LaTeX Linear Algebra

Sun for morning, moon for night, and you forever.

作者：Lyshmily.Y & 木易

组织：Lyshmily.Y

时间：December 11, 2024

版本：V.1.0

邮箱：yjlpku.outlook.com & 845307723@qq.com

在没有结束前，总要做很多没有意义的事，这样才可以在未来某一天，用这些无意义的事去堵住那些讨厌的缺口

目录

第一部分

线代

第 1 部分目录

第 1 章 行列式

1.1 行列式的定义和性质

定义 1.1.1 (行列式)

行列式是一个在方阵上按照一定法则计算得到的标量，记作 $det(A)$ 或者 $|A|$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1. 几何定义

n 阶行列式 $det(A_n)$ 的几何意义是 n 维空间中由 n 阶行列式中的 n 个向量围成的 n 维空间体的“体积”

$$det(A_2) = |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = S_D$$

$$det(A_3) = |A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = V_\Omega$$

2. 逆序数法定义

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 是 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数

推论 1.1.1 (行列式的性质)

- 性质 1

  行列式中行列等价, 行列互换, 行列式的值不变, $|A| = |A^T|$
- 性质 2

  行列式中某行或者某列元素全为 0, 行列式的值 $det(A) = 0$
- 性质 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 性质 4

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 性质 5

  行列式两行或者两列互换, 行列式的值相反

- 性质 6

  行列式中两行或者两列成比例, 行列式的值为 0
- 性质 7

  行列式中某一行加上另一行的 k 倍, 行列式的值不变

1.2 行列式展开定理

1.2.1 余子式

定义 1.2.1 (余子式)

行列式 $det(A)$ 去掉任意一项 a_{ij} 所在行和列去掉后的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式 M_{ij}

1.2.2 代数余子式

定义 1.2.2 (代数余子式)

行列式中任意一项 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

1.2.3 行列式展开定理

定理 1.2.1 (行列式展开定理)

行列式 $det(A)$ 按照第 i 行或者第 j 列展开

$$det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \end{cases}$$

1.3 几类特殊的行列式

1.3.1 上下三角行列式

推论 1.3.1 (上下三角行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

1.3.2 副三角行列式

推论 1.3.2 (副三角行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_{i,n-i+1}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_{i,n-i+1}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_{i,n-i+1}$$

1.3.3 拉普拉斯展开式

推论 1.3.3 (拉普拉斯展开式)

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$$

其中 A 是 m 阶矩阵, B 是 n 阶矩阵

1.3.4 范德蒙行列式

推论 1.3.4 (范德蒙行列式)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i)$$

1.4 行列式计算

命题 1.4.1 (爪型行列式)

$$det(A) = \begin{vmatrix} x_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_n \\ y_2 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ y_3 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \prod_{i=2}^{n} x_i \left(x_1 - \sum_{j=2}^{n} \frac{z_j y_j}{x_j} \right)$$

命题 1.4.2 (X 型行列式)

$$det(A)=\begin{vmatrix} a_1 & & & & & b_1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_k & b_k & & \\ & & b_{k+1} & a_{k+1} & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b_n & & & & & a_n \end{vmatrix}$$

♠

命题 1.4.3 (两三角形行列式)

$$det(A)=\begin{vmatrix} x_1 & b & b & \cdots & b \\ c & x_2 & b & \cdots & b \\ c & c & x_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
det(A) &= \begin{vmatrix} x_1 & b & b & \cdots & b+0 \\ c & x_2 & b & \cdots & b+0 \\ c & c & x_3 & \cdots & b+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & c+x_n-c \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_1 & b & b & \cdots & b \\ c & x_2 & b & \cdots & b \\ c & c & x_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & b & b & \cdots & 0 \\ c & x_2 & b & \cdots & 0 \\ c & c & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & x_n-c \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_1-b & 0 & 0 & \cdots & b \\ c-b & x_2-b & 0 & \cdots & b \\ c-b & c-b & x_3-b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c \end{vmatrix} + (x_n-c)A_{n-1} \\
&= c\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-b) + (x_n-c)A_{n-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases} A_n = c\prod\limits_{i=1}^{n-1}(x_i-b) + (x_n-c)A_{n-1} \\ A_n^T = b\prod\limits_{i=1}^{n-1}(x_i-c) + (x_n-b)A_{n-1}^T \\ A_n = A_n^T \end{cases} \Rightarrow det(A) = \frac{b\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i-c) - c\prod\limits_{j=1}^{n}(x_j-b)}{b-c}
$$

命题 1.4.4

$$
det(A) = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{vmatrix} = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}
$$

当 $b=c$ 时

$$
\begin{aligned}
det(A) &= \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\
&= [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\
&= [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} \\
&= [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}
\end{aligned}
$$

$$
det(A) = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}
$$

命题 1.4.5 (三对角型行列式)

$$det(A)=\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a \end{vmatrix}$$

递推式: $A_n=aA_{n-1}-bcA_{n-2}$

特征方程: $x^2-ax+bc=0\Rightarrow\begin{cases} x_1=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2} \\ x_2=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4bc}}{2} \end{cases}$

$$det(A)=A_n=\frac{x_1^{n+1}-x_2^{n+1}}{x_1-x_2}$$

1.5 Cramer Rule

定理 1.5.1 (Cramer Rule) 对于 n 个方程 n 个未知数的非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

若行列式

$$det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$

方程组有唯一解 $x_i=\dfrac{det(A_i)}{det(A)}$, 其中 A_i 是讲 $det(A)$ 的第 i 列换成 $b_1,b_2,\cdots,b_n$

对于 n 个方程 n 个未知数的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

$det(A) \neq 0$, 方程组有唯一解 $x_i = 0$, $det(A) = 0$, 方程组有无穷多非零解

第 2 章 矩阵

2.1 矩阵的定义和运算

2.1.1 矩阵定义和线性运算

定义 2.1.1 (矩阵定义)

由 $m \times n$ 个数 a_{ij} 排成的 m 行 n 列的数表称为 m 行 n 列的矩阵, 记作:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$m \times n$ 个数称为矩阵 A 的元素, 简称为元, 数 a_{ij} 位于矩阵 A 的第 i 行第 j 列, 称为矩阵 A 的 (i, j) 元, $m \times n$ 矩阵乘法记作 A_{mn} 或 $(a_{ij})_{m \times n}$

- 元素是实数的矩阵称为实矩阵, 元素是复数的矩阵称为复矩阵
- 行数和列数相等的矩阵称为方阵

♣

定义 2.1.2 (矩阵的线性运算)

1. 加法

$$C = A + B = (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} = (c_{ij})_{m \times n}$$

其中 $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

2. 标量乘法

$$kA = k(a_{ij})_{m\times n} = (ka_{ij})_{m\times n}$$

定义 2.1.3 (重要矩阵)

- 零矩阵: 所有元素均为 0 的矩阵, 记作 O
- 单位矩阵: 主对角线元素均为 1, 其余元素全为 0 的 n 阶方阵, 记作 E 或 I
- 数量矩阵: 数 k 和单位矩阵乘积得到的矩阵被称为数量矩阵
- 对角矩阵: 非主对角线元素均为 0 的矩阵称为对角矩阵
- 上 (下) 三角矩阵: 当 $i > (<) j, a_{ij} = 0$ 的矩阵称为上 (下) 三角矩阵
- 对称矩阵: 满足条件 $A^T = A$ 的矩阵称为对称矩阵
- 反对称矩阵: 满足条件 $A^T = -A$ 的矩阵称为对称矩阵
- 幂等矩阵: 满足条件 $A^2 = A$ 的矩阵称为幂等矩阵
- 正交矩阵: A 是 n 阶方阵, 满足 $A^TA = E$ 的矩阵称为正交矩阵
- 分块矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_n \end{bmatrix}$$

其中 $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}), B_j = (b_{j1}, b_{j2}, \cdots, b_{jm})^T$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX + BY & AY + BW \\ CX + DY & CY + DW \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A^n & O \\ O & B^n \end{bmatrix}$$

2.1.2 矩阵乘法和幂

定义 2.1.4 (矩阵的乘法和幂)

1. 矩阵乘法

$A=(a_{ij})_{m\times s}, B=(b_{ij})_{s\times n}$, 矩阵 A,B 可以相乘 (左乘矩阵的列数和右乘矩阵的行数相等), 记 $C=A\times B=(c_{ij})_{m\times n}$

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$$

2. 矩阵转置

将矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的行列互换得到矩阵 A 的转置矩阵, 记作 A^T

$$A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- $(A^T)^T=A$
- $(kA)^T=k(A)^T$
- $(A+B)^T=A^T+B^T$
- $(AB)^T=B^TA^T$
- 当 $m=n$ 时, $|A^T|=|A|$

3. 矩阵的幂

A 是 n 阶方阵, $A^m=\overbrace{AA\cdots A}^{m个}$ 称为方阵 A 的 m 次幂

- $(A\pm B)^2=A^2+B^2\pm AB\pm BA$
- $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$
- $(AB)^m=\overbrace{(AB)(AB)\cdots(AB)}^{m个}$
- 当 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 时, $f(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_nA^n$

2.2 矩阵的逆和伴随矩阵

2.2.1 矩阵的逆

定义 2.2.1 (逆矩阵)

A, B 是 n 阶方阵, E 是 n 阶单位矩阵, 若 $AB = BA = E$, 则称 A 是可逆矩阵, 并称 B 是 A 的逆矩阵, 且逆矩阵唯一, 将 A 的逆矩阵记作 A^{-1}

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- AB 可逆, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $k \neq 0, (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
- A^T 可逆, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

定理 2.2.1 (逆矩阵存在充要条件)

A 是 n 阶方阵, A 可逆的充要条件:

$$\left|A\right| \neq 0$$

2.2.2 伴随矩阵

定义 2.2.2 (伴随矩阵)

A 是 n 阶方阵, A 的伴随矩阵 A^* 是由 A 的代数余子式构成的矩阵, 记作 $A^* = (A_{ij})_{n\times n}$, 其中 A_{ij} 是 a_{ji} 的代数余子式

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$AA^* = A^*A = |A|E \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

- $\forall A_n, \left|A^*\right| = \left|A\right|^{n-1}$
- $|A| \neq 0, A^* = |A|A^{-1}, A = |A|(A^*)^{-1}$
- $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$
- $(kA)^* = k^{n-1}A^*$

2.3 初等变换和初等矩阵

定义 2.3.1 (初等变换)

- 用一个非零常数乘以矩阵的某一行 (列)
- 互换矩阵中的某两行 (列) 的位置
- 将矩阵的某一行 (列) 的 k 倍加到另一行 (列)

定义 2.3.2 (初等矩阵)

由单位矩阵经过一次初等变换后得到的矩阵被称为初等矩阵

- $E_i(k)$ 表示 E 的第 i 行 (列) 乘 k 倍

$$E_i(k) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & m & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- E_{ij} 表示 E 的第 i 行 (列) 与第 j 行 (列) 互换位置

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- $E_{ij}(k)$ 表示 E 的第 i 行 (列) 的 k 倍加到第 j 行 (列)

$$E_{ij}(k)=\begin{bmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&\ddots&&&\\&&k&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{bmatrix}$$

推论 2.3.1 (初等矩阵推论)

$$\begin{cases}E_i(k)^T=E_i(k)\\E_{ij}^T=E_{ij}\\E_{ij}(k)^T=E_{ji}(k)\end{cases}$$

$$\begin{cases}E_i(k)^{-1}=\dfrac{1}{k}E_i(k)\\E_{ij}^{-1}=E_{ij}\\E_{ij}(k)^{-1}=E_{ij}(-k)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left|E_i(k)\right|=k\\\left|E_{ij}\right|=-1\\\left|E_{ij}(k)\right|=1\end{cases}$$

- Gauss-Jordan Elimination

$$\begin{bmatrix}A&E\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}E&A^{-1}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}A\\E\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{bmatrix}E\\A^{-1}\end{bmatrix}$$

推论 2.3.2 (矩阵变换)

若 A 是可逆矩阵, 存在有限个初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_s$, 满足 $A=P_1P_2\cdots P_s$, 且 $A^{-1}=P_s^{-1}\cdots P_2^{-1}P_1^{-1}$

定义 2.3.3 (行阶梯形矩阵)

行阶梯形矩阵

- 零行全部位于非零行下方
- 非零行的首个非零元素 (主元) 在每一行中的列标号递增

行最简阶梯形矩阵

- 行阶梯形矩阵非零行的首个非零元素 (主元) 为 1
- 主元所在列的其他元素全为 0

推论 2.3.3 (分块矩阵逆矩阵)

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \cdots & & \\ A_s & & & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & \cdots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} B_{s\times s} & O_{s\times r} \\ D_{r\times s} & C_{r\times r} \end{bmatrix} \to A^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ --C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} B_{s\times s} & D_{s\times r} \\ O_{r\times s} & C_{r\times r} \end{bmatrix} \to A^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} O_{s\times r} & B_{s\times s} \\ C_{r\times r} & D_{r\times s} \end{bmatrix} \to A^{-1} = \begin{bmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} D_{s\times r} & B_{s\times s} \\ C_{r\times r} & O_{r\times s} \end{bmatrix} \to A^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \end{bmatrix}$$

2.4 等价矩阵和矩阵的秩

定义 2.4.1 (等价矩阵)

设 A, B 均为 $m \times n$ 矩阵, $\exists P_{m\times m}, Q_{n\times n}(P, Q$可逆$)$, $s.t.\ PAQ = B$, 称 A, B 是等价矩阵, 记作 $A \cong B$

- 同型矩阵 A, B 等价的的充要条件: $r(A) = r(B)$
- P, Q 均为可逆矩阵

$$\forall A_{m\times n}, \exists P, Q,\ s.t. PAQ = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

其中 $P_{m\times m}, Q_{n\times n}$ 均为可逆矩阵, E_r 是 r 阶单位矩阵, 矩阵 $\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ 是秩为 r 矩阵的等价标准型

定义 2.4.2 (矩阵的秩)

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, A 中最高阶非零子式的阶数称为矩阵 A 的秩, 记作 $r(A)$

- $r(A) = k$ 充要条件: A 存在 k 阶非零子式, 且所有 $k+1$ 阶子式全为 0
- $r(A) = k$ 充要条件: A 的行 (列) 向量中存在 k 个线性无关的向量, 且任意 $k+1$ 个行 (列) 向量线性相关
- $r(A_{n\times n}) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆

推论 2.4.1 (秩的性质)

设 A 是 $m \times n$ 矩阵,B 是满足有关矩阵运算要求的矩阵, 我们有

- $0 \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$
- $r(kA) = r(A), k \neq 0$
- $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$
- $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$
- $$r(A^*) = \begin{cases} n & r(A) = n \\ 1 & r(A) = n-1 \\ 0 & r(A) < n-1 \end{cases}$$

  其中 A 为 n 阶方阵

命题 2.4.1

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, 则 $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$

证明

(1). $r(AB) \le r(B)$

令

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{bmatrix}$$

其中 β_i, γ_j 代表行向量, a_{ij} 代表元素

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \cdots + a_{1n}\beta_n \\ a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{2n}\beta_n \\ \vdots \\ a_{m1}\beta_1 + a_{m2}\beta_2 + \cdots + a_{mn}\beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{bmatrix}$$

AB 的行向量都可以由 B 的行向量线性表出 $\Rightarrow r(AB) \le r(B)$

(2). $r(AB) \le r(A)$

令

$$A = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n], B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix}, AB = [\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s]$$

其中 α_i, γ_j 代表列向量, b_{ij} 代表元素

$$AB = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n] \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}\alpha_1 + b_{21}\alpha_2 + \cdots + b_{n1}\alpha_n \\ b_{12}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 + \cdots + b_{n2}\alpha_n \\ \vdots \\ b_{1s}\alpha_1 + b_{2s}\alpha_2 + \cdots + b_{ns}\alpha_n \end{bmatrix}^T = [\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s]$$

AB 的列向量都可以由 A 的列向量线性表出 $\Rightarrow r(AB) \le r(A)$

$$\begin{cases} r(AB) \le r(B) \\ r(AB) \le r(A) \end{cases} \Rightarrow r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$$

命题 2.4.2

设 A, B 是 $m \times n$ 矩阵, 则 $r(A+B) \le r(A) + r(B)$

证明

令

$$\begin{cases} A = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n] \\ B = [\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n] \\ [A, B] = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n] \end{cases}$$

$$A + B = [\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \cdots, \alpha_n + \beta_n]$$

$A+B$ 的列向量都可以由 $[A, B]$ 的列向量线性表出 $\Rightarrow r(A+B) \le r([A, B]) \Rightarrow r(A+B) \le r(A) + r(B)$

命题 2.4.3

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, 则 $r(A) + r(B) - n \le r(AB)$

证明

$$\begin{bmatrix} E_{m\times m} & -A_{m\times n} \\ O_{n\times m} & E_{n\times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{m\times n} & O_{m\times s} \\ E_{n\times n} & B_{n\times s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{n\times n} & -B_{n\times s} \\ O_{n\times s} & E_{s\times s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_{m\times n} & -AB \\ E_{n\times n} & O_{n\times s} \end{bmatrix}$$

其中 $\begin{bmatrix} E_{m\times m} & -A_{m\times n} \\ O_{n\times m} & E_{n\times n} \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} E_{n\times n} & -B_{n\times s} \\ O_{n\times s} & E_{s\times s} \end{bmatrix}$ 均为可逆矩阵

$$r(A) + r(B) \le n + r(AB) \Rightarrow r(A) + r(B) - n \le r(AB)$$

特别的, 当 $AB = O$ 时, $r(AB) = 0 \Rightarrow r(A) + r(B) \le n$

命题 2.4.4

设 A 是 n 阶方阵, 则

$$r(A^*) = \begin{cases} n & r(A) = n \\ 1 & r(A) = n-1 \\ 0 & r(A) < n-1 \end{cases}$$

证明

(1). $r(A) = n$

$$\begin{cases} r(A) = n \\ AA^* = |A|E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |A| \neq 0 \\ |A^*| = |A|^{n-1} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow r(A^*) = n$$

(2). $r(A) = n - 1$

$$\begin{cases} r(A) = n - 1 \\ AA^* = |A|E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \\ AA^* = O \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r(A) + r(A^*) \leq n \\ r(A^*) \leq 1 \end{cases}$$

$r(A) = n - 1 \longrightarrow A^*$ 至少存在一个元素不为 $0 \longrightarrow r(A^*) \geq 1$

$$\begin{cases} r(A^*) \geq 1 \\ r(A^*) \leq 1 \end{cases} \Rightarrow r(A^*) = 1$$

(3). $r(A) < n - 1$

$$\begin{cases} r(A) < n - 1 \\ AA^* = |A|E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \\ A^* = O \end{cases} \Rightarrow r(A^*) = 0$$

第 3 章 向量组

3.1 向量和向量组的线性相关性

3.1.1 向量的定义和运算

定义 3.1.1 (向量的定义)

n 个数构成的有序数组 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 称为一个 n 维向量, 记作 $\boldsymbol{\alpha} = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$, $\boldsymbol{\alpha}$ 称为 n 维行向量, $\boldsymbol{\alpha}^T$ 称为 n 维列向量, 其中 a_i 称为向量的第 i 个分量

定义 3.1.2 (向量的线性运算)

1. 加法

$$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \xlongequal{def} [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n]$$

2. 标量乘法

$$k\boldsymbol{\alpha} \xlongequal{def} [ka_1, ka_2, \cdots, ka_n], k \in \mathbb{R}$$

定义 3.1.3 (向量的内积和正交)

内积

设 $\boldsymbol{\alpha} = [a_1, a_2, \cdots, a_n]^T, \boldsymbol{\beta} = [b_1, b_2, \cdots, b_n]^T$, 则称:

$$\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\beta} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

为向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 的内积, 记作 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$

模

$\|\alpha\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$ 称为向量 α 的模, 特别的当 α 时, 称 α 为单位向量

正交

当 $\alpha^T\beta = 0$ 时, 称向量 α, β 是正交向量

标准正交向量组

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 满足:

$$\alpha_i^T \alpha_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是标准或单位正交向量组

正交矩阵

设 A 是 n 阶方阵, 若 $A^TA = E$, 则称 A 为正交矩阵

- $A^TA = E \Rightarrow A^T = A^{-1}$
- $|A| = \pm 1$
- A 的行 (列) 向量是标准正交向量组

施密特正交化

线性无关的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的标准正交化公式:

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 \\ \beta_2 = \alpha_2 - \dfrac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 \\ \cdots \\ \beta_n = \alpha_n - \dfrac{(\alpha_n, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \dfrac{(\alpha_n, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \cdots - \dfrac{(\alpha_n, \beta_{n-1})}{(\beta_{n-1}, \beta_{n-1})}\beta_{n-1} \end{cases}$$

将 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 单位化:

$$\begin{cases} \eta_1 = \dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|} \\ \eta_2 = \dfrac{\beta_2}{\|\beta_2\|} \\ \cdots \\ \eta_n = \dfrac{\beta_n}{\|\beta_n\|} \end{cases}$$

$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 是一个标准正交向量组

3.1.2 向量组的线性相关性

定义 3.1.4 (线性相关和线性表出)

1. 线性组合

设有 m 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 和 m 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 向量

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

称作向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合

2. 线性表出

向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以表示为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合

$$\exists k_i (i = 1, 2, \cdots, m) \in \mathbb{R},\ s.t.\ \boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出

3. 线性相关

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$

$$\exists k_i \neq 0 (i = 1, 2, \cdots, m),\ s.t.\ k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = 0$$

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关

4. 线性无关

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$

$$\exists k_i \in \mathbb{R},\ s.t.\ k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = 0$$

当且仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$ 时上式成立, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 ♣

定理 3.1.1 (判别线性相关性的七大定理)

定理一

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关的充要条件: 至少有一个向量可以由其余的 $n-1$ 个向量线性表出

证明

(i). 必要性

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关

$$\exists k_i \neq 0(i=1,2,\cdots,n),\ s.t.\ k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n = 0$$

不妨假设 $k_m \neq 0(1 \leq m \leq n)$

$$\boldsymbol{\alpha}_m = -\frac{k_1}{k_m}\boldsymbol{\alpha}_1 - \cdots - \frac{k_n}{k_m}\boldsymbol{\alpha}_n$$

$\boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由其余 $n-1$ 个向量线性表出

(ii). 充分性

不妨假设 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由其余 $n-1$ 个向量线性表出:

$$\boldsymbol{\alpha}_m = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

$$\exists k_i \neq 0(k_m = 1),\ s.t.\ k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + 1\boldsymbol{\alpha}_m + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n = 0$$

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关

定理 二

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关, $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出, 且表示唯一

证明

(i). 存在性

$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关

$$\exists k_i\in\mathbb{R}(i=1,2,\cdots,n,\beta),\ s.t.\ k_\beta\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=0$$

假设 $k_\beta=0$

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=0\Rightarrow\exists k_i\neq 0(i\in\{1,2,\cdots,n\})$$

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关, 矛盾 $\Rightarrow k_\beta\neq 0$

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{k_1]}{k_\beta}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{k_2}{k_\beta}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_n}{k_\beta}\boldsymbol{\alpha}_n$$

向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出

(ii). 唯一性

假设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 对 $\boldsymbol{\beta}$ 存在两种不同的线性表出

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_n\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\beta}=h_1\boldsymbol{\alpha}_1+h_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+h_n\boldsymbol{\alpha}_n\end{cases}$$

两式相减:

$$(l_1-h_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(l_2-h_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(l_n-h_n)\boldsymbol{\alpha}_n=0$$

$\exists l_i-h_i\neq 0(i\in\{1,2,\cdots,n\})$, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关, 矛盾 $\Rightarrow$ 线性表出唯一

定理 三

向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出, 且 $t>s$, 则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性相关

证明

向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1 = l_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + l_{12}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_{1s}\boldsymbol{\alpha}_s \\ \boldsymbol{\beta}_2 = l_{21}\boldsymbol{\alpha}_1 + l_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_{2s}\boldsymbol{\alpha}_s \\ \cdots \\ \boldsymbol{\beta}_t = l_{t1}\boldsymbol{\alpha}_1 + l_{t2}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_{ts}\boldsymbol{\alpha}_s\end{cases}$$

假设 $\exists k_i \in \mathbb{R},\ s.t. \sum_{i=1}^{s} k_i\boldsymbol{\beta}_i = 0$

$$\begin{cases}k_1\boldsymbol{\beta}_1 = k_1(l_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + l_{12}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_{1s}\boldsymbol{\alpha}_s) \\ k_2\boldsymbol{\beta}_2 = k_2(l_{21}\boldsymbol{\alpha}_1 + l_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_{2s}\boldsymbol{\alpha}_s) \\ \cdots \\ k_t\boldsymbol{\beta}_t = k_t(l_{t1}\boldsymbol{\alpha}_1 + l_{t2}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + l_{ts}\boldsymbol{\alpha}_s)\end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{t} k_i\boldsymbol{\beta}_i = (\sum_{i=1}^{t} k_i l_{i1})\boldsymbol{\alpha}_1 + (\sum_{i=1}^{t} k_i l_{i2})\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (\sum_{i=1}^{t} k_i l_{is})\boldsymbol{\alpha}_s$$

不妨令 $\sum_{i=1}^{t} k_i l_{i1} = \sum_{i=1}^{t} k_i l_{i2} = \cdots = \sum_{i=1}^{t} k_i l_{is} = 0$

$$\begin{cases}k_1 l_{11} + k_2 l_{21} + \cdots + k_t l_{t1} = 0 \\ k_1 l_{12} + k_2 l_{22} + \cdots + k_t l_{t2} = 0 \\ \cdots \\ k_1 l_{1s} + k_2 l_{2s} + \cdots + k_t l_{ts} = 0\end{cases} \Rightarrow LX = 0$$

其中

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{t1} \\ l_{12} & l_{22} & \cdots & l_{t2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{1s} & l_{2s} & \cdots & l_{ts} \end{bmatrix}, X = [k_1, k_2, \cdots, k_t]^T$$

这是一个 t 元 s 个方程的齐次线性方程组, 且 $t > s$, 方程组一定有非零解

$$\exists k_i \neq 0(i \in \{1,2,\cdots,n\}),\ s.t.\ k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + k_t\boldsymbol{\beta}_t = 0$$

$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性相关

定理 四

设 m 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$, 其中

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=[a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1}]^T\\ \boldsymbol{\alpha}_2=[a_{12},a_{22},\cdots,a_{n2}]^T\\ \cdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m=[a_{1m},a_{2m},\cdots,a_{nm}]^T\end{cases}$$

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充要条件时齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解, 也等价于零空间不为零

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1m}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2m}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nm}\end{bmatrix},X=[x_1,x_2,\cdots,x_m]^T$$

证明

(i). 必要性

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关

$$\exists x_i \neq 0 (i \in \{1, 2, \cdots, m\}),\ s.t.\ x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = 0$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$$

有非零解

(ii). 充分性

方程组 $AX = 0$ 有非零解

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{\alpha}_m = 0$$

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关

定理 五

向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出, 等价于非齐次方程组方程 $AX = \boldsymbol{\beta}$ 有解;
向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出, 等价于非齐次方程组方程 $AX = \boldsymbol{\beta}$ 无解

证明

向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出

$$\exists x_i \neq 0(i \in \{1,2,\cdots,s\}),\ s.t.\ x_1\boldsymbol{\alpha}+x_2\boldsymbol{\alpha}+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=0$$

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_s\end{bmatrix}=\boldsymbol{\beta}$$

方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 有非零解

定理 六

如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 一部分向量线性相关, 那么整个向量组也线性相关

证明

不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_j(j<n)$ 线性相关

$$\exists k_i \neq 0(i \in \{1,2,\cdots,j\}),\ s.t.\ k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_j\boldsymbol{\alpha}_j=0$$

取 $k_1,k_2,\cdots,k_j,k_{j+1}=k_{j+2}=\cdots=k_n=0$

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_j\boldsymbol{\alpha}_j+0\boldsymbol{\alpha}_{j+1}+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_n=0$$

$k_1,k_2,\cdots,k_j,k_{j+1}=k_{j+2}=\cdots=k_n=0$ 不全为 0, 整个向量组也线性相关

定理 七

如果一组 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, 那么把这些向量各任意添加 m 个分量得到的新向量组 $(n+m)$ 维 $\boldsymbol{\alpha}_1^*,\boldsymbol{\alpha}_2^*,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n^*$ 线性无关; 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关, 那各去掉相同的若干个分量所得到的新向量组也线性相关

3.2 极大线性无关组和向量组的秩

定义 3.2.1 (极大线性无关组)

在向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$, 如果存在部分向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 满足:

- $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关
- 向量组中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 都可以被向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表出

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是原向量组的一个极大线性无关组

一个向量组的极大线性无关组不唯一, 对于线性无关的向量组, 它的极大线性无关组是自身

定义 3.2.2 (向量组的秩)

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的极大线性无关组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 中所含向量的个数 r 称为向量组的秩, 记作:

$$rank(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = r$$

- $r(A) = r(col(A)) = r(row(A))$
- 初等行变换和初等列变换不改变矩阵的秩
- $A \xrightarrow{col} B$, A 的行向量与 B 的行向量是等价向量组
- 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 及 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$, 若 $\beta_i (i = 1, 2, \cdots, t)$ 均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出, 则:
$$r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \leq r(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t)$$

3.3 等价向量组

定义 3.3.1 (等价向量组)

设两个向量组: (I)$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$, (II)$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$, 若 (I) 中向量 $\alpha_i (i = 1, 2, \cdots, s)$ 均可由 (II) 中向量线性表出, 则称向量组 (I) 可由向量组 (II) 线性表出; 若向量组 (I) 和向量组 (II) 互相线性表出, 称向量组 (I) 与向量组 (II) 是等价向量组, 记作 (I) $\cong$ (II)

- (I) $\cong$ (I)
- (I) $\cong$ (II), (II) $\cong$ (I)
- (I) $\cong$ (II), (II) $\cong$ (III), 则 (I) $\cong$ (III)
- 向量组和它的极大线性无关组是等价向量组

3.4 向量空间

定义 3.4.1 (向量空间)

设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中线性无关的有序向量, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$ 均可由向量组 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 线性表出, 且表出式:

$$\alpha = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \cdots + a_n\xi_n$$

称 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 基向量的个数 n 称为向量空间的维度,

$[a_1, a_2, \cdots, a_n]^T$ 是向量 α 在基向量 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$ 的坐标

定义 3.4.2 (基变换)

$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$ 和 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 是向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中的两个基, 其有关系:

$$[\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n] = [\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n] \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n] C$$

上式是基 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 的基变换公式, 矩阵 C 是基 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 的过渡矩阵, C 的第 i 列即是 η_i 在基 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$ 下的坐标, 过渡矩阵 C 为可逆矩阵

定义 3.4.3 (坐标变换)

设向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n$ 和基 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$ 下的坐标为别是 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T, \mathbf{y} = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^T$

$$\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n]\mathbf{x} = [\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n]\mathbf{y}$$

$$[\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n] = [\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n] C$$

$$\mathbf{x} = C\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} = C^{-1}\mathbf{x}$$

第 4 章 线性方程组

4.1 具体型方程组

4.1.1 齐次方程组

定义 4.1.1 (齐次方程组)

方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

称为 m 个方程, n 个未知数的齐次方程组

向量形式:

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = 0$$

其中:

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} (j = 1, 2, \cdots, n)$$

矩阵形式:

$$A_{m\times n}X = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

定理 4.1.1

1. 当 $r(A) = n$ 时, $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 线性无关, 方程组只有零解
2. 当 $r(A) = r < n$ 时, $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 线性相关, 方程组有非零解, 且有 $n-r$ 个线性无关解

推论 4.1.1 (解的性质)

$$\begin{cases} A\boldsymbol{\xi}_1 = 0 \\ A\boldsymbol{\xi}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}, A(k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2) = 0$$

定义 4.1.2 (基础解系和通解)

1. 基础解系

设 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 满足:

- $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是方程组的解
- $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关
- 方程组 $AX = 0$ 任意一个解均可以由 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表出

$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是方程组 $AX = 0$ 的基础解系

2. 通解

设 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 为方程组 $AX = 0$ 的基础解系, 则 $k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是方程组 $AX = 0$ 的通解, 其中 $k_1, k_2, \cdots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$

4.1.2 非齐次方程组

定义 4.1.3 (非齐次方程组)

方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

称为 m 个方程, n 个未知数的非齐次方程组

向量形式:

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\beta}$$

其中:

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix} (j = 1, 2, \cdots, n)$$

矩阵形式:

$$A_{m\times n}X = \boldsymbol{\beta}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

矩阵 $\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_{mj} \end{array}\right]$ 记作为矩阵 A 的增广矩阵, 简记为 $\left[\begin{array}{c|c} A & \boldsymbol{\beta} \end{array}\right]$

定理 4.1.2

1. $r(A) \neq r([A, \boldsymbol{\beta}])$, 方程组无解

$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出

2. $r(A) = r([A, \boldsymbol{\beta}]) = n$, 方程组有唯一解

$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关

3. $r(A) = r([A, \boldsymbol{\beta}]) < n$, 方程组有无穷多组解

推论 4.1.2 (解的性质)

设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是非齐次方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 的解, $\boldsymbol{\xi}$ 是对应齐次方程组 $AX=0$ 的解

- $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $AX=0$ 的解
- $k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$ 是方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 的解

定义 4.1.4 (特解和通解)

1. 特解

η 是非齐次性方程组 $AX=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解

2. 通解

设 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是方程组 $AX=0$ 的通解, 其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}\in\mathbb{R}$, 非齐次性方程组的通解:

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\eta}$$

4.2 两个方程组的公共解

定义 4.2.1 (两个方程组的公共解)

(1). 齐次性线性方程组 $A_{m\times n}X=0$ 和 $B_{m\times n}X=0$ 的公共解是满足方程组

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} X=0$$

(2). 非齐次性性线性方程组 $A_{m\times n}X=\alpha$ 和 $B_{m\times n}X=\beta$ 的公共解是满足方程组

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} X=\begin{bmatrix} \alpha \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}$$

(3). 给出方程组 $A_{m\times n}X=0$ 的通解 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s$, 代入第二个方程组 $B_{m\times n}X=0$ 得到 $k_i(i=1,2,\cdots,s)$ 之间的关系, 代回方程 $A_{m\times n}X=0$

(4). 给出方程组 $A_{m\times n}X=0$ 的基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 和方程组 $B_{m\times n}X=0$ 的基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$, 公共解为:

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s=l_1\boldsymbol{\eta}_1+l_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+l_t\boldsymbol{\eta}_t$$

4.3 同解方程组

定义 4.3.1 (同解方程组)

如果两个方程组 $A_{m\times n}X=0$ 和 $B_{m\times n}X=0$ 有完全相同的解, 则称它们为同解方程组

- $AX=0$ 的解满足 $BX=0$ 且 $BX=0$ 的解满足 $AX=0$
- $r(A)=r(B)$ 且 $AX=0$ 的解满足 $BX=0$ ($BX=0$ 的解满足 $AX=0$)
- $r(A)=r(B)=r(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix})$

第 5 章 特征值和特征向量

2012.08.18

5.1 特征值和特征向量定义

定义 5.1.1 (特征值和特征向量)

设 A 是 n 阶矩阵, λ 为常数, 存在非零列向量 ξ, 满足:

$$A\xi = \lambda\xi$$

称 λ 为 A 的特征值, ξ 是 A 对应于特征值 λ 的特征向量

推论 5.1.1 (特征值)

$$(\lambda E - A)\xi = O \Rightarrow |\lambda E - A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) = 0$$

上式是关于 λ 的特征多项式, 也是 A 的特征方程

$$\lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=tr(A)\\ \prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|\end{cases}$$

推论 5.1.2 (特征向量)

命题 5.1.1

若 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 是 A 的属于不同特征值 λ_1,λ_2 的特征向量, $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 线性无关

证明

$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 是矩阵 A 不同特征值 $\lambda_1,\lambda_2(\lambda_1\neq\lambda_2)$ 对应的特征向量

不妨设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 线性相关, 则存在不全为 0 的常数 c_1,c_2

$$\exists c_1,c_2,\ s.t.\ c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2=0$$

$$\begin{cases}A\boldsymbol{\xi}_1=\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1\\ A\boldsymbol{\xi}_2=\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2\end{cases}\Rightarrow c_1A\boldsymbol{\xi}_1+c_2A\boldsymbol{\xi}_2=c_1\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2$$

$$\begin{cases}c_1(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{\xi}_1=0\\ c_2(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{\xi}_2=0\\ \boldsymbol{\xi}_1\neq\mathbf{0},\boldsymbol{\xi}_2\neq\mathbf{0},\lambda_1\neq\lambda_2\end{cases}\Rightarrow c_1=c_2=0$$

矛盾, 假设不成立, $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 线性无关

命题 5.1.2

若 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 是 A 的属于不同特征值 λ_1,λ_2 的特征向量, $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2(k_1\neq 0,k_2\neq 0)$ 不是 A 的特征向量

证明

不妨设 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$ 是矩阵 A 特征值 λ 对应的特征向量

$$A(k_1\xi_1+k_2\xi_2)=\lambda(k_1\xi_1+k_2\xi_2)$$

$$\begin{cases}A\xi_1=\lambda_1\xi_1\\A\xi_2=\lambda_2\xi_2\end{cases}\Rightarrow k_1(\lambda_1-\lambda)\xi_1+k_2(\lambda_2-\lambda)\xi_2=0$$

ξ_1,ξ_2 线性无关

$$\begin{cases}k_1(\lambda_1-\lambda)=0\\k_2(\lambda_2-\lambda)=0\\k_1\neq 0,k_2\neq 0\end{cases}\Rightarrow \lambda=\lambda_1=\lambda_2$$

矛盾,假设不成立,$k_1\xi_1+k_2\xi_2$ 不是 A 的特征向量

命题 5.1.3

若 ξ_1,ξ_2 是 A 的属于同一特征值 λ 的特征向量,$k_1\xi_1+k_2\xi_2$ $(k_1,k_2$ 不同时为 $0)$ 仍然是 A 属于特征值 λ 的特征向量

证明

$$\begin{cases}A\xi_1=\lambda\xi_1\\A\xi_2=\lambda\xi_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A(k_1\xi_1+k_2\xi_2)=\lambda(k_1\xi_1+k_2\xi_2)\\k_1\xi_1+k_2\xi_2\neq\mathbf{0}\end{cases}$$

$k_1\xi_1+k_2\xi_2$ 是矩阵 A 特征值 λ 对应的特征向量

定理 5.1.1 (特征值和特征向量)

k 重特征值至多有 k 个线性无关的特征向量

不妨设 λ_0 是矩阵 A 的一个特征值,λ 对应的 m 个线性无关的特征向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$

构造一个 n 维空间的极大线性无关组 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m,\xi_{m+1},\cdots,\xi_n)$

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m,\xi_{m+1},\cdots,\xi_n)$

$$\begin{cases}A\xi_i=\lambda_0\xi_i(i=1,2,\cdots,m)\\AP=(A\xi_1,A\xi_2,\cdots,A\xi_m,A\xi_{m+1},\cdots,A\xi_n)\end{cases}$$

$$AP=(\lambda_0\xi_1,\lambda_0\xi_2,\cdots,\lambda_0\xi_m,A\xi_{m+1},\cdots,A\xi_n)$$

$$A\xi_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\xi_k (j = m+1, \cdots, n)$$

综上:

$$\begin{aligned}
AP &= (\lambda_0\xi_1, \lambda_0\xi_2, \cdots, \lambda_0\xi_m, \sum_{k=1}^{n} a_{k(m+1)}\xi_k, \cdots, \sum_{k=1}^{n} a_{kn}\xi_k) \\
&= (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m, \xi_{m+1}, \cdots, \xi_n)\begin{bmatrix}
\lambda_0 & & & & a_{1(m+1)} & \cdots & a_{1n} \\
& \lambda_0 & & & a_{2(m+1)} & \cdots & a_{2n} \\
& & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
& & & \lambda_0 & a_{m(m+1)} & \cdots & a_{mn} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{(m+1)(m+1)} & \cdots & a_{(m+1)n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n(m+1)} & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix} \\
&= PB
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}
P^{-1}AP = B \\
|\lambda E - A| = |P^{-1}(\lambda E - B)P| = |\lambda E - B|
\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
|\lambda E - A| &= \begin{bmatrix}
\lambda - \lambda_0 & & & & a_{1(m+1)} & \cdots & a_{1n} \\
& \lambda - \lambda_0 & & & a_{2(m+1)} & \cdots & a_{2n} \\
& & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
& & & \lambda - \lambda_0 & a_{m(m+1)} & \cdots & a_{mn} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda - a_{(m+1)(m+1)} & \cdots & a_{(m+1)n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n(m+1)} & \cdots & \lambda - a_{nn}
\end{bmatrix} \\
&= (\lambda - \lambda_0)^m f(\lambda)
\end{aligned}$$

λ_0 至少是矩阵 A 的 m 重特征值, m 个线性无关特征向量对应的特征值至少是 m 重特征值 $\Leftrightarrow$ k 重特征值至多有 k 个线性无关的特征向量

表 5.1: 常用特征值和特征向量

矩阵	A	kA	A^k	$f(A)$	A^{-1}	A^*	$P^{-1}AP$
特征值	λ	$k\lambda$	λ^k	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\|A\|}{\lambda}$	λ
特征向量	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	$P^{-1}\xi$

5.2 相似

定义 5.2.1 (矩阵的相似)

设 A, B 是两个 n 阶方阵, $\exists n$ 阶可逆矩阵 P, $s.t.$ $P^{-1}AP = B$, 称 A 相似于 B, 记作 $A \sim B$

推论 5.2.1 (相似矩阵)

- 反身性: $A \sim A$
- 对称性: $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
- 传递性: $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$

推论 5.2.2 (相似矩阵)

(1). $A \sim B \Rightarrow P^{-1}AP = B$

必要不充分条件

- $r(A) = r(B)$
- $|A| = |B|$
- $\lambda_A = \lambda_B$
- $tr(A) = tr(B)$
- $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$
- A, B 各阶主子式之和分别相等

(2). $A \sim B$

- $A^T \sim B^T$
- $A^* \sim B^*$
- $A^m \sim B^m$
- $f(A) \sim f(B)$

(3). $A \sim B$ 且 A 可逆

- $A^{-1} \sim B^{-1}$
- $f(A^{-1}) \sim f(B^{-1})$

5.2.1 矩阵的相似对角化

定义 5.2.2 (相似对角化)

设 A 是 n 阶方阵, $\exists n$ 阶可逆矩阵 P, $s.t.$ $P^{-1}AP = \Lambda$, 其中 Λ 是对角矩阵, 称 A 可相似对角化, 记作 $A \sim \Lambda$, 称 Λ 为 A 的相似标准型

定理 5.2.1 (相似对角化充要条件)

n 阶矩阵 A 可相似对角化 $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量

(1). 必要性

不妨设存在可逆矩阵 P, $s.t.$ $P^{-1}AP = \Lambda$, 其中 Λ 是对角矩阵, $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

令 $P = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]$

$$A(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$A\xi_i = \lambda_i \xi_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, P 是可逆矩阵, $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 线性无关, 它们分别是矩阵 A 对应于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的特征向量

(2). 充分性

设 A 有 n 个线性无关的特征向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$, 对应的特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 令 $P = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]$, P 可逆

$$A\xi_i = \lambda_i \xi_i \Rightarrow AP = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

推论 5.2.3 (对角化)

- n 阶矩阵 A 可相似对角化 $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量
- n 阶矩阵 A 可相似对角化 $\Leftrightarrow$ 对于每个 k_i 重特征值都有 k_i 个线性无关的特征向量
- A 有 n 个特征值 $\Rightarrow$ n 阶矩阵 A 可相似对角化
- n 阶矩阵 A 为实对称矩阵 $\Rightarrow$ A 可相似对角化

5.2.2 实对称矩阵的相似对角化

定义 5.2.3 (实对称矩阵)

$A^T = A$ 且 A 中元素全为实数, 我们把 A 称作实对称矩阵

定理 5.2.2 (实对称矩阵特征值)

n 阶实对称矩阵 A 特征值为实数

不妨设实对称矩阵 A 的特征值 λ 和对应的特征向量 ξ, 记 $\overline{A}$ 为 A 的共轭矩阵, $\overline{\lambda}$ 为 λ 的共轭复数, $\overline{\xi}$ 为 ξ 的共轭向量

$$\begin{cases} A\xi = \lambda\xi \\ \overline{A} = A \\ A = A^T \end{cases} \Rightarrow \overline{x}^T Ax = \overline{x}^T \overline{A}^T x = \overline{Ax}^T x$$

$$\overline{Ax}^T x = \overline{\lambda x}^T x = \overline{\lambda}\overline{x}^T x$$

$$\begin{cases} \overline{x}^T Ax = \lambda\overline{x}^T x \\ \overline{x}^T Ax = \overline{\lambda}\overline{x}^T x \end{cases} \Rightarrow (\lambda - \overline{\lambda})\overline{x}^T x = 0$$

$\lambda - \overline{\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}$, λ 是实数

定理 5.2.3 (实对称矩阵特征向量)

n 阶实对称矩阵 A 的不同特征值对应的特征向量互相正交

不妨设实对称矩阵 A 的特征值 λ_1,λ_2 对应的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$

$$\begin{cases} A\boldsymbol{\xi}_1 = \lambda_1\boldsymbol{\xi}_1 \\ A\boldsymbol{\xi}_2 = \lambda_2\boldsymbol{\xi}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\xi}_1^T A^T = \lambda_1\boldsymbol{\xi}_1^T \\ \boldsymbol{\xi}_2^T A^T = \lambda_2\boldsymbol{\xi}_2^T \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\xi}_1^T A\boldsymbol{\xi}_2 = \lambda_1\boldsymbol{\xi}_1^T\boldsymbol{\xi}_2 \\ \boldsymbol{\xi}_1^T A\boldsymbol{\xi}_2 = \lambda_2\boldsymbol{\xi}_1^T\boldsymbol{\xi}_2 \end{cases} \Rightarrow (\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{\xi}_1^T\boldsymbol{\xi}_2 = 0$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \boldsymbol{\xi}_1^T\boldsymbol{\xi}_2 = 0, \boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 互相正交

定理 5.2.4 (实对称矩阵的相似对角化)

n 阶实对称矩阵 A_n 可正交相似对角化

1. 当 $n=1$ 时, A_1 已经是对角矩阵, A_1 可正交相似对角化
2. 假设当 $n=k-1$ 时, A_{k-1} 可以正交相似对角化
3. 当 $n=k$, 不妨设 A_k 的一个特征值为 $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, 对应的一个单位特征向量为 $\boldsymbol{\eta}_1$, 不妨构造一个正交矩阵 $T=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_k)$

$$T^{-1}A_kT = (T^{-1}\lambda_1\boldsymbol{\eta}_1, T^{-1}A\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,T^{-1}A\boldsymbol{\eta}_k)$$

$$(T^{-1}A_kT)^T = T^TA_k^T(T^{-1})^T = T^{-1}A_kT$$

$$\begin{cases} T^{-1}\boldsymbol{\eta}_1 = (1,0,\cdots,0) \\ T^{-1}\boldsymbol{\eta}_2 = (0,1,\cdots,0) \\ \cdots \\ T^{-1}\boldsymbol{\eta}_k = (0,0,\cdots,1) \end{cases} \Rightarrow T^{-1}A_kT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_{k-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

当 $n=k-1$ 时, A_{k-1} 可以正交相似对角化 $\Rightarrow T_2^{-1}A_{k-1}T_2 = \Lambda_{k-1}$

存在可逆矩阵 T_f

$$T_f = T\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & T_2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \Rightarrow |T_f| = |T_2| \neq 0$$

$$T_f^{-1}A_kT_f=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&&&\\\vdots&&T_2^{-1}&\\0&&&\end{bmatrix}T^{-1}A_kT\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&&&\\\vdots&&T_2&\\0&&&\end{bmatrix}$$

$$T_f^{-1}A_kT_f=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&&&\\\vdots&&T_2^{-1}&\\0&&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&&&\\\vdots&&P_{k-1}&\\0&&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&&&\\\vdots&&T_2&\\0&&&\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&&&\\\vdots&&T_2^{-1}P_{k-1}T_2&\\0&&&\end{bmatrix}$$

$$T_2^{-1}P_{k-1}T_2=\Lambda_{k-1}\Rightarrow A_k\sim\Lambda_k$$

综上, n 阶实对称矩阵 A_n 可正交相似对角化

第 6 章 二次型

6.1 二次型定义

定义 6.1.1 (二次型)

n 元变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + & \cdots & +2a_{1n}x_1x_n \\ +a_{22}x_2^2 + & \cdots & +2a_{2n}x_2x_n \\ + & \cdots & \\ & & +a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为 n 元二次型, 简称二次型

令 $a_{ij} = a_{ji}$

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ & a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2m}x_2x_n \\ & \cdots \\ & a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_1 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

令

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

二次型可表示: $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, A 为二次型 $f(\mathbf{x})$ 的矩阵

定义 6.1.2 (线性变换)

对于 n 元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

令

$$\begin{cases} x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n \\ x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n \\ \cdots \\ x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n \end{cases}$$

记

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$x\longrightarrow y$ 线性变化:

$$\mathbf{x}=C\mathbf{y}$$

这种变换称为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的 **线性变换**, 如果线性变换矩阵 $C(|C|\neq 0)$ 可逆, 则称为 **可逆线性变换**

$$\begin{cases} f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \\ \mathbf{x}=C\mathbf{y} \end{cases} \Rightarrow f(\mathbf{x})=(C\mathbf{y})^T A(C\mathbf{y})=\mathbf{y}^T(C^T AC)\mathbf{y}$$

记 $B=C^T AC$

$$f(\mathbf{x})=y^T By=g(\mathbf{y})$$

二次型 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ 通过线性变换 $\mathbf{x}=C\mathbf{y}$ 得到了一个新二次型 $g(\mathbf{y})=y^T By$

6.2 合同

定义 6.2.1 (矩阵合同)

设 A, B 为 n 阶矩阵, C 是可逆矩阵

$$\exists C \in \mathbb{R}^{n\times n},\ s.t.\ B = C^T AC$$

称 A, B 合同, 记作 $A \simeq B$, 其对应的二次型 $f(\mathbf{x})$ 与 $g(\mathbf{y})$ 为合同二次型

推论 6.2.1 (合同)

- 反身性: $A \simeq A$
- 对称性: $A \simeq B \Rightarrow B \simeq A$
- 传递性: $A \simeq B, B \simeq C \Rightarrow A \simeq C$

6.3 二次型的标准型和规范型

定义 6.3.1 (标准型)

二次型中只有平方项, 而没有交叉项 (所有交叉项系数全为 0), 形如:

$$d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$$

的二次型为标准二次型

定义 6.3.2 (规范型)

在标准二次型中, 如果二次型的系数 $d_i \in \{0, 1, -1\}$, 这样的二次型称为规范型二次型

推论 6.3.1 (合同标准型和合同规范型)

- 二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ 合同于标准型 $d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$, 则称 $d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$ 为二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ 的合同标准型
- 二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ 合同于规范型 $x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-x_{p+q}^2$, 则称 $x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-x_{p+q}^2$ 为二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ 的合同规范型
- 对任意实对称矩阵 A, 必存在可逆矩阵 C, 使得 $C^T AC = \Lambda$
- 对任意实对称矩阵 A, 必存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^T AQ = \Lambda$

定理 6.3.1 (惯性定理)

$f(\mathbf{x})$ 是二次型, A 是二次型 $f(\mathbf{x})$ 对应的矩阵, 对于任意可逆线性变换 C, $C^T AC = \Lambda$, 标准型或者规范型中正项个数 p, 负项个数 q 都是不变的, p 是正惯性指数, q 是负惯性指数

推论 6.3.2 (惯性定理)

- A 是二次型 $f(\mathbf{x})$ 对应的矩阵, $r(A) = p_A + q_A$
- A, B 分别是二次型 $f(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})$ 对应的矩阵, $A \simeq B$ 充要条件:

$$A \simeq B \Leftrightarrow \begin{cases} p_A = p_B \\ q_A = q_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r(A) = r(B) \\ q_A = q_B(p_A = p_B) \end{cases}$$

6.4 正定二次型

定义 6.4.1 (正定矩阵)

n 元二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$

$$\forall \mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T \neq 0, \mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$$

f 为正定二次型, 二次型对应的矩阵 A 为正定矩阵

推论 6.4.1 (二次型正定充要条件)

- f 正定 $\Leftrightarrow$ f 正惯性指数 $p = n$
- f 正定 $\Leftrightarrow \exists D$, $s.t.\ A = D^T D$, D 是可逆矩阵
- f 正定 $\Leftrightarrow A \simeq E$
- f 正定 $\Leftrightarrow$ A 的所有特征值 $\lambda_i > 0$
- f 正定 $\Leftrightarrow$ A 的全部顺序主子式大于 0

推论 6.4.2 (二次型正定必要条件)

- f 正定 $\Rightarrow a_{ii} > 0$
- f 正定 $\Rightarrow |A| > 0$