



# LAT<sub>E</sub>X *main*

Sun for morning, moon for night, and you forever.

作者：Lyshmily.Y & 木易

组织：Lyshmily.Y

时间：November 10, 2024

版本：V.1.0

邮箱：[yjlpku.outlook.com](mailto:yjlpku.outlook.com) & [845307723@qq.com](mailto:845307723@qq.com)



在没有结束前，总要做很多没有意义的事，这样才可以在未来某一天，用这些无  
意义的事去堵住那些讨厌的缺口



## 目录

### 目录

A

1

### 第1部分 \* 线代

第1章 行列式	3
1.1 行列式的定义和性质	3
1.2 行列式展开定理	5
1.2.1 余子式	5
1.2.2 代数余子式	5
1.2.3 行列式展开定理	5
1.3 几类特殊的行列式	6
1.3.1 上下三角行列式	6
1.3.2 副三角行列式	6
1.3.3 拉普拉斯展开式	7
1.3.4 范德蒙行列式	7
1.4 行列式计算	7
1.5 Cramer Rule	11
第2章 矩阵	13

2.1 矩阵的定义和运算	13
2.1.1 矩阵定义和线性运算	13
2.1.2 矩阵乘法和幂	15
2.2 矩阵的逆和伴随矩阵	16
2.2.1 矩阵的逆	16
2.2.2 伴随矩阵	16
2.3 初等变换和初等矩阵	17

2.4 等价矩阵和矩阵的秩.....	20
<b>第 3 章 向量组</b>	<b>24</b>
3.1 向量和向量组的线性相关性.....	24
3.1.1 向量的定义和运算 .....	24
3.1.2 向量组的线性相关性 .....	26
3.2 极大线性无关组和向量组的秩.....	32
3.3 等价向量组.....	33
3.4 向量空间.....	33
<b>第 4 章 线性方程组</b>	<b>35</b>
4.1 具体型方程组.....	35
4.1.1 齐次方程组 .....	35
4.1.2 非齐次方程组 .....	36
4.2 两个方程组的公共解.....	38
4.3 同解方程组.....	38
<b>第 5 章 特征值和特征向量</b>	<b>39</b>
5.1 特征值和特征向量定义.....	39
5.2 相似.....	40
5.2.1 矩阵的相似对角化 .....	41
5.2.2 实对称矩阵的相似对角化 .....	42
<b>第 6 章 二次型</b>	<b>43</b>
6.1 二次型定义.....	43
6.2 二次型的标准型和规范型.....	44
6.3 正定二次型.....	45





第一部分  
线代



## 第1部分目录

第1章 行列式	3
1.1 行列式的定义和性质.....	3
1.2 行列式展开定理.....	5
1.3 几类特殊的行列式.....	6
1.4 行列式计算.....	7
1.5 Cramer Rule .....	11
第2章 矩阵	13
2.1 矩阵的定义和运算.....	13
2.2 矩阵的逆和伴随矩阵.....	16
2.3 初等变换和初等矩阵.....	17
2.4 等价矩阵和矩阵的秩.....	20
第3章 向量组	24
3.1 向量和向量组的线性相关性.....	24
3.2 极大线性无关组和向量组的秩.....	32
3.3 等价向量组.....	33
3.4 向量空间.....	33
第4章 线性方程组	35
4.1 具体型方程组.....	35
4.2 两个方程组的公共解.....	38
4.3 同解方程组.....	38
第5章 特征值和特征向量	39
5.1 特征值和特征向量定义.....	39
5.2 相似.....	40
第6章 二次型	43
6.1 二次型定义.....	43
6.2 二次型的标准型和规范型.....	44
6.3 正定二次型.....	45





# 第 1 章 行列式

## 1.1 行列式的定义和性质

### 定义 1.1.1 (行列式)

行列式是一个在方阵上按照一定法则计算得到的标量, 记作  $\det(A)$  或者  $|A|$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

#### 1. 几何定义

$n$  阶行列式  $\det(A_n)$  的几何意义是  $n$  维空间中由  $n$  阶行列式中的  $n$  个向量围成的  $n$  维空间体的“体积”

$$\det(A_2) = |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = S_D$$



$$\det(A_3) = |A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = V_\Omega$$

## 2. 逆序数法定义

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中  $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$  是  $j_1 j_2 \cdots j_n$  的逆序数



### 推论 1.1.1 (行列式的性质)

- 性质 1

行列式中 **行列等价**, 行列互换, 行列式的值不变,  $|\Lambda| = |\Lambda^T|$

- 性质 2

行列式中某行或者某列元素全为 0, 行列式的值  $\det(\Lambda) = 0$

- 性质 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 性质 4

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 性质 5

行列式两行或者两列互换, 行列式的值相反



- 性质 6

行列式中两行或者两列成比例, 行列式的值为 0

- 性质 7

行列式中某一行加上另一行的  $k$  倍, 行列式的值不变



## 1.2 行列式展开定理

### 1.2.1 余子式

#### 定义 1.2.1 (余子式)

行列式  $\det(A)$  去掉任意一项  $a_{ij}$  所在行和列去掉后的  $n - 1$  阶行列式称为  $a_{ij}$  的余子式

$M_{ij}$



### 1.2.2 代数余子式

#### 定义 1.2.2 (代数余子式)

行列式中任意一项  $a_{ij}$  的代数余子式  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$



### 1.2.3 行列式展开定理

#### 定理 1.2.1 (行列式展开定理)

行列式  $\det(A)$  按照第  $i$  行或者第  $j$  列展开

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{cases} \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} \\ \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj} \end{cases}$$



## ◆ 1.3 几类特殊的行列式

### 1.3.1 上下三角行列式

**推论 1.3.1 (上下三角行列式)**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$



### 1.3.2 副三角行列式

**推论 1.3.2 (副三角行列式)**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n a_{i,n-i+1}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n a_{i,n-i+1}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n a_{i,n-i+1}$$



### 1.3.3 拉普拉斯展开式

**推论 1.3.3 (拉普拉斯展开式)**

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$$

其中  $A$  是  $m$  阶矩阵,  $B$  是  $n$  阶矩阵



### 1.3.4 范德蒙行列式

**推论 1.3.4 (范德蒙行列式)**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$



## 1.4 行列式计算

**命题 1.4.1 (爪型行列式)**

$$det(A) = \begin{vmatrix} x_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_n \\ y_2 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ y_3 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \prod_{i=2}^n x_i \left( x_1 - \sum_{j=2}^n \frac{z_j y_j}{x_j} \right)$$



命题 1.4.2 ( $X$  型行列式)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & & & & b_1 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & a_k & b_k & \\ & & b_{k+1} & a_{k+1} & \\ & & \vdots & & \ddots \\ b_n & & & & a_n \end{vmatrix}$$



## 命题 1.4.3 (两三角形行列式)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x_1 & b & b & \cdots & b \\ c & x_2 & b & \cdots & b \\ c & c & x_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= \left| \begin{array}{cccc|c} x_1 & b & b & \cdots & b+0 \\ c & x_2 & b & \cdots & b+0 \\ c & c & x_3 & \cdots & b+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & c+x_n-c \end{array} \right| \\
 &= \left| \begin{array}{cccc|c} x_1 & b & b & \cdots & b \\ c & x_2 & b & \cdots & b \\ c & c & x_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & c \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cccc|c} x_1 & b & b & \cdots & 0 \\ c & x_2 & b & \cdots & 0 \\ c & c & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & x_n-c \end{array} \right| \\
 &= \left| \begin{array}{cccc|c} x_1 - b & 0 & 0 & \cdots & b \\ c - b & x_2 - b & 0 & \cdots & b \\ c - b & c - b & x_3 - b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c \end{array} \right| + (x_n - c)A_{n-1} \\
 &= c \prod_{i=1}^{n-1} (x_i - b) + (x_n - c)A_{n-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A_n = c \prod_{i=1}^{n-1} (x_i - b) + (x_n - c)A_{n-1} \\ A_n^T = b \prod_{i=1}^{n-1} (x_i - c) + (x_n - b)A_{n-1}^T \\ A_n = A_n^T \end{cases} \Rightarrow \det(A) = \frac{b \prod_{i=1}^n (x_i - c) - c \prod_{j=1}^n (x_j - b)}{b - c}$$

## 命题 1.4.4

$$\det(A) = \left| \begin{array}{ccccc|c} a & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{array} \right| = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}$$

当  $b = c$  时

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a + (n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a + (n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a + (n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a + (n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\
 &= [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\
 &= [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} \\
 &= [a + (n-1)b](a-b)^{n-1} \\
 \det(A) &= \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

## 命题 1.4.5 (三对角型行列式)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a \end{vmatrix}$$

递推式:  $A_n = aA_{n-1} - bcA_{n-2}$

特征方程:  $x^2 - ax + bc = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4bc}}{2} \\ x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4bc}}{2} \end{cases}$

$$\det(A) = A_n = \frac{x_1^{n+1} - x_2^{n+1}}{x_1 - x_2}$$



## 1.5 Cramer Rule

## 定理 1.5.1 (Cramer Rule)

对于  $n$  个方程  $n$  个未知数的非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

若行列式

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

方程组有唯一解  $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$ , 其中  $A_i$  是将  $\det(A)$  的第  $i$  列换成  $b_1, b_2, \dots, b_n$



对于  $n$  个方程  $n$  个未知数的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

$\det(A) \neq 0$ , 方程组有唯一解  $x_i = 0$ ,  $\det(A) = 0$ , 方程组有无穷多非零解



## 第 2 章 矩阵

### 2.1 矩阵的定义和运算

#### 2.1.1 矩阵定义和线性运算

##### 定义 2.1.1 (矩阵定义)

由  $m \times n$  个数  $a_{ij}$  排成的  $m$  行  $n$  列的数表称为  $m$  行  $n$  列的矩阵, 记作:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$m \times n$  个数称为矩阵  $A$  的元素, 简称为元, 数  $a_{ij}$  位于矩阵  $A$  的第  $i$  行第  $j$  列, 称为矩阵  $A$  的  $(i, j)$  元,  $m \times n$  矩阵乘法记作  $A_{mn}$  或  $(a_{ij})_{m \times n}$

- 元素是实数的矩阵称为 **实矩阵**, 元素是复数的矩阵称为 **复矩阵**
- 行数和列数相等的矩阵称为 **方阵**

##### 定义 2.1.2 (矩阵的线性运算)

###### 1. 加法

$$C = A + B = (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} = (c_{ij})_{m \times n}$$

其中,  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

###### 2. 标量乘法

$$kA = k(a_{ij})_{m \times n} = (ka_{ij})_{m \times n}$$

### 定义 2.1.3 (重要矩阵)

- **零矩阵**: 所有元素均为 0 的矩阵, 记作  $O$
- **单位矩阵**: 主对角线元素均为 1, 其余元素全为 0 的  $n$  阶方阵, 记作  $E$  或  $I$
- **数量矩阵**: 数  $k$  和单位矩阵乘积得到的矩阵被称为数量矩阵
- **对角矩阵**: 非主对角线元素均为 0 的矩阵称为对角矩阵
- **上(下)三角矩阵**: 当  $i > (<)j, a_{ij} = 0$  的矩阵称为上(下)三角矩阵
- **对称矩阵**: 满足条件  $A^T = A$  的矩阵称为对称矩阵
- **反对称矩阵**: 满足条件  $A^T = -A$  的矩阵称为反对称矩阵
- **幂等矩阵**: 满足条件  $A^2 = A$  的矩阵称为幂等矩阵
- **正交矩阵**:  $A$  是  $n$  阶方阵, 满足  $A^T A = E$  的矩阵称为正交矩阵
- **分块矩阵**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_n \end{bmatrix}$$

其中  $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ ,  $B_j = (b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{jm})^T$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX + BY & AY + BW \\ CX + DY & CY + DW \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A^n & O \\ O & B^n \end{bmatrix}$$



## 2.1.2 矩阵乘法和幂

### 定义 2.1.4 (矩阵的乘法和幂)

#### 1. 矩阵乘法

$A = (a_{ij})_{m \times s}$ ,  $B = (b_{ij})_{s \times n}$ , 矩阵  $A, B$  可以相乘 (左乘矩阵的列数和右乘矩阵的行数相等), 记  $C = A \times B = (c_{ij})_{m \times n}$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj}$$

#### 2. 矩阵转置

将矩阵  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  的行列互换得到矩阵  $A$  的转置矩阵, 记作  $A^T$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- $(A^T)^T = A$
- $(kA)^T = k(A)^T$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- 当  $m = n$  时,  $|A^T| = |A|$

#### 3. 矩阵的幂

$A$  是  $n$  阶方阵,  $A^m = \overbrace{AA \cdots A}^{m \text{ 个}}$  称为方阵  $A$  的  $m$  次幂

- $(A \pm B)^2 = A^2 + B^2 \pm AB \pm BA$
- $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$
- $(AB)^m = \overbrace{(AB)(AB) \cdots (AB)}^{m \text{ 个}}$
- 当  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$  时,  $f(A) = a_0E + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n$



## 2.2 矩阵的逆和伴随矩阵

### 2.2.1 矩阵的逆

#### 定义 2.2.1 (逆矩阵)

$A, B$  是  $n$  阶方阵,  $E$  是  $n$  阶单位矩阵, 若  $AB = BA = E$ , 则称  $A$  是可逆矩阵, 并称  $B$  是  $A$  的逆矩阵, 且逆矩阵唯一, 将  $A$  的逆矩阵记作  $A^{-1}$

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $AB$  可逆,  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $k \neq 0, (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
- $A^T$  可逆,  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

#### 定理 2.2.1 (逆矩阵存在充要条件)

$A$  是  $n$  阶方阵,  $A$  可逆的充要条件:

$$|A| \neq 0$$



### 2.2.2 伴随矩阵

#### 定义 2.2.2 (伴随矩阵)

$A$  是  $n$  阶方阵,  $A$  的伴随矩阵  $A^*$  是由  $A$  的代数余子式构成的矩阵, 记作  $A^* = (A_{ij})_{n \times n}$ , 其中  $A_{ij}$  是  $a_{ji}$  的代数余子式

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$AA^* = A^*A = |A|E \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

- $\forall A_n, |A^*| = |A|^{n-1}$
- $|A| \neq 0, A^* = |A|A^{-1}, A = |A|(A^*)^{-1}$
- $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$
- $(kA)^* = k^{n-1}A^*$



## 2.3 初等变换和初等矩阵

### 定义 2.3.1 (初等变换)

- 用一个非零常数乘以矩阵的某一行(列)
- 互换矩阵中的某两行(列)的位置
- 将矩阵的某一行(列)的  $k$  倍加到另一行(列)



### 定义 2.3.2 (初等矩阵)

由单位矩阵经过一次初等变换后得到的矩阵被称为初等矩阵

- $E_i(k)$  表示  $E$  的第  $i$  行(列)乘  $k$  倍

$$E_i(k) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & m & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- $E_{ij}$  表示  $E$  的第  $i$  行(列)与第  $j$  行(列)互换位置

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$



- $E_{ij}(k)$  表示  $E$  的第  $i$  行(列)的  $k$  倍加到第  $j$  行(列)

$$E_{ij}(k) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & k & & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$



### 推论 2.3.1 (初等矩阵推论)

$$\begin{cases} E_i(k)^T = E_i(k) \\ E_{ij}^T = E_{ij} \\ E_{ij}(k)^T = E_{ji}(k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_i(k)^{-1} = \frac{1}{k} E_i(k) \\ E_{ij}^{-1} = E_{ij} \\ E_{ij}(k)^{-1} = E_{ij}(-k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} |E_i(k)| = k \\ |E_{ij}| = -1 \\ |E_{ij}(k)| = 1 \end{cases}$$

- Gauss-Jordan Elimination

$$\begin{bmatrix} A & E \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} E & A^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{bmatrix} E \\ A^{-1} \end{bmatrix}$$



### 推论 2.3.2 (矩阵变换)

若  $A$  是可逆矩阵, 存在有限个初等矩阵  $P_1, P_2, \dots, P_s$ , 满足  $A = P_1 P_2 \cdots P_s$ , 且  $A^{-1} = P_s^{-1} \cdots P_2^{-1} P_1^{-1}$



## 定义 2.3.3 (行阶梯形矩阵)

行阶梯形矩阵

- 零行全部位于非零行下方
- 非零行的首个非零元素(主元)在每一行中的列标号递增

行最简阶梯形矩阵

- 行阶梯形矩阵非零行的首个非零元素(主元)为1
- 主元所在列的其他元素全为0

## 推论 2.3.3 (分块矩阵逆矩阵)

$$\begin{bmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & A_1 \\ & A_2 \\ \dots & \\ A_s & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & \dots & \\ & & A_2^{-1} & \\ & A_1^{-1} & & \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} B_{s \times s} & O_{s \times r} \\ D_{r \times s} & C_{r \times r} \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} B_{s \times s} & D_{s \times r} \\ O_{r \times s} & C_{r \times r} \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} O_{s \times r} & B_{s \times s} \\ C_{r \times r} & D_{r \times s} \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} D_{s \times r} & B_{s \times s} \\ C_{r \times r} & O_{r \times s} \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \end{bmatrix}$$



## 2.4 等价矩阵和矩阵的秩

### 定义 2.4.1 (等价矩阵)

设  $A, B$  均为  $m \times n$  矩阵,  $\exists P_{m \times m}, Q_{n \times n}$  ( $P, Q$  可逆), s.t.  $PAQ = B$ , 称  $A, B$  是等价矩阵, 记作  $A \cong B$

- 同型矩阵  $A, B$  等价的充要条件:  $r(A) = r(B)$
- $P, Q$  均为可逆矩阵

$$\forall A_{m \times n}, \exists P, Q, \text{s.t. } PAQ = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

其中  $P_{m \times m}, Q_{n \times n}$  均为可逆矩阵,  $E_r$  是  $r$  阶单位矩阵, 矩阵  $\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$  是秩为  $r$  矩阵的等价标准型

### 定义 2.4.2 (矩阵的秩)

设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $A$  中最高阶非零子式的阶数称为矩阵  $A$  的秩, 记作  $r(A)$

- $r(A) = k$  充要条件:  $A$  存在  $k$  阶非零子式, 且所有  $k+1$  阶子式全为 0
- $r(A) = k$  充要条件:  $A$  的行(列)向量中存在  $k$  个线性无关的向量, 且任意  $k+1$  个行(列)向量线性相关
- $r(A_{n \times n}) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$  可逆

### 推论 2.4.1 (秩的性质)

设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是满足有关矩阵运算要求的矩阵, 我们有

- $0 \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$
- $r(kA) = r(A), k \neq 0$
- $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$
- $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$
- 

$$r(A^*) = \begin{cases} n & r(A) = n \\ 1 & r(A) = n - 1 \\ 0 & r(A) < n - 1 \end{cases}$$

其中  $A$  为  $n$  阶方阵

### 命题 2.4.1

设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times s$  矩阵, 则  $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$



## 证明

(1).  $r(AB) \leq r(B)$ 

令

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{bmatrix}$$

其中  $\beta_i, \gamma_j$  代表行向量,  $a_{ij}$  代表元素

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \cdots + a_{1n}\beta_n \\ a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{2n}\beta_n \\ \vdots \\ a_{m1}\beta_1 + a_{m2}\beta_2 + \cdots + a_{mn}\beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{bmatrix}$$

 $AB$  的行向量都可以由  $B$  的行向量线性表出  $\Rightarrow r(AB) \leq r(B)$ (2).  $r(AB) \leq r(A)$ 

令

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_s \end{bmatrix}$$

其中  $\alpha_i, \gamma_j$  代表列向量,  $b_{ij}$  代表元素

$$AB = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}\alpha_1 + b_{21}\alpha_2 + \cdots + b_{n1}\alpha_n \\ b_{12}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 + \cdots + b_{n2}\alpha_n \\ \vdots \\ b_{1s}\alpha_1 + b_{2s}\alpha_2 + \cdots + b_{ns}\alpha_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_s \end{bmatrix}$$

 $AB$  的列向量都可以由  $A$  的列向量线性表出  $\Rightarrow r(AB) \leq r(A)$ 

$$\begin{cases} r(AB) \leq r(B) \\ r(AB) \leq r(A) \end{cases} \Rightarrow r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$$

**命题 2.4.2**

设  $A, B$  是  $m \times n$  矩阵, 则  $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$

**证明**

令

$$\begin{cases} A = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n] \\ B = [\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n] \\ [A, B] = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n \ \beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n] \end{cases}$$

$$A + B = [\alpha_1 + \beta_1 \ \alpha_2 + \beta_2 \ \cdots \ \alpha_n + \beta_n]$$

$A + B$  的列向量都可以由  $[A, B]$  的列向量线性表出  $\Rightarrow r(A + B) \leq r([A, B]) \Rightarrow r(A + B) \leq r(A) + r(B)$

**命题 2.4.3**

设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times s$  矩阵, 则  $r(A) + r(B) - n \leq r(AB)$

**证明**

$$\begin{bmatrix} E_{m \times m} & -A_{m \times n} \\ O_{n \times m} & E_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{m \times n} & O_{m \times s} \\ E_{n \times n} & B_{n \times s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{n \times n} & -B_{n \times s} \\ O_{n \times s} & E_{s \times s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_{m \times n} & -AB \\ E_{n \times n} & O_{n \times s} \end{bmatrix}$$

其中  $\begin{bmatrix} E_{m \times m} & -A_{m \times n} \\ O_{n \times m} & E_{n \times n} \end{bmatrix}$  和  $\begin{bmatrix} E_{n \times n} & -B_{n \times s} \\ O_{n \times s} & E_{s \times s} \end{bmatrix}$  均为可逆矩阵

$$r(A) + r(B) \leq n + r(AB) \Rightarrow r(A) + r(B) - n \leq r(AB)$$

特别的, 当  $AB = O$  时,  $r(AB) = 0 \Rightarrow r(A) + r(B) \leq n$

**命题 2.4.4**

设  $A$  是  $n$  阶方阵, 则

$$r(A^*) = \begin{cases} n & r(A) = n \\ 1 & r(A) = n - 1 \\ 0 & r(A) < n - 1 \end{cases}$$



## 证明

(1).  $r(A) = n$ 

$$\begin{cases} r(A) = n \\ AA^* = |A|E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |A| \neq 0 \\ |A^*| = |A|^{n-1} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow r(A^*) = n$$

(2).  $r(A) = n - 1$ 

$$\begin{cases} r(A) = n - 1 \\ AA^* = |A|E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \\ AA^* = O \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r(A) + r(A^*) \leq n \\ r(A^*) \leq 1 \end{cases}$$

 $r(A) = n - 1 \rightarrow A^*$  至少存在一个元素不为 0  $\rightarrow r(A^*) \geq 1$ 

$$\begin{cases} r(A^*) \geq 1 \\ r(A^*) \leq 1 \end{cases} \Rightarrow r(A^*) = 1$$

(3).  $r(A) < n - 1$ 

$$\begin{cases} r(A) < n - 1 \\ AA^* = |A|E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \\ A^* = O \end{cases} \Rightarrow r(A^*) = 0$$





## 第 3 章 向量组

### ◆ 3.1 向量和向量组的线性相关性

#### 3.1.1 向量的定义和运算

##### 定义 3.1.1 (向量的定义)

$n$  个数构成的有序数组  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$  称为一个  $n$  维向量, 记作  $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ ,  $\alpha$  称为  $n$  维行向量,  $\alpha^T$  称为  $n$  维列向量, 其中  $a_i$  称为向量的第  $i$  个分量



##### 定义 3.1.2 (向量的线性运算)

###### 1. 加法

$$\alpha + \beta \stackrel{\text{def}}{=} [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n]$$

###### 2. 标量乘法

$$k\alpha \stackrel{\text{def}}{=} [ka_1, ka_2, \dots, ka_n], k \in \mathbb{R}$$



##### 定义 3.1.3 (向量的内积和正交)

###### 内积

设  $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T, \beta = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$ , 则称:

$$\alpha^T \beta = \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

为向量  $\alpha, \beta$  的内积, 记作  $(\alpha, \beta)$



## 模

$\|\alpha\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$  称为向量  $\alpha$  的模, 特别的当  $\alpha$  时, 称  $\alpha$  为单位向量

## 正交

当  $\alpha^T \beta = 0$  时, 称向量  $\alpha, \beta$  是正交向量

## 标准正交向量组

向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  满足:

$$\alpha_i^T \alpha_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

则称  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是标准或单位正交向量组

## 正交矩阵

设  $A$  是  $n$  阶方阵, 若  $A^T A = E$ , 则称  $A$  为正交矩阵

- $A^T A = E \Rightarrow A^T = A^{-1}$
- $|A| = \pm 1$
- $A$  的行(列)向量是标准正交向量组

## 施密特正交化

线性无关的向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  的标准正交化公式:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = \alpha_1 \\ \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n = \alpha_n - \frac{(\alpha_n, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_n, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 - \dots - \frac{(\alpha_n, \beta_{n-1})}{(\beta_{n-1}, \beta_{n-1})} \beta_{n-1} \end{array} \right.$$

将  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  单位化:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} \\ \eta_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} \\ \dots \\ \eta_n = \frac{\beta_n}{\|\beta_n\|} \end{array} \right.$$

$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  是一个标准正交向量组



### 3.1.2 向量组的线性相关性

#### 定义 3.1.4 (线性相关和线性表出)

##### 1. 线性组合

设有  $m$  个  $n$  维向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  和  $m$  个数  $k_1, k_2, \dots, k_m$ , 向量

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$$

称作向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的线性组合

##### 2. 线性表出

向量  $\beta$  可以表示为向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的线性组合

$$\exists k_i (i = 1, 2, \dots, m) \in \mathbb{R}, \text{ s.t. } \beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$$

向量  $\beta$  可以由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表出

##### 3. 线性相关

向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$

$$\exists k_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, m), \text{ s.t. } k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$$

向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关

##### 4. 线性无关

向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$

$$\exists k_i \in \mathbb{R}, \text{ s.t. } k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$$

当且仅当  $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$  时上式成立, 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关



#### 定理 3.1.1 (判别线性相关性的七大定理)

##### 定理一

向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性相关的充要条件: 至少有一个向量可以由其余的  $n - 1$  个向量线性表出



**证明**

(i). 必要性

向量组  $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n$  线性相关

$$\exists k_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, n), \text{ s.t. } k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0$$

不妨假设  $k_m \neq 0 (1 \leq m \leq n)$ 

$$\alpha_m = -\frac{k_1}{k_m}\alpha_1 - \dots - \frac{k_n}{k_m}\alpha_n$$

 $\alpha_m$  可以由其余  $n - 1$  个向量线性表出

(ii). 充分性

不妨假设  $\alpha_m$  可以由其余  $n - 1$  个向量线性表出:

$$\alpha_m = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n$$

$$\exists k_i \neq 0 (k_m = 1), \text{ s.t. } k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + 1\alpha_m + \dots + k_n\alpha_n = 0$$

向量组  $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n$  线性相关**定理二**若向量组  $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n$  线性无关,  $\beta, \alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n$  线性相关,  $\beta$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n$  线性表出, 且表示唯一

**证明**

(i). 存在性

 $\beta, \alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n$  线性相关

$$\exists k_i \in \mathbb{R} (i = 1, 2, \dots, n, \beta), \text{ s.t. } k_\beta \beta + k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_n \alpha_n = 0$$

假设  $k_\beta = 0$ 

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_n \alpha_n = 0 \Rightarrow \exists k_i \neq 0 (i \in \{1, 2, \dots, n\})$$

向量组  $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n$  线性相关, 矛盾  $\Rightarrow k_\beta \neq 0$ 

$$\beta = -\frac{k_1}{k_\beta} \alpha_1 - \frac{k_2}{k_\beta} \alpha_2 - \dots - \frac{k_n}{k_\beta} \alpha_n$$

向量  $\beta$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n$  线性表出

(ii). 唯一性

假设向量组  $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n$  对  $\beta$  存在两种不同的线性表出

$$\begin{cases} \beta = l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + \dots + l_n \alpha_n \\ \beta = h_1 \alpha_1 + h_2 \alpha_2 + \dots + h_n \alpha_n \end{cases}$$

两式相减:

$$(l_1 - h_1) \alpha_1 + (l_2 - h_2) \alpha_2 + \dots + (l_n - h_n) \alpha_n = 0$$

 $\exists l_i - h_i \neq 0 (i \in \{1, 2, \dots, n\})$ , 向量组  $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n$  线性相关, 矛盾  $\Rightarrow$  线性表出唯一**定理三**向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_s$  线性表出, 且  $t > s$ , 则  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  线性相关

## 证明

向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表出

$$\begin{cases} \beta_1 = l_{11}\alpha_1 + l_{12}\alpha_2 + \dots + l_{1s}\alpha_s \\ \beta_2 = l_{21}\alpha_1 + l_{22}\alpha_2 + \dots + l_{2s}\alpha_s \\ \dots \\ \beta_t = l_{t1}\alpha_1 + l_{t2}\alpha_2 + \dots + l_{ts}\alpha_s \end{cases}$$

假设  $\exists k_i \in \mathbb{R}, s.t. \sum_{i=1}^s k_i \beta_i = 0$

$$\begin{cases} k_1\beta_1 = k_1(l_{11}\alpha_1 + l_{12}\alpha_2 + \dots + l_{1s}\alpha_s) \\ k_2\beta_2 = k_2(l_{21}\alpha_1 + l_{22}\alpha_2 + \dots + l_{2s}\alpha_s) \\ \dots \\ k_t\beta_t = k_t(l_{t1}\alpha_1 + l_{t2}\alpha_2 + \dots + l_{ts}\alpha_s) \end{cases} \Rightarrow \sum_{i=1}^t k_i \beta_i = (\sum_{i=1}^t k_i l_{i1})\alpha_1 + (\sum_{i=1}^t k_i l_{i2})\alpha_2 + \dots + (\sum_{i=1}^t k_i l_{is})\alpha_s$$

不妨令  $\sum_{i=1}^t k_i l_{i1} = \sum_{i=1}^t k_i l_{i2} = \dots = \sum_{i=1}^t k_i l_{is} = 0$

$$\begin{cases} k_1 l_{11} + k_2 l_{21} + \dots + k_t l_{t1} = 0 \\ k_1 l_{12} + k_2 l_{22} + \dots + k_t l_{t2} = 0 \\ \dots \\ k_1 l_{1s} + k_2 l_{2s} + \dots + k_t l_{ts} = 0 \end{cases} \Rightarrow LX = 0$$

其中

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \dots & l_{t1} \\ l_{12} & l_{22} & \dots & l_{t2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{1s} & l_{2s} & \dots & l_{ts} \end{bmatrix}, X = [k_1, k_2, \dots, k_t]^T$$

这是一个  $t$  元  $s$  个方程的齐次线性方程组, 且  $t > s$ , 方程组一定有非零解

$$\exists k_i \neq 0 (i \in \{1, 2, \dots, n\}), s.t. k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_t\beta_t = 0$$

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  线性相关

## 定理四



设  $m$  个  $n$  维向量  $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_m$ , 其中

$$\begin{cases} \alpha_1 = [a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}]^T \\ \alpha_2 = [a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}]^T \\ \dots \\ \alpha_m = [a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{nm}]^T \end{cases}$$

向量组  $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_m$  线性相关的充要条件时齐次线性方程组  $AX = 0$  有非零解, 也等价于零空间不为零

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, X = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$$



## 证明

(i). 必要性

向量组  $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_m$  线性相关

$$\exists x_i \neq 0 (i \in \{1, 2, \dots, m\}), \text{ s.t. } x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m = 0$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$$

有非零解

(ii). 充分性

方程组  $AX = 0$  有非零解

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m = 0$$

向量组  $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_m$  线性相关

## 定理五

向量  $\beta$  可以由向量组  $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_s$  线性表出, 等价于非齐次方程组方程  $AX = \beta$  有解; 向量  $\beta$  不能由向量组  $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_s$  线性表出, 等价于非齐次方程组方程  $AX = \beta$  无解



**证明**

向量  $\beta$  可以由向量组  $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_s$  线性表出

$$\exists x_i \neq 0 (i \in \{1, 2, \dots, s\}), \text{ s.t. } x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s = \beta$$

$$[\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_s] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = \beta$$

方程组  $AX = \beta$  有非零解

**定理 六**

如果向量组  $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n$  一部分向量线性相关, 那么整个向量组也线性相关

**证明**

不妨设  $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_j (j < n)$  线性相关

$$\exists k_i \neq 0 (i \in \{1, 2, \dots, j\}), \text{ s.t. } k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_j\alpha_j = 0$$

$$\text{取 } k_1, k_2, \dots, k_j, k_{j+1} = k_{j+2} = \dots = k_n = 0$$

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_j\alpha_j + 0\alpha_{j+1} + \dots + 0\alpha_n = 0$$

$k_1, k_2, \dots, k_j, k_{j+1} = k_{j+2} = \dots = k_n = 0$  不全为 0, 整个向量组也线性相关

**定理 七**

如果一组  $n$  维向量  $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n$  线性无关, 那么把这些向量各任意添加  $m$  个分量得到的新向量组  $(n+m)$  维  $\alpha_1^*, \alpha_2^* \dots, \alpha_n^*$  线性无关; 如果向量组  $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n$  线性相关, 那各去掉相同的若干个分量所得到的新向量组也线性相关

**3.2 极大线性无关组和向量组的秩****定义 3.2.1 (极大线性无关组)**

在向量组  $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_s$ , 如果存在部分向量组  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2} \dots, \alpha_{i_r}$  满足:

- $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2} \dots, \alpha_{i_r}$  线性无关
- 向量组中任意向量  $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, s)$  都可以被向量组  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2} \dots, \alpha_{i_r}$  线性表出



则称向量组  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2} \dots, \alpha_{i_r}$  是原向量组的一个极大线性无关组

一个向量组的极大线性无关组不唯一, 对于线性无关的向量组, 它的极大线性无关组是自身

### 定义 3.2.2 (向量组的秩)

向量组  $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_s$  的极大线性无关组  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2} \dots, \alpha_{i_r}$  中所含向量的个数  $r$  称为向量组的秩, 记作:

$$\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_s) = r$$

- $r(A) = r(\text{col}(A)) = r(\text{row}(A))$
- 初等行变换和初等列变换不改变矩阵的秩
- $A \xrightarrow{\text{col}} B$ ,  $A$  的行向量与  $B$  的行向量是等价向量组
- 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_s$  及  $\beta_1, \beta_2 \dots, \beta_t$ , 若  $\beta_i (i = 1, 2, \dots, t)$  均可由  $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_s$  线性表出, 则:

$$r(\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_s) \leq r(\beta_1, \beta_2 \dots, \beta_t)$$

## 3.3 等价向量组

### 定义 3.3.1 (等价向量组)

设两个向量组: (I)  $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_s$ , (II)  $\beta_1, \beta_2 \dots, \beta_t$ , 若 (I) 中向量  $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, s)$  均可由 (II) 中向量线性表出, 则称向量组 (I) 可由向量组 (II) 线性表出; 若向量组 (I) 和向量组 (II) 互相线性表出, 称向量组 (I) 与向量组 (II) 是等价向量组, 记作  $(I) \cong (II)$

- $(I) \cong (I)$
- $(I) \cong (II), (II) \cong (I)$
- $(I) \cong (II), (II) \cong (III)$ , 则  $(I) \cong (III)$
- 向量组和它的极大线性无关组是等价向量组

## 3.4 向量空间

### 定义 3.4.1 (向量空间)

设  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  是  $n$  维向量空间  $\mathbb{R}^n$  中线性无关的有序向量,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$  均可由向量组  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  线性表出, 且表出式:

$$\alpha = a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_n \xi_n$$



称  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  是  $n$  维向量空间  $\mathbb{R}^n$  的一组基, 基向量的个数  $n$  称为向量空间的维度,  $[a_1, a_2, \dots, a_n]^T$  是向量  $\alpha$  在基向量  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  的坐标

### 定义 3.4.2 (基变换)

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  和  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  是向量空间  $\mathbb{R}^n$  中的两个基, 其有关系:

$$[\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n] = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] C$$

上式是基  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  到基  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  的基变换公式, 矩阵  $C$  是基  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  到基  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  的过渡矩阵,  $C$  的第  $i$  列即是  $\eta_i$  在基  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  下的坐标, 过渡矩阵  $C$  为可逆矩阵

### 定义 3.4.3 (坐标变换)

设向量  $\alpha$  在基  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  和基  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  下的坐标分别为  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ ,  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$

$$\alpha = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] \mathbf{x} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n] \mathbf{y}$$

$$[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n] C$$

$$\mathbf{x} = C \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} = C^{-1} \mathbf{x}$$





## 第4章 线性方程组

### 4.1 具体型方程组

#### 4.1.1 齐次方程组

定义 4.1.1 (齐次方程组)

方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

称为  $m$  个方程,  $n$  个未知数的齐次方程组

向量形式:

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$$

其中:

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} (j = 1, 2, \dots, n)$$

矩阵形式:

$$A_{m \times n} X = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

## 2. 有解的条件

- (i). 当  $r(A) = n$  时, ( $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关), 方程组只有零解.
- (ii). 当  $r(A) = r < n$  时, ( $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性相关), 方程组有非零解, 且有  $n - r$  个线性无关解.

## 3. 解的性质

如果  $A\xi_1 = 0, A\xi_2 = 0, \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}, A(k_1\xi_1 + k_2\xi_2) = 0$

### 4. 基础解系和解的结构

#### (1). 基础解系

设  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  满足:

- $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  是方程组的解
- $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  线性无关
- 方程组  $AX = 0$  的任意一个解均可以由  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  线性表出

我们称  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  为方程组  $AX = 0$  的基础解系.

#### (2). 通解

设  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$  为方程组  $AX = 0$  的基础解系, 则  $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r}$  是方程组  $AX = 0$  的通解, 其中  $k_1, k_2, \dots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$



## 4.1.2 非齐次方程组

### 定义 4.1.2 (非齐次方程组)

#### 1. 形式

#### 方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

称为  $m$  个方程,  $n$  个未知数的非齐次方程组.



其向量形式为:

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$$

其中:

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} (j = 1, 2, \dots, n), \quad \beta = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix}$$

方程组的矩阵形式为:

$$A_{m \times n}X = \beta$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

矩阵  $\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_{mj} \end{array} \right]$  记作为矩阵  $A$  的增广矩阵, 简记为  $[A | \beta]$

2. 有解的条件

(i).  $r(A) \neq r([A, \beta])$ , 方程组无解. ( $\beta$ 不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表出)

(ii).  $r(A) = r([A, \beta]) = n$ , 方程组有唯一解

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关,  $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性相关

(iii).  $r(A) = r([A, \beta]) < n$ , 方程组有无穷多组解.

3. 解的性质

设  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  是非齐次方程组  $AX = \beta$  的解,  $\xi$  是对应齐次方程组  $AX = 0$  的解, 我们有:

- $\eta_1 - \eta_2$  是  $AX = 0$  的解
- $k\xi + \eta$  是方程组  $AX = \beta$  的解

4. 解的结构

(1). 特解

$\eta$  是非齐次方程组  $AX = \beta$  的一个特解

(2). 通解

设  $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$  是方程组  $AX = 0$  的通解, 其中  $k_1, k_2, \dots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$ , 我们可



以得到非齐次性方程组的通解:

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta$$

## 4.2 两个方程组的公共解

### 定义 4.2.1 (两个方程组的公共解)

(1). 齐次性线性方程组  $A_{m \times n}X = 0$  和  $B_{m \times n}X = 0$  的公共解是满足方程组  $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} X = 0$  的解.

(2). 非齐次性线性方程组  $A_{m \times n}X = \alpha$  和  $B_{m \times n}X = \beta$  的公共解是满足方程组  $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$  的解.

(3). 给出方程组  $A_{m \times n}X = 0$  的通解  $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_s\xi_s$ , 代入第二个方程组  $B_{m \times n}X = 0$  得到  $k_i(i = 1, 2, \dots, s)$  之间的关系, 代回方程  $A_{m \times n}X = 0$

(4). 给出方程组  $A_{m \times n}X = 0$  的基础解系  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$  和方程组  $B_{m \times n}X = 0$  的基础解系  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ , 公共解为:

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_s\xi_s = l_1\eta_1 + l_2\eta_2 + \cdots + l_t\eta_t$$

## 4.3 同解方程组

### 定义 4.3.1 (同解方程组)

如果两个方程组  $A_{m \times n}X = 0$  和  $B_{m \times n}X = 0$  有完全相同的解, 则称它们为同解方程组.

- $AX = 0$  的解满足  $BX = 0$  并且  $BX = 0$  的解满足  $AX = 0$
- $r(A) = r(B)$  并且  $AX = 0$  的解满足  $BX = 0$  ( $BX = 0$  的解满足  $AX = 0$ )
- $r(A) = r(B) = r(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix})$





## 第 5 章 特征值和特征向量

2012.08.18

### 5.1 特征值和特征向量定义

#### 定义 5.1.1 (特征值和特征向量)

设  $A$  是  $n$  阶矩阵,  $\lambda$  为常数, 存在非零列向量  $\xi$ , 满足:

$$A\xi = \lambda\xi$$

则称  $\lambda$  为  $A$  的特征值,  $\xi$  是  $A$  对应于特征值  $\lambda$  的特征向量

## 注

$$(\lambda E - A)\xi = O \Rightarrow |\lambda E - A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) = 0$$

上面右边是关于  $\lambda$  的特征多项式，也是  $A$  的特征方程：

$$\lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \prod_{i=1}^n \lambda_i = 0$$

我们得到：

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii} \\ \prod_{i=1}^n \lambda_i = |A| \end{cases}$$

## 推论 5.1.1 (特征向量)

- $k$  重特征值至多只有  $k$  个线性无关的特征向量
- 若  $\xi_1, \xi_2$  是  $A$  的属于不同特征值  $\lambda_1, \lambda_2$  的特征向量， $\lambda_1, \lambda_2$  线性无关
- 若  $\xi_1, \xi_2$  是  $A$  的属于同一特征值  $\lambda$  的特征向量  
 $k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2$  ( $k_1, k_2$  不同时为 0) 仍然是  $A$  属于特征值  $\lambda$  的特征向量

表 5.1：常用特征值和特征向量

矩阵	$A$	$kA$	$A^k$	$f(A)$	$A^{-1}$	$A^*$	$P^{-1}AP$
特征值	$\lambda$	$k\lambda$	$\lambda^k$	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{ A }{\lambda}$	$\lambda$
特征向量	$\xi$	$\xi$	$\xi$	$\xi$	$\xi$	$\xi$	$P^{-1}\xi$

## 5.2 相似

## 定义 5.2.1 (矩阵的相似)

设  $A, B$  是两个  $n$  阶方阵，若存在  $n$  阶可逆矩阵  $P$ ，使得  $P^{-1}AP = B$ ，则称  $A$  相似于  $B$ ，记作  $A \sim B$



## 注

- (1).  $A \sim A$  反身性
- (2).  $A \sim B \Rightarrow B \sim A$  对称性
- (3).  $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$  传递性

## 推论 5.2.1 (相似矩阵)

(1).  $A \sim B$ , 我们得到:

- $r(A) = r(B)$
- $|A| = |B|$
- $|\lambda A - E| = |\lambda B - E|$
- $A, B$  具有相同的特征值

(2).  $A \sim B$ , 我们得到:

- $A^m \sim B^m$
- $f(A) \sim f(B)$

(3).  $A \sim B$  且  $A$  可逆, 我们得到:

- $A^{-1} \sim B^{-1}$
- $f(A^{-1}) \sim f(B^{-1})$

(4).  $A \sim B$ , 我们得到:

- $A^T \sim B^T$
- $A^* \sim B^*$



## 5.2.1 矩阵的相似对角化

## 定义 5.2.2 (相似对角化)

设  $A$  是  $n$  阶方阵, 若存在  $n$  阶可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = \Lambda$ , 其中  $\Lambda$  是对角矩阵, 则称  $A$  可相似对角化, 记作  $A \sim \Lambda$ , 称  $\Lambda$  为  $A$  的相似标准型

## 注

$$P = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n], \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \Lambda \Rightarrow AP = P\Lambda$$

$$A[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] = [\lambda_1\xi_1, \lambda_2\xi_2, \dots, \lambda_n\xi_n] \Rightarrow A\xi_i = \lambda_i\xi_i (i = 1, 2, \dots, n)$$



**推论 5.2.2 (对角化)**

- $n$  阶矩阵  $A$  可相似对角化  $\Leftrightarrow A$  有  $n$  个线性无关的特征向量
- $n$  阶矩阵  $A$  可相似对角化  $\Leftrightarrow$  对于每个  $k_i$  重特征值都有  $k_i$  个特征向量
- $A$  有  $n$  个特征值  $\Rightarrow n$  阶矩阵  $A$  可相似对角化
- $n$  阶矩阵  $A$  为实对称矩阵  $\Rightarrow A$  可相似对角化

## 5.2.2 实对称矩阵的相似对角化

**定义 5.2.3 (实对称矩阵相似对角化)**

$A^T = A$  且  $A$  中元素全为实数, 我们把  $A$  称作实对称矩阵

**性质**

- 实对称矩阵必可相似对角化, 特征值为实数, 特征向量为实向量
- 实对称矩阵属于不同特征值的特征向量互相正交
- $\exists$  正交矩阵  $Q$ , s.t.  $Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \Lambda$





## 第 6 章 二次型

### 6.1 二次型定义

#### 定义 6.1.1 (二次型)

$n$  元变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为  $n$  元二次型, 简称为二次型.

我们令  $a_{ij} = a_{ji}$ , 我们可以得到:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + \dots + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n + \dots + a_{n1}x_nx_1 + \dots + a_{nn}x_n^2 \\ f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j \end{aligned}$$

我们令

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

二次型可表示为:  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ ,  $A$  为二次型  $f(\mathbf{x})$  的矩阵



## 6.2 二次型的标准型和规范型

### 定义 6.2.1 (线性变换)

对于  $n$  元二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 令:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \dots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \dots + c_{2n}y_n \\ \dots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \dots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

记

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

上面的线性变化可写作:

$$\mathbf{x} = C\mathbf{y}$$

我们把这种变换称为  $x_1, x_2, \dots, x_n$  到  $y_1, y_2, \dots, y_n$  的 **线性变换**, 如果线性变换矩阵  $C$  可逆,  $|C| \neq 0$ , 则称为**可逆线性变换**.

我们有:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = C\mathbf{y} \Rightarrow f(\mathbf{x}) = (C\mathbf{y})^T A (C\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (C^T A C) \mathbf{y}$$

如果我们记  $B = C^T A C$ , 我们得到

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T B \mathbf{y} = g(\mathbf{y})$$

二次型  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  通过线性变换  $\mathbf{x} = C\mathbf{y}$  得到了一个新二次型  $g(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T B \mathbf{y}$

### 定义 6.2.2 (矩阵合同)

设  $A, B$  为  $n$  阶矩阵, 若存在可逆矩阵  $C$ , 使得:

$$B = C^T A C$$

则称  $A, B$  合同, 记作  $A \simeq B$ , 其对应的二次型  $f(\mathbf{x})$  与  $g(\mathbf{y})$  为合同二次型.

#### 注

- (1).  $A \simeq A$  反身性
- (2).  $A \simeq B \Rightarrow B \simeq A$  对称性
- (3).  $A \simeq B, B \simeq C \Rightarrow A \simeq C$  传递性



**定义 6.2.3 (标准型和规范型)**

1. 二次型中只有平方项, 而没有交叉项(所有交叉项系数全为0), 形如:

$$d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$$

的二次型为标准二次型.

2. 在标准二次型中, 如果二次型的系数  $d_i = \{0, 1, -1\}$ , 这样的二次型称为规范型二次型.

3. 二次型  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  合同于标准型  $d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$ , 则称  $d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$  为二次型  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  的合同标准型.

4. 二次型  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  合同于规范型  $x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_q^2$ , 则称  $x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_q^2$  为二次型  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  的合同规范型.

5. 任何二次型都可以通过可逆线性变换化为标准型或者规范型, 对任意实对称矩阵  $A$ , 必存在可逆矩阵  $C$ , 使得  $C^T A C = \Lambda$

6. 任何二次型都可以通过正交变换化为标准型, 对任意实对称矩阵  $A$ , 必存在正交矩阵  $Q$ , 使得  $Q^{-1} A Q = Q^T A Q = \Lambda$

**定义 6.2.4 (惯性定理)**

无论用什么样的可逆线性变换得到的二次型标准型或者规范型, 标准型或者规范型中正项个数  $p$ , 负项个数  $q$  都是不变的,  $p$  被称为正惯性指数,  $q$  被称为负惯性指数.

**注**

- (1). 二次型的秩为  $r$ ,  $r = p + q$
- (2). 两个二次型合同的充要条件为有相同的正、负惯性指数, 或者相同的秩及正(负)惯性指数

**6.3 正定二次型****定义 6.3.1 (正定矩阵)**

$n$  元二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ , 对于任意  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \neq 0$ , 都有  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$ , 则称  $f$  为正定二次型, 二次型对应的矩阵  $A$  为正定矩阵.

**推论 6.3.1 (二次型正定充要)**

- $f$  正定  $\Leftrightarrow f$  正惯性指数  $p = n$
- $f$  正定  $\Leftrightarrow \exists$  可逆矩阵  $D$ , s.t.  $A = D^T D$
- $f$  正定  $\Leftrightarrow A \simeq E$
- $f$  正定  $\Leftrightarrow A$  的所有特征值  $\lambda_i > 0$
- $f$  正定  $\Leftrightarrow A$  的全部顺序主子式大于0



## 推论 6.3.2 (二次型正定必要)

- $f$  正定  $\Rightarrow a_{ii} > 0$
- $f$  正定  $\Rightarrow |A| > 0$

