ln(1+x)-\ln(1+2x)}{2x^2}\\&=\lim_{x\to0}e^{\xi}\frac{1}{2(1+x)(1+2x)}=\frac{e}{2}\end{aligned}$$

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数,$f(0)=f(2)=0,M=max_{x\in[0,2]}\{|f(x)|\}$, 证明:

(1).$\exists\xi\in(0,2),\ s.t.|f'(\xi)|\geq M$

(2). 若对任意的 $x\in(0,2),|f'(x)|\leq M$, 则 $M=0$

解

(1). 我们不妨假设 $|f(c)|=M$

- 当 $c=0$或者$c=2$, 我们得到: $f(x)\equiv0$, 我们得到: $M=0,\exists\xi\in(0,2),\ s.t.|f'(\xi)|\geq M$

- 当 $c \in (0,2), |f(c)| = M$, 我们由拉格朗日中值定理得到:

$$\begin{cases} f(c) - f(0) = cf'(\xi_1),\ \xi_1 \in (0,c) \\ f(2) - f(c) = (2-c)f'(\xi_2),\ \xi_2 \in (c,2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |f'(\xi_1)| = \dfrac{M}{c},\ \xi_1 \in (0,c) \\ |f'(\xi_2)| = \dfrac{M}{2-c},\ \xi_2 \in (c,2) \end{cases}$$

当 $c \in (0,1], |f'(\xi_1)| \geq M$; 当 $c \in (1,2), |f'(\xi_2)| \geq M$.

(2). 我们不妨假设 $M > 0, |f(d)| = M, f(0) = f(2) = 0 \Rightarrow \exists \eta \in (0,2),\ s.t. f'(\eta) = 0$

我们得到:

$$\begin{cases} |f(d) - f(0)| = |\int_0^d f'(x)dx| \leq \int_0^c |f'(x)|dx \leq Md \\ |f(2) - f(d)| = |\int_d^2 f(x)dx| \leq \int_d^2 |f(x)|dx \leq M(2-d) \end{cases}$$

我们化简:

$$\begin{cases} M \leq Md \\ M \leq M(2-d) \end{cases} \Rightarrow M(1-d) = 0$$

当 $M = 0$ 时,$f(x) \equiv 0$

当 $M \neq 0$, 则 $d = 1, M = \begin{cases} |f(1) - f(0)| \leq \int_0^1 |f'(x)|dx \leq M \\ |f(2) - f(1)| \leq \int_1^2 |f'(x)|dx \leq M \end{cases}$

此时当且仅当 $|f'(x)| \equiv M$ 时等号成立, 如果 $M \neq 0, f(2) \neq 0$, 矛盾

综上所述,$M = 0$

June 16

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + \frac{x^2}{2} - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2})\sin x^2}$

解

泰勒展开:

原极限可化为:

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{x^2}{2} - (1 + \frac{x^2}{2} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^4)}{x^2(1 - \frac{x^2}{2} - 1 - x^2)} = -\frac{1}{12}$$

2. 证明方程 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1 (n \geq 2)$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内有且仅有一个实数根, 我们将这个实数根记作 x_n, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

解

设函数 $f(x) = x + x^2 + \cdots + x^n - 1$, 我们有: $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} > 0 \Rightarrow f(x)$在$(\frac{1}{2}, 1)$单调递增

$$f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2^n} < 0, f(1) = n - 1 > 0$$

根据零点定理, 我们得到 $f(x)$ 在区间 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内有且仅有一个零点.

我们可以得到 $\frac{1}{2} < x_n < 1$

我们知道: $f(x)$ 单调递增, 当 $x = x_n$ 时, 我们有:

$$x_n + x_n^2 + \cdots + x_n^n - 1 = 0$$

假设 $x_{n+1} \geq x_n$, 我们得到:

$$x_{n+1} + x_{n+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^n + x_{n+1}^{n+1} - 1 > x_n + x_n^2 + \cdots + x_n^n - 1 = 0$$

我们要求:

$$x_{n+1} + x_{n+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^{n+1} - 1 = 0 \Rightarrow x_n > x_{n+1}$$

$\{x_n\}$ 单调递减且有下界,$\{x_n\}$ 极限一定存在, 我们不妨设 $\lim_{n\to+\infty} x_n = A$, 我们有:

$$\frac{A}{1-A} = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

3. 方程 $\cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x = 1(n \geq 2)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{3})$ 的根 x_n, 求 $\lim_{n\to+\infty} x_n$

解

我们令 $t = \cos x, x \in (\frac{1}{2}, 1)$, 原方程为:

$$t + t^2 + \cdots + t^n = 1\text{在区间}(\frac{1}{2}, 1)\text{内的根}t_n$$

我们构造辅助函数: $F(t) = t + t^2 + \cdots + t^n - 1$, 我们有:

$$F(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2^n}, F(1) = n - 1 > 0, F;(x) = 1 + 2t + 3t^2 + \cdots + nt^{n-1} > 0$$

$F(t)$ 在区间 $(\frac{1}{2}, 1)$ 有且只有一个实数根 $t_n, \frac{1}{2} < t_n < 1$

上面的题已证明: $\lim_{n\to+\infty} t_n = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{\pi}{3}$

June 17

1. 求极限 $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x^2 - 2(1-\cos x)\sin x}{x^5}$

解

泰勒展开:

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6),\ 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4),\ sinx = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$$

原极限等价于:

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 - \frac{1}{6}x^7 - 2(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^5 + \frac{1}{144}x^7)}{x^5} = \frac{1}{4}$$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(2\sqrt[n]{n}-1)^n}{n^2}$

解

原极限等价于:

$$I=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x\ln(1+2x^{\frac{1}{x}}-2)}}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)}}{x^2}$$

$$I=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^{\frac{\ln x}{x}}}{x^2}=1$$

June 18

1. 设 $f'(0)=0, f''(0)$ 存在, 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}$

解

我们由拉格朗日中值定理得到:

$$f(x)-f(\ln(1+x))=f'(\xi)(x-\ln(1+x)),\ \xi\in(\ln(1+x),x)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\xi}{x}=1,\ (\text{夹逼定理})$$

原极限等价于:

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to0}\frac{f'(\xi)(x-\ln(1+x))}{x^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{f'(\xi)}{2x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{f'(\xi)}{\xi}\frac{\xi}{2x}\\&=\frac{f''(0)}{2}\end{aligned}$$

2. 求椭圆 $x^2+2xy+3y^2-8y=0$ 与直线 $x+y=8$ 的最短距离.

解

我们不妨设椭圆上任意一点 $P(x,y)$, 我们要求 $F(x,y)=\dfrac{1}{2}(x+y-8)^2$ 的最小值.
我们利用拉格朗日数乘法构造辅助函数:

$$F(x,y,\lambda)=\frac{1}{2}(x+y-8)^2+\lambda(x^2+2xy+3y^2-8y)$$

我们令:

$$\begin{cases}F'_x=x+y-8+2\lambda(x+y)=0\\F'_y=x+y-8+2\lambda(x+3y-4y)=0\\F'_\lambda=x^2+2xy+3y^2-8y=0\end{cases}$$

我们解得:

$$\begin{cases} x = 2 \pm 2\sqrt{2} \\ y = 2 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

我们得到两个驻点: $(2+2\sqrt{2},2)$ 和 $(2-2\sqrt{2},2)$

$$L(2+2\sqrt{2},2) = 2\sqrt{2}-2,\ L(2+2\sqrt{2},2) = 2\sqrt{2}+2$$

综上所述, 距离最小值为 $2\sqrt{2}-2$.

3. 证明 $\tan x = x$ 在区间 $(n\pi, n\pi+\frac{\pi}{2})$ 内存在实根 x_n, 并求出极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)$

解

我们令 $f(x) = tanx - x, x \in (n\pi, n\pi+\frac{\pi}{2})$, $f'(x) = \sec^2 x - 1 \geq 0 \Rightarrow f(x)$单调递增

$$f(n\pi) < 0, f(n\pi+\frac{\pi}{2}) > 0 \Rightarrow f(x)\text{存在唯一零点}x_n \in (n\pi, n\pi+\frac{\pi}{2})$$

我们有: $x_{n+1}-x_n \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

$$\begin{aligned} x_{n+1}-x_n &= \tan x_{n+1} - \tan x_n \\ &= \tan(x_{n+1}-x_n)(1+\tan x_{n+1}\tan x_n) \\ &= \tan(x_{n+1}-x_n)(1+x_{n+1}x_n) \\ \lim_{n\to+\infty}\tan(x_{n+1}-x_n) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{1+x_{n+1}x_n} = 0 \end{aligned}$$

我们得到: $\lim\limits_{n\to+\infty}\tan(x_{n+1}-x_n) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1}-x_n = \pi$

June 19

1. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x\sqrt{x}}(\sqrt{a}\arctan\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b}\arctan\sqrt{\frac{x}{b}})$

解

原极限可化为:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x\sqrt{x}}[\sqrt{a}(\arctan\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{\frac{x}{a}})-\sqrt{b}(\arctan\sqrt{\frac{x}{b}}-\sqrt{\frac{x}{b}})] \\
&= I_1 - I_2 \\
I_1 &= \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x\sqrt{x}}\sqrt{a}(\arctan\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{\frac{x}{a}}) \\
&= \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{-\sqrt{a}}{3}(\sqrt{\frac{x}{a}})^3}{x\sqrt{x}} \\
&= -\frac{1}{3a} \\
I_2 &= \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x\sqrt{x}}\sqrt{b}(\arctan\sqrt{\frac{x}{b}}-\sqrt{\frac{x}{b}}) \\
&= \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{-\sqrt{b}}{3}(\sqrt{\frac{x}{b}})^3}{x\sqrt{x}} \\
&= -\frac{1}{3b}
\end{aligned}$$

综上所述:

$$I=\begin{cases}0,\ a=b \\ \frac{1}{3b}-\frac{1}{3a},\ a\neq b\end{cases}$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|\arcsin(\sin t)|dt}{x}$

引理 33.3.1 (周期函数积分性质)

$f(x)=\int_0^x|\sin t|dt$

(i). 设 n 为正整数, 当 $n\pi\leq x\leq(n+1)\pi$, 证明: $2n\leq f(x)\leq 2(n+1)$

(ii). 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|\sin t|dt}{x}$

解

(i). 我们有:

$$\int_0^{n\pi}|\sin t|dt\leq f(x)\leq\int_0^{(n+1)\pi}|\sin t|dt$$

我们知道对于周期函数 $f(x)$, 我们有:

$$\int_0^{nT}f(t)dt=n\int_0^T f(t)dt\Rightarrow\begin{cases}\int_0^{n\pi}|\sin t|dt=2n \\ \int_0^{(n+1)\pi}|\sin t|dt=2(n+1)\end{cases}$$

我们得到: $2n\leq f(x)\leq 2(n+1)$

(ii). 当 $x \in (n\pi, (n+1)\pi)$ 时, 我们有:

$$\frac{\int_0^{n\pi}|\sin t|dt}{(n+1)\pi} \leq \frac{\int_0^{x}|\sin t|dt}{x} \leq \frac{\int_0^{(n+1)\pi}|\sin t|dt}{n\pi}$$

$$\begin{cases} \text{左边} = \dfrac{2n}{(n+1)\pi} \\ \text{右边} = \dfrac{2(n+1)}{n\pi} \end{cases}$$

两边同时取极限, 我们有 $\lim\limits_{n\to+\infty}$ 左边 $= \lim\limits_{n\to+\infty}$ 右边 $= \dfrac{2}{\pi}$
由夹逼定理, 我们可以得到:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{x}|\sin t|dt}{x} = \frac{2}{\pi}$$

定理 33.3.1 (周期函数性质)

$f(x)$ 是周期函数, 我们有:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^{x}f(t)dt}{x} = \frac{\int_0^{T}f(x)dx}{T}$$

解

我们发现 $f(x) = |\arcsin(\sin x)|$ 是周期 $T = \pi$ 的周期函数, 且

$$\int_0^{\pi}f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-\frac{\pi}{2})dx = \frac{\pi^2}{4}$$

我们得到原极限等价于:

$$I = \frac{\int_0^{T}f(x)dx}{T} = \frac{\pi}{4}$$

June 20

1. 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\int_0^{x}f(x-t)dt}{\int_0^{x}tf(t-x)dt}$

解

我们令: $F(x) = \int_0^{x}f(t)dt,\ F'(x) = f(x),\ F(0) = 0$

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x}f(t)dt}{x} = F'(0) = f(0)$$

原极限等价于:

$$I = \lim_{x\to0}\frac{x\int_0^{x}f(t)dt}{x\int_0^{x}f(t)dt - \int_0^{x}tf(t)dt} = \lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x}f(t)dt + xf(x)}{\int_0^{x}f(t)dt}$$

$$I = 1 + \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\frac{\int_0^{x}f(t)dt}{x}} = 2$$

2. $f(x)=\int_1^x e^{t^2}dt$

(i). 证明: $\exists\xi\in(1,2),\ s.t. f(\xi)=(2-\xi)e^{\xi^2}$

(ii). 证明: $\exists\eta\in(1,2),\ s.t. f(2)=e^{\eta^2}\eta\ln 2$

解

(i). 我们构造辅助函数: $F(x)=(x-2)f(x)$

我们有:

$$F'(x)=f(x)+(x-2)f'(x),\ f'(x)=e^{x^2},\ F(1)=F(2)=0$$

我们对 $F(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(1,2),\ s.t. F'(\xi)=0\Rightarrow f(\xi)+(\xi-2)f'(x)=0$$

(ii). 原式子可以化为 $\dfrac{f(2)-f(1)}{\ln 2-\ln 1}=\dfrac{e^{\eta^2}}{\frac{1}{\eta}}$

我们构造辅助函数: $g(x)=\ln x,\ g'(x)=\dfrac{1}{x}$, 我们由柯西中值定理得到:

$$\exists\eta\in(1,2),\ s.t. \frac{f(2)-f(1)}{\ln 2-\ ln1}=\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}\Rightarrow f(2)=e^{\eta^2}\eta\ln 2$$

June 21

1. 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^{xt}\arctan(x-t)^2dt}{\int_0^x tf(x-t)dt}$

解

我们得到: $f(0)=0,\ f'(0)=2$

我们利用广义积分中值定理得到:

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\xi}\int_0^x\arctan(x-t)^2dt}{\int_0^x tf(x-t)dt},\ \xi\in(0,x)$$

我们再进行换元, 原极限等价于:

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\xi}\int_0^x\arctan u^2dt}{x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\int_0^x f(u)du}$$

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{f(x)}=2\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{f(x)-f(0)}=1$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导,$f(0)=0,\ f(1)=1$, 证明:

$$\exists\xi\in(0,1),\ s.t. \xi f''(\xi)+(1+\xi)f'(\xi)=1+\xi$$

解

原命题等价于:

$$\exists \xi \in (0,1),\ s.t. f''(\xi) + \frac{1+\xi}{\xi}[f'(\xi) - 1]$$

我们构造辅助函数:

$$F(x) = [f'(x) - 1]e^{\int (1+\frac{1}{x})dx} \Rightarrow F(x) = xe^x[f'(x) - 1]$$

我们有: $F(0) = 0$, 由拉格朗日中值定理得到:

$$\exists \eta \in (0,1),\ s.t. f'(\eta) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1 \Rightarrow F(\eta) = 0$$

我们对 $F(x)$ 在区间 $(0,\eta)$ 上使用罗尔定理, 可以得到:

$$\exists \xi \in (0,\eta),\ s.t. F'(\xi) = e^{\xi}[\xi f''(\xi) + (\xi + 1)[f'(\xi) - 1]] = 0$$

综上所述,$\exists \xi \in (0,1),\ s.t. \xi f''(\xi) + (1+\xi)f'(\xi) = 1 + \xi$

3. 已知微分方程 $y' + y = f(x)$, 其中 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数, 证明: 该微分方程存在唯一的以 T 为周期的解.

解

我们利用一阶微分方程通接公式得到:

$$y(x) = e^{-x}(\int_0^x e^t f(t)dt + C)$$

我们由此得到:

$$\begin{aligned}
y(x+T) &= e^{-x-T}(\int_0^{x+T} e^t f(t)dt + C) \\
&= e^{-x}(\int_0^{x+T} e^{t-T} f(t)dt + Ce^{-T}) \\
&= e^{-x}(\int_{-T}^{x} e^t f(t)dt + Ce^{-T}) \\
&= e^{-x}(\int_0^{x} e^t f(t)dt + Ce^{-T} + \int_{-T}^{0} e^t f(t)dt) \\
y(x) &= e^{-x}(\int_0^{x} e^t f(t)dt + C)
\end{aligned}$$

如果 $y(x)$ 是周期函数, 我们可以得到:

$$C = Ce^{-T} + \int_{-T}^{0} e^t f(t)dt \Rightarrow C = \frac{\int_0^T e^t f(t)dt}{e^T - 1}$$

当且仅当 $C = \dfrac{\int_0^T e^t f(t)dt}{e^T - 1}$ 时,$y(x)$ 为周期函数.

33.4 Week IV

June 22

1. $f(x)$ 一阶连续可导, 且 $f(0)=0, f'(0)\neq 0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} f(t)dt}{x^2\int_0^x f(t)dt}$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0}\frac{2xf(x^2)}{2x\int_0^x f(t)dt + x^2 f(x)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2f(x^2)}{2\int_0^x f(t)dt + xf(x)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{4xf'(x)}{3f(x)+xf'(x)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{4f'(x)}{\dfrac{3f(x)}{x}+f'(x)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. 设 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$,$f'(0)=2$, 求 $f(x)$

解

我们令 $x=y=0 \Rightarrow f(0)=0$
我们令 $y=\Delta x$, 我们有:

$$f(x+\Delta x)=\frac{f(x)+f(\Delta)}{1-f(x)f(\Delta)}$$

又因为:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)+f(\Delta x)-f(x)[1-f(x)f(\Delta x)]}{[1-f(x)f(\Delta x)]\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)[1+(f(x))^2]}{[1-f(x)f(\Delta x)]\Delta x} \\ &= 2[1+(f(x))^2] \end{aligned}$$

我们得到: $\dfrac{f'(x)}{1+(f(x))^2}=2 \Rightarrow \arctan f(x)=2x+C,\ f(0)=0\Rightarrow C=0$
综上所述,$f(x)=tan(2x)$

June 23

1. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x[\int_u^x u^2\arctan(1+tu)dt]du}{(\int_0^x\ln(1+t)dt)^2}$

解

我们对分子交换积分次序, 原极限等价于:

$$I=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x[\int_0^t u^2\arctan(1+tu)du]dt}{\frac{x^4}{4}}$$

利用洛必达法则:

$$I=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x u^2\arctan(1+xu)du}{x^3}$$

令 $xu=v,\ u=\frac{v}{x},\ du=\frac{dv}{x}$, 原极限等价于:

$$I=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2} v^2\arctan(1+v)dv}{x^6}$$

再次使用洛必达法则:

$$I=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x^5\arctan(1+x^2)}{6x^5}=\frac{\pi}{12}$$

2. 设 $f'(x)$ 在 $[0,2]$ 连续, 证明: $|f(2)|\le\frac{1}{2}|\int_0^2 f(x)dx|+\int_0^2|f'(x)|dx$

解

我们由积分中值定理得到:

$$\exists\xi\in(0,2),\ s.t.\int_0^2 f(x)dx=2f(\xi)\Rightarrow\frac{1}{2}|\int_0^2 f(x)dx|=|f(\xi)|$$

原命题等价于:

$$|f(2)|-|f(\xi)|\le\int_0^2|f'(x)|dx$$

由绝对值三角不等式得到:

$$\text{左边}\le|f(2)-f(\xi)|=|\int_\xi^2 f'(x)dx|\le\int_\xi^2|f(x)|dx$$

我们有: $\xi\in(0,2),\Rightarrow\int_\xi^2|f(x)|dx\le\int_0^2|f(x)|dx$

综上, 我们得到 $|f(2)|\le\frac{1}{2}|\int_0^2 f(x)dx|+\int_0^2|f'(x)|dx$

3. 设 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明: $\max\limits_{0\le x\le 1}\{|f(x)|\}\le\int_0^1[|f(x)|+|f'(x)|]$

解

我们不妨假设 $\exists\xi \in (0,1)$, $s.t.|f(x)|_{max} = |f(\xi)|$, 原命题等价于:

$$f(\xi) - \int_0^1 |f(x)|dx \le \int_0^1 |f'(x)|dx$$

我们由积分中值定理得到:

$$\exists\eta \in (0,1),\ s.t. \int_0^1 |f(x)|dx = |f(\eta)|$$

命题等价于:

$$|f(\xi)| - |f(\eta)| \le \int_0^1 |f'(x)|dx$$

$$\text{左边} \le |f(\xi) - f(\eta)| = |\int_\xi^\eta f'(x)dx| \le \int_\xi^\eta |f'(x)|dx \le \text{右边}$$

综上所述, 我们得到: $\max\limits_{0\le x\le 1}\{|f(x)|\} \le \int_0^1[|f(x)| + |f'(x)|]$

June 24

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int_0^x t|\sin t|dt}{x^2}$

解

我们不妨假设 $x \in (n\pi, (n+1)\pi)$, 我们有:

$$\int_0^{n\pi} t|\sin t|dt < \int_0^x t|\sin t|dt < \int_0^{(n+1)\pi} t|\sin t|dt$$

我们由区间再现公式可以得到:

$$\int_0^{n\pi} t|\sin t|dt = \int_0^{n\pi} (n\pi - t)|\sin t|dt \Rightarrow \int_0^{n\pi} t|\sin t|dt = \pi n^2$$

同理我们可以得到:

$$\int_0^{(n+1)\pi} t|\sin t|dt = \pi(n+1)^2$$

我们得到: $\pi n^2 < \int_0^x t|\sin t|dt < \pi(n+1)^2$

我们有:

$$\frac{\pi n^2}{(n+1)^2\pi^2} < \frac{\int_0^x t|\sin t|dt}{x^2} < \frac{\pi(n+1)^2}{n^2\pi^2}$$

由夹逼定理可以得到, 原极限 $I = \dfrac{1}{\pi}$

2. 已知 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \end{vmatrix}$, 求 $\sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=1}^{4} A_{ij}$

解

我们将行列式按照第一行展开得到:

$$|A| = A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}$$

我们发现: $A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}$ 其实就是将原行列式中第二行所有元素替换为 1 的新行列式的值, 根据行列式两行相同值为 0, 我们可以得到:

$$\begin{cases} A_{21} + A_{22} + A_{23} + A_{24} = 0 \\ A_{31} + A_{32} + A_{33} + A_{34} = 0 \\ A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = 0 \end{cases}$$

我们得到: $\sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=1}^{4} A_{ij} = |A|$

根据范德蒙行列式的求值公式:

$$|A| = (3-2)(4-2)(5-2)(4-3)(5-3)(5-4) = 12$$

综上所述,$\sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=1}^{4} A_{ij} = 12$

June 25

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{x}\int_x^{x^2}(1+\dfrac{1}{2t})^t \sin\dfrac{1}{\sqrt{t}}dt$

解

我们利用广义积分中值定理和 $x \to 0,\ \sin x \sim x$, 原极限等价于:

$$I = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+\dfrac{1}{2\xi})^{\xi}\int_x^{x^2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{t}dt}}{x},\ \xi \in (x, x^2)$$

利用洛比达法则得到:

$$I = \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{2\xi})^{\xi}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\sin\frac{1}{x} - \sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{1} = I_1 I_2$$

由夹逼定理得到:

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}},\ I_2 = 2 \Rightarrow I = 2e^{\frac{1}{2}}$$

2. 三对角线行列式

求 $D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & a+b & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & a+b & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a+b \end{vmatrix}$

解

我们将行列式按照第一行展开后得到:

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2},\ D_1 = a+b,\ D_2 = a^2+b^2-ab$$

我们可以得到:

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2})$$

我们构造数列 $\{x_n\} = D_{n+2} - aD_{n+1},\ x_1 = b^2 \Rightarrow x_n = b^{n+1}$
我们得到:

$$D_n - aD_{n-1} = b^n$$

同样我们可以得到:

$$D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2})$$

我们构造数列 $\{y_n\} = D_{n+2} - bD_{n+1},\ y_1 = a^2 \Rightarrow y_n = a^{n+1}$
我们得到:

$$D_n - bD_{n-1} = a^n$$

我们有:

$$\begin{cases} D_n - aD_{n-1} = b^n \\ D_n - bD_{n-1} = a^n \end{cases} \Rightarrow (a-b)D_n = a^{n+1} - b^{n+1}$$

(1). 当 $a = b$ 时, 我们直接得到: $D_n - aD_{n-1} = a^n,\ D_1 = a+b$
我们有: $\{\frac{D_n}{a^n}\}$ 是首项为 2, 公差为 1 的等差数列,$D_n = (n+1)a^n$
(2). 当 $a \neq b$ 时, 我们得到: $D_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$
综上所述, 我们得到:

$$D_n = \begin{cases} \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} \\ (n+1)a^n \end{cases}$$

June 26

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1-\dfrac{\ln x}{x})^x$

解

原极限等价于:

$$I = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x + x\ln(1-\frac{\ln x}{x})}$$

$$I = e^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x\ln x)-x\ln x}{x}}$$

我们有: $\ln(1+x)-x \sim -\frac{1}{2}x^2$

原极限 $I=1$

June 27

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$

解

原极限等价于:

$$I = \frac{\sin x + \sin x\int_0^x e^{t^2} - (e^x-1)}{x^2}$$

我们利用泰勒展开可以得到:

$$I = \frac{x+o(x^2)+(x+o(x^2))\int_0^x(1+o(t))dt - x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

2. $A = \begin{pmatrix} a^n & (a+1)^n & \cdots & (a+n)^n \\ a^{n-1} & (a+1)^{n-1} & \cdots & (a+n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a+1 & \cdots & a+n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 求伴随矩阵 A^* 的所有元素之和.

解

我们知道 A 的伴随矩阵 A^* 的所有元素之和为 A 的所有代数余子式的和, 我们可以得到:

$$\mathrm{sum}(A^*) = \sum_{i,j\in n} A_{ij}$$

我们对每一行的代数余子式表示为原行列式对应行全换为 1 的新行列式的值, 我们得到:

$$\sum_{i,j\in n} A_{ij} = |A|$$

我们将 A 上下颠倒即可得到一个范德蒙行列式.

$$|A| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{n=1}^{n} n!$$

June 28

1. 求极限: $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} - \dfrac{1}{\ln(1+x) + \int_0^x t(1+t)^{\frac{1}{t}dt}}\right]$

解

我们首先有:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t(1+t)^{\frac{1}{t}}dt}{x^2} = \frac{e}{2}$$

我们可以得到:

$$x\to 0,\ \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \sim x,\ \int_0^x t(1+t)^{\frac{1}{t}}dt \sim \frac{e}{2}x^2$$

原极限等价于: (泰勒展开)

$$I = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x+\frac{e-1}{2}x^2+o(x^2)-x+o(x^2)}{x(x+o(x))}\right] = \frac{e-1}{2}$$

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{j=1}^{n^2}\dfrac{n}{n^2+j^2}$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n^2}\frac{1}{n}\frac{1}{1+(\frac{j}{n})^2} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_0^n\frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \lim_{n\to+\infty}(\arctan n - \frac{\pi}{4}) \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

3. 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}$

解

我们可以得到:

$$\frac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n}\frac{n}{n+1}<\frac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}<\frac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n+1}$$

我们得到:

$$\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}>\dfrac{n}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n}\\ \sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}<\sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n}\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}>\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{n+1}\int_0^2\sqrt{1+\sin\pi x}dx\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}<\int_0^2\sqrt{1+\sin\pi x}dx\end{cases}$$

我们由夹逼定理可以得到:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2\sqrt{1+\sin\pi x}dx\\ &= \pi\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin x}dx\\ &= 2\pi\int_0^{\pi}|\sin x+\cos x|dx\\ &= 2\pi\int_0^{\frac{3}{4}\pi}(\sin x+\cos x)dx-2\pi\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}(\sin x+\cos x)dx\\ &= 4\sqrt{2}\end{aligned}$$

June 29

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x^3-x^2+\frac{x}{2}+1)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+x^2+x+1}\right]$

解

我们令 $t=\dfrac{1}{x}$, 原极限等价于:

$$I=\lim_{t\to 0}\left[\frac{(t^3+\frac{1}{2}x^2-t+1)e^t-\sqrt{t^6+t^5+t^4+1}}{t^3}\right]$$

我们利用泰勒展开得到:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{t\to 0}\left[\frac{(t^3+\frac{1}{2}x^2-t+1)e^t-\sqrt{t^6+t^5+t^4+1}}{t^3}\right] \\ &= \lim_{t\to 0}\left[\frac{(t^3+\frac{1}{2}x^2-t+1)(1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3)-(1+t^4+t^5+t^6)}{t^3}\right] \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{7}{6}t^3+o(t^3)}{t^3} \\ &= \frac{7}{6} \end{aligned}$$

2. 求 $\sum\limits_{n=1}^{100}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 的整数部分.

解

我们可以得到原和式等价于:

$$I=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}}$$

我们把这个理解为 100 个长方形面积之和, 我们有:

$$\begin{cases} I>\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\int_2^3\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\cdots+\int_{100}^{101}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int_1^{101}\frac{1}{\sqrt{x}}dx \\ I<1+\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\int_2^3\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\cdots+\int_{99}^{100}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=1+\int_1^{100}\frac{1}{\sqrt{x}}dx \end{cases}$$

我们可以得到:

$$2(\sqrt{101}-1)<I<1+2(\sqrt{100}-1\Rightarrow 18<I<19$$

综上所述, 原和式的整数部分为 18.

3. 设 $f(x)$ 是满足 $\int_x^{\frac{\pi}{2}}f(t-x)f(t)dt=\cos^4x$ 的连续函数, 求 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的平均值.

解

我们要求的是:

$$I=\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx}{\frac{\pi}{2}}$$

我们对 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t-x)f(t)dt=\cos^4x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上取定积分得到:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_x^{\frac{\pi}{2}}f(t-x)f(t)dt\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4xdx=\frac{3}{16}\pi$$

我们交换积分次序可以得到:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt\int_0^t f(t-x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt\int_0^t f(u)du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)F(t)dt=\frac{3}{16}\pi$$

其中 $F'(t)=f(t)$, 我们得到:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)F(t)dt=\frac{1}{2}F^2(x)|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}F^2(\frac{\pi}{2})=\frac{3}{16}\pi$$

我们可以得到:

$$I=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\pm\sqrt{\frac{3}{2\pi}}$$

4. 求行列式 $|A|=\begin{vmatrix} a+x_1 & a+x_1^2 & \cdots & a+x_1^n \\ a+x_2 & a+x_2^2 & \cdots & a+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+x_n & a+x_n^2 & \cdots & a+x_n^n \end{vmatrix} (a\neq 0)$

解

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+a-a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+x_1 & a+x_1^2 & \cdots & a+x_1^n \\ a & a+x_2 & a+x_2^2 & \cdots & a+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a+x_n & a+x_n^2 & \cdots & a+x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a-a & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ a & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ a & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1+a & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 0 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ a & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ a & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$= (1-a)\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} + (-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$A=(1-a)\prod_{k=1}^n x_k \prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)-a\prod_{k=1}^n(x_k-1)\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

$$A=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\left[(1-a)\prod_{k=1}^n x_k-a\prod_{k=1}^n(x_k-1)\right]$$

范德蒙行列式应用

求行列式: $|A| = \begin{vmatrix} a+x_1 & a+x_2 & \cdots & a+x_n \\ a^2+x_1^2 & a^2+x_2^2 & \cdots & a^2+x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n+x_1^n & a^n+x_2^n & \cdots & a^n+x_n^n \end{vmatrix} (a \neq 0)$

解

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+x_1 & a+x_2 & \cdots & a+x_n \\ a^2 & a^2+x_1^2 & a^2+x_2^2 & \cdots & a^2+x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n & a^n+x_1^n & a^n+x_2^n & \cdots & a^n+x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ a & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ a^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ a^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ a^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \\ &= 2\prod_{k=1}^{n} x_k \prod_{1<i\leq j<n} (x_j - x_i) - \prod_{k=1}^{n}(x_k - a) \prod_{1<i\leq j<n} (x_j - x_i) \\ &= \prod_{1<i\leq j<n} (x_j - x_i) \left[2\prod_{k=1}^{n} x_k - \prod_{k=1}^{n}(x_k - a) \right] \end{aligned}$$

June 30

1. 求极限 $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} \left[\ln(1+\sin^2 x) - 6(\sqrt[3]{2-\cos x} - 1) \right]$

解

我们利用泰勒展开:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}\frac{(x-\frac{x^3}{6})^2-\frac{1}{2}(x-\frac{x^3}{6})^4-6[\frac{1-\cos x}{3}-\frac{(1-\cos x)^2}{9}]}{x^4}\\
&= \frac{x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)-2(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4)+o(x^4)+\frac{2}{3}\frac{1}{4}x^4+o(x^4)}{x^4}\\
&= -\frac{7}{12}
\end{aligned}
$$

2. $\int_0^1 x\arcsin 2\sqrt{x-x^2}dx$

解

我们利用区间再现公式:

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int_0^1 \arcsin 2\sqrt{x-x^2}dx\\
&= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\arcsin(\cos t)dt\\
&= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos t\arcsin(\cos t)dt\frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\arcsin(\cos t)dt\\
&= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(\frac{\pi}{2}+t)\cos tdt+\frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-t)\cos tdt\\
&= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos tdt\\
&= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-1)\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

3. 设 $a_n \geq 0$, 且 $\{na_n\}$ 有界, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ 收敛.

解

我们由 $\{na_n\}$ 收敛得出:

$$\forall M>0, \exists N_0>0,\ 当 n>N_0, na_n<M \Rightarrow a_n<\frac{n}{M}\Rightarrow a_n^2<\frac{M^2}{n^2}$$

我们知道级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{M^2}{n^2}$($M$ 为常数) 收敛, 我们通过比较判别法得出: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ 收敛.

4. A 是三阶矩阵,$\forall i,j\in\{1,2,3\}$, 我们有: $a_{ij}=A_{ij}$,$a_{33}=1$, 证明: A 是正交矩阵.

解

我们由: $\forall i, j \in \{1,2,3\}$, $a_{ij} = A_{ij} \Rightarrow A^T = A^*$

我们有:

$$AA^T = AA^* = |A|E \Rightarrow |A|^2 = |A|^3 \Rightarrow |A| = 1\text{或者}0$$

我们将 $|A|$ 按照第三行展开得到:

$$|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = a_{31}^2 + a_{32}^2 + 1 \geq 1$$

我们得到: $|A| = 1$

我们有: $AA^T = AA^* = E \Rightarrow A$是正交矩阵.

第六部分

每日一题 II

第 6 部分目录

第 34 章 July

34.1 Week I

July 1

1. 证明: $e^{\int_0^1 f(x)dx} \leq \int_0^1 e^{f(x)}dx$

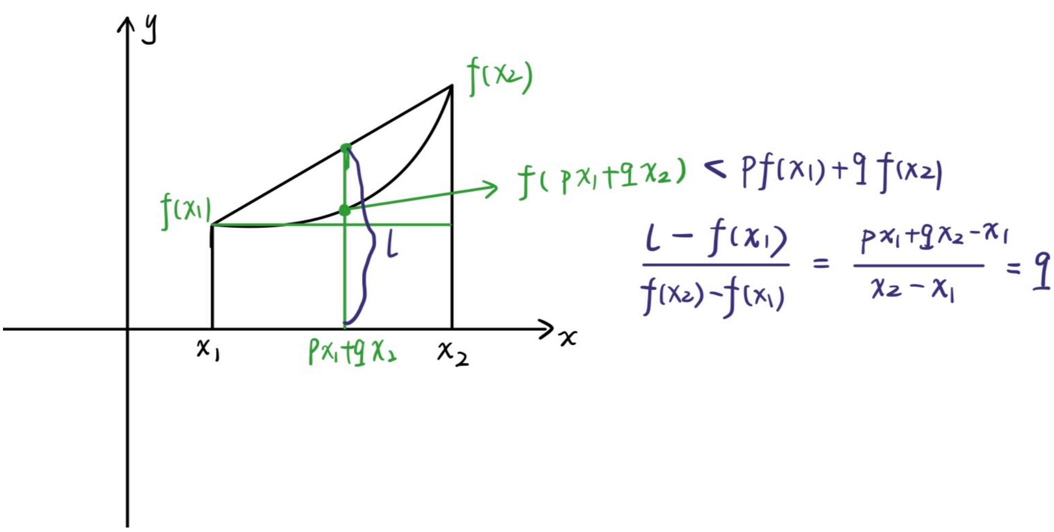


图 34.1: 凹函数性质

解

凹函数性质

我们不妨假设 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凹函数, 我们有以下的定理.

$$\forall x_1,x_2,\cdots,x_n \in (a,b), x_1 < x_2 < \cdots < x_n, \exists p_1,p_2,\cdots,p_n > 0, \sum_{i=1}^{n} p_n = 1,\ s.t. \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \geq f(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i)$$

证明

(1). 当 $n=1$ 时, 原命题显然成立.

(2). 当 $n=2$ 时, 原命题等价于:

$$p+q=1,\ f(px_1+qx_2) \leq pf(x_1)+qf(x_2)$$

我们由图34.1得到:

$$\begin{cases} px_1+qx_2 > (p+q)x_1 = x_1 \\ px_1+qx_2 < (p+q)x_2 = x_2 \end{cases} px_1+qx_2 \in (x_1,x_2)$$

$$\frac{l-f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)} = \frac{px_1+qx_2-x_1}{x_2-x_1} = q \Rightarrow l = qf(x_1)+(1-q)f(x_1) = pf(x_1)+qf(x_2)$$

(3). 假设当 $n=k$ 时, 我们有:

$$\sum_{i=1}^{k} p_i f(x_i) \geq f(\sum_{i=1}^{k} p_i x_i)$$

当 $n=k+1$ 时, 我们有:

$$\begin{aligned} f(x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}) &= f((1-x_{k+1})[\frac{x_1}{1-p_{k+1}}+\frac{x_2}{1-p_{k+1}}+\cdots+\frac{x_k}{1-p_{k+1}}+p_{k+1}x_{k+1}]) \\ &\leq p_{k+1}f(x_{k+1})+\frac{1}{1-p_{k+1}}f(\sum_{i=1}^{k}\frac{p_i}{1-p_{k+1}}x_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k+1} p_i f(x_i) \end{aligned}$$

原命题等价于:

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})\frac{i}{n}} \leq \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} e^{f(\frac{i}{n})}$$

我们得到:

$$e^{\int_0^1 f(x)dx} \leq \int_0^1 e^{f(x)}dx$$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \int_0^x (\frac{\arctan t}{t})^{\frac{1}{\int_0^t \ln(1+u)du}} \cot x dt$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \int_0^x (\frac{\arctan t}{t})^{\frac{1}{\int_0^t \ln(1+u)du}}}{\sin x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (\frac{\arctan t}{t})^{\frac{1}{\int_0^t \ln(1+u)du}} dt}{x} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\frac{\arctan x}{x})}{\int_0^x \ln(1+u)du}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{3}x^2}{\int_0^x \ln(1+u)du}} \\
&= e^{-\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

3. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 我们有 $\int_0^1 xf(x)dx = 1$, $\int_0^1 f(x)dx = 0$, 证明:

$$\exists \xi \in (0,1), \ s.t. |f(\xi)| \geq 4$$

解

我们由 $\int_0^1 xf(x)dx = 1$, $\int_0^1 f(x)dx = 0$ 得到:

$$\int_0^1 (x+a)f(x) = 1 \Rightarrow \int_0^1 |x+a||f(x)| \geq 1$$

我们假设 $f(x) < 4$, 我们得到:

$$4\int_0^1 |x+a|dx > 1$$

我们有:

$$4\int_0^1 |x+a|dx = \begin{cases} 4a+2, a \geq 0 \\ -4a-2, a \leq -1 \\ 4a^2+4a+2, a \in (-1,0) \end{cases}$$

我们要得出矛盾, 即令 $4\int_0^1 |x+a|dx \le 1$, 我们令 $a=-\dfrac{1}{2}$,$4\int_0^1 |x+a|dx = 1$ 矛盾!!!
综上所述, 我们得到: $\exists \xi \in (0,1)$, $s.t. |f(\xi)| \ge 4$

July 2

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}\right]^{x^2\ln x}$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to+\infty} e^{x^2\ln x \ln\left[1+\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}\right]} \\
I_1 &= \lim_{x\to+\infty} x^2\ln x\ln\left[1+\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}\right] \\
&= \lim_{x\to+\infty} x^2\ln x(\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}) \\
&= \lim_{x\to+\infty} x^2\ln x(\frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})}{\xi\ln(2x)}), \xi\in(x+\sqrt{x^2-1}, x+\sqrt{x^2+1}) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\xi}\frac{2x}{(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\xi}
\end{aligned}
$$

我们用夹逼定理: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\xi}=\dfrac{1}{2}$

原极限 $I = e^{\frac{1}{2}}$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 导函数连续, 且 $\int_0^1 x^2 f'(x)dx = 1$, 证明:
(1). $\exists \xi\in(0,1)$, $s.t. f'(\xi)=3$
(2). 若 $f(1)=\int_0^1 f(x)dx = 0$, 则 $\exists \eta\in(0,1)$, $s.t. f'(\eta) = -\dfrac{6}{7}$

解

(1). 我们不妨设 $g(x)=x^2$, 我们有 $x\in(0,1), g(x)>0$, 我们根据第一积分中值定理得到:
$\exists \xi\in(0,1)$, $s.t. \displaystyle\int_0^1 f'(x)g(x)dx = f'(\xi)\int_0^1 g(x)dx \Rightarrow \int x^2 f'(x)dx = f'(\xi)\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}f'(\xi) = 1$
综上所述, 我们得到: $\exists \xi\in(0,1)$, $s.t. f'(\xi)=3$
(2). 我们由 $\int_0^1 x^2 f'(x)dx = 1$ 得到:

$$
\int_0^1 f(x)dx = xf(x)|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 xf'(x)dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 xf'(x)dx = 0
$$

我们得到:

$$\begin{cases} \int_0^1 xf'(x)dx = 0 \\ \int_0^1 x^2 f'(x)dx = 1 \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 (x^2 - kx)f'(x)dx = 1$$

我们假设 $h(x) = x^2 - kx$, 我们不妨假设 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上恒有 $h(x) > 0$ 或者 $h(x) < 0$, 我们由第一积分中值定理得到:

$$\exists \eta \in (0,1),\ s.t. \int_0^1 h(x)f'(x) = f'(\eta)\int_0^1 h(x)dx \Rightarrow f'(\eta)\int_0^1 (x^2-kx)dx = 1 \Rightarrow f'(\eta) = \frac{6}{2-3k}$$

当 $k = 3$ 时, 我们有 $h(x) = x^2 - 3x$, 当 $x \in (0,1)$,$h(x) < 0$, 满足第一积分中值定理使用条件, 我们可以得到: $\exists \eta \in (0,1),\ s.t. f'(\eta) = -\dfrac{6}{7}$

July 3

1. 设 $f(x)$ 连续,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 1$, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1 + \int_0^x tf(x^2-t^2)dt\right]^{\frac{1}{(\tan x - x)\ln(1+x)}}$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0} e^{\dfrac{3\int_0^{x^2} -\frac{1}{2}f(x^2-t^2)d(x^2-t^2)}{x^4}} \\ &= \lim_{x\to 0} e^{\dfrac{\frac{3}{2}\int_0^{x^2} f(u)du}{x^4}} \\ &= \lim_{x\to 0} e^{\dfrac{3f(x^2)}{4x^2}} \\ &= e^{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

2. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的周期为 1 的周期函数且满足 $0 \le f(x) \le 1$ 与 $\int_0^1 f(x)dx = 1$, 证明: $x \in [0,13]$ 时,$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)dt + \int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)dt + \int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)dt \le 11$

解

我们由 $0 \le f(x) \le 1$ 得到:

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)dt + \int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)dt + \int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)dt \le \sqrt{x} + \sqrt{x+27} + \sqrt{13-x} = 1\cdot\sqrt{x} + a\cdot\frac{1}{a}\sqrt{x+27} + b\cdot\frac{1}{b}\sqrt{13-x}$$

我们由柯西不等式得到:

$$1\cdot\sqrt{x} + a\cdot\frac{1}{a}\sqrt{x+27} + b\cdot\frac{1}{b}\sqrt{13-x} \le \sqrt{(1+a^2+b^2)(x + \frac{x+27}{a^2} + \frac{13-x}{b^2})}$$

我们需要满足:

$$\begin{cases} 1+\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=0 \\ (1+a^2+b^2)(\dfrac{27}{a^2}+\dfrac{13}{b^2})=121 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=2 \\ b^2=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

我们可以得到原不等式取等号条件 $\dfrac{\sqrt{x}}{1}=\dfrac{\sqrt{x+27}}{2}=\dfrac{3\sqrt{13-x}}{2}$, 当且仅当 $x=9$ 时等号成立.

当 $x=9$ 时, 原不等式为:

$$\int_0^3 f(t)dt+\int_0^6 f(t)dt+\int_0^2 f(t)dt=11\int_0^1 f(t)dt=11$$

综上所述, 等号成立条件为 $x=9$, 原不等式成立.

3. 设 $D=\{(x,y)|0\le x\le 2, 0\le y\le 2\}$,$f(x,y)$ 在 D 上连续,$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=0$,$\iint\limits_D xyf(x,y)dxdy=1$, 证明: $\exists(\xi,\eta)\in D,\ s.t.|f'(\xi,\eta)|\ge\dfrac{2}{4\ln 2+3}$

解

我们由: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=0$,$\iint\limits_D xyf(x,y)dxdy=1$ 得到:

$$\iint\limits_D (xy-k)f(x,y)dxdy=1\Rightarrow\iint\limits_D |xy-k||f(x,y)|dxdy\ge 1$$

我们由二重积分第一积分中值定理得到:

$$\exists(\xi,\eta)\in D,\ s.t.|f(\xi,\eta)|\iint\limits_D |xy-k|dxdy=\iint\limits_D |xy-k||f(x,y)|dxdy\ge 1$$

我们得到:

$$\exists(\xi,\eta)\in D,\ s.t.|f(\xi,\eta)|\ge\frac{1}{\iint\limits_D |xy-k|dxdy}$$

我们只需要找到 k 使得 $\iint\limits_D |xy-k|dxdy=2\ln 2+\dfrac{3}{2}$.

原二重积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{D_1}(xy-k)dxdy+\iint\limits_{D_2}(k-xy)dxdy \\ &= \int_{\frac{k}{2}}^2 dx\int_{\frac{k}{x}}^2 (xy-k)dy+\int_0^{\frac{k}{2}}dx\int_0^2(k-xy)dy+\int_{\frac{k}{2}}^2 dx\int_0^{\frac{k}{x}}(k-xy)dy \\ &= \frac{3}{4}k^2-4k+4+\frac{3}{4}k^2+k^2\ln 2-k^2\ln\frac{k}{2} \\ &= 2k^2\ln 2-k^2\ln k+\frac{3}{2}k^2+4-4k \end{aligned}$$

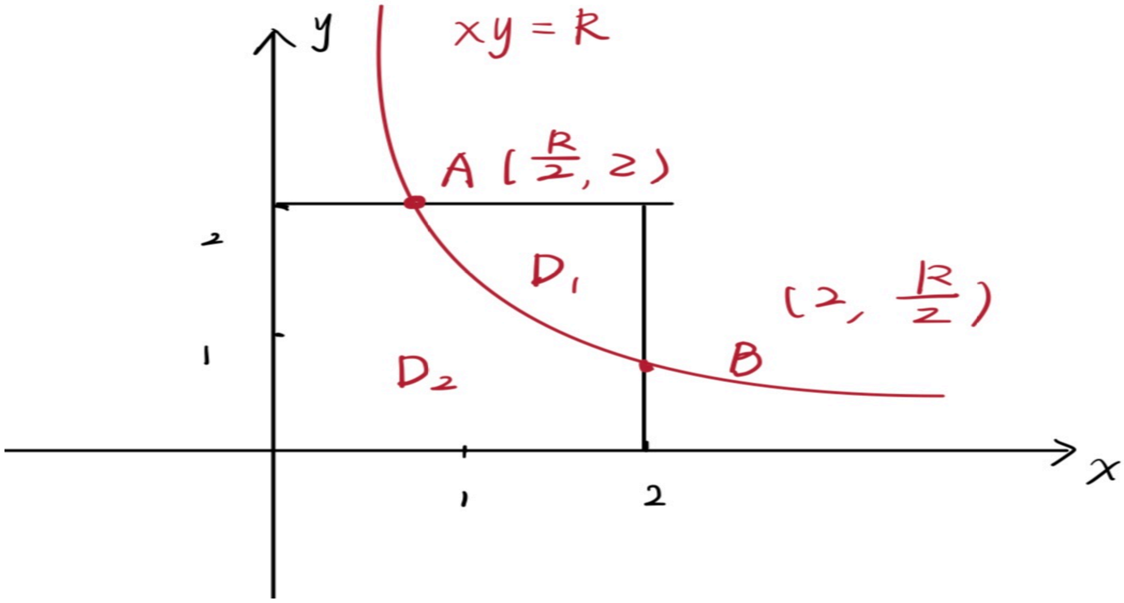


图 34.2: 积分区域图

我们得到:

$$\begin{cases} 2k^2 = 2 \\ \ln k = 0 \\ \dfrac{3}{2}k^2 + 4 - 4k = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow k = 1$$

综上所述, 我们找到 $k = 1$ 使得上式成立, 我们有: $\exists(\xi, \eta) \in D,\ s.t. |f'(\xi, \eta)| \geq \dfrac{2}{4\ln 2 + 3}$

July 4

1. 求极限: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}}$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1)}{\ln x}} \\ &\overset{L}{=} \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{(1 - \ln x)e^{\frac{\ln x}{x}}}{x(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1)}} \\ &= \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{(1 - \ln x)e^{\frac{\ln x}{x}}}{\ln x}} \\ &= e^{-1} \end{aligned}$$

注

- 如果 $f \sim g$, 我们有 $\ln f \sim \ln g$

2. 已知 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{\pi^2}{6}$

(1). 证明: $a_{2n} = \frac{1}{4}a_n + b_n$, $(n = 1, 2, \cdots)$

(2). 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{3}{4}\right)$

解

(1). 我们有:

$$\frac{1}{4}a_n = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2}$$

因此, 我们有:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}a_n + b_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2} \\
&= \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^2} \\
&= a_{2n}
\end{aligned}$$

(2). 原极限等价于:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_{2n}-a_n}{a_n}\right) \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} n(a_{2n}-a_n)}{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n} \\
&= \frac{6}{\pi^2}\lim_{n\to+\infty} n\left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+k)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}\right] \\
&= \frac{6}{\pi^2}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{k}{n})^2} \\
&= \frac{6}{\pi^2}(-\frac{1}{1+x})\Big|_0^1 \\
&= \frac{3}{\pi^2}
\end{aligned}$$

注

- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{24}$

July 5

1. 若 $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(xe^x) - e^{-\frac{x^2}{2}e^{2x}}}{x^\alpha} = \beta \neq 0$, 求 α, β

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2e^{2x} + \frac{1}{24}x^4e^{4x} - (1 - \frac{1}{2}x^2e^{2x} + \frac{1}{8}x^4e^{4x})}{x^\alpha} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4e^{4x}}{x^\alpha} \\ &= \beta \end{aligned}$$

我们得到: $\alpha = 4,\ \beta = -\frac{1}{12}$

2. 求 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2}dx\ (a > 0)$

解

原积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\ln a + \ln \frac{x}{a}}{(\frac{x}{a})^2 + 1}d(\frac{x}{a}) \\ &= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\ln a + \ln u}{u^2 + 1}du \\ &= \frac{\ln a}{a}\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2 + 1}du + \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{u^2 + 1}du \\ &= I_1 + I_2 \\ I_1 &= \frac{\pi \ln a}{2a} \\ I_2 &= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{u^2 + 1}du = \frac{1}{a}\int_{+\infty}^{0} \frac{-\ln t}{(\frac{1}{t})^2 + 1}(-\frac{1}{t^2})dt = -\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 + 1}dt \Rightarrow I_2 = 0 \\ I &= I_1 + I_2 = \frac{\pi \ln a}{2a} \end{aligned}$$

$\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 积分技巧

- 倒代换
- 分割为 $\int_0^1 f(x) + \int_1^{+\infty} f(x)dx$
- 利用正切三角换元法

July 6

1. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^{\alpha}}=\beta\neq 0$, 求 α,β

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 2x-\cos^2 x\cos 2x}{(\cos x+\cos x\sqrt{\cos 2x})x^{\alpha}} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos 2x\sin^2 x}{(\cos x+\cos x\sqrt{\cos 2x})x^{\alpha}} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos 2x}{\cos x+\cos x\sqrt{\cos 2x}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}} \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}} \\ &= \beta \end{aligned}$$

我们可以得到: $\alpha=2,\ \beta=-\dfrac{1}{2}$

2. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+3x+9x^2}$, 求 $f^{(100)}(0)$

解

我们可以得到:

$$f(x)=\frac{1-3x}{(1-3x)(1+3x+9x^2)}=\frac{1}{1-(3x)^3}-3x\frac{1}{1-(3x)^3}$$

我们将 $f(x)$ 在 $x=0$ 处泰勒展开得到:

$$\begin{cases} f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{100}x^{100}+\cdots+a_nx^n+\cdots \\ f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(100)}}{100!}x^{100}+\cdots \end{cases}\Rightarrow f^{(100)}(0)=a_{100}100!$$

我们有:

$$-1<x<1,\ 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n=\frac{1}{1-x}$$

我们得到:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(3x)^{3n}-\sum_{n=0}^{+\infty}(3x)^{3n+1}$$

我们得到: $a_{100}=-3^{100}\Rightarrow f^{(100)}(0)=-3^{100}100!$

July 7

1. 如果 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^2+bx+1-e^{x^2-2x}}{x^2}=2$, 求 a,b

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-(1+x^2-2x+\frac{1}{2}(x^2-2x)^2)}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(b+2)x+(a-3)x^2}{x^2}\\
&= a-3
\end{aligned}
$$

我们得到: $\begin{cases} a-3=2 \\ b+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-2 \end{cases}$

2. 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{n!x^n-\sin x\sin 2x\cdots\sin nx}{x^{n+2}}$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= n!\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{\sin x\sin 2x\cdots\sin nx}{n!x^n}}{x^2}\\
&= n!\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{\sin x}{x}\frac{\sin 2x}{2x}\cdots\frac{\sin nx}{nx}}{x^2}\\
&= -n!\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\frac{\sin x}{x}\frac{\sin 2x}{2x}\cdots\frac{\sin nx}{nx})}{x^2}\\
&= -n!\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{\sin kx-kx}{kx})}{x^2}\\
&= n!\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{kx-\sin kx}{kx^3}\\
&= n!\sum_{k=1}^{n}(\frac{k^2}{6})\\
&= n!\frac{n(n+1)(2n+1)}{36}\\
&= \frac{n(2n+1)(n+1)!}{36}
\end{aligned}
$$

34.2 Week II

July 8

1. 若 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})+ax^2+bx^3}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^2$, 求 a,b

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\left(\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+ax^2+bx^3-x}{x}+1\right)}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+ax^2+bx^3-x}{x^3}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)+ax^2+bx^3-x}{x^3}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(b-\frac{1}{6})x^3+o(x^3)+ax^2}{x^3}} \\
&= e^2
\end{aligned}$$

我们得到: $\begin{cases} b-\frac{1}{6}=2 \\ a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\dfrac{13}{6} \\ a=0 \end{cases}$

注

$x \longrightarrow 0,\ x \sim \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

我们可以得到:

$$[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^3+\cdots$$

我们可以得到: $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的泰勒展开式:

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

2. 设 n 阶矩阵 A, B 满足 $AB+aA+bB+cE=O$, 其中 $ab \neq c$, 证明:

(1). $A+bE$ 与 $B+aE$ 均为可逆矩阵

(2).$AB=BA$

解

(1). 我们由 $AB+aA+bB+cE=O$ 可以得到:

$$(A+bE)(B+aE)=(ab-c)E$$

我们得到:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{ab-c}(A+bE)(B+aE)=E \\ (A+bE)\dfrac{1}{ab-c}(B+aE)=E \end{cases}$$

我们得到: $A+bE$ 与 $B+aE$ 均为可逆矩阵

(2). 我们可以得到:

$$\frac{1}{ab-c}(A+bE)(B+aE)=\frac{1}{ab-c}(B+aE)(A+bE)$$

我们化简一下:

$$\begin{cases} \text{左边}=AB+bB+aA+abE \\ \text{右边}=BA+aA+bB+abE \end{cases} \Rightarrow AB=BA$$

July 9

1. 已知常数 $a>0,\ bc\neq 0$, 使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}[x^a\ln(1+\frac{x}{b})-x]=c$, 求 a,b,c

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+bx)-x^{a-1}}{x^a} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{bx-\frac{1}{2}b^2x^2-x^{a-1}}{x^a} \\ &= c \end{aligned}$$

我们得到: $\begin{cases} a-1=1 \\ b=1 \\ c=-\dfrac{1}{2}b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

2. 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{6n}}\frac{\sin y}{y}dy+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{3}{6n}}\frac{\sin y}{y}dy+\cdots+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{(2n-1)}{6n}}\frac{\sin y}{y}dy\right]$$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2k-1}{6n}}\frac{\sin y}{y}dy \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{2k-1}{2n}) \\
&= \int_0^1[\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}x}\frac{\sin y}{y}dy]dx \\
&= -\int_0^{\frac{1}{3}}dy\int_0^{3y}\frac{\sin y}{y}dx \\
&= -\int_0^{\frac{1}{3}}3\sin y dy \\
&= 3(\cos\frac{1}{3}-1)
\end{aligned}
$$

July 10

1. 设 A 为 n 阶反对称矩阵, 证明: 对于任意向量 x, 均有 $x^T(A+E)x \geq 0$.

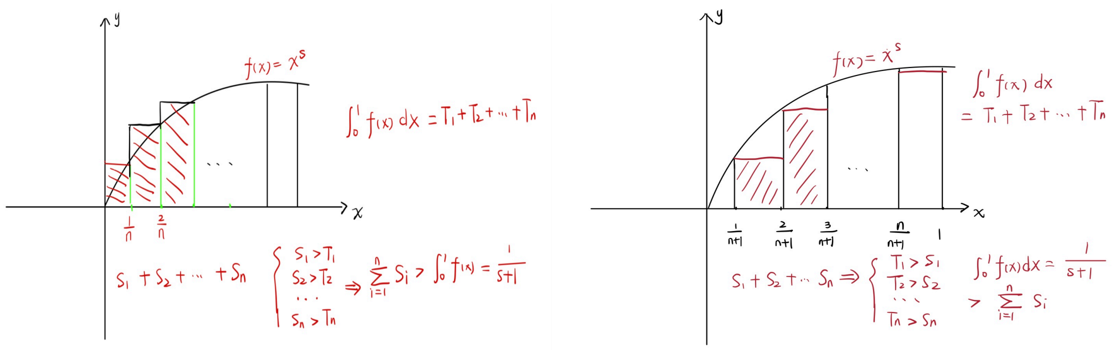
解

我们有:

$$x^T(A+E)x = [x^T(A+E)x]^T = x^T(A^T+E)x = x^T(-A+E)x$$

$$x^T(A+E)x + x^T(A-E)x = 2x^TAx = 0 \Rightarrow x^T(A+E)x = x^TAx + x^TEx = x^Tx \geq 0$$

2. $s>0$, 证明: $\dfrac{n^{s+1}}{s+1} < 1^s + 2^s + \cdots + n^s < \dfrac{(n+1)^{s+1}}{s+1}$



(a) 定积分定义示意图 α　　(b) 定积分定义示意图 β

图 34.3: 积分和求和关系图

解

原不等式可以化为:

$$\begin{cases} \frac{1}{n}[(\frac{1}{n})^s + (\frac{2}{n})^s + \cdots + (\frac{n}{n})^s] > \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{n+1}[(\frac{1}{n+1})^s + (\frac{2}{n+1})^s + \cdots + (\frac{n}{n+1})^s] < \frac{1}{s+1} \end{cases}$$

如图 (a) 第一个不等式:

$$左边 = \sum_{i=1}^{n} S_i > \int_0^1 x^s dx = \frac{1}{s+1} = 右边$$

如图 (b) 第二个不等式:

$$左边 = \sum_{i=1}^{n} S_i < \int_0^1 x^s dx = \frac{1}{s+1} = 右边$$

3. 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1^{p+1} + 2^{p+1} + \cdots + n^{p+1}}{n(1^p + 2^p + \cdots + n^p)} (p > 0)$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(\frac{1}{n})^{p+1} + (\frac{2}{n})^{p+1} + \cdots + (\frac{n}{n})^{p+1}}{(\frac{1}{n})^p + (\frac{2}{n})^p + \cdots + (\frac{n}{n})^p} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}[(\frac{1}{n})^{p+1} + (\frac{2}{n})^{p+1} + \cdots + (\frac{n}{n})^{p+1}]}{\frac{1}{n}[(\frac{1}{n})^p + (\frac{2}{n})^p + \cdots + (\frac{n}{n})^p]} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^{p+1}}{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^p} \\ &= \frac{\int_0^1 \frac{x^{p+2}}{p+2} dx}{\int_0^1 \frac{x^{p+1}}{p+1} dx} \\ &= \frac{p+1}{p+2} \end{aligned}$$

July 11

1. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求 A^{99}

解

我们将矩阵 A 相似对角化:

(1). 求矩阵 A 的特征值和特征向量

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -2 & \lambda+3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)$$

矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -2$

当 $\lambda_1 = 0$ 时,$(-A)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \xi_1 = (3,2,2)^T$

当 $\lambda_2 = -1$ 时,$(-E - A)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \xi_2 = (1,1,0)^T$

当 $\lambda_3 = -2$ 时,$(-2E - A)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \xi_3 = (1,2,0)^T$

存在可逆矩阵 $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $s.t.\ P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$, 其中 $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

我们得到:

$$A = P\Lambda P^{-1} \Rightarrow A^{99} = P\Lambda^{99}P^{-1}$$

上面的式子可以化为:

$$\begin{aligned} A^{99} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -2^{99} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2^{99} \\ 0 & -1 & -2^{100} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2^{99}-2 & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ 2^{100}-2 & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. 设 3 阶实对称矩阵 A 特征值为 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 对应于 λ_1 的特征向量为 $\xi_1 = [0,1,1]^T$, 求 A.

解

我们不妨设特征值 λ_2, λ_3 对应的特征向量为 $x = (x_1,x_2,x_3)^T$, 我们由实对称矩阵不同特征值对应的特征向量相互正交得到:

$$x_2 + x_3 = 0$$

我们不妨取 $\xi_2 = (1,0,0)^T$, $\xi_3 = (0,-1,1)^T$ 作为特征值 λ_2, λ_3 的特征向量. 我们将 ξ_1,ξ_2,ξ_3 单位化得到:

$$\begin{cases} \eta_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T \\ \eta_2 = (1,0,0)^T \\ \eta_3 = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T \end{cases}$$

我们得到:

$$\exists \text{可逆矩阵} P = [\eta_1,\eta_2,\eta_3],\ s.t. P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

其中 $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

我们得到:

$$\begin{aligned} A &= P\Lambda P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. 设 A 是任意的 $m \times n$ 矩阵, 证明: 方程组$A^TAx = A^Tb$ 一定有解.

解

我们知道非齐次方程组有解的充要条件为: $rank(A) = rank([A,b])$

在此题中,我们需要证明:

$$rank(A^TA) = rank([A^TA, A^Tb]) = rank(A^T[A, b])$$

显然,我们由 $rank(AB) \le min\{rank(A), rank(B)\}$ 有:

$$rank(A^TA) \le rank([A^TA, A^Tb]) = rank(A^T[A, b]) \le rank(A^T)$$

我们还有: $rank(A) = rank(A^T) = rank(AA^T) = rank(A^TA)$

因此我们得到:

$$\begin{cases} rank(A^TA) = rank(A) \le rank([A^TA, A^Tb]) \\ rank([A^TA, A^Tb]) \ge rank(A^T) = rank(A) = rank(A^TA) \end{cases} \Rightarrow rank(A^TA) = rank([A^TA, A^Tb])$$

原方程组一定有解.

July 12

1. 设 A 为 3 阶实对称矩阵,$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,$\alpha = (1, 0, 1)^T$ 是矩阵 A 特征值 3 的一个特征向量,若 $r(3E - A) > 1$,且 $A^2 - 4E + 3E = 0$,下列选项错误的是:

- A. 矩阵 A 必可相似对角化
- B. 矩阵 B 不可以相似对角化
- C. 矩阵方程 $AX - XB = 0$ 有可逆解
- D. $r(3E - A) = 2$

解

A. 我们由实对称矩阵必可相似对角化得到矩阵 A 一定可以相似对角化.

B. 矩阵 B 的三个特征值为 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$,对于特征值 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$,$n - r(E - B) = 1$,不满足相似对角化条件.

C. 假设方程 $AX - XB = 0$ 存在可逆解,我们有 $AXX^{-1} = XBX^{-1} \Rightarrow A = XBX^{-1}$,我们可以得到: $A \sim B$,我们有 $A \sim \Lambda$,可以得到: $B \sim \Lambda$,矛盾!!

D. 我们有: $A^2 - 4E + 3E = 0 \Rightarrow (A - 3E)(A - E) = 0$,矩阵 A 的特征值有 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$,对应 $r(3E - A) = 1$或者2,又因为 $r(3E - A) > 1 \Rightarrow r(3E - A) = 2$.

2. 求 $f(x) = \sqrt{4x^2 + x}\ln(2 + \frac{1}{x})$ 的斜渐近线.

解

我们不妨假设 $f(x)$ 的斜渐近线为 $y = ax + b$,我们得到:

(1).

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax) \end{cases}$$

我们得到:

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4+\frac{1}{x}}\ln(2+\frac{1}{x}) = 2\ln 2 \\ b = \lim\limits_{x\to+\infty} [\sqrt{4x^2+x}\ln(2+\frac{1}{x}) - 2\ln 2x] = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{4+t}\ln(2+t)-2\ln 2}{t} = \lim\limits_{t\to 0^+} (\frac{\ln(2+t)}{2\sqrt{4+t}} + \frac{\sqrt{4+t}}{t+2}) = \frac{\ln 2}{4} + 1 \end{cases}$$

(2).

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - ax) \end{cases}$$

我们得到:

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{4+\frac{1}{x}}\ln(2+\frac{1}{x}) = -2\ln 2 \\ b = \lim\limits_{x\to-\infty} [\sqrt{4x^2+x}\ln(2+\frac{1}{x}) + 2\ln 2x] = \lim\limits_{t\to 0^-} \frac{2\ln 2 - \sqrt{4+t}\ln(2+t)}{t} = -\frac{\ln 2}{4} - 1 \end{cases}$$

综上所述,$f(x)$ 的斜渐近线为 $y = 2\ln 2\, x + \frac{\ln 2}{4} + 1$ 和 $y = -2\ln 2\, x - \frac{\ln 2}{4} - 1$

注

利用泰勒展开式来求渐近线.

$f(x) = \sqrt{4x^2+x}\ln(2+\frac{1}{x})$, 我们利用泰勒展开式得到:

$$\begin{cases} x\to+\infty,\ f(x) \sim 2x\sqrt{1+\frac{1}{4x}}[\ln 2 + \ln(1+\frac{1}{2x})] = 2x(1+\frac{1}{8x})(\ln 2 + \frac{1}{2x}) = 2\ln 2\, x + \frac{\ln 2}{4} + 1 \\ x\to-\infty,\ f(x) \sim -2x\sqrt{1+\frac{1}{4x}}[\ln 2 + \ln(1+\frac{1}{2x})] = -2x(1+\frac{1}{8x})(\ln 2 + \frac{1}{2x}) = -2\ln 2\, x - \frac{\ln 2}{4} - 1 \end{cases}$$

July 13

1. 当 $x\to 0$ 时, 下列无穷小量最高阶的是:

- A. $(1+x)^{x^2} - 1$
- B. $e^{x^4-2x} - 1$
- C. $\int_0^{x^2} \sin t^2 dt$
- D. $\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}$

解

A. $e^{x^2\ln(1+x)} - 1 \sim x^2\ln(1+x) \sim x^3 \Rightarrow$ 最高阶3阶

B. $e^{x^4-2x} - 1 \sim x^4 - x^2 \Rightarrow$ 最高阶4阶

C. $\int_0^{x^2} \sin t^2 dt \sim \frac{x^6}{3} \Rightarrow$ 最高阶6阶

D. $\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x} = 1 + \frac{1}{2}2x - \frac{1}{8}(2x)^2 - [1 + \frac{1}{3}3x - \frac{1}{27}(3x^2)] \sim \frac{1}{12}x^2 \Rightarrow$ 最高阶2阶

2. 求曲线 $y = \sqrt{x^4 - 3x^3 + 4}$ 在 $x\to+\infty$ 方向的渐进二次曲线.

解

$$\text{当} x \to +\infty,\ f(x) = x^2\sqrt{1+\frac{4-3x^3}{x^4}} = x^2[1+\frac{4-3x^3}{2x^4}-\frac{(4-3x^3)^2}{8x^8}] = x^2-\frac{3}{2}x-\frac{9}{8}+o(\frac{1}{x})$$

原函数的渐近二次曲线为: $y = x^2-\frac{3}{2}x-\frac{9}{8}$

July 14

1. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 个 n 维列向量, 证明: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关的充要条件为:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{vmatrix} \neq 0$$

解

我们不妨设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n), A^T=\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \cdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix}$, 我们可以得到:

$$|AA^T| = \begin{vmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{vmatrix} \Rightarrow |A|^2 = \begin{vmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{vmatrix}$$

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关等价于 $|A|\neq 0$, 证毕!

2. 当 $x\to 0^+$ 时, 下列无穷小量中最高阶的是:

- A. $\int_0^{1-\cos x}\frac{\sin t}{t}dt$
- B. $\int_0^x t\tan\sqrt{x^2-t^2}dt$
- C. $\int_{\sin x}^{1-\sqrt{\cos x}} e^{xt}\ln(1+t^3)dt$
- D. $\int_{\sin x}^{x}\sqrt{\sin^3 t}\,dt$

解

A. $\int_0^{1-\cos x}\frac{\sin t}{t}dt \sim \int_0^{\frac{1}{2}x^2} 1dt \sim \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow$ 最高阶2阶

B. 我们进行换元 $u = x^2 - t^2, d(t^2) = -du$, 原积分等价于: $\int_0^{x^2}\frac{tan\sqrt{u}}{2}du \sim \frac{1}{3}x^3 \Rightarrow$ 最高阶3阶

C. 我们可以得到原积分等价于: $\int_{\sin x}^{1-\sqrt{\cos x}} e^{xt}\ln(1+t^3)dt = I_1 - I_2$

$$I_1 = \int_0^{1-\sqrt{\cos x}} e^{xt}\ln(1+t^3)dt$$

$$I_2 = \int_0^{\sin x} e^{xt}\ln(1+t^3)dt$$

由积分中值定理得到:

$I_1 = e^{x\xi}\int_0^{1-\sqrt{\cos x}}\ln(1+t^3)dt \sim \frac{1}{4^5}x^8 \Rightarrow$ 最高阶8阶

$I_2 = e^{x\xi}\int_0^{\sin x}\ln(1+t^3)dt \sim \frac{1}{4}x^4 \Rightarrow$ 最高阶4阶

$\int_{\sin x}^{1-\sqrt{\cos x}} e^{xt}\ln(1+t^3)dt \sim \frac{1}{4}x^4 \Rightarrow$ 最高阶4阶

D. 由积分中值定理得到: $\int_{\sin x}^{x}\sqrt{\sin^3 t}dt = (x - \sin x)\sin^{\frac{3}{2}}\xi \sim \frac{1}{6}x^{\frac{9}{2}}, \xi \in (\sin x, x) \Rightarrow$ 最高阶$\frac{9}{2}$阶

34.3 Week III

July 15

1. 求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)}$ 的和.

解

我们可以得到: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

我们有:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots$$

我们不妨设 $S = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$, $T = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$, 我们有:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)} &= \frac{1}{2}(S-T)\\
&= \frac{1}{2}(-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n-1} + \cdots) - \frac{1}{2}(-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots)\\
&= -\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4} - 1)\\
&= \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

泰勒级数

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1+i\theta+\frac{(i\theta)^2}{2!}+\frac{(i\theta)^3}{3!}+\cdots+\frac{(i\theta)^n}{n!}+\cdots \\
&= [1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^k\theta^{2k}}{2k}+\cdots]+i[\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^k\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots] \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\theta^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}
$$

- $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!},\ x\in\mathbb{R}$
- 欧拉公式: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

- $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!},\ x\in\mathbb{R}$
- $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x\in\mathbb{R}$
- $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x\in\mathbb{R}$
- $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x\in\mathbb{R}$

- $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n,\ x\in(-1,1)$
- $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^n,\ x\in(-1,1)$
- $\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+x}dx=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^nx^{n+1}}{n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{n+1}}{n+1},\ x\in(-1,1]$
- $\ln(1-x)=-\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots]=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1},\ x\in[-1,1)$

- $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^nx^{2n}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^{2n},\ x\in(-1,1)$
- $\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{2n+1},\ x\in[-1,1]$

- $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,\ x\in(-1,1)$
- $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{(2n-1)!!}{2^nn!}x^{2n}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}x^{2n},\ x\in(-1,1)$

- $\arcsin x=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}x^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1},\ x\in(-1,1)$

我们还可以得到几个常用的数列和:

- $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$
- $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}=\ln 2$
- $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

2. 设 $A=(a_{ij})_{3\times3}$,A 的每行元素之和为 a, 且 $|A|=b$, 将 A 中的每个元素加 k 得到矩阵 $B=(a_{ij}+k)_{3\times3}$, 求 $|B|$

解

我们不妨设: $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}a_{11}+k&a_{12}+k&a_{13}+k\\a_{21}+k&a_{22}+k&a_{23}+k\\a_{13}+k&a_{23}+k&a_{33}+k\end{bmatrix}$

我们有:

$$|A|=a\begin{vmatrix}1&a_{12}&a_{13}\\1&a_{22}&a_{23}\\1&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}=b\Rightarrow\begin{vmatrix}1&a_{12}&a_{13}\\1&a_{22}&a_{23}\\1&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}=\frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned}|B|&=(a+3k)\begin{vmatrix}1&a_{12}+k&a_{13}+k\\1&a_{22}+k&a_{23}+k\\1&a_{23}+k&a_{33}+k\end{vmatrix}\\&=(a+3k)\begin{vmatrix}1&a_{12}&a_{13}+k\\1&a_{22}&a_{23}+k\\1&a_{23}&a_{33}+k\end{vmatrix}+(a+3k)\begin{vmatrix}1&k&a_{13}+k\\1&k&a_{23}+k\\1&k&a_{33}+k\end{vmatrix}\\&=(a+3k)\begin{vmatrix}1&a_{12}&a_{13}\\1&a_{22}&a_{23}\\1&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}+(a+3k)\begin{vmatrix}1&a_{12}&k\\1&a_{22}&k\\1&a_{23}&k\end{vmatrix}\\&=\frac{(a+3k)b}{a}\end{aligned}$$

3. 求 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$ 的和.

解

我们有:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x},\ x\in(-1,1)\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}=\frac{2}{3}$$

我们对 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n$ 求导得到:

$$\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n=\dfrac{1}{(1-x)^2}\\ \sum\limits_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)x^n=\dfrac{2}{(1-x)^3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)(-\dfrac{1}{2})^n=\dfrac{4}{9}\\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)(-\dfrac{1}{2})^n=\dfrac{16}{27}\end{cases}$$

原级数等价为:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n[(n+2)(n+1)-4(n+1)+3]}{2^n}\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n+2)(n+1)}{2^n}-4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{2^n}+3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\\&=\frac{16}{27}-4\frac{4}{9}+3\frac{2}{3}\\&=\frac{22}{27}\end{aligned}$$

July 16

1. 设 A 是 3 阶矩阵, 且满足 $|A-2E|=|A-3E|=|A-4E|=3$, 求 $|A-E|$

解

我们不妨设: $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{bmatrix}$, 我们有:

$$|A-xE|=\begin{vmatrix}a_{11}-x&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}-x&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}-x\end{vmatrix}=-x^3+bx^2+cx+d$$

又因为: $|A-2E|=|A-3E|=|A-4E|=3$, 我们不妨设 $|A-xE|=f(x)=-x^3+bx^2+cx+d$

我们可以得到: $f(x)=-(x-2)(x-3)(x-4)+3$, 因此: $f(1)=9\Rightarrow|A-E|=9$

2. 设 $f(x)$ 连续, 且 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=1,\alpha(x)=\int_0^{\sqrt{x}}\dfrac{\ln(1+t^4)}{f(t)}dt,\beta(x)=\int_0^{\sin x}\dfrac{\sqrt{1+t^3}-1}{f(t)}dt$, 则当

$x \to 0^+$ 时,$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的:

- A. 等价无穷小
- B. 同阶但非等价无穷小
- C. 高阶无穷小
- D. 低阶无穷小

解

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\frac{\ln(1+t^4)}{f(t)}dt}{\int_0^{\sin x}\frac{\sqrt{1+t^3}-1}{f(t)}dt} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x^2)}{2\sqrt{x}f(\sqrt{x})}}{\frac{\cos x[\sqrt{1+(\sin x)^3}-1]}{f(\sin x)}} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)}{\sin x}\frac{\sqrt{x}}{f(\sqrt{x})}\frac{1}{x} \\
&= +\infty
\end{aligned}
$$

$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的低阶无穷小.

3. 证明: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 收敛, 并求其和.

解

我们不妨设 $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, 我们可以得到:

$$x \to a_n \sim \ln n$$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}}{(k+1)(k+2)} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{a_1}{2}-\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3}-\frac{a_2}{4}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}-\frac{a_n}{n+2} \\
&= \frac{a_1}{2}+\frac{a_2-a_1}{3}+\cdots+\frac{a_n-a_{n-1}}{n+1}-\frac{a_n}{n+2} \\
&= \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}-\frac{a_n}{n+2} \\
&= 1-\frac{1}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}
\end{aligned}
$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n+1}-\frac{\ln n}{n+2}) = 1$$

原级数收敛, 其和 $S=1$.

July 17

1. 当 $x \to 0$ 时,$2\arctan x - \ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 是 x 的 n 阶无穷小, 求 n.

解

利用泰勒展开式将函数展开:

$$\begin{cases} \arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3) \\ \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3) \\ \ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \to 0, f(x) &= 2\arctan x - \ln(1+x) + \ln(1-x) \\ &= 2(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)) - (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)) - (x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)) \\ &= -\frac{4}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

综上所述, 我们可以得到: $n=3$.

2. 关于函数 $f(x,y) = \begin{cases} xy, & xy \neq 0 \\ x, & y = 0 \\ y, & x = 0 \end{cases}$, 下列结论正确的是:

- A. $\dfrac{\partial f}{\partial x}|_{(0,0)} = 1$
- B. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}|_{(0,0)} = 1$
- C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$
- D. $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = 0$

解

$A.\ \dfrac{\partial f}{\partial x}|_{(0,0)} \lim\limits_{x\to 0+\infty} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 1$

$B. \dfrac{\partial f}{\partial x}{}_{(0,y)} = \begin{cases} 1, & y = 0 \\ \text{不存在}, & y \neq 0 \end{cases}$

$C.\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

$D.\ \lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \begin{cases} xy = 0, & x \neq 0 \\ y = 0, & x = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = 0$

3. 求 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{x^{2n+2}}{n+1}$ 的和函数 $S(x)$

解

我们先求收敛区间:

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=x^2<1\Rightarrow x\in(-1,1)$$

我们对 $S(x)$ 求导得到:

$$S'(x)=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}=2f(x)$$

我们再对 $f(x)$ 求导:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n} \\
&= 1+x[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}] \\
&= 1+x[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}]' \\
&= 1+x[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+2}]' \\
&= 1+x[x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}]' \\
&= 1+x[xf(x)]' \\
&= 1+x[f(x)+xf'(x)] \\
&= 1+xf(x)+x^2f'(x)
\end{aligned}$$

我们得到:

$$f'(x)-\frac{x}{1-x^2}f(x)-\frac{1}{1-x^2}=0$$

我们解出

$$f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow S(x)=2\int_0^x f(x)dx+S(0)=(\arcsin x)^2$$

当 $x=\pm1$ 时, 我们需要判断级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{1}{n+1}$ 的敛散性:

我们有:

$$\begin{cases} 2\times 4\leq 3^3 \\ 4\times 6\leq 5^2 \\ \cdots \\ (2n-2)\times 2n\leq (2n)^2 \\ (2n)\times(2n+2)\leq(2n+1)^2 \end{cases} \Rightarrow [(2n)!!]^2\leq(n+1)[(2n+1)!!]^2 \Rightarrow \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\leq\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

我们得到: $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{1}{n+1}\leq\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$, 由比较判别法可知, 级数收敛.

综上所述, 我们得到: $S(x)=(\arcsin x)^2,\ x\in[-1,1]$

July 18

1. 当 $x\to 0^+$ 时,$(1+x)^{\frac{1}{x}}-(e+ax+bx^2)$ 是比 x^2 高阶的无穷小, 求 a,b

解

我们利用泰勒展开得到:

$$\begin{aligned} x\to 0^+, f(x) &= e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-(e+ax+bx^2) \\ &= e(1+\frac{\ln(1+x)-x}{x}+\frac{[\ln(1+x)-x]^2}{2x^2}+o(x^2))-(e+ax+bx^2) \\ &= (-a-\frac{e}{2})x+(\frac{11e}{24}-b)x^2+o(x^2) \end{aligned}$$

我们得到: $\begin{cases} a=-\frac{e}{2} \\ b=\frac{11e}{24} \end{cases}$

综上所述, 我们得到: $a=-\frac{e}{2},\ b=\frac{11e}{24}$

2. 设 $f(x)$ 二阶可导,$f(0)=0$, 证明: $\exists\xi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\ s.t.f''(\xi)=3f'(\xi)\tan\xi+2f(\xi)$.

解

我们构造辅助函数: $F(x)=f(x)\cos^2 x$

我们得到: $F(-\frac{\pi}{2})=F(0)=F(\frac{\pi}{2})=0$

$$\begin{cases} G(x)=f'(x)\cos x-2\sin x f(x) \\ F'(x)=f'(x)\cos^2 x-2\sin x\cos x f(x)=\cos x G(x) \end{cases} \Rightarrow G'(x)=f''(x)\cos x-3f'(x)\sin x-2\cos x f(x)$$

我们对 $F(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},0)$ 和 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上使用罗尔定理得到:

$$\begin{cases} \exists\xi_1\in(-\frac{\pi}{2},0),\ s.t.F'(\xi_1)=\xi_1 G(\xi_1)=0 \\ \exists\xi_2\in(0,\frac{\pi}{2}),\ s.t.F'(\xi_2)=\xi_2 G(\xi_2)=0 \end{cases}$$

我们对 $G(x)$ 在 (ξ_1,ξ_2) 上使用罗尔定理得到:

$\exists\eta\in(\xi_1,\xi_2),\ s.t.G'(\eta)=f''(\eta)\cos\eta-3f'(\eta)\sin\eta-2\cos\eta f(\eta)=0\Rightarrow f''(\eta)=3f'(\eta)\tan\eta+2f(\eta)$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\ s.t.f''(\xi)=3f'(\xi)\tan\xi+2f(\xi)$.

July 19

1. 设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$, 求 a,b,c

解

我们由泰勒展开式:

$$\begin{cases}\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)\\ \dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+o(x^3)\end{cases}$$

我们可以得到:

$$\begin{aligned}x\to0,f(x)&=\frac{\sin x}{1+x^2}\\&=(x-\frac{x^3}{6})(1-x^2)\\&=x-\frac{7}{6}x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

我们得到: $\begin{cases}a=1\\b=0\\c=-\dfrac{7}{6}\end{cases}$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{(1+x)^{\frac{1}{x}}}-(1+x)^{\frac{e}{x}}}{x^2}$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to0}e^{\frac{e\ln(1+x)}{x}}\frac{e^{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-\frac{e\ln(1+x)}{x}}-1}{x^2}\\&=e^{e+1}\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x}}-\frac{\ln(1+x)-x}{x}-1}{x^2}\\&=e^{e+1}\lim_{x\to0}\frac{\frac{(\ln(1+x)-x)^2}{2x^2}}{x^2}\\&=\frac{e^{e+1}}{8}\end{aligned}$$

July 20

1. 设函数 $f(x)=\sec x$ 在 $x=0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $1+ax+bx^2$, 求 a,b

解

我们有:

$$\sec x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n)!}x^{2n}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+\cdots,\ x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$$

我们可以知道: $\begin{cases} a=0 \\ b=\frac{1}{2}\end{cases}$

2. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 二阶导数连续, 证明: $\exists\xi\in[-1,1],\ s.t.\int_{-1}^{1}xf(x)dx=\dfrac{2f'(\xi)+\xi f''(\xi)}{3}$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=\int_0^x tf(t)dt,F(0)=F'(0)=0$, 我们有:

$$\begin{cases} F'(x)=xf(x) \\ F''(x)=f(x)+xf'(x) \\ F'''(x)=2f'(x)+xf''(x)\end{cases}$$

原命题等价于: $\exists\xi\in[-1,1],\ s.t.F(1)-F(-1)=\frac{1}{3}F'''(\xi)$

我们将 $F(x)$ 在 $x=0$ 处进行泰勒展开:

$$F(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{F''(0)}{2}x^2+\frac{F'''(\xi)}{6}x^3,\ \xi\in(0,x)$$

我们有:

$$\begin{cases} F(1)=\dfrac{F''(0)}{2}+\dfrac{F'''(\xi_1)}{6} \\ F(-1)=\dfrac{F''(0)}{2}-\dfrac{F'''(\xi_2)}{6}\end{cases}\Rightarrow F(1)-F(-1)=\frac{1}{3}\frac{F'''(\xi_1+F'''(\xi_2))}{2}$$

我们由 $F'''(x)$ 连续, 由介值定理可以知道:

$$\exists\eta\in(-1,1),\ s.t.\frac{F'''(\xi_1)+F'''(\xi_2)}{2}\Rightarrow\exists\xi\in[-1,1],\ s.t.F(1)-F(-1)=\frac{1}{3}F'''(\eta)$$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi\in[-1,1],\ s.t.\int_{-1}^{1}xf(x)dx=\dfrac{2f'(\xi)+\xi f''(\xi)}{3}$

34.4 Week IV

July 21

1. 函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)|x-1|}{e^{\frac{1}{x-2}}\ln|x|}$ 的可去间断点个数.

解

我们发现可能的间断点为 $x=0,\ x=1,\ x=-1,\ x=2$

$$\left\{\begin{aligned}&\lim_{x\to0^+}f(x)=e^{\frac12}\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\ln x}=0\\&\lim_{x\to0^-}f(x)=e^{\frac12}\lim_{x\to0^-}\frac{1}{\ln(-x)}=0\end{aligned}\right.\Rightarrow x=0\text{是}f(x)\text{的可去间断点}$$

$$\left\{\begin{aligned}&\lim_{x\to1^+}f(x)=2e\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{\ln x}=2e\\&\lim_{x\to1^-}f(x)=2e\lim_{x\to1^-}\frac{1-x}{\ln(-x)}=-2e\end{aligned}\right.\Rightarrow x=1\text{不是}f(x)\text{的可去间断点}$$

$$\left\{\begin{aligned}&\lim_{x\to-1^+}f(x)=2e^{\frac13}\lim_{x\to-1^+}\frac{x+1}{\ln(-x)}=-2e^{\frac13}\\&\lim_{x\to-1^-}f(x)=2e^{\frac13}\lim_{x\to-1^-}\frac{1+x}{\ln(-x)}=-2e^{\frac13}\end{aligned}\right.\Rightarrow x=-1\text{是}f(x)\text{的可去间断点}$$

$$\left\{\begin{aligned}&\lim_{x\to2^+}f(x)=\frac{3}{\ln2}\lim_{x\to2^+}\frac{1}{+\infty}=0\\&\lim_{x\to2^-}f(x)=\frac{3}{\ln2}\lim_{x\to2^-}\frac{1}{0}=+\infty\end{aligned}\right.\Rightarrow x=2\text{不是}f(x)\text{的可去间断点}$$

综上所述,$f(x)$ 的可去间断点有两个, 分别为 $x=0,\ x=-1$

July 22

1. 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,$f(x)$ 为连续函数,$\varphi(x)$ 有间断点, 下列命题正确的是:

- A. $f(x)[|\varphi(x)|+\varphi^2(x)]$ 必有间断点
- B. 若 $f(x)$ 单调, 则 $\dfrac{\varphi(x)}{|f(x)|}$ 必有间断点
- C. $\dfrac{\varphi(x)}{1+f^2(x)}$ 必有间断点
- D. $f(x)\varphi(x)$ 必有间断点

解

我们知道:

$$f(x)\text{有间断点}\nRightarrow|f(x)|\text{有间断点},\ |f(x)|\text{有间断点}\Rightarrow f(x)\text{有间断点}$$

我们知道 $|\varphi(x)|$ 不一定有间断点, 令 $f(x)=0\Rightarrow f(x)g(x)$ 连续不存在间断点, 我们可以得到 A,D 错误.

我们知道 $f(x)$连续 $\Rightarrow|f(x)|$连续, 我们不妨假设: $\dfrac{\varphi(x)}{|f(x)|}$ 连续, 我们知道连续函数之积仍然是连续函数, 我们得到: $\varphi(x)$ 连续, 矛盾!!!

对于 C 选项, 我们同理假设 $\dfrac{\varphi(x)}{1+f^2(x)}$ 连续, 我们知道 $1+f^2(x)$ 连续, 我们得到: $\varphi(x)$ 连续, 矛盾!!!

2. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是 n 阶矩阵 A 的 m 个两两互异的特征值 $(m\le n)$, 对应的特征向量分

别为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$, 令 $\eta=\sum\limits_{k=1}^{m}\xi_k$, 证明:

$$\eta, A\eta, A^2\eta,\cdots,A^{m-1}\eta\text{线性无关}$$

解

我们由:

$$\begin{cases} A\xi_1=\lambda_1\xi_1\\ A\xi_2=\lambda_2\xi_2\\ \cdots\\ A\xi_m=\lambda_m\xi_m\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \eta=\sum\limits_{k=1}^{m}\xi_k\\ A\eta=\sum\limits_{k=1}^{m}\lambda_k\xi_k\\ A^2\eta=\sum\limits_{k=1}^{m}\lambda_k^2\xi_k\\ \cdots\\ A^{m-1}\eta=\sum\limits_{k=1}^{m}\lambda_k^{m-1}\xi_k\end{cases}$$

我们不妨假设矩阵 $C=[\eta,A\eta,\cdots,A^{m-1}\eta]$, 我们有:

$$C=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m]\begin{bmatrix}1&\lambda_1&\cdots&\lambda_1^{m-1}\\1&\lambda_2&\cdots&\lambda_2^{m-1}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\1&\lambda_m&\cdots&\lambda_m^{m-1}\end{bmatrix}$$

我们可以知道 $C=DB$, 其中 D 为列满秩矩阵,B 为范德蒙矩阵.

我们有 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 两两互异, 我们得到 $|B|\neq 0$,B 为可逆矩阵, 我们得到: $r(C)=r(D)$,$D=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m]$ 线性无关, 因此我们得到:

$$\eta, A\eta, A^2\eta,\cdots,A^{m-1}\eta\text{线性无关}$$

July 23

1. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n}+x^{2n}}}$, 则 $f(x)$ 在其定义域内:

- A. 连续
- B. 有 1 个可去间断点
- C. 有 1 个跳跃间断点
- D. 有 1 个第二类间断点

解

我们首先得到:

$$f(x)=\begin{cases}0,\ -2<x<2\\ 2\sqrt{2},\ x=2\\ x^2,\ x>2\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $(-\infty,-2]$ 上没有定义, 在 $(-2,+\infty)$ 上有且仅有一个间断点 $x=2$, 且为跳跃间断点.

2. 求积分 $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}}(\frac{e^x}{x}-\frac{e^{y^2}}{\sqrt{x}})dy$

解

原二重积分等价于:

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\frac{e^x}{\sqrt{x}}dx-\int_0^1 dy\int_{y^2}^1\frac{e^{y^2}}{\sqrt{x}}dx\\&=\int_0^1\frac{e^x}{\sqrt{x}}dx-\int_0^1 2e^{y^2}dy+e^{y^2}|_{y=0}^{y=1}\\&=\int_0^1 2e^{t^2}dt-\int_0^1 2e^{y^2}dy+e-1\\&=e-1\end{aligned}$$

July 24

1. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$, 则函数 $f(x)$:

- A. 仅有 1 个间断点
- B. 仅有 2 个间断点, 其中 1 个可去,1 个无穷
- C. 仅有 2 个间断点,2 个都是跳跃
- D. 有 2 个跳跃间断点和 1 个可去间断点

解

我们可以知道:

$$f(x)=\begin{cases}x^2,\ |x|>1\\ 0,\ |x|=0\\ -1,\ 0<|x|<1\end{cases}$$

我们知道 $f(x)$ 有 3 个间断点, 其中 $x=0$ 是可去间断点;$x=1$ 和 $x=-1$ 是两个跳跃间断点.

2. $\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$

解

原积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\ln x} dx \int_a^b (\ln x) x^y dy \\
&= \int_a^b dx \int_0^1 x^y dx \\
&= \int_a^b \frac{1}{y+1} \\
&= \ln |\frac{b+1}{a+1}|
\end{aligned}
$$

3. $\int_0^1 \sin(\ln \frac{1}{x}) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$

解

原积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= -\int_0^1 \sin(\ln x) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \\
&= -\int_0^1 \frac{\sin(\ln x)}{\ln x} dx \int_a^b (\ln x) x^y dy \\
&= -\int_0^1 dx \int_a^b \sin(\ln x) x^y dy \\
&= -\int_a^b dy \int_{-\infty}^0 e^{(y+1)t} \sin t dt \\
&= -\int_a^b \frac{\begin{vmatrix} (y+1)e^{(y+1)t} & \cos t \\ e^{(y+1)t} & \sin t \end{vmatrix}}{1 + (1+y)^2} \Big|_{t=0}^{t=-\infty} dy \\
&= \int_a^b \frac{1}{1+(y+1)^2} dy \\
&= \arctan(y+1) \Big|_{y=a}^{y=b} \\
&= \arctan(b+1) - \arctan(a+1)
\end{aligned}
$$

July 25

1. 设 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, 且 $\frac{f(x) - 2x}{e^{x-1} - 1} - \frac{1}{\ln x}$ 在 $x = 1$ 的某去心邻域有界, 求 $f(1)$

解

我们由题意可得:

$$\lim_{x\to 1}[\frac{f(x)-2x}{e^{x-1}-1}-\frac{1}{\ln x}](e^{x-1}-1)=0$$

上述极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 1}[f(x)-2x-\frac{e^{x-1}-1}{\ln x}] \\ &= \lim_{x\to 1}(f(x)-2x)-1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

我们知道:

$$\lim_{x\to 1}[f(x)-2x]=1\Rightarrow \lim_{x\to 1}f(x)=3$$

综上所述,$f(1)=3$.

2. 设 α,β 均为 3 维单位列向量,$\alpha^T\beta=\frac{1}{2}$,$A=\alpha\beta^T+\beta\alpha^T$, 求二次型 x^TAx 在正交变换下的标准型.

解

我们由: $\alpha^T\beta=\frac{1}{2}$,$A=\alpha\beta^T+\beta\alpha^T$ 可以得到:

$$\begin{cases} A\alpha=\frac{1}{2}\alpha+\beta \\ A\beta=\alpha+\frac{1}{2}\beta \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} A(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}(\alpha+\beta) \\ A(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}(\alpha-\beta) \end{cases}$$

我们可以知道: 矩阵 A 有两个特征向量 $\lambda_1=\frac{3}{2}$, $\lambda_2=-\frac{1}{2}$.
我们有 $r(\alpha\beta^T)=r(\beta\alpha^T)=1\Rightarrow r(A)\le r(\alpha\beta^T)+r(\beta\alpha^T)=2$
我们由 $r(A)\le 2\Rightarrow |A|=0\Rightarrow \lambda_1\lambda_2\lambda_3=0$
我们可得到 A 的三个特征值为 $\lambda_1=\frac{3}{2}$, $\lambda_2=-\frac{1}{2}$, $\lambda_3=0$.
综上所述, 二次型 $f=x^TAx$ 的标准型为 $f=\frac{3}{2}y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2$.

变式

$A=\alpha\beta^T$, 求二次型 $f=x^TAx$ 在正交变换下的标准型.

解

我们首先要求出二次型对应的矩阵 B, 我们有: $f^T=f\Rightarrow x^TA^Tx=B^T$
我们得到: $B=\dfrac{A+A^T}{2}=\dfrac{\alpha\beta^T+\beta\alpha^T}{2}$

我们有:

$$\begin{cases} B\alpha = \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{2}\beta \\ B\beta = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(\alpha+\beta) = \frac{3}{4}(\alpha+\beta) \\ B(\alpha-\beta) = -\frac{1}{4}(\alpha-\beta) \end{cases}$$

我们可以知道: 矩阵 B 有两个特征向量 $\lambda_1 = \frac{3}{4}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$.

我们有 $r(\alpha\beta^T) = r(\beta\alpha^T) = 1 \Rightarrow r(B) \leq r(\alpha\beta^T) + r(\beta\alpha^T) = 2$

我们由 $r(B) \leq 2 \Rightarrow |B| = 0 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$

我们可得到 A 的三个特征值为 $\lambda_1 = \frac{3}{4}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$, $\lambda_3 = 0$.

综上所述, 二次型 $f = x^TAx$ 的标准型为 $f = \frac{3}{4}y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2$.

July 26

1. 已知函数 $f(x) = \dfrac{(x^2+a^2)(x-1)}{e^{\frac{1}{x}}+b}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有一个可去间断点和一个跳跃间断点, 求 a, b

解

我们发现 $f(x)$ 的间断点为 $x=0$ 和 $x = \dfrac{1}{\ln(-b)}$, 我们有:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\dfrac{a^2}{b} \end{cases} \quad a \neq 0 \Rightarrow x = 0\text{是}f(x)\text{跳跃间断点}$$

我们进而得到 $x = \dfrac{1}{\ln(-b)}$ 是 $f(x)$ 可去间断点, 我们得到:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to \ln(-b)^+} f(x) = \dfrac{\ln^2(-b)+a^2}{-b} \lim\limits_{x\to \ln(-b)^+} \dfrac{x-1}{x-\ln(-b)} = a \\ \lim\limits_{x\to 0\ln(-b)^-} f(x) = \dfrac{\ln^2(-b)+a^2}{-b} \lim\limits_{x\to \ln(-b)^-} \dfrac{x-1}{x-\ln(-b)} = a \end{cases} \Rightarrow b = -e$$

综上所述,$a \neq 0,\ b = -e$

2. 求不定积分 $\int \dfrac{x^2(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}+1)}e^x dx$

解

原不定积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+1)}{\sqrt{1+x^2}}e^x dx \\
&= \int (\sqrt{x^2+1}-x+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1)e^x dx \\
&= \int (g(x)+g'(x))e^x dx \\
&= e^x g(x)+C \\
&= e^x(\sqrt{x^2+1}-x)+C
\end{aligned}
$$

July 27

1. 函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x}, \ x\neq 0 \\ 1, \ x=0 \end{cases}$,判断 $x=0$ 处连续性、可导性以及极值情况.

解

首先判断连续性:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=1=f(0)\Rightarrow f(x)\text{在}x=0\text{处连续}$$

可导性:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}, \ x\neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, \ x=0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f'(0)=\frac{1}{2}=f'(0)$$

我们得到 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续可导, 且导函数连续.

2. $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ 是实对称矩阵,A 的每行元素之和为 0, 设 2, 3 是 A 的非零特征值, 求 a_{11} 对应的代数余子式.

解

我们可以知道矩阵 A 的三个特征值分别为 $0, 2, 3$, 其中特征值 0 对应的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

我们根据 A^* 和 A 特征值和特征向量之间的关系可以知道 A^* 的三个特征值分别为 $6, 0, 0$,

其中特征值 6 对应的特征向量为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

对于 A^*, 我们根据谱分解定理可以得到: $A^* = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i G_i = 6e_1^T e_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

综上所述: a_{11} 对应的代数余子式 $A_{11} = A_{11}^* = 2$.

July 28

1. 下列函数在 $x = 0$ 处不可导的是:

- A. $\int_0^x (|t| + t)dt$
- B. $|x|[x + \int_0^{|x|} e^{t^2} dt]$
- C. $|\tan x - \sin x|$
- D. $\sin|x| + \cos|x|$

解

$$A.\ f(x) = \begin{cases} x^2,\ x \geq 0 \\ 0,\ x < 0 \end{cases} \quad f(x)在x = 0处可导$$

$$B. \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{cases} \quad f(x)在x = 0处可导$$

$$C. \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{cases} \quad f(x)在x = 0处可导$$

$$D. \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \end{cases} \quad f(x)在x = 0处不可导$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 内可导, 证明:

$$存在互不相同的\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n \in (a, b),\ s.t.\ f'(\xi_1)f'(\xi_2)\cdots f'(\xi_n) = \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right]^n$$

解

我们构造辅助函数 $F(x) = [f(x) - f(a)]^n$, $G(x) = [x - a]^n$, 我们有 $F(a) = G(a) = 0$

我们由柯西中值定理可以得到:

$$\exists \xi_1 \in (a, b),\ s.t. \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} \Rightarrow \frac{f'(\xi_1)\,[f(\xi_1) - f(a)]^{n-1}}{(\xi_1 - a)^{n-1}} = \frac{[f(b) - f(a)]^n}{(b - a)^n}$$

我们继续构造辅助函数 $H(x)=[f(x)-f(a)]^{n-1}$，$J(x)=[x-a]^{n-1}$，我们有 $H(a)=J(a)=0$

我们由柯西中值定理可以得到:

$$\exists \xi_2 \in (\xi_1,b),\ s.t. \frac{H'(\xi_2)}{J'(\xi_2)}=\frac{F(\xi_1)-F(a)}{G(\xi_1)-G(a)} \Rightarrow \frac{f'(\xi_2)\left[f(\xi_{\xi_2})-f(a)\right]^{n-2}}{(\xi_2-a)^{n-2}}=\frac{[f(\xi_1)-f(a)]^{n-1}}{(\xi_1-a)^{n-1}}$$

$$\cdots\cdots$$

我们构造辅助函数 $P(x)=f(x)-f(a)$, $Q(x)=x-a$, 我们有 $P(a)=Q(a)=0$ 我们由拉格朗日中值定理可以得到:

$$\exists \xi_n \in (\xi_{n-1},b),\ s.t. f'(\xi_n)=\frac{f(\xi_{n-1})-f(a)}{\xi_{n-1}}$$

我们将上面 n 个式子相乘可以得到:

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2)\cdots f'(\xi_n)=\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]^n$$

综上所述, 我们得到:

$$\text{存在互不相同的}\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi_1)f'(\xi_2)\cdots f'(\xi_n)=\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]^n$$

July 29

1. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有定义, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f[\varphi(x)]-f(0)}{\varphi(x)}$ 存在和 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导之间关系

解

(1). 必要性

$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=A \Rightarrow \lim_{\varphi(x)\to 0}\frac{f[\varphi(x)]-f(0)}{\varphi(x)}=A$$

当 $\varphi(x)\equiv 0$ 时, 充分性不成立.

(2). 充分性

我们不妨取 $\varphi(x)=|x|$, 我们可以得到:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f[\varphi(x)]-f(0)}{\varphi(x)}=A \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'_+(0)$$

充分性不成立.

综上所述,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f[\varphi(x)]-f(0)}{\varphi(x)}$ 存在是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的既不充分也不必要条件.

2. 设存在连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=1+\lambda\int_x^1 f(y)f(y-x)dy$, 证明: $\lambda\le\dfrac{1}{2}$

解

我们对等式两边分别在区间 $[0,1]$ 上取定积分得到:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= 1+\lambda\int_0^1[\int_x^1 f(y)f(y-x)dy]dx\\ &= 1+\lambda\int_0^1[f(y)\int_0^y f(y-x)dx]dy\\ &= 1+\lambda\int_0^1[f(y)\int_0^y f(x)dx]dy\\ &= 1+\lambda\int_0^1[\int_0^y f(x)dx]d(\int_0^y f(x)dx)\\ &= 1+\frac{\lambda}{2}[\int_0^1 f(x)dx]^2\end{aligned}$$

我们不妨记 $A=\int_0^1 f(x)dx$, 我们可以得到:

$$A=1+\frac{\lambda}{2}A^2\text{在}\mathbb{R}\text{上有实数根}\Rightarrow 1-2\lambda\geq 0\Rightarrow\lambda\leq\frac{1}{2}$$

July 30

1. 已知 $f(x)$ 为奇函数, 则 $f'_+(0)$ 存在和 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导关系

解

(1). 充分性

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=A\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}f(x)=0$$

我们可以得到:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(-x)-f(0)}{-x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-f(x)-f(0)}{-x}=A$$

我们得到:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=A$$

充分性成立

(2). 必要性

$$f(x)\text{在}x=0\text{处可导}\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=A$$

必要性成立

综上所述,$f'_+(0)$ 存在是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件.

2. 求 $\int_0^1 dx\int_{1-x}^{2-x}e^{(x+y)^2}(\sin^2 x+\cos^2 y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x}e^{(x+y)^2}(\sin^2 x+\cos^2 y)dy$

解

我们画出二重积分的积分区域, 不难发现积分区域关于直线 $y=x$ 对称, 原二重积分等价于:

$$I=\int_0^1 dx\int_{1-x}^{2-x} e^{(y+x)^2}(\sin^2 y+\cos^2 x)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} e^{(y+x)^2}(\sin^2 y+\cos^2 x)dy$$

我们得到:

$$\begin{aligned}
2I &= \int_0^1 dx\int_{1-x}^{2-x} 2e^{(x+y)^2}dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} 2e^{(x+y)^2}dy\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}} 2re^{r^2(1+\sin 2\theta)}dr\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^4-e}{1+\sin 2\theta}d\theta\\
I &= \frac{e^4-e}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2\theta}}{(1+\tan\theta)^2}d\theta\\
&= \frac{e^4-e}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2}dx\\
&= \frac{e^4-4}{2}
\end{aligned}$$

July 31

1. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的邻域内可导, 则 $f'(x_0)>0$ 是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内单调递增之间关系

解

(1). 充分性

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A>0$$

我们可以得出,$x\in(x_0-\delta,x_0),f(x)<f(x_0);x\in(x_0,x_0+\delta),f(x)>f(x_0)$, 并不能得出函数的单调性.

(2). 必要性

$f(x)$ 在某邻域内单调递增, 我们只能得出 $f'(x_0)\geq 0$

综上所述,$f'(x_0)>0$ 是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内单调递增的既不充分也不必要条件.

2. $I_n=\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{t-1}}{t^n}dt\ (n\geq 2)$, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}$

解

我们令 $t=\dfrac{1}{\cos^2 x},\ x\in(0,\dfrac{\pi}{2}),\ dt=\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$, 我们可以得到:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x}\cos^{2n} x\frac{2\sin x}{\cos^3 x}dx\\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-4} xdx - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} xdx
\end{aligned}$$

由此我们可以得到:

$$\begin{cases}
I_{n+1} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} xdx - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} xdx\\
I_n = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-4} xdx - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} xdx
\end{cases}$$

我们得到:

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} xdx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} xdx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-4} xdx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} xdx}$$

我们计算:

$$\begin{aligned}
J_{2n} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} xdx\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} xd\sin x\\
&= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^{2n-2} xdx\\
&= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} xdx - (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} xdx\\
&= (2n-1)J_{2n-2} - (2n-1)J_{2n}\\
J_{2n} &= \frac{2n-2}{2n}J_{2n-2}
\end{aligned}$$

我们得到:

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{J_{2n-2}-J_{2n}}{J_{2n-4}-J_{2n-2}} = \frac{\frac{2}{2n}J_{2n-2}}{\frac{2}{2n-2}J_{2n-4}} = \frac{n-1}{n}\frac{2n-4}{2n-2} = \frac{n-2}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n-2}{n} = 1$$

第 35 章 August

35.1 Week I

August 1

1. 设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某个邻域内有定义, 下列命题中正确的个数:

- A. 若 $f'(x_0)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续
- B. 若 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续
- C. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x), \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续
- D. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续

解

A. 导函数存在, 原函数连续, 正确

B. 左右导数存在, 我们得到:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A \\ \lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = B \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

C、*D* 我们取 $f(x) = sign(x) = \begin{cases} 1, \ x > 0 \\ 0, \ x = 0 \\ -1, \ x < 0 \end{cases}$, 此时 $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 0$, 函数在 $x = x_0$ 处间断.

综上所述, 上述命题正确的个数为 2 个.

2. A 为 3 阶实对称矩阵, 特征值为 $0,1,1$, 且 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\a\\0\end{pmatrix}$,$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix}$ 是 A 的两个不同的特征向量, 若 $A(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_2$, 求矩阵 A

解

(1). 我们可以得到:

α_1 是矩阵 A 特征值 0 对应的特征向量; α_2 是矩阵 A 特征值 1 对应的特征向量.

(2). 我们知道实对称矩阵不同特征值对应的特征向量是正交的 $\Rightarrow \alpha_1^T\alpha_2=0\Rightarrow a=1$

(3). 根据谱分解定理, 我们可以得到: $A=\sum\limits_{i=1}^{3}\lambda_i G_i$

我们发现矩阵 $A-E$ 更好求, 因为矩阵 $A-E$ 的特征值为 $-1,0,0$, 因此 $A-E=-G_1=-e_1e_1^T$, 我们得到:

$$\begin{cases} A=E-e_1e_1^T \\ e_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\end{cases}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

August 2

1. 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sqrt{\dfrac{(1+x^2)\sqrt{x}}{e^{x-1}}}+\arctan\dfrac{x^2-1}{\sqrt{1+x^2}}$ 在点 $(1,\sqrt{2})$ 处相切, 求 $\lim\limits_{x\to1}(f(x)+1-\sqrt{2})^{\frac{1}{\ln x}}$

解

原极限可以化为:

$$\begin{aligned} I &= e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(f(x)+1-\sqrt{2})}{\ln x}}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-\sqrt{2}}{x-1}}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to1}f'(x)}\end{aligned}$$

我们有:

$$\begin{cases} g(x)=\sqrt{\dfrac{(1+x^2)\sqrt{x}}{e^{x-1}}}\\ h(x)=\arctan\dfrac{x^2-1}{\sqrt{1+x^2}}\end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln(g(x)) = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}\ln x + \ln(1+x^2) - x + 1] \\ h'(1) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{g'(1)}{g(1)} = \frac{1}{2}[\frac{1}{2x} + \frac{2x}{1+x^2} - 1]|_{x=1} = \frac{1}{4} \\ g'(1) = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ h'(1) = \sqrt{2} \end{cases}$$

我们由 $f'(1) = g'(1) + h'(1) = \frac{5\sqrt{2}}{4}$, 我们得到原极限 $I = e^{\frac{5\sqrt{2}}{4}}$

2. 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + mx_3)(2x_1 + 3x_2 + nx_3)$ 的正惯性指数

解

我们令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + mx_3 \\ y_2 = 2x_1 + 3x_2 + nx_3 \\ y_3 = ax_1 + bx_2 + bx_3 \end{cases}$ 可以得到二次型 $g(y_1, y_2, y_3) = y_1y_2$

我们再令 $\begin{cases} z_1 = y_1 + y_2 \\ z_2 = y_1 - y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$ 可以得到二次型 $h(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - z_2^2$

我们作的线性变换 $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & 3 & n \\ a & b & c \end{bmatrix}$ 和 $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 均为可逆线性变换, 二次型 f 和二次型 h 为合同二次型, 具有相同的正惯性指数和负惯性指数.

综上所述, 原二次型的正惯性指数为 1.

August 3

1. 确定函数 $g(x) = |x^3 - x - \sin x|$ 不可导的点的个数

解

我们知道, 对于连续函数 $f(x)$, 当 $f(x) \neq 0$ 时,$f(x)$ 可导,$|f(x)|$ 也可导; 当 $f(x) = 0$ 时, 当且仅当 $f'(x) = 0$ 时,$|f(x)|$ 可导.

我们已知 $f(x) = x^3 - x - \sin x$ 在 $x \in \mathbb{R}$ 处处可导, 当 $f(x) \neq 0$ 时,$g(x) = |f(x)|$ 可导, 我们只需要关注 $f(x) = 0$ 处的导函数值是否为 0.

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - x - \sin x \\ f'(x) = 3x^2 - 1 - \cos x \\ f''(x) = 6x + \sin x \\ f'''(x) = 6 + \cos x > 0 \end{cases}$$

我们知道:

$f''(x)$ 单调递增,$f''(0) = 0$, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时,$f''(x) < 0$; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时,$f''(x) > 0$.

我们得到:

$f'(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减; 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增 $\Rightarrow f'(x)_{min} = f'(0) = -2 < 0$

我们取 $a = -\dfrac{\pi}{2}$, $b = \dfrac{\pi}{2}$, 我们有: $\begin{cases} f'(a) = \dfrac{3}{4}\pi^2 - 1 > 0 \\ f'(b) = \dfrac{3}{4}\pi^2 - 1 > 0 \end{cases}$

我们得到: $\exists x_1 \in (a, 0)$, $x_2 \in (0, b)$, $s.t. f'(x_1) = f'(x_2) = 0$

我们得到: $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, $f'(x) > 0$;$x \in (x_1, x_2)$, $f'(x) < 0$.

$f(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 单调递增;(x_1, x_2) 单调递减;$(x_2, +\infty)$ 单调递减, 其中 $x_1 < 0 < x_2$

我们有 $\begin{cases} f(a) < 0 \\ f(0) = 0 \\ f(b) > 0 \end{cases}$,我们得到:

$$\exists 唯一的 \xi_1 \in (a, 0), \xi_2 \in (0, b), s.t.\ f(\xi_1) = f(\xi_2) = f(0) = 0$$

此时对应 $f'(x)$ 均不为 0, 我们可以得到 $g(x)$ 不可导的点有 3 个: $x = \xi_1$, $x = 0$, $x = \xi_2$.

2. 设 A 为 n 阶矩阵,n 维列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 是方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, 若存在 β_i, 使得 $A\beta_i = \alpha_i$, $(i = 1, 2, \cdots, t)$, 分析下列命题正确的个数

- (1). 向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性无关
- (2). 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性无关
- (3). 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 均是方程组 $A^2x = 0$ 的解
- (4). 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 均是方程组 $A^2x = 0$ 的基础解系

解

(1). 我们令 $C = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t)$,$B = \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$, 我们有 $AB = C$

我们根据 $rank(AB) \leq min\{rank(A), rank(B)\}$, 我们可以得到: $rank(A) \geq rank(C)$, $rank(B) \geq rank(C) \Rightarrow rank(B) \geq t$, 又因为矩阵 B 有 t 列,$rank(B) \leq t$, 矩阵 B 是列满秩矩阵, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性无关

(2). 我们假设存在不全为 0 的数 $l_1, l_2, \cdots, l_t, r_1, r_2, \cdots, r_t$, 使得:

$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_t\alpha_t + r_1\beta_1 + r_2\beta_2 + \cdots + r_t\beta_t = 0$$

上面的式子同时左乘 A 得到:

$$r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \cdots + r_t\alpha_t = 0$$

由于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 线性无关, 我们可以知道: $r_1 = r_2 = \cdots = r_t = 0$.

原式子化为: $\exists$不全为0的数$l_1, l_2, \cdots, l_t, s.t.\ l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_t\alpha_t = 0$

由于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 线性无关, 我们可以知道: $l_1 = l_2 = \cdots = l_t = 0$.

综上所述, 我们得到: $l_1 = l_2 = \cdots = l_t = r_1 = r_2 = \cdots = r_t = 0$, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性无关.

(3). $\begin{cases} A\alpha_i = 0 \\ A\beta_i = \alpha_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(A\alpha_i) = 0 \\ A(A\alpha_i) = A\beta_i = 0 \end{cases}$

我们可以得到: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 均是方程组 $A^2x = 0$ 的解

(4). 由 (2), (3) 可以知道 $A^2x = 0$ 至少存在 $2t$ 个线性无关的解, 我们可以推出 $n - rank(A^2) \geq 2t$, 我们有 $ran(AB) \geq rank(A) + rank(B) - n$, 结合起来我们有:

$$\begin{cases} n - rank(A^2) \geq 2t \\ rank(A^2) \geq 2(n-t) - n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} rank(A^2) \leq n - 2t \\ rank(A^2) \geq n - 2t \end{cases} \Rightarrow rank(A^2) = n - 2t$$

方程组 $A^2x = 0$ 基础解析向量个数为 $r = n - rank(A^2) = 2t$, 因此向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 均是方程组 $A^2x = 0$ 的基础解系.

综上所述, 命题 (1), (2), (3), (4) 都是正确的, 命题正确个数为 4 个.

August 4

1. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x^4, & x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} -\sqrt{x}, & x > 0 \\ x^2, & x \leq 0 \end{cases}$, 若 $y = f(g(x))$, 求 $\frac{dy}{dx}|_{x=1}$ 和 $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$

解

我们令 $h(x) = f(g(x))$, 我们有:

$$h(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ x^4, & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow h'(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0 \\ 4x^3, & x \leq 0 \end{cases}$$

我们得到: $\begin{cases} h'(1) = 2 \\ h'(0) = 0 \end{cases}$

综上所述, 我们得到: $\frac{dy}{dx}|_{x=1} = 2$, $\frac{dy}{dx}|_{x=0} = 0$.

2. 设 A 为 3 阶矩阵,α 为 3 维列向量,$A^2\alpha \neq 0, A^3\alpha = 0$, 下列说法错误的是:

- A. A 只有 0 特征值
- B. $r(A) = 2$
- C. A 能相似对角化

- $D.$ A 不是对称矩阵

解

我们可以证明向量组 $(\alpha, A\alpha, A^2\alpha)$ 线性无关, 我们不妨假设存在不全为 0 的数 k_1, k_2, k_3 使得:

$$k_1\alpha + k_2A\alpha + k_3A^2\alpha = 0$$

我们有 $A^2\alpha \neq 0,\ A^3\alpha = 0$, 我们在上面式子两边左乘 A, A^2, A^3 得到:

$$\begin{cases} k_1A\alpha + k_2A^2\alpha = 0 \\ k_1A^2\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

我们得到向量组 $(\alpha, A\alpha, A^2\alpha)$ 线性无关, 我们令 $P = (\alpha, A\alpha, A^2\alpha)$, 矩阵 P 为可逆矩阵, 我们得到:

$$AP = (A\alpha, A^2\alpha, 0) = (\alpha, A\alpha, A^2\alpha)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow AP = PB, 其中B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

我们得到: $A = PBP^{-1}, P$为可逆矩阵,A 与 B 相似

我们可以求出矩阵 B 只有 0 特征值, 且 $rank(B) = 2$, 不能相似对角化.

August 5

1. 设 $\varphi(x) = \begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x},\ x \neq 0 \\ 0,\ x = 0 \end{cases}$, 函数 $f(x)$ 可导, 求 $F(x) = f[\varphi(x)]$ 的导数

解

我们有 $\varphi'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)}{x} = 0$, 我们可以得到:

$$F'(x) = \begin{cases} f'(x^3\sin\frac{1}{x})(3x^2\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}),\ x \neq 0 \\ f'(0)\varphi'(0) = 0,\ x = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$F'(x) = \begin{cases} f'(x^3\sin\frac{1}{x})(3x^2\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}),\ x \neq 0 \\ 0,\ x = 0 \end{cases}$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上导函数连续,$f(0) = f(\dfrac{1}{2}) = f(1) = 0, |f'(x)| \leq M$, 求证: $|\int_0^1 f(x)dx| \leq \dfrac{M}{8}$

解

我们由绝对值不等式可以得到:

$$|\int_0^1 f(x)dx| \leq \int_0^1 |f(x)|dx = \begin{cases} \int_0^1 |\int_0^x f'(t)dt|dx \leq \int_0^1 \int_0^x |f'(t)|dtdx \leq \int_0^1 |\int_0^x Mdt|dx \\ \int_0^1 |\int_1^x f'(t)dt|dx \leq \int_0^1 \int_1^x |f'(t)|dtdx \leq \int_0^1 |\int_1^x Mdt|dx \\ \int_0^1 |\int_{\frac{1}{2}}^x f'(t)dt|dx \leq \int_0^1 \int_{\frac{1}{2}}^x |f'(t)|dtdx \leq \int_0^1 |\int_{\frac{1}{2}}^x Mdt|dx \end{cases}$$

我们将 $[0,1]$ 区间分为 $[0,\frac{1}{4}],[\frac{1}{4},\frac{3}{4}],[\frac{3}{4},1]$, 我们可以得到:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)|dx &= \int_0^{\frac{1}{4}} |f(x)|dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} |f(x)|dx + \int_{\frac{3}{4}}^1 |f(x)|dx \\ &\leq \int_0^{\frac{1}{4}} \int_0^x Mdtdx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \int_{\frac{1}{2}}^x Mdtdx + \int_{\frac{3}{4}}^1 \int_1^x Mdtdx \\ &= \int_0^{\frac{1}{4}} |Mx|dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} |Mx - \frac{M}{2}|dx + \int_{\frac{3}{4}}^1 |Mx - M|dx \\ &= \frac{M}{32} + \frac{M}{32} + \frac{M}{32} + \frac{M}{32} \\ &= \frac{M}{8} \end{aligned}$$

综上所述, 我们证明: $|\int_0^1 f(x)dx| \leq \frac{M}{8}$

3. 设 A 是 n 阶矩阵, 则下列说法错误的是:

- A. 对于任意的 n 维列向量 ξ, 有 $A\xi = 0$, 则 $A = 0$
- B. 对于任意的 n 维列向量 ξ, 有 $\xi^T A\xi = 0$, 则 $A = 0$
- C. 对于任意的 n 阶矩阵 B, 有 $AB = 0$, 则 $A = 0$
- D. 对于任意的 n 阶矩阵 B, 有 $B^T AB = 0$, 则 $A = 0$

解

(1). 我们可以知道矩阵 A 的零空间为 $N(A) = R^n$, 我们可以得到 A 的行空间 $R(A) = 0,A = 0$

(2). 当 A 为反对称矩阵时, 我们可以得到 $\xi^T A\xi = 0$

(3). 我们不妨取 $B = E$, 可以得到 $A = 0$, 矩阵 A 只能为零矩阵, 在 $A = 0$ 时, 任意的 n 阶矩阵 B 满足 $AB = 0$

(4). 同 (3), 取 $B = E$, 可以得到 $A = 0$, 矩阵 A 只能为零矩阵, 在 $A = 0$ 时, 任意的 n 阶矩阵 B 满足 $B^T AB = 0$

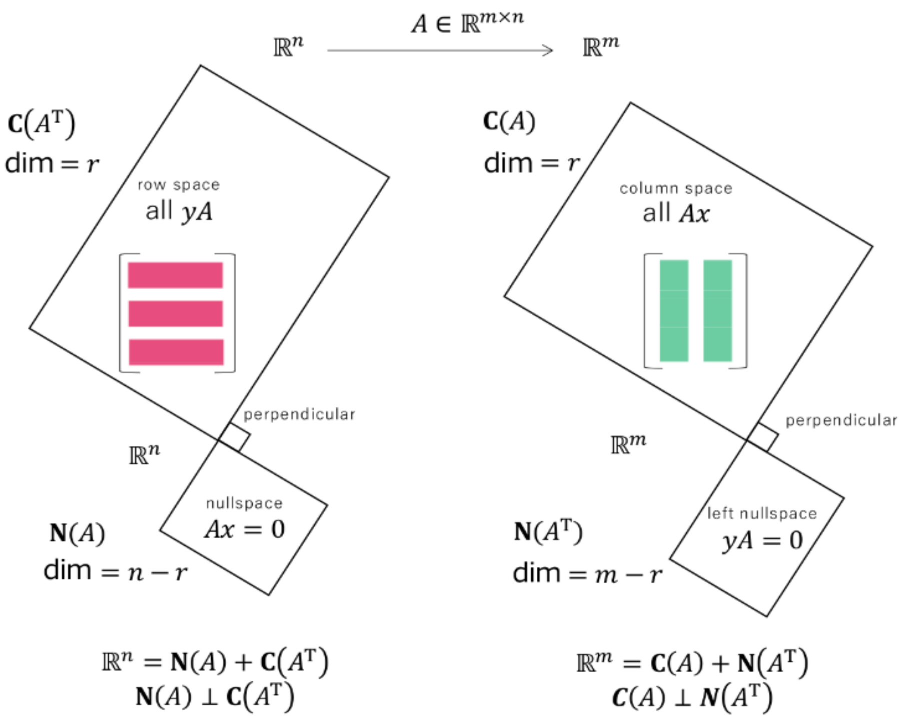


图 35.1: 四个子空间

August 6

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f[(x+h)^2]-f(x^2+h)}{h}=1, f(1)=1$, 求 $f(x)$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{h\to 0}\frac{f[(x+h)^2]-f(x^2+h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f[(x+h)^2]-f(x^2)+f(x^2)-f(x^2+h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f[(x+h)^2]-f(x^2)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x^2)-f(x^2+h)}{h} \\ &= [f(x^2)]'-f'(x^2) \\ &= (2x-1)f'(x^2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

我们得到:

$$f'(x^2)=\frac{1}{2x-1} \Rightarrow 2xf'(x^2)=\frac{2x}{2x-1} \Rightarrow f(x^2)=x+\frac{1}{2}\ln(2x-1)+C$$

我们由 $f(1)=1 \Rightarrow C=0 \Rightarrow f(x^2)=x+\frac{1}{2}\ln(2x-1)$

我们得到 $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{2}\ln(2\sqrt{x}-1)$

2. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上导函数连续,$f(0)=f(1)=0$, 证明: $\int_0^1 f^2(x)dx \le \frac{1}{8}\int_0^1 [f'(x)]^2 dx$

定理 35.1.1 (积分形式柯西不等式)

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$$

我们知道 $\forall t \in \mathbb{R}$, 我们有:

$$[tf(x)-g(x)]^2 \ge 0 \Rightarrow t^2 f^2(x) - 2tf(x)g(x) + g^2(x) \ge 0$$

我们对上式子两边在区间 $[a,b]$ 上积分, 可以得到:

$$t^2\int_a^b f^2(x)dx - 2t\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \ge 0$$

我们可以得到一个关于 t 的一元二次方程方程:

$$At^2+Bt+C \ge 0, \text{其中} \begin{cases} A = \int_a^b f^2(x)dx \\ B = -2\int_a^b f(x)g(x)dx \\ C = \int_a^b g^2(x)dx \end{cases} \Rightarrow B^2 - 4AC \le 0$$

我们得到:

$$4\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 - 4\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx \le 0$$

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$$

解

$$\text{我们知道:} \begin{cases} f(x) = \int_0^x f'(t)dt \\ f(x) = \int_1^x f'(t)dt \end{cases} \text{我们有:}$$

$$\int_0^1 f^2(x)dx = \begin{cases} \int_0^1 \left[\int_0^x f'(t)dt\right]^2 dx \le \int_0^1 [\int_0^x 1^2 dt \int_0^x |f'(t)|^2 dt]dx \\ \int_0^1 \left[\int_1^x f'(t)dt\right]^2 dx \le \int_0^1 [\int_1^x 1^2 dt \int_0^x |f'(t)|^2 dt]dx \end{cases}$$

我们可以得到:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f^2(x)dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} f^2(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f^2(x)dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^x f'(t)dt\right]^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\int_x^1 f'(t)dt\right]^2 dx \\
&\le \int_0^{\frac{1}{2}} [\int_0^x 1^2dt \int_0^x |f'(t)|^2dt]dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 [\int_x^1 1^2dt \int_x^1 |f'(t)|^2dt]dx \\
&\le \int_0^{\frac{1}{2}} [x \int_0^x |f'(t)|^2dt]dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 [(1-x) \int_x^1 |f'(t)|^2dt]dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(t)|^2dt \int_t^{\frac{1}{2}} xdx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(t)|^2dt \int_{\frac{1}{2}}^t (1-x)dx \\
&= (\frac{1}{8} - \frac{t^2}{2}) \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(t)|^2dt + (t - \frac{t^2}{2} - \frac{3}{8}) \int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(t)|^2dt \\
&= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(t)|^2dt + \frac{1}{8} \int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(t)|^2dt \\
&= \frac{1}{8} \int_0^1 [f'(x)]^2dx
\end{aligned}$$

3. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) + \frac{1}{2}\right]^{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned}
I &= e^{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right)}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2}} \\
&= e^{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2}} \\
&= e^{\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{2}} \\
&= e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

August 7

1. 设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin x - \int_x^y \varphi(u)du = 0$ 所确定, 其中可导函数 $\varphi(u) > 0$, 且 $\varphi(0) = \varphi'(0) = 1$, 求 $y''(0)$

解

我们可以得到: 当 $x=0$ 时,$\int_0^y \varphi(u)du=0$, 且 $\varphi(u)>0$, 我们得到 $y=0$.

我们对方程 $\sin x-\int_x^y \varphi(u)du=0$ 两边对 x 求导得到:

$$\begin{cases} \cos x-[\varphi(y)y'-\varphi(x)]=0 \\ -\sin x-[\varphi'(y)y'^2+\varphi(y)y''-\varphi'(x)]=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-y'(0)\varphi(0)+\varphi(x)=0 \\ -\varphi'(0)y'(0)^2-y''(0)\varphi(0)+\varphi'(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'(0)=2 \\ y''(0)=-3 \end{cases}$$

2. 设 $a_n=\int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}dx$

(1). 证明: $\dfrac{1}{2(n+1)}\le a_n\le \dfrac{1}{2n},\ n=1,2,\cdots$

(2). 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(\dfrac{1}{2n}-\int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}dx)$ 绝对收敛.

解

(1). 我们有:

$$\begin{cases} \dfrac{x^n}{1+x}\ge \dfrac{x^n}{2},\ x\in(0,1) \\ \dfrac{x^n}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}x^{n-1}\le \dfrac{x^{n-1}}{2},\ x\in(0,1) \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^n}{2}dx\le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx\le \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{2}dx$$

我们有:

$$\begin{cases} \int_0^1 \dfrac{x^n}{2}dx=\dfrac{x^{n+1}}{2(n+1)}|_0^1=\dfrac{1}{2(n+1)} \\ \int_0^1 \dfrac{x^{n-1}}{2}dx=\dfrac{x^n}{2n}|_0^1=\dfrac{1}{2n} \end{cases}$$

我们证明了: $\dfrac{1}{2(n+1)}\le a_n\le \dfrac{1}{2n},\ n=1,2,\cdots$

(2). 我们不妨设 $b_n=\dfrac{1}{2n}-a_n=\dfrac{1}{2n}-\int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}dx$.

我们由 (1) 可得: $|b_n|\le \dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{2(n+2)}=\dfrac{1}{2n^2+4n}<\dfrac{1}{2n^2}$

我们知道级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{2n^2}$ 收敛, 由比较判别法我们可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛, 原级数绝对收敛.

35.2 Week II

August 8

1. 设 $x=x(y)$ 是函数 $y=\ln x+e^x$ 的反函数, 求 $\dfrac{d^2x}{dy^2}$.

解

我们有: $\begin{cases} y=f(x) \\ x=g(y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'(x)=f'(x) \\ 1=f'(x)g'(y) \end{cases} \Rightarrow g'(y)=\dfrac{1}{f(x)}$

我们有: $f(x)=\ln x+e^x \Rightarrow f'(x)=e^x+\dfrac{1}{x}$

我们得到: $g'(y)=\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{x}{1+xe^x}$

我们有:

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{\frac{dx}{dy}}{dx}\frac{dx}{dy}=\frac{x-x^3e^x}{(1+xe^x)^3}$$

2. 设 $a_0=1,a_1=0,a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})\ (n=1,2,3\cdots)$,$S(x)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的和函数.

(1). 证明: 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的收敛半径不小于 1.

(2). 证明: $(1-x)S'(x)-xS(x)=0,\ x\in(-1,1)$, 并求出 $S(x)$ 的表达式.

解

(1). 我们由 $a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})$ 得到:

$$a_{n+1}-a_n=-\frac{1}{n+1}(a_n-a_{n-1})$$

我们不妨设 $b_n=a_n-a_{n-1}\Rightarrow b_{n+1}=-\dfrac{1}{n+1}b_n,\ b_1=a_1-a_0=-1$

我们有:

$$\begin{cases} b_n=-\dfrac{1}{n}b_{n-1} \\ b_{n-1}=-\dfrac{1}{n-1}b_{n-2} \\ \dots \\ b_2=-\dfrac{1}{2}b_1 \\ b_1=-1 \end{cases} \Rightarrow b_n=\frac{(-1)^n}{n!}$$

我们由累加法可以得到: $a_n=\begin{cases} a_0+\sum\limits_{k=1}^{n}b_k=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k!},\ n\geq 1 \\ 1,\ n=0 \end{cases} \Rightarrow a_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k!}$

我们利用根值审敛法:

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!})}{n}}=1$$

我们得到级数的收敛半径: $r=\dfrac{1}{\rho}=1$, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的收敛半径不小于 1.

(2). 我们有: $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$, 我们得到:

$$\begin{cases} S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \\ S(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n \end{cases}$$

$$a_{n+1}=\frac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})\Rightarrow(n+1)a_{n+1}=na_n+a_{n-1}\Rightarrow(n+2)a_{n+2}=(n+1)a_{n+1}=a_n$$

我们得到:

$$\begin{aligned}(1-x)S'(x)-xS(x) &= (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-x\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}[(n+1)a_{n+1}+a_n]x^{n+1} \\ &= a_1+\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}[(n+1)a_{n+1}+a_n]x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)a_{n+2}x^{n+1}-\sum_{n=0}^{+\infty}[(n+1)a_{n+1}+a_n]x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}[(n+2)a_{n+2}-(n+1)a_{n+1}-a_n]x^{n+1} \\ &= 0\end{aligned}$$

我们得到:

$$(1-x)S'(x)-xS(x)=0\Rightarrow\frac{S'(x)}{S(x)}=\frac{x}{1-x}\Rightarrow S(x)=\frac{C_1}{e^x(1-x)}$$

我们有 $S(0)=1\Rightarrow C_1=1$, 因此 $S(x)=\dfrac{1}{e^x(1-x)}$, $x\in(-1,1)$

August 9

1. 设 $y=y(x)$ 由 $e^y\sin t-y+1=0$ 和 $x=\begin{cases}\dfrac{e^t-1}{t},\ t\neq 0\\ 1,\ t=0\end{cases}$ 所确定, 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}|_{t=0}$

解

我们知道: 当 $t=0$ 时, $\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$, 我们由:

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{e^t-1}{t},\ t\neq 0\\ 1,\ t=0\end{cases}\Rightarrow x(t)=1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{6}+\frac{t^3}{24}+\cdots\Rightarrow\begin{cases}x'(0)=\dfrac{1}{2}\\ x''(0)=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

我们由: $e^y \sin t - y + 1 = 0 \Rightarrow e^{y(t)} \sin t - y(t) + 1 = 0$ 得到:

$$\begin{cases} e^{y(t)} \cos t + y'(t)e^{y(t)} \sin t - y'(t) = 0 \\ y'(t)e^{y(t)} \cos t - e^{y(t)} \sin t + \left\{[y'(t)]^2 e^{y(t)} + y''(t)e^{y(t)}\right\} \sin x + \cos x \left[y'(t)e^{y(t)}\right] - y''(t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(0) = e \\ y''(0) = 2e^2 \end{cases}$$

我们由参数方程二阶导数公式:

$$\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=0} = \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{[x'(t)]^3}|_{t=0} = 8e^2 - \frac{8e}{3}$$

2. 下列命题正确的是:

- A. 设 A 为 3 阶矩阵, 若 A 的特征值 $\lambda_1\lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$, 则 $r(A) = 2$
- B. 设 A 为 3 阶非零矩阵, 若 $A^2 = 0$, 则 $r(A) = 1$
- C. 设 A, B 为 3 阶矩阵, 若 A 与 B 等价, 则 $|A| = |B|$
- D. 设 A, B 为 3 阶实对称矩阵, 若 A 与 B 合同, 则 $|A| = |B|$

解

(A). 我们可以得到矩阵 $A \sim diag\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, 对角矩阵的秩和矩阵 A 的秩相同,$r(A) = 2$

(B). $A^2 = 0 \Rightarrow 2r(A) \leq 3 \Rightarrow r(A) = 1$

(C). A 与 B 等价 $\Rightarrow r(A) = r(B)$

(D). A 与 B 合同 $\Rightarrow A = P^T BP$

3. 已知 $f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{2nx + x^2}{2n^2}\right)^{-n}, & x \neq 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2\left[\dfrac{n}{(n+1)^2} + \dfrac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \dfrac{n}{(n+n)^2}\right], & x = 0 \end{cases}$,求 $\int f(x)dx$

解

当 $x \neq 0$ 时:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{2nx + x^2}{2n^2}\right)^{-n} \\ &= e^{\lim\limits_{n\to+\infty} (-n)\frac{2nx+x^2}{2n^2}} \\ &= e^{-x} \end{aligned}$$

当 $x=0$ 时:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to+\infty} 2\left[\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n+n)^2}\right] \\ &= 2\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{(1+\frac{2}{n})^2}+\cdots+\frac{1}{(1+\frac{n}{n})^2}\right] \\ &= 2\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx \\ &= 2(1-\frac{1}{2}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

我们得到: $f(x)=e^{-x}\Rightarrow\int f(x)dx=-e^{-x}+C$

August 10

1. 已知函数 $f(x)=x^2\ln(1-x)$, 当 $n\geq 3$ 时, 求 $f^{(n)}(0)$

解

我们利用 $\ln(1-x)$ 的泰勒展开式:

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^n}{n}-\cdots$$

我们可以得到:

$$f(x)=-x^3-\frac{x^4}{2}-\frac{x^5}{3}-\cdots-\frac{x^n+2}{n}-\cdots$$

我们有:

$$\begin{cases} f'(0)=0 \\ f''(0)=0 \\ f^{(3)}(0)=-6 \\ f^{(4)}(0)=-\dfrac{4!}{2} \\ \cdots\cdots \end{cases} \Rightarrow f^{(n)}(0)=-\frac{n!}{n-2},\ n\geq 3$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导,$f(0)=f(1)=-2$, 证明: $\exists\xi\in(0,1),\ s.t. f'(\xi)-f(\xi)=\xi$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=e^{-x}[f(x)+x+1]$, 我们有:

$$F(0)=-1,\ F(1)=0,\ F'(x)=e^{-x}[f'(x)-f(x)-x]$$

我们由积分中值定理可以得到:

$$\exists \eta \in (0,1),\ s.t. \int_0^1 f(x)dx = f(\eta) \Rightarrow \exists \eta \in (0,1),\ s.t. f(\eta) = 0$$

我们有:

$$F(\eta) = e^{-\eta}\left[f(\eta) + \eta + 1\right] = e^{-\eta}(\eta + 1) > 0$$

我们根据零点定理, 可知: $\exists \delta \in (0,\eta),\ s.t. F(\delta) = 0$.

我们对 $F(x)$ 在区间 $[\delta, 1]$ 上使用罗尔定理可以得到:

$$\exists \xi \in (\delta, 1),\ s.t. F'(\xi) = e^{-\xi}\left[f'(\xi) - f(\xi) - \xi\right] = 0 \Rightarrow f'(\xi) - f(\xi) = \xi$$

综上所述, 我们得到: $\exists \xi \in (0,1),\ s.t. f'(\xi) - f(\xi) = \xi$

August 11

1. 设数列 $\{u_n\}$ 满足 $u_1 = 1,\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{u_n + 1},\ (n = 1, 2, \cdots)$, 试证明数列 $\{u_n\}$ 收敛, 并求其极限.

解

我们有:

$$u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = \frac{5}{3},\ u_4 = \frac{7}{4}, \cdots\ (u_n > 0)$$

我们发现数列 $\{u_n\}$ 不是单调数列, 我们从奇数项和偶数项入手:

$$\begin{cases} u_{2k+2} = \dfrac{u_{2k+1} + 3}{u_{2k+1} + 1} = \dfrac{\frac{u_{2k}+3}{u_{2k}+1} + 3}{\frac{u_{2k}+3}{u_{2k}+1} + 1} = 2 - \dfrac{1}{u_{2k} + 2} \\ u_{2k+1} = \dfrac{u_{2k} + 3}{u_{2k} + 1} = \dfrac{\frac{u_{2k-1}+3}{u_{2k-1}+1} + 3}{\frac{u_{2k-1}+3}{u_{2k-1}+1} + 1} = 2 - \dfrac{1}{u_{2k-1} + 2} \end{cases} \Rightarrow f(x) = 2 - \frac{1}{x+2}\text{单调递增}$$

我们首先证明数列 $\{u_{2k-1}\}$ 极限存在:

(1). 当 $n = 1$ 时,$u_1 < u_3$.

(2). 当 $n = k$ 时, 假设 $u_{2k-1} < u_{2k+1}$

(3). 当 $n = k + 1$ 时,$u_{2k-1} < u_{2k+1} \Rightarrow f(u_{2k-1}) < f(u_{2k+1}) \Rightarrow u_{2k+1} < u_{2k+3}$

数列 $\{u_{2k-1}\}, (k = 1, 2, \cdots)$ 单调递增, 且 $u_{2k-1} < 2$

我们继续证明数列 $\{u_{2k}\}$ 极限存在:

(1). 当 $n = 1$ 时,$u_2 > u_4$.

(2). 当 $n = k$ 时, 假设 $u_{2k} > u_{2k+2}$

(3). 当 $n = k + 1$ 时,$u_{2k} > u_{2k+2} \Rightarrow f(u_{2k}) > f(u_{2k+2}) \Rightarrow u_{2k+2} < u_{2k+4}$

数列 $\{u_{2k}\}, (k = 1, 2, \cdots)$ 单调递减少, 且 $u_{2k} > \dfrac{3}{2}$

我们不妨假设:

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to+\infty} u_{2k-1} = A \\ \lim\limits_{k\to+\infty} u_{2k} = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{B+3}{B+1} \\ B = \dfrac{A+3}{A+1} \end{cases} \Rightarrow A = B = \sqrt{3}$$

我们可以得到:

(1). $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0$, 当 $n = 2k-1 > N_1$ 时, 我们有:$|u_{2k-1} - \sqrt{3}| < \varepsilon$.

(2). $\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 > 0$, 当 $n = 2k > N_2$ 时, 我们有:$|u_{2k} - \sqrt{3}| < \varepsilon$.

(3). 取 $N = \max\{N_1, N_2\}, \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 我们有:$|u_n - \sqrt{3}| < \varepsilon$.

综上所述, 我们证明数列 $\{u_n\}$ 收敛, 极限为 $\sqrt{3}$.

2. $f(x) = \int_1^x \dfrac{\arctan t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}} \ln(1+t^2)} dt$, 求 $\int_0^1 \dfrac{x}{1+x^2} f(x) dx$

解

原定积分等价于:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{f(x)}{2} d(\ln(1+x^2)) \\
&= \frac{f(x)\ln(1+x^2)}{2}\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{2} d(f(x)) \\
&= -\int_0^1 \frac{\arctan x}{2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta \cos\theta d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\theta\sin\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta d\theta \\
&= -\frac{\sqrt{2}\pi}{16} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

3. 设 $f(x) = \dfrac{1}{1+2x+4x^2}$, 求 $f^{(100)}(0)$

解

$$f(x) = \frac{1-2x}{(1-2x)(4x^2+2x+1)} = \frac{1-2x}{1-(2x)^3}$$

$$\frac{1}{1-(2x)^3} = 1 + (2x)^3 + (2x)^6 + (2x)^9 + \cdots + (2x)^{3n}$$

我们得到:

$$f(x) = (1-2x)\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^{3n} - \sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^{3n+1}$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$\dfrac{f^{(100)}(0)}{100!}$ 是 $f(x)$ 中 x^{100} 前面的系数, 我们可以得到:

$$f^{(100)}(0) = -2^{100} \times 100!$$

4. 证明: 在区间 $(0,2)$ 内存在三个不同的点 x_1, x_2, x_3, 使得 $\dfrac{1-\ln(1+x_1)}{(1+x_1)^2}x_3 = \dfrac{1-\ln(1+x_2)}{(1+x_2)^2}(2-x_3)$

解

我们构造辅助函数: $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$, 我们有:

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2} \\ f(0) = 0 \\ f(2) = \dfrac{\ln 3}{3} \end{cases}$$

我们不妨假设 $\exists x_3 \in (0,2), f(x_3) = A$, 我们分别在区间 $(0, x_3)$ 和区间 $(x_3, 2)$ 上使用拉格朗日中值定理可以得到:

$$\begin{cases} \exists x_1 \in (0, x_3),\ s.t. \dfrac{f(x_3)-f(0)}{x_3} = f'(x_1) = \dfrac{1-\ln(1+x_1)}{(1+x_1)^2} \\ \exists x_2 \in (x_3, 2),\ s.t. \dfrac{f(2)-f(x_3)}{2-x_3} = f'(x_2) = \dfrac{1-\ln(1+x_2)}{(1+x_2)^2} \end{cases}$$

我们令 $f(x_3) - f(0) = f(2) - f(x_3) \Rightarrow A = f(2) - A \Rightarrow f(x_3) = A = \dfrac{f(2)}{2} = \dfrac{\ln 3}{6}$ 时, 我们可以得到:

$$\frac{1-\ln(1+x_1)}{(1+x_1)^2}x_3 = \frac{1-\ln(1+x_2)}{(1+x_2)^2}(2-x_3)$$

综上所述, 我们可以得到: 在区间 $(0,2)$ 内存在三个不同的点 x_1, x_2, x_3, 使得 $\dfrac{1-\ln(1+x_1)}{(1+x_1)^2}x_3 = \dfrac{1-\ln(1+x_2)}{(1+x_2)^2}(2-x_3)$

August 12

1. 设 $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

(1). 证明: $(1-x^2)y^{(n+1)} - (2n+1)xy^{(n)} - n^2y^{(n-1)} = 0 (n \geq 1)$;

(2). 求 $y^{(n)}(0)$

解

(1). 我们对 $f(x)$ 求导可以得到:

$$f'(x) = \frac{1 + \dfrac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1+xf(x)}{1-x^2} \Rightarrow (1-x^2)f'(x) - xf(x) - 1 = 0$$

我们令 $g(x)=(1-x^2)f'(x)-xf(x)-1$, 我们利用莱布尼兹公式可以得到:

$$g^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(1-x^2)^{(k)}f^{(n-k+1)}(x)-\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x)^{(k)}f^{(n-k)}=0$$

当 $k\geq 3$ 时,$(1-x^2)^{(k)}=0$; 当 $k\geq 2$ 时,$x^{(k)}=0$, 我们有:

$g^{(n)}(x)=(1-x^2)f^{(n+1)}(x)-2nxf^{(n)}(x)-n(n-1)f^{(n-1)}(x)-xf^{(n)}(x)-nf^{(n-1)}(x)=0$

我们得到:

$$(1-x^2)f^{(n+1)}(x)-(2n+1)xf^{(n)}(x)-n^2f^{(n-1)}(x)=0$$

综上所述, 我们得到: $(1-x^2)y^{(n+1)}-(2n+1)xy^{(n)}-n^2y^{(n-1)}=0(n\geq 1)$

(2). 我们将 $x=0$ 代入上面式子可以得到:

$$\begin{cases} y^{(n)}=(n-1)^2y^{(n-2)} \\ y(0)=0 \\ y^{(1)}(0)=1 \end{cases} \Rightarrow y^{(n)}(0)=\begin{cases} 0,\ n\text{为偶数}, n=2k(k=0,1,\cdots) \\ (2k!!)^2,\ n\text{为奇数}, n=2k+1(k=0,1,\cdots) \end{cases}$$

2. 已知极限 $\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$, 记此极限为 $f(x)$, 求函数 $f(x)$ 的间断点, 并指出其类型.

解

$$f(x)=e^{\lim\limits_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln(1+\frac{\sin t-\sin x}{\sin x})}=e^{\frac{x}{\sin x}}$$

我们发现 $f(x)$ 的间断点为 $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

(1). 当 $k=0$ 时, 我们有:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=e \\ \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=e \end{cases} \Rightarrow x=0\text{是}f(x)\text{可去间断点}$$

(2). 当 $k\neq 0$ 时, 我们有:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to k\pi^+}f(x)=+\infty\text{或者}0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0\text{或者}+\infty \end{cases} \Rightarrow x=k\pi\text{是}f(x)\text{无穷间断点}$$

3. 证明: $\int_0^{\pi}xa^{\sin x}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{-\cos x}dx\geq\dfrac{\pi^3}{4}$

解

我们由区间再现公式可以得到:

$$\begin{cases} I_1 = \int_0^{\pi}(\pi - t)a^{\sin t}dt \\ 2I_1 = \pi \int_0^{\pi} a^{\sin t}dt \\ I_1 = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\cos t}dt \end{cases}$$

我们可以得到原定积分等价于:(柯西不等式)

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\cos x}dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\cos x}dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} g^2(x)dx \\ &\geq \pi \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x)dx\right]^2 \\ &= \frac{\pi^3}{4} \end{aligned}$$

August 13

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x|x|,\ x \leq 0, \\ x\ln x,\ x > 0, \end{cases}$, $x = 0$ 处 $f(x)$ 的可导性判断、$x = 0$ 是否为 $f(x)$ 的极值点

解

当 $x = 0$ 时, 我们有 $f(0) = 0$, 且我们有:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (-x^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow f(x)\text{在}x = 0\text{处连续}$$

我们有:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = -x = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x)\text{在}x = 0\text{处不可导}$$

取 $\varepsilon \in (0,1)$, 当 $x \in (-\varepsilon, 0)$ 时,$f(x) = -x^2 < f(0) = 0$; 当 $x \in (0,\varepsilon)$ 时,$f(x) = x\ln x < f(0) = 0$,$x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

2. 已知 $f(x) = \prod\limits_{n=1}^{100}\left(\tan\dfrac{\pi x^n}{4} - n\right)$, 求 $f'(1)$

我们令 $g(x) = \prod\limits_{n=2}^{100}\left(\tan\dfrac{\pi x^n}{4} - n\right)$, 我们得到:

$$f(x) = (\tan\frac{\pi x}{4} - 1)g(x)$$

$$f'(x)=\frac{\pi}{4\cos^2\frac{\pi x}{4}}g(x)+g'(x)(\tan\frac{\pi x}{4}-1)$$

$$f'(1)=\frac{\pi}{2}g(1)=\frac{\pi}{2}\times(1-2)\times(1-3)\cdots\times(1-100)=-\frac{\pi}{2}99!$$

August 14

1. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\int_0^x\cos\frac{1}{t}dt,\ x\neq 0\\ 0,\ x=0\end{cases}$，求 $f'(0)$

解

我们有:$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$, 我们根据导数的定义可以得到:

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\cos\frac{1}{t}dt}{x}\\&=\lim_{x\to 0}-\frac{\int_0^x t^2d\sin\frac{1}{t}}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\left[-t\sin\frac{1}{t}|_{t=0}^{t=x}\right]+\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x 2t\sin\frac{1}{t}dt}{x}\\&=0+2\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}\\&=0\end{aligned}$$

综上所述, 我们得到:$f'(0)=0$

2. $f(x)$ 可导, 且满足 $x=\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t-x)dt$, 求 $f(x)$ 以及 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}|f(x)|^6dx$

解

我们令 $u=t-x, t=u+x$, 我们得到:

$$x=\int_0^x f(t)dt+\int_{-x}^0(u+x)f(u)du\Rightarrow x=\int_0^x f(t)dt+\int_{-x}^0 uf(u)du+x\int_{-x}^0 f(u)du$$

我们对方程左右两边对 x 求导, 得到:

$$1=f(x)-xf(-x)+\int_{-x}^0 f(u)du+xf(-x)\Rightarrow f(x)+\int_{-x}^0 f(u)du=1$$

我们再求一次导数, 得到:

$$f'(x)+f(-x)=0\Rightarrow f''(x)-f'(-x)=0\Rightarrow f''(x)=f(x)$$

我们得到特征方程:$\lambda^2+1=0\Rightarrow\lambda_1=i,\lambda_2=-i$

我们不妨设 $f(x)=C_1\sin x+C_2\cos x$

我们有:$\begin{cases} f(0)=1 \\ f'(1)=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=-1 \\ C_2=1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})$

我们得到:

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}|f(x)|^6dx &= 8\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos^6(x+\frac{\pi}{4})dx \\ &= 8\int_0^{\pi}\cos^6 tdt \\ &= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 tdt \\ &= 16\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{5\pi}{2}\end{aligned}$$

3. 设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}t\ln|t|dt$, $x=0$ 处 $f(x)$ 的可导性判断、$x=0$ 是否为 $f(x)$ 的极值点

解

我们有 $g(x)=x\ln|x|$ 在 $x=0$ 处可去间断, 且 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$, 我们得到 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

我们有:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{\int_0^x t\ln tdt}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{\int_x^0 t\ln(-t)dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)\ln(-x)=0 \end{cases} \Rightarrow f'(0)=0$$

当 $x\in(-1,0)$ 时,$f(x)>f(0)$; 当 $x\in(0,1)$ 时,$f(x)>f(0)$,$f(x)$ 在 $x=0$ 处取极小值.

35.3 Week III

August 15

1. 函数 $f(x)=(x+1)|x^2-1|$ 驻点和极值点个数

解

我们得到: $f(x)=\begin{cases} x^3+x^2-x-1, & |x|\ge 1 \\ x+1-x^2-x^3, & |x|<1 \end{cases}$, 我们对 $f(x)$ 求导得到:

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2+2x-1, & x\le -1 \\ 1-2x-3x^2, & -1<x<1 \\ 3x^2+2x-1, & x>1 \end{cases} \Rightarrow f(x)\text{在}x=-1\text{处可导; 在}x=1\text{处不可导}$$

$$f'(x)=\begin{cases}(3x-1)(x+1),\ x\le -1\\(1-3x)(x+1),\ -1<x<1\\(3x-1)(x+1),\ x>1\end{cases}$$

我们发现:

$$\begin{cases}x\in(-\infty,-1),f'(x)>0\\x\in(-1,\frac{1}{3}),f'(x)>0\\x\in(\frac{1}{3},1),f'(x)<0\\x\in(1,+\infty),f'(x)>0\end{cases}$$

在可导点处,$f(x)$ 有两个驻点 $x=\frac{1}{3}$ 和 $x=-1$;$f(x)$ 有一个极值点 $x=\frac{1}{3}$.
在不可导点 $x=1$ 处,$x=1$ 不是驻点,$x=1$ 两侧导数值异号,$x=1$ 是极值点.
综上所述, 我们得到 $f(x)$ 有 $x=\frac{1}{3}$ 和 $x=-1$ 两个驻点和 $x=\frac{1}{3}$ 和 $x=1$ 两个极值点.

2. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内二阶可导, 且 $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right]=\frac{1}{3}$, 求 $f(0)$、$f'(0)$ 及 $f''(0)$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x+xf(x)+x}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x^2}\\&=-\frac{1}{6}+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x^2}\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

我们得到: $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x^2}=\frac{1}{2}$
我们得到:

$$\begin{cases}f(0)=-1\\\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\\\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(0)=-1\\f'(0)=0\\f''(0)=1\end{cases}$$

3. 设 $f(x)$ 连续, 且 $x>1$ 时, 我们有 $f(x)\left[\int_0^x f(t)dt+1\right]=\frac{xe^x}{2(1+x)^2}$, 求 $f(x)$

解

我们不妨设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt \Rightarrow F'(x)=f(x)$

我们构造辅助函数:$G(x)=[F(x)+1]^2 \Rightarrow G'(x)=\dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$

我们可以得到: $\begin{cases} G(x)=\dfrac{e^x}{1+x}+C \\ G(0)=[F(0)+1]^2=1 \end{cases} \Rightarrow C=0$

我们得到:

$$\begin{cases} F(x)+1=\sqrt{\dfrac{e^x}{1+x}} \\ f(x)=F'(x)=\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

综上所述, 我们得到: $f(x)=\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$

August 16

1. 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f'(0)=0, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)+f(x)-f(-x)}{|x|}=1$, 下列说法正确的是:

- A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 极大值
- B. $f''(0)>0, f(0)$ 是 $f(x)$ 极小值
- C. $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点
- D. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极值点,$(0,f(0))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)+f(x)-f(-x)}{|x|} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)+[f(0)+f'(0)x+o(x)]-[f(0)-f'(0)x+o(x)]}{|x|} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)+2f'(0)x+o(x)}{|x|} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{|x|} \\ &= 1 \end{aligned}$$

我们得到:$f''(0)=0$, 且 $x\in(-\xi,\xi), f''(x)>0$, 我们知道 $f'(x)$ 在 $x\in(-\xi,\xi)$ 上单调递增,$x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点,$(0,f(0))$ 不是函数 $f(x)$ 的拐点.

2. 计算极限

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{t}{\cos\theta}}\frac{\sin(r^2\sin\theta\cos\theta)}{\sin\theta}dr$$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta\int_0^{\frac{t}{\cos\theta}}\frac{\sin(r^2\sin\theta\cos\theta)}{r\sin\theta}rdr \\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^t dx\int_0^x\frac{\sin(xy)}{y}dy}{t^3} \\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^{t^2}\frac{\sin u}{u}du}{3t^2} \\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{2t\sin(t^2)}{6t^3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

3. 设 $f(x)$ 连续, 且 $f(x)\neq 0, f(1)=\sqrt{2}$, 若对任意 $x,y\in(-\infty,+\infty)$, 有 $f(x+y)-f(x)=\int_x^{x+y}\frac{t}{f(t)}(t^2+1)dt$, 求 $f(x)$

解

我们可以得到:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}\frac{t}{f(t)}(t^2+1)dt}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)}{f(x+\Delta x)}\left[(x+\Delta x)^2+1\right] \\ &= \frac{x(x^2+1)}{f(x)} \end{aligned}$$

我们得到: $f'(x)f(x)=x^3+x\Rightarrow[f^2(x)]'=2x^3+2x$

我们得到: $f^2(x)=\frac{x^4}{2}+x^2+C,\ f(1)=\sqrt{2}\Rightarrow C=\frac{1}{2}$

我们得到: $f(x)=\sqrt{\frac{x^4}{2}+x^2+\frac{1}{2}}=\frac{x^2+1}{\sqrt{2}}$

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续, 在 $(0,+\infty)$ 恒正,$x>0$ 时, 我们有 $[f(x)]^3\le 3\int_0^x f^2(t)dt$, 证明:$x\ge 0$时, 均有$f(x)\le x$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=\int_0^x f^2(t)dt,\ F'(x)=f^2(x)$

我们得到:

$$[F'(x)]^{\frac{3}{2}} \le 3F(x) \Rightarrow F'(x) \le 3^{\frac{2}{3}}[F(x)]^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{F'(x)}{[F(x)]^{\frac{2}{3}}} \le 3^{\frac{2}{3}}$$

我们构造: $G(x) = F(x)^{\frac{1}{3}}$, $G'(x) = \dfrac{F'(x)}{3[F(x)]^{\frac{2}{3}}} \le 3^{-\frac{1}{3}}$

我们得到:$G(x) \le \int_0^x 3^{-\frac{1}{3}} = 3^{-\frac{1}{3}}x \Rightarrow F(x)^{\frac{1}{3}} \le 3^{-\frac{1}{3}}x$

我们有:

$$F'(x) \le 3^{\frac{2}{3}}[F(x)]^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f^2(x) \le x^2 \Rightarrow f(x) \le x$$

我们补充 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, 综上所述, 我们得到: $x \ge 0$时, 均有$f(x) \le x$

August 17

1. 已知 $f(x) = \dfrac{x|x|}{1+x}$, 求 $f(x)$ 的凹凸区间以及渐近线

解

我们有:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x}{(1+x)^2}, & x \ge 0 \\ -\dfrac{x^2+2x}{(1+x)^2}, & x < 0, 且x \ne -1 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(1+x)^3}, & x > 0 \\ -\dfrac{2}{(1+x)^3}, & x < 0, 且x \ne -1 \end{cases}$$

$f'(0) = 0$, 我们利用导数定义得到:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f'(x)}{x} = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f'(x)}{x} = -2 \end{cases} \Rightarrow f''(x)在x = 0跳跃间断$$

当 $x \in (0, +\infty)$,$f''(x) > 0$, 我们可以得到:$(0, +\infty)$ 是 $f(x)$ 的凹区间;

当 $x \in (-\infty, -1)$,$f''(x) > 0$, 我们可以得到:$(-\infty, -1)$ 是 $f(x)$ 的凹区间;

当 $x \in (-1, 0)$,$f''(x) < 0$, 我们可以得到:$(-1, 0)$ 是 $f(x)$ 的凸区间.

铅锤渐近线:$x = -1$; 无水平渐近线

斜渐近线:

(1).

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

(2).

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - ax) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

综上所述,$f(x)$ 有三条渐近线, 铅锤渐近线 $x = -1$; 斜渐近线 $y = x - 1$ 和 $y = -x + 1$.

2. 函数 $f(x)$ 具有二阶连续的导数, 曲线 $y=f(x)$ 既关于 y 轴对称也关于直线 $x=1$ 对称, 求 $\int_{-2}^{2}(x-2024)f''(x)dx$

解

周期性、轴对称性、中心对称性

我们可以得到 $f(x)$ 是以 $T=2$ 为周期的周期函数; 且 $f(x)$ 是偶函数,$f'(x)$ 是奇函数且为周期函数.

原定积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^{2}(x-2024)df'(x) \\ &= (x-2024)f'(x)|_{x=-2}^{x=2} - \int_{-2}^{2} f'(x)dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. 设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} x+y,\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1 \\ 0,\ \text{其他} \end{cases}$

(1). 求 $\max\{X,Y\}$ 的分布函数和概率密度

(2). 求 $\min\{X,Y\}$ 的分布函数和概率密度

解

August 18

1. 曲线 $y=x(1+\arcsin\dfrac{2}{x})$ 的斜渐近线方程

解

(1). $x\Rightarrow+\infty$

$$\begin{cases} a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\arctan\dfrac{2}{x}) \\ b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\arctan\dfrac{2}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

(2). $x\Rightarrow-\infty$

$$\begin{cases} a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\arctan\dfrac{2}{x}) \\ b=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\arctan\dfrac{2}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

综上所述,$f(x)$ 的斜渐近线方程为:$y=x+2$

2. $\int_0^1\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{x^2-x+1}dx$

解

我们有:$\begin{cases}\sin\theta = \sqrt{x} \\ \cos\theta = \sqrt{1-x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\arcsin\sqrt{x} = \theta \\ \arcsin\sqrt{1-x} = \frac{\pi}{2} - \theta\end{cases}$ 我们利用区间再现公式得到:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{1-x}}{x^2-x+1}dx \\
2I &= \int_0^1 \frac{\pi}{2(x^2-x+1)}dx \\
I &= \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{\pi}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx \\
&= \frac{\pi}{4}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big|_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{\sqrt{3}\pi^2}{18}
\end{aligned}$$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$

解

我们利用区间再现公式得到:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x})dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\frac{2}{1+\tan x})dx \\
2I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2dx \\
I &= \frac{\pi\ln 2}{8}
\end{aligned}$$

4. 设 $f(x) = \arctan x$, 求 $f^{(n)}(0)$(n 为奇数)

解

我们利用泰勒展开式:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{2n-2}$$

$$\begin{cases}f(x) = \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1} \\ f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \cdots\end{cases}$$

我们可以得到:$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!$

综上所述, 我们得到: $f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!$, n为奇数

5. 设 $f(x)=\begin{cases} ax+1,\ x<0 \\ be^x,\ x\geq 0 \end{cases}$ 为可导函数, 求 $\int f(\ln x)dx$

解

我们可以知道 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=b \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1 \end{cases} \Rightarrow b=1$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=b \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=a \end{cases} \Rightarrow a=b=1$$

我们令 $g(x)=f(\ln x)$, 我们得到:$g(x)=\begin{cases} 1+\ln x,\ x\in(0,1) \\ x,\ x\in[1,+\infty) \end{cases}$

我们得到:$\int g(x)dx=\begin{cases} x\ln x+C \\ \dfrac{x^2-1}{2}+C \end{cases}$

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导,$f(a)=a,\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$, 证明:$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=\dfrac{f(x)-x}{e^x}$, 我们有: $F(a)=0$

我们由 $\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$ 得到:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b xdx\Rightarrow\int_a^b [f(x)-x]\,dx=0\Rightarrow\exists\theta\in(a,b),\ s.t.f(\theta)=\theta$$

我们有:

$$\begin{cases} F'(x)=\dfrac{f'(x)-f(x)+x-1}{e^x} \\ F(a)=F(\theta)=0 \end{cases}$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a,θ) 上使用罗尔定理可以得到:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.F'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1$$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1$

August 19

1. 求 $\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{x\sin x}{(1+2^x)(1+\cos^2 x)}dx$

解

我们可以得到:

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2^x x\sin x}{(1+2^x)(1+\cos^2 x)}dx\Rightarrow 2I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx\Rightarrow I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

我们利用区间再现公式得到:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx \\ &= \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

2. 求 $\int_0^1 \frac{\arctan e^{2x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}dx$

解

我们利用区间再现公式:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1\frac{\arctan e^{1-2x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}dx \\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}dx \\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta \\ &= \frac{\pi}{4}\left[2-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}d(\theta+\frac{\pi}{4})\right] \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}\pi}{4}\ln(\sqrt{2}+1) \end{aligned}$$

3. 求曲线 $y=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+x^2}$ 的渐近线所围区域的面积

解

我们由题意知:$f(x)$ 在 $x=0$ 处无定义,$x=0$ 是 $f(x)$ 的铅垂渐近线.

我们知道 $x\Rightarrow+\infty, f(x)\Rightarrow+\infty$; 当 $x\Rightarrow-\infty, f(x)\Rightarrow+\infty$.

$$(1).\begin{cases} a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{t\to0^+}e^t\sqrt{1+t^2}=1 \\ b=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{e^t\sqrt{1+t^2}-1}{t}=1 \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $+\infty$ 处的渐近线为 $y=x+1$

$$(2).\begin{cases} a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{t\to0^-}-e^t\sqrt{1+t^2}=-1 \\ b=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=\lim\limits_{t\to0^-}\dfrac{1-e^t\sqrt{1+t^2}}{t}=-1 \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $-\infty$ 处的渐近线为 $y=-x-1$

我们可以得到: $S=1$

4. 随机变量 X 服从分布 $X\sim E(1)$, 随机变量 Y 服从分布 $Y\sim B(1,\frac{1}{2})$,X,Y 相互独立, 随机变量 $Z=X-Y$, 求 $f_z(Z)$

解

5. 设 $f(x)$ 是单调可导函数,$f(-\frac{\pi}{2})=-f(\frac{\pi}{2})$,$g(x)$ 是 $f(x)$ 反函数, 且 $f(x)$ 满足:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{f(x)} g(t)dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\left(\frac{1}{1+e^{-|t|}}+\frac{\sin t}{1+e^{-\frac{\pi}{2}}}\right)\sin tdt$$

求积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

解

我们对上述等式两边对 x 求导可以得到:

$$g(f(x))\cdot f'(x)=\frac{\sin x}{1+e^{-|x|}}+\frac{\sin^2 x}{1+e^{-\frac{\pi}{2}}}\Rightarrow xf'(x)=\frac{\sin x}{1+e^{-|x|}}+\frac{\sin^2 x}{1+e^{-\frac{\pi}{2}}}$$

我们利用分部积分可以得到:

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx &= xf(x)|_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx\\ &= -\frac{2}{1+e^{-\frac{\pi}{2}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 dx\\ &= \frac{-\pi}{2(1+e^{-\frac{\pi}{2}})}\end{aligned}$$

August 20

1. 设 $f(x)=\arctan x\cdot e^{ax}$, 且 $f'''(0)=2$, 求 a^2

解

我们根据泰勒展开式:

$$\begin{cases}\arctan x=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\cdots\\ e^{ax}=1+ax+\dfrac{(ax)^2}{2!}+\cdots\end{cases}\Rightarrow f(x)=x+ax^2+(\frac{a^2}{2}-\frac{1}{3})x^3+\cdots$$

我们可以得到: $f'''(0)=3a^2-2=2\Rightarrow a^2=\frac{4}{3}$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 的导函数连续,$f(0)=0$,$|f'(x)-f(x)|\le 1$, 证明: $|f(x)|\le e^x-1$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = e^{-x}f(x) \Rightarrow F'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x))$

我们由: $|f'(x) - f(x)| \le 1 \Rightarrow |F'(x)| \le e^{-x}$

我们对 $F(x)$ 在 $[0,x](x > 0)$ 上求不定积分, 我们可以得到:

$$\begin{cases} -e^{-x} \le F'(x) \le e^{-x} \\ \int_0^x -e^{-t}dt \le \int_0^x F'(t)dt \le \int_0^x e^{-t}dt \end{cases} \Rightarrow \int_0^x |F'(t)|dt = |F(x)| - |F(0)| = e^{-x}|f(x)| \le |\int_0^x e^{-t}dt| = 1 - e^{-x}$$

综上所述, 我们得到: $|f(x)| \le e^x - 1$

3. 求曲线 $y = \dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}(x > 0)$ 的斜渐近线方程

解

我们不妨设曲线的斜渐近线方程为: $y = ax + b$, 我们可以得到:

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = e^{\lim\limits_{t\to 0} -\frac{\ln(t+1)}{t}} = e^{-1} \\ b = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = \dfrac{1}{2e} \end{cases}$$

综上所述, 曲线的斜渐近线方程为: $y = \frac{x}{e} + \frac{1}{2e}$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$

解

我们利用区间再现公式:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx \\ 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x\cos x)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin x)dx - \frac{\pi\ln 2}{2} \\ &= I - \frac{\pi\ln 2}{2} \\ I &= \frac{\pi\ln 2}{2} \end{aligned}$$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{1+\tan^n x}dx$

解

原定积分等价于: $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^n)(1+x^2)}dx$

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^n)(1+x^2)}dx\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{x^n}{(1+x^n)(1+x^2)}dx\\
2I &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx\\
&= \frac{\pi}{2}\\
I &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

6. 设随即变量 (X,Y) 的联合概率密度为: $f(x,y)=\begin{cases}\frac{21}{4}x^2y,\ x^2\leq y\leq 1\\ 0,\ 其他\end{cases}$, 求 $P\{Y\geq 0.75|X=0.5\}$

解

August 21

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)}{x},\ x\neq 0\\ 0,\ x=0\end{cases}$, 其中 $g(x)$ 在 $x=0$ 的一个邻域内有二阶导数, 且 $g(0)=0, g'(0)=0$, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处

- A. 不连续
- B. 连续, 但 $f'(0)$ 不存在
- C. $f'(0)$ 存在, 但 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续
- D. $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

解

(1). $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续性

$$
\begin{cases}\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}g'(x)=0\\ f(0)=0\end{cases}\Rightarrow f(x)在x=0处连续
$$

(2). $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续性

$$
f'(x)=\begin{cases}\frac{xg'(x)-g(x)}{x^2},x\neq 0\\ f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)}{x^2}=\frac{g''(0)}{2}\end{cases}
$$

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{xg'(x)-g(x)}{x^2} = \frac{g''(0)}{2} = f'(0)$$

综上所述, 我们得到 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续,$\int_0^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛,$a_n = \int_0^1 f(nx)dx$, 证明: $k>0$时, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n^2}{n^k}$ 收敛.

解

我们由 $a_n = \int_0^1 f(nx)dx \Rightarrow a_n = \frac{1}{n}\int_0^n f(x)dx$, 我们可以得到:

$$\begin{cases} a_n^2 = \dfrac{[\int_0^n f(x)dx]^2}{n^2} \le \dfrac{\int_0^n [f(x)]^2dx}{n} (\text{积分形式柯西不等式}) \\ b = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n [f(x)]^2dx = \int_0^{+\infty} f^2(x)dx \text{收敛} \end{cases}$$

我们得到:

$$\frac{a_n^2}{n^k} \le \frac{\int_0^n [f(x)]^2dx}{n^{1+k}} \le \frac{b}{n^{1+k}}$$

我们已知级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b}{n^{1+k}}(k>0,b>0)$ 收敛, 我们根据比较判别法可以得到: 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n^2}{n^k}$ 收敛

3. 已知方程 $x^5-5x+k=0$ 有三个不同的实数根, 求 k 的取值范围

解

我们令 $f(x)=x^5-5x+k, f'(x)=5x^4-5=5(x^2+1)(x+1)(x-1)$

$$\begin{cases} x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty),\ f'(x)>0 \\ x\in(-1,1),\ f'(x)<0 \end{cases}$$

我们得到: $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增;$(-1,1)$ 上单调递减;$(1,+\infty)$ 上单调递增.

我们有: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$,$f(x)$ 有三个不同的实数根, 我们需要满足:

$$\begin{cases} f(-1)>0 \\ f(1)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k+4>0 \\ k-4>0 \end{cases} \Rightarrow k\in(-4,4)$$

综上所述, 我们得到 k 的取值范围为 $(-4,4)$.

4. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)}dx$

解

原定积分可以化为:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} dx \\
2I &= \int_0^{+\infty} \frac{1+x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= \frac{\pi}{2} \\
I &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

5. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$

解

原定积分可以化为:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan\theta) d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}) d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\frac{2}{1+\tan\theta}) d\theta \\
2I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 d\theta \\
&= \frac{\pi \ln 2}{4} \\
I &= \frac{\pi \ln 2}{8}
\end{aligned}
$$

6. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \int_{\ln(1+x)}^{x} \frac{(1-2t)^{\frac{1}{t}}}{t^2} dt$

解

我们利用第二积分中值定理可以得到:

$$
\lim_{x\to 0} \frac{\xi}{x} = 1
$$

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}(x-\ln(1+x))\frac{(1-2\xi)^{\frac{1}{\xi}}\xi^2}{,} \ \xi \in (\ln(1+x),x) \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{\xi^2}\lim_{\xi\to 0}(1-2\xi)^{\frac{1}{\xi}} \\
&= \frac{e^{-2}}{2}
\end{aligned}
$$

35.4 Week IV

August 22

1. 已知 $f(x)=[x]\sin\pi x$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 求 $f'(x)$

解

(1).

$$x\in(n,n+1),(n\in\mathbb{Z}),\ [x]=n$$

我们得到:

$$f'(x)=n\pi\cos(\pi x),\ x\in(n,n+1),\ n\in\mathbb{Z}$$

(2). 当 $x=n,\ n\in\mathbb{Z}$ 时, 我们利用导数定义可以得到:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to n^+}\dfrac{n\sin\pi x}{x-n}\\ \lim\limits_{x\to n^-}\dfrac{(n-1)\sin\pi x}{x-n}\end{cases}\Rightarrow f'(n)\text{不存在}$$

综上所述, 我们得到: $f'(x)=\begin{cases}[x]\cos\pi x,\ x\neq n,\ n\in\mathbb{Z}\\ \text{不存在},\ x=n,\ n\in\mathbb{Z}\end{cases}$

2. 设函数 $f(x)=ax-b\ln x(a>0)$ 有两个零点, 求 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围.

解

我们首先得到 $f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$, 我们有: $f'(x)=\dfrac{ax-b}{x}$.
(1). 当 $b\leq 0$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 至多存在一个零点.
(2). 当 $b>0$ 时, 令 $f'(x)=0\Rightarrow x=\dfrac{b}{a}$.

$$\begin{cases}x\in(0,\frac{b}{a}),\ f'(x)<0\\ x\in(\frac{b}{a},+\infty),\ f'(x)>0\end{cases}\Rightarrow f(x)_{min}=f(\frac{b}{a})$$

我们有:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$$

当且仅当 $f(\frac{b}{a}) < 0$ 时,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个零点.

$$f(\frac{b}{a}) = b(1 - \ln\frac{b}{a}) < 0 \Rightarrow \frac{b}{a} > e$$

综上所述, 我们得到 $\frac{b}{a}$ 的取值范围为 $(e,+\infty)$.

3. $\int_0^1 \frac{x^2}{x+\sqrt{1-x^2}}dx$

解

原定积分可以化为:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta \\ 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\cos\theta+\cos^2\theta\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \\ I &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

4. $\int_0^1 \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}dx$

解

原定积分可以化为:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta} d\theta \\
2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta \\
&= \frac{\pi}{2} \\
I &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

5. 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1+\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right)\right]^n$

解

原极限可以化为:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to+\infty}\left[1+\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)\right]^n \\
&= e^{\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left[1+\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)\right]} \\
&= e^{\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)} \\
&= e^{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi n}{\sqrt{1+4n^2}+2n}} \\
&= e^{\frac{\pi}{4}}
\end{aligned}
$$

6. 设 $f_n(x)=\tan^n x(n=1,2,\cdots)$, 且曲线 $y=\tan^n x$ 在点 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(x_n,0)$, 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n)$

解

我们先求切线方程:

$$
\begin{cases}
f(x)=\tan^n x \\
f(\frac{\pi}{4})=1 \\
f'(x)=n\tan^{n-1}x\sec^2 x
\end{cases}
\Rightarrow l: \ y-1=2n(x-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow x_n=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2n}
$$

原极限可以化为:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n\to+\infty} \tan^n\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2n}\right) \\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\tan(\frac{\pi}{4}-x))}{2x}} \\ &= e^{-1} \end{aligned}$$

综上所述, 我们得到: $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = e^{-1}$

7. 设 A 是 3 阶实对称矩阵, 且不可逆, $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 3 \\ -12 & -6 & 12 \end{pmatrix}$, 求 A

解

我们利用谱分解定理: $A = \sum\limits_{i=1}^{3} \lambda_i G_i,\ G_i = e_i e_i^T$

我们将上述方程两边取转置得到:

$$A^T \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & \\ -2 & -1 & \\ & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -6 & -6 \\ 3 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A^T\xi_1 = 3\xi_1 \\ A^T\xi_2 = 6\xi_2 \end{cases}$$

我们知道矩阵 A^T 的两个特征值为 $3,6$, 又因为矩阵 A 不可逆, 矩阵 A^T 的三个特征值分别为 $0,3,6$

我们可以得到: $A^T = \sum\limits_{i=1}^{3} \lambda_i G_i = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

我们有 $A^T = A$, 综上所述, 我们得到: $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

August 23

1. 已知方程 $\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} = k$ 在区间 $(0,1)$ 有实数根, 求 k 的取值范围

解

我们构造辅助函数: $f(x) = \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}$, 我们有:

$$f'(x) = \frac{(1+x)\ln^2(1+x) - x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)},\ x \in (0,1)$$

我们构造辅助函数: $g(x) = 2\ln x - \dfrac{x^2-1}{x},\ x \in (1,2)$

我们有:

$$\begin{cases} g'(x) = \dfrac{-(x-1)^2}{x^2} \le 0 \\ g(x)\text{单调递减} \\ g(x) \le g(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow 2\ln t \le \frac{t^2-1}{t},\ t \in (1,2) \Rightarrow \ln^2(1+x) \le \frac{x^2}{1+x}$$

我们得到: $f'(x) \le 0,\ x \in (0,1) \Rightarrow f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减.

我们有:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{\ln 2} - 1 \end{cases}$$

综上所述,k 的取值范围为: $(\dfrac{1}{\ln 2}-1, \dfrac{1}{2})$

2. 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x},\ x \ne 0 \\ 1,\ x = 0 \end{cases}$, 则下列关于 $y = \dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}$ 的命题正确的个数

- A. 有垂直渐近线
- B. 有水平渐近线
- C. 有斜渐近线
- D. 是有界函数

解

我们可以得到: $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 我们令 $g(x) = \dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}$

首先 $g(x)$ 在 $x=0$ 处无定义, 我们可以得到:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow g(x)\text{没有垂直渐近线}$$

其次 $g(x)$ 在 ∞ 处水平渐近线:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow g(x)\text{在}x \Rightarrow -\infty\text{时有水平渐近线}y=0$$

在 $x \Rightarrow +\infty$ 时, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{g(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x-1}{2x^2} = +\infty$,$g(x)$ 不存在斜渐近线, 且 $g(x)$ 为无界函数.

3. $\int_0^{+\infty} \dfrac{\ln x}{1+x^2} dx$

解

原定积分可以化为:

$$\begin{aligned} I &= -\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt \\ &= -I \\ I &= 0 \end{aligned}$$

4. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1-x^2+x^4)}{(1+x^2)\ln x} dx$

解

原定积分可以化为:

$$\begin{aligned} I &= -\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t^4-t^2+1)}{(1+t^2)\ln t} dt + \int_0^{+\infty} \frac{4}{1+t^2} dt \\ &= -I + 2\pi \\ I &= \pi \end{aligned}$$

5. 已知函数 $f(x)$ 三阶可导, 则下列命题中不是 $(0, f(0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点的必要条件的有:

- A. 存在 $\delta > 0$,$f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 内单调下降,$f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加
- B. 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (-\delta, \delta)$, 有 $f''(-x) = -f''(x)$
- C. $f''(0) = 0,\ f'''(0) \neq 0$

解

拐点是函数凹凸性发生改变的函数点, 由函数 $f(x)$ 三阶可导, 我们可以得到 $f''(x_0) = 0$, 且有:

$$\begin{cases} f''(a)\cdot f''(b) < 0,\ a \in (x_0-\xi, x_0),\ b \in (x_0, x_0+\xi) \\ f'''(x_0)\text{符号不确定} \\ f(x) = x^3 \end{cases}$$

综上所述, 上述三个命题都不正确.

6. 下列命题正确的是:

- A. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = a$, 则 $f'(x_0) = a$
- B. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 不存在, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处不可导
- C. 若 $f'(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 则在 x_0 的某邻域内 $f'(x)$ 存在
- D. 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导,$g(x)$ 在 $x = x_0$ 处不可导, 则 $f(x)\cdot g(x)$ 在 $x = x_0$ 处不可导

解

重要反例:

(1). 函数在某个点无定义, 但是这个点处导数极限存在

$$f(x) = \arctan\frac{1}{x},\ f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

(2). 函数导函数在某点处可导, 但是导函数在该点处极限不存在

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x},\ x\neq 0 \\ 0 \end{cases},\ f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x},\ x\neq 0 \\ 0 \end{cases}$$

7. (1). 证明: $\frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2},\ (n\in\mathbb{N}^*)$

(2). 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{n^2+i}{n^2}$

解

(1). 我们构造辅助函数: $f(x) = x - \ln(1+x) - \frac{x^2}{2},\ x\in(0,1]$

我们有: $f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x} < 0, f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减, 我们得到: $f(x) < f(x)_{max} = f(0) = 0$

我们得到: $f(x) < 0,\ x\in(0,1] \Rightarrow \frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2},\ (n\in\mathbb{N}^*)$

(2). 我们由:

$$\begin{cases} \ln(1+x) < x,\ x\in(0,1] \\ \ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2},\ x\in(0,1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(1+\frac{i}{n^2}) < \frac{i}{n^2} \\ \ln(1+\frac{i}{n^2}) > \frac{i}{n^2} - \frac{i^2}{2n^4} \end{cases}$$

我们可以得到:

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{n^2+i}{n^2} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\ln(1+\frac{i}{n^2})}$$

$$e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\frac{i}{n^2}-\frac{i^2}{2n^4}} \le I \le e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\frac{i}{n^2}}$$

$$e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4}} \le I \le e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n}}$$

左边 = 右边 = $e^{\frac{1}{2}}$, 我们由夹逼定理可以得到原式子 $I = e^{\frac{1}{2}}$

8. 设区域 $D_1 : \{(x,y)|0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$,$D_2 : \{(x,y)|x^2+y^2\le r^2,\ (r>0)\}$, 比较 $I = \iint\limits_{D_1}(\cos x^2 + \sin y^2)\,dxdy$, $J = \iint\limits_{D_1}\sqrt{2}dxdy$, $K = \lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{D_2}e^{x^2-y^2}\cos(x+y)dxdy$ 大小

解

我们首先可以得到: $J = \sqrt{2}$

我们根据轮换对称性:

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{D_1} \left(\cos x^2 + \sin y^2\right) dxdy \\
&= \iint\limits_{D_1} \left(\cos x^2 + \sin x^2\right) dxdy \\
&= \iint\limits_{D_1} \left(\sqrt{2}\sin(x^2 + \frac{\pi}{4})\right) dxdy \\
&\in (1, \sqrt{2})
\end{aligned}
$$

我们对于 K, 我们根据积分中值定理可以得到:

$$
\begin{aligned}
K &= \lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} e^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta) \iint\limits_{D_2} 1dxdy \\
&= \lim_{r\to 0} e^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

综上所述, 我们得到: $\begin{cases} I \in (1, \sqrt{2}) \\ J = \sqrt{2} \\ K = 1 \end{cases} \Rightarrow K < I < J$

August 24

1. 证明: 若在区间 I 上 $f^{(n)}(x) \neq 0$, 则方程 $f(x) = 0$ 在 I 上最多 n 个实数根

解

我们利用反证法, 来证明: 方程 $f(x) = 0$ 在区间 I 上有超过 n 个实数根, 则 $f^{(n)}(x) = 0$ 在区间 I 上有解.

我们不妨假设 $\exists x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} \in I$, 且满足 $f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_n) = f(x_{n+1}) = 0$.

我们对 $f(x)$ 在区间 $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \cdots, (x_n, x_{n+1})$ 上使用罗尔定理:

$$
\begin{cases}
\exists \xi_1 \in (x_1, x_2),\ s.t. f'(\xi_1) = 0 \\
\exists \xi_2 \in (x_2, x_3),\ s.t. f'(\xi_2) = 0 \\
\cdots\cdots \\
\exists \xi_n \in (x_n, x_{n+1}),\ s.t. f'(\xi_n) = 0
\end{cases}
$$

我们以此类推, 我们可以得到: $\exists \eta_1, \eta_2 \in I,\ s.t. f^{(n-1)}(x) = 0$, 我们再次使用罗尔定理, 可以得到: $\exists \mu \in (\eta_1, \eta_2),\ s.t. f^{(n)}(\mu) = 0$

综上所述, 原命题的逆否命题成立, 原命题成立.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $(0, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0$, 下列命题正确的是:

- A. 若 $f(0)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在
- B. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2024$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=2024$
- C. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=1$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$
- D. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=1$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt=\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在

解

(A). $f(x)=\sqrt{x}$

(B). $f(x)=2024x+\sin x,\ f'(x)=2024+\cos x,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$不存在

(C). $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(x)dt}{x}$

我们有:

$$\int_0^x f(t)dt<\int_0^x f(x)dt<\int_x^{2x}f(t)dt\Rightarrow\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}<\frac{\int_0^x f(x)dt}{x}<\frac{\int_x^{2x}f(t)dt}{x}$$

我们有: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^{2x}f(t)dt}{x}=2\end{cases}$

我们可以得到: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

(D). 我们假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在, 我们可以得到:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\lim_{x\to+\infty}f(x)\neq1$$

3. 讨论 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x^m|\ln x|^n}{1+x^k}dx$ 的敛散性

解

我们可知函数可能的暇点为 $x=0,\ x=1,\ x=+\infty$

(1). $x=0$

当 $k\geq0$ 时,$1+x^k$ 非零, 原反常积分敛散性等价于: $\int_0^{\frac12}x^m|\ln x|^n dx$

$$\begin{cases}m>-1,\text{反常积分收敛}\\ m=-1,n<-1\text{反常积分收敛}\end{cases}$$

当 $k<0$ 时, 原反常积分敛散性等价于: $\int_0^{\frac12}x^{m-k}|\ln x|^n dx$

$$\begin{cases}m-k>-1,\text{反常积分收敛}\\ m-k=-1,n<-1,\text{反常积分收敛}\end{cases}$$

(2). $x=1$

原反常积分敛散性等价于: $\int_{\frac12}^1|\ln x|^n dx$ 和 $\int_1^2|\ln x|^n dx$ 收敛 $\Rightarrow n>-1$

(3).$x=+\infty$

当 $k\geq 0$ 时, 原反常积分敛散性等价于: $\int_2^{+\infty} x^{m-k}|\ln x|^n dx$

$$\begin{cases} m-k<-1, \text{反常积分收敛} \\ m-k=-1, n<-1, \text{反常积分收敛} \end{cases}$$

当 $k<0$ 时, 原反常积分敛散性等价于: $\int_2^{+\infty} x^{m}|\ln x|^n dx$

$$\begin{cases} m<-1, \text{反常积分收敛} \\ m=-1, n<-1, \text{反常积分收敛} \end{cases}$$

综上所述, 我们得到: $\begin{cases} n>-1 \\ k<0, k-1<m<-1 \\ k>0, -1<m<k-1 \end{cases}$ 时, 原反常积分收敛

4. 对于 $y=\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ 而言, 下列说法正确的是:

- A. 当 n 无论为偶数还是奇数时, 函数都取极值
- B. 当 n 无论为偶数还是奇数时, 函数都不取极值
- C. 当 n 为偶数时, 函数取极值; 当 n 为奇数时, 函数不取极值
- D. 当 n 为偶数时, 函数不取极值; 当 n 为奇数时, 函数取极值

解

我们对原函数求导, 可以得到:

$$f'(x)=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}$$

(1). 当 n 为偶数时,$f'(x)\leq 0$,$f(x)$ 没有极值点

(2). 当 n 为奇数时,$x<0$ 时,$f'(x)>0$;$x>0$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 在 $x=0$ 处取极值.

5. 设 $f(x)$ 连续,$g(x)=f(x)\cdot\int_0^x f(t)dt$ 单调不增, 证明 $f(x)\equiv 0$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=\dfrac{1}{2}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2$

我们有:

$$\begin{cases} F(0)=0 \\ F'(x)=f(x)\int_0^x f(t)dt\text{单调不增} \\ F'(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,0), F'(x)\geq 0 \\ x\in(0,+\infty), F'(x)\leq 0 \end{cases} \Rightarrow F(x)\leq F(0)=0$$

我们有: $F(x)=\dfrac{1}{2}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2\geq 0\Rightarrow F(x)=0\Rightarrow f(x)\equiv 0$

综上所述, 我们得到: $f(x)\equiv 0$

August 25

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导, 且 $f''(x)\neq 0, \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{xf'(x)}=\alpha>0$, 且存在一点 $f(x_0)<0$, 证明: 方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上恰有两个实数根

解

我们可以得到:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\dfrac{1}{\alpha}>0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\dfrac{1}{\alpha}<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\exists x_1\in(0,+\infty),f(x_1)>0\\ \exists x_2\in(-\infty,0),f(x_2)>0\end{cases}$$

我们由 $f''(x)\neq 0$, 且 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)>0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)<0\end{cases}\Rightarrow f''(x)>0$

我们可以得到 $f'(x)$ 单调递增,$\exists x_3\in(-\infty,+\infty),\ s.t. f'(x_3)=0.$

我们可以得到 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_3)$ 上单调递减,$(x_3,+\infty)$ 上单调递增, 且 $\exists x_0, s.t. f(x_0)<0.$

我们根据单调性可知 $f(x)$ 至多两个零点, 根据零点定理可知 $(-\infty,x_0)$ 和 $(x_0,+\infty)$ 上都有一个零点, 我们得到 $f(x)$ 有且仅有两个零点.

综上所述, 我们得到: 方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上恰有两个实数根

2. 讨论 $\int_0^{+\infty}\dfrac{(1+x^p)\ln|\ln x|}{x^q}dx$ 的敛散性

解

我们可以找到函数可能的暇点为 $x=0,x=1,x=+\infty$

(1). $x=0$

当 $p\geq 0$ 时,$1+x^p$ 非零, 原反常积分敛散性等价于: $\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{\ln|\ln x|}{x^q}dx$

$$\begin{cases}q<1,\text{反常积分收敛}\\ q=1,n<-1\text{反常积分发散}\end{cases}$$

当 $p<0$ 时, 原反常积分敛散性等价于: $\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{\ln|\ln x|}{x^{q-p}}dx$

$$\begin{cases}q-p<1,\text{反常积分收敛}\\ q-p=1,\text{反常积分发散}\end{cases}$$

(2). $x=1$

原反常积分敛散性等价于: $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\ln|\ln x|dx$ 和 $\int_1^2\ln|\ln x|dx$ 收敛

(3).$x=+\infty$

当 $p \le 0$ 时, 原反常积分敛散性等价于: $\int_2^{+\infty} \frac{\ln|\ln x|}{x^q} dx$

$$\begin{cases} q > 1, \text{反常积分收敛} \\ q = 1, , \text{反常积分发散} \end{cases}$$

当 $p > 0$ 时, 原反常积分敛散性等价于: $\int_2^{+\infty} \frac{\ln|\ln x|}{x^{q-p}} dx$

$$\begin{cases} q - p > 1, \text{反常积分收敛} \\ q - p = 1, \text{反常积分发散} \end{cases}$$

综上所述, 我们得到, 原反常积分一定发散.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某个邻域内可导,$g(x)$ 在 $x = 0$ 的某个邻域内连续, 且 $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = 0$, $f'(x) = \sin^2 x + \int_0^x g(x-t)dt$, 则下列命题正确的是:

- A. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点
- B. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点
- C. $(0, f(0))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点
- D. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0, f(0))$ 不是 $y = f(x)$ 的拐点

解

我们首先可以得到: $g(0) = 0, g'(0) = 0$, 我们有:

$$\begin{cases} f''(x) = 2\sin x \cos x + g(x) \\ f''(0) = 0 \\ f'''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x\cos x + g(x)}{x} = 2 \end{cases}$$

我们可以得到:

$$\begin{cases} x \in (-\xi, 0), f''(x) < 0 \\ x \in (0, \xi), f''(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)\text{在}(-\xi, 0)\text{单调递减}; f'(x)\text{在}(0,\xi)\text{单调递增} \Rightarrow f'(x) \ge f'(0) = 0$$

我们有: $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点;$(0, f(0))$ 是 $f(x)$ 的拐点.

4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 是来自正态总体 X 的简单随机样本,$Y_1 = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_6}{6}$,$Y_2 = \frac{X_7 + X_8 + X_9}{3}$,$S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9}(X_i - Y_2)^2$,$Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S}$, 证明: $Z \sim t(2)$

解

August 26

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上可导, 且 $f'(x) > f(x) > 0$, 下列命题正确的是:

- A. $\dfrac{f(-2)}{f(-1)} > 1$
- B. $\dfrac{f(0)}{f(-1)} > e$
- C. $\dfrac{f(1)}{f(-1)} < e^2$
- D. $\dfrac{f(2)}{f(-1)} < e^3$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = \dfrac{f(x)}{e^x}$

我们有: $F'(x) = \dfrac{f'(x) - f(x)}{e^x} > 0, F(x)$ 在 $[-2,2]$ 上单调递增.

$$\begin{cases} F(-1) > F(-2) \\ F(0) > F(-1) \\ F(1) > F(-1) \\ F(2) > F(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{f(-2)}{f(-1)} < \dfrac{1}{e} \\ \dfrac{f(0)}{f(-1)} > e \\ \dfrac{f(1)}{f(-1)} > e^2 \\ \dfrac{f(2)}{f(-1)} > e^3 \end{cases}$$

2. 设 $D = \{(p,q)| \int_0^{+\infty} \dfrac{x^p|x-1|^q}{(x+1)\ln x \ln(x+2)} dx$收敛$\}$, 求 D 绕 q 轴旋转一周扫过的体积

解

我们可以找到函数可能的瑕点为 $x = 0, x = 1, x = +\infty$

(1). $x = 0$

原反常积分敛散性等价于: $\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{x^p}{\ln x} dx$

$$\begin{cases} p > -1, \text{反常积分收敛} \\ p \leq -1, \text{反常积分发散} \end{cases}$$

(2). $x = 1$

原反常积分敛散性等价于: $\int_{\frac{1}{2}}^1 \dfrac{|x-1|^q}{\ln x} dx$ 和 $\int_1^2 \dfrac{|x-1|^q}{\ln x} dx$

$$\begin{cases} q - 1 > -1, \text{反常积分收敛} \\ q - 1 \leq -1, \text{反常积分发散} \end{cases}$$

(3).$x = +\infty$

原反常积分敛散性等价于: $\int_2^{+\infty}\frac{x^{p+q-1}}{\ln^2 x}dx$

$$\begin{cases} p+q-1<-1, \text{反常积分收敛} \\ p+q-1=-1, \text{反常积分收敛} \\ p+q-1>-1, \text{反常积分发散} \end{cases}$$

综上所述, 我们得到 $\begin{cases} p>-1 \\ q>0 \\ p+q\le 0 \end{cases}$ 时, 原反常积分收敛.

我们可以得到: $D=\{(p,q)|-1<p<0, 0<q<-p\}$, 我们可以得到:

$$V=\frac{2\pi}{3}$$

3. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 下列哪些命题是 $\int_0^x f(t)dt$ 是以 T 为周期的周期函数的充分条件:

- A. $\int_0^T [f(t)-f(-t)]\,dt=0$
- B. $f(-x)=f(x)$
- C. $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ 收敛

解

我们设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, 已知函数 $f(x)$ 为周期函数,$F(x)$ 为在周期函数等价于:

$$F(x)\text{为周期函数} \Leftrightarrow \int_0^T f(x)dx=0$$

(1). $f(x)=1, F(x)=x$

(2). $f(-x)=-f(x) \Rightarrow f(x)\text{为奇函数} \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx=0$

(3). $\int_0^{+\infty} f(t)dt=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=0}^{n}\int_{iT}^{(i+1)T} f(x)dx=\lim\limits_{n\to+\infty} nA\text{收敛}$

我们得到: $\int_0^T f(x)dx=A=0$

4. 设随机变量 X 和 Y 独立同分布,X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}, & x>0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$, 令 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$, 求 $D(Z)$

解

August 27

1. 已知常数 $k\ge \ln 2-1$, 证明: $(x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)\ge 0$

解

我们构造辅助函数: $f(x)=x-\ln^2 x+2k\ln x-1, x>0$

我们有: $\begin{cases} f'(x)=\dfrac{x-2\ln x+2k}{x} \\ f(1)=0 \end{cases}$

我们不妨设 $g(x)=x-2\ln x+2k$,$g(x)$ 与 $f'(x)$ 同号,$g'(x)=\dfrac{x-2}{x}$

我们可以得到:

$$\begin{cases} x\in(0,2), g'(x)<0 \\ x\in(2,+\infty), g'(x)>0 \end{cases} \Rightarrow g(x)_{min}=g(2)=2-2\ln 2+2k\geq 0$$

我们得到: $g(x)\geq 0\Rightarrow f'(x)\geq 0\Rightarrow f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增

我们得到:

$$\begin{cases} x\in(0,1), f(x)<0, x-1<0 \\ x\in(1,+\infty), f(x)>0, x-1>0 \\ x=1, f(x)=0, x-1=0 \end{cases} \Rightarrow (x-1)f(x)\geq 0$$

综上所述, 我们得到: $(x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)\geq 0$

2. 求 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(n-1)^3}{n(n+1)}x^n$ 的和函数 $S(x)$

解

我们不妨设 $a_n=\dfrac{(n-1)^3}{n(n+1)}$, 我们可以得到:

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=1\Rightarrow R=\frac{1}{\rho}$$

我们得到幂级数的收敛区间为 $(-1,1)$, 当 $x=\pm1$ 时, 原级数发散, 因此原级数的收敛域为 $(-1,1)$

我们有: $a_n=\dfrac{(n-1)^3}{n(n+1)}=\dfrac{n^3-3n^3+3n-1}{n^2+n}=n-4+\dfrac{8}{n+1}-\dfrac{1}{n}$

原级数可以等价于:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n-1)^3}{n(n+1)}x^n &= \sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)x^n-5\sum_{n=1}^{+\infty}x^n+8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} \\ &= (\frac{x^2}{1-x})'-\frac{5x}{1-x}+\frac{8}{x}[-\ln(1-x)-x]+\ln(1-x) \\ &= \frac{1}{(1-x)^2}-9-\frac{5x}{1-x}-\frac{8\ln(1-x)}{x}+\ln(1-x) \end{aligned}$$

综上所述,$S(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}-9-\dfrac{5x}{1-x}-\dfrac{8\ln(1-x)}{x}+\ln(1-x),\ x\in(-1,1)$

3. 设 $f(x)=x[\frac{1}{x}]$, $[\frac{1}{x}]$ 表示不超过 $\frac{1}{x}$ 的最大整数, 判断 $f(x)$ 的间断点及其类型

解

我们发现 $f(x)$ 可能的间断点在 $x=0,\pm\frac{1}{n}$, 且 $x-1<[x]\le x\Rightarrow\frac{1}{x}-1<[\frac{1}{x}]<\frac{1}{x}$

(1). 当在 $x=0$ 处附近,$f(x)$ 在 $x=0$ 处无定义

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\in(1-x,1)\\ \lim\limits_{x\to0^-}f(x)\in(1,1-x)\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^-}f(x)=1$$

$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点

(2). 当 $x=\frac{1}{n}$ 处附近:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}^+}f(x)=1-\frac{1}{n}\\ \lim\limits_{x\to\frac{1}{n}^-}f(x)=1\end{cases}\Rightarrow f(x)\text{在}x=\frac{1}{n}\text{跳跃间断}$$

(3). 当 $x=-\frac{1}{n}$ 处附近:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\frac{1}{n}^+}f(x)=1+\frac{1}{n}\\ \lim\limits_{x\to-\frac{1}{n}^-}f(x)=1\end{cases}\Rightarrow f(x)\text{在}x=\frac{1}{n}\text{跳跃间断}$$

综上所述,$f(x)$ 有且仅有一个可去间断点 $x=0$, 有无数多个跳跃间断点 $x=\pm\frac{1}{n}$

4. 设 $f(x,y)$ 在全平面上有连续的偏导数, 且 $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0$, 证明: $f(x,y)$ 为常数.

解

我们构造辅助函数: $g(t)=f(tx,ty)$, 我们有:

$$\begin{cases}g'(t)=xf_1(tx,ty)+yf_2(tx,ty)\\ tg'(t)=txf_1(tx,ty)+tyf_2(tx,ty)\quad tg'(t)=0\\ x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$$

(1). 当 $t\neq0$, 我们可以得到: $g'(t)=0\Rightarrow g(t)=C$

(2). 当 $t\neq0$ 时, 我们由 $f(x,y)$ 在全平面上有连续的偏导数, 可以得到: $g'(t)$ 连续 $\Rightarrow g'(0)=0$

综上所述,$g'(t)=0\Rightarrow g(t)=C\Rightarrow g(0)=g(1)\Rightarrow f(0,0)=f(x,y)=C$,$f(x,y)$ 为常数.

August 28

1. 设函数 $f(x)$ 二阶可导,$f(0)=1$, $f'(0)=0$, 且对任意 $x\ge0$, 有 $f''(x)-5f'(x)+6f(x)\ge0$,

证明不等式 $f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x}$, $(x \geq 0)$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = e^{-3x}(f'(x) - 2f(x))$, 我们有:

$$\begin{cases} F'(x) = e^{-3x}(f''(x) - 5f'(x) + 6f(x)) \geq 0, x \geq 0 \\ F(x)\text{在}(0,+\infty)\text{上单调递增} \\ F(x) \geq F(0) = -2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) - 2f(x) + 2e^{3x} \geq 0$$

我们构造辅助函数: $G(x) = e^{-2x}(f(x) + 2e^{3x}), x \geq 0$, 我们有:

$$\begin{cases} G'(x) = e^{-2x}(f'(x) - 2f(x) + 2e^{3x}), x \geq 0 \\ G'(x) \geq 0 \\ G(x) \geq G(0) = 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x}$$

综上所述, 我们证明: $f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x}$, $(x \geq 0)$

2. 求 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n!}{(2n+1)!!(n+1)}$ 的和

解

我们构造幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)} x^{2n+2}$, 我们设该幂级数的和函数为 $S(x)$

我们可以得到原和式为 $2S(\dfrac{1}{\sqrt{2}})$, 我们需要求出幂级数的和函数 $S(x)$

我们不妨设 $a_n = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)}$, 我们可以得到:

$$\rho = \lim_{n \to +\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 1 \Rightarrow R^2 = 1$$

我们可以得到幂级数的收敛区间为 $(-1, 1)$, 我们对幂级数逐项求导可以得到:

$$S'(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1}$$

我们不妨设 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1}$, 我们有: $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!} x^{2n}$

我们对 $f'(x)$ 稍作变形:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} x^{2n} \\ &= x\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} x^{2n}\right]' \\ &= x\left[x\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} x^{2n-1}\right)\right]' \\ &= x\left[xf(x) + x^2\right]' \end{aligned}$$

我们得到: $f'(x)-\dfrac{x}{1-x^2}f(x)=\dfrac{2x^2}{1-x^2}$

我们可以解得: $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-x+C, f(0)=0\Rightarrow C=0$

我们得到: $S'(x)=\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-2x, S(0)=0\Rightarrow S(x)=(\arcsin x)^2-x^2$

我们得到原和式为: $I=2S(\dfrac{1}{\sqrt{2}})=\dfrac{\pi^2}{8}-1$

3. 计算 $\iint\limits_D\left[x(1-y^3)+y(1+x^3)\right]dxdy$, 其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 2x+2y\}$

解

我们根据轮换对称性, 可以得到:

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D\left[x(1-y^3)+y(1+x^3)\right]dxdy \\
&= \iint\limits_D\left[y(1-x^3)+x(1+y^3)\right]dxdy \\
&= \iint\limits_D(x+y)dxdy \\
&= \iint\limits_D(x-1+y-1)dxdy+\iint\limits_D 2dxdy \\
&= 2S_D \\
&= 4\pi
\end{aligned}$$

4. 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin nxdx$, 证明: $a_n=\dfrac{1}{2^{n+1}}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2^k}{k}$, $(n\geq 1)$

解

我们可以得到:

$$\begin{cases} a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin nxdx \\ a_{n-1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\sin(n-1)xdx \end{cases}\Rightarrow a_{n-1}=a_n-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\sin x\cos nxdx$$

我们利用分部积分对 a_n 进行简化:

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx dx \\ &= -\frac{1}{n}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x d\cos nx\right) \\ &= -\frac{1}{n}\left(\cos^n x \cos nx|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin x \cos nx dx\right) \\ &= \frac{1}{n} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin x \cos nx dx \end{aligned}$$

我们可以得到:

$$a_n = \frac{1}{n} + a_{n-1} - a_n \Rightarrow a_n - \frac{a_{n-1}}{2} = \frac{1}{2n}$$

我们有: $a_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x dx = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2} \\ a_n - \dfrac{a_{n-1}}{2} = \dfrac{1}{2n} \end{cases} \Rightarrow \text{数列}\{a_n\}\text{唯一}$$

我们不妨假设: $a_n = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}$, 下面用数学归纳法证明:

(1). 当 $n = 1$ 时,$a_1 = \frac{1}{2}$

(2). 当 $n = k$ 时, 我们有: $a_k = \frac{1}{2^{k+1}}\sum_{i=1}^{k}\frac{2^i}{i}$

$$a_{k+1} = \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2}a_k = \frac{2^{k+1}}{2^{k+2}(k+1)} + \frac{1}{2^{k+2}}\sum_{i=1}^{k}\frac{2^i}{i} = \frac{1}{2^{k+2}}\sum_{i=1}^{k+1}\frac{2^i}{i}$$

综上所述, 我们得到: $a_n = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}$, $(n \geq 1)$

5. 设三元二次型 $f = x^T Ax$ 正定, 其中 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$,A 为实对称矩阵, 则下列说法不正确的是:

- A. 仅在 $x = 0$ 处 f 取得最小值
- B. 齐次方程组 $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$ 只有零解

- C. 二阶偏导数矩阵

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{3\times3} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} \text{正定}$$

- D. 存在三维非零列向量 α, 使得 $A = \alpha\alpha^T$, 从而 $f = (\alpha^T x)^2$

解

我们不妨假设 $f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$, 我们可以得到:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(1). 我们由 f 正定, 可以得到: $f \geq 0$, 当且仅当 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 时等号成立.

(2)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3 = 0 \\ 2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 + 2a_{23}x_3 = 0 \\ 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + 2a_{33}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{12} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{13} & 2a_{23} & 2a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2Ax = 0$$

矩阵 A 为正定矩阵 $\Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ 原方程组只有零解.

(3). 我们可以得到:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{3\times3} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{12} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{13} & 2a_{23} & 2a_{33} \end{pmatrix} = 2A\text{正定}$$

(4)$|A| \neq 0 \Rightarrow rank(A) = 3$, 假设 $A = \alpha\alpha^T$,$rank(A) = 1$ 矛盾!!!

August 29

1. 证明不等式:

$$\left|\frac{\sin x - \sin y}{x - y} - \cos y\right| \leq \frac{1}{2}|x - y|, \ (x \neq y)$$

解

我们利用带拉格朗日余项的泰勒公式将 $f(x)=\sin x$ 进行展开:

$$\sin x=\sin y+(x-y)\cos y+\frac{(x-y)^2}{2}\sin\xi,\xi\text{位于}x,y\text{之间}$$

我们可以得到:

$$\begin{aligned}|\frac{\sin x-\sin y}{x-y}-\cos y| &= |\frac{\sin\xi}{2}(x-y)| \\ &\leq \frac{1}{2}|x-y|\end{aligned}$$

2. 求 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2+3n+4}{2^n(n+1)!}x^{2n}$ 的和函数 $S(x)$

解

我们可以将原级数化为: $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2+3n+4}{(n+1)!}(\frac{x^2}{2})^n$

我们设 $a_n=\frac{n^2+3n+4}{(n+1)!}$, 我们可以得到:

$$a_n=\frac{1}{(n-1)!}+\frac{2}{n!}+\frac{2}{(n+1)!}$$

我们先求出收敛半径:

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=0\Rightarrow R=\infty$$

原级数可以化为:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2+3n+4}{2^n(n+1)!}x^{2n} &= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}(\frac{x^2}{2})^n+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2}{n!}(\frac{x^2}{2})^n+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2}{(n+1)!}(\frac{x^2}{2})^n \\ &= \frac{x^2}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}(\frac{x^2}{2})^n+2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!}(\frac{x^2}{2})^n+\frac{4}{x^2}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n!}(\frac{x^2}{2})^n \\ &= \frac{x^2}{2}\left[e^{\frac{x^2}{2}}-1\right]+2\left[e^{\frac{x^2}{2}}-1-\frac{x^2}{2}\right]+\frac{4}{x^2}\left[e^{\frac{x^2}{2}}-1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}\right] \\ &= \frac{x^2e^{\frac{x^2}{2}}}{2}+2e^{\frac{x^2}{2}}+\frac{4e^{\frac{x^2}{2}}}{x^2}-2x^2-4-\frac{4}{x^2}\end{aligned}$$

综上所述, 我们得到: $S(x)=\begin{cases}\frac{x^2e^{\frac{x^2}{2}}}{2}+2e^{\frac{x^2}{2}}+\frac{4e^{\frac{x^2}{2}}}{x^2}-2x^2-4-\frac{4}{x^2},\ x\neq 0\\ 0,\ x=0\end{cases}$

3. 设线性方程组 $Ax=\alpha$ 有解, $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ 无解, 则下列结论正确的是:

- A. $r(B,\beta)=r(B)+1$

- B. $r\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix} < r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + 1$
- C. $r\left[B^T(B,\beta)\right] > r(B^T B)$
- D. $r\left[(A^T,B^T)\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix}\right] = r\left[(A^T,B^T)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right]$

解

(1). 方程组 $Ax=\alpha$ 与 $Bx=\beta$ 无公共解,$r(B,\beta)$ 和 $r(B)+1$ 可能相等, 也可能不等

(2). 方程组 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ 无解 $\Rightarrow r\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + 1$

(3). $\begin{cases} r\left[B^T(B,\beta)\right] \le r(B^T) \\ r(B^T) = r(B) = r(BB^T) = r(B^T B) \\ r\left[B^T(B,\beta)\right] = r(B^T B, B^T\beta) \ge r(B^T B) \end{cases} \Rightarrow r\left[B^T(B,\beta)\right] = r(B^T B)$

(4).

$$\begin{cases} r\left[(A^T,B^T)\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix}\right] \ge r\left[(A^T,B^T)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right] \\ r\left[(A^T,B^T)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right] = r(A^T,B^T) \\ r(A^T,B^T) \ge r\left[(A^T,B^T)\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix}\right] \end{cases} \Rightarrow r\left[(A^T,B^T)\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix}\right] = r\left[(A^T,B^T)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right]$$

4. 已知 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^{\ln(3\cos x)} - 3^{\ln x}}{x^k \ln x} = c$, $(c \neq 0)$, 求 c、k

解

原极限可以化为:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\ln(3\cos x)}-3^{\ln x}}{x^k\ln x}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\ln x\ln(3\cos x)}-e^{\ln 3\ln x}}{x^k\ln x}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\ln 3\ln x}[e^{\ln(\cos x)\ln x}-1]}{x^k\ln x}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\ln 3}[\ln x\ln(\cos x)]}{x^k\ln x}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{-x^{2+\ln 3}}{2x^k}\\
&= c
\end{aligned}$$

我们可以得到: $\begin{cases} k=2+\ln 3\\ c=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

5. 设 $f(x,y)$ 在 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$ 内具有连续的偏导数, 且在边界上取值为 0, 证明:

$$f(0,0)=\lim_{\xi\to 0^+}\frac{-1}{2\pi}\iint_{D_1}\frac{x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}}{x^2+y^2}dxdy,\ (D_1=\{(x,y)|\xi^2\le x^2+y^2\le 1\})$$

解

我们利用极坐标代换:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\Rightarrow f(x,y)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

我们得到: $r\dfrac{\partial f}{\partial r}=x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}$

原极限可以化为:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{\xi\to 0^+}\frac{-1}{2\pi}\iint_{D_1}\frac{\partial f}{\partial r}drd\theta\\
&= \lim_{\xi\to 0^+}\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_\xi^1\frac{\partial f}{\partial r}dr\\
&= \lim_{\xi\to 0^+}\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(\cos\theta,\sin\theta)-f(\xi\cos\theta,\xi\sin\theta)]d\theta\\
&= \lim_{\xi\to 0^+}\frac{-1}{2\pi}(-2\pi)f(\xi\cos\alpha,\xi\sin\alpha),\alpha\in(0,2\pi)(\text{积分中值定理})\\
&= f(0,0)
\end{aligned}$$

August 30

1. 设 $f(x)$ 二阶可导,$f(x)>0,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=1$, 且 $f(x)f''(x)>[f'(x)]^2$, 下列命题一定成

立的是:

- A. $e^{-x}f(x) \geq 1$
- B. $e^{-x}f(x) < 1$
- C. $\dfrac{\ln f(x)}{x} < 1$
- D. $\dfrac{\ln f(x)}{x} > 1$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} = 1 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$$ 我们构造辅助函数: $F(x) = \ln f(x)$, 我们有:

$$\begin{cases} F'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \\ F''(x) = \dfrac{f''(x)f(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2} > 0 \\ F(0) = 0 \\ F'(0) = 1 \end{cases}$$

我们将 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处进行泰勒展开得到:

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(\xi)}{2}x^2,\ F''(x) > 0 \Rightarrow F(x) \geq x \Rightarrow e^{-x}f(x) \geq 1$$

2. 求 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^3 x^n$ 的和函数 $S(x)$

解

首先求收敛域, 不妨设 $a_n = n^3$, 我们有:

$$\rho = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 \Rightarrow R = 1$$

当 $x = \pm 1$ 时, 原幂级数发散, 因此幂级数的收敛域为 $(-1, 1)$

我们已知幂级数: $G(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^n = \dfrac{x}{1-x}, x \in (-1, 1)$

我们可以得到:

$$\begin{cases} G'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \dfrac{1}{(x-1)^2} \\ xG'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^n = \dfrac{x}{(x-1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [xG'(x)]' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2x^{n-1} = \dfrac{1+x}{(1-x)^3} \\ x[xG'(x)]' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2x^n = \dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \{x[xG'(x)]'\}' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^3x^{n-1} = \dfrac{x}{} \\ S(x) = x\{x[xG'(x)]'\}' = \dfrac{x^3+}{(x} \end{cases}$$

综上所述, 原幂级数的和函数 $S(x) = \dfrac{x^3+4x^2+x}{(x-1)^4}$

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+2)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+\sin x}}\right]$

解

原极限可化为:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to+\infty} 2(x+2)^{\frac{1}{x}} + \lim_{x\to+\infty} x\left[(x+2)^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{x+\sin x}}\right] \\
&= 2 + \lim_{x\to+\infty} x\left[e^{\frac{\ln(x+2)}{x}} - e^{\frac{\ln x}{x+\sin x}}\right] \\
&= 2 + \lim_{x\to+\infty} e^{\xi} x\left[\frac{\ln(x+2)}{x} - \frac{\ln x}{x+\sin x}\right] (\text{拉格朗日中值定理}) \\
&= 2
\end{aligned}
$$

August 31

1. 设 A 为 n 阶方阵,β 为 n 维非零列向量, 且 $r\begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} < r\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix}$, 下列说法正确的是:

- A. $\begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ 必有非零解
- B. $\begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ 只有零解
- C. 方程组 $Ax = \beta$ 必无解
- D. 方程组 $Ax = \beta$ 必有解

解

$$\begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (A, \beta)v = 0$$

我们由: $r\begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} < r\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix}$ 得到:

(1). 当 $r\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix} = n+1$ 时,$(A,\beta)v = 0$ 只有零解 $\Rightarrow \begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ 只有零解

(2). 当 $r\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix} < n+1$ 时,$\begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ 必有非零解

以上两种情况我们都有: $r\begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} < r\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix} < r\begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} + 1 \Rightarrow r(A,\beta) = r(A)$, 我们可以得到:
方程组 $Ax = \beta$ 一定有解

2. 设 $X \sim N(0,1)$, 求 $E(X^4 e^X)$

解

3. 设 $f(x)$ 为非负连续函数, 且当 $x>0$ 时, 有 $\int_0^x f(x)f(x-t)dt=x^3$, 求 $f(x)$

解

我们不妨设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt, F(0)=0$, 上述条件可化为:

$$\int_0^x f(x)f(x-t)dt=x^3 \Rightarrow f(x)\int_0^x f(t)dt=x^3 \Rightarrow F(x)F'(x)=x^3 \Rightarrow F(x)=\frac{x^2}{\sqrt{2}}$$

$$f(x)=F'(x)=\sqrt{2}x$$

4. $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+2}a_{n+1}+\dfrac{3}{(n+2)(n+1)}a_n(n\geq 0)$,$a_0=0,a_1=1$, 已知 $a_3>a_4>a_5$, 求 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$

解

我们利用数学归纳法证明 $\{a_n\}(n\geq 3)$ 单调递减:

(1). 当 $n=3,4,5$,$a_3>a_4>a_5$

(2). 假设 $n=k(k\geq 3)$ 时,$a_{k+1}<a_k$, 我们有:

$$a_{k+2}=\frac{2}{k+2}a_{k+1}+\frac{3}{(k+2)(k+1)}a_k<\frac{2}{k+1}a_k+\frac{3}{(k+1)k}a_{k-1}=a_{k+1}$$

我们可以得到 $\{a_n\}(n\geq 3)$ 单调递减,$a_n>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 存在

我们假设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=A$ 存在, 我们有:

$$A=A\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n+2}+\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{(n+2)(n+1)}\Rightarrow A=0\Rightarrow \text{收敛域}(-\infty,+\infty)$$

我们可以得到:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}=2(n+1)a_{n+1}+3a_n\Rightarrow (a_{n+2}x^{n+2})''=2(a_{n+1}x^{n+1})'+3a_nx^n$$

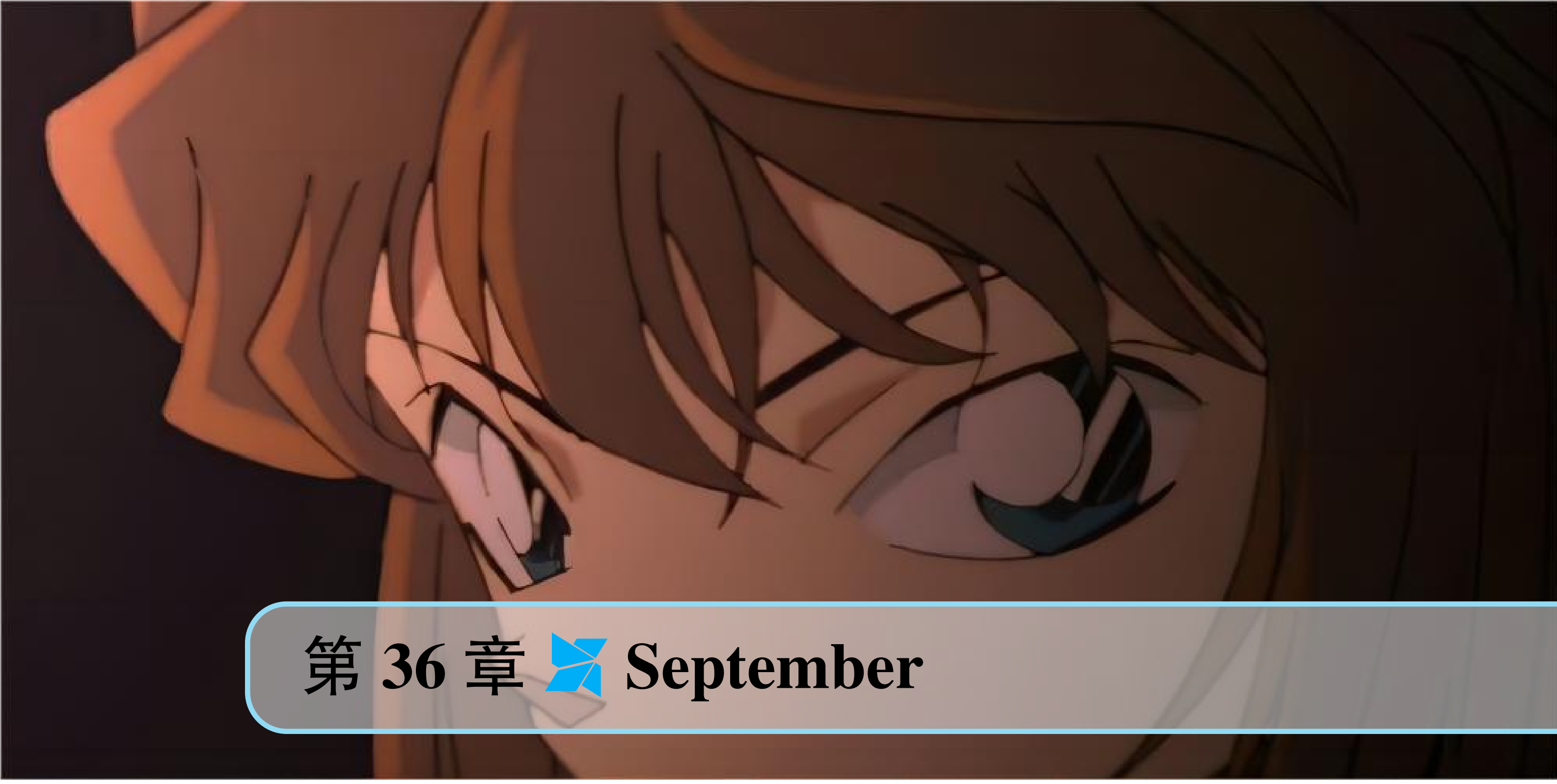
我们得到:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_{n+2}x^{n+2})''=2\sum_{n=0}^{+\infty}(a_{n+1}x^{n+1})'+3\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$$

我们进一步得到:

$$[S(x)-a_0-a_1x]''=2[S(x)-a_0]'+3S(x)\Rightarrow S''(x)=2S'(x)+3S(x),\begin{cases}S(0)=a_0=0\\ S'(0)=a_1=1\end{cases}$$

我们可以得到: $S(x)=\dfrac{e^{3x}-e^{-x}}{4}$



第 36 章 September

36.1 Week I

September 1

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=2,\int_0^1 f(x)dx=1$.

(1). 证明: $\exists\xi\in(0,1)$, $s.t.f'(\xi)=f(\xi)-2\xi+2$

(2). 证明: $\exists\eta\in(0,1)$, $s.t.f''(\eta)=0$

(3). 证明: $\exists\zeta\in(0,1)$, $s.t.\int_0^\zeta f(t)dt+\zeta f(\zeta)=2\zeta$

(4). 证明: $\exists\mu\in(0,1)$, $s.t.\mu f(\mu)=2\int_0^\mu f(t)dt$

解

我们由题意可得:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=2\\ \int_0^1 f(x)dx=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(0)=0\\ f'(0)=2\\ \exists c\in(0,1),\ s.t.f(c)=1\end{cases}$$

(1) 我们构造辅助函数: $F(x)=\dfrac{f(x)-2x}{e^x}$, 我们可以得到:

$$\begin{cases}F(0)=0\\ \int_0^1[f(x)-2x]=0\\ F'(x)=e^{-x}[f'(x)-2-f(x)+2x]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F(0)=0\\ \exists c\in(0,1),\ s.t.F(c)=0(\text{积分中值定理})\end{cases}$$

我们对 $F(x)$ 在 $(0,c)$ 上使用罗尔定理可以得到:

$$\exists\xi\in(0,c)\subset(0,1),\ s.t.F'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=f(\xi)-2\xi+2$$

(2). 我们构造辅助函数: $G(x)=f(x)-2x$, 我们可以得到:

$$\begin{cases} G(0)=0 \\ G'(0)=0 \\ \int_0^1 G(x)dx=0 \Rightarrow \exists a\in(0,1), s.t. G(a)=0 \end{cases} \Rightarrow G(0)=G(d)=0$$

我们对 $G(x)$ 在 $(0,a)$ 上使用罗尔定理得到:

$$\exists b\in(0,a), s.t. G'(b)=0$$

我们对 $G'(x)$ 在 $(0,b)$ 上使用罗尔定理得到:

$$\exists \eta\in(0,b), s.t. G''(\eta)=0 \Rightarrow f''(\eta)=0$$

(3). 我们构造辅助函数: $H(x)=x\int_0^x f(t)dt-x^2$, 我们有:

$$\begin{cases} H(0)=H(1)=0 \\ H'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-2x \end{cases}$$

我们对 $H(x)$ 在 $(0,1)$ 上使用罗尔定理可以得到:

$$\exists \zeta\in(0,1),\ s.t. H'(\zeta)=0 \Rightarrow \int_0^\zeta f(t)dt+\zeta f(\zeta)=2\zeta$$

(4). 我们构造辅助函数: $P(x)=\begin{cases} \dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}, x\in(0,1] \\ 1, x=0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^+} P(x)=1$

我们可以得到: $P(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,$(0,1)$ 上可导, 我们还可以得到:

$$\begin{cases} P(0)=P(1)=1 \\ P'(x)=\dfrac{xf(x)-2\int_0^x f(t)dt}{x^3} \end{cases}$$

我们对 $P(x)$ 在 $(0,1)$ 上使用罗尔定理可以得到:

$$\exists \mu\in(0,1),\ s.t. P'(\mu)=0 \Rightarrow \mu f(\mu)=2\int_0^\mu f(t)dt$$

2. 设 $I=\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos x^2dx$,$J=\int_0^{\sqrt{\pi}}\cos x^2dx$,$K=\int_0^\pi \sqrt{x}\cos xdx$, 比较 I,J,K 的大小

解

我们有: $I=\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos x^2dx=\dfrac{\sin x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{\pi}}=0$

$$J=\int_0^{\sqrt{\pi}}\cos x^2dx=\int_0^\pi \frac{\cos t}{2\sqrt{t}}dt>0$$

$$K=\int_0^\pi \sqrt{x}\cos xdx<0$$

综上所述, 我们可以得到: $K<I<J$

3. 已知曲线 $L: y=x^2-1(-1\le x\le 2)$, 方向从 $A(-1,0)$ 到 $B(2,3)$, 求曲线积分 $\int_L \dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$

解

原曲线积分可化为:

$$\begin{aligned}
\int_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} &= \int_{-1}^{2}\frac{x^2+1}{x^2+(x^2-1)^2}dx\\
&= \int_{-1}^{2}\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx\\
&= \int_{-1}^{2}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}-1}dx\\
&= \int_{-1}^{2}\frac{1}{1+(x-\frac{1}{x})^2}d(x-\frac{1}{x})\\
&= \int_{-1}^{0^-}\frac{1}{1+(x-\frac{1}{x})^2}d(x-\frac{1}{x})+\int_{0^+}^{2}\frac{1}{1+(x-\frac{1}{x})^2}d(x-\frac{1}{x})\\
&= \arctan(x-\frac{1}{x})|_{x=-1}^{x=0^-}+\arctan(x-\frac{1}{x})|_{x=0^+}^{x=2}\\
&= \arctan\frac{3}{2}+\pi
\end{aligned}$$

4. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}\ (x>0)$, 求 $\int f(x)dx$

解

我们可以得到:

$$f(x)=\begin{cases}1, x\in(0,1]\\ x, x\in(1,2]\\ \dfrac{x^2}{2}, x\in(2,+\infty)\end{cases}\Rightarrow \int f(x)=\begin{cases}x+C,\ x\in(0,1]\\ \dfrac{x^2+1}{2}+C,\ x\in(1,2]\\ \dfrac{x^3+7}{6}+C,\ x\in(2,+\infty)\end{cases}$$

September 2

1. 设 $f(x)$ 连续,$f(x+2)-f(x)=\sin x,\int_0^2 f(x)dx=0$, 求 $\int_1^3 f(x)dx$

解

我们可以得到:

$$\begin{aligned}
\int_1^3 f(x)dx &= \int_1^3 f(x)dx - \int_0^2 f(x)dx \\
&= \int_2^3 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \\
&= \int_0^1 f(x+2)dx - \int_0^1 f(x)dx \\
&= \int_0^1 [f(x+2) - f(x)]dx \\
&= \int_0^1 \sin x dx \\
&= 1 - \cos 1
\end{aligned}$$

注

我们构造辅助函数: $F(x) = \int_x^{x+2} f(t)dt$, 我们有:

$$\begin{cases} F'(x) = f(x+2) - f(x) = \sin x \\ F(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x) = -\cos x + 1 \\ F(1) = \int_1^3 f(x)dx = 1 - \cos 1 \end{cases}$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0) = 1, f(1) = 0$

(1). 证明: $\exists \xi_1, \xi_2 \in (0,1)(\xi_1 \neq \xi_2),\ s.t.\ f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = -2$

(2). 证明: $\exists \eta, \zeta \in (0,1)(\eta \neq \zeta),\ s.t.\ f'(\eta)f'(\zeta) = 1$

解

(1). 我们取 $c = f(\frac{1}{2})$, 我们在 $(0, \dfrac{1}{2})$ 和 $(\dfrac{1}{2}, 1)$ 上分别对 $f(x)$ 使用拉格朗日中值定理可以得到:

$$\begin{cases} \exists \xi_1 \in (0, \frac{1}{2}),\ s.t. \dfrac{c-1}{\frac{1}{2}} = f'(\xi_1) \\ \exists \xi_2 \in (\frac{1}{2}, 1),\ s.t. \dfrac{-c}{\frac{1}{2}} = f'(\xi_2) \end{cases} \Rightarrow f(\xi_1) + f(\xi_2) = -2$$

(2). 我们构造辅助函数: $F(x) = f(x) - x$, 我们有:

$$\begin{cases} F(0) = f(0) = 1 > 0 \\ F(1) = f(1) - 1 = -1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{根据零点定理}: \exists c \in (0,1),\ s.t. F(c) = f(c) - c = 0$$

我们对 $f(x)$ 分别在 $(0,c)$ 和 $(c,1)$ 上使用拉格朗日中值定理得到:

$$\begin{cases} \exists \eta \in (0,c), s.t. \dfrac{f(c)-1}{c} = f'(\eta) \\ \exists \zeta \in (c,1), s.t. \dfrac{-f(c)}{1-c} = f'(\zeta) \end{cases} \Rightarrow f'(\eta)f'(\zeta) = \frac{c-1}{c} \cdot \frac{-c}{1-c} = 1$$

3. 设 $f(x)=\int_{-1}^{x} t\cos t dt, x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 则曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的图形面积为:

- A. $2\int_0^1 x\sin x dx$
- B. $2\int_0^1 x^2\sin x dx$
- C. $2\int_0^1 x\cos x dx$
- D. $2\int_0^1 x^2\cos x dx$

解

我们可以得到: $f(x)$ 为偶函数, 且 $f'(x)=x\cos x$, 我们可以得到:

$$\begin{cases} x\in(-\frac{\pi}{2}), f'(x)<0 \\ x\in(0,\frac{\pi}{2}), f'(x)>0 \end{cases} \Rightarrow f(x)\text{在}(-\frac{\pi}{2},0)\text{上单调递减, 在}(0,\frac{\pi}{2})\text{上单调递增}$$

我们有: $f(1)=f(-1)=0$, 我们得到:

$$\begin{aligned} S &= -2\int_0^1 f(x)dx \\ &= 2\int_0^1 xf'(x)dx \\ &= 2\int_0^1 x^2\cos x dx \end{aligned}$$

4. 设 Γ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线, 从 z 轴正向往负向看去为逆时针, 计算积分 $\oint_\Gamma xzdx+xdy+\frac{y^2}{2}dz$

解

原曲线积分可以化为:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi}\left[-\sin\theta\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta)+\cos^2\theta+\frac{\sin^2\theta}{2}(\cos\theta-\sin\theta)\right]d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos\theta d\theta-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^3\theta d\theta \\ &= \pi \end{aligned}$$

5. $\int\frac{1}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$

解

原不定积分可以化为:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{(\sin x+\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cos x)}dx \\
&= \int \frac{d(\sin x-\cos x)}{(1+2\sin x+\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cos x)} \\
&= \int \frac{2d(\sin x-\cos x)}{[2-(\sin x-\cos x)^2][1+(\sin x-\cos x)^2]} \\
&= \int \frac{2du}{(2-u^2)(1+u^2)} \\
&= \frac{2}{3}[\int \frac{1}{2-u^2}du+\int \frac{1}{1+u^2}du] \\
&= \frac{2}{3}[\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u}|+\arctan u] \\
&= \frac{1}{3\sqrt{2}}\ln|\frac{1+\sin(x-\frac{\pi}{4})}{1-\sin(x-\frac{\pi}{4})}|+\frac{2}{3}\arctan(\sin x-\cos x)+C
\end{aligned}
$$

6. 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t dt$, 求 $F(x)$

解

我们不妨设 $f(x)=e^{\sin x}\sin x$,$f(x)$ 为周期函数, 我们可以得到:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t dt \\
&= \int_0^{2\pi} e^{\sin x}\sin x dx \\
&= \int_0^{\pi} e^{\sin x}\sin x dx+\int_{\pi}^{2\pi} e^{\sin x}\sin x dx \\
&= \int_0^{\pi} e^{\sin x}\sin x dx-\int_0^{\pi} e^{-\sin x}\sin x dx \\
&= \int_0^{\pi} (e^{\sin x}-e^{-\sin x})\sin x dx>0
\end{aligned}
$$

我们可以得到: $F(x)=C>0$

September 3

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $I=\int_0^1 f(x)dx\neq 0$, 证明: $\exists\xi,\eta\in(0,1)(\xi\neq\eta), s.t.\frac{1}{f(\xi)}+\frac{1}{f(\eta)}=\frac{2}{I}$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=\int_0^x f(t)dt$,$F(0)=0, F(1)=I\neq 0$

我们由介值定理可以得到:

$$\exists c \in (0,1), s.t.\ F(c) = \frac{I}{2}$$

我们对 $F(x)$ 在区间 $(0,c)$ 和 $(c,1)$ 上使用拉格朗日中值定理得到:

$$\begin{cases} \exists \xi \in (0,c),\ s.t.\dfrac{F(c)}{c} = F'(\xi) = f(\xi) \\ \exists \eta \in (c,1).\ s.t.\dfrac{F(1)-F(c)}{1-c} = F'(\eta) = f(\eta) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{f(\xi)} + \frac{1}{f(\eta)} = \frac{2c}{I} + \frac{2(1-c)}{I} = \frac{I}{2}$$

综上所述, 我们得到: $\exists \xi,\eta \in (0,1)(\xi \neq \eta), s.t.\dfrac{1}{f(\xi)} + \dfrac{1}{f(\eta)} = \dfrac{2}{I}$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义, 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内可导,$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 存在,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分条件为:

- A $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在
- B $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}$ 存在
- C $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续
- D $\int_0^x f(t)dt$ 在点 $x=0$ 处可导

解

我们可以得到:

$$\begin{cases} f(x)\text{在}(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\text{上可导} \\ \lim\limits_{x\to 0} f'(x)\text{存在} \end{cases}$$

(1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在

(2). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}$ 存在 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 存在

(3). $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} f'(x) = k \\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} f'(x) \end{cases} \Rightarrow f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} f'(x) = k$$

(4). $\int_0^x f(t)dt$ 在点 $x=0$ 处可导 $\Rightarrow f(0)$ 存在

September 4

1. 求不定积分 $\int x\arctan x \cdot \ln(1+x^2)dx$

解

原不定积分可化为:

$$
\begin{aligned}
I &= \int x\arctan x\cdot\ln(1+x^2)dx\\
&= \frac{1}{2}\int \arctan x\cdot\ln(1+x^2)d(x^2+1)\\
&= \frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\int\ln(x^2+1)dx-\int x\arctan x dx\\
&= \frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}x\ln(x^2+1)+x-\arctan x-\frac{1}{2}x^2\arctan x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\arctan x\\
&= \frac{(x^2+1)\ln(x^2+1)-x^2-3}{2}\arctan x-\frac{x\ln(x^2+1)}{2}+\frac{3}{2}x+C
\end{aligned}
$$

2. 设 $\Gamma:=\begin{cases}x=2\sqrt{1-y^2}\\ z=x+y\end{cases}$, 从 z 轴正向往负向看去为逆时针, 计算积分 $\int_\Gamma \dfrac{ydx+zdy+xdz}{x^2+y^2+z^2}$

解

原曲线积分可化为:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\cos^2\theta-2\sin^2\theta-3\cos\theta\sin\theta}{2\sin^2\theta+8\cos^2\theta+4\cos\theta\sin\theta}d\theta\\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+3\cos2\theta-\frac{3}{2}\sin2\theta}{3\cos2\theta+2\sin\theta+5}d\theta\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+3\cos x-\frac{3}{2}\sin x}{3\cos x+2\sin x+5}dx\\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{6}{13}dx+\frac{11}{26}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2\cos x-3\sin x}{3\cos x+2\sin x+5}-\frac{17}{13}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{3\cos x+2\sin x+5}dx\right]\\
&= \frac{6}{13}\pi+0-\frac{17\sqrt{3}\pi}{39}\\
&= \frac{(36-17\sqrt{3})\pi}{78}
\end{aligned}
$$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是以 T 为最小正周期的连续奇函数, 下列函数中不是周期函数的个数:

- (1). $\int_a^x f(t)dt$
- (2). $\int_{-x}^a f(t)dt$
- (3). $\int_{-x}^x tf(t)dt$
- (4). $\int_{-x}^x t^2f(t)dt$

解

$f(x)$ 是周期函数, 且为奇函数 $\Rightarrow \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx=0$

(1). 我们不妨设 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, 我们有:

$$\begin{cases} F(x+T)=\int_a^{x+T} f(t)dt \\ F(x+T)-F(x)=\int_x^{x+T} f(t)dt=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx=0 \end{cases} \Rightarrow F(x+T)=F(x) \Rightarrow F(x)\text{为周期函数}$$

(2). 我们不妨设 $F(x)=\int_{-x}^a f(t)dt$, 我们有:

$$\begin{cases} F(x+T)=\int_{-x-T}^{a} f(t)dt \\ F(x+T)-F(x)=\int_{-x-T}^{-x} f(t)dt=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx=0 \end{cases} \Rightarrow F(x+T)=F(x) \Rightarrow F(x)\text{为周期函数}$$

(3). 我们不妨设 $F(x)=\int_{-x}^x tf(t)dt$, 我们有:

$$\begin{cases} F(x+T)=\int_{-x-T}^{x+T} tf(t)dt \\ F(x+T)-F(x)=2\int_x^{x+T} tf(t)dt\neq 0 \end{cases} \Rightarrow F(x+T)\neq F(x) \Rightarrow F(x)\text{不是周期函数}$$

(4). $\int_{-x}^x t^2 f(t)dt\equiv 0 \Rightarrow F(x)$是周期函数

综上所述, 上述函数只有 (3) 不是周期函数,(1)(2)(4) 均为周期函数.

4. 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布,$X\sim N(1,3^2),Y\sim N(0,4^2)$, 且满足 $\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$,$Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$

(1). 求 $E(Z)$ 与 $D(Z)$

(2). 求 ρ_{XZ}

(3). 证明 X 与 Z 是否独立

解

September 5

1. 计算二重积分: $\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{xy}}dxdy$,$D:\{(x,y)|(\frac{x}{2}+\frac{y}{4})^2\leq\frac{x}{6},x,y\geq 0\}$

解 原二重积分可化为:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{2}{3}} dx\int_0^{4\sqrt{\frac{x}{6}}-2x}\frac{1}{\sqrt{xy}}dy \\ &= 2\int_0^{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{4\sqrt{\frac{x}{6}}-2x}dx \\ &= 8\sqrt{6}\int_0^{\frac{1}{3}}\sqrt{t-3t^2}dt \\ &= \frac{24\sqrt{2}}{36}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{3} \end{aligned}$$

注

我们不妨设 $\sqrt{x}=m, \sqrt{y}=n$, 我们有: $\dfrac{(m-\frac{1}{\sqrt{6}})^2}{2}+\dfrac{n^2}{4}=\dfrac{1}{12}(m,n>0)$.
我们根据雅可比行列式, 得到:

$$dxdy=4mndmdn \Rightarrow \iint\limits_{D} \frac{1}{\sqrt{xy}}dxdy=\iint\limits_{D'} 4dmdn$$

我们得到原二重积分与椭圆面积之间的关系: $I=2S_{D'}=2ab\pi=2\pi\times\dfrac{1}{\sqrt{6}}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}\pi}{3}$

2. $\int \dfrac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}dx$

解

我们令 $\sqrt{x-1}=t, x=t^2+1, dx=2tdt$, 原不定积分可化为:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2t^2\arctan t}{t^2+1}dt \\ &= 2\int \arctan t dt-2\int \frac{\arctan t}{1+t^2}dt \\ &= 2t\arctan t-\ln|1+t^2|-(\arctan t)^2 \\ &= 2\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}-\ln|x|-(\arctan\sqrt{x-1})^2+C \end{aligned}$$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足 $f(x)=f(x-\pi)+\sin x$, 且 $f(x)=x, x\in[0,\pi)$, 求 $\int_{\pi}^{3\pi} f(x)dx$

解

我们由: $\begin{cases} f(x)=f(x-\pi)+\sin x \\ f(x)=x, x\in[0,\pi) \end{cases}$ 可以得到:

$$f(x)=x+\sin x-\pi, x\in[\pi,2\pi)$$

我们有:

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{3\pi} f(x)dx &= \int_{\pi}^{3\pi} [f(x-\pi)+\sin x]dx \\ &= \int_{\pi}^{3\pi} f(x-\pi)dx \\ &= \int_{0}^{2\pi} f(x)dx \\ &= \int_{0}^{\pi} xdx + \int_{\pi}^{2\pi} [x+\sin x-\pi]dx \\ &= \pi^2-2\end{aligned}$$

September 6

1. $\int \dfrac{\cos^3 x - 2\cos x}{1+\sin^2 x+\sin^4 x}dx$

解

我们令 $t=\sin x$, 我们可以得到原不定积分为:

$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{t^2+1}{1+t^2+t^4}dt \\ &= -\int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{1+t^2+\frac{1}{t^2}}dt \\ &= -\int \frac{d(t-\frac{1}{t})}{(t-\frac{1}{t})^2+3} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{t-\frac{1}{t}}{\sqrt{3}})+C \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}\sin x})dx+C \end{aligned}$$

2. 下列积分中, 与积分 $I=\int_0^1 \frac{1}{2}xe^{-\sqrt{x}}dx$ 值最接近的是:

- A. $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$
- B. $\int_0^1 xe^{-x}dx$
- C. $\int_0^1 x^2e^{-x}dx$
- D. $\int_0^1 x^4e^{-x}dx$

解

我们可以得到:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{1}{2} x e^{-\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 t^3 e^{-t} dt \\ &= \int_0^1 x^3 e^{-x} dx \end{aligned}$$

我们可以得到:

$$\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx > \int_0^1 x e^{-x} dx > \int_0^1 x^2 e^{-x} dx > \int_0^1 x^3 e^{-x} dx > \int_0^1 x^4 e^{-x} dx$$

我们只需要比较 $x^2 - x^3$ 和 $x^3 - x^4$ 的大小, 我们有: $x^2 - x^3 > x^3 - x^4$, 我们得到最接近 I 的是 $\int_0^1 x^4 e^{-x} dx$

3. $f(x) = \dfrac{(\sqrt[n]{x} - 1)^n}{x + 1}$, 求 $f^{(n)}(1)(n \geq 2)$

解

我们有:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{(x-1)^n} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt[n]{x} - 1)^n}{(x-1)^n} = \frac{1}{2n^n}$$

我们利用泰勒展开式:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{(x-1)^n} = \lim_{x \to 1} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-1)^k + o[(x-1)^n]}{(x-1)^n}$$

上述极限存在, 我们可以得到: $f^{(k)} = 0(k = 1, 2, \cdots, n-1)$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{(x-1)^n} = \frac{f^{(n)}(1)}{n!} \Rightarrow f^{(n)}(1) = \frac{n!}{2n^n}$$

4. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶导数连续,$f(1) = f'(1) = 0$,$D = \{(x, y)|0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

(1). 证明: $\iint\limits_D f(x) dxdy = \iint\limits_D x^2 y f''(x) dxdy$

(2). 证明: $\exists \xi, \eta \in (0, 1)$, $s.t. \xi^2 f''(\xi) = 2f'(\eta)(\xi - 1)$

解

(1).

$$
\begin{aligned}
\text{左边} &= \iint\limits_{D} f(x)dxdy \\
&= \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 dy \\
&= \int_0^1 f(x)dx \\
&= xf(x)|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 xf'(x)dx \\
&= -\int_0^1 xf'(x)dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{右边} &= \iint\limits_{D} x^2yf''(x)dxdy \\
&= \int_0^1 x^2f''(x)dx \int_0^1 ydy \\
&= \int_0^1 \frac{x^2}{2}df'(x) \\
&= \frac{x^2}{2}f'(x)|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 xf'(x)dx \\
&= -\int_0^1 xf'(x)dx
\end{aligned}
$$

综上所述,左边 = 右边 $\Rightarrow \iint\limits_{D} f(x)dxdy = \iint\limits_{D} x^2yf''(x)dxdy$

(2). 原命题等价于: $\exists\xi,\eta \in (0,1),\ s.t.\xi^2f''(\xi) = 2f'(\eta)(\xi-1) = 2[f(\xi)-f(1)] = 2f(\xi)$

我们需要证明: $\exists\xi \in (0,1),\ s.t.\xi^2f''(\xi) - 2f(\xi) = 0$

我们由 (1) 得到: $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2}f''(x)dx \Rightarrow \int_0^1[x^2f''(x) - 2f(x)]dx = 0$

我们由积分中值定理得到:

$$\exists\xi \in (0,1),\ s.t.\xi^2f''(\xi) - 2f(\xi) = 0$$

我们由拉格朗日中值定理得到:

$$\exists\eta \in (\xi,1),\ s.t.f(\xi) - f(1) = f'(\eta)(\xi-1)$$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi,\eta \in (0,1),\ s.t.\xi^2f''(\xi) = 2f'(\eta)(\xi-1)$

September 7

1. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\sin x\left(\arctan e^x + \int_0^x e^{t^2}dt\right)}{1+\cos^2 x}dx$

解

原定积分可以化为:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\sin x \arctan e^{x}}{1+\cos^2 x}dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\sin x \arctan e^{-x}}{1+\cos^2 x}dx \\ 2I &= \pi\int_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx \\ &= \pi\int_{0}^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx \\ 4I &= \pi^2\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx \\ 4I &= \frac{\pi^3}{2} \\ I &= \frac{\pi^3}{8} \end{aligned}$$

2. 若 $\int_0^{+\infty} \dfrac{\arctan(ax)}{x^n}dx$ 收敛, 求 n 的取值范围

解

原积分可能的暇点为 $x=0, x=+\infty$

(1). $x=0$ 处,$\dfrac{\arctan(ax)}{x^n} \sim ax^{1-n}$ 收敛 $\Rightarrow 1-n>-1 \Rightarrow n<2$

(2). $x=+\infty$,$\dfrac{\arctan(ax)}{x^n} \sim \frac{\pi}{2}x^{-n}$ 收敛 $\Rightarrow -n<-1 \Rightarrow n>1$

综上所述,$n \in (1,2)$

3. 设 $0<a<1$,$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin ax}{\sin x}dx$,$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan ax}{\tan x}dx$, 比较 I_1, I_2 和 $\dfrac{\pi a}{4}$ 的大小

解

我们可以得到: $\begin{cases} x\in(0,\frac{\pi}{4}) \\ ax\in(0,\frac{\pi}{4}) \\ ax<x \end{cases}$ 和函数 $\begin{cases} y=\sin x \\ y=\tan x \end{cases}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内单调递增.

我们得到:

$$\begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{\sin x}<1 \\ \dfrac{\tan(ax)}{\tan x}<1 \\ \dfrac{\frac{\tan(ax)}{\tan x}}{\frac{\sin(ax)}{\sin x}}=\dfrac{\cos(ax)}{\cos x}>1 \end{cases} \Rightarrow I_1<I_2<\frac{\pi a}{4}$$

4. 求 $\iint\limits_D \dfrac{\tan^3 x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, 其中 $D=\{(x,y)|y\geq|x|,(x^2+y^2)^3\leq y^4\}$

解

原二重积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D \frac{\tan^3 x + y}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy \\
&= \iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sin^2\theta} r\sin\theta dr \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{2}\sin^5\theta d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta d\theta \\
&= \frac{43\sqrt{2}}{120}
\end{aligned}
$$

5. 已知 $\int_1^{+\infty}\left(\frac{2x^2+bx+a}{2x^2+ax}-1\right)dx=0$, 求 a, b

解

原积分可化为: $\int_1^{+\infty}\frac{(b-a)x+a}{2x^2+ax}dx=0$收敛

(1). $x=+\infty$, 假设 $a\neq b \Rightarrow \frac{(b-a)x+a}{2x^2+ax}\sim\frac{1}{x}$发散, 我们得到: $a=b$

原积分等价于:

$$\int_1^{+\infty}\frac{a}{2x^2+ax}dx=\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x}-\frac{2}{2x+a})dx=0\Rightarrow \ln|\frac{x}{2x+a}|_{x=1}^{x=+\infty}=0\Rightarrow a=b=0$$

36.2 Week II

September 8

1. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)}{n+\frac{1}{k}}-\ln n\right]$

解

我们利用夹逼准则:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)}{n+1}-\ln n<I<\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)}{n}-\ln n$$

$$\begin{aligned}
左边 &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)}{n+1}-\ln n\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left\{\frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[\ln(n+k)-\ln n]-\frac{\ln n}{n+1}\right\}\\
&= \int_0^1 \ln(1+x)dx\\
&= 2\ln 2-1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
右边 &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)}{n}-\ln n\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[\ln(n+k)-\ln n]\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})\\
&= \int_0^1 \ln(1+x)dx\\
&= 2\ln 2-1
\end{aligned}$$

综上所述,我们可以得到原极限 $I=2\ln 2-1$

2. $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{(1+x^2)(1+x^4)}$

解

原定积分等价于:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty}\frac{x^4}{(1+x^2)(1+x^4)}dx\\
2I &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx\\
&= \frac{\pi}{2}\\
I &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

3. 设随机变量 $Y=min\{|X|,1\}$,其中 X 为随机变量,且密度函数为 $f(x)=\dfrac{k}{1+x^2}$(k为常数,$-\infty<x<+\infty$),下列说法不正确的是:

- A. $k=\dfrac{1}{\pi}$
- B. $E(X)=0$
- C. Y 没有概率密度
- D. $E(Y)=\dfrac{\ln(2e^{\frac{\pi}{2}})}{\pi}$

解

4. 求 $y = e^{-x}\sqrt{\sin x}(0 \le x < +\infty)$ 绕 x 轴旋转一周的旋转体体积

解

我们可以得到:

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{+\infty} \pi y^2 dx \\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \pi e^{-2x}\sin x dx \\
&= \lim_{n\to+\infty} A(1+e^{-4\pi}+e^{-8\pi}+\cdots+e^{-4n\pi}) \\
&= \frac{A\pi}{1-e^{-4\pi}} \\
A &= = \int_0^{\pi} e^{-2x}\sin x dx = \frac{e^{-2\pi}+1}{5} \\
V &= \frac{e^{-2\pi}+1}{5(1-e^{-4\pi})} = \frac{e^{2\pi}\pi}{5(e^{2\pi}-1)}
\end{aligned}$$

September 9

1. 已知 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^\alpha}dx$ 收敛, 求 α 的取值范围

解

原积分可能存在的暇点为 $x = 0, x = +\infty$

(1). $x = 0$ 时, $\dfrac{\ln(1+x)}{x^\alpha} \sim x^{1-\alpha}$ 收敛 $\Rightarrow 1-\alpha > -1 \Rightarrow \alpha < 2$

(2). $x = +\infty$ 时, $\dfrac{\ln(1+x)}{x^\alpha} \sim x^{-\alpha}$ 收敛 $\Rightarrow -\alpha < -1 \Rightarrow \alpha > 1$

我们得到: $\alpha \in (1,2)$

2. 设随机变量 X, Y 相互独立, 且 $X \sim N(0,1), Y \sim B(n,p), 0 < p < 1$, 且 $X+Y$ 的分布函数:

- A. 是连续函数
- B. 恰有 $n+1$ 个间断点
- C. 恰有 1 个间断点
- D. 有无穷个间断点

解

3. 已知微分方程 $\cos^4 x\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\cos^2 x(1-\sin x\cos x)\dfrac{dy}{dx}+y = e^{-\tan x}$, 求该微分方程在 $t = \tan x$ 变换下所得的 y 对 t 的微分方程, 并求出其通解

解

我们可以得到:

$$\begin{cases} t = \tan x \\ \sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{(1+t^2)dy}{dt} \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\frac{dy}{dx}}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{(1+t^2)^2d^2y}{dt^2} - \dfrac{2t(1+t^2)dy}{dt} \end{cases}$$

我们可以得到原微分方程等价于:

$$\frac{d^2y}{(1+t^2)^2dx^2} + \frac{2dy}{(1+t^2)dx} - \frac{2tdy}{(1+t^2)^2dx} + y = e^{-t}$$

我们可以得到:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = e^{-t} \Rightarrow y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{-t}$$

我们得到特征方程: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$

我们可以得到: $y = (C_1x + C_2)e^{-x} + y^* \Rightarrow y^* = Ax^2e^{-x} \Rightarrow y^* = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$

综上所述, 微分方程的通解为: $y = (C_1x + C_2)e^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x}$

4. 求二重积分 $I = \iint\limits_D \arcsin(2\sqrt{x - x^2})dxdy, D = \{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$

解

原二重积分可化为:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x\arcsin(2\sqrt{x-x^2})dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arcsin(\cos\theta)\cos\theta(\sin\theta+1)}{4}d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arcsin(\cos\theta)\cos\theta}{4}d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - \theta)\cos\theta d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta d\sin\theta \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

September 10

1. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^{n+1}-x^2}{x^n+1}$,$F(x)=\int_0^x f(t)dt$, 下列说法正确的是:

- A. $f(x)$ 有 1 个间断点,$F(x)$ 有 1 个不可导点
- B. $f(x)$ 有 1 个间断点,$F(x)$ 有 2 个不可导点
- C. $f(x)$ 有 2 个间断点,$F(x)$ 有 1 个不可导点
- D. $f(x)$ 有 2 个间断点,$F(x)$ 有 2 个不可导点

解

我们可以得到: $f(x)=\begin{cases} x,\ x<-1 \\ -x^2,\ -1<x<1 \\ 0,\ x=1 \\ x,\ x>1 \end{cases}$

$f(x)$ 在 $x=-1$ 处无定义,$x=-1$ 是可去间断点,$x=1$ 是跳跃间断点.

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 处处连续, 仅在 $x=1$ 处不可导.

2. 设当 $x\geq 0$ 时, 连续函数 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 非负, 且满足方程 $\int_0^{x^2} f(x^2)f(t)dt=\frac{1}{2}(\sqrt{1+x^2}-1)$,$F(0)=0$, 求 $f(x)$

解

我们设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, 我们令 $x^2=u$, 我们得到:

$$f(u)\int_0^u f(t)dt=\frac{1}{2}(\sqrt{1+u}-1)\Rightarrow F'(x)F(x)=\frac{1}{2}(\sqrt{1+x}-1)\Rightarrow\frac{1}{2}[F^2(x)]'=\frac{1}{2}(\sqrt{1+x}-1)$$

我们得到:

$$F^2(x)=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}-x+C,F(0)=0\Rightarrow\begin{cases} F(x)=\sqrt{\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}-x-\frac{2}{3}} \\ f'(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{2\sqrt{\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}-x-\frac{2}{3}}} \end{cases}$$

3. 证明: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$

解

我们有:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)}+\cdots$$

我们有: $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}=1-\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^4}{5!}+\cdots+\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)}+\cdots$

我们知道 $f(x)$ 有零点 $x=\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots\Rightarrow f(x)=A(x-\pi)(x+\pi)(x-2\pi)(x+2\pi)\cdots$

我们有:

$f(x) = A(x^2 - \pi^2)(x^2 - 4\pi^2)\cdots$, 令$x = 0$, 我们有: $A(-\pi^2)(-4\pi^2)\cdots = 1 \Rightarrow A = \dfrac{1}{(-\pi^2)(-4\pi^2)\cdots}$

我们有:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^4}{5!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)} + \cdots \\ (1 - \dfrac{x^2}{\pi^2})(1 - \dfrac{x^2}{4\pi^2})\cdots \end{cases} \Rightarrow x^2\text{项系数相等} \Rightarrow -\frac{1}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-\frac{1}{n^2\pi^2})$$

我们可以得到: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$

September 11

1. 设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上有连续的一阶导数,$f'(x) = \dfrac{1}{1+f^2(x)}\left[\sqrt{\dfrac{1}{x}} - \sqrt{\ln(1+\dfrac{1}{x})}\right]$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在

解

我们由: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - f(1) = \int_1^{+\infty} f'(x)dx \Rightarrow$ 我们只需要证明: $\int_1^{+\infty} f'(x)dx$ 收敛

我们有:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} f'(x)dx &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+f^2(x)}\left[\sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})}\right] dx \\ &\le \int_1^{+\infty} \left[\sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})}\right] dx \end{aligned}$$

我们由拉格朗日中值定理得到:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\xi}}\left(\frac{1}{x} - \ln(1+\frac{1}{x})\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{4}$$

我们由比较判别法可以得到: $\begin{cases} \int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^p} dx\text{收敛}, p > 1 \\ \int_1^{+\infty} \dfrac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} dx\text{收敛} \end{cases}$

综上所述, 我们得到: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在

2. 函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导,$f(0) = 1$ 且满足等式:

$$f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt = 0$$

(1). 求导数 $f'(x)$

(2). 证明: 当 $x \ge 0$ 时, 不等式 $e^{-x} \le f(x) \le 1$ 成立

解

(1). 我们可以得到:

$$(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)dt=0$$

我们对上式子求导可以得到:

$$(x+1)f''(x)+(x+2)f''(x)=0\Rightarrow\begin{cases}(x+1)e^x f'(x)=C\\ f'(0)=-1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{(1+x)e^x}$$

(2). 我们有:

$$\begin{cases}F(x)=f(x)-1\\ G(x)=f(x)-e^{-x}\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}F'(x)=f'(x)=-\dfrac{1}{(1+x)e^x}<0\\ F(0)=0\\ G'(x)=f'(x)+e^{-x}=\dfrac{x}{(1+x)e^x}>0\\ G(0)=0\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}F(x)\text{单调递减}\\ F(x)\le F(0)=1\\ G(x)\text{单调递增}\\ G(x)\ge G(0)\Rightarrow f(x)\ge e^{-x}\end{cases}$$

September 12

1. 设 $f(x)=\int_{-1}^x(1-|t|)dt(x\ge -1)$, 求曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的面积

解

我们可以得到 $f(x)$ 表达式:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x+1)^2}{2},\ x\in[-1,0]\\ \dfrac{2x-x^2+1}{2},\ x\in(1,+\infty)\end{cases}$$

我们可以得到:

$$S=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^{1+\sqrt{2}} f(x)dx=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}+\frac{2\sqrt{2}}{3}=1+\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

2. 设函数 $f(x)$ 连续,$f'(0)$ 存在,并对于任意 $x,y\in\mathbb{R}$,$f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}$,且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$,求 $f(x)$

解

我们有: $f(0)=\dfrac{2f(0)}{1-4f^2(0)}\Rightarrow f(0)=0$
我们利用导数定义:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)+f(\Delta x)}{1-4f(x)f(\Delta x)}-f(x)}{\Delta x} \\ &= (1+4f^2(x))\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta} \\ &= \frac{1+4f^2(x)}{2} \end{aligned}$$

我们可以得到微分方程的解:

$$\arctan[2f(x)]=x+C,\ f(0)=0\to f(x)=\frac{1}{2}\tan x$$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上具有二阶连续导数,$f(0)=f'(0)=0$, $f''(0)=1$, 对于任意的 $x>0$,$u(x)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距, 当 $x\to 0^+$ 时, 下列等价无穷小不成立的是:

- A. $f(x)\sim\dfrac{x^2}{2}$
- B. $x\cdot f(u(x))\sim\dfrac{u(x)\cdot f(x)}{2}$
- C. $\int_0^x u(t)dt\sim\dfrac{x^2}{4}$
- D. $\int_0^{f(x)} u(t)dt\sim\dfrac{x^4}{4}$

解

我们求出 $f(x)$ 在 $(x,f(x))$ 处的切线方程:$y-f(x)=f'(x)(x'-x)$
我们有:

$$u(x)=x'=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

我们利用泰勒展开式, 将 $f(x)$ 展开:

$$\begin{cases} f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2) \\ f'(x)=f'(0)+f''(0)x+o(x) \end{cases}\to\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2) \\ f'(x)=x+o(x) \end{cases}$$

当 $x\to 0^+$ 时,$f(x)\sim\dfrac{1}{2}x^2$, $u(x)\sim\dfrac{1}{2}x$

我们得到:

$$\begin{cases} x\cdot f(u(x))\sim \dfrac{u(x)\cdot f(x)}{2} \\ \int_0^x u(t)dt\sim \dfrac{x^2}{4} \\ \int_0^{f(x)} u(t)dt\sim \dfrac{x^4}{16} \end{cases}$$

September 13

1. 比较 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}dx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}dx$ 的大小

解

我们不妨设:$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}dx, J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}dx$, 我们有:

$$\begin{aligned} I-J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{1+x^2}dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{1+x^2}dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin t}{1+(t+\frac{\pi}{4})^2}dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\sin t}{1+(t+\frac{\pi}{4})^2}dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin t}{1+(t+\frac{\pi}{4})^2}dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin t[\frac{1}{1+(t+\frac{\pi}{4})^2}-\frac{1}{1+(\frac{\pi}{4}-t)^2}]dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{-\pi t\sin t}{[1+(t+\frac{\pi}{4})^2][1+(\frac{\pi}{4}-t)^2]}dt<0 \end{aligned}$$

2. 求曲线 $y=\frac{x^2}{1+x^2}$ 与其渐近线所围区域绕该渐近线旋转所得旋转体体积

解

我们可以得到 $f(x)$ 的渐近线为 $y=1$, 因此我们有:

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx \\ &= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta \\ &= \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

3. 设 A 是 n 阶矩阵,A 的第 i 行第 j 列元素为 a_{ij}, 满足 $a_{ij}=i\cdot j$, 下列命题正确的是:

- A. $r(A)=1$

- B. 矩阵 A 不可相似对角化
- C. 矩阵 A 的特征值之和为 $\sum_{k=1}^{n} k$
- D. 矩阵 A 的特征值之和为 $\sum_{k=1}^{n} k^2$

解

我们由:$a_{ij} = i \cdot j \rightarrow a_{ij} = a_{ji} = i \cdot j$, 即矩阵 A 为实对称矩阵,A 一定可以相似对角化

我们可以得到:$|A| \neq 0 \rightarrow r(A) = n$ 且矩阵 A 的特征值之和为 $\sum_{i=1}^{n} i^2$

4. 求二重积分 $\iint\limits_D \frac{1}{x^4+y^2}dxdy,\ D = \{(x, y)|y \geq x^2+1\}$

解

原二重积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{x^2+1}^{+\infty} \frac{1}{x^4+y^2}dy \\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\arctan(\frac{x^2}{x^2+1})dx \\ &= 2\int_0^{+\infty} \arctan(\frac{1}{t^2+1})dt \\ &= \end{aligned}$$

5. 求二重积分 $\iint\limits_D \frac{1}{x^4+y^2}dxdy,\ D = \{(x, y)|x \geq 1, y \geq x^2\}$

解

原二重积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{+\infty} dx \int_{x^2}^{+\infty} \frac{1}{x^4+y^2}dy \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{\pi}{4x^2}dx \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

September 14

1. 曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = mx(m > 0)$ 在第一象限内所围成的图形绕该直线旋转所形成的旋转体的体积 V

解

我们设围成区域中任意一点 (x,y), 我们有:$d=\dfrac{mx-y}{\sqrt{1+m^2}}$

$$\begin{aligned} V &= \iint\limits_S 2\pi d dxdy \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{1+m^2}}\int_0^m dx\int_{x^2}^{mx}(mx-y)dy \\ &= \frac{\pi m^5}{30\sqrt{1+m^2}} \end{aligned}$$

2. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}(xy+a|x|+b\sqrt{|y|})\arctan\dfrac{1}{|x|+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, 下列说法中正确的是:

- A. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性和 a,b 的取值有关
- B. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数存在的充要条件是 $ab=0$
- C. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微的充要条件是 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数存在
- D. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微, 则 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极值点

解

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导,$f'(x)+f^2(x)\geq 0, f(0)=1, f(x)\neq 0$, 证明: $f(x)\geq\dfrac{1}{x+1}$

解

36.3 Week III

September 15

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $\int_0^1 f(x)dx=0$, 则

- A. 当 $f'(x)<0$ 时,$f(\frac{1}{2})<0$
- B. 当 $f''(x)<0$ 时,$f(\frac{1}{2})<0$
- C. 当 $f'(x)>0$ 时,$f(\frac{1}{2})<0$
- D. 当 $f''(x)>0$ 时,$f(\frac{1}{2})<0$

解

2. 设 $f(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2 & x^3\\ 1 & 2 & 4 & 8\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, 则曲线 $y=f(x)$ 在 $(-1,2)$ 内存在水平切线的条数

解

September 16

1. 已知正值连续函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调减少, 对于任意的 $a,b(0<a<b<1)$, 下列结论不正确的是

- A. $a\int_0^b f(x)dx > b\int_0^a f(x)dx$
- B. $b\int_0^a f(x)dx > a\int_0^b f(x)dx$
- C. $a\int_0^b \sqrt{f(x)}dx < b\int_0^a \sqrt{f(x)}dx$
- D. $b\int_0^a \sqrt{f(x)}dx < a\int_0^b \sqrt{f(x)}dx$

解

2. 设函数 $\varphi(x,y)$ 的全微分为 $dz=(2x-y^2-2y)dx+(-2xy-2x+y^3+3y)dy$,$f(x,y)$ 连续, 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{\varphi(x,y)}=-1$

- A. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点
- B. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点
- C. 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点
- D. 不能确定点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点

解

3. 求 $\int_L \dfrac{|y|}{x^2+y^2+z^2}ds$, 其中 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x^2+y^2=2ax \qquad (a>0)\\ a\geq 0\end{cases}$

解

September 17

1. 设 $I_1=\int_0^\pi \dfrac{x\sin^2 x}{1+e^{\cos^2 x}}dx$,$I_2=\int_0^\pi \dfrac{\sin^2 x}{1+e^{\cos^2 x}}dx$,$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^2 x}{1+e^{\sin^2 x}}dx$, 比较 I_1,I_2,I_3 的大小

解

2. 设 $f(u,v)$ 有一阶偏导数,$f(x,1-x)=1, f_1'(x,1-x)=x$

(1) 设 $z(t)=f(\cos t,\sin t)$, 计算 $z'(0)$

(2) 证明: $f(u,v)$ 在单位圆周上至少存在两个不同的点满足方程: $v\dfrac{\partial f}{\partial u}=u\dfrac{\partial f}{\partial v}$

解

September 18

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续可导,$\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{5}{2}$,$\int_0^1 xf(x)dx=\dfrac{3}{2}$, 证明:$\exists\xi\in(0,1)$, $s.t. f'(\xi)=3$

解

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos^3 x)(1-\cos^{17} x)}{\frac{x^2}{2}-\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^n(2n+1)!}t^{2n+1}dt}$

解

3. 设偶函数 $f(t)$ 具有连续的导函数, 且满足 $f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\le 4t^2} f(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2})dxdy$, 求方程 $\int_0^x\sqrt{1+4\pi t^2}dt+\int_{\cos x}^0\dfrac{1+4\pi t^2}{f(t)}dt=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内根的个数

解

4. 设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=f(2)=0, f(1)=a>0$ 且 $f''(x)<0$, 则

- A. $\int_0^2 f(x)dx>a$
- B. $\int_0^2 f(x)dx<a$
- C. $\int_0^1 f(x)dx>\int_1^2 f(x)dx$
- D. $\int_0^1 f(x)dx<\int_1^2 f(x)dx$

解

September 19

1. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2\sin x}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处

- A. 不连续

- B. 连续但不可导
- C. 可导但不可微
- D. 可微

解

2. 求 $\iint_D \dfrac{1-x^3y^2}{(y+2\sqrt{1-x^2})^2}dxdy$, 其中 $D:\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1,-y\leq x\leq y\}$

解

September 20

1. 求 $\iiint\limits_{\Omega}(mx+ly+nz)^2dv$, 其中 $\Omega=\{(x,y,x)|x^2+y^2+z^2\leq a^2(a>0)\}$

解

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上导函数连续,$f'(a)=f'(b)$, 证明: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$

解

3. 下列函数在 $(0,0)$ 点可微的是:

- A.$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$
- B.$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$
- C.$\varphi(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$
- D.$\psi(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

解

4. 已知 $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-c)=k$, 求行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

解

5. 求 $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_{x+y}^1 \frac{\sin z}{z} dz$

解

September 21

1. 已知函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的某邻域内有定义, 则 $\lim\limits_{x\to 0} f_x'(x,0)=f_x'(0,0)$, $\lim\limits_{y\to 0} f_y'(0,y)=f_y'(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微的什么条件?

解

2. 设 n 阶可逆矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$, 其中 $b\neq 0$, 求 A^{-1}

解

3. 求微分方程 $y''+(4x+e^{2y})(y')^3=0$ 的通解, 其中 $y'\neq 0$

解

4. 设 $f(x)$ 二阶可导,$f^2(x)-f^2(y)=f(x+y)-f(x-y)$
(1) 证明:$f''(x)f(y)=f(x)f''(y)$
(2) 若 $f''(1)=f(1)=1$, 求 $f(x)$

解

36.4 Week IV

September 22

1. 设 $z = \dfrac{x\cos(y-1)-(y-1)\cos x}{1+\sin x+\sin(y-1)}$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}|_{(0,1)}$

解

2. 已知 A 是正交矩阵, 则 $A^* = A^T$ 是 $|A| = 1$ 的什么条件?

解

3. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(1-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\sqrt{i}}\right)$

解

September 23

1. 已知 $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$, 求 $f''_{xy}(0,0)\cdot f''_{yx}(0,0)$

解

2. 设矩阵 $A = (a_{ij})$ 满足 $a_{ij} = A_{ij}$,$a_{11} = -1$, 求 $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的解

解

3. 求 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1-e^{-x}}{\sqrt{x^3}}dx$

解

4. 方程 $x = e^{\sin^n x}(n = 1,2,\cdots)$
(1). 证明方程在 $(\dfrac{\pi}{2}, e)$ 内有唯一实数根
(2). 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n-\frac{\pi}{2}}}$

解

September 24

1. 若 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1$, 且当 $x=0$ 时,$z=\sin y$, 当 $y=0$ 时,$z=\sin x$, 求 $z(x,y)$

解

2. 设矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}$ 满秩, 则直线 $l_1:\dfrac{x-a_1}{a_1-a_2}=\dfrac{y-b_1}{b_1-b_2}=\dfrac{z-c_1}{c_1-c_2}$ 与直线 $l_2:\dfrac{x-a_1}{a_2-a_3}=\dfrac{y-b_1}{b_2-b_3}=\dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$ 关系

解

3. 设 $A=\begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 & 0\\ -2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, 求 A^n

解

4. 求 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n n^2}{(n+1)!}x^n$ 的和函数 $S(x)$

解

September 25

1. 设可微函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-f(x,y)$,$f(0,\dfrac{\pi}{2})=1$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{f(0,y+\frac{1}{n})}{f(0,y)}\right]^n=e^{\cot y}$, 求 $f(x,y)$

解

2. $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可微,$|f'(x)|<k\cdot f(x)(0<k<1)$

(1).$\exists\xi\in(-\infty),+\infty)$, $s.t.\ \ln f(\xi)=\xi$

(2). 设 $a_n=\ln f(a_{n-1})(n=1,2,\cdots)$, 证明 $\{a_n\}$ 收敛

解

September 26

1. 设 $f(x)$ 有连续一阶导数,$(xy-yf(x))dx+(f(x)+y^2)dy=du(x,y)$, 且 $f(0)=-1$, 求 $u(x,y)$

解

2. 积分计算

(1).$\int_0^{\ln 2}dy\int_{e^y}^2\frac{e^{xy}}{x^x-1}dx$

(2).$\int_0^1dx\int_x^1ydy\int_y^1\sqrt{1+z^4}dz$

解

September 27

1. $f(x)$ 在 $x=0$ 处 $n+1$ 阶可导,$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0,f^{(n)}(0)=a$, 求 $\lim_{x\to0}\frac{f(e^x-1)-f(x)}{x^{n+1}}$

解

2. 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z}+\frac{xyz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}=1$ 确定, 求 $dz|_{(0,0)}$

解

September 28

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有一阶连续导数, 对半空间 $x\geq 0$ 中任意光滑闭曲面 Σ, 我们有 $\oiint\limits_{\Sigma}\lim e^{-x}f(x)dydz+y\sqrt{e^x-1}f^2(x)dzdx=0$, 求 $f(x)$

解

2. 设 $f(t)$ 在 $[t,+\infty)$ 上有连续二阶导数, 且 $f(1)=0,f'(1)=1,z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$ 满足 $\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=0$, 求 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最大值

解

September 29

1. 设 $u = f(x, y, z)$,$z = z(x, y)$ 是由方程 $\varphi(x + y, z) = 1$ 所确定的隐函数, 其中 f 和 φ 有二阶连续偏导数且 $\varphi_2 \neq 0$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, du, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

解

September 30

1. 设函数 $z = z(x, y)$ 的微分 $dz = (2x+12y)dx+(12x+4y)dy$ 且 $z(0, 0) = 0$, 求函数 $z = z(x, y)$ 在 $4x^2 + y^2 \leq 25$ 上的最大值

解

第 37 章 October

37.1 Week I

October 1

1. 求累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$ 的等价形式

解

October 2

1. 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} \rho^2 d\rho + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy$

解

October 3

1. 求 $\int_0^1 dy \int_y^1 \sqrt{2xy-y^2} dx$

解

October 4

1. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{2n+1}} \left[\int_1^{\frac{1}{2n}} e^{-y^2} dy + \int_1^{\frac{3}{2n}} e^{-y^2} dy + \cdots + \int_1^{\frac{2n-1}{2n}} e^{-y^2} dy\right]$

解

October 5

1. 设 D 是由 $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ 所确定的平面区域, 求 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$

解

October 6

1. 计算二重积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} \left[\sin\theta + \cos\theta\sqrt{1+r^2\sin^2\theta}\right] r^2 dr$

解

October 7

1. 已知平面区域 $D = \{(x,y) \| x| + |y| \le \frac{\pi}{2}\}$, 记 $I_1 = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}d\sigma, I_2 = \iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}d\sigma, I_3 = \iint\limits_D (1-\cos\sqrt{x^2+y^2})d\sigma$, 比较 I_1, I_2, I_3 的大小

解

37.2 Week II

October 8

1. 已知平面区域 $D = \{(x,y) \| x| + |y| \le 1\}$, 记 $I_1 = \iint\limits_D (2x^2 + \tan(xy^2))dxdy, I_2 = \iint\limits_D (x^2y + 2\tan(y^2))dxdy, I_3 = \iint\limits_D (|xy| + y^2)dxdy$, 比较 I_1, I_2, I_3 的大小

解

October 9

1. 可微函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(x)dx$, 且 $f(0) = 1$, 求 $f(x)$

解

October 10

1. 设 $f(x)$ 是可导函数, 且 $f(0) = 0, g(x) = \int_0^1 xf(tx)dt$ 满足方程 $f'(x) + g'(x) = x$, 则由曲线 $y = f(x), y = e^{-x}$ 及直线 $x = 0, x = 2$ 围成的平面图形的面积

解

October 11

1. 设函数 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f'(x) = f(1-x), f(0) = 1$, 求 $f(x)$

解

October 12

1. 设函数 $f(x)$ 连续, 且对任意实数 x, h 满足 $f(x+h) = \int_x^{x+h} t\left[f(t+h)+t^2\right]dt + f(x), \lim\limits_{x\to 0}\left[1+f(x)\right]^{\frac{1}{x^4}} = a(a>0)$, 求 $f(x)$ 表达式和常数 a

解

October 13

1. 设 $f(x)$ 为 $[0,+\infty)$ 上的正值连续函数, 已知曲线 $y = \int_0^x f(u)du$ 和 x 轴及直线 $x = t(t > 0)$ 所围成区域绕 y 轴旋转所得体积与曲线 $y = f(x)$ 和两坐标轴及直线 $x = t(t > 0)$ 所围区域的面积之和为 t^2, 求曲线 $y = f(x)$ 的方程

解

October 14

1. 下列级数收敛的是:

- A. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{\ln(n!)}$
- B. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(2-\dfrac{1}{n})^n\ln(1+\dfrac{1}{n2^n})$
- C. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-2)^n n^2+e^n}{ne^n}$
- D. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n e^n}{3^n-2^n}$

解

37.3 Week III

October 15

1. 下列级数条件收敛的是:

- A. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$
- B. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\ln(1+\dfrac{1}{n})$

- C. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n\left[(-1)^n+\ln n\right]}{n}$
- D. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$

解

October 16

1. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}$ 的敛散性

解

October 17

1. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 条件收敛, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_na_n^2$ 的敛散性

解

October 18

1. 已知正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 则下列级数一定收敛的是:

- A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^na_n}{n}$
- B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$
- C. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$
- D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^3+a_n^2}$

解

October 19

1. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 下列四个级数一定收敛的个数:

- A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$
- B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$
- C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n}-a_{2n-1})$
- D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}^2-a_n^2)$

解

October 20

1. 设 a_n 为曲线 $y=\sin x,(0\le x\le n\pi)$ 与 x 轴所围区域绕 x 轴旋转所得到旋转体的体积, 求级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\pi^2}{2a_{n+1}}$ 的和

解

October 21 1. 若 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\dfrac{nt^{n-1}}{1+e^{xt}}dt$, 求 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$

解

2. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 收敛并求其和

解

37.4 Week IV

October 22

1. 设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx$, 其中 n 为正整数

(1). 若 $n\ge 2$, 计算 I_n+I_{n-2}

(2). 设 p 为实数, 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n I_n^p$ 的绝对收敛性和条件收敛性

解

October 23

1. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\dfrac{x^{2n+2}}{n+1}$

(1). 求该幂级数的收敛区间以及和函数

(2). 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n!}{(2n+1)!!}\dfrac{1}{n+1}$ 的和

(3).$2f(\dfrac{1}{\sqrt{2}})-1=\dfrac{\pi^2}{8}-1$

解

October 24

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续可微,λ 为实数, 证明: 当且仅当 $f(x)e^{\lambda x}$ 单调不减时,$f'(x)+\lambda f(x)$ 单调不减

解

2. 设 Ω 为区域 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$, 求 $\iiint\limits_{\Omega}(3x+2y+z)^2dv$

解

October 25

1. 设曲线 $C: x^2+y^2=2x$, 求 $\oint_C \frac{(x+y+1)^2}{(x-1)^2+y^2}ds$

解

October 26

1. 设曲面 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=2y$, 求 $\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+2y^2+3z^2)dS$

解

October 27

1. 计算线积分 $I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+xy+y^2}$, 其中 L 为 $|x|+|y|=1$, 其方向为逆时针方向

解

October 28

1. 计算曲线积分 $I=\oint_L\left[\frac{4x-y}{4x^2+y^2}-\frac{y}{(x-1)^2+y^2}\right]dx+\left[\frac{x+y}{4x^2+y^2}+\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\right]dy$, 其中 L 是 $x^2+y^2=4$, 方向为逆时针方向

解

October 29

1. 设 Ω 是由平面曲线 $\begin{cases} 4y^2+z^2=4 \\ x=0 \end{cases}$ $(z\geq 0)$ 绕 z 轴旋转一周形成的空间曲面, 取上侧, 计

算曲面积分 $I = \iint\limits_{\Omega} \dfrac{x^2ydydz + y^2zdzdx + (z^2+1)dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+(\frac{z}{2})^2+3}}$

解

October 30

1. 设函数 $f(x,y,z)$ 在区域 $\Omega = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ 上具有连续一阶偏导数, 且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}+z\dfrac{\partial f}{\partial z})dxdydz$

解

October 31

1. 设 A 为三阶方阵, 并有可逆矩阵 $P=(p_1,p_2,p_3)$,$p_i(i=1,2,3)$ 为三维列向量, 使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(1). 证明:p_1,p_2 是方程 $(E-A)x=0$ 的解,p_3 是方程 $(E-A)x=-p_2$ 的解, 且 A 不可相似对角化

(2). 当 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-1&-2\\-1&1&2\end{pmatrix}$ 时, 求可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

解

第 38 章 November

38.1 Week I

November 1

1. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x f(x)+\sin x}{x^2}=1$, 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+\sin x}{x^2}$

解

November 2

1. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内可导, $f(0)+3f'(0)=1$, 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_x^{\ln(1+x)}f(x+t)dt+[\sin x-\ln(1+x)]f(x)}{x^3}$

解

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{x}{(e^x-1)\cos\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{(1+\sin x^2)^{\frac{1}{x}}-1}}$

解

November 3

1. 设 $f(x)$ 连续, 且 $f(0)\neq0$, 且 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+\int_0^x(x-t)f(t)dt\right]^{\frac{1}{x\int_0^x f(x-t)dt}}$

解

November 4

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶导数连续,$f(1)\le 0,\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-|x|]=0$, 证明:

(1). 存在 $\xi\in(1,+\infty)$, 使得 $f'(\xi)>1$

(2). 存在 $\eta\in(-\infty,+\infty)$, 使得 $f''(\eta)=0$

解

2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}$
$dfrac\int_0^{2x}|t-x|\sin t dt|x|^3$

解

November 5

1. 求使得 $\oint_L(2y^3-3y)dx-x^3dy$ 的值最大的平面正向边界曲线 L

解

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{(1+x)^{\frac{1}{x}}}-(1+x)^{\frac{e}{x}}}{x^2}$

解

3. 设曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与平面 $z=x$ 的交线为 L, 起点为 $A(0,1,0)$, 终点为 $B(0,-1,0)$, 求 $\oint_L(x+y-z)dx+|y|dz$

解

November 6

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1-\dfrac{k}{n}\right)\ln(1+\dfrac{k}{n^2})$

解

November 7

1. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{n}{n^2+n+\ln 1}+\dfrac{n}{n^2+n+\ln 2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+\ln n}\right]^n$

解

38.2 Week II

November 8

1. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right]^n$

解

2. 以下两个矩阵, 可以用同一个可逆矩阵 **P** 相似对角化的是:

- A.$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$
- B.$\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$
- C.$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}$
- D.$\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}$

解

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上一阶可导,$f(0)=0$,$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得最大值 $Mx_0, x_0\in(0,2)$, 且 $f'(x)\le M$, 证明:

(1). 当 $x\in[0,x_0]$ 时, 有 $f(x)=Mx$

(2).$M=0$

解

4. 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 对任意的正整数, 满足 $a_n<b_n<a_{n+1}$, 则:

- A. 数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$
- B. 数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均发散, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$
- C. 数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 具有相同的敛散性
- D. 数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 具有不同的敛散性

解

November 9

1. 若可逆线性变换 $\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{y}$ 可将二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2$ 化为规范型 $y_1^2+y_2^2$, 同时将二次型 $g(x_1,x_2)=-x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2$ 化为标准型 $k_1y_1^2+k_2y_2^2$, 求可逆矩阵 $\mathbf{P}$ 及 k_1,k_2 的值

解

November 10

1. 设有数列 $\{x_n\}$, 已知 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$, 求下列说法正确的个数:

- (1). $\{x_n\}$ 必收敛
- (2). 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 必收敛
- (3). 若 $\{x_n\}$ 有界, 则 $\{x_n\}$ 必收敛
- (4). 若 $\{x_{3n}\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 必收敛

解

November 11

1. 设 $f(x)$ 有连续一阶导数, 且 $0<f'(x)\le\dfrac{\ln(2+x^2)}{2(1+x^2)}$, 数列 $x_0=a,x_n=f(x_{n-1}),n=1,2,\cdots$.

证明:

(1). 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n$ 存在且是方程 $f(x)=x$ 的唯一实根

(2). 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(x_n)-x_n]$ 收敛

(3). 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[x_n-A]$ 绝对收敛, 其中 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=A$

解

November 12

1. 设 $f(x)=x+a\ln(1+x)+\dfrac{bx\sin x}{1+x^2}, g(x)=cx^3$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to0$ 时是等价无穷小, 则:

- A. $a=1,b=-\dfrac{1}{2},c=\dfrac{1}{3}$
- B. $a=1,b=-\dfrac{1}{2},c=-\dfrac{1}{3}$
- C. $a=-1,b=\dfrac{1}{2},c=-\dfrac{1}{3}$
- D. $a=-1,b=-\dfrac{1}{2},c=\dfrac{-}{1}3$

解

November 13

1. 设 $f(x)$ 为连续函数,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\ln(1+x)}{x^2}=2$,$F(x)=\int_0^x tf(x-t)dt$, 当 $x\to 0$ 时,$F(x)-\dfrac{1}{2}x^2$ 与 bx^k 为等价无穷小, 其中常数 $b\neq 0$,k 为正整数, 求 $k,b,f(0),f'(0)$

解

November 14

1. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2e^{(n+1)x}+1}{e^{nx}+x^n+1}$, 则 $f(x)$

- A. 仅有一个可去间断点
- B. 仅有一个跳跃间断点
- C. 有两个可去间断点
- D. 有两个跳跃间断点

解

38.3 Week III

November 15

1. 下列命题成立的是:

- A. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f[\varphi(x)]-f(0)}{\varphi(x)}$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导
- B. 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f[\varphi(x)]-f(0)}{\varphi(x)}=f'(0)$
- C. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)-f(0)}{\sqrt{x^2}}$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导
- D. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sqrt[3]{x})-f(0)}{\sqrt{x^2}}$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

解

November 16

1. 设 $f(x)$ 在 x_0 点可导,α_n,β_n 为趋于零的正项数列, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}$

解

November 17

1. 设函数 $\varphi(x)=\int_0^{\sin x}f(tx^2)dt$, 其中 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(0)=2$

(1). 求 $\varphi'(x)$

(2). 讨论 $\varphi'(x)$ 的连续性

解

November 18

1. 设 $x=\int_0^1 e^{tu^2}du, y=y(t)$ 由方程 $t-\int_1^{y+t} e^{-u^2}du=0$ 所确定, 求:

(1). $\frac{dy}{dt}|_{t=0}, \frac{d^2y}{dt^2}|_{t=0}, \frac{dx}{dt}|_{t=0}, \frac{d^2x}{dt^2}|_{t=0}$

(2). $\frac{dy}{dx}|_{t=0}, \frac{d^2y}{dx^2}|_{t=0}$

解

November 19

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{x-\sin x}{x^3}, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$ 处处连续, 求 $f''(0)$

- A. 0
- B. 不存在
- C. $\frac{1}{60}$
- D. $-\frac{a}{10}$

解

November 20

1. 设方程 $a^x=bx(a>1)$ 有两个不同的实根, 求常数 a,b 应满足的关系式

解

November 21

1. 设 $y(x)$ 满足 $y''+2ay'+b^2y=0(a>b>0), y(0)=1, y'(0)=1$, 求 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$

解

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty]$ 上二阶可导, 且 $f(0)=0, f''(x)<0$, 则当 $0<a<x<b$ 时, 下面那个选项正确:

- A. $af(x)>xf(a)$
- B. $bf(x)>xf(b)$

- C. $xf(x) < bf(b)$
- D. $xf(x) > af(a)$

解

38.4 Week IV

November 22

1. 设 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f(1)=6, f'(1)=0$, 且当 $x \geq 1$,$x^2f''(x)-3xf'(x)-5f(x) \geq 0$, 证明: 当 $x \geq 1$ 时,$f(x) \geq x^5+\dfrac{5}{x}$

解

November 23

1. 设 $f(x)=\int_0^x t|x-t|dt-\dfrac{x^2}{6}$, 求:
(1). 函数 $f(x)$ 的极值和曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间和拐点
(2). 曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴围成的区域的面积及绕 y 轴旋转所得旋转体的体积

解

November 24

1. 曲线 $y=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+x^2}$ 的渐近线有多少条?

解

November 25

1. 设 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上二阶可导, 且 $|f(x)| \leq 1$, 又 $[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$, 证明在 $(-2,2)$ 内至少存在一点 ξ, 使得 $f''(\xi)+f(\xi)=0$

解

November 26

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 $n+1$ 阶导数, 且 $f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0, k=0,1,2,\cdots,n$, 证明: 存在 $\xi \in (a,b), s.t.\ f^{(n+1)}(\xi)=f(\xi)$

解

November 27

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$, 试证明:

(1). 在 $(0,1)$ 内存在 ξ,η, 使得 $[1+\eta f(\eta)]f'(\xi)=f'(\eta)+f^2(\eta)$

(2). 存在 ξ 和 η, 满足 $0<\xi<\eta<1$, 使得 $f'(xi)+f'(\eta)=2$

解

November 28

1. 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $f(1)>g(1), f(0)>g(0), \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx$, 试证明: 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f''(\xi)>g''(\xi)$

解

November 29

1. 设 α 为正整数, 且反常积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$ 收敛, 求 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$

解

November 30

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续且单调,$f(x+2)-f(x)=4(x+2), f(0)=1, \int_1^9 f^{-1}(x)dx=\dfrac{28}{3}$, 其中 $f^{-1}(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数, 求 $\int_1^3 f(x)dx$

解

第 39 章 December

39.1 Week I

December 1

1. 求曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 与直线 $y=x$ 及 $y=2$ 所围区域绕 $y=2$ 旋转所得旋转体的体积

解

December 2

1. 设曲线 $y=\sin x(0\le x\le n\pi, n=1,2,\cdots)$ 和 x 轴围成的区域为 A, 区域 A 绕 y 轴旋转所得旋转体体积为 S_n

(1). 求 S_n

(2). 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{S_1}{n^3+1^3}+\dfrac{S_2}{n^3+2^3}+\cdots+\dfrac{S_n}{n^3+n^3}]$

解

December 3

1. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $\int_0^1 f(x)dx=3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx$, 试证明: 存在两个不同的点 $\xi,\eta\in(0,1), s.t.\ f'(\xi)=g'(\xi)[f(\eta)-f(\xi)]$

解

December 4

1. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有连续导数, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+\frac{k(b-a)}{n})\right] = \frac{b-a}{2}[f(a)-f(b)]$$

解

December 5

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续

(1). 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\pi f(x)|\sin nx|dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(x)dx$

(2). 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\pi |\sin nx|\ln(1+x)dx$

解

December 6

1. 设函数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y)\neq(0,0) \\ 0, (x,y)=(0,0) \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处

- A. 不连续
- B. 两个偏导数都不存在
- C. 两个偏导数存在但不可微
- D. 可微

解

December 7

1. $\lim\limits_{x\to0y\to0}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ 是函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微的:

- A. 充分必要条件
- B. 必要条件但非充分条件
- C. 充分条件但非必要条件
- D. 既非充分也非必要条件

解

39.2 Week II

December 8

1. 设 $f_x(x_0,y_0)$ 存在,$f_y(x_0,y_0)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续, 尝试证明:$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微

解

December 9

1. 设 $u=u(\sqrt{x^2+y^2})$ 具有连续的二阶偏导数, 且满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+u=x^2+y^2$, 试求函数 u 的表达式

解

December 10

1. 设 $f(x,y)$ 有二阶连续导数,$g(x,y)=f(e^{xy},x^2+y^2)$ 且 $\lim\limits_{x\to1 y\to0}\dfrac{f(x,y)+x+y-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0$, 证明: $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点取得极值, 判断此极值是极大值还是极小值, 并求出此极值

解

December 11

1. 设区域 D 由 $x^2+y^2\le 2x+2y$ 所确定, 求 $\iint\limits_D [x(1-y^3)+y(1+x^3)]d\sigma$

解

December 12

1. 设 $D=\{(x,y)|0\le x\le 2,0\le y\le 2\}$

(1). 计算 $b=\iint\limits_D |xy-1|d\sigma$

(2). 设 $f(x,y)$ 在 D 上连续, 且 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=0$, $\iint\limits_D xyf(x,y)d\sigma=1$, 证明: 存在 $(\xi,\eta)\in D$, 使得 $|f(\xi,\eta)|\ge\dfrac{1}{b}$

解

December 13

1. 设 $f(x)$ 有一阶连续导数,$(xy-yf(x))dx+(f(x)+y^2)dy=du(x,y)$,其中 $f(0)=-1,u(0,0)=0$, 则函数 $u(x,y)$ 在条件 $xy=1,x>0$ 下最值情况:

- A. 最大值为 $\frac{5}{3}$
- B. 最大值为 5
- C. 最小值为 -3
- D. 最小值为 $\frac{1}{3}$

解

December 14

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, 区域 D 由不等式 $x^2+y^2 \le t^2(t \ge 0), x \ge 0, y \ge 0$ 所确定, 且 $f(t) = 2\iint\limits_D [(x-1)^2+(y+1)^2] f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy + \frac{t^4}{4} + t^2$, 求 $f(x)$

解

39.3 Week III

December 15

1. 设函数 $f(x)$ 满足 $xf'(x) - 3f(x) + 6x^2 = 0$, 且由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = 1$ 与 x 轴围成的平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积最小, 求 D 的面积

解

December 16

1. 下列级数中条件收敛的是:

- A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$
- B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \ln(1+\frac{1}{n})$
- C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n[(-1)^n+\ln n]}{n}$
- D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n}$

解

December 17

1. 下列结论正确的是:

- A. 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别是 R_1, R_2, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$ 的收敛半径为 $R =$

$\min\{R_1, R_2\}$

- B. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R=2$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{1}{2}$
- C. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n}$ 的收敛半径为 $\sqrt{R}$
- D. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛半径为 $\sqrt{R}$

解

December 18

1. 设 $a_0 = 0.a_1 = 1.a_{n+1} = 3a_n + 4a_{n-1} (n = 1, 2, 3, \cdots)$

(1). 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

(2). 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ 的收敛域以及和函数

解

December 19

1. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $\int_0^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛, 令 $a_n = \int_0^1 f(nx)dx$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{n^\alpha} (\alpha > 0)$ 收敛

解

December 20

1. 已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 处的梯度 $\mathbf{grad} f(1, 1) = 2i - j$, 求函数 $f(x, y)$ 在该点沿曲线 $e^{x-1} + xy = 2$ 在该点处切线方向 (与 y 轴正向夹角小于 $\frac{\pi}{2}$) 的方向导数

解

December 21

1. 设 $f(x, y)$ 连续, 且 $f(x, y) = x^2 - y^2 + \int_L \frac{yf(x, y)dx + xf(x, y)dy}{x^2 + y^2}$, 其中 L 是从点 $A(-1, 0)$ 到 $B(1, 0)$ 的上半圆周 $y = \sqrt{1 - x^2}$, 求 $f(x, y)$

解

39.4 Week IV

December 22

1. 求 $I=\oint\limits_{L}(y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$, 其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=2bx$ 与柱面 $x^2+y^2=2ax(b>a>0)$ 的交线 $(z\geq 0)$,L 的方向规定为沿 L 的方向运动时, 从 z 轴正往下看, 曲线 L 所围球面部分总在左边

解

December 23

1. 设 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧, 求 $\oiint\limits_{\Sigma}\frac{dydz}{x}+\frac{dzdx}{y}+\frac{dxdy}{z}$

解

第 40 章 Summary

40.1 双曲函数

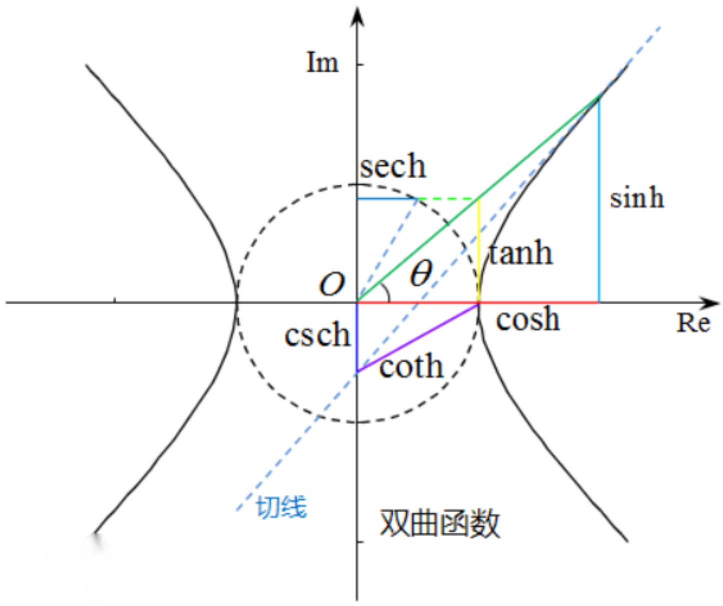


图 40.1: 双曲函数示意图

定义 40.1.1

双曲函数是一种类似于三角函数的一类函数，基本的函数有双曲正弦函数和双曲余弦函数，借由指数函数定义.

1. 双曲正弦函数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

2. 双曲余弦函数

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \to [1, +\infty]$$

3. 双曲正切函数

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \to (-1, 1)$$

恒等式:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 = 1$$

$$\sinh x = -i \sin ix, \quad \cosh x = \cos ix$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

定义 40.1.2

反双曲函数:

1. 反双曲正弦函数

$$\operatorname{arsinh} x = ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad (arsinhx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

2. 反双曲余弦函数

$$\operatorname{arcosh} x = ln(x + \sqrt{x^2-1}), \quad (arcoshx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

3. 反双曲正切函数

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} ln(\frac{1+x}{1-x}), \quad (artanhx)' = \frac{1}{1-x^2}$$

40.2 特殊曲线

8. 心形线、摆线、三叶玫瑰线、星形线、伯努利曲线和阿基米德螺线

定义 40.2.1

几类特殊曲线的面积、弧长、旋转体体积

1. 心形线 $r = a(1 + \cos\theta)$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta} d\theta = 8a$$

$$S = 2\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta = \frac{3}{2}a^2\pi$$

2. 摆线 $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta d\theta} = 8a$$

$$S = \int_0^{x_0} f(x)dx = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos\theta)^2 d\theta = 3a^2\pi$$

3. 星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}$

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sin\theta\cos\theta d\theta = 6a$$

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sin^4\theta\cos^2\theta = \frac{3\pi}{8}a^2$$

4. 三叶玫瑰线 $\rho = a\cos 3\theta \quad \rho = a\sin 3\theta$

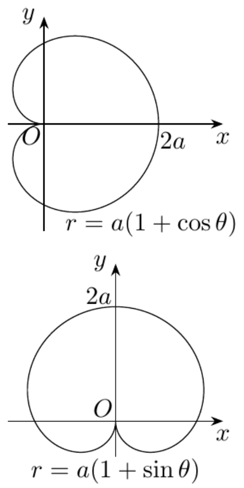
$$L = 3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2 3\theta + 9a^2\sin^2 3\theta d\theta} = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 8\sin^2 t dt}$$

$$S = \frac{3}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 3\theta d\theta = \frac{\pi a^2}{4}$$

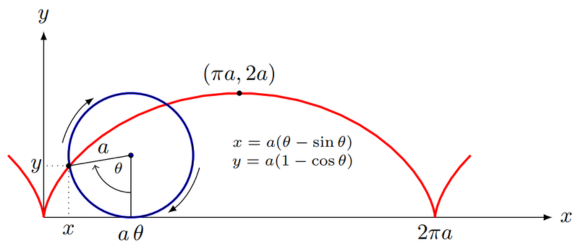
5. 伯努利双扭线 $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta} + \cos^2 2\theta} = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\frac{1}{2}}\theta d\theta$$

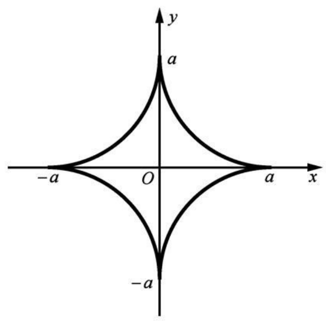
$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta d\theta = a^2$$



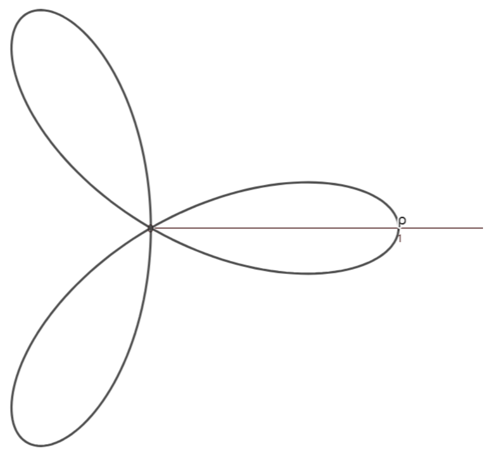
(a) 心形线



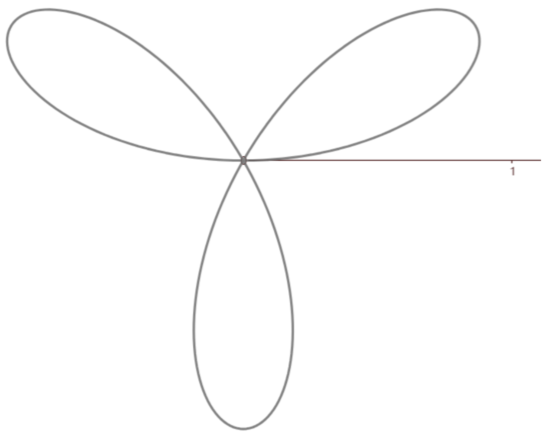
(b) 摆线



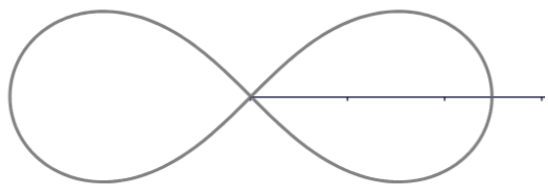
(c) 星形线



(d) 三叶玫瑰线 $\rho = a\cos 3\theta$



(e) 三叶玫瑰线 $\rho = a\sin 3\theta$



(f) 伯努利双扭线 $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$

图 40.2: 曲线图形

40.3 两类欧拉积分

定义 40.3.1 (*Gamma* 函数和 *Beta* 函数)

1. *Gamma* 函数 (欧拉第一类积分)

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=B(q,p)$$

我们有:

$$B(a,b)=(\frac{x^a(1-x)^b}{a})|_0^1+\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-2}dx$$

$$B(a,b)=\frac{b-1}{a}\int_0^1 (x-1+1)x^{a-1}(1-x)^{b-2}$$

$$\boxed{B(a,b)=\frac{b-1}{a}[B(a,b-1)-B(a,b)]}$$

$$\boxed{B(a,b)=\frac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1)}$$

特别的, 我们有:

$$\boxed{B(m,n)=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}}$$

2.*Beta* 函数 (第二类欧拉积分)

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

我们有:

$$\Gamma(\alpha)=(-x^{\alpha-1}e^{-x})|_0^{+\infty}+(\alpha-1)\int_0^{+\infty} x^{\alpha-2}e^{-x}dx$$

$$\boxed{\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)},\alpha>1$$

特别的, 我们有:

$$\boxed{\Gamma(n+1)=n!}$$

3. 两类积分之间的关系

转换公式:

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

10. 常用极限技巧

定理 40.3.1

(i). $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_1^n+u_2^n+u_3^n+\cdots+u_m^n}=\max\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$

证明:

$$\max\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}\le u_1^n+u_2^n+u_3^n+\cdots+u_m^n\le m*\max\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$$

我们将 $\max\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$ 记作 a,$m*\max\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$ 记作 b, 我们利用夹逼准则:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{b}=\max\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$$

11. 变上限积分奇偶性、周期性和原函数关系

引理 40.3.1

$f(x)$ 连续,$f(x)$ 与 $\int_a^x f(t)dt$ 之间的关系

(1). 如果 $f(x)$ 是奇函数,$\int_a^x f(t)dt$ 是偶函数

(2). 如果 $f(x)$ 是偶函数,$\int_a^x f(t)dt$ 是奇函数当且仅当 $a=0$ 时成立.

(3). 如果 $f(x)$ 是周期函数,$\int_a^x f(t)dt$是周期函数与 $\int_0^T f(t)dt=0$等价

$$\text{证明: 我们令}F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

$$(i).\text{必要性: }F(x+T)-F(x)=\int_x^{x+T}f(t)dt=\int_0^T f(t)dt=0$$

$$(ii).\text{充分性: }\int_0^T f(t)dt=0\Leftrightarrow F(x+T)-F(x)=0$$

12. 阿达玛不等式

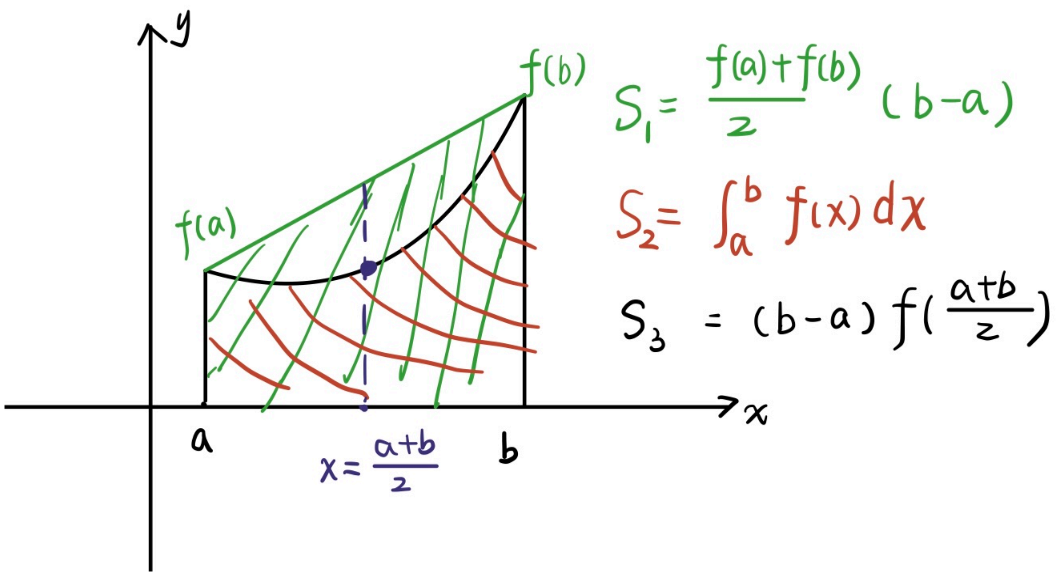


图 40.3: *Hadamard* 不等式

定理 40.3.2 (*Hadamard* 不等式)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x)\geq 0$, 下面不等式成立:

$$f(\frac{a+b}{2})\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\leq \frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$$

证明

原不等式可以化为:

$$(b-a)f(\frac{a+b}{2})\leq \int_a^b f(t)dt\leq \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

我们由图40.3可以发现:

不等式左边表示的过 $(\frac{a+b}{2},f(\frac{a+b}{2}))$ 的切线与 $x=a,x=b,y=0$ 围成的图形的面积 S_3;

不等式中间表示的是 $f(x)$ 与 $x=a,x=b,y=0$ 围成的曲边梯形的面积 S_2;

不等式右边表示的是直线 $x=a,x=b,y=0$ 与直线 $y=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$ 围成的梯形的面积 S_1.

我们可以由图形上直观的看出三个面积的大小关系: $S_3\leq S_2\leq S_1$

对于左边的不等式, 我们将 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 处展开得到:

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2$$

我们由 $f''(x)>0$, 我们可以得到:

$$f(x)>f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})$$

两边同时在 $[a,b]$ 内取定积分得到:

$$\int_a^b f(x)dx>\int_a^b [f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})]=(b-a)f(\frac{a+b}{2})$$

对于右边的不等式, 我们构造辅助函数:

$$F(x)=\frac{x-a}{2}[f(x)+f(a)]-\int_a^x f(t)dt,\ F(a)=0$$

$$\begin{cases} F'(x)=\dfrac{x-a}{2}f'(x)-\dfrac{f(x)-f(a)}{2} \\ F''(x)=\dfrac{x-a}{2}f''(x) \end{cases} \quad F'(0)=0,F''(x)\geq 0\Rightarrow F'(x)\geq 0$$

我们得到 $F'(x)\geq 0\Rightarrow F(x)$单调递增,$F(x)\geq F(a)=0$

13. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$相关命题

定理 40.3.3 (极限推论)

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$

(i). $a\neq 0\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1$

(ii). $a=0\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$不一定存在

2. $\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=a$

$$\begin{cases}\lim_{n\to+\infty} x_n=\infty \text{当} |a|>1\\ \lim_{n\to+\infty} x_n=0, \text{当} |a|<1\\ \lim_{n\to+\infty} x_n \text{不确定, 当} |a|=1\end{cases}$$

3. $\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$存在且$x_n>0$, 我们有:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$$

40.4 谱分解定理

定义 40.4.1 (代数重复度)

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 是矩阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的相异特征值, 其重数分别为 $r_1,r_2,\cdots,r_k$, 称 r_i 为矩阵 A 的特征值 λ_i 的代数重复度.

定义 40.4.2 (几何重复度)

齐次方程组 $Ax=\lambda_i x$ $(i=1,2,\cdots,k)$ 的解空间 V_{λ_i} 称为 A 的对应于特征值 λ_i 的特征空间, 则 V_{λ_i} 的维数称为 A 的特征值 λ_i 的几何重复度.

定义 40.4.3 (单纯矩阵)

若矩阵 A 的每一个特征值的代数重复度与几何重复度相等, 则称矩阵 A 为单纯矩阵.

定义 40.4.4 (幂等矩阵)

若 A 为方阵, 且 $A^2=A$, 则称 A 为幂等矩阵.

性质 1. 幂等矩阵 A 性质

- (1). A 是单纯矩阵, 且其 $Jordan$ 标准型为 $\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$
- (2). A 的特征值只能为 0 或者 1
- (3). $rank(A)=tr(A)$
- (4). $Ax=x \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}(A)$
- (5). A 一定可以相似对角化

定理 40.4.1 (谱分解定理)

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是单纯矩阵, 矩阵 A 有 k 个相异特征值 λ_i $(i=1,2,\cdots,k)$,$\exists A_i \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $(i=1,2,\cdots,k)$, 使得

$$A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i G_i$$

此式称为矩阵 A 的谱分解,$G_1,G_2,\cdots,G_k$ 称为 A 的族谱, 且满足一下性质:

性质 1. 谱分解谱族 G_i 性质

- (1). 幂等性: $G_i^2=G_i$
- (2). 分离性: $G_iG_j=0$ $(i\neq j)$
- (3). 可加性: $\sum\limits_{i=1}^{k}G_i=E_n$

推论 40.4.1 (谱族 G_i 推论)

- $AG_i=G_iA=\lambda_iG_i$
- $rank(G_i)=m_i$
- G_i 是唯一的,G 的族谱是唯一的.

命题 40.4.1

矩阵 A 是单纯矩阵等价为存在 k 个矩阵 G_i, $(i=1,2,\cdots,k)$ 满足:

- (1). $G_iG_j=\begin{cases} G_i, & i=j \\ 0, & i\neq j\end{cases}$
- (2). $\sum\limits_{i=1}^{k}G_i=E_n$
- (3). $A=\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_iG_i$
- (4). $f(A)$ 为任意多项式, 则

$$f(A)=\sum_{i=1}^{k}f(\lambda_i)G_i$$

- (5). $A^m=\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i^mG_i$

证明

1. 必要性

(1). 当 $k=n$ 时:

我们由 A 是单纯矩阵可以得到矩阵 A 可以相似对角化

$$A = P\Lambda P^{-1}, 其中\Lambda = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$$

我们不妨设 $P = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$,$P^{-1} = \begin{pmatrix} \omega_1^T \\ \omega_2^T \\ \vdots \\ \omega_n^T \end{pmatrix}$, 我们可以得到:

$$A = (v_1, v_2, \cdots, v_n)\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1^T \\ \omega_2^T \\ \vdots \\ \omega_n^T \end{pmatrix} \Rightarrow A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \omega_i^T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i G_i,\ 其中G_i = v_i\omega_i^T$$

我们由 $\begin{cases} P^{-1}P = E_n \\ PP^{-1} = E_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_i^T v_j = \begin{cases} 1,\ i = j \\ 0,\ i \neq j \end{cases} \\ \sum_{i=1}^{n} v_i\omega_i^T = \sum_{i=1}^{n} G_i = E_n \end{cases}$

对于任意 $i, j \in (1, n), G_iG_j = v_i(\omega_i^T v_j)\omega_j^T$, 我们可以得到:

$$G_iG_j = \begin{cases} v_i\omega_i^T = G_i,\ i = j \\ 0,\ i \neq j \end{cases} \Rightarrow A_i是幂等矩阵$$

(2). 当 $k < n$ 时:

我们由矩阵 A 是单纯矩阵, 可以得到: $A = P\Lambda P^{-1}$

$$\begin{cases} P = (v_{11}, v_{12}, \cdots, v_{1r_1}, v_{21}, v_{22}, \cdots, v_{2r_2}, \cdots, v_{k1}, v_{k2}, \cdots, v_{kr_k}) \\ P^{-1} = (\omega_{11}^T, \omega_{12}^T, \cdots, \omega_{1r_1}^T, \omega_{21}^T, \omega_{22}^T, \cdots, \omega_{2r_2}^T, \cdots, \omega_{k1}^T, \omega_{k2}^T, \cdots, \omega_{kr_k}^T)^T \end{cases}$$

$$A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \sum_{j=1}^{r_i} B_{ij} \xrightarrow{G_i = \sum_{j=1}^{r_i} B_{ij}} A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i G_i$$

$$P^{-1}P = E_n \Rightarrow \omega_{ij}^T v_{lk} = \begin{cases} 1,\ i = l, j = k \\ 0,\ i \neq l或j \neq k \end{cases}$$

$$B_{ij}B_{lk}=v_{ij}(\omega_{ij}^Tv_{lk})\omega_{lk}^T=\begin{cases}B_{ij},\ i=l,j=k\\0,\ i\neq l\text{或}j\neq k\end{cases}\Rightarrow G_iG_j=\sum_{p=1}^{r_i}B_{ip}\sum_{q=1}^{r_j}B_{jq}=\begin{cases}G_i,\ i=j\\0,\ i\neq j\end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{k}G_i=\sum_{i=1}^{n}B_i=E_n$$

(2). 充分性

我们首先可以得到矩阵 G_i 均为幂等矩阵, 我们不妨设 $dim\mathbb{R}(G_i)=n_i$, 我们可以得到:

$$n_i=tr(G_i)\Rightarrow\sum_{i=1}^{k}n_i=\sum_{i=1}^{k}tr(G_i)=tr(\sum_{i=1}^{k}G_i)=tr(E_n)=n$$

我们取 X_i 为 $\mathbb{R}(G_i)$ 的基列构成的阵, 则 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_k)$ 是 $n\times n$ 矩阵, 且 G_i 的列向量都可以由 X_i 线性表出, 我们可以得到:

$$G_i=(X_i\beta_1,X_i\beta_2,\cdots,X_i\beta_n)=X_iY_i$$

$$XY=(X_1,X_2,\cdots,X_n)\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\\\vdots\\Y_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}X_iY_i=E_n\Rightarrow\text{矩阵}X\text{可逆}$$

$$YX=\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\\\vdots\\Y_n\end{pmatrix}(X_1,X_2,\cdots,X_k)=\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\\\cdots\\Y_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Y_1X_1&Y_1X_2&\cdots&Y_1X_k\\Y_2X_1&Y_2X_2&\cdots&Y_2X_k\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\Y_kX_1&Y_kX_2&\cdots&Y_kX_k\end{bmatrix}=E_n=\begin{bmatrix}E_{r_1}&0&\cdots&0\\0&E_{r_2}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&E_{r_k}\end{bmatrix}$$

我们可以得到:

$$Y_iX_j=\begin{cases}E_{r_i},\ i=j\\0,\ i\neq j\end{cases}\Rightarrow G_iX_j=x_iY_iX_j=\begin{cases}X_i,\ i=j\\0,\ i\neq j\end{cases}$$

我们利用幂等矩阵的性质

$$\begin{aligned}
AX &= (\sum_{i=1}^{k}\lambda_i G_i)(X_1, X_2, \cdots, X_k) \\
&= ((\sum_{i=1}^{k}\lambda_i G_i)X_1, (\sum_{i=1}^{k}\lambda_i G_i)X_2, \cdots, (\sum_{i=1}^{k}\lambda_i G_i)X_k) \\
&= (\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \cdots, \lambda_k X_k) \\
&= (X_1, X_2, \cdots, X_k)\begin{bmatrix} E_{r_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E_{r_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E_{r_k} \end{bmatrix} \\
&= X\Lambda \Rightarrow A = X\Lambda X^{-1}
\end{aligned}$$

(3). 谱分解唯一性

我们不妨假设 $F_1, F_2, \cdots, F_k$ 满足:

$$\begin{cases} F_iF_j = 0,\ i \neq j \\ F_i^2 = F_i \\ A = \sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i F_i \\ \sum\limits_{i=1}^{k} F_i = E_n \end{cases}$$

我们由族谱 G_i 性质推论可以得到:

$$\begin{cases} AG_i = G_iA = \lambda_i G_i \\ AF_i = F_iA = \lambda_i F_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AG_iF_j = \lambda_i G_iF_j \\ \lambda_i G_iF_j = G_iAF_j \\ G_iAF_j = \lambda_j G_iF_j \end{cases} \Rightarrow G_iF_j = 0,\ i \neq j$$

我们得到:

$$G_i = G_iE_n = G_i(\sum_{j=1}^{k} F_j) = G_iF_i = (\sum_{j=1}^{k} G_j)F_i = F_i$$

综上所述, 矩阵 A 的谱分解是唯一的.

40.5 积分训练

40. 积分训练

积分训练

(1). $\int \frac{x\sin x}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}dx$

解

我们令 $f(x)=\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)dx \\ &= \int -\frac{d\cos x}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \int -\frac{du}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\xlongequal{u=\tan t} \int (-\cos t)dt \\ &= -\sin t + C \\ &\xlongequal{\sin t=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}} -\frac{\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} + C \end{aligned}$$

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \int xd(F(x)) \\ &= xF(x) - \int F(x)dx \\ &= -\frac{x\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} + \int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx \\ &= -\frac{x\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} + \int \frac{d\sin x}{\sqrt{2-\sin^2 x}} \\ &= \arcsin(\frac{\sin x}{\sqrt{2}}) - \frac{x\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} + C \end{aligned}$$

(2). $\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

解

我们令 $f(x)=\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int f(x)dx \\
&= \int -\arccos x d(\arccos x) \\
&= -\frac{1}{2}(\arccos x)^2+C
\end{aligned}$$

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned}
I &= \int x^3 d(F(x)) \\
&= x^3F(x)-\int F(x)dx \\
&= -\frac{x^3}{2}(\arccos x)^2-\frac{1}{2}\int(\arccos x)^2dx \\
&\xlongequal[x=\cos u]{u=\arccos x} -\frac{x^3}{2}(\arccos x)^2+\frac{1}{2}\int u^2\sin u du \\
&\xlongequal{\text{分部积分}} -\frac{x^3}{2}(\arccos x)^2-\frac{u^2}{2}\cos u+u\sin u+\cos u+C \\
&\xlongequal[\sin u=\sqrt{1-x^2}]{u=\arccos x} -\frac{x^3}{2}(\arccos x)^2-\frac{x(\arccos x)^2}{2}+\sqrt{1-x^2}\arccos x+x+C
\end{aligned}$$

(3). $\int\dfrac{x+\sin x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}dx$

解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned}
I &= \int\frac{xd\tan x+\tan xdx}{(x\tan x+1)^2} \\
&= \int\frac{dx\tan x}{(x\tan x+1)^2} \\
&= -\frac{1}{x\tan x+1}+C
\end{aligned}$$

(4). $\int\dfrac{1-lnx}{(x-lnx)^2}dx$

解

我们令: $f(x)=\dfrac{h(x)}{x-lnx}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{h'(x)(x-lnx)-h(x)(1-\frac{1}{x})}{(x-lnx)^2} \\
&= \frac{1-lnx}{(x-lnx)^2}
\end{aligned}
$$

当 $h(x)=x$ 时,$f'(x)=\dfrac{1-lnx}{(x-lnx)^2}$, 原不定积分为: $I=\dfrac{x}{x-lnx}+C$

(5). $\int \dfrac{x\cos x}{(x+\cos x)^2}dx$

解

我们令: $f(x)=\dfrac{h(x)}{x+\cos x}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{h'(x)(x+\cos x)-h(x)(1-\sin x)}{(x+\cos x)^2} \\
&= \frac{x\cos x}{(x+\cos x)^2}
\end{aligned}
$$

当 $h(x)=\sin x+1$ 时,$f'(x)=\dfrac{x\cos x}{(x+\cos x)^2}$, 原不定积分为: $I=\dfrac{\sin x+1}{x+\cos x}+C$

(6). $\int \dfrac{\cos^2 x-x^2\sin x}{(x+\cos x)^2}dx$

解

我们令: $f(x)=\dfrac{h(x)}{x+\cos x}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{h'(x)(x+\cos x)-h(x)(1-\sin x)}{(x+\cos x)^2} \\
&= \frac{\cos^2 x-x^2\sin x}{(x+\cos x)^2}
\end{aligned}
$$

当 $h(x)=x\cos x$ 时,$f'(x)=\dfrac{x\cos x}{(x+\cos x)^2}$, 原不定积分为: $I=\dfrac{x\cos x}{x+\cos x}+C$

(7). $\int \dfrac{x\sin x+\cos x}{x^2+\cos^2 x}dx$

解

原不定积分等价为:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{x\sin x+\cos x}{x^2}}{1+\left(\frac{\cos x}{x}\right)^2}dx \\ &= -\int \frac{d\frac{\cos x}{x}}{1+\left(\frac{\cos x}{x}\right)^2} \\ &= -\arctan\left(\frac{\cos x}{x}\right)+C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I=-\arctan(\frac{\cos x}{x})+C$

(8). $\int \frac{e^x(x-1)}{x^2+e^{2x}}dx$

解

原不定积分等价为:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\frac{e^x(x-1)}{x^2}}{1+\left(\frac{e^x}{x}\right)^2}dx \\ &= -\int \frac{d\frac{e^x}{x}}{1+\left(\frac{e^x}{x}\right)^2} \\ &= -\arctan\left(\frac{e^x}{x}\right)+C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I=-\arctan(\frac{e^x}{x})+C$

(9). $\int e^{\sec x}(\tan x-\sin x)dx$

解

我们令: $f(x)=h(x)e^{\sec x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(x)e^{\sec x}+h(x)e^{\sec x}\frac{\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{h'(x)\cos^2 x+h(x)\sin x}{\cos^2 x}e^{\sec x} \\ &= (\tan x-\sin x)e^{\sec x} \end{aligned}$$

当 $h(x)=\cos x$ 时,$f'(x)=(\tan x-\sin x)e^{\sec x}$, 原不定积分为: $I=\cos x e^{\sec x}+C$

(10). $\int e^{\frac{1}{x}}(2x-1)dx$

解

我们令: $f(x)=h(x)e^{\frac{1}{x}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(x)e^{\frac{1}{x}} - h(x)e^{\sec x}\frac{1}{x^2} \\ &= \frac{h'(x)x^2-h(x)}{x^2}e^{\sec x} \\ &= (2x-1)e^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

当 $h(x)=x^2$ 时,$f'(x)=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$, 原不定积分为: $I=x^2e^{\frac{1}{x}}+C$

(11). $\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx$

解

我们令: $f(x)=h(x)\frac{e^{\sin x}}{\cos x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left[h(x)e^{\sin x}\cos x+h'(x)e^{\sin x}\right]\cos x+h(x)e^{\sin x}\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{e^{\sin x}}{\cos^2 x}\left[h(x)\cos^2 x+h'(x)\cos x+h(x)\sin x\right] \\ &= e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

当 $h(x)=x\cos x-1$ 时,$f'(x)=e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}$, 原不定积分为: $I=\frac{(x\cos x-1)e^{\sin x}}{\cos x}+C$

(12). $\int e^{x^3}(10x-9x^7)dx$

解

我们令: $f(x)=h(x)e^{x^3}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x^3}\left(h'(x)+3x^2h(x)\right) \\ &= e^{x^3}(10x-9x^7) \end{aligned}$$

当 $h(x)=5x^2-3x^5$ 时,$f'(x)=e^{x^3}(10x-9x^7)$, 原不定积分为: $I=e^{x^3}(5x^2-3x^5)+C$

(13). $\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$

解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned} I &\xlongequal[x=u^2+1]{u=\sqrt{x-1}} \int \frac{2u}{(u^2+1)u}du \\ &= 2\arctan u + C \\ &= 2\arctan \sqrt{x-1} + C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = 2\arctan\sqrt{x-1} + C$

(14). $\int \frac{1}{x+\sqrt{x-1}}dx$

解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned} I &\xlongequal[x=u^2+1]{u=\sqrt{x-1}} \int \frac{2u}{(u^2+1)+u}du \\ &= \int \frac{2u}{u^2+u+1}du - \int \frac{1}{\frac{3}{4}+(u+\frac{1}{2})^2}du \\ &= ln(u^2+u+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}} + C \\ &= ln(x+\sqrt{x-1}) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = ln(x+\sqrt{x-1}) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{3}} + C$

(15). $\int \frac{1}{x^2\sqrt{2x-1}}dx$

解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned}
I & \xlongequal[x=\frac{u^2+1}{2}]{u=\sqrt{2x-1}} \int \frac{4}{(u^2+1)^2} du \\
& \xlongequal{u=\tan t} \int 4\cos^2 t dt \\
& = 2t+\sin 2t \\
& = 2t+\frac{2\tan t}{1+\tan^2 t} \\
& = 2\arctan u+\frac{2u}{1+u^2} \\
& = 2\arctan\sqrt{2x-1}+\frac{\sqrt{2x-1}}{x}+C
\end{aligned}$$

原不定积分为: $I=2\arctan\sqrt{2x-1}+\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x}+C$

(16). $\int \dfrac{\sqrt{1-x}}{x^3}dx$

解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned}
I & \xlongequal[t=\sqrt{1-x}]{x=1-t^2} \int \frac{2t^2}{(t^2-1)^3} dt \\
& \xlongequal[t=\sec u]{u=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)} \int \frac{2\cos^2 u}{\sin^5 u} du \\
& = \int \frac{2}{\sin^5 u} du - \int \frac{2}{\sin^3 u} du
\end{aligned}$$

我们有:

$$\begin{cases}
\int \dfrac{1}{\sin^3 x}dx = \dfrac{1}{4} ln\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) - \dfrac{\cos x}{2\sin^2 x} + C \\
\int \dfrac{1}{\sin^5 x}dx = \dfrac{3}{16} ln\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + \dfrac{3\cos^3 x - 5\cos x}{8\sin^4 x} + C
\end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{3}{8}ln\left(\frac{1-\cos u}{1+\cos u}\right)+\frac{3\cos^3 u-5\cos u}{4\sin^4 u}-\frac{1}{2}ln\left(\frac{1-\cos u}{1+\cos u}\right)+\frac{\cos u}{\sin^2 u}\\
&= -\frac{1}{8}ln\left(\frac{1-\cos u}{1+\cos u}\right)-\frac{\cos^3 u+\cos u}{4\sin^4 u}\\
&= -\frac{1}{8}ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)-\frac{t^3+t}{4(t^2-1)^2}\\
&= -\frac{1}{8}ln\left(\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right)-\frac{(2-x)\sqrt{1-x}}{4x^2}+C
\end{aligned}
$$

原不定积分为: $I=-\frac{1}{8}ln\left(\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right)-\frac{(2-x)\sqrt{1-x}}{4x^2}+C$

(17). $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$

解

原不定积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{x(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{2}dx\\
&= \int \frac{x\sqrt{x+1}}{2}dx-\int \frac{x\sqrt{x-1}}{2}dx\\
&= I_1-I_2\\
I_1 &\xlongequal[u=\sqrt{x+1}]{x=u^2-1} \int (u^2-1)u^2du\\
&= \frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\\
I_2 &\xlongequal[t=\sqrt{x-1}]{x=t^2+1} \int (t^2+1)t^2dt\\
&= \frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\\
I &= \frac{(x+1)^2\sqrt{x+1}}{5}-\frac{(x+1)\sqrt{x+1}}{3}-\frac{(x-1)^2\sqrt{x-1}}{5}-\frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{3}+C
\end{aligned}
$$

原不定积分为: $I=\frac{(x+1)^2\sqrt{x+1}}{5}-\frac{(x+1)\sqrt{x+1}}{3}-\frac{(x-1)^2\sqrt{x-1}}{5}-\frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{3}+C$

(18). $\int \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{2}}dx$

解

原不定积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2-2}dx \\
&= \int \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{2\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= \int \frac{1}{2\sqrt{1-x}}dx + \int \frac{1}{2\sqrt{1+x}}dx - \int \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-\frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin x + C
\end{aligned}
$$

原不定积分为: $I = \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-\frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin x + C$

(19). $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$

解

原不定积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I & \xlongequal[x=\frac{t^2-1}{t^2+1}]{t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \int \frac{4t^2}{(t^2+1)^2}dt \\
& \xlongequal{t=\tan u} \int 4\sin^2 u du \\
&= 2u - \sin 2u \\
&= 2u - \frac{2\tan u}{1+\tan^2 u} + C \\
&= 2\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}
$$

原不定积分为: $I = 2\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{1-x^2} + C$

(20). $\int x\sqrt{\frac{x}{3-x}}dx$

解

原不定积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I & \xlongequal[x=\frac{3t^2}{t^2+1}]{t=\sqrt{\frac{x}{3-x}}} \int \frac{18t^4}{(t^2+1)^3}dt \\
& \xlongequal{t=\tan u} \int 18\sin^4 u du \\
& = \int \frac{9(1-2\cos 2u+\cos^2 2u)}{2}du \\
& = \int \left(\frac{27}{4}+\frac{9}{4}\cos 4u-9\cos 2u\right)du \\
& = \frac{27}{4}u+\frac{9}{16}\sin 4u-\frac{9}{2}\sin 2u \\
& \xlongequal[\sin 2u=\frac{2t}{1+t^2}]{\cos 2u=\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{27}{4}\arctan\sqrt{\frac{x}{3-x}}-\frac{(9+2x)\sqrt{3x-x^2}}{4}+C
\end{aligned}
$$

原不定积分为: $I=\frac{27}{4}\arctan\sqrt{\frac{x}{3-x}}-\frac{(9+2x)\sqrt{3x-x^2}}{4}+C$

(21). $\int\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$

解

原不定积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I & \xlongequal[x=\frac{t^2}{1-t^2}]{t=\sqrt{\frac{x}{1+x}}} \int \frac{2t^2}{(t^2-1)^2}dt \\
& \xlongequal{t=\sec u} \int \frac{2}{\sin^3 u}du \\
& = \frac{1}{2}ln\left(\frac{1-\cos u}{1+\cos u}\right)-\frac{\cos u}{\sin^2 u}+C \\
& = \frac{1}{2}ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)-\frac{t}{1-t^2}+C \\
& = \frac{1}{2}ln\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}\right)+\sqrt{x+x^2}+C
\end{aligned}
$$

原不定积分为: $I=\frac{1}{2}ln\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}\right)+\sqrt{x+x^2}+C$

(22). $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$

解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned} I & \xlongequal[x=\frac{t^2+1}{t^2-1}]{t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} & \int -\frac{4t^2}{(t^2-1)^2}dt \\ & \xlongequal{t=\sec u} & \int -\frac{4}{\sin^3 u}du \\ & = & ln\left(\frac{1+\cos u}{1-\cos u}\right)+\frac{2\cos u}{\sin^2 u}+C \\ & = & ln\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right)+\sqrt{x^2-1}+C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = ln\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right)+\sqrt{x^2-1}+C$

(23). $\int \sqrt{x(x+2)}dx$

解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned} I & \xlongequal[x=u-1]{u=x+1} & \int \sqrt{u^2-1}du \\ & = & \frac{u\sqrt{u^2-1}}{2}-\frac{ln|u+\sqrt{u^2-1}|}{2}+C \\ & = & \frac{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}{2}-\frac{ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}|}{2}+C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = \frac{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}{2}-\frac{ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}|}{2}+C$

(24). $\int \frac{x^2}{\sqrt{-x^2+2x+3}}dx$

解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned} I & \xlongequal[x=2\sin\theta+1]{\sin\theta=\frac{x-1}{2}} \int (2\sin\theta+1)^2 d\theta \\ & = 3\theta - \sin 2\theta - 4\cos\theta + C \\ & = 3\arcsin\frac{x-1}{2} - \frac{(x+3)\sqrt{-x^2+2x+3}}{2} + C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = 3\arcsin\frac{x-1}{2} - \frac{(x+3)sqrt{-x^2+2x+3}}{2} + C$

(25). $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$

解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned} I & \xlongequal[x=\arctan u]{\tan x=u} \int \frac{2u}{u^4+1} du \\ & = \int \frac{1}{(u^2)^2+1} d(u^2) \\ & = \arctan u^2 + C \\ & = \arctan(tan^2 x) + C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = \arctan(tan^2 x) + C$

(26). $\int \frac{e^{\sin x}\sin 2x}{\sin^4(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})} dx$

解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned} I & = \int \frac{8e^{\sin x}\sin x}{(1+\sin x)^2} d\sin x \\ & \xlongequal[x=\arcsin u]{\sin x=u} \int \frac{8e^u u}{(1+u)^2} du \\ & = \frac{8e^u}{1+u} + C \\ & = \frac{8e^{\sin x}}{1+\sin x} + C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = \frac{8e^{\sin x}}{1+\sin x} + C$

(27). $\int \frac{1}{\sin^2 x + \sin 2x} dx$

解

原不定积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{\tan^2 x + 2\tan x} d\tan x \\
&= \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\tan x + 2}\right) d\tan x \\
&= \frac{1}{2} ln\left|\frac{\tan x}{\tan x + 2}\right| + C
\end{aligned}
$$

原不定积分为: $I = \frac{1}{2} ln\left|\frac{\tan x}{\tan x + 2}\right| + C$

(28). $\int \frac{\sin x}{\cos x + 2\sin x} dx$

解

原不定积分等价于: $I = \frac{A(\cos x + 2\sin x) + B(2\cos x - \sin x)}{\cos x + 2\sin x}$

我们有: $\begin{cases} A + 2B = 0 \\ 2A - B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{5} \\ B = -\frac{1}{5} \end{cases}$

原不定积分等价为:

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{2}{5} - \frac{2\cos x - \sin x}{5(\cos x + 2\sin x)} \\
&= \frac{2x}{5} - \frac{ln|\cos x + 2\sin x|}{5} + C
\end{aligned}
$$

原不定积分为: $I = \frac{2x}{5} - \frac{ln|\cos x + 2\sin x|}{5} + C$

42. 常见不定积分

常见不定积分

1.

$$
\begin{cases} \int \frac{1}{\sin x} dx = ln|\cot x + \csc x| + C \\ \int \frac{1}{\cos x} dx = ln|\tan x + \sec x| + C \end{cases}
$$

2.

$$\begin{cases} \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \end{cases}$$

3.

$$\int \frac{1}{\sin^3 x} dx$$

$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{1}{\sin^4 x} d\cos x \\ &= -\int \frac{1}{(1-t^2)^2} dt \\ &= \int \left[\frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{C}{t-1} + \frac{D}{(t-1)^2} \right] dx \end{aligned}$$

我们令 $f(x) = A(t-1)^2(t+1) + B(t-1)^2 + C(t+1)^2(t-1) + D(t+1)^2 = -1$, 我们有:

$$\begin{cases} f(0) = A + B - C + D = -1 \\ f(-1) = 4B = -1 \\ f(1) = 4D = -1 \\ f(2) = 3A + B + 9C + 9D = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{4} \\ B = -\frac{1}{4} \\ C = \frac{1}{4} \\ D = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

原不定积分为:

$$\begin{aligned} I &= \int \left[-\frac{1}{4(t+1)} - \frac{1}{4(t+1)^2} + \frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4(t-1)^2} \right] dx \\ &= -\frac{ln|t+1|}{4} + \frac{1}{4(t+1)} + \frac{ln|t-1|}{4} + \frac{1}{4(t-1)} \\ &= \frac{1}{4} ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = \frac{1}{4} ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + C$

4.

$$\int \frac{1}{\sin^4 x} dx$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^4 x} dx \\ &= \int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^4 x} d\tan x \\ &= -\frac{1}{3\tan^3 x} - \frac{1}{\tan x} + C \end{aligned}$$

5.

$$\int \frac{1}{\sin^5 x} dx$$

$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{1}{\sin^6 x} d\cos x \\ &= \int \frac{1}{(t^2-1)^3} dt \\ &= \int \left[\frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{C}{(t+1)^3} + \frac{D}{t-1} + \frac{E}{(t-1)^2} + \frac{F}{(t-1)^3}\right] dx \end{aligned}$$

我们令:

$$f(x) = A(t-1)^3(t+1)^2 + B(t-1)^3(t+1) + C(t-1)^3 + D(t+1)^3(t-1)^2 + E(t+1)^3(t-1) + F(t+1)^3 = 1$$

我们有:

$$\begin{cases} A + D = 0 \\ -A + B + D + E = 0 \\ f(0) = -A - B - C + D - E + F = 1 \\ f(-1) = -8C = 1 \\ f(1) = 8F = 1 \\ f(2) = 9A + 3B + C + 27D + 27E + 27F = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{3}{16} \\ B = -\frac{3}{16} \\ C = -\frac{1}{8} \\ D = \frac{3}{16} \\ E = -\frac{3}{16} \\ F = \frac{1}{8} \end{cases}$$

原不定积分为:

$$\begin{aligned} I &= \int\left[-\frac{1}{8(t+1)}-\frac{3}{16(t+1)^2}-\frac{1}{8(t+1)^3}+\frac{3}{16(t-1)}-\frac{3}{16(t-1)^2}+\frac{1}{8(t-1)^3}\right]dx \\ &= -\frac{3ln|t+1|}{16}+\frac{3}{16(t+1)}+\frac{1}{16(t+1)^2}+\frac{3ln|t-1|}{16}+\frac{3}{16(t-1)}-\frac{1}{16(t-1)^2} \\ &= \frac{3}{16}ln\left(|\frac{1-t}{1+t}|\right)+\frac{6t^3-10t}{16(t^2-1)^2} \\ &= \frac{3}{16}ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)+\frac{3\cos^3 x-5\cos x}{8\sin^4 x}+C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I=\frac{3}{16}ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)+\frac{3\cos^3 x-5\cos x}{8\sin^4 x}+C$

6.

$$\begin{cases} \int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C \\ \int\sqrt{x^2-a^2}dx=\frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2}+\frac{ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|}{2}+C \\ \int\sqrt{x^2+a^2}dx=\frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2}+\frac{ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|}{2}+C \\ \int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C \\ \int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C \end{cases}$$

43. 周期性、轴对称性、中心对称性

定理 40.5.1

1. 函数 $f(x)$ 满足上面三个性质中任意两个, 均可以推出第三个性质 (知二推三)
2. $f(x)$ 有对称中心 (a,c), 且关于直线 $x=b$ 轴对称, 我们可以推出 $f(x)$ 的一个周期 $T=4|b-a|$.
3. $f(x)$ 有两个对称中心 (a,c) 和 (b,c), 我们可以推出 $f(x)$ 的一个周期 $T=2|b-a|$.
4. $f(x)$ 有两个对称轴直线 $x=a$ 和直线 $x=b$, 我们可以推出 $f(x)$ 的一个周期 $T=2|b-a|$.
5. $f(x)$ 是周期函数, 且周期为 T, 函数 $f(x)$ 关于直线 $x=a$ 轴对称, $x=a+\frac{nT}{2}$ 也是 $f(x)$

对称轴; $(a+\dfrac{(2n-1)T}{4}, c)$ 是 $f(x)$ 对称中心.

44. 微分算子法
45. 双元法求不定积分
46. 二重积分计算旋转体体积
47. 压缩映射原理

40.6 多项式函数极值点和拐点

48. 多项式函数极值点和拐点个数

定理 40.6.1 (代数基本定理)

任何一个一元 n 次复系数多项式, 都恰好有 n 个复根, 且可以表示为 n 个一次因式的乘积.

推论 40.6.1 (曲线的极值点和拐点)

曲线上的可导点不可能同时是极值点和拐点, 不可导点可能同时是极值点和拐点.

命题 40.6.1 (多项式函数极值点和拐点个数: 命题一)

多项式函数 $f(x)=(x-a)^n, (n>1)$, 当 n 为奇数时, $(a,0)$ 是 $f(x)$ 的拐点, 当 n 为偶数时, $x=a$ 是 $f(x)$ 的极值点.

证明

$$f'(x)=n(x-a)^{n-1}, \quad f''(x)=n(n-1)(x-a)^{n-2}$$

当 n 为偶数时, 我们有: $f'(a)=0$ 且

$$\exists x\in \mathring{U}(a,\delta), f(x)=(x-a)^n>0=f(a)$$

或者

$$\exists \delta>0, x\in(a-\delta,a), f'(x)<0; x\in(a,a+\delta), f'(x)>0$$

我们有: 当 n 为偶数时, $x=a$ 是 $f(x)$ 的极值点.
当 n 为奇数时, 我们有: $f''(a)=0$ 且

$$\exists \delta>0, x\in(a-\delta,a), f''(x)<0; x\in(a,a+\delta), f''(x)>0$$

我们有: 当 n 为奇数时, $(a,0)$ 是 $f(x)$ 的拐点.

命题 40.6.2 (多项式函数极值点和拐点个数: 命题二)

多项式函数 $f(x)=(x-a)^n g(x),(n>1),g(a)\neq 0$, 当 n 为奇数时, $(a,0)$ 是 $f(x)$ 的拐点, 当 n 为偶数时, $x=a$ 是 $f(x)$ 的极值点.

证明

$$\begin{cases} f'(x)=ng(x)(x-a)^{n-1}+g'(x)(x-a)^n=(x-a)^{n-1}[ng(x)+(x-a)g'(x)] \\ f''(x)=(x-a)^{n-2}[n(n-1)g(x)+2n(x-a)g'(x)+(x-a)^2g''(x)] \end{cases}$$

当 n 为偶数时, 我们不妨假设 $g(a)>0$, 根据极限的保号性, 我们有:

$$\exists\delta_1>0, s.t.\ x\in U(a,\delta_1), g(a)>0$$

当 $x\in U(a,\delta_1), f(x)=(x-a)^n g(x)\geq f(a)=0, x=a$ 是 $f(x)$ 的一个极值点.
当 n 为奇数时, $x\to a,(x-a),(x-a)^2$ 都是无穷小量, $g'(a),g''(a)$ 都是定值, 因此

$$\exists\delta_2>0, s.t.\ x\in U(a,\delta_2), 2n(x-a)g'(x)+(x-a)^2g''(x)\leq|n(n-1)g(x)|$$

我们有: $x\in U(a,\delta_2),[n(n-1)g(x)+2n(x-a)g'(x)+(x-a)^2g''(x)]>0$, 即: $f''(x)$ 与 $(x-a)^{n-2}$ 符号相同
当 $x\in(a-\delta_2,a), f''(x)<0; x\in(a,a+\delta_2), f''(x)>0$, $(a,0)$ 是 $f(x)$ 的一个拐点.

命题 40.6.3 (多项式函数极值点和拐点个数: 命题三)

讨论多项式函数: $P_n(x)=\prod\limits_{i=1}^{k}(x-a_i)^{p_i}$ 极值点和拐点个数, 其中满足:

$$a_i\in\mathbb{R}, a_1<a_2<\cdots<a_k, p_i\in\mathbb{Z}^+$$

证明

我们首先有: $P_n(x)$ 是多项式函数, 在 $\mathbb{R}$ 上 n 阶可导, $P_n(x)$ 的极值点一定满足: $P_n'(x)=0$, 拐点满足: $P_n''(x)=0$

$P(x)$ 有 k 个实数根, 这 k 个实数根的重数分别为: $p_1,p_2,\cdots,p_k$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{k}p_i=n$
我们利用多个函数连乘的求导公式:

$$P_n'(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{p_i-1}\left[\sum_{i=1}^{k}p_i\left(\prod_{j=1\,j\neq i}^{k}(x-a_j)\right)\right]$$

当 $p_i \geq 2(i=1,2,\cdots,k)$ 时, $x=a_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是 $P_n'(x)$ 的一个零点, 此类的驻点一共有 k 个, $P_n'(x)$ 有 $p_i-1(i=1,2,\cdots,k)$ 重根 $a_i(i=1,2,\cdots,k)$

$P_n'(x)$ 此类的零点个数为: $n_1=\sum\limits_{i=1}^{k}(p_i-1)=n-k$

在 $(a_i,a_{i+1}),(i=1,2,\cdots,k-1)$ 中, 我们由罗尔定理得到: $\exists \xi_i \in (a_i,a_{i+1}),(i=1,2,\cdots,k-1), s.t.\ P'(\xi_i)=0$, 此类零点的个数为 $k-1$ 个

$P_n'(x)$ 是 $n-1$ 次多项式函数, 至多有 $n-1$ 个复根, 我们得到 $P_n'(x)$ 有 $n-k+k-1=n-1$ 个实数根, 其中前面 $n-k$ 个根中存在重根情况.

推论 40.6.2 (多项式函数零点)

$P_n(x)$ 有 n 个实数根 (含重根), 那么 $P_n'(x),P_n''(x),\cdots,P_n^{(n-1)}(x)$ 的根全部是实数.

我们继续看 $P_n'(x)$ 的两类零点, 其中一类是 $x=a_i(i=1,2,\cdots,k),(p_i>1)$, 另一类是 $x=\xi_i(i=1,2,\cdots,k-1)$

第一类零点: 我们由40.6.2得到: 当 p_i 为偶数的时候, a_i 是 $P_n(x)$ 的极值点, 当 p_i 为奇数的时候, a_i 是 $P_n(x)$ 的拐点

第二类零点: $P_n'(x)=\sum\limits_{i=1}^{n-1}(x-\eta_i),\eta_i\in\mathbb{R}$, 当 $x\in U(\xi_i,\delta)$ 时, 只有 $(x-\xi_i)$ 这一项符号改变, 因此 $x=\xi_i$ 是 $P_n(x)$ 极值点

我们不妨假设 $p_i>1\ \&\ p_i$为奇数 的个数为 k_1, $p_i>1\ \&\ p_i$为偶数 的个数为 k_2

$P_n(x)$ 的极值点个数为 $k-1+k_2$

关于拐点的个数, 我们可以类比极值点个数的方法, 将 $P_n'(x)$ 当做原函数, 求 $P_n'(x)$ 的极值点个数, 我们将 $P_n'(x)$ 改写为:

$$P_n'(x)=\sum_{i=1}^{k}p_i\left[(x-a_1)^{p_1-1}(x-\xi_1)(x-a_2)^{p_2-1}\cdots(x-\xi_{k-1})(x-a_k)^{p_k-1}\right]$$

我们得到:

1. $P_n'(x)$ 有零点 $a_1, \xi_1, a_2, \cdots, a_{k-1}, \xi_{k-1}, a_k$, 其中 a_i 是重根, ξ_i 是非重根

2. 根据罗尔定理, 我们得到: 在 $P_n'(x)$ 每两个零点之间存在 η_j, 使得 $P_n''(x) = 0$, 且是 $P_n''(x)$ 的极值点, 也是 $P_n(x)$ 的拐点, 个数为: $k_1 + k_2 + k - 2$

3. $a_i(i = 1, 2, \cdots, k)$ 中, 满足 $p_i > 1$ 且 $p_i - 1$ 为偶数, 也就是 p_i 为奇数时, $x = a_i$ 是 $P_n''(x)$ 的极值点, 也是 $P_n(x)$ 的拐点, 个数为: k_1

4. $P_n(x)$ 的拐点个数: $k + 2k_1 + k_2 - 2$

综上所述, 我们有以下的结论:

推论 40.6.3 (极值点和拐点个数)

假设 $P_n(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - a_i)^{p_i}$, 其中 k_1 个 p_i 为奇数, k_2 个 p_i 为偶数, k_0 个 $p_i = 1$, 满足 $k_0 + k_1 + k_2 = k$, 我们有:

- $P_n(x)$ 的极值点个数: $k - 1 + k_2 = k_0 + k_1 + 2k_2 - 1$
- $P_n(x)$ 的拐点个数: $k + 2k_1 + k_2 - 2 = k_0 + 3k_1 + 2k_2 - 2$

49. 柯西收敛准则

定理 40.6.2 (柯西收敛准则)

柯西极限存在准则, 又称柯西收敛准则, 给出某个式子 (数列、数项级数、函数等) 收敛的一个充分必要条件, 主要应用在数列、数项级数、函数、反常积分、函数列和函数项级数等的收敛性判断中.

命题 40.6.4 (柯西收敛准则: 数列)

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是: 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n, m > N$ 时, $|a_n - a_m| < \varepsilon$, 我们将满足条件的 $\{a_n\}$ 称为柯西序列, 上述定理也可表述为: 数列 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当 $\{a_n\}$ 是柯西序列

证明

(1). 必要性:

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \eta$, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_0 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_0$ 时, $|a_n - \eta| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, 我们有:

$$\begin{cases} \forall n > N_0, s.t.\ |a_n - \eta| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \forall m > N_0, s.t.\ |a_m - \eta| < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow |xn - x_m| = |(x_n - \eta) - (x_m - \eta)| \leq |x_n - \eta| + |x_m - \eta| \leq \varepsilon$$

(2). 充分性:

命题 40.6.5 (柯西收敛准则: 数项级数)

♠

证明

(1). 必要性:

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \eta$, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_0 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_0$ 时, $|a_n - \eta| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, 我们有:

$$\begin{cases} \forall n > N_0, s.t.\ |a_n - \eta| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \forall m > N_0, s.t.\ |a_m - \eta| < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow |x_n - x_m| = |(x_n - \eta) - (x_m - \eta)| \leq |x_n - \eta| + |x_m - \eta| \leq \varepsilon$$

(2). 充分性:

命题 40.6.6 (柯西收敛准则: 函数)

♠