随机变量数字特征

1. 一维随机变量的数字特征

1.1 数学期望

1.1.1 离散型随机变量

X 是离散型随机变量, X 的分布列为 $p_i = P\{X = x_i\}(i = 1, 2, \cdots, n)$

如果级数 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} x_i p_i$ **绝对收敛**, 称随机变量 X 的**数学期望**存在, 将其记作 $E(X)$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i$$

1.1.2 连续型随机变量

X 是连续型随机变量, X 的概率密度为 $f(x)$

如果积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ **绝对收敛**, 称随机变量 X 的**数学期望**存在, 将其记作 $E(X)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

1.1.3 数学期望推论

- $E(a) = a, E(E(X)) = E(X)$
- $E(aX \pm bY) = aE(X) \pm bE(Y)$
- $E\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$
- X 与 Y 相互独立 $\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$
- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立
  $$\begin{cases} E\left(\prod\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod\limits_{i=1}^{n} E(X_i) \\ E\left[\prod\limits_{i=1}^{n} g_i(X_i)\right] = \prod\limits_{i=1}^{n} E\left[g_i(X_i)\right] \end{cases}$$

1.2 方差和标准差

设 X 是随机变量, 如果 $E[(X - E(X))^2]$ 存在, 将 $E[(X - E(X))^2]$ 记作 X 的方差 $D(X)$

$$D(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

将 $\sqrt{D(X)}$ 称为随机变量 X 的**标准差或者均方差**, 记作 $\sigma(X)$

随机变量 $X^*=\dfrac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ 是 X 的**标准化随机变量**

$$\begin{cases}E(X^*)=0\\D(X^*)=1\end{cases}$$

1.2.1 方差和标准差推论

- $D(X)\geq 0, D(X)=E(X^2)-(E(X))^2$
- $D(c)=0, c\in\mathbb{R}$
- $D(aX+b)=a^2D(X), D(X+b)=D(X)$
- $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2Cov(X,Y)$
- $D\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_iX_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2D(X_i)+2\sum\limits_{1\leq i<j\leq n}a_ia_jCov(X_i,X_j)$
- X 和 Y 相互独立
  $\begin{cases}D(aX+bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)\\D(XY)=D(X)D(Y)+D(X)[E(Y)]^2+D(Y)[E(X)]^2\geq D(X)D(Y)\end{cases}$
- $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立
  $\begin{cases}D\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_iX_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2D(X_i)\\D\left(\sum\limits_{i=1}^{n}g_i(X_i)\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}D\left[g_i(X_i)\right]\end{cases}$
- $\forall c\in\mathbb{R}, D(X)\leq E\left[(X-c)^2\right]$

2. 二维随机变量的数字特征

2.1 数学期望

设 X,Y 为随机变量, $g(X,Y)$ 为 X,Y 的函数 (g 是连续函数)

2.1.1 离散型随机变量

$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}(i,j=1,2,\cdots)$

级数 $\sum\limits_{i}^{m}\sum\limits_{j}^{n}g(x_i,y_j)p_{ij}$ **绝对收敛**

$E[g(X,Y)]=\sum\limits_{i}^{m}\sum\limits_{j}^{n}g(x_i,y_j)p_{ij}$

2.1.2 连续型随机变量

(X, Y) 概率密度为 $f(x, y)$, 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dxdy$ **绝对收敛**

$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dxdy$

2.2 协方差与相关系数

随机变量 X 与 Y 的方差存在且 $D(X) > 0, D(Y) > 0$, 定义随机变量 X, Y 的协方差 $Cov(X, Y)$

$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$

$\rho_{XY} = \dfrac{Cov(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$ 定义为随机变量 X, Y 的**相关系数**

2.2.1 协方差和相关系数推论

- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X), Cov(X, X) = D(X), \rho_{XX} = 1$
- $Cov(aX + b, Y) = aCov(X, Y), Cov(X_1 + X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$
- $\rho_{XY} = 0 \Rightarrow X, Y$ **不相关**
- $\rho_{XY} \neq 0 \Rightarrow X, Y$ **相关**

3. 独立性与相关性判定、切比雪夫不等式

3.1 独立性与相关性判定

随机变量 X, Y 相互独立充要条件

$$\begin{cases} f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \\ P\{X = x_i, Y = y_i\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_i\} \end{cases}$$

随机变量 X, Y 不相关充要条件 $\rho_{XY} = 0$

$\rho_{XY} = 0 \Leftrightarrow Cov(X, Y) = 0 \Leftrightarrow E(XY) = E(X) \cdot E(Y) \Leftrightarrow D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$

3.2 切比雪夫不等式

随机变量 X 的期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 都存在

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, P\{|X - E(X)| \leq \varepsilon\} \geq \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2} \\ \forall \varepsilon > 0, P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} \leq 1 - \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2} \end{cases}$$

4. 常用分布数字特征

名称	概率分布	均值	方差	参数范围
两点分布 $B(1,p)$	$P(X=k)=P^k q^{1-k}$ $(k=0,1)$	p	pq	$0<p<1$ $q=1-p$
二项分布 $B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ $(k=0,1,2,\cdots,n)$	np	npq	$0<p<1$ $q=1-p$ $n\in\mathbb{N}$
泊松分布 $P(\lambda)$	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $(k=0,1,2,\cdots)$	λ	λ	$\lambda>0$
超几何分布 $H(n,N,M)$	$P(X=k)=\dfrac{C_{N-M}^{n-k}C_M^k}{C_N^n}$ $(k=0,1,\cdots,\min\{M,n\})$	$\dfrac{nM}{N}$	$\dfrac{n(N-n)(N-M)M}{N^2(N-1)}$	$n,N,M\in\mathbb{N}$ $n\le N, M\le N$
几何分布 $G(p)$	$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$ $(k=1,2,\cdots)$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$	$0<p<1$ $q=1-p$
均匀分布 $U(a,b)$	$f(x)=\dfrac{1}{b-a}(a\le x\le b)$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^3}{12}$	
指数分布 $E(\lambda)$	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}(x>0)$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$	$\lambda>0$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2	$\sigma>0$
Γ 分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$	$f(x)=\dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}(x>0)$	$\dfrac{\alpha}{\beta}$	$\dfrac{\alpha}{\beta^2}$	$\alpha>0$ $\beta>0$