数理统计

1. 总体和样本

1.1 统计概念和统计量

- **总体**: 研究对象的全体称为总体
- **样本**: n 个相互独立且与总体具有相同概率分布的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 所组成的整体, $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 称为来自总体 X, 容量为 n 的一个**简单随机样本**, 一次抽样结果的具体的 n 个数值 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的一个观测值
- **样本分布**: 假设总体的分布函数 $F(x)$, 概率密度函数 $f(x)$, 样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数和概率密度
  - 离散型
    $$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i = x_i\}$$
  - 连续型
    $$\begin{cases} F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i) \\ f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \end{cases}$$

1.2 统计量及其分布

- 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本, $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 n 元函数, 如果函数 g 中不含任何参数, 称 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一个**统计量**

1.2.1 样本数字特征

- **样本均值** $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
- **样本方差** $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$
- **样本标准差** $S = \sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$

- 样本 k 阶原点矩 $A_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k(k=1,2,\cdots)$
- 样本 k 阶中心矩 $B_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k(k=2,3,\cdots)$

1.2.2 顺序统计量

将样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的 n 个观测值\textbf{从小到大}顺序排序
$X_{(1)}\leq X_{(2)}\leq\cdots\leq X_{(n)}\leq$

随机变量 $X_{(k)}$ 称作第 k 顺序统计量, $X_{(1)}$ 为最小顺序统计量, $X_{(n)}$为最大顺序统计量

$$\begin{cases}X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\\X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\end{cases}$$

1.2.3 统计量(数字特征)性质

假设总体期望 $E(X)=\mu$, 总体方差为 $D(X)=\sigma^2,X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体的一个样本, $\overline{X},S^2$ 分别为样本的均值和方差

- $E(X_i)=\mu$
- $D(X_i)=\sigma^2$
- $E(\overline{X})=E(\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n})=E(X)=\mu$
- $D(\overline{X})=D(\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n})=\dfrac{1}{n}\sigma^2$
- $E(S^2)=D(X)=\sigma^2$

2. 三大分布

2.1 χ^2 分布

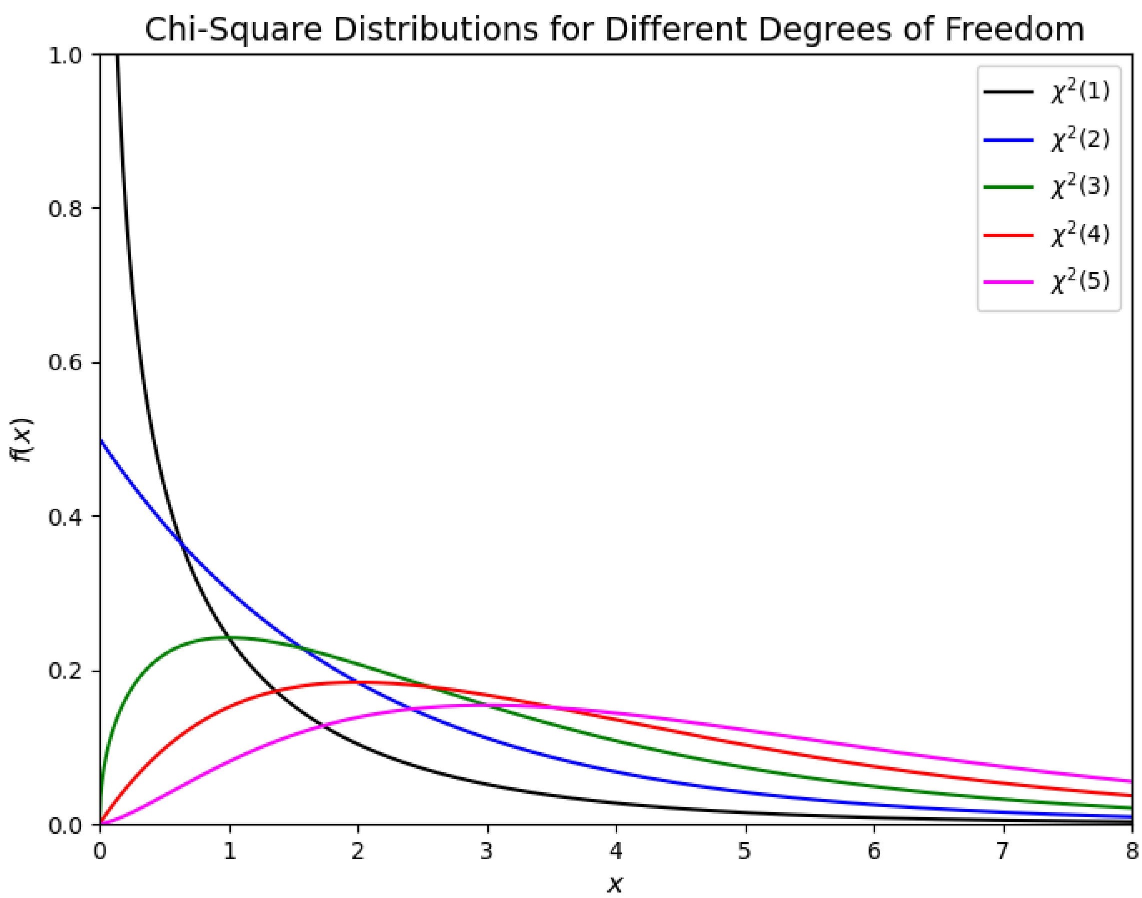
随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立, 且都服从标准正态分布, 随机变量 $X=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 服从自由度为 n 的卡方分布 $\chi^2(n)$, 记作 $X\sim\chi^2(n)$

上 α 分位数: 对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$, 称满足

$$P\{\chi^2>\chi^2_\alpha(n)\}=\int_{\chi^2_\alpha(n)}^{+\infty}f(x)dx=\alpha$$

的 $\chi^2_\alpha(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 分布的上 α 分位数

- $X_1 \sim \chi^2(n_1), X_2 \sim \chi^2(n_2), X_1, X_2$ 相互独立, $X_1 + X_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$
- $X \sim \chi^2(n) \Rightarrow E(X) = n, D(X) = 2n$

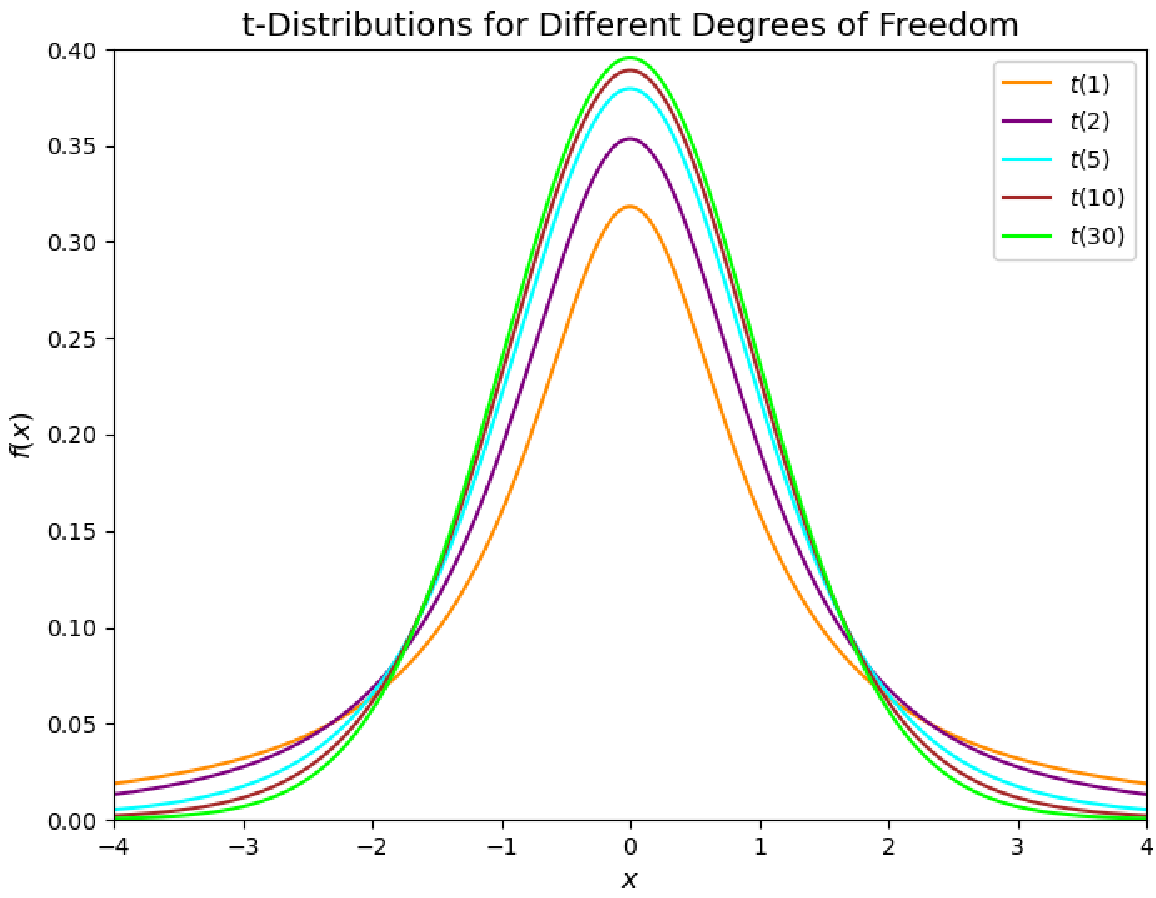


2.2 t 分布

随机变量 $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n), X, Y$ 相互独立, 随机变量 $t = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布, 记作 $t \sim t(n)$

上 α 分位数: 对于给定的 $\alpha(0 < \alpha < 1)$, 称满足
$P\{t > t_\alpha(n)\} = \alpha$
的 $t_\alpha(n)$ 为 t 分布的上 α 分位数

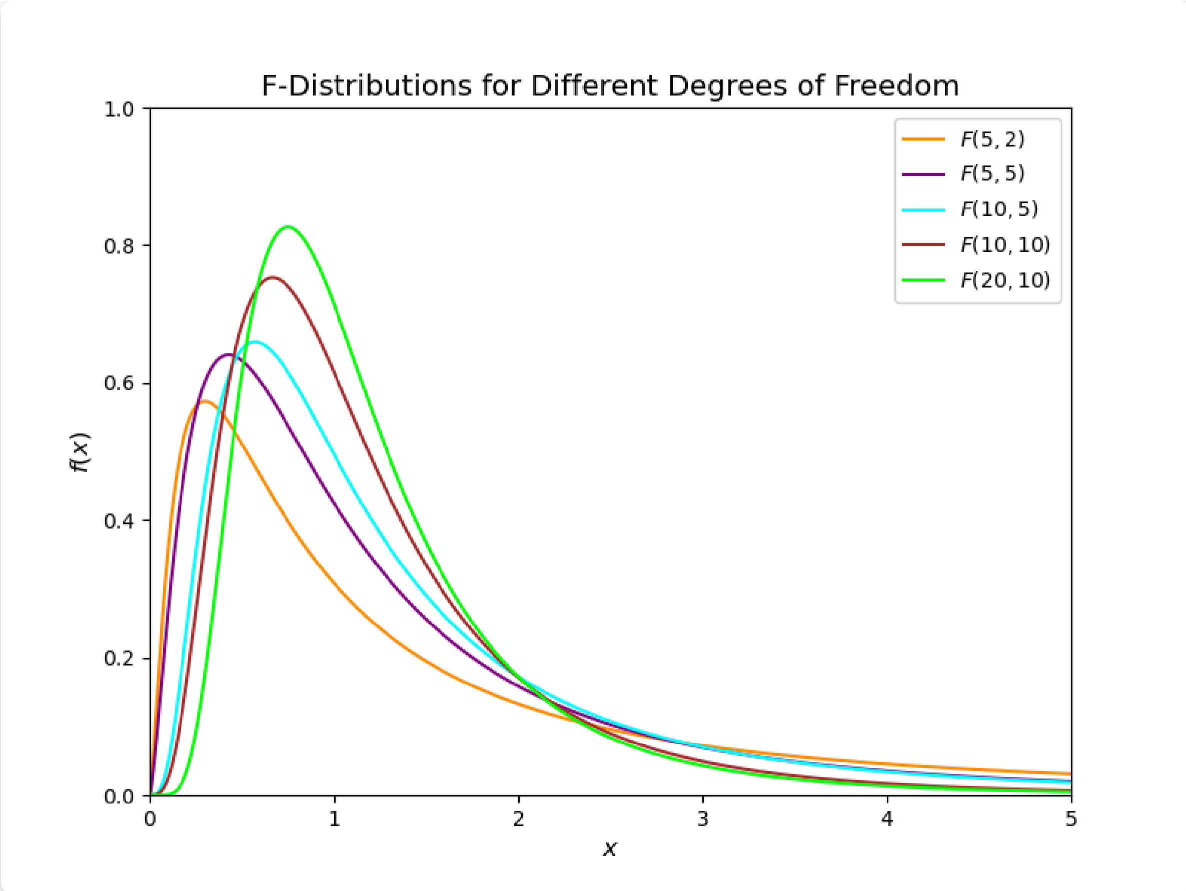
- t 分布概率密度关于 $x = 0$ 对称 $\Rightarrow E(t) = 0$
- $P\{t > -t_\alpha(n)\} = P\{t > t_{1-\alpha}(n)\} \Rightarrow t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$



2.3 F 分布

随机变量 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$, 且 X, Y 相互独立,随机变量 $F = \dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从自由度为 (n_1, n_2) 的 F 分布, 记作 $F \sim F(n_1, n_2)$

- $F \sim F(n_1, n_2) \Rightarrow \dfrac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$
- $F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \dfrac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}$
- $t \sim t(n) \Rightarrow t^2 \sim F(1, n)$



2.4 正态总体推论

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本, $\overline{X}, S^2$ 分别是样本的均值和方差

- $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$
- $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$
- $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} (\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma})^2 \sim \chi^2(n-1)$
- $\overline{X}$ 和 S^2 相互独立 $\Rightarrow \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1)$
- σ 未知时, $\frac{n(\overline{X} - \mu)^2}{S^2} \sim F(1, n-1)$

3. 参数的点估计

设总体 X 的分布函数 $F(x;\theta)$, 其中 θ 是一个未知参数, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体的一个样本, 由样本构造一个适当的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 作为参数 θ 的估计, 称统计量 $\hat{\theta}$ 为参数 θ 的估计量

3.1 矩估计

设总体分布中有 k 个未知的参数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$, 来自总体 X 的一组样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$, 如果 X 的原点矩 $E(X^l)(l=1,2,\cdots,k)$ 存在, 样本原点矩 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^l$ 可作为 $E(X^l)$ 的估计

3.2 最大似然估计

对未知参数 θ 进行估计, 在该参数可能的取值范围 I 中选取, 使用使样本观测值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 最大的参数 $\hat{\theta}$ 作为参数 θ 的估计值

似然函数

$$\begin{cases} L(\theta) = L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) \\ L(\theta) = \prod\limits_{i=1}^{n} f(x_i; \theta) \end{cases}$$

$$\exists \hat{\theta} \in I,\ s.t.\ L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \hat{\theta}) = \max_{\theta \in I} L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \theta)$$

3.3 估计量评价标准

- **无偏性**: $E(\hat{\theta}) = \theta$
- **有效性**: $D(\hat{\theta})$ 最小
- **一致性**: $\forall \varepsilon > 0,\ \lim\limits_{n \Rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon\} = 1$

4. 参数的区间估计

4.1 区间估计和置信区间

设 θ 是总体 X 的一个未知参数, 对于给定的 $\alpha(0 < \alpha < 1)$, 如果由样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 确定的两个统计量 $\hat{\theta_1} = \hat{\theta_1}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 和 $\hat{\theta_2} = \hat{\theta_2}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 满足 $P\{\hat{\theta_1}(X_1, X_2, \cdots, X_n) < \theta < \hat{\theta_2}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\} = 1 - \alpha$

则称随机区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 是 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的 **置信区间**, $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 分别称为 **置信上限** 和 **置信下限**, $1-\alpha$ 为置信水平, α 为**显著性水平**

4.2 正态总体的置信区间

待估参数	其他参数	枢轴量分布	置信区间
μ	σ^2 已知	$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\left(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}, \overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$
μ	σ^2 未知	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$\left(\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \overline{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$
σ^2	μ 已知	$\chi^2=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$	$\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi_{\alpha/2}(n)}, \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi_{1-\alpha/2}(n)}\right)$
σ^2	μ 未知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right)$

5. 假设检验

5.1 统计性检验和两类错误

- H_0: 虚无假设
- H_1: 备择假设
- **第一类错误**: 虚无假设 H_0 为真, 但拒绝了 H_0, 误认为备择假设 H_1 为真, 犯第一类错误概率 $\alpha = P\{R(H_0)|T(H_0)\}$
- **第二类错误**: 备择假设 H_1 为真, 但接受了 H_0, 误认为虚无假设 H_0 为真, 犯第二类错误概率 $\beta = P\{A(H_0)|T(H_1)\}$

5.2 正态总体下的六大检查和拒绝域

- σ^2 已知,μ 未知, $H_0: \ \mu=\mu_0, H_1: \ \mu \neq \mu_0$
  $\mu_r \in (-\infty, \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (\mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}, +\infty)$
- σ^2 未知, μ 未知, $H_0: \ \mu=\mu_0, H_1: \ \mu \neq \mu_0$
  $\mu_r \in (-\infty, \mu_0 - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)) \cup (\mu_0 + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), +\infty)$

- σ^2 已知, μ 未知, $H_0:\ \mu \le \mu_0, H_1:\ \mu > \mu_0$
  $\mu_r \in (\mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha, +\infty)$
- σ^2 已知, μ 未知, $H_0:\ \mu \ge \mu_0, H_1:\ \mu < \mu_0$
  $\mu_r \in (-\infty, \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha)$
- σ^2 未知, μ 未知, $H_0:\ \mu \le \mu_0, H_1:\ \mu > \mu_0$
  $\mu_r \in (\mu_0 + \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), +\infty)$
- σ^2 未知, μ 未知, $H_0:\ \mu \ge \mu_0, H_1:\ \mu < \mu_0$
  $\mu_r \in (-\infty, \mu_0 - \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1))$