$\LaTeX$ *Single Variable Calculus*

Sun for morning, moon for night, and you forever.

作者：Lyshmily.Y & 木易

组织：Lyshmily.Y

时间：December 11, 2024

版本：V.1.0

邮箱：yjlpku.outlook.com & 845307723@qq.com

在没有结束前，总要做很多没有意义的事，这样才可以在未来某一天，用这些无意义的事去堵住那些讨厌的缺口

目录

第一部分

高数 (上)

第 1 部分目录

第 1 章 预备知识

内容提要

- 函数定义和性质
- 基本不等式
- 柯西不等式
- 三角函数和反三角函数
- 特殊函数

1.1 函数

定义 1.1.1 (函数)

1. 函数定义:

X, Y 是给定的两个集合, 若对于任意 $x \in X$, 存在法则 f, 使得唯一的 $y = f(x)$ 满足 $y \in Y$, 则称 f 为从 X 到 Y 的一个函数, 记为 $f: X \to Y$, 其中 X 称为定义域, $f(x)(x \in X)$ 称为值域

2. 函数的三要素: 定义域、对应法则和值域

定义 1.1.2 (函数的基本性质)

1. 单射: 若对于任意 $x_1, x_2 \in X$, 若 $x_1 \neq x_2$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$
2. 满射: 若对于任意 $y \in Y$, 存在 $x \in X$, 使得 $f(x) = y$
3. 双射: 若 f 既是单射又是满射

定义 1.1.3 (函数基本运算)

1. 基本四则运算
2. 复合运算
3. 反函数运算

性质 1. 函数四大性质

- 有界性
- 奇偶性: $\begin{cases} \text{奇函数}: f(-x) = -f(-x) \\ \text{偶函数}: f(-x) = f(x) \end{cases}$
- 周期性: $f(x+T) = f(x)$
- 单调性: $\forall x_1, x_2 \in I(x_1 \neq x_2), \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > (<)0$, $f(x)$ 单调递增 (减)

推论 1.1.1 (奇偶性推论)

任意一个定义在 $[-l, l]$ 上的函数 $f(x)$ 均可以写成一个奇函数和一个偶函数的和 $f(x) = h(x) + g(x)$, 其中 $h(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ 是偶函数, $g(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ 是奇函数

推论 1.1.2 (周期性、中心对称性、轴对称性)

(1). $f(x)$ 有对称中心 (a, c), 且关于直线 $x = b$ 轴对称, 我们可以推出 $f(x)$ 的一个周期 $T = 4|b - a|$.
(2). $f(x)$ 有两个对称中心 (a, c) 和 (b, c), 我们可以推出 $f(x)$ 的一个周期 $T = 2|b - a|$.
(3). $f(x)$ 有两个对称轴直线 $x = a$ 和直线 $x = b$, 我们可以推出 $f(x)$ 的一个周期 $T = 2|b - a|$.

证明

(1).

$$\begin{cases} f(2a - x) + f(x) = 2c \\ f(2b - x) = f(x) \end{cases} \to \begin{cases} f(2a - x) + f(2b - x) = 2c \\ f(2a - 2b + x) + f(x) = 2c \end{cases} \to f(x) = f(x + 4a - 4b)$$

(2).

$$\begin{cases} f(2a - x) = f(2b - x) \\ f(2a - 2b + x) = f(x) \end{cases} \to f(x) = f(x + 2a - 2b)$$

(3).

$$\begin{cases} f(2a - x) = f(x) \\ f(2b - x) = f(x) \end{cases} \to \begin{cases} f(2a - x) = f(2b - x) \\ f(2a - 2b + x) = f(x) \end{cases} \to f(x) = f(x + 2a - 2b)$$

1.1.1 初等函数

定义 1.1.4 (初等函数)

初等函数是指可以用有限次基本初等函数和有限次代数运算得到的函数, 六种基本初等函数:

1. 常数函数: $y = C$
2. 幂函数: $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^*$
3. 指数函数: $y = a^x, a > 0, a \neq 1$
4. 对数函数: $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$
5. 三角函数: $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$
6. 反三角函数: $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \cot^{-1}(x), y = \sec^{-1}(x), y = \csc^{-1}(x)$

♣

1.1.2 三角函数和反三角函数

定理 1.1.1 (积化和差 & 和差化积 & 倍角公式)

积化和差公式:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$

和差化积公式:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

倍角公式:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

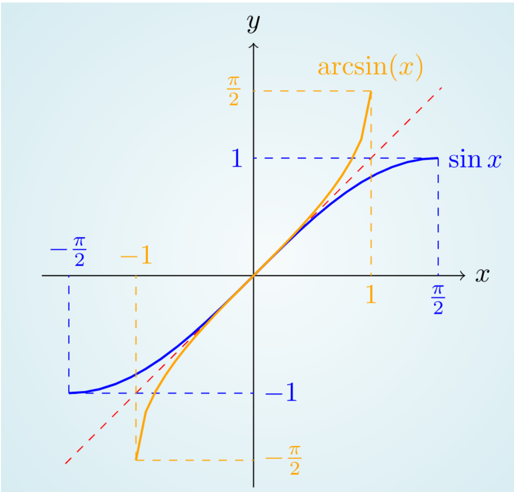
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \qquad \cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

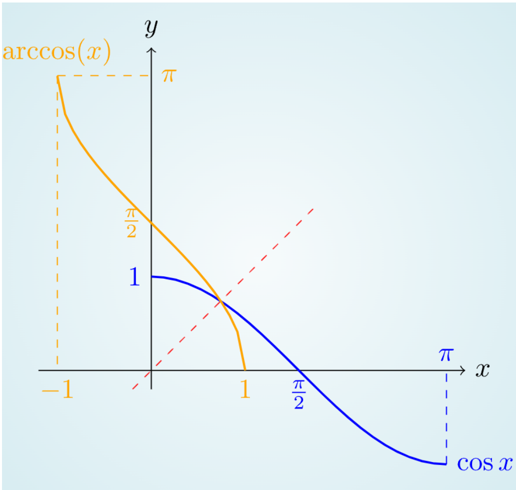
$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

定义 1.1.5 (反三角函数)

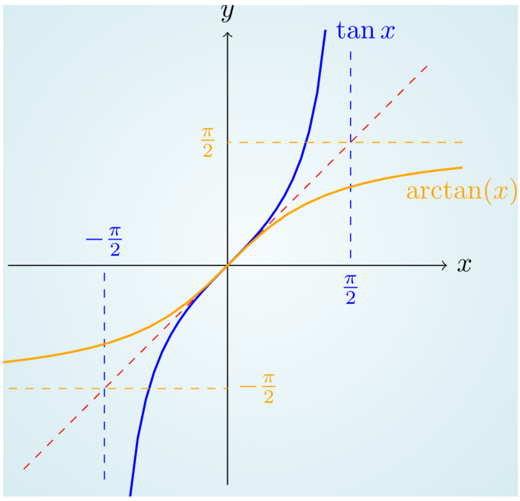
1. $\arcsin x$ 的定义域为 $[-1,1]$, 值域为 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$
2. $\arccos x$ 的定义域为 $[-1,1]$, 值域为 $[0,\pi]$
3. $\arctan x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 值域为 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$



(a) $\arcsin(x)$ & $\sin(x)$



(b) $\arccos(x)$ & $\cos(x)$



(c) $\arctan(x)$ & $\tan(x)$

图 1.1: 反三角函数图像

1.1.3 特殊函数

定义 1.1.6 (特殊函数)

1. 阶乘函数:
$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1, (2n)!! = 2^n \cdot n!, 0! = 1$$
2. 二项式系数:
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i}$$
3. 绝对值函数:
$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$
4. 符号函数:
$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$
5. 取整函数:
$$f(x) = [x], x-1 < [x] \leq x, \lim_{x\to 0^+} = 0, \lim_{x\to 0^-} = -1$$
6. 分段函数:
$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in D_1 \\ f_2(x) & x \in D_2 \\ \dots \end{cases}$$
7. 黎曼函数:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & p, q \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q} \in (0,1) \\ 0 & x \notin \mathbb{Q}, x = 0, 1 \end{cases}$$
8. 狄利克雷函数:
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

♣

定理 1.1.2 (平均值不等式 $a_i > 0$)

平方平均值:
$$Q_n = \sqrt{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2}{n}}$$

算术平均值:

$$A_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$$

几何平均值:

$$G_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

调和平均值:

$$H_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i}}$$

平均值不等式:

$$Q_n \geq A_n \geq G_n \geq H_n, \text{当且仅当} a_1 = a_2 = \cdots = a_n \text{等号成立}$$

定理 1.1.3 (柯西不等式)

二维形式:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2, \text{当且仅当} ad = bc \text{时等号成立}$$

n 维形式:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right), \text{当且仅当} \frac{a_i}{b_i} = c \text{时等号成立}$$

向量形式:

$$(\alpha, \beta)^2 \leq (\alpha, \alpha)(\beta, \beta)$$

定理 1.1.4 (重要不等式)

1. $\sin x < x < \tan x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$ $\qquad$ $\arctan x < x < \arcsin x, x \in [0, 1]$
2. $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$ $\qquad$ $x < \tan x < \frac{4}{\pi}x, x \in (0, \frac{\pi}{4})$
3. $e^x \geq x + 1, x \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $x - 1 \geq \ln x, x \in (0, +\infty)$
4. $\frac{1}{1+x} < \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$

定理 1.1.5 (重要公式)

1. $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$
2. $(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ $\qquad$ $(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

3. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$
4. $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-1}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}), n \in \{2k+1 | k \in \mathbb{N}\}$

1.2 函数的表示方法

1.2.1 显式表达

定义 1.2.1 (显示表达)

$y = f(x)$ 初等函数都是显性表达

1.2.2 隐式表达

定义 1.2.2 (隐式表达)

$f(x, y) = 0$ 一般不能用 x 表示 y, 也不能用 y 表示 x

1.2.3 极坐标

定义 1.2.3 (极坐标)

极坐标系是平面直角坐标系的一种推广, 它是由一个原点 O 和一个射线 Ox 组成的, 其中 O 称为极点, Ox 称为极轴, 任意一点 P 到极点 O 的距离 r 叫做点 P 的极径, 点 P 到极轴的角 θ 叫做点 P 的极角, 记为 $P(r, \theta)$

定义 1.2.4 (重要极坐标方程)

1. 圆方程: $r = a, r = a\sin\theta, r = a\cos\theta$
2. 心形线方程: $r = a(1 \pm \cos\theta), r = a(1 \pm \sin\theta)$
3. 阿基米德螺线方程: $r = a\theta$
4. 三叶玫瑰线方程: $r = a\sin 3\theta, r = a\cos 3\theta$
5. 伯努利双扭线方程: $r^2 = a^2\cos 2\theta, r^2 = a^2\sin 2\theta$

1.2.4 参数方程

定义 1.2.5 (参数方程)

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

定义 1.2.6 (重要参数方程)

1. 摆线方程: $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$
2. 星形线方程: $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$

♣

注

- 双曲函数和反双曲函数的定义和性质 **def** : 7.2.1
- 常见曲线极坐标和参数方程 **def** : 7.6.1

第 2 章 数列极限

内容提要

- 数列极限定义和性质
- 夹逼准则
- 归结原理
- 单调有界准则

2.1 数列极限

定义 2.1.1 (数列极限)

设 x_n 是一数列, 若存在常数 a, $\forall \epsilon > 0, \exists N_0 > 0$, 当 $n > N_0$ 时, $|x_n - a| < \epsilon$ 恒成立, 常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限或者说数列 $\{x_n\}$ 趋近于 a ♣

推论 2.1.1 (唯一性)

若极限存在, 则极限唯一 ♠

推论 2.1.2 (有界性)

若数列 $\{x_n\}$ 的极限 a 存在, 则数列 $\{x_n\}$ 有界 ♠

推论 2.1.3 (保号性)

若数列 $\{x_n\}$ 的极限 $a > 0(a < 0)$, 则存在正整数 N_0, 当 $n > N_0$ 时, $x_n > 0(x_n < 0)$, 取 $\epsilon = \pm a$ 即可 ♠

注

- 若数列的任意子列发散, 数列极限不存在
- 若数列的任意两个子列极限存在但不相等, 数列极限不存在

推论 2.1.4 (数列极限)

- 如果数列从某项起有 $x_n \geq 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $a \geq 0$
- 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |A|$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \to \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1, & a \neq 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \text{不一定存在}, & a = 0 \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = a \to \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty, & |a| > 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0, & |a| < 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \text{不确定}, & |a| = 1 \end{cases}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$存在且$x_n > 0 \to \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$

♠

2.2 数列极限计算

2.2.1 定义法

定义 2.2.1 (极限的四则运算)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}, b \neq 0$

♣

2.2.2 归结原理

定义 2.2.2 (归结原理)

设函数 $f(x)$ 在去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$ 上有定义, 那么 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ 的充分必要条件是: 对与一切序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathring{U}(a,\delta)$, 只要 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 就有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$

♣

2.2.3 夹逼准则

定义 2.2.3 (夹逼准则)

设数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 满足 $x_n \leq y_n \leq z_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, 条件可变为 $n > N_0$ 时, $x_n \leq y_n \leq z_n$(有限无关性)

♣

推论 2.2.1 (夹逼准则)

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_1^n+u_2^n+u_3^n+\cdots+u_m^n}=\max\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$

证明

令 $a=\max\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$

$$a^n\le u_1^n+u_2^n+u_3^n+\cdots+u_m^n\le ma^n$$

夹逼准则:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a^n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{(ma^n)}=a=\max\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$$

2.2.4 单调有界准则

定义 2.2.4 (单调有界准则)

单调有界数列必有极限 **the** : 7.1.1

2.3 Exercise

命题 2.3.1

设 $x_1=a\ge 0, y_1=b\ge 0, a\le b, x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}, y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}(n=1,2,\cdots)$, 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$

命题 2.3.2

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$, 且 $|q|<1$, 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$

命题 2.3.3

设 $f_n(x)=1-(1-\cos x)^n(n=1,2,\cdots)$

(1). 证明: 方程 $f_n(x)=\dfrac{1}{2}$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内有且只有一个实数根 x_n

(2). 设 $x_n\in(0,\dfrac{\pi}{2})$, 满足 $f_n(x)=\dfrac{1}{2}$, 证明:

$$\arccos\frac{1}{n}<x_n<\frac{\pi}{2}, \text{且} \lim_{n\to+\infty}x_n=\frac{\pi}{2}$$

命题 2.3.4

设 $x_1>0$, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=\ln(e^{x_n}-1)-\ln x_n$, 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在并求其值

命题 2.3.5

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $|f'(x)|<1$, 当 $x\in[a,b]$ 时, 有 $a<f(x)<b$,$F(x)=\dfrac{x+f(x)}{2}$, 证明:

(1). $\exists!\, x^*\in(a,b),\ s.t.\ F(x^*)=x^*$

(2). 对 $x_0\in[a,b]$, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=F(x_n)(n=0,1,2,\cdots)$, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x^*$

命题 2.3.6

(1). 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数, 证明:

$$f(k+1)\le\int_k^{k+1}f(x)dx\le f(k),\ k=1,2,\cdots$$

(2). 证明: $\ln(1+n)\le 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\le 1+\ln n$, 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}$

命题 2.3.7

设 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续, 且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=-\infty$, 证明: $f(x)$ 在 (a,b) 内有最大值

引理 2.3.1 (不单调数列极限)

1. 压缩映射原理: 从定义出发, 证明: $|x_n-a|$ 极限为 0
2. 柯西列: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x_{n+1}-x_n)$, 证明这个级数收敛即可证明出数列 $\{x_n\}$ 极限存在
3. 奇数项和偶数项极限存在且相等: $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=A$

命题 2.3.8

设 $2x_1=1,2x_{n+1}=1-x_n^2$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$

命题 2.3.9

设 $x_1=1,x_n=1+\dfrac{1}{1+x_{n-1}},(n=1,2,\cdots)$, 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求出此极限

命题 2.3.10

设 $x_1=1,2x_{n+1}=x_n+\sqrt{x_n^2+\dfrac{1}{n^2}},(n=1,2,\cdots)$, 证明极限数列 $\{x_n\}$ 收敛.

命题 2.3.11

设 $x_0=1,x_{n+1}=\dfrac{1}{x_n^3+4},(n=0,1,2,\cdots)$, 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求出此极限

第 3 章 函数极限和连续

内容提要

- 函数极限定义和性质
- 无穷小概念和比阶
- 洛必达法则
- 连续和间断

3.1 函数极限

定义 3.1.1 (函数极限)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义, 如果存在常数 A, 对于任意给定的正数 ϵ, 总存在正数 δ, 使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\epsilon$, 那么常数 A 是当 x 趋于 x_0 时函数 $f(x)$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

$$\forall\epsilon>0,\exists\xi>0,x\in(x_0-\xi,x_0)\cup(x_0,x_0+\xi),|f(x)-A|<\epsilon\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

♣

定义 3.1.2 (单侧极限)

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左 (右) 邻域内有定义, 如果存在常数 A, 对于任意给定的正数 ϵ, 总存在正数 δ, 使得当 x 满足不等式 $0<x-x_0<\delta(0<x_0-x<\delta)$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\epsilon$, 那么常数 A 是当 x 趋于 x_0 时函数 $f(x)$ 的左 (右) 极限, 记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A(\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A)$

♣

定义 3.1.3 (无穷远极限)

无穷远处极限 (双侧, 单侧只取一边): $f(x)$ 在 $(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$ 上有定义, $\forall\epsilon>0,\exists A>0$, 当 $|x|>A$ 时, $|f(x)-l|<\epsilon$, 我们称 l 是当 x 趋于无穷远时函数 $f(x)$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$

定义 3.1.4 (极限发散)

1. 震荡发散: $\lim\limits_{x\to0}\sin(\frac{1}{x})$ 反复震荡
2. 左右极限存在但不相等: $\lim\limits_{x\to0}[x]$
3. 广义收敛: $f(x)$ 在 $x=a$ 的去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$ 上有定义, $\forall X>0,\exists\delta>0$, 当 $0<|x-a|<\delta$ 时, $|f(x)|>X$, 则称 $f(x)$ 在 $x=a$ 处广义收敛

性质 1. 唯一性

若极限存在, 则极限唯一

性质 1. 局部有界性

若函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\exists M>0,\delta>0,\ s.t.\ x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x-0+\delta),|f(x)|\le M$

性质 1. 局部保号性

若函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>(<)0,\exists\delta>0,\ s.t.\ x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x-0+\delta),f(x)>(<)0$

3.2 函数极限计算

3.2.1 无穷小 (大) 概念和比阶

定义 3.2.1 (无穷小 (大))

1. 无穷小: 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义, 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, 那么称函数 $f(x)$ 是当 x 趋于 x_0 时的无穷小
2. 无穷大: 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义, 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$, 那么称函数 $f(x)$ 是当 x 趋于 x_0 时的无穷大

定义 3.2.2 (无穷小比阶)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

1. 等价无穷小: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, 记作 $f(x)\sim g(x)$
2. 同阶无穷小: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = k(k\neq 0)$, 记作 $f(x)\approx g(x)$
3. 高阶无穷小: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, 记作 $f(x) = o(g(x))$
4. 低阶无穷小: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$, 记作 $g(x) = O(f(x))$

推论 3.2.1 (等价无穷小)

1. $x\to 0, x\sim \sin x\sim \tan x\sim \arcsin x\sim \arctan x\sim \ln(x+1)\sim e^x - 1$
2. $x\to 0, \sin x\sim x-\dfrac{x^3}{6}, \arcsin x\sim x+\dfrac{x^3}{6}, \tan x\sim x+\dfrac{x^3}{3}, \arctan x\sim x-\dfrac{x^3}{3}, \cos x\sim 1-\dfrac{x^2}{2}$
3. $x\to 0, (1+x)^a - 1\sim ax, a^x - 1\sim x\ln a$

定理 3.2.1 (洛必达法则)

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $x=a$ 的某去心邻域内可导 (a 可以为 ∞, 邻域也可以是单侧的), 且 $g'(a)\neq 0$, 满足:(1) 或 (2)

(1). $\dfrac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

(2). $\dfrac{\infty}{\infty}$: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$

如果 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$($l$ 可以是实数或者 ∞) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = l$

证明

构造辅助函数:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x = x_0 \\ f(x) & x\in \mathring{U}(x_0) \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} 0 & x = x_0 \\ g(x) & x\in \mathring{U}(x_0) \end{cases}$$

$F(x), G(x)$ 在 $[x_0, x]$ 上连续, 在 (x_0, x) 内可导, 且 $G'(x)\neq 0$

柯西中值定理:

$$\exists \xi\in (x_0, x),\ s.t. \frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)} = \frac{F'(xi)}{G'(\xi)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

定理 3.2.2 (广义洛必达定理)

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 上可导, 满足:

(1). $g'(x) \neq 0$

(2). $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$

(3). $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A(A\text{为有限数或} \pm \infty)$

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$

证明

首先考虑 $x \to x_0^-$:

(1). 当 A 为常数时:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ s.t.\ x \in (x_0 - \delta, x_0), \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \text{取定} x_1 \in (x_0 - \delta, x_0)$$

$x \in (x_1, x)$, 柯西中值定理:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Rightarrow \left|\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} - A\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$x \in [x_1, x_0)$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| &= \left|\frac{g(x) - g(x_1)}{g(x)}\left[\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} - A\right] + \frac{f(x_1) - Ag(x_1)}{g(x)}\right| \\
&\leq \left|1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}\right|\left|\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} - A\right| + \left|\frac{f(x_1) - Ag(x_1)}{g(x)}\right| \\
&\leq \left(1 + \left|\frac{g(x_1)}{g(x)}\right|\right)\left|\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} - A\right| + \left|\frac{f(x_1) - Ag(x_1)}{g(x)}\right|
\end{aligned}$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x_1)}{g(x)} = 0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x_1) - Ag(x_1)}{g(x)} = 0 \end{cases}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_2 \in (x_1, x_0), \forall x \in (x_2, x_0),\ s.t.\ \left|\frac{g(x_1)}{g(x)}\right| < 1\text{且}\left|\frac{f(x_1) - Ag(x_1)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

此时, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 = x_0 - x_2, \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0), \left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - A\right| < 2 \cdot \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

(2). 当 A 为 ∞ 时: $\left|\dfrac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)}\right| = \left|\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| > M$

取 $M = 1 \to \left|f(x) - f(x_1)\right| > \left|g(x) - g(x_1)\right| \to \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$

$x \to x_0^+$ 的情况类似

3.3 连续和间断

定义 3.3.1 (连续点)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0, \delta)$ 内有定义，如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，那么称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续

定义 3.3.2 (间断点)

第一类间断点:

1. 可去间断点: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)(f(x_0)$ 可以无定义)
2. 跳跃间断点: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

第二类间断点: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 至少有一个不存在

1. 震荡间断点: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 震荡不存在
2. 无穷间断点: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$
3. 其他第二类间断点

第 4 章 一元微分学

内容提要

- 导数和微分
- 基本求导公式
- 高阶导数
- 泰勒公式
- 函数单调性和凹凸性
- 极值点和拐点
- 渐近线
- 曲率和曲率半径

4.1 一元微分学概念

定义 4.1.1 (导数)

设 $y = f(x)$ 定义在区间 I 上, 自变量在 $x = x_0$ 处增加一个增量 Δx 时, 其中 $x_0 \in I, x_0 + \Delta \in I$, 函数值的增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, 如果极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在, 那么称此极限为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数, 记为 $f'(x_0)$ 或 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$ 或 $\dfrac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$

定义 4.1.2 (导数的几何意义)

函数 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 是函数 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的切线的斜率

定理 4.1.1 (导数存在充要条件)

函数 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处可导的充要条件是: 函数 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 存在且相等

定义 4.1.3 (微分)

设 $y=f(x)$ 定义在区间 I 上, 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导, 那么函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微分为 $dy=f'(x_0)dx$, 其中 dx 是自变量 x 的增量, dy 是因变量 y 的增量

4.2 一元微分学计算

定理 4.2.1 (基本求导公式)

1. $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$
2. $(a^x)'=a^x\ln a$ $\quad(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$
3. $(e^x)'=e^x$ $\quad(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
4. $(\sin x)'=\cos x$ $\quad(\cos x)'=-\sin x$
5. $(\tan x)'=\sec^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
6. $(\sec x)'=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}=\tan x\sec x$
7. $(\csc x)'=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}=-\cot x\csc x$
8. $(\cot x)'=-\csc^2 x$
9. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\arctan x)'=\dfrac{1}{x^2+1}$
12. $\left(\ln(x+\sqrt{x^2+a})\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$
13. $\left(\ln(x+\sqrt{x^2-a})\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a}}$

定理 4.2.2 (导数四则运算)

1. 和差法则: $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$
2. 积法则: $[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
3. 商法则: $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
4. 复合函数求导: $F[G(x)]'=F[G(x)]'\cdot G'(x)$

定理 4.2.3 (高阶导数)

1. $\sin^{(n)} x = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$ $\quad\sin^{(n)}(ax+b) = a^n \sin(ax+b+\frac{n\pi}{2})$
2. $\cos^{(n)} x = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$ $\quad\cos^{(n)}(ax+b) = a^n \cos(ax+b+\frac{n\pi}{2})$
3. $[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ $\quad[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$
4. $(\frac{1}{ax+b})^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$
5. 莱布尼茨公式: $(uv)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{i}{n}u^{(i)}v^{(n-i)}$

定理 4.2.4 (泰勒公式)

1. 欧拉公式: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
2. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$
3. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{2n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$
4. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{2n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$
5. $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!}x^{2n-1}, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
6. $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}, x \in (-1, 1)$
7. $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}, x \in (-1, 1)$
8. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots, x \in (-1, 1]$
9. $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \cdots, x \in [-1, 1)$
10. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$

定理 4.2.5 (特殊函数导函数)

1. 隐函数导数:

$$F(x,y) = 0 \Rightarrow F'(x,y)\cdot y' = 0$$

2. 指对数函数求导:

$$\ln y = \ln f(x) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad y = a^{f(x)} \Rightarrow y = e^{f(x)\ln a}$$

3. 反函数导数: $x=\varphi(y), y=f(x)$ 记 $x'_y=\varphi'(y), y'_x=f'(x)$

(1). 一阶导数: $x'_y y'_x=1 \Rightarrow \varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$

(2). 二阶导数: $x''_{yy}=-\dfrac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}$　　$y''_{xx}=-\dfrac{x''_{yy}}{(x'_y)^3}$

4. 参数方程导数: $x=x(t), y=y(t)$

(1). 一阶导数: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$

(2). 二阶导数: $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{dy}{dx}}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dx}}{dt}\cdot\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dx}{dx}\left[\dfrac{d^2y}{dt^2}\cdot\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{d^2x}{dt^2}\cdot\dfrac{dy}{dt}\right]$

4.3 一元微分学应用

4.3.1 几何应用

定义 4.3.1 (函数图像要点)

1. 定义域 (间断点)
2. 奇偶性
3. 渐近线 (铅垂、水平、斜)

Points

(1).

$$\begin{cases}\text{水平渐近线: } \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a \Rightarrow y=a \\ \text{铅垂渐近线: } \lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty \Rightarrow x=a \\ \text{斜渐近线: } \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}=a, \lim\limits_{x\to\infty} f(x)-ax=b \Rightarrow y=ax+b\end{cases}$$

(2). 在同一个趋向方向中水平渐近线和斜渐进线只能有一个

(3). 间断点处看铅垂渐近线, $\pm\infty$ 处看水平渐近线和斜渐近线

4. 单调性和极值
5. 凹凸性和拐点

4.3.2 函数单调性 & 凹凸性 & 极值点 & 拐点

定义 4.3.2 (单调性)

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是严格单调递增的; $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是严格单调递减的

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调不减的; $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调不增的

♣

定义 4.3.3 (凹凸性)

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义

1. $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是凹的
2. $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是凸的
3. $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > (<) \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) (\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是凸 (凹) 的

♣

定义 4.3.4 (极值点)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义, $\forall x \in \mathring{U}(x_0)$, 均有 $f(x) \leq (\geq) f(x_0)$, 称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极 (大) 值

♣

定义 4.3.5 (驻点)

一阶导数为 0 的点称为驻点, 对于多元函数, 驻点是一阶偏导数都为 0 的点

♣

定理 4.3.1 (极值点判别)

第一充分条件: $f(x)$ 在 x_0 处连续, 且在 $\mathring{U}(x_0)$ 内可导

$$\begin{cases} x \in (x_0-\delta, x_0), f'(x) > 0; x \in (x_0, x_0+\delta), f'(x) < 0 & f(x_0) = \max\limits_{x \in U(x_0)} \{f(x)\} \\ x \in (x_0-\delta, x_0), f'(x) < 0; x \in (x_0, x_0+\delta), f'(x) > 0 & f(x_0) = \min\limits_{x \in U(x_0)} \{f(x)\} \\ x \in (x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta), f'(x) \leq (\geq) 0 \end{cases}$$

第二充分条件: $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导, 且 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$

$$\begin{cases} f''(x_0) > 0 & f(x_0) = \min\limits_{x \in U(x_0)} \{f(x)\} \\ f''(x_0) < 0 & f(x_0) = \max\limits_{x \in U(x_0)} \{f(x)\} \end{cases}$$

第三充分条件: $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导, 且 $f^{(m)}(x_0) = 0 (m = 1, 2, \cdots, n-1), f^{(n)}(x_0) \neq$

$0, n \in \{2k|k \in \mathbb{N}^+\}$

$$\begin{cases} f^{(n)}(x_0) > 0 & f(x_0) = \min\limits_{x \in U(x_0)} \{f(x)\} \\ f^{(n)}(x_0) < 0 & f(x_0) = \max\limits_{x \in U(x_0)} \{f(x)\} \end{cases}$$

定义 4.3.6 (拐点)

连续函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, x_0 是区间的内点, 当函数 $f(x)$ 经过点 $(x_0, f(x_0))$ 时, 函数的凹凸性发生改变, 称 $(x_0, f(x_0))$ 是函数 $f(x)$ 的拐点

定理 4.3.2 (拐点判别)

第一充分条件: $f(x)$ 在 x_0 处连续, 且在 $\mathring{U}(x_0)$ 内二阶可导

$$\begin{cases} x \in (x_0 - \delta, x_0), f''(x) < (>)0 \\ x \in (x_0, x_0 + \delta), f''(x) > (<)0 \end{cases}$$

第二充分条件: $f(x)$ 在 x_0 处三阶可导

$$\begin{cases} f''(x_0) = 0 \\ f'''(x_0) \neq 0 \end{cases}$$

第三充分条件: $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导

$$\begin{cases} f^{(m)}(x_0) = 0 & m = 1, 2, \cdots, n-1 \\ f^{(n)}(x_0) \neq 0 & n \in \{2k+1|k \in \mathbb{N}^+\} \end{cases}$$

定理 4.3.3 (多项式函数极值点和拐点个数)

假设 $P_n(x) = \prod\limits_{i=1}^{k}(x - a_i)^{p_i}$, 其中 k_1 个 p_i 为奇数 (大于 1), k_2 个 p_i 为偶数, k_0 个 $p_i = 1$, 满足 $k_0 + k_1 + k_2 = k$

- $P_n(x)$ 的极值点个数: $k - 1 + k_2 = k_0 + k_1 + 2k_2 - 1$
- $P_n(x)$ 的拐点个数: $k + 2k_1 + k_2 - 2 = k_0 + 3k_1 + 2k_2 - 2$

多项式函数极值点和拐点 **the** :7.4.1

注

- 驻点是导数为 0 的点, 不一定是极值点
- 极值点导数可能存在, 也可能不存在
- 极值点导数存在时, 导数值为 0
- 拐点处二阶导数可能存在, 也可能不存在
- 拐点二阶导数存在时, 二阶导数值为 0

定义 4.3.7 (曲率和曲率半径)

设 $y(x)$ 二阶可导, 则曲线 $y=y(x)$ 在其上点 (x_0,y_0) 处的曲率公式表示为:

$$k=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

曲率半径:

$$R=\frac{1}{k}=\frac{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

♣

曲率半径推导

不妨设曲线上的任意一点 $C(x_0,f(x_0))$, 点 C 的曲率圆半径为 R, 曲率圆是 C 点和周围两个点 $A(x_0-\delta,f(x_0-\delta))$, $B(x_0+\delta,f(x_0+\delta))$ 的外接圆, 且 A,B 无线靠近 C

正弦定理:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{abc}{R}$$

ΔABC 的面积:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\mathbf{det}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\right|$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}=(\delta,f(x_0)-f(x_0))\\ \boldsymbol{b}=(\delta,f(x_0+\delta)-f(x_0))\\ \boldsymbol{c}=(2\delta,f(x_0+\delta)-f(x_0-\delta))\end{cases}$$

$$\begin{cases}S=\dfrac{\sqrt{\delta^2+[f(x_0)-f(x_0-\delta)]^2}\sqrt{\delta^2+[f(x_0+\delta)-f(x_0)]^2}\sqrt{4\delta^2+[f(x_0+\delta)-f(x_0-\delta)]^2}}{4R}\\ S=\left|\delta\left[f(x_0+\delta)+f(x_0-\delta)-2f(x_0)\right]\right|\end{cases}$$

$$R=\lim_{\delta\to 0}\frac{\sqrt{1+\left[\frac{f(x_0+\delta)-f(x_0)}{\delta}\right]^2}\sqrt{1+\left[\frac{f(x_0)-f(x_0-\delta)}{\delta}\right]^2}\sqrt{4+\left[\frac{f(x_0+\delta)-f(x_0-\delta)}{2\delta}\right]^2}}{\left|\frac{f(x_0+\delta)+f(x_0-\delta)-2f(x_0)}{\delta^2}\right|}$$

$R=\dfrac{[1+[f'(x_0)]^2]^{\frac{3}{2}}}{f''(x_0)}$, R 越大, 曲线越平坦, R 越小, 曲线越陡峭.

4.3.3 物理应用

定义 4.3.8 (相关变化率)

$$y = y(x) \begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

♣

第 5 章 中值定理

内容提要

- 介值定理
- 零点定理
- 费马定理
- 罗尔定理
- 拉格朗日中值定理
- 柯西中值定理
- 积分中值定理
- 达布定理

5.1 介值定理 & 零点定理

定理 5.1.1 (有界和最值定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 有: $m \le f(x) \le M$

其中 m, M 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值

定理 5.1.2 (介值定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 有: $m \le f(x) \le M$

其中 m, M 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值

$\forall \mu \in [m, M], \exists \xi \in [a,b],\ s.t.\ f(\xi) = \mu$

定理 5.1.3 (平均值定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 有: $m \le f(x) \le M$

其中 m, M 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值

当 $a \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le b, \exists \xi \in [a,b],\ s.t.\ f(\xi) = \dfrac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$

定理 5.1.4 (零点定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)f(b)<0, \exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f(\xi)=0$

5.2 费马定理

定理 5.2.1 (费马定理)

$f(x)$ 在 x_0 处可导, 且 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 极值点, 有: $f'(x_0)=0$

证明: 不妨设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取极大值

极值点的定义:

$$\begin{cases} f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0 \\ f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}\ge 0 \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导, $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f(x_0)=0$

5.3 罗尔定理

定理 5.3.1 (罗尔定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a)=f(b)$, 则 $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)=0$

证明:

最值定理: $m\le f(x)\le M$

(1). $m=M$ 时,$f(x)=C\Rightarrow f'(x)=0$

(2). $m<M$ 时, $f(a)=f(b)$, 在区间 (a,b) 中至少存在一个最值 (最大值或者最小值)

不妨假在 $x=\xi$ 时,$f(\xi)$ 取得最值, 此时 $x=\xi$ 一定是 $f(x)$ 极值点

费马定理: $f'(\xi)=0$

5.4 拉格朗日中值定理

定理 5.4.1 (拉格朗日中值定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 则 $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$

证明: 构造辅助函数 $g(x)=f(x)(b-a)-[f(b)-f(a)]x$

$$g(a)=g(b)=bf(a)-af(b)$$

罗尔定理:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ g'(\xi)=0$$

$$f'(\xi)(b-a)=f(b)-f(a) \Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

5.5 柯西中值定理

定理 5.5.1 (柯西中值定理)

$f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $g'(x)\neq 0$,$\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.$ $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

证明: 构造辅助函数 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$

$$F(a)=F(b)=\frac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}$$

罗尔定理:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ F'(\xi)=0$$

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi) \Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

5.6 泰勒公式

定理 5.6.1 (泰勒公式)

(1). 带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内 $n+1$ 阶导数存在, 对邻域内任意一点 x, 有:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

(2). 带佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式

设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导, 则存在 x_0 的一个邻域, 对于该邻域内任意一点 x, 有:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

5.7 积分中值定理

定理 5.7.1 (积分中值定理)

(1). 一元函数积分中值定理

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.$ $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

证明: 构造函数 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$

拉格朗日中值定理:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ F'(\xi)=\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}\Rightarrow\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$$

(2). 二元函数积分中值定理

$f(x,y)$ 在 D 上连续, 则 $\exists(\xi,\eta)\in D,\ s.t.\ \iint_D f(x,y)dxdy=S_D f(\xi,\eta)$

(3). 广义积分中值定理

$f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $g(x)$ 不变号, 有:

$$\exists\xi\in[a,b],\ s.t.\ \int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

设 $f(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 连续,$g(x,y)$ 平面有界闭区域 D 可积且不变号, 有:

$$\exists(\xi,\eta)\in D,\ s.t.\ \iint\limits_D f(x,y)g(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)d\sigma$$

注

构造函数: $F(x)=\int_a^x f(t)g(t)dt,\ G(x)=\int_a^x g(t)dt, F'(x)=f(x)g(x), G'(x)=g(x)$

柯西中值定理:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}\Rightarrow\frac{f(\xi)g(\xi)}{g(\xi)}=\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

$$f(\xi)\int_a^b g(x)dx=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

5.8 达布定理

定理 5.8.1

1. 导数零点定理

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'_+(a)f'_-(b)<0$, 则 $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)=0$

证明: 不妨假设 $f_+(a)>0,\ f'_-(b)<0$

极限定义:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0\\ \lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x)>f(a)\\ f(x)>f(b)\end{cases}$$

$f(x)$ 一定在 (a,b) 内取得最大值, 费马定理: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)=0$

2. 导数介值定理 (达布定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'_+(a)\neq f'_-(b),\forall\eta\in(f'_+(a),f'_-(b)),\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)=\eta$

证明: 不妨假设 $f_+(a)=m,f'_-(b)=M(M>m)$

$g(x)=f(x)-\eta x,\ g'(x)=f'(x)-\eta$

$g'_+(a)=f'_+(a)-\eta<0\ g'_-(b)=f'_-(b)-\eta>0$

极限的保号性:

$$\begin{cases}\exists\delta_1>0,\ s.t.\ g(x)<g(a),\ x\in(a,a+\delta_1)\\ \exists\delta_2>0,\ s.t.\ g(x)<g(b),\ x\in(b-\delta_2,b)\end{cases}$$

$g(x)$ 是连续可导函数, 费马定理: $g(x)$ 最小值一定在 (a,b) 内取得, 且 $g'(\xi)=0\to f'(\xi)-\eta=0$

综上所述: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)=\eta$

5.9 Exercise

5.9.1 零点问题

命题 5.9.1

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 且 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx=0$, 证明: $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有两个零点

命题 5.9.2

假设某 n 次多项式 $P_n(x)$ 的一切根均为实数根, 证明: $P'_n(x),P''_n(x),\cdots,P_n^{n-1}(x)$ 也仅有实根

命题 5.9.3

设 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 二阶可导, $f(0)=0,f(1)=1,f(4)=2$, 证明: $\exists\xi\in(0,4),\ s.t.\ f''(\xi)=-\dfrac{1}{3}$

泰勒展开

$f(x)$ 在 $x=1$ 处的泰勒展开式:

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-1)^2$$

令 $x=0,x=4$:

$$\begin{cases} f(0)=f(1)-f'(1)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)=0,\ \xi_1\in(0,1)\\ f(4)=f(1)+3f'(1)+\frac{9}{2}f''(\xi_2)=2,\ \xi_2\in(1,4)\end{cases}$$

消去 $f'(1)$:

$$3f''(\xi_1)+9f''(\xi_2)=-4$$

(i). 当 $f''(\xi_1)=f''(\xi_2)$ 时, $f''(\xi_1)=f''(\xi_2)=-\frac{1}{3}$, 命题成立

(ii). 当 $f''(\xi_1)\neq f''(\xi_2)$, 不妨设 $f''(\xi_1)<f''(\xi_2)$:

$$\begin{cases} 3f''(\xi_1)+9f''(\xi_2)=-4<12f''(\xi_2)\\ 3f''(\xi_1)+9f''(\xi_2)=-4>12f''(\xi_1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} f''(\xi_2)>-\frac{1}{3}\\ f''(\xi_1)<-\frac{1}{3}\end{cases}$$

达布定理: $\exists\xi_3\in(\xi_1,\xi_2)$, $s.t.\ f''(\xi_3)=-\frac{1}{3}$

综上所述: $\exists\xi\in(0,4)$, $s.t.\ f''(\xi)=-\frac{1}{3}$

命题 5.9.4

设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 在 $(0,2)$ 内三阶可导, 且 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=2, f(1)=1, f(2)=6$, 证明: $\exists\xi\in(0,2)$, $s.t.\ f^{(3)}(\xi)=9$

命题 5.9.5

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, $f(0)=0, f(1)=1, \int_0^1 f(x)dx=1$, 证明: $\exists\eta\in(0,1)$, $s.t.\ f''(\eta)<-2$

命题 5.9.6

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导,$f(0)=f(1)=0,[f(x)]_{min}=-1$, 证明: $\exists\xi\in(0,1)$, $s.t.\ f''(\xi)\geq 8$

泰勒展开

$[f(x)]_{min} = -1$, 且 $f(0) = f(1) = 0 \Rightarrow f(x)$ 一定在 $(0,1)$ 内部取的最小值

不妨设 $f(c) = -1$, 费马定理: $f'(c) = 0$

$f(x)$ 在 $x = c$ 处泰勒展开式:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2$$

令 $x = 0$ 和 $x = 1$:

$$\begin{cases} f(0) = f(c) - f'(c)c + \dfrac{f''(\xi_1)}{2}c^2 = 0 \\ f(1) = f(c) + f'(c)(1-c) + \dfrac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2 = 0 \end{cases}$$

$f(c) = -1, f'(c) = 0$:

$$f''(\xi_1) = \frac{2}{c^2}, f''(\xi_2) = \frac{2}{1-c^2}$$

$$\begin{cases} c \in (0, \dfrac{1}{2}], f'(\xi_1) \geq 8 \\ c \in (\dfrac{1}{2}, 1), f''(\xi_2) \geq 8 \end{cases}$$

综上所述, $\exists \xi \in (0,1)$, $s.t.\ f''(\xi) \geq 8$

命题 5.9.7

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内二阶可导,$f(a) = g(a), f(b) = g(b)$, 且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 (a,b) 内存在相等的最大值, 证明: $\exists \xi \in (a,b)$, $s.t.\ f''(\xi) = g''(\xi)$

命题 5.9.8

设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 三阶连续可导,$f(-1) = 0, f'(0) = 0, f(1) = 1$, 证明: $\exists \xi \in (-1,1)$, $s.t.\ f^{(3)}(\xi) = 3$

泰勒展开

$f(x)$ 在 $x = 0$ 处泰勒展开式:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}x^3$$

令 $x=1$ 和 $x=-1$, 且 $f'(0)=0$

$$\begin{cases} f(1)=f(0)+\dfrac{f''(0)}{2}+\dfrac{f'''(\xi_1)}{6}=1 \\ f(-1)=f(0)+\dfrac{f''(0)}{2}-\dfrac{f'''(\xi_2)}{6}=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{6}=1$$

不妨设 $f'''(x)$ 在 $[-1,1]$ 上最大值 M, 最小值 m:

$$\frac{m}{6}\le\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{6}\le\frac{M}{6}\Rightarrow m\le 3\le M$$

介值定理: $\exists\xi\in(-1,1),\ s.t.\ f'''(\xi)=3$

5.9.2 复合函数零点问题

命题 5.9.9

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,(a,b) 内可导,$f(a)=f(b)=0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ 2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

命题 5.9.10

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,(a,b) 内可导,$f(a)=f(b)=0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

命题 5.9.11

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,(a,b) 内可导,$a>0, f(a)=0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$

命题 5.9.12

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,(a,b) 内可导,$f(a)=f(b)=0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)+f^2(\xi)=0$

5.9.3 罗尔定理 & 费马定理

命题 5.9.13

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,$(0,1)$ 内可导,$f(0)=1, f(1)=\frac{1}{2}$, 证明: $\exists\xi\in(0,1)$, $s.t.\ f'(\xi)+f^2(\xi)=0$

命题 5.9.14

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,(a,b) 内可导, 且 $\exists c\in(a,b)$, $s.t.\ f'(c)=0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.\ f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$

命题 5.9.15

$f(x)$ 在 $[-2,2]$ 二阶可导,$|f(x)|<1$,$[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$, 证明: $\exists\xi\in(-2,2)$, $s.t.\ f(\xi)+f''(\xi)=0$

命题 5.9.16

设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 二阶可导,$2f(0)=\int_0^2 f(x)dx=f(2)+f(3)$, 证明: $\exists\xi\in(0,3)$, $s.t.\ f''(\xi)-2f'(\xi)=0$

5.9.4 原函数、导函数、高阶导数关系

命题 5.9.17

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导,$f(a)=f(b)=0$,$f'_+(a)f'_-(b)>0$ 证明: $\exists\xi\in(a,b)$,$s.t.f''(\xi)=f(\xi)$

命题 5.9.18

设 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 二阶可导,$f''(x)\neq f(x)$, 证明: $\exists\xi\in(0,2\pi)$, $s.t.\ \tan\xi=\dfrac{2f'(\xi)}{f(\xi)-f''(\xi)}$

命题 5.9.19

设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 二阶可导, 证明: $\forall a>0, \exists c\in(2a,4a)$, $s.t.\ f(4a)-2f(3a)+f(2a)=a^2f''(c)$

5.9.5 复合函数构造问题

命题 5.9.20

设 $f(x)$ 在 $[\frac{3}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi]$ 可导,$f(\frac{3}{4}\pi)=f(\frac{7}{4}\pi)=0$, 证明: $\exists\xi\in(\frac{3}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi)$, $s.t.\ f'(\xi)+f(\xi)=\cos\xi$

命题 5.9.21

设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 可导, 证明: $\exists\xi\in(1,2)$, $s.t.\ \xi f'(\xi)-f(\xi)=f(2)-2f(1)$

柯西中值定理

构造辅助函数:

$$\begin{cases} F(x)=\dfrac{f(x)}{x} \\ G(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2} \\ G'(x)=-\dfrac{1}{x^2} \end{cases}$$

柯西中值定理:

$$\exists\xi\in(1,2),\ s.t.\frac{F(2)-F(1)}{G(2)-G(1)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{F(2)-F(1)}{G(2)-G(1)}=2f(1)-f(2) \\ \dfrac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=f(\xi)-\xi f'(\xi) \end{cases} \Rightarrow \exists\xi\in(1,2),\ s.t.\ \xi f'(\xi)-f(\xi)=f(2)-2f(1)$$

综上所述: $\exists\xi\in(1,2)$, $s.t.\ \xi f'(\xi)-f(\xi)=f(2)-2f(1)$

命题 5.9.22

设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,(a,b) 内可导,$g'(x)\neq 0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.\ \dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

命题 5.9.23

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导,$f(0)=0, \forall x\in(0,1), f(x)>0$, 证明: $\exists\xi\in(0,1)$, $s.t.\ \dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

命题 5.9.24

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导,$f(0)=0, \forall x\in(0,1), f(x)>0$, 证明: $\forall a>0, \exists\xi\in(0,1)$, $s.t.\ a\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

命题 5.9.25

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导,$f(a)=0, \forall x\in(a,b], f(x)>0$, 证明: $\forall m,n>0, \exists\lambda,\mu\in(0,1)$, $s.t.\ \dfrac{f'(\lambda)}{f(\lambda)}=\dfrac{mf'(\mu)}{nf(\mu)}$

命题 5.9.26

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导,$g''(x)\neq 0, g(a)=g(b)=f(a)=f(b)=0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.\ \dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

命题 5.9.27

设 $f(x)$ 二阶可导,$f(1)>0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$, 证明: $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有两个根.

命题 5.9.28

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导,$f'(a)=f'(b)=0$, $f(x)>0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.\ f(\xi)f''(\xi)-[f'(\xi)]^2=0$

命题 5.9.29

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导,$f'(a)=f'(b)=0, f(x)>0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.\ f(\xi)f''(\xi)-2[f'(\xi)]^2=0$

5.9.6 拉格朗日中值定理 & 柯西中值定理

命题 5.9.30

设 $a,b>0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$. $s.t.\ ae^b-be^a=(1-\xi)e^{\xi}(a-b)$

命题 5.9.31

设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 可导, 证明: $\exists\xi\in(1,2)$, $s.t.\ f(2)-f(1)=\frac{1}{2}\xi^2f'(\xi)$

命题 5.9.32

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,(a,b) 可导, 证明: $\exists\xi\in(1,2)$, $s.t.\ 2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$

5.9.7 双中值问题

命题 5.9.33

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导,$f(a)=f(b)=1$, 证明: $\exists\xi_1,\xi_2\in(a,b)$, $s.t.\ e^{\xi_2-\xi_1}[f'(\xi_2)+f(\xi_2)]=1$

注

取 $\xi_1=\xi_2\rightarrow\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.\ f'(x)+f(x)-1=0$

构造辅助函数: $F(x)=e^x[f(x)-1]$

$$F'(x)=e^x[f'(x)+f(x)-1]$$

$F(a)=F(b)=0$, 罗尔定理:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ F'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)+f(\xi)-1=0$$

综上所述: $\exists\xi_1=\xi_2\in(a,b)$, $s.t.\ e^{\xi_2-\xi_1}[f'(\xi_2)+f(\xi_2)]=1$

命题 5.9.34

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,(a,b) 可导, 且 $a>0$, 证明: $\exists\xi,\eta\in(a,b)$, $s.t.\ f'(\xi)=(a+b)\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$

注

令 $\xi=\eta\to\exists\sigma$, $s.t.\ f'(\sigma)[1-\dfrac{a+b}{2\sigma}]=0$

取 $\sigma=\dfrac{a+b}{2}$ 证毕

命题 5.9.35

设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 连续,$(1,2)$ 可导, 且 $f'(x)\neq 0$, 证明: $\exists\xi,\eta,\gamma\in(1,2)$, $s.t.\ \dfrac{f'(\gamma)}{f'(\xi)}=\dfrac{\xi}{\eta}$

注

取 $\xi=\gamma=\eta\in(a,b)$, $s.t.\ \dfrac{f'(\gamma)}{f'(\xi)}=\dfrac{\xi}{\eta}=1$ 恒成立

命题 5.9.36

设 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 二阶连续可导,$f'(0)=0$, 证明: $\exists\xi,\eta,\omega\in(0,\dfrac{\pi}{2})$, $s.t.\ f'(\xi)=\dfrac{\pi}{2}\eta\cdot\sin 2\xi\cdot f''(\omega)$

命题 5.9.37

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续,$(0,1)$ 可导,$f(0)=0, f(1)=1$, 证明:

(1). $\exists c\in(0,1)$, $s.t.\ f(c)=1-c$

(2). $\exists\xi,\eta\in(0,1)(\xi\neq\eta)\ s.t.\ f'(\xi)f'(\eta)=1$

命题 5.9.38

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续,$(0,1)$ 可导,$f(0)=0, f(1)=1$, 证明:

(1). $\exists c\in(0,1)$, $s.t.\ f(c)=\dfrac{1}{2}$

(2). $\exists\xi,\eta\in(0,1)(\xi\neq\eta)$, $s.t.\ \dfrac{1}{f'(\xi)}+\dfrac{1}{f'(\eta)}=2$

命题 5.9.39

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导,$f(0)=0$, $f(1)=1$,$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为正数, 证明: 存在互不相等的 $\xi_i\in(0,1)$, $s.t.$ $\frac{\lambda_1}{f'(\xi_1)}+\frac{\lambda_2}{f'(\xi_2)}+\cdots+\frac{\lambda_n}{f'(\xi_n)}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$

命题 5.9.40

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导,$f(0)=0,f(1)=1$, 证明: 存在互不相等的 $\xi_i\in(0,1)$, $s.t.$ $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f'(\xi_i)}=n$

命题 5.9.41

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导,$f(0)=0$, $f(1)=1$, 证明: $\xi,\eta\in(0,1)(\xi\neq\eta)$, $s.t.$ $\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b(a,b>0)$

命题 5.9.42

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导,$f(0)=0,f(1)=\frac{1}{4}$, 证明: $\xi,\eta\in(0,1)(\xi\neq\eta)$, $s.t.$ $f'(\xi)+f'(\eta)=\eta-\xi$

命题 5.9.43

设 $f(x)\in\mathbb{R}[0,1]$, $\int_0^1 f(x)dx\neq 0$, 证明: 存在互异的三个数 $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in[0,1]$, 满足下列不等式:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)dx &= \left[\frac{1}{1+\xi_1^2}\int_0^{\xi_1} f(x)dx+f(\xi_1)\arctan\xi_1\right]\xi_3\\ &= \left[\frac{1}{1+\xi_2^2}\int_0^{\xi_2} f(x)dx+f(\xi_2)\arctan\xi_2\right](1-\xi_3)\end{aligned}$$

命题 5.9.44

设 $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导,$\int_0^1 f(x)dx=3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx$, 证明: 存在两个不同的点 $\xi,\eta\in(0,1)$, $s.t.$ $f'(\xi)=g'(\xi)[f(\eta)-f(\xi)]$

5.9.8 泰勒公式

命题 5.9.45

设 $f(x)$ 二阶连续可导,$f''(x)\neq 0$, 若 $f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)(0<\theta<1)$, 证明: $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$

命题 5.9.46

设 $f(x)$ 有 $n+1$ 阶导数, 若 $f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\dfrac{f''(a)}{2}h^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n(0<\theta<1)$, 且 $f^{(n+1)}(a)\neq 0$

证明: $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$

命题 5.9.47

设 $f(x)$ 有 n 阶连续导数,$f^{(k)}(x_0)=0(k=2,3,\cdots,n-1)$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0+\theta h)$, 其中 $\theta\in(0,1)$, 证明: $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$

命题 5.9.48

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的邻域内四阶可导,$|f^{(4)}(x)|\leq M(M>0)$, 证明: 对此邻域上任意一个不同于 x_0 的点 a:

$$\left|f''(x_0)-\frac{f(a)+f(b)-2f(x_0)}{(a-x_0)^2}\right|\leq\frac{M}{12}(a-x_0)^2,\ a+b=2x_0$$

命题 5.9.49

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 三阶连续可导, 证明:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f(b)=f(a)+f'(\frac{a+b}{2})(b-a)+\frac{(b-a)^3}{24}f^{(3)}(\xi)$$

命题 5.9.50

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶连续可导, 证明:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f(a)-2f(\frac{a+b}{2})+f(b)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$$

命题 5.9.51

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 $n(n\geq 2)$ 阶可导, 满足 $f^{(i)}(a)=f^{(i)}(b)=0(i=1,2,\cdots,n-1)$, 证明:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ |f^{(n)}(\xi)|\geq\frac{2^{n-1}n!}{(b-a)^n}|f(b)-f(a)|$$

命题 5.9.52

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导, 且 $|f(x)|\leq a, |f''(x)|\leq b$, 证明: $|f'(x)|\leq 2a+b$

命题 5.9.53

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 三阶可导, 且 $f(x)$ 和 $f^{(3)}(x)$ 有界, 证明: $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上也有界

命题 5.9.54

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 二阶可导, 记 $M_i=max|f^{(i)}(x)|(i=0,1,2)$, 证明: $M_1^2\leq 4M_0M_2$

命题 5.9.55

$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 二阶可导, 记 $M_i=max|f^{(i)}(x)|(i=0,1,2)$, 证明: $M_1^2\leq 2M_0M_2$

5.9.9 广义罗尔定理

命题 5.9.56

1. $f(x)$ 在 (a,b) 内可导, 且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=A$, 证明: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)=0$
2. $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可导, 且 $f(0)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, 证明: $\exists\xi\in(0,+\infty),\ s.t.\ f'(\xi)=0$

3.$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可导, 且 $0\leq f(x)\leq\dfrac{x}{1+x^2}$, 证明: $\exists\xi>0,\ s.t.\ f'(\xi)=\dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$

4.$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可导,$f(0)=1$, 且 $|f(x)|\leq e^{-x}$, 证明: $\exists\xi>0,\ s.t.\ f'(\xi)+e^{-\xi}=0$

命题 5.9.57

$f(x)$ 在 (a,b) 上三阶可导, 证明:

$$\exists \xi \in (a,b),\ s.t.\ f(b) = f(a) + \frac{f'(a)+f'(b)}{2}(b-a) - \frac{(b-a)^3}{12} f^{(3)}(\xi)$$

命题 5.9.58

$f(x)$ 在 (a,b) 上三阶可导, 证明:

$$\exists \xi \in (a,b),\ s.t.\ \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{4}\left[f(a) + 3f(\frac{a+2b}{3})\right] + \frac{(b-a)^4}{216} f^{(3)}(\xi)$$

命题 5.9.59

设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, 且 $f(x)$ 在区间 $[a_1,a_n]$ 上二阶可导, $c \in [a_1,a_n], f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_n) = 0$, 证明:

$$\exists \xi \in (a_1,a_n),\ s.t.\ f(c) = \frac{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

命题 5.9.60

$f(x)$ 在 (a,b) 上二阶可导, 证明:

$$\forall c \in (a,b), \exists \xi \in (a,b),\ s.t.\ \frac{f''(\xi)}{2} = \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(a-b)(c-b)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$$

第 6 章 一元积分学

内容提要

- 不定积分
- 定积分
- 变限积分
- 反常积分
- 积分方法
- 积分应用

6.1 不定积分

定义 6.1.1 (不定积分)

$\forall x \in I$, 对于可导函数 $F(x)$, 均有 $F'(x) = f(x)$, 我们称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 记为 $\int f(x)dx = F(x) + C$ 是 $f(x)$ 的原函数

定理 6.1.1 (原函数存在定理 (充分条件))

连续函数 $f(x)$ 必存在原函数 $F(x)$

证明

1. 构造函数 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, 证明 $F'(x) = f(x)$

2. $\forall x \in (a,b), F'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} = \lim\limits_{\xi \to x} f(\xi) = f(x)$

定理 6.1.2 (达布定理 (必要条件))

1. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数 $F(x)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有介值性
2. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数 $F(x)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必无第一类间断点
3. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数 $F(x)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必无无穷间断点

6.1.1 不定积分计算

定理 6.1.3 (常用不定积分)

1. 基础不定积分

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$ $\quad \begin{cases} \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C \end{cases}$
2. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$
3. $\int e^x dx = e^x + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x dx = \sin x + C \qquad \int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$
5. $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C \qquad \begin{cases} \int \frac{1}{\cos x}dx = \int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \\ \int \frac{1}{\sin x}dx = \int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C \end{cases}$
6. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$
7. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C \qquad \int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$
8. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C, |x| > |a|$
9. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$
10. $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \qquad \int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$
11. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$
12. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

2. 扩展不定积分

1. $\begin{cases} \int \sin^n x dx, & n = 2,3,4,5 \\ \int \cos^n x dx, & n = 2,3,4,5 \end{cases}$
2. $\begin{cases} \int \frac{1}{\sin^n x}dx, & n = 2,3,4,5 \\ \int \frac{1}{\cos^n x}dx, & n = 2,3,4,5 \end{cases}$
3. $\int \frac{1}{x^n+1}dx, n = 3,4,6$

推论 6.1.1 (扩展不定积分)

命题 6.1.1

$$\int \sin^2 x dx \qquad \int \cos^2 x dx$$

命题 6.1.2

$$\int \sin^3 x dx \qquad \int \cos^3 x dx$$

命题 6.1.3

$$\int \sin^4 x dx \qquad \int \cos^4 x dx$$

命题 6.1.4

$$\int \sin^5 x dx \qquad \int \cos^5 x dx$$

命题 6.1.5

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

命题 6.1.6

$$\int \frac{1}{\sin^3 x} dx \qquad \int \frac{1}{\cos^3 x} dx$$

命题 6.1.7

$$\int \frac{1}{\sin^4 x} dx \qquad \int \frac{1}{\cos^4 x} dx$$

命题 6.1.8

$$\int \frac{1}{\sin^5 x} dx \qquad \int \frac{1}{\cos^5 x} dx$$

命题 6.1.9

$$\int \frac{1}{x^n + 1} dx, n = 3, 4, 6$$

定义 6.1.2 (积分方法)

1. 第一换元法 (凑微分): $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(u)du$
2. 第二换元法: $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$
3. 三角换元法: $\sqrt{a^2 - x2} \rightarrow t = a \sin x$, $\sqrt{a^2 + x^2} \rightarrow t = a \tan x$

4. 万能公式: $\int R(\sin x, \cos x)dx \to t = \tan\frac{x}{2} \to \begin{cases} \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$

$$\begin{cases} R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos x) \to t = \cos x \\ R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, -\cos x) \to t = \sin x \\ R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x) \to t = \tan x \end{cases}$$

5. 分部积分法:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

6. 组合积分法:

$$\begin{cases} \int f(x)dx = I + A\int g(x)dx \\ \int g(x)dx = J + B\int f(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int [f(x)+g(x)]dx = I \\ \int [f(x)-g(x)]dx = J \end{cases}$$

7. 递归积分法 (分部积分推广):

$$I_n = f(x) + I_{n-1}$$

表 6.1: 分部积分表格

u各阶导数	u	u'	u''	$u^{(3)}$	$\cdots$	$u^{(n+1)}$
$v^{(n+1)}$的各阶原函数	$v^{(n+1)}$	$v^{(n)}$	v^{n-1}	v^{n-2}	$\cdots$	v

定理 6.1.4 (分部积分: 表格法)

$$\begin{aligned} \int uv^{(n+1)}dx &= uv^{(n)} - \int v^n u' dx \\ &= uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \int v^{(n-1)}u''dx \\ &= uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \int v^{(n-2)}u^{(3)}dx \\ &= uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}vdx \end{aligned}$$

定理 6.1.5 (组合积分)

命题 6.1.10

$$\begin{cases} I = \int e^{ax}\sin(bx)dx \\ J = \int e^{ax}\cos(bx)dx \end{cases}$$

定理 6.1.6 (递归积分)

命题 6.1.11

$$I_n = \int \frac{1}{\cos^n x} dx$$

命题 6.1.12

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx$$

命题 6.1.13

$$I_n = \int \tan^n x dx$$

命题 6.1.14

$$I_n = \int \ln^n x dx$$

定理 6.1.7 (唯一因式分解定理 (有理积分))

有理函数指的是分子、分母都是 x 的多项式的分式 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, 其中 (m > n)

$$\begin{cases} p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, a_n \neq 0 \\ p(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^n, b_m \neq 0 \end{cases}$$

在实数范围内, 任意实系数多项式 $q(x)$ 都可以分解为:

$$q(x) = b_m (x-a_1)^{r_1} \cdots (x-a_k)^{r_k} (x^2+b_1x+c_1)^{s_1} \cdots (x^2+b_lx+c_l)^{s_l}$$

其中 $r_1 + \cdots + r_k + 2(s_1 + \cdots + s_l) = m$

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} = & \frac{A_{1,1}}{x-a_1} + \cdots + \frac{A_{1,r_1}}{(x-a_1)^{r_1}} \\ & + \cdots + \\ & \frac{A_{k,1}}{x-a_k} + \cdots + \frac{A_{k,r_k}}{(x-a_k)^{r_k}} \\ & + \frac{M_{1,1}x + N_{1,1}}{x^2+b_1x+c_1} + \cdots + \frac{M_{1,s_1}x + N_{1,s_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{s_1}} \\ & + \cdots + \\ & \frac{M_{l,1}x + N_{l,1}}{x^2+b_lx+c_l} + \cdots + \frac{M_{l,s_l}x + N_{l,s_l}}{(x^2+b_lx+c_l)^{s_l}} \end{aligned}$$

只需要求解两种不定积分:

$$\begin{cases} I=\int \dfrac{1}{(x-a)^k}dx \\ J=\int \dfrac{mx+n}{(x^2+bx+c)^k}, c-\dfrac{b^2}{4}>0 \end{cases}$$

第一个不定积分:

$$I=\int \frac{1}{(x-a)^k}dx=\begin{cases} \ln(x-a), & k=1 \\ \dfrac{1}{1-k}(x-a)^{1-k}, & k>1 \end{cases}$$

第二个不定积分:

$$J=\int \frac{mx+n}{(x^2+bx+c)^k}$$

令 $t=x+\dfrac{b}{2}, a^2=c-\dfrac{b^2}{4}$:

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{m(t-\frac{b}{2})+n}{(t^2+a^2)}dt \\ &= \frac{m}{2}\int \frac{2t}{(t^2+a^2)^k}dt+(n-\frac{mb}{2})\int \frac{1}{(t^2+a^2)^k}dt \\ &= \frac{m}{2}\int \frac{1}{(t^2+a^2)^k}d(t^2+a^2)+(n-\frac{mb}{2})\int \frac{1}{(t^2+a^2)^k}dt \\ &= \frac{m}{2}P+(n-\frac{mb}{2})Q \end{aligned}$$

其中

$$P=\begin{cases} \ln(t^2+a^2), & k=1 \\ \dfrac{1}{1-k}\dfrac{1}{(t^2+a^2)^{1-k}}, & k>1 \end{cases}$$

关于不定积分 Q, 递归积分 **pro** :6.1.12

综上所述: 有理分式一定存在原函数

6.2 定积分

定义 6.2.1 (定积分)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 在 (a,b) 上任取 $n-1$ 个分点 $x_i(i=1,2,3,\cdots,n-1)$, 定义 $x_0=a, x_n=b$, 且满足 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$, 记 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}, k=1,2,\cdots,n$, 任取一点 $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$, 记 $\lambda=\max\{\Delta x_k\}$, 当 $\lambda\to 0$ 时, 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ 存在且与分点 x_i 和 ξ_k 的取法无关, 则称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 记 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分

任取 x_i: 变为将区间 $[a,b]$ 分为 n 个小区间, 且每个小区间的长度为 Δx_k, 且 $\Delta x_k \to 0$, 且 ξ_k 为每个小区间的右端点, $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(a+\frac{b-a}{n}i)\frac{b-a}{n}$

定理 6.2.1 (定积分存在定理)

1. 必要条件: 区间有界, 函数有界
2. 充分条件:

(1). $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

(2). $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 且只有有限个间断点, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

定理 6.2.2 (牛顿莱布尼茨公式)

$f(x)$ 是 $[a,b]$ 上连续函数, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b)-F(a)$

定理 6.2.3 (对称函数积分)

(1). $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上连续, 我们有:

1. $f(x)$ 是奇函数
$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0$$
2. $f(x)$ 是偶函数
$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_0^l f(x)dx$$

(2). $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续:

1. $f(a+b-x) = -f(x)$, 称 $f(x)$ 关于 $x = \dfrac{a+b}{2}$ 奇对称
$$\int_a^b f(x)dx = 0$$
2. $f(a+b-x) = f(x)$, 称 $f(x)$ 关于 $x = \dfrac{a+b}{2}$ 偶对称
$$\int_a^b f(x)dx = 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = 2\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx$$

(3). $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且:

1. $f(a+b-x) = f(x)$, $f(x)$ 关于 $\dfrac{a+b}{2}$ 对称
2. $g(a+b-x)+g(x) = A$, A 为常数

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \frac{A}{2}\int_a^b f(x)dx = A\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = A\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx$$

(3). $f(x), g(x)$ 在 $[\dfrac{1}{a}, a]$ 上连续, 且:

1. $f(x)=f(\frac{1}{x})$
2. $g(x)+g(\frac{1}{a})=A$, A 为常数

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a} f(x)g(x)dx=\frac{A}{2}\int_{\frac{1}{a}}^{a} f(x)dx=A\int_{\frac{1}{a}}^{1} f(x)dx=A\int_{1}^{a} f(x)dx$$

定理 6.2.4 (华里士公式)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1, n\in\{2k+1|k\in\mathbb{N}\}\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, n\in\{2k+2|k\in\mathbb{N}\}\end{cases}$$

递归积分法, 需要证明两个部分:

(1). $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx$

区间再现公式: $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx$

(2). 分部积分: $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$

$$\begin{aligned}I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}xd(-\cos x)\\&=-\cos x\sin^{n-1}x|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^{n-2}dx\\&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}dx\\&=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n\\I_n&=\frac{n-1}{n}I_{n-2}\end{aligned}$$

其中:

$$\begin{cases}I_0=\frac{\pi}{2}\\ I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=1\end{cases}$$

(i). 当 $n\in\{2k+1|k\in\mathbb{N}\}$ 时:

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}I_{n-4}=\cdots=\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}I_1=\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1$$

(ii). 当 $n\in\{2k+2|k\in\mathbb{N}\}$ 时:

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}I_{n-4}=\cdots=\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}I_0=\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

推论 6.2.1 (华里士公式推论)

$$\int_0^\pi \sin^n x dx = \begin{cases} 2\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1, n\in\{2k+1|k\in\mathbb{N}\} \\ 2\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, n\in\{2k+2|k\in\mathbb{N}\} \end{cases}$$

$$\int_0^\pi \cos^n x dx = \begin{cases} 0, n\in\{2k+1|k\in\mathbb{N}\} \\ 2\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, n\in\{2k+2|k\in\mathbb{N}\} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^n x dx = \int_0^{2\pi} \cos^n x dx = \begin{cases} 0, n\in\{2k+1|k\in\mathbb{N}\} \\ 4\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, n\in\{2k+2|k\in\mathbb{N}\} \end{cases}$$

命题 6.2.1

$$\int_0^1 x^k \ln^m x, k>0, m\in\mathbb{N}$$

命题 6.2.2

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+1}$$

6.3 变限积分

定义 6.3.1 (变限积分)

$x\in[a,b], \forall x\in[a,b]$, 积分 $\int_a^x f(t)dt$ 都有一个确定的值, 我们将这个关于 x 的函数 $\int_a^x f(t)dt$ 称作变限积分

推论 6.3.1 (变限积分)

1. $f(x)$ 可积, $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 一定连续
2. $f(x)$ 连续, $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 一定可导, 且 $F'(x)=f(x)$
3. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有唯一跳跃间断点 x_0, 则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $x=x_0$ 处不可导
4. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有唯一可去间断点 x_0, 则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $x=x_0$ 处可导, 且 $F'(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)$

定理 6.3.1 (变限积分的导数)

$f(x)$ 是连续函数, 则 $\left[\int_{\phi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt\right]' = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\phi(x)]\phi'(x)$

推论 6.3.2 (变上限积分奇偶性和周期性与原函数关系)

$f(x)$ 连续,$f(x)$ 与 $\int_a^x f(t)dt$ 之间的关系

(1). 如果 $f(x)$ 是奇函数,$\int_a^x f(t)dt$ 是偶函数

(2). 如果 $f(x)$ 是偶函数,$\int_a^x f(t)dt$ 是奇函数当且仅当 $a=0$ 时成立.

(3). 如果 $f(x)$ 是周期函数,$\int_a^x f(t)dt$是周期函数与 $\int_0^T f(t)dt=0$等价

证明

令: $F(x)=\int_a^x f(t)dt$

(i). 必要性: $F(x+T)-F(x)=\int_x^{x+T} f(t)dt=\int_0^T f(t)dt=0$

(ii). 充分性: $\int_0^T f(t)dt=0 \Leftrightarrow F(x+T)-F(x)=0$

6.4 反常积分

定义 6.4.1 (反常积分)

1. 积分区间无界: $\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$
2. 被积函数无界: $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$

反常积分敛散性判别

定理 6.4.1 (比较判别法)

1. 无穷区间: $f(x),g(x)$ 连续, 且 $0\le f(x)\le g(x)$
   1. 若 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛
   2. 若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散
2. 无穷函数: $f(x),g(x)$ 在 $(a,b]$ 连续, 瑕点为 $x=a$, 且 $0\le f(x)\le g(x)$
   1. 若 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛
   2. 若 $\int_a^b f(x)dx$ 发散, 则 $\int_a^b g(x)dx$ 发散

定理 6.4.2 (比较判别法的极限形式)

1. 无穷区间: $f(x),g(x)$ 连续, 且 $g(x)>0, f(x)\ge 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lambda$
   1. $\lambda\ne 0$ 且 $\lambda\ne\infty$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同敛散
   2. $\lambda=0$, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛
   3. $\lambda=\infty$, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散
2. 无穷函数: $f(x),g(x)$ 在 $(a,b]$ 连续, 瑕点为 $x=a$, 且 $g(x)>0, f(x)\ge 0$, $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lambda$
   1. $\lambda\ne 0$ 且 $\lambda\ne\infty$, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 同敛散

2. $\lambda = 0$, 则 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 收敛
3. $\lambda = \infty$, 则 $\int_a^b g(x)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 发散

推论 6.4.1 (p 级数判别法)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx \begin{cases} \text{收敛}, & 0 < p < 1 \\ \text{发散}, & p \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx \begin{cases} \text{收敛}, & p > 1 \\ \text{发散}, & p \leq 1 \end{cases}$$

6.5 一元积分学应用

6.5.1 几何应用

6.5.1.1 平面图形面积

定义 6.5.1 (定积分几何意义)

(i). 直角坐标 $y = f(x)$

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

S 表示的是由 $y = 0, y = f(x)$ 和 $x = a, x = b$ 四条直线围成的平面图形的面积

(ii). 极坐标 $r = r_1(\theta)$ 与 $r = r_2(\theta)$

$$S = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left|[r_1(\theta)]^2 - [r_2(\theta)]^2\right| d\theta$$

S 表示的是由 $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2$ 和 $r = r_1(\theta), r = r_2\theta$ 四条曲线围成的平面图形的面积

(iii). 参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$$

S 表示的是由 $t = \alpha, t = \beta$ 和 $x = x(t), y = y(t)$ 四条曲线围成的平面图形的面积

6.5.1.2 平面曲线弧长

定理 6.5.1 (平面曲线的弧长)

(i). 直角坐标 $y = f(x)$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

(ii). 极坐标 $r = r(\theta)$

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta$$

(iii). 参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

6.5.1.3 旋转体体积

定理 6.5.2 (旋转体体积)

(i). 绕 x 轴旋转

$y = f(x)$ 与 $x = a, x = b$ 围成的几何图形绕 x 轴旋转得到的几何体体积 V :

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

(ii). 绕 y 轴旋转

$y = f(x)$ 与 $x = a, x = b$ 围成的几何图形绕 y 轴旋转得到的几何体体积 V :

$$V = 2\pi \int_a^b x|f(x)| dx$$

(iii). 绕任意直线 $L_0 : Ax + By + C = 0$ 旋转

$$\begin{cases} V = \pi \int_{l_1}^{l_2} r^2 dl \\ r = \dfrac{|Ax + Bf(x) + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ dl = \dfrac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|} \\ \boldsymbol{n} = (dx, dy) \\ \boldsymbol{l} = (B, -A) \end{cases} \Rightarrow V = \frac{\pi}{(A^2 + B^2)^{\frac{3}{2}}} \int_a^b [Ax + Bf(x) + C]^2 \left|Af'(x) - B\right| dx$$

(iv). 平面区域 D 绕直线 $L_0 : Ax + By + C = 0$

$$V=2\pi\iint\limits_{(x,y)\in D} r\,d\sigma=2\pi\iint\limits_{(x,y)\in D}\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}d\sigma$$

6.5.1.4 旋转曲面侧面积

定理 6.5.3 (曲线绕 x 轴旋转得到的曲面的侧面积)

(i). 直角坐标

$$S=2\pi\int_a^b|y(x)|\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx$$

(ii). 参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta|y(t)|\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$$

(iii). 极坐标

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta|r\sin\theta|\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}d\theta$$

6.5.1.5 函数平均值和形心坐标

定理 6.5.4 (平均值和形心坐标)

(i). 平均值

$$\overline{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

(ii). 形心坐标

$$\begin{cases}\overline{x}=\dfrac{\iint x\,d\sigma}{\iint d\sigma}=\dfrac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}\\[2ex] \overline{y}=\dfrac{\iint y\,d\sigma}{\iint d\sigma}=\dfrac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}\end{cases}$$

6.5.2 物理应用

6.5.2.1 变力做功

定义 6.5.2 (变力做功)

1. $dW = Fds$
2. $W = \int_a^b Fds$

6.5.2.2 抽水做功

定义 6.5.3 (抽水做功)

1. 建立坐标系
2. 确立横截面积表达式
3. $W = \rho g \int_a^b xA(x)dx$

6.5.2.3 水压力

定义 6.5.4 (水中受到的压力)

1. 建立坐标系
2. 建立横截面积表达式: $S = (f(x) - h(x))dx$
3. $F = \rho g \int_a^b x(f(x) - h(x))dx$

积分训练

命题 6.5.1

$$\int \frac{x\sin x}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}dx$$

命题 6.5.2

$$\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

命题 6.5.3

$$\int \frac{x+\sin x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}dx$$

命题 6.5.4

$$\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx$$

命题 6.5.5

$$\int \frac{x\cos x}{(x+\cos x)^2}dx$$

命题 6.5.6

$$\int \frac{\cos^2 x - x^2\sin x}{(x+\cos x)^2}dx$$

命题 6.5.7

$$\int \frac{x\sin x+\cos x}{x^2+\cos^2 x}dx$$

命题 6.5.8

$$\int \frac{e^x(x-1)}{x^2+e^{2x}}dx$$

命题 6.5.9

$$\int e^{\sec x}(\tan x-\sin x)dx$$

命题 6.5.10

$$\int e^{\frac{1}{x}}(2x-1)dx$$

命题 6.5.11

$$\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx$$

命题 6.5.12

$$\int e^{x^3}(10x-9x^7)dx$$

命题 6.5.13

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$$

命题 6.5.14

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x-1}}dx$$

命题 6.5.15

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{2x-1}}dx$$

命题 6.5.16

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{x^3}dx$$

命题 6.5.17

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$$

命题 6.5.18

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{2}}dx$$

命题 6.5.19

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$$

命题 6.5.20

$$\int x\sqrt{\frac{x}{3-x}}dx$$

命题 6.5.21

$$\int \sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$$

命题 6.5.22

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$$

命题 6.5.23

$$\int \sqrt{x(x+2)}dx$$

命题 6.5.24

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{-x^2+2x+3}}dx$$

命题 6.5.25

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$$

命题 6.5.26

$$\int \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{\sin^4(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})} dx$$

命题 6.5.27

$$\int \frac{1}{\sin^2 x + \sin 2x} dx$$

命题 6.5.28

$$\int \frac{\sin x}{\cos x + 2\sin x} dx$$

第二部分
Summary

第 2 部分目录

第 7 章 Summary

7.1 柯西收敛准则

定理 7.1.1 (柯西收敛准则)

柯西极限存在准则，又称柯西收敛准则，给出某个式子 (数列、数项级数、函数等) 收敛的一个充分必要条件，主要应用在数列、数项级数、函数、反常积分、函数列和函数项级数等的收敛性判断中

命题 7.1.1 (柯西收敛准则: 数列)

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^{+},\ s.t.\ n, m > N, |a_n - a_m| < \varepsilon$$

满足条件的 $\{a_n\}$ 称为柯西序列，上述定理也可表述为：数列 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当 $\{a_n\}$ 是柯西序列

证明

(1). 必要性:

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \eta$, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_0 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_0$ 时, $|a_n - \eta| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, 我们有:

$$\begin{cases} \forall n > N_0, s.t.\ |a_n - \eta| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \forall m > N_0, s.t.\ |a_m - \eta| < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow |x_n - x_m| = |(x_n - \eta) - (x_m - \eta)| \le |x_n - \eta| + |x_m - \eta| \le \varepsilon$$

(2). 充分性:

命题 7.1.2 (柯西收敛准则: 数项级数)

数项级数收敛的充要条件:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^{+},\ s.t.\ m > n > N, |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_m| < \varepsilon$$

证明

不妨设数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的部分和为 S_n, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛当且仅当 $\lim_{n\to+\infty} S_n$ 存在

数列的柯西收敛准则:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^{+},\ s.t.\ n, m > N, |S_n - S_m| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_m| < \varepsilon$$

命题 7.1.3 (柯西收敛准则: 函数)

(1). $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 收敛的充要条件:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ s.t.\ x_1, x_2 \in \mathring{U}(x_0, \delta), |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

(2). $\lim_{x\to\infty} f(x)$ 收敛的充要条件:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,\ s.t.\ |x_1|, |x_2| > |X|, |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

命题 7.1.4 (柯西收敛准则: 反常积分)

1. 无穷积分

(1). $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的充要条件:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,\ s.t.\ q > p > X([p, q] \subset [a, +\infty)), |\int_p^q f(x)dx| < \varepsilon$$

(2). $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ 收敛的充要条件:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,\ s.t.\ p < q < -X([p, q] \subset (-\infty, a]), |\int_p^q f(x)dx| < \varepsilon$$

2. 暇积分

(1). $\int_a^b f(x)dx$ 收敛的充要条件:($x = a$ 是瑕点)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ s.t.\ a < p < q < a + \delta([p, q] \subset [a, b]), |\int_p^q f(x)dx| < \varepsilon$$

(2). $\int_a^b f(x)dx$ 收敛的充要条件:($x = b$ 是瑕点)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ s.t.\ b - \delta < p < q < b([p,q] \subset [a,b]), |\int_p^q f(x)dx| < \varepsilon$$

命题 7.1.5 (柯西收敛准则: 函数列和函数项级数)

7.2 双曲函数

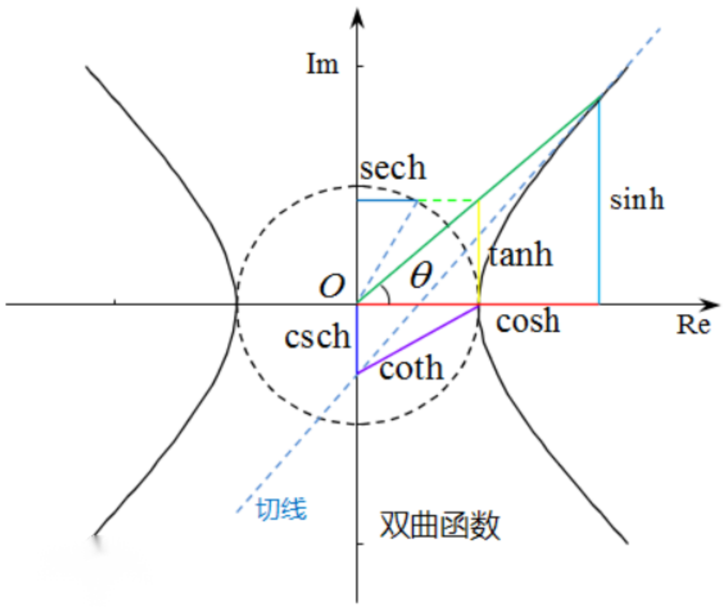


图 7.1: 双曲函数示意图

定义 7.2.1 (双曲函数)

双曲函数是一种类似于三角函数的一类函数, 基本的函数有双曲正弦函数和双曲余弦函数, 借由指数函数定义

1. 双曲正弦函数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

2. 双曲余弦函数

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \to [1, +\infty]$$

3. 双曲正切函数

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \to (-1, 1)$$

恒等式:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 = 1$$

$$\sinh x = -i \sin ix, \quad \cosh x = \cos ix$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

定义 7.2.2 (反双曲函数)

1. 反双曲正弦函数

$$\operatorname{arsinh} x = ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad (arsinhx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

2. 反双曲余弦函数

$$\operatorname{arcosh} x = ln(x + \sqrt{x^2-1}), \quad (arcoshx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

3. 反双曲正切函数

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} ln(\frac{1+x}{1-x}), \quad (artanhx)' = \frac{1}{1-x^2}$$

7.3 两类欧拉积分

定义 7.3.1 (*Gamma* 函数和 *Beta* 函数)

1. *Gamma* 函数 (欧拉第一类积分)

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = B(q,p)$$

$$B(a,b) = (\frac{x^a(1-x)^b}{a})\Big|_0^1 + \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-2}dx$$

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a}\int_0^1 (x-1+1)x^{a-1}(1-x)^{b-2}$$

$$\boxed{B(a,b) = \frac{b-1}{a}[B(a,b-1) - B(a,b)]}$$

$$\boxed{B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1)}$$

特别的:

$$\boxed{B(m,n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}}$$

2.*Beta* 函数 (第二类欧拉积分)

$$\Gamma(\alpha)=\begin{cases}\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx\\ 2\int_0^{+\infty}x^{2\alpha-1}e^{-x^2}dx\end{cases}$$

$$\Gamma(\alpha)=(-x^{\alpha-1}e^{-x})\Big|_0^{+\infty}+(\alpha-1)\int_0^{+\infty}x^{\alpha-2}e^{-x}dx$$

$$\boxed{\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)}\,(\alpha>1)$$

有两个特别的 α, 分别是 $\alpha=\frac{1}{2}$ 和 $\alpha=1$:

$$\begin{cases}\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1 & \alpha=1\\ \int_0^{+\infty}x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx=2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi} & \alpha=\frac{1}{2}\end{cases}$$

特别的

$$\boxed{\Gamma(n+1)=n!}$$

3. 两类积分之间的关系

转换公式:

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

7.4 多项式函数极值点和拐点

定理 7.4.1 (代数基本定理)

任何一个一元 n 次复系数多项式, 都恰好有 n 个复根, 且可以表示为 n 个一次因式的乘积

推论 7.4.1 (曲线的极值点和拐点)

曲线上的可导点不可能同时是极值点和拐点, 不可导点可能同时是极值点和拐点

命题 7.4.1 (多项式函数极值点和拐点个数: 命题一)

多项式函数 $f(x)=(x-a)^n(n>1)$, 当 n 为奇数时, $(a,0)$ 是 $f(x)$ 的拐点, 当 n 为偶数时, $x=a$ 是 $f(x)$ 的极值点

证明

$$\begin{cases}f'(x)=n(x-a)^{n-1}\\ f''(x)=n(n-1)(x-a)^{n-2}\end{cases}$$

当 n 为偶数时, $f'(a)=0$ 且

$$\exists\delta>0, x\in(a-\delta,a), f'(x)<0; x\in(a,a+\delta), f'(x)>0$$

当 n 为偶数时, $x=a$ 是 $f(x)$ 的极值点
当 n 为奇数时, $f''(a)=0$ 且

$$\exists\delta>0, x\in(a-\delta,a), f''(x)<0; x\in(a,a+\delta), f''(x)>0$$

当 n 为奇数时, $(a,0)$ 是 $f(x)$ 的拐点

命题 7.4.2 (多项式函数极值点和拐点个数: 命题二)

多项式函数 $f(x)=(x-a)^n g(x)(n>1), g(a)\neq 0$, 当 n 为奇数时, $(a,0)$ 是 $f(x)$ 的拐点, 当 n 为偶数时, $x=a$ 是 $f(x)$ 的极值点 ♠

证明

$$\begin{cases} f'(x)=(x-a)^{n-1}\left[ng(x)+(x-a)g'(x)\right] \\ f''(x)=(x-a)^{n-2}\left[n(n-1)g(x)+2n(x-a)g'(x)+(x-a)^2g''(x)\right] \end{cases}$$

当 n 为偶数时, 不妨假设 $g(a)>0$, 极限的保号性:

$$\exists\delta_1>0, s.t.\ x\in U(a,\delta_1), g(a)>0$$

当 $x\in U(a,\delta_1), f(x)=(x-a)^n g(x)\geq f(a)=0, x=a$ 是 $f(x)$ 的一个极值点
当 n 为奇数时, $x\to a, (x-a), (x-a)^2$ 是无穷小量, $g'(a), g''(a)$ 都是定值

$$\exists\delta_2>0, s.t.\ x\in U(a,\delta_2), 2n(x-a)g'(x)+(x-a)^2g''(x)\leq |n(n-1)g(x)|$$

$x\in U(a,\delta_2), \left[n(n-1)g(x)+2n(x-a)g'(x)+(x-a)^2g''(x)\right]>0$, $f''(x)$ 与 $(x-a)^{n-2}$ 符号相同
当 $x\in(a-\delta_2,a), f''(x)<0; x\in(a,a+\delta_2), f''(x)>0$, $(a,0)$ 是 $f(x)$ 的一个拐点

命题 7.4.3 (多项式函数极值点和拐点个数: 命题三)

讨论多项式函数 $P_n(x)=\prod\limits_{i=1}^{k}(x-a_i)^{p_i}$ 极值点和拐点个数, 其中满足:

$$p_i\in\mathbb{Z}^+, p_1<p_2<\cdots<p_k, a_i\in\mathbb{R}$$

♠

推论 7.4.2 (极值点和拐点个数)

假设 $P_n(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{p_i}$, 其中 k_1 个 p_i 为奇数 (大于 1), k_2 个 p_i 为偶数, k_0 个 $p_i=1$, 满足 $k_0+k_1+k_2=k$

- $P_n(x)$ 的极值点个数 $k-1+k_2=k_0+k_1+2k_2-1$
- $P_n(x)$ 的拐点个数 $k+2k_1+k_2-2=k_0+3k_1+2k_2-2$

证明

(1). 极值点个数

$P_n(x)$ 是多项式函数, 在 $\mathbb{R}$ 上 n 阶可导

$$\begin{cases} P_n(x)\text{极值点满足: } P_n'(x)=0 \\ P_n(x)\text{拐点满足: } P_n''(x)=0 \end{cases}$$

$P(x)$ 有 k 个实数根, k 个实数根的重数分别为 $p_1,p_2,\cdots,p_k$, 且 $\sum_{i=1}^{k}p_i=n$

$$\text{不妨设}\begin{cases} k_0=N(p_i=1) \\ k_1=N(p_i\in\{2k+1,k\in\mathbb{Z}^+\}) \\ k_2=N(p_i\in\{2k,k\in\mathbb{Z}^+\}) \end{cases}$$

$$P_n'(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{p_i-1}\left[\sum_{i=1}^{k}p_i\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(x-a_j)\right)\right]$$

当 $p_i\geq 2(i=k_0+1,k_0+2,\cdots,k)$ 时, $x=a_i$ 是 $P_n'(x)$ 的一个零点, 此类零点一共有 $k-k_0$ 个, $P_n'(x)$ 有 p_i-1 重根 a_i

$P_n'(x)$ 此类的零点个数为 $n_1=\sum_{i=k_0+1}^{k}(p_i-1)=n-k$

将 $P(x)$ 的 k 个零点按照从小到大排列: $a_1,a_2,\cdots,a_k$

罗尔定理:

$$\exists\xi_i\in(a_i,a_{i+1})(i=1,2,\cdots,k-1),\ s.t.\ P'(\xi_i)=0$$

$P_n'(x)$ 此类的零点个数为 $n_1=k-1$ 个; $P_n'(x)$ 是 $n-1$ 次多项式函数, 至多有 $n-1$ 个复根, $P_n'(x)$ 有 $n-k+k-1=n-1$ 个实数根, 其中前面 $n-k$ 个根中存在重根情况

推论 7.4.3 (多项式函数零点)

$P_n(x)$ 有 n 个实数根 (含重根), 那么 $P_n'(x),P_n''(x),\cdots,P_n^{(n-1)}(x)$ 的根全部是实数

$P_n'(x)$ 的两类零点

$$P_n'(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{p_i-1}f(x)$$

第一类零点:

pro 7.4.2: 当 p_i 为偶数, a_i 是 $P_n(x)$ 的极值点, 共有 k_2 个极值点

第二类零点:

$f(\xi_i)=0(\xi_i\in(a_i,a_{i+1}))$, 当 $x\in U(\xi_i,\delta)$ 时, 只有 $(x-\xi_i)$ 这一项符号改变, 因此 $x=\xi_i$ 是 $P_n(x)$ 极值点, 共有 $k-1$ 个极值点

综上, $P_n(x)$ 的极值点个数为 $k-1+k_2=k_0+k_1+2k_2-1$

(2). 拐点个数

类比极值点个数的方法, 求 $P_n'(x)$ 极值点个数

$$P_n'(x)=\sum_{i=1}^{k}p_i\left[(x-a_1)^{p_1-1}(x-\xi_1)(x-a_2)^{p_2-1}\cdots(x-\xi_{k-1})(x-a_k)^{p_k-1}\right]$$

$P_n'(x)$ 的极值点有两类:

i. 第一类是 $P_n'(x)$ 相邻两个零点之间的点, 也是 $P_n''(x)$ 的极值点, 共有 k_1+k_2+k-2 个

ii. 第二类是 $P_n'(x)$ 的部分零点, 也是 $P_n''(x)$ 的极值点, 当 p_i-1 为偶数, $x=a_i$ 是 $P_n''(x)$ 的极值点, 共有 k_1 个

综上, $P_n(x)$ 的拐点个数为 $k+2k_1+k_2-2$

7.5 阿达玛不等式

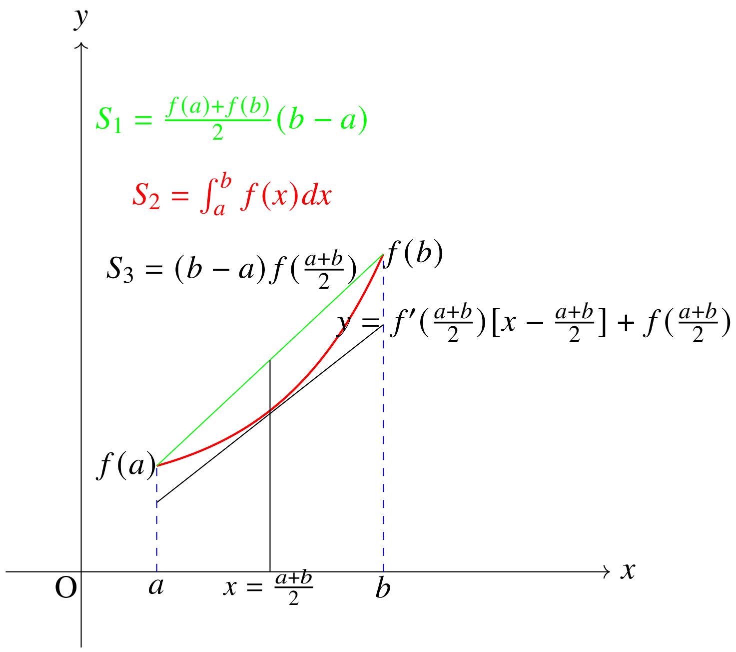


图 7.2: *Hadamard* 不等式

定理 7.5.1 (Hadamard 不等式)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x) \geq 0$, 下面不等式成立:

$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq \frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$$

7.6 特殊曲线

定义 7.6.1 (特殊曲线)

几类特殊曲线的面积、弧长、旋转体体积

1. 心形线　$r = a(1+\cos\theta)$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta d\theta} = 8a$$

$$S = \int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta = 3\pi a^2$$

2. 摆线　$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1-\cos\theta) \end{cases}$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta d\theta} = 8a$$

$$S=\int_0^{2a\pi} f(x)dx=\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos\theta)^2 d\theta=3\pi a^2$$

3. 星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a\cos^3\theta \\ y=a\sin^3\theta \end{cases}$

$$L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sin\theta\cos\theta d\theta=6a$$

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sin^4\theta\cos^2\theta=\frac{3\pi}{8}a^2$$

4. 三叶玫瑰线 $\rho=a\cos 3\theta \quad \rho=a\sin 3\theta$

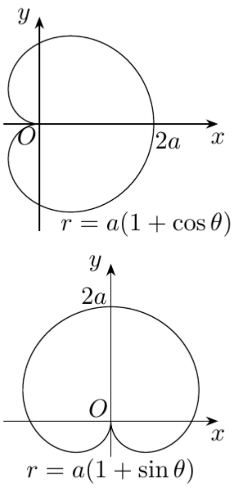
$$L=6\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{a^2\cos^2 3\theta+9a^2\sin^2 3\theta d\theta}=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+8\sin^2 t} dt$$

$$S=3\int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2\cos^2 3\theta d\theta=\frac{\pi a^2}{4}$$

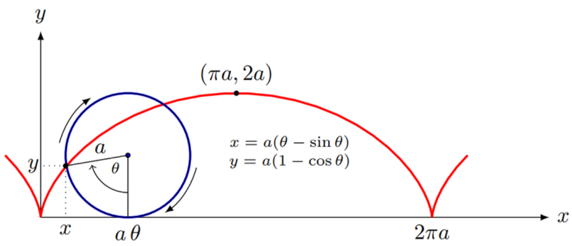
5. 伯努利双扭线 $\rho^2=a^2\cos 2\theta$

$$L=4\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}+\cos^2 2\theta d\theta}=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-\cos^2\theta+\cos^3\theta}{\cos\theta}} d\theta$$

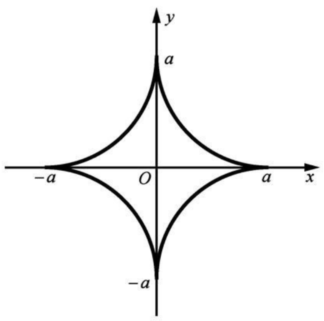
$$S=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta d\theta=a^2$$



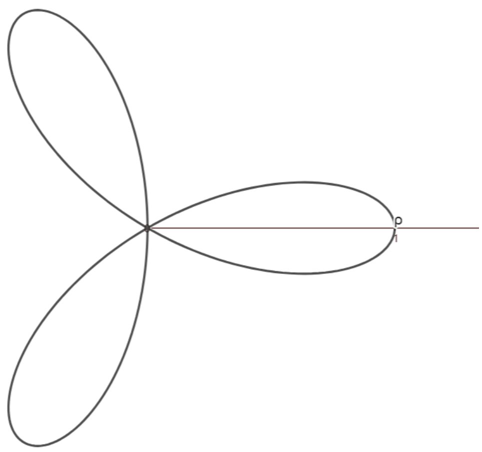
(a) 心形线



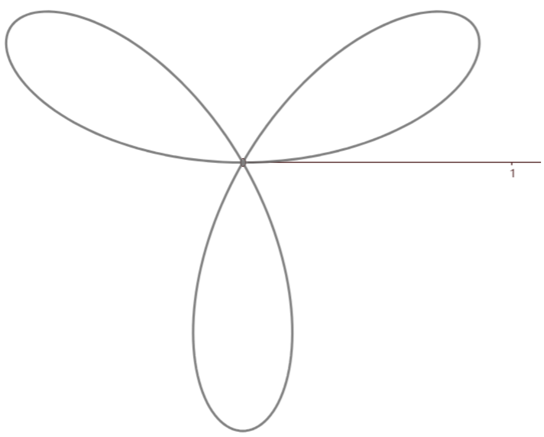
(b) 摆线



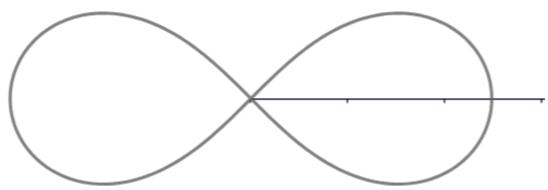
(c) 星形线



(d) 三叶玫瑰线 $\rho = a\cos 3\theta$



(e) 三叶玫瑰线 $\rho = a\sin 3\theta$



(f) 伯努利双扭线 $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$

图 7.3: 曲线图形

7.7 谱分解定理

定义 7.7.1 (代数重复度)

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 是矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的相异特征值, 其重数分别为 $r_1, r_2, \cdots, r_k$, 称 r_i 为矩阵 A 的特征值 λ_i 的代数重复度

定义 7.7.2 (几何重复度)

齐次方程组 $Ax = \lambda_i x (i = 1, 2, \cdots, k)$ 的解空间 V_{λ_i} 称为 A 的对应于特征值 λ_i 的特征空间, V_{λ_i} 的维数称为 A 的特征值 λ_i 的几何重复度

定义 7.7.3 (单纯矩阵)

若矩阵 A 的每一个特征值的代数重复度与几何重复度相等, 矩阵 A 为单纯矩阵

定义 7.7.4 (幂等矩阵)

若 A 为方阵, 且 $A^2 = A$, 称 A 为幂等矩阵

推论 7.7.1 (幂等矩阵 A 性质)

- A 的特征值只能为 0 或者 1
- A 一定可以相似对角化
- A 是单纯矩阵, 且其 $Jordan$ 标准型为 $\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$, 其中 r 为 A 的秩
- $rank(A) = tr(A)$
- $Ax = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}(A)$

证明

(1). A 的特征值只能为 0 或者 1

不妨设 λ 是 A 的特征值

$$\begin{cases} Ax = \lambda x \\ A^2 = A \end{cases} \Rightarrow \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda \in \{0, 1\}$$

(2). A 一定可以相似对角化

$$\begin{cases} A + (I - A) = I \\ A(I - A) = O \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r(A) + r(I - A) \geq n \\ r(A) + r(I - A) \leq n \end{cases} \Rightarrow r(A) + r(I - A) = n$$

$$\begin{cases}(I-A)x=0\\ Ax=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}V_{\lambda_1}=n-r(I-A)=r(A)\\ V_{\lambda_0}=n-r(A)=r(I-A)\end{cases}\Rightarrow V_{\lambda_1}+V_{\lambda_0}=n$$

A 有 n 个线性无关的特征向量 $\Leftrightarrow$ A 一定可以相似对角化

(3). A 可以相似对角化, 存在可逆矩阵 P, 满足

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}I_r & O\\ O & O\end{bmatrix}(\lambda_0=0,\lambda_1=1)$$

(4). $tr(A)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=r=rank(A)$

(5). $Ax=x\Rightarrow x\in N(I-A)=R(A)$

定理 7.7.1 (谱分解定理)

设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是单纯矩阵, 矩阵 A 有 k 个相异特征值 λ_i $(i=1,2,\cdots,k)$, $\exists G_i\in\mathbb{R}^{n\times n}(i=1,2,\cdots,k)$, 使得

$$A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_iG_i$$

此式称为矩阵 A 的谱分解, $G_1,G_2,\cdots,G_k$ 称为 A 的族谱, 且满足以下性质:

- 幂等性: $G_i^2=G_i$
- 分离性: $G_iG_j=0(i\neq j)$
- 可加性: $\sum_{i=1}^{k}G_i=E_n$

证明

(1). 当 $k=n$ 时:

A 是单纯矩阵 $\Rightarrow$ A 可以相似对角化

$$\exists P(P^{-1}P=E),\ s.t.\ P^{-1}AP=\Lambda=diag\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$$

不妨设 $P=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n)$, $P^{-1}=\begin{bmatrix}\omega_1^T\\ \omega_2^T\\ \vdots\\ \omega_n^T\end{bmatrix}$

$$A = P\Lambda P^{-1} = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1^T \\ \boldsymbol{\omega}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\omega}_n^T \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{\omega}_i^T$$

令 $G_i = \boldsymbol{v}_i\boldsymbol{\omega}_i^T (i = 1, 2, \cdots, n)$

$$\begin{cases} PP^{-1} = E_n \\ P^{-1}P = E_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\omega}_i^T \boldsymbol{v}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{\omega}_i^T = \sum\limits_{i=1}^{n} G_i = E_n \end{cases}$$

$$\forall i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}, G_iG_j = \boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{\omega}_i^T \boldsymbol{v}_j)\boldsymbol{\omega}_j^T$$

$$G_iG_j = \begin{cases} \boldsymbol{v}_i\boldsymbol{\omega}_i^T = G_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

(2). 当 $k < n$ 时:
A 是单纯矩阵 $\Rightarrow$ A 可以相似对角化, 矩阵 A 的 k 个特征值分别对应 $r_i(i = 1, 2, \cdots, k)$ 个线性无关的特征向量
不妨设

$$\begin{cases} P = (\boldsymbol{v}_{11}, \boldsymbol{v}_{12}, \cdots, \boldsymbol{v}_{1r_1}, \boldsymbol{v}_{21}, \boldsymbol{v}_{22}, \cdots, \boldsymbol{v}_{2r_2}, \cdots, \boldsymbol{v}_{k1}, \boldsymbol{v}_{k2}, \cdots, \boldsymbol{v}_{kr_k}) \\ P^{-1} = (\boldsymbol{\omega}_{11}^T, \boldsymbol{\omega}_{12}^T, \cdots, \boldsymbol{\omega}_{1r_1}^T, \boldsymbol{\omega}_{21}^T, \boldsymbol{\omega}_{22}^T, \cdots, \boldsymbol{\omega}_{2r_2}^T, \cdots, \boldsymbol{\omega}_{k1}^T, \boldsymbol{\omega}_{k2}^T, \cdots, \boldsymbol{\omega}_{kr_k}^T) \end{cases}$$

$$P^{-1}AP = \Lambda \Rightarrow A = P\Lambda P^{-1} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \sum_{j=1}^{r_i} \boldsymbol{v}_{ij}\boldsymbol{\omega}_{ij}^T$$

令 $G_i = \sum\limits_{j=1}^{r_i} \boldsymbol{v}_{ij}\boldsymbol{\omega}_{ij}^T \Rightarrow A = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_k G_i$

$$G_iG_j = \left(\sum_{p=1}^{r_i} \boldsymbol{v}_{ip}\boldsymbol{\omega}_{ip}^T\right)\left(\sum_{q=1}^{r_j} \boldsymbol{v}_{jq}\boldsymbol{\omega}_{jq}^T\right)$$

$$\begin{cases} P^{-1}P = E_n \\ PP^{-1} = E_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{r_i} \boldsymbol{\omega}_{ij}^T \boldsymbol{v}_{ij} = E_n \\ \sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{r_i} \boldsymbol{v}_{ij}\boldsymbol{\omega}_{ij}^T = \sum\limits_{i=1}^{k} G_i = E_n \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_{ip}^T \boldsymbol{v}_{jq} = \begin{cases} 1 & i = j, p = q \\ 0 & i \neq j \ or \ p \neq q \end{cases}$$

$$G_iG_j=\begin{cases}0 & i\neq j\\ G_i & i=j\end{cases}$$

综上, A 是单纯矩阵 $\Rightarrow A=\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_iG_i$

命题 7.7.1

矩阵 A 是单纯矩阵等价为存在 k 个矩阵 $G_i,(i=1,2,\cdots,k)$ 满足:

- $G_iG_j=\begin{cases}G_i & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$
- $\sum\limits_{i=1}^{k}G_i=E_n$
- $A=\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_iG_i$
- $f(A)$ 为任意多项式

$$f(A)=\sum_{i=1}^{k}f(\lambda_i)G_i$$

- $A^m=\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i^mG_i$

证明

$$\begin{cases}G_iG_j=\begin{cases}G_i & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\\ \sum\limits_{i=1}^{k}G_i=E_n\\ A=\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_iG_i\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A^m=\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i^mG_i\\ f(A)=\sum\limits_{i=1}^{k}f(\lambda_i)G_i\end{cases}$$

$$\begin{cases}G_iG_j=\begin{cases}G_i & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}\\ \sum\limits_{i=1}^{k}G_i=E_n\\ A=\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_iG_i\end{cases}\Rightarrow A\text{可相似对角化}$$

矩阵 $G_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为幂等矩阵, 不妨设 $dim\mathbb{R}(G_i)=r_i$

$$r_i = tr(G_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} r_i = \sum_{i=1}^{k} tr(G_i) = tr(\sum_{i=1}^{k} G_i) = tr(E_n) = n$$

取 X_i 为 $\mathbb{C}(G_i)$ 的基列构成的矩阵, $X = (X_1, X_2, \cdots, X_k)$ 是方阵, 且 G_i 的列向量都可以由 X_i 列向量线性表出

$$G_i = (X_i\boldsymbol{\beta}_1, X_i\boldsymbol{\beta}_2, \cdots, X_i\boldsymbol{\beta}_n) = X_iY_i$$

$$XY = (X_1, X_2, \cdots, X_k)\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_k \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{k} X_iY_i = \sum_{i=1}^{k} G_i = E_n$$

X, Y 均为可逆矩阵

$$YX = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_k \end{bmatrix}(X_1, X_2, \cdots, X_k) = \begin{bmatrix} Y_1X_1 & Y_1X_2 & \cdots & Y_1X_k \\ Y_2X_1 & Y_2X_2 & \cdots & Y_2X_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ Y_kX_1 & Y_kX_2 & \cdots & Y_kX_k \end{bmatrix} = E_n = \begin{bmatrix} E_{r_1} & O & \cdots & O \\ O & E_{r_2} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & E_{r_k} \end{bmatrix}$$

$$Y_iX_j = \begin{cases} E_{r_i} & i = j \\ O & i \neq j \end{cases} \Rightarrow G_iX_j = \begin{cases} X_i & i = j \\ O & i \neq j \end{cases}$$

幂等矩阵性质:

$$\begin{aligned}
AX &= \left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i G_i\right)(X_1, X_2, \cdots, X_k)\\
&= \left[\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i G_i\right)X_1, \left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i G_i\right)X_2, \cdots, \left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i G_i\right)X_k\right]\\
&= (\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \cdots, \lambda_k X_k)\\
&= (X_1, X_2, \cdots, X_k)\begin{bmatrix}\lambda_1 E_{r_1} & O & \cdots & O\\ O & \lambda_2 E_{r_2} & \cdots & O\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ O & O & \cdots & \lambda_k E_{r_k}\end{bmatrix}\\
&= X\Lambda \Rightarrow A = X\Lambda X^{-1}
\end{aligned}$$

综上:

$$\begin{cases} G_iG_j = \begin{cases} G_i & i = j\\ 0 & i \neq j\end{cases}\\ \sum\limits_{i=1}^{k} G_i = E_n\\ A = \sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i G_i\end{cases} \Rightarrow A\text{是单纯矩阵}$$

推论 7.7.2 (谱族 G_i 推论)

- $AG_i = G_iA = \lambda_i G_i$

$$\begin{cases} AG_i = \left(\sum\limits_{j=1}^{k}\lambda_j G_j\right)G_i = \lambda_i G_i\\ G_iA = G_i\left(\sum\limits_{j=1}^{k}\lambda_j G_j\right) = \lambda_i G_i\end{cases} \Rightarrow AG_i = G_iA = \lambda_i G_i$$

- G_i 是唯一的, A 的族谱是唯一的
- $f(A) = f(\lambda_1)G_1 + f(\lambda_2)G_2 + \cdots + f(\lambda_k)G_k$

定理 7.7.2 (谱分解唯一性)

不妨假设 $F_1, F_2, \cdots, F_k$ 满足:

$$\begin{cases} F_iF_j = 0 \qquad i \neq j \\ F_i^2 = F_i \\ A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i F_i \\ \sum_{i=1}^{k} F_i = E_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} AG_i = G_iA = \lambda_i G_i \\ AF_i = F_iA = \lambda_i F_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AG_iF_j = \lambda_i G_iF_j \\ \lambda_i G_iF_j = G_iAF_j \\ G_iAF_j = \lambda_j G_iF_j \end{cases} \Rightarrow G_iF_j = 0 (i \neq j)$$

$$G_i = G_i(\sum_{j=1}^{k} F_j) = G_iF_i = (\sum_{j=1}^{k} G_j)F_i = F_i$$

综上, 矩阵 A 的谱分解是唯一的