LaTeX main

Sun for morning, moon for night, and you forever.

作者：Lyshmily.Y & 木易

组织：Lyshmily.Y

时间：August 17, 2024

版本：V.1.0

邮箱：yjlpku.outlook.com & 845307723@qq.com

在没有结束前，总要做很多没有意义的事，这样才可以在未来某一天，用这些无意义的事去堵住那些讨厌的缺口

目录

3 第 3 部分 * 线代

7 第 7 部分 * Summary

第一部分

高数 (上)

第 1 部分目录

第 1 章 预备知识

内容提要

- 函数定义和性质
- 基本不等式
- 柯西不等式
- 三角函数和反三角函数
- 特殊函数

1.1 函数

定义 1.1.1 (函数)

1. 函数定义:

X, Y 是给定的两个集合, 若对于任意 $x \in X$, 存在法则 f, 使得唯一的 $y = f(x)$ 满足 $y \in Y$, 则称 f 为从 X 到 Y 的一个函数, 记为 $f: X \to Y$, 其中 X 称为定义域, $f(x)(x \in X)$ 称为值域

2. 函数的三要素: 定义域、对应法则和值域

定义 1.1.2 (函数的基本性质)

1. 单射: 若对于任意 $x_1, x_2 \in X$, 若 $x_1 \neq x_2$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$
2. 满射: 若对于任意 $y \in Y$, 存在 $x \in X$, 使得 $f(x) = y$
3. 双射: 若 f 既是单射又是满射

定义 1.1.3 (函数基本运算)

1. 基本四则运算
2. 复合运算
3. 反函数运算

性质 1. 函数四大性质

- 有界性
- 奇偶性: $\begin{cases} \text{奇函数: } f(-x) = -f(-x) \\ \text{偶函数: } f(-x) = f(x) \end{cases}$
- 周期性: $f(x+T) = f(x)$
- 单调性: $\forall x_1, x_2 \in I(x_1 \neq x_2), \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > (<)0$, $f(x)$ 单调递增 (减)

推论 1.1.1 (奇偶性推论)

任意一个定义在 $[-l, l]$ 上的函数 $f(x)$ 均可以写成一个奇函数和一个偶函数的和 $f(x) = h(x) + g(x)$, 其中 $h(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ 是偶函数, $g(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ 是奇函数

推论 1.1.2 (周期性、中心对称性、轴对称性)

1. $f(x)$ 有对称中心 (a, c), 且关于直线 $x = b$ 轴对称, 我们可以推出 $f(x)$ 的一个周期 $T = 4|b-a|$.
2. $f(x)$ 有两个对称中心 (a, c) 和 (b, c), 我们可以推出 $f(x)$ 的一个周期 $T = 2|b-a|$.
3. $f(x)$ 有两个对称轴直线 $x = a$ 和直线 $x = b$, 我们可以推出 $f(x)$ 的一个周期 $T = 2|b-a|$.

证明

1. 我们得到:

$$\begin{cases} f(2a-x) + f(x) = 2c \\ f(2b-x) = f(x) \end{cases} \to \begin{cases} f(2a-x) + f(2b-x) = 2c \\ f(2a-2b+x) + f(x) = 2c \end{cases} \to f(x) = f(x+4a-4b)$$

2. 我们得到:

$$\begin{cases} f(2a-x) = f(2b-x) \\ f(2a-2b+x) = f(x) \end{cases} \to f(x) = f(x+2a-2b)$$

3. 我们得到:

$$\begin{cases} f(2a-x) = f(x) \\ f(2b-x) = f(x) \end{cases} \to \begin{cases} f(2a-x) = f(2b-x) \\ f(2a-2b+x) = f(x) \end{cases} \to f(x) = f(x+2a-2b)$$

1.1.1 初等函数

定义 1.1.4 (初等函数)

初等函数是指可以用有限次基本初等函数和有限次代数运算得到的函数, 六种基本初等函数:

1. 常数函数: $y = C$
2. 幂函数: $y = x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}^*$
3. 指数函数: $y = a^x, a > 0, a \neq 1$
4. 对数函数: $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$
5. 三角函数: $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$
6. 反三角函数: $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \cot^{-1}(x), y = \sec^{-1}(x), y = \csc^{-1}(x)$

♣

1.1.2 三角函数和反三角函数

定理 1.1.1 (积化和差 & 和差化积 & 倍角公式)

积化和差公式:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$

和差化积公式:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

倍角公式:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

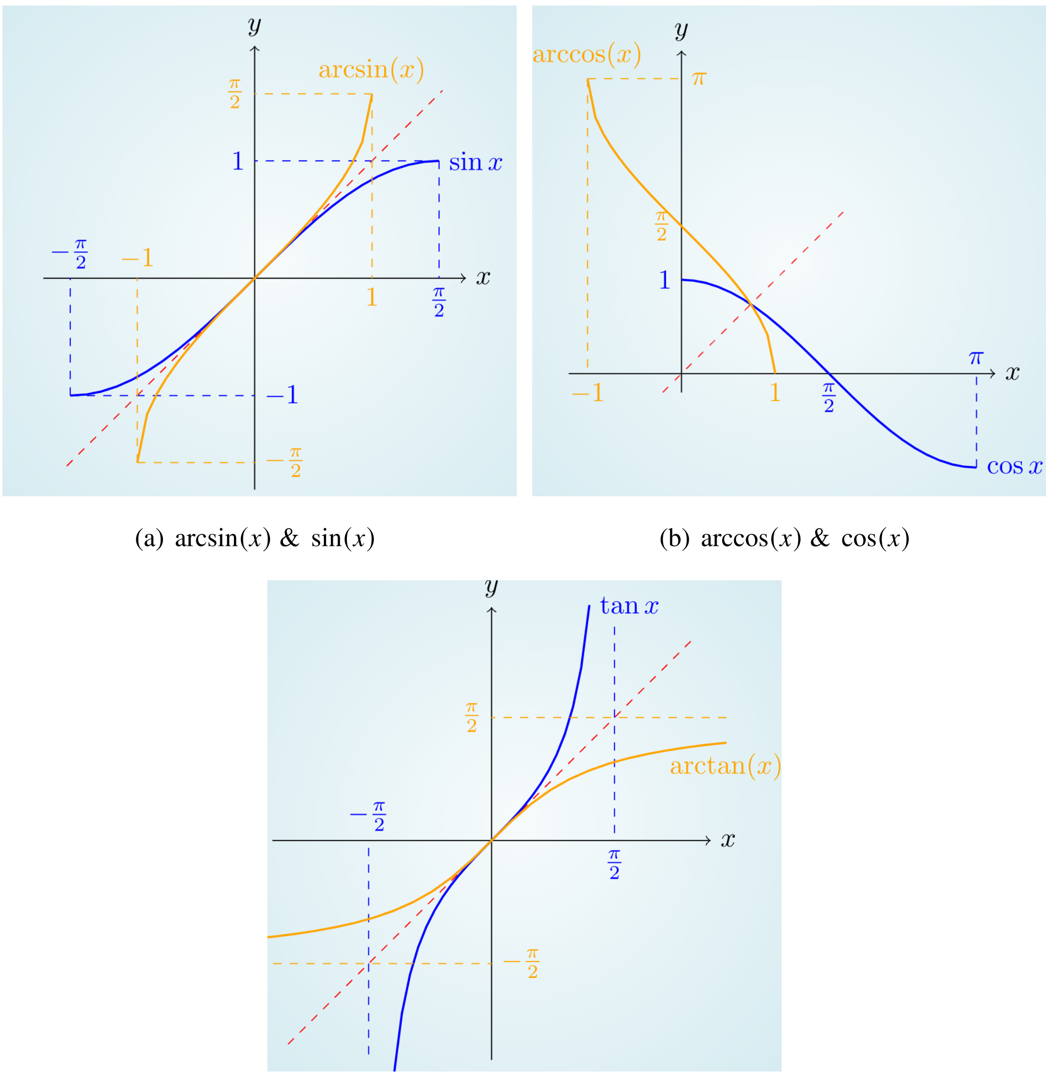
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \qquad \cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

定义 1.1.5 (反三角函数)

1. $\arcsin x$ 的定义域为 $[-1,1]$, 值域为 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$
2. $\arccos x$ 的定义域为 $[-1,1]$, 值域为 $[0,\pi]$
3. $\arctan x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 值域为 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$



(a) $\arcsin(x)$ & $\sin(x)$ (b) $\arccos(x)$ & $\cos(x)$

(c) $\arctan(x)$ & $\tan(x)$

图 1.1: 反三角函数图像

1.1.3 特殊函数

定义 1.1.6 (特殊函数)

1. 阶乘函数:

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1, (2n)!! = 2^n \cdot n!, 0! = 1$$

2. 二项式系数:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i}$$

3. 绝对值函数:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

4. 符号函数:

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

5. 取整函数:

$$f(x) = [x], x-1 < [x] \leq x, \lim_{x\to 0^+} = 0, \lim_{x\to 0^-} = -1$$

6. 分段函数:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in D_1 \\ f_2(x) & x \in D_2 \\ \dots \end{cases}$$

7. 黎曼函数:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & p, q \in \mathbb{Q}, x = \dfrac{p}{q} \in (0,1) \\ 0 & x \notin \mathbb{Q}, x = 0, 1 \end{cases}$$

8. 狄利克雷函数:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

定理 1.1.2 (平均值不等式 $a_i > 0$)

平方平均值:

$$Q_n = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}{n}}$$

算术平均值:

$$A_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$$

几何平均值:

$$G_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

调和平均值:

$$H_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i}}$$

平均值不等式:

$$Q_n \geq A_n \geq G_n \geq H_n, a_1 = a_2 = \cdots = a_n \text{等号成立}$$

定理 1.1.3 (柯西不等式)

二维形式:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2, \text{当且仅当} ad = bc \text{时等号成立}$$

n 维形式:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right), \text{当且仅当} \frac{a_i}{b_i} = c \text{时等号成立}$$

向量形式: $(\alpha, \beta)^2 \leq (\alpha, \alpha)(\beta, \beta)$

定理 1.1.4 (重要不等式)

1. $\sin x < x < \tan x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$ $\qquad$ $\arctan x < x < \arcsin x, x \in [0, 1]$
2. $\frac{2}{\pi} x < \sin x < x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$ $\qquad$ $x < \tan x < \frac{4}{\pi} x, x \in (0, \frac{\pi}{4})$
3. $e^x \geq x + 1, x \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $x - 1 \geq \ln x, x \in (0, +\infty)$
4. $\frac{1}{1+x} < \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$

定理 1.1.5 (重要公式)

1. $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$
2. $(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ $\qquad$ $(a^3 + b^3) = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
3. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$
4. $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-1}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}), n \in \{2k+1 | k \in \mathbb{N}\}$

1.2 函数的表示方法

1.2.1 显式表达

定义 1.2.1 (显示表达)

$y = f(x)$ 的形式, 初等函数都是显性表达.

1.2.2 隐式表达

定义 1.2.2 (隐式表达)

$f(x, y) = 0$ 的形式, 一般不能用 x 表示 y, 也不能用 y 表示 x

1.2.3 极坐标

定义 1.2.3 (极坐标)

极坐标系是平面直角坐标系的一种推广, 它是由一个原点 O 和一个射线 Ox 组成的, 其中 O 称为极点, Ox 称为极轴, 任意一点 P 到极点 O 的距离 r 叫做点 P 的极径, 点 P 到极轴的角 θ 叫做点 P 的极角, 记为 $P(r, \theta)$

定义 1.2.4 (重要极坐标方程)

1. 圆方程: $r = a, r = a\sin\theta, r = a\cos\theta$
2. 心形线方程: $r = a(1 \pm \cos\theta), r = a(1 \pm \sin\theta)$
3. 阿基米德螺线方程: $r = a\theta$
4. 三叶玫瑰线方程: $r = a\sin 3\theta, r = a\cos 3\theta$
5. 伯努利双扭线方程: $r^2 = a^2\cos 2\theta, r^2 = a^2\sin 2\theta$

1.2.4 参数方程

定义 1.2.5 (参数方程)

设 $x = x(t), y = y(t)$, 如果 x, y 都是 t 的函数, 那么称 $x = x(t), y = y(t)$ 为参数方程, t 称为参数

定义 1.2.6 (重要参数方程)

1. 摆线方程: $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$
2. 星形线方程: $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$

注

1. 关于双曲函数以及反双曲函数, 在 **def** : 39.1.1 有详细介绍
2. 有关极坐标和参数方程常见曲线的方程, 在 **def** : 39.2.1 有详细介绍

第 2 章 数列极限

内容提要

- 数列极限定义和性质
- 归结原理
- 夹逼准则
- 单调有界准则

2.1 数列极限

定义 2.1.1 (数列极限)

设 x_n 是一数列, 若存在常数 $a, \forall \epsilon > 0, \exists N_0 > 0$, 当 $n > N_0$ 时, $|x_n - a| < \epsilon$ 恒成立, 常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限或者说数列 $\{x_n\}$ 趋近于 a

性质 1. 唯一性

若极限存在, 则极限唯一

性质 1. 有界性

若数列 $\{x_n\}$ 的极限 a 存在, 则数列 $\{x_n\}$ 有界

性质 1. 保号性

若数列 $\{x_n\}$ 的极限 $a > 0(a < 0)$, 则存在正整数 N_0, 当 $n > N_0$ 时, $x_n > 0(x_n < 0)$, 取 $\epsilon = \pm a$ 即可

注

1. 若数列的任意子列发散, 数列极限不存在
2. 若数列的任意两个子列极限存在但不相等, 数列极限不存在

推论 2.1.1 (数列极限)

- 如果数列从某项起有 $x_n \geq 0$ 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $a \geq 0$
- 如果 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$, 则 $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |A|$
- $\lim_{n\to+\infty} x_n = a \to \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1, & a \neq 0 \\ \lim_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \text{不一定存在}, & a = 0 \end{cases}$
- $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = a \to \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} x_n = \infty, & |a| > 1 \\ \lim_{n\to+\infty} x_n = 0, & |a| < 1 \\ \lim_{n\to+\infty} x_n \text{不确定}, & |a| = 1 \end{cases}$
- $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在且$x_n > 0 \to \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$

2.2 数列极限计算

2.2.1 定义法

定义 2.2.1 (极限的四则运算)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

1. $\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$
2. $\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$
3. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}, b \neq 0$

2.2.2 归结原理

定义 2.2.2 (归结原理)

设函数 $f(x)$ 在去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$ 上有定义, 那么 $\lim_{x\to a} f(x) = l$ 的充分必要条件是: 对与一切序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathring{U}(a,\delta)$, 只要 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 就有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$

2.2.3 夹逼准则

定义 2.2.3 (夹逼准则)

设数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 满足 $x_n \le y_n \le z_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, 条件可变为 $n > N_0$ 时, $x_n \le y_n \le z_n$(有限无关性)

推论 2.2.1 (夹逼准则)

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_1^n + u_2^n + u_3^n + \cdots + u_m^n} = \max\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$

证明

$$[\max\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}]^n \le u_1^n + u_2^n + u_3^n + \cdots + u_m^n \le m[\cdot \max\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}]^n$$

我们将 $[\max\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}]^n$ 记作 a,$m \cdot [\max\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}]^n$ 记作 b, 我们利用夹逼准则:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b} = \max\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$$

2.2.4 单调有界准则

定义 2.2.4 (单调有界准则)

单调有界数列必有极限, 详细证明见 **the** : 39.6.1.

2.3 Exercise

命题 2.3.1

设 $x_1 = a \ge 0, y_1 = b \ge 0, a \le b, x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}, (n = 1, 2, \cdots)$, 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$

解

我们由: $x_1 = a \ge 0, y_1 = b \ge 0, x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$, 由归纳法可知:

$$x_n \ge 0, y_n \ge 0$$

由基本不等式:

$$\frac{x_n + y_n}{2} \ge \sqrt{x_n y_n} \Rightarrow y_{n+1} \ge x_{n+1}$$

又因为: $x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}\geq x_n, y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}\leq y_n$.
x_n 单调递增,y_n 单调递减,$x_1\leq x_n\leq y_n\leq y_1$
x_n,y_n 单调且有界, 数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 均有极限, 我们不妨设:

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a\\ \lim\limits_{n\to+\infty}y_n=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\sqrt{ab}\\ b=\dfrac{a+b}{2}\end{cases}\Rightarrow a=b$$

综上所述, 我们得到: $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$

命题 2.3.2

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$, 且 $|q|<1$, 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$

解

我们考虑数列 $\{|a_n|\}$, 我们可以得到:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=|q|\Rightarrow\exists M>0,\ n>M\text{时},\ \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<1$$

又因为 $|a_n|\geq 0$, 我们可以知道 $\{|a_n|\}$ 极限必定存在, 我们不妨假设 $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=a$.
假设 $a\neq 0$, 我们可以得到:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}|a_{n+1}|}{\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|}=1$$

这和 $|q|<1$ 矛盾!!!
综上所述, 我们可以得到: $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$

命题 2.3.3

设 $f_n(x)=1-(1-\cos x)^n(n=1,2,\cdots)$
(1). 证明: 方程 $f_n(x)=\dfrac{1}{2}$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内有且只有一个实数根 x_n
(2). 设 $x_n\in(0,\dfrac{\pi}{2})$, 满足 $f_n(x)=\dfrac{1}{2}$, 证明:

$$\arccos\frac{1}{n}<x_n<\frac{\pi}{2},\text{且}\lim_{n\to+\infty}x_n=\frac{\pi}{2}$$

解

我们构造辅助函数: $G_n(x)=\dfrac{1}{2}-(1-\cos x)^n$
(1).

$$G_n'(x)=-n\sin x(1-\cos x)^{n-1}$$

当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$,$G_n'(x)<0$, $G_n(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 单调递减.

$$G_n(0)=\frac{1}{2}>0,\ G_n(\frac{\pi}{2})=-\frac{\pi}{2}<0$$

我们根据零点定理, 可以得到: $\exists$唯一的$x_n\in(0,\dfrac{\pi}{2}),\ s.t.G_n(x_n)=0$

(2). 我们将 $x = \arccos\frac{1}{n}$ 代入 $G_n(x)$ 得到:

$$G_n(\arccos\frac{1}{n}) = \frac{1}{2} - (1-\frac{1}{n})^n$$

我们知道: $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \frac{1}{e} \Rightarrow G_n(\arccos\frac{1}{n}) > 0$

我们需要证明: $(1-\frac{1}{n})^n$ 单调性, 我们构造辅助函数: $H(x) = e^{xln(1-\frac{1}{x})}, x \geq 2$

我们可以得到: $H'(x) = e^{xln(1-\frac{1}{x})}[ln(1-\frac{1}{x}) + \frac{1}{x-1}] > 0, H(x)$ 单调递增.

所以 $G_n(\arccos\frac{1}{n})$ 单调递减, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(\arccos\frac{1}{n}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} > 0$, 我们得到:

$$\arccos\frac{1}{n} < x_n < \frac{\pi}{2}$$

我们再由夹逼定理可以得到:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \arccos\frac{1}{n} = \frac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$$

命题 2.3.4

设 $x_1 > 0$, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = ln(e^{x_n}-1) - lnx_n$, 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在并求其值

解

我们由: $x_{n+1} = ln(e^{x_n}-1) - lnx_n$ 可以得到:

$$e^{x_{n+1}} = \frac{e^{x_n}-1}{x_n}$$

我们构造辅助函数 $f(x) = e^x - x - 1, f'(x) = e^x - 1$

当 $x > 0$ 时, 我们知道: $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增, $f(x) > f(0) = 0 \Rightarrow x > 0, \frac{e^x-1}{x} > 1$

我们有 $x_1 > 0 \Rightarrow e^{x_2} > 1 \Rightarrow x_2 > 0$, 我们由归纳法可知: $x_n > 0$, 数列 $\{x_n\}$ 有下界.

我们由拉格朗日中值定理可以得到:

$$e^{x_{n+1}} = \frac{e^{x_n}-1}{x_n} = e^{\xi}, \text{其中}\xi \in (0, x_n)$$

我们得到: $x_{n+1} = \xi < x_n$, 数列 $\{x_n\}$ 单调递减, 我们由单调有界准则可以得到: 数列 $\{x_n\}$ 极限必定存在, 我们不妨假设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, 我们有:

$$e^a = \frac{e^a-1}{a} \Rightarrow a = 0$$

综上所述, 数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 其值为 0

命题 2.3.5

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $|f'(x)| < 1$, 当 $x \in [a,b]$ 时, 有 $a < f(x) < b, F(x) = \frac{x+f(x)}{2}$, 证明:

(1). $\exists x^* \in (a,b),\ s.t. F(x^*) = x^*$

(2). 对 $x_0 \in [a,b]$, 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = F(x_n), (n = 0,1,2,\cdots)$, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x^*$

解

(1). 我们构造辅助函数: $G(x) = F(x) - x = \dfrac{f(x)-x}{2}$, 我们有: $G'(x) = \dfrac{f'(x)-1}{2}$

又因为: $|f'(x)| < 1 \Rightarrow G'(x) < 0 \Rightarrow G(x)$单调递减

$$\begin{cases} G(a) = \dfrac{f(a)-a}{2} > 0 \\ G(b) = \dfrac{f(b)-b}{2} < 0 \end{cases} \Rightarrow G(a)G(b) < 0$$

我们根据零点定理可知: $\exists x^* \in (a,b),\ s.t. G(x^*) = 0 \Rightarrow \exists x^* \in (a,b),\ s.t. F(x^*) = x^*$

(2). $F'(x) = \dfrac{1+f'(x)}{2} \geq 0 \Rightarrow F(x)$单调递增

(i). 当 $x_0 = x^*$ 时,$x_n = x^*$, 此时 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x^*$

(ii). 当 $x_0 > x^*$ 时, 我们有 $G(x^*) > G(x_0) \Rightarrow F(x_0) < x_0 \Rightarrow x_1 < x_0$

当 $n = 1$ 时,$x_1 < x_0$;

当 $n = k$ 时,$x_k < x_{k-1}$ 成立, 当 $n = k+1$ 时, 我们有 $F(x_k) < F(x_{k-1}) \Rightarrow x_{k+1} < x_k$

我们得到数列 $\{x_n\}$ 单调递减, 且 $x_0 \in [a,b]$, $x_n = \dfrac{x_n + f(x_n)}{2}$, $a < f(x) < b \Rightarrow x_n \in [a,b]$, 数列 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界, 极限必定存在.

我们不妨假设数列 $\{x_n\}$ 的极限为 A, 我们有: $A = \dfrac{A+f(A)}{2} \Rightarrow F(A) = A \Rightarrow A = x^*$

(iii). 当 $x_0 < x_*$ 时, 我们有 $G(x^*) < G(x_0) \Rightarrow F(x_0) > x_0 \Rightarrow x_1 > x_0$

当 $n = 1$ 时,$x_1 > x_0$;

当 $n = k$ 时,$x_k > x_{k-1}$ 成立, 当 $n = k+1$ 时, 我们有 $F(x_k) > F(x_{k-1}) \Rightarrow x_{k+1} > x_k$

我们得到数列 $\{x_n\}$ 单调递增, 且 $x_0 \in [a,b]$, $x_n = \dfrac{x_n + f(x_n)}{2}$, $a < f(x) < b \Rightarrow x_n \in [a,b]$, 数列 $\{x_n\}$ 单调递增且有上界, 极限必定存在.

我们不妨假设数列 $\{x_n\}$ 的极限为 A, 我们有: $A = \dfrac{A+f(A)}{2} \Rightarrow F(A) = A \Rightarrow A = x^*$

综上所述, 我们得到: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x^*$

命题 2.3.6

(1). 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数, 证明:

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k),\ k = 1,2,\cdots$$

(2). 证明: $ln(1+n) \leq 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} \leq 1 + lnn$, 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{lnn}$

解

(1). 我们由 $f(x)$ 单调减少且非负得到:

$$0 \leq f(k+1) \leq f(x) \leq f(k),\ x \in [k, k+1]$$

我们对上述不等式在 $[k,k+1]$ 上同时求定积分得到:

$$\int_k^{k+1} f(k+1)dx \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx \Rightarrow f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$$

(2). 我们构造辅助函数 $f(x)=\frac{1}{x}$, 我们可以知道 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减且非负, 我们由 (1) 可以知道:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{1}{x}dx \leq 1 \\ \frac{1}{3} \leq \int_2^3 \frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{2} \\ \cdots \\ \frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} = ln(1+n) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{x} = lnn \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1+\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq 1+lnn \end{cases}$$

我们由夹逼定理可以得到:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{ln(1+n)}{lnn} = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+lnn}{lnn} = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{lnn} = 1$$

命题 2.3.7

设 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续, 且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = -\infty$, 证明: $f(x)$ 在 (a,b) 内有最大值 ♠

解

我们不妨取 $M = f(\frac{a+b}{2})$, 我们有 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = -\infty$

我们由极限定义可以得到:

$$\begin{cases} \exists a < c < \frac{a+b}{2},\ x \in (a,c),\ s.t. f(x) \leq f(\frac{a+b}{2}) \\ \exists \frac{a+b}{2} < d < b,\ x \in (d,b),\ s.t. f(x) \leq f(\frac{a+b}{2}) \end{cases}$$

在闭区间 $[c,d]$ 上,$f(x)$ 连续,$f(x)$ 必定有最大值为 $f(\xi)$, $\xi \in [c,d]$, 且 $f(\xi) \geq f(\frac{a+b}{2})$. 在区间 $(a,c)\cup(d,b)$ 上, 我们有 $f(x) \leq f(\frac{a+b}{2})$.

综上所述,$f(x)$ 在区间 (a,b) 内有最大值.

第 3 章 函数极限和连续

内容提要

- 函数极限定义和性质
- 无穷小概念和比阶
- 洛必达法则
- 连续和间断

3.1 函数极限

定义 3.1.1 (函数极限)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义, 如果存在常数 A, 对于任意给定的正数 ϵ, 总存在正数 δ, 使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\epsilon$, 那么常数 A 是当 x 趋于 x_0 时函数 $f(x)$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

定义 3.1.2 (单侧极限)

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左 (右) 邻域内有定义, 如果存在常数 A, 对于任意给定的正数 ϵ, 总存在正数 δ, 使得当 x 满足不等式 $0<x-x_0<\delta(0<x_0-x<\delta)$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\epsilon$, 那么常数 A 是当 x 趋于 x_0 时函数 $f(x)$ 的左 (右) 极限, 记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A(\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A)$

定义 3.1.3 (无穷远极限)

无穷远处极限 (双侧, 单侧只取一边): $f(x)$ 在 $(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$ 上有定义, $\forall\epsilon>0,\exists A>0$, 当 $|x|>A$ 时, $|f(x)-l|<\epsilon$, 我们称 l 是当 x 趋于无穷远时函数 $f(x)$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l$

定义 3.1.4 (极限发散)

1. 震荡发散: $\lim\limits_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})$ 反复震荡
2. 左右极限存在但不相等: $\lim\limits_{x\to 0}[x]$
3. 广义收敛: $f(x)$ 在 $x=a$ 的去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$ 上有定义, $\forall X>0,\exists\delta>0$, 当 $0<|x-a|<\delta$ 时, $|f(x)|>X$, 则称 $f(x)$ 在 $x=a$ 处广义收敛

性质 1. 唯一性

若极限存在, 则极限唯一

性质 1. 局部有界性

若函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 则存在正数 $M>0$, 存在正数 $\delta>0$, 使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)|\le M$

性质 1. 局部保号性

若函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>(<)0$, 则存在正数 $\delta>0$, 使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)>(<)0$

3.2 函数极限计算

3.2.1 无穷小 (大) 概念和比阶

定义 3.2.1 (无穷小 (大))

1. 无穷小: 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义, 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, 那么称函数 $f(x)$ 是当 x 趋于 x_0 时的无穷小
2. 无穷大: 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义, 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, 那么称函数 $f(x)$ 是当 x 趋于 x_0 时的无穷大

定义 3.2.2 (无穷小比阶)

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} g(x)=0$$

1. 等价无穷小: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, 记作 $f(x)\sim g(x)$
2. 同阶无穷小: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k(k\neq 0)$, 记作 $f(x)\approx g(x)$

3. 高阶无穷小: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, 记作 $f(x)=o(g(x))$

4. 低阶无穷小: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$, 记作 $g(x)=O(f(x))$

推论 3.2.1 (等价无穷小)

1. $x\to 0, x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(x+1)\sim e^x-1$
2. $x\to 0, \sin x\sim x-\dfrac{x^3}{6}, \arcsin x\sim x+\dfrac{x^3}{6}, \tan x\sim x+\dfrac{x^3}{3}, \arctan x\sim x-\dfrac{x^3}{3}, \cos x\sim 1-\dfrac{x^2}{2}$
3. $x\to 0, (1+x)^a-1\sim ax, a^x-1\sim x\ln a$

定理 3.2.1 (洛必达法则)

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $x=a$ 的某邻域内可导 (a 可以为 ∞, 邻域也可以是单侧的), 且 $g'(a)\neq 0$, 满足:(1) 或 (2)

(1). $\dfrac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$

(2). $\dfrac{\infty}{\infty}$: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$

如果 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$($l$ 可以是实数或者 ∞), 我们有: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$

证明

构造辅助函数: $F(x)=\begin{cases}0, & x=x_0\\ f(x), & x\in\mathring{U}(x_0)\end{cases}, G(x)=\begin{cases}0, & x=x_0\\ g(x), & x\in\mathring{U}(x_0)\end{cases}$

我们可以得到: $F(x),G(x)$ 在 $[x_0,x]$ 上连续, 在 (x_0,x) 内可导, 且 $G'(x)\neq 0$

我们利用柯西中值定理:

$$\exists\xi\in(x_0,x), s.t.\ \frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)}=\frac{F'(xi)}{G'(\xi)}\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

我们取极限 $x\to x_0^+$ 得到: $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\xi\to x_0^+}\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

同理我们可以得到: $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

由于 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l\to\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$

我们得到: $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$, 证毕

定理 3.2.2 (广义洛必达定理)

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 上可导, 满足:

(1). $g'(x)\neq 0$

(2). $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$

(3). $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A(A为有限数或\pm\infty)$

我们有: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$

证明

首先考虑 $x\to x_0^-$:

(1). 当 A 为常数时, 我们有:

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,s.t.\ x\in(x_0-\delta,x_0),|\frac{f'(x)}{g'(x)}-A|<\frac{\varepsilon}{3}\Rightarrow 取定x_1\in(x_0-\delta,x_0)$$

我们考虑 $x\in(x_1,x)$, 由柯西中值定理我们有:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\Rightarrow|\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}-A|=|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-A|<\frac{\varepsilon}{3}$$

$x\in[x_1,x_0)$, 我们有:

$$\begin{aligned}|\frac{f(x)}{g(x)}-A| &= |\frac{g(x)-g(x_1)}{g(x)}\left[\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}-A\right]+\frac{f(x_1)-Ag(x_1)}{g(x)}|\\ &\le |1-\frac{g(x_1)}{g(x)}||\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}-A|+|\frac{f(x_1)-Ag(x_1)}{g(x)}|\\ &\le (1+|\frac{g(x_1)}{g(x)}|)|\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}-A|+|\frac{f(x_1)-Ag(x_1)}{g(x)}|\end{aligned}$$

我们有: $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x_1)}{g(x)}=0\\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x_1)-Ag(x_1)}{g(x)}=0\end{cases}$

我们有:

$$\forall\varepsilon>0,\exists x_2\in(x_1,x_0),\forall x\in(x_2,x_0),\ s.t.\ |\frac{g(x_1)}{g(x)}|<1且|\frac{f(x_1)-Ag(x_1)}{g(x)}|<\frac{\varepsilon}{3}$$

此时, 我们有: $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1=x_0-x_2,\forall x\in(x_0-\delta_1,x_0),|\dfrac{f(x)}{g(x)}-A|<2\cdot\dfrac{\varepsilon}{3}+\dfrac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$

(2). 当 A 为 ∞ 时, 我们有: $|\dfrac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}|=|\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}|>M$

取 $M=1\to|f(x)-f(x_1)|>|g(x)-g(x_1)|\to\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$

$x\to x_0^+$ 的情况类似, 证毕

3.3 连续和间断

定义 3.3.1 (连续点)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0,\delta)$ 内有定义, 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, 那么称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续

定义 3.3.2 (间断点)

第一类间断点:

1. 可去间断点: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)(f(x_0)$ 可以无定义)
2. 跳跃间断点: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

第二类间断点: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 至少有一个不存在

1. 震荡间断点: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 震荡不存在
2. 无穷间断点: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$
3. 其他第二类间断点

第 4 章 一元微分学

内容提要

- 导数和微分
- 基本求导公式
- 高阶导数
- 泰勒公式
- 函数单调性和凹凸性
- 极值点和拐点
- 渐近线
- 曲率和曲率半径

4.1 一元微分学概念

定义 4.1.1 (导数)

设 $y=f(x)$ 定义在区间 I 上, 自变量在 $x=x_0$ 处增加一个增量 Δx 时, 其中 $x_0\in I, x_0+\Delta\in I$, 函数值的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, 如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在, 那么称此极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数, 记为 $f'(x_0)$ 或 $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$ 或 $\frac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}$

定义 4.1.2 (导数的几何意义)

函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 是函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的切线的斜率

定理 4.1.1 (导数存在充要条件)

函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导的充要条件是: 函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 存在且相等

定义 4.1.3 (微分)

设 $y=f(x)$ 定义在区间 I 上，如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，那么函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微分为 $dy=f'(x_0)dx$，其中 dx 是自变量 x 的增量，dy 是因变量 y 的增量

4.2 一元微分学计算

定理 4.2.1 (基本求导公式)

1. $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$
2. $(a^x)'=a^x\ln a$ $\qquad (\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$
3. $(e^x)'=e^x$ $\qquad (\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
4. $(\sin x)'=\cos x$ $\qquad (\cos x)'=-\sin x$
5. $(\tan x)'=\sec^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
6. $(\sec x)'=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}=\tan x\sec x$
7. $(\csc x)'=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}=-\cot x\csc x$
8. $(\cot x)'=-\csc^2 x$
9. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\arctan x)'=\dfrac{1}{x^2+1}$
12. $\left(\ln(x+\sqrt{x^2+a})\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$
13. $\left(\ln(x+\sqrt{x^2-a})\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a}}$

定理 4.2.2 (导数四则运算)

1. 和差法则：$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$
2. 积法则：$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
3. 商法则：$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
4. 复合函数求导：$F[G(x)]'=F[G(x)]'\cdot G'(x)$

定理 4.2.3 (高阶导数)

1. $\sin^{(n)} x = \sin(x+\frac{n\pi}{2})$ $\quad \sin^{(n)}(ax+b) = a^n \sin(ax+b+\frac{n\pi}{2})$
2. $\cos^{(n)} x = \cos(x+\frac{n\pi}{2})$ $\quad \cos^{(n)}(ax+b) = a^n \cos(ax+b+\frac{n\pi}{2})$
3. $[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ $\quad [\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$
4. $(\dfrac{1}{ax+b})^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$
5. 莱布尼茨公式: $(uv)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{i}{n} u^{(i)} v^{(n-i)}$

定理 4.2.4 (泰勒公式)

1. 欧拉公式: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
2. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$
3. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{2n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$
4. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{2n-1}\dfrac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$
5. $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} x^{2n-1}, x \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$
6. $\arcsin x = x + \dfrac{x^3}{6} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1}, x \in (-1, 1)$
7. $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, x \in (-1, 1)$
8. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + \cdots, x \in (-1, 1]$
9. $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \cdots - \dfrac{x^n}{n} + \cdots, x \in [-1, 1)$
10. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$

定理 4.2.5 (特殊函数导函数)

1. 隐函数导数:

$$F(x,y) = 0 \Rightarrow F'(x,y) \cdot y' = 0$$

2. 指对数函数求导:

$$\ln y = \ln f(x) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad y = a^{f(x)} \Rightarrow y = e^{f(x)\ln a}$$

3. 反函数导数: $x = \varphi(y), y = f(x)$ 记 $x'_y = \varphi'(y), y'_x = f'(x)$

(1). 一阶导数: $x'_y y'_x = 1 \Rightarrow \varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$

(2). 二阶导数: $x''_{yy} = -\dfrac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}$ $\quad y''_{xx} = -\dfrac{x''_{yy}}{(x'_y)^3}$

4. 参数方程导数: $x = x(t), y = y(t)$

(1). 一阶导数: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$

(2). 二阶导数: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\frac{dy}{dx}}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dx}}{dt} \cdot \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx}{dx}\left[\dfrac{d^2y}{dt^2} \cdot \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{d^2x}{dt^2} \cdot \dfrac{dy}{dt}\right]$

4.3 一元微分学应用

4.3.1 几何应用

定义 4.3.1 (函数图像要点)

1. 定义域 (间断点)
2. 奇偶性
3. 渐近线 (铅垂、水平、斜)

Points

(1).

$$\begin{cases} \text{水平渐近线: } \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a \Rightarrow y = a \\ \text{铅垂渐近线: } \lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Rightarrow x = a \\ \text{斜渐近线: } \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - ax = b \Rightarrow y = ax + b \end{cases}$$

(2). 在同一个趋向方向中水平渐近线和斜渐进线只能有一个

(3). 间断点处看铅垂渐近线, $\pm\infty$ 处看水平渐近线和斜渐近线

4. 单调性和极值
5. 凹凸性和拐点

4.3.2 函数单调性 & 凹凸性 & 极值点 & 拐点

定义 4.3.2 (单调性)

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果对任意 $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调递增的; 如果对任意 $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调递减的.
2. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果对任意 $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调不减的; 如果对任意 $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调不增的.

♣

定义 4.3.3 (凹凸性)

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义

1. 如果对任意 $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是凹的
2. 如果对任意 $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是凸的
3. 如果对任意 $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 均有 $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > (<) \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) (\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是凸 (凹) 的

♣

定义 4.3.4 (极值点)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义, 如果对去心邻域内任意 x, 均有 $f(x) < f(x_0)$(或$f(x) > f(x_0)$), 我们称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极小值 (或极大值).

♣

定义 4.3.5 (驻点)

一阶导数为 0 的点称为驻点; 对于多元函数而言, 驻点是一阶偏导数都为 0 的点.

♣

定理 4.3.1 (极值点判别)

第一充分条件:

$$\begin{cases} f(x)\text{在}x_0\text{处连续, 且在}\mathring{U}(x_0)\text{内可导} \\ x \in (x_0-\delta, x_0), f'(x) > 0; x \in (x_0, x_0+\delta), f'(x) < 0, f(x)\text{在}x = x_0\text{取极大值} \\ x \in (x_0-\delta, x_0), f'(x) < 0; x \in (x_0, x_0+\delta), f'(x) > 0, f(x)\text{在}x = x_0\text{取极小值} \\ x \in (x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta), f'(x)\text{不变号}, x = x_0\text{不是极值点} \end{cases}$$

第二充分条件:

$$\begin{cases} f(x)\text{在}x_0\text{处二阶可导, 且}f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0 \\ f''(x_0) > 0, f(x)\text{在}x = x_0\text{取极小值} \\ f''(x_0) < 0, f(x)\text{在}x = x_0\text{取极大值} \end{cases}$$

第三充分条件:

$$\begin{cases} f(x)\text{在}x_0\text{处}n\text{阶可导, 且}f^{(m)}(x_0)=0(m=1,2,\cdots,n-1), f^{(n)}(x_0)\neq 0, n\in\{2k|k\in\mathbb{N}^+\} \\ f^{(n)}(x_0)>0, f(x)\text{在}x=x_0\text{取极小值} \\ f^{(n)}(x_0)<0, f(x)\text{在}x=x_0\text{取极大值} \end{cases}$$

定义 4.3.6 (拐点)

连续函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续,x_0 是区间的内点, 当函数 $f(x)$ 经过点 $(x_0, f(x_0))$ 时, 函数的凹凸性发生改变, 则称 $(x_0, f(x_0))$ 是函数 $f(x)$ 的拐点.

定理 4.3.2 (拐点判别)

第一充分条件:

$$\begin{cases} f(x)\text{在}x_0\text{处连续, 且在}\mathring{U}(x_0)\text{内二阶可导} \\ x\in(x_0-\delta,x_0), f''(x)<(>)0; x\in(x_0,x_0+\delta), f''(x)>(<)0 \\ (x_0,f(x_0))\text{是}f(x)\text{的拐点} \end{cases}$$

第二充分条件:

$$\begin{cases} f(x)\text{在}x_0\text{处三阶可导} \\ f''(x_0)=0, f'''(x_0)\neq 0 \\ (x_0,f(x_0))\text{是}f(x)\text{的拐点} \end{cases}$$

第三充分条件:

$$\begin{cases} f(x)\text{在}x_0\text{处}n\text{阶可导} \\ f^{(m)}(x_0)=0(m=1,2,\cdots,n-1), f^{(n)}(x_0)\neq 0, n\in\{2k+1|k\in\mathbb{N}^+\} \\ (x_0,f(x_0))\text{是}f(x)\text{的拐点} \end{cases}$$

定理 4.3.3 (多项式函数极值点和拐点个数)

假设 $P_n(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{p_i}$, 其中 k_1 个 p_i 为奇数 (大于 1), k_2 个 p_i 为偶数, k_0 个 $p_i=1$, 满足 $k_0+k_1+k_2=k$, 我们有:

- $P_n(x)$ 的极值点个数: $k-1+k_2=k_0+k_1+2k_2-1$
- $P_n(x)$ 的拐点个数: $k+2k_1+k_2-2=k_0+3k_1+2k_2-2$

具体证明过程见: **the** :39.5.1

注

- 驻点是导数为 0 的点, 不一定是极值点
- 极值点导数可能存在, 也可能不存在; 当导数存在时,$f'(x_0) = 0$
- 拐点处二阶导数可能存在, 也可能不存在; 当二阶导数存在时,$f''(x_0) = 0$

定义 4.3.7 (曲率和曲率半径)

设 $y(x)$ 二阶可导, 则曲线 $y = y(x)$ 在其上点 $(x_0, y(x_0))$ 处的曲率公式表示为:

$$k = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

曲率半径:

$$R = \frac{1}{k} = \frac{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

♣

曲率半径推导

我们不妨设曲线上的任意一点 $C(x_0, f(x_0))$, 这点的曲率圆半径为 R, 我们可以知道这个圆是 C 点和周围两个点 $A(x_0-\delta, f(x_0-\delta)), B(x_0+\delta, f(x_0+\delta))$ 的外接圆, 且 A, B 无线靠近 C

我们利用等面积法来求出这个外接圆半径 R, 首先我们利用正弦定理得到:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{R}$$

我们利用向量法求出 ΔABC 的面积:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\mathbf{det}(\vec{a}, \vec{b})|, \begin{cases} \vec{a} = (\delta, f(x_0) - f(x_0)) \\ \vec{b} = (\delta, f(x_0+\delta) - f(x_0)) \\ \vec{c} = (2\delta, f(x_0+\delta) - f(x_0-\delta)) \end{cases}$$

我们得到:

$$\begin{cases} S = \dfrac{\sqrt{\delta^2 + [f(x_0) - f(x_0-\delta)]^2}\sqrt{\delta^2 + [f(x_0+\delta) - f(x_0)]^2}\sqrt{4\delta^2 + [f(x_0+\delta) - f(x_0-\delta)]^2}}{4R} \\ S = |\delta\,[f(x_0+\delta) + f(x_0-\delta) - 2f(x_0)]\,| \end{cases}$$

我们有:

$$R = \lim_{\delta\to 0} \frac{\sqrt{1+\left[\frac{f(x_0+\delta)-f(x_0)}{\delta}\right]^2}\sqrt{1+\left[\frac{f(x_0)-f(x_0-\delta)}{\delta}\right]^2}\sqrt{4+\left[\frac{f(x_0+\delta)-f(x_0-\delta)}{2\delta}\right]^2}}{\left|\dfrac{f(x_0+\delta)+f(x_0-\delta)-2f(x_0)}{\delta^2}\right|}$$

我们得到: $R=\frac{\left[1+[f'(x_0)]^2\right]^{\frac{3}{2}}}{f''(x_0)}$, R 越大, 曲线越平坦, R 越小, 曲线越陡峭.

4.3.3 物理应用

定义 4.3.8 (相关变化率)

$$y=y(x)\begin{cases} y=y(t) \\ x=x(t) \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

♣

第 5 章 中值定理

内容提要

- 介值定理
- 零点定理
- 费马定理
- 罗尔定理
- 拉格朗日中值定理
- 柯西中值定理
- 积分中值定理
- 达布定理

5.1 介值定理 & 零点定理

定理 5.1.1 (有界和最值定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 我们有: $m \le f(x) \le M$

其中 m, M 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值

定理 5.1.2 (介值定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 我们有: $m \le f(x) \le M$

其中 m, M 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值

$\forall \mu \in [m, M],\ \exists \xi \in [a,b],\ s.t.\ f(\xi) = \mu$

定理 5.1.3 (平均值定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 我们有: $m \le f(x) \le M$

其中 m, M 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值

当 $a \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le b, \exists \xi \in [a,b],\ s.t.\ f(\xi) = \dfrac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$

定理 5.1.4 (零点定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且我们有 $f(a)f(b)<0, \exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f(\xi)=0$

5.2 费马定理

定理 5.2.1 (费马定理)

$f(x)$ 在 x_0 处可导, 且 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 极值点, 我们有: $f'(x_0)=0$

证明: 我们不妨假设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取极大值

我们利用极值点的定义得到:

$$\begin{cases} f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0 \\ f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}\ge 0 \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导, $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f(x_0)=0$

5.3 罗尔定理

定理 5.3.1 (罗尔定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a)=f(b)$, 则 $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)=0$

证明: 由最值定理我们可以得到 $m\le f(x)\le M$

(1). $m=M$ 时,$f(x)=C\Rightarrow f'(x)=0$

(2). $m<M$ 时, 又因为 $f(a)=f(b)$, 我们知道在区间 (a,b) 中至少存在一个最值 (最大值或者最小值)

不妨假设在 $x=\xi$ 时,$f(\xi)$ 取得最值, 此时 $x=\xi$ 一定是 $f(x)$ 极值点, 由费马定理我们得到: $f'(\xi)=0$

5.4 拉格朗日中值定理

定理 5.4.1 (拉格朗日中值定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 则 $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$

证明: 构造函数 $g(x)=f(x)(b-a)-[f(b)-f(a)]x$, 我们有:

$$g(a)=g(b)=bf(a)-af(b)$$

由罗尔定理得到: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ g'(\xi)=0$

$$f'(\xi)(b-a)=f(b)-f(a)\Leftrightarrow\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

5.5 柯西中值定理

定理 5.5.1 (柯西中值定理)

$f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $g'(x) \neq 0, \exists \xi \in (a,b)$, $s.t.$ $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

证明: 构造函数 $F(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$

$$F(a) = F(b) = \frac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}$$

由罗尔定理得到:

$$\exists \xi \in (a,b),\ s.t.\ F'(\xi) = 0$$

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi) \Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

5.6 泰勒公式

定理 5.6.1 (泰勒公式)

(1). 带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内 $n+1$ 阶导数存在, 对邻域内任意一点 x, 我们有:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

(2). 带佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式

设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导, 则存在 x_0 的一个邻域, 对于该邻域内任意一点 x, 我们有:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

5.7 积分中值定理

定理 5.7.1 (积分中值定理)

(1). 一元函数积分中值定理

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $\exists \xi \in (a,b)$, $s.t.$ $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

证明: 构造函数 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

由拉格朗日中值定理得到:

$$\exists \xi \in (a,b),\ s.t.\ F'(\xi) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}\Rightarrow\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$$

(2). 二元函数积分中值定理

$f(x,y)$ 在 D 上连续, 则 $\exists(\xi,\eta)\in D,\ s.t.\ \iint_D f(x,y)dxdy=S_D f(\xi,\eta)$

(3). 广义积分中值定理

$f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $g(x)$ 不变号, 我们有:

$$\exists\xi\in[a,b],\ s.t.\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

设 $f(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 连续,$g(x,y)$ 平面有界闭区域 D 可积且不变号, 我们有:

$$\exists(\xi,\eta)\in D,\ s.t.\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)d\sigma$$

注

我们构造函数: $F(x)=\int_a^x f(t)g(t)dt,\ G(x)=\int_a^x g(t)dt, F'(x)=f(x)g(x), G'(x)=g(x)$

我们利用柯西中值定理可以得到:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}\Rightarrow\frac{f(\xi)g(\xi)}{g(\xi)}=\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

我们可以得到:

$$f(\xi)\int_a^b g(x)dx=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

5.8 达布定理

定理 5.8.1

1. 导数零点定理

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $f'_+(a)f'_-(b)<0$, 则 $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)=0$

证明: 我们不妨假设 $f_+(a)>0,\ f'_-(b)<0$

由极限定义得到:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0\\ \lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x)>f(a)\\ f(x)>f(b)\end{cases}$$

我们得到 $f(x)$ 一定在 (a,b) 内取得最大值, 由费马定理得到: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)=0$

2. 导数介值定理 (达布定理)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'_+(a) \neq f'_-(b)$，对于任意介于 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 之间的值 η，我们都有 $\exists \xi \in (a,b)$, $s.t.\ f'(\xi) = \eta$

证明：我们不妨假设 $f_+(a) = m$, $f'_-(b) = M\ (M > m)$

$g(x) = f(x) - \eta x$, $g'(x) = f'(x) - \eta$

$g'_+(a) = f'_+(a) - \eta < 0\ g'_-(b) = f'_-(b) - \eta > 0$

我们利用极限的保号性得到：

$$\begin{cases} \exists \delta_1 > 0, s.t. g(x) < g(a),\ x \in (a, a+\delta_1) \\ \exists \delta_2 > 0, s.t. g(x) < g(b),\ x \in (b-\delta_2, b) \end{cases}$$

$g(x)$ 是连续可导函数，由费马定理，我们得到：$g(x)$ 最小值一定在 (a,b) 内取得，且 $g'(\xi) = 0 \to f'(\xi) - \eta = 0$

综上所述，我们得到 $\exists \xi \in (a,b)$, $s.t.\ f'(\xi) = \eta$

5.9 Exercise

5.9.1 零点问题

命题 5.9.1

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，且 $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 0$，证明：$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有两个零点

解

我们不妨设 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$，我们有：

$$F'(x) = f(x),\ F(0) = F(1) = 0$$

又因为：

$$\int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 xdF(x) = xF(x)|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 F(x)dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 F(x)dx = 0$$

我们用积分中值定理得到：

$$\exists c \in (0,1),\ s.t.\ F(c) = \int_0^1 xf(x)dx = 0$$

我们得到：$F(0) = F(c) = F(1) = 0$，我们使用两次罗尔定理得到：

$$\begin{cases} \exists \xi_1 \in (0,c),\ s.t. F'(\xi_1) = f(\xi_1) = 0 \\ \exists \xi_2 \in (c,1),\ s.t. F'(\xi_2) = f(\xi_2) = 0 \end{cases}$$

我们得到：$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有两个零点

命题 5.9.2

假设某 n 次多项式 $P_n(x)$ 的一切根均为实数根, 证明: $P'_n(x), P''_n(x), \cdots, P^{n-1}_n(x)$ 也仅有实根

解

我们不妨假设: $P_n(x) = A(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}\cdots(x-x_k)^{r_k}$, 其中 $r_1+r_2+\cdots+r_k = n$

我们得到:

$$\begin{aligned} P'_n(x) &= r_1A(x-x_1)^{r_1-1}(x-x_2)^{r_2}+\cdots(x-x_k)^{r_k} \\ &+ r_2A(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2-1}\cdots(x-x_k)^{r_k} \\ &+ \cdots \\ &+ r_kA(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}\cdots(x-x_k)^{r_k-1} \\ &= A(x-x_1)^{r_1-1}(x-x_2)^{r_2-1}\cdots(x-x_k)^{r_k-1}f(x) \end{aligned}$$

其中 $f(x) = r_1(x-x_2)\cdots(x-x_k)+\cdots+r_k(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})$

我们得到: $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 也为 $P'_n(x)$ 的实数根, 一共有 $r_1-1+r_2-1+\cdots+r_k-1 = n-k$ 个

我们在区间 $(x_i, x_{i+1}), (i = 1, 2, \cdots, k-1)$ 中使用罗尔定理, 我们得到 $P'_n(x)$ 在区间 $(x_i, x_{i+1}), (i = 1, 2, \cdots, k-1)$ 至少存在 $k-1$ 个实数零点

综上 $P'_n(x)$ 至少存在 $n-1$ 个实数零点,$P'_n(x)$ 至多有 $n-1$ 个实数根,$P'_n(x)$ 的根全为实数根

对于 $P''_n(x), \cdots, P^{n-1}_n(x)$, 同理可证

命题 5.9.3

设 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 二阶可导, $f(0) = 0, f(1) = 1, f(4) = 2$, 证明: $\exists \xi \in (0,4),\ s.t. f''(\xi) = -\dfrac{1}{3}$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = f(x) + \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{7x}{6}$

$$F(0) = F(1) = F(4) = 0$$

我们在区间 $(0,1)$ 和区间 $(1,4)$ 上使用罗尔定理得到:

$$\begin{cases} \exists \xi_1 \in (0,1),\ s.t. F'(\xi_1) = f'(\xi_1) + \dfrac{\xi_1}{3} - \dfrac{7}{6} = 0 \\ \exists \xi_2 \in (1,4),\ s.t. F'(\xi_2) = f'(\xi_2) + \dfrac{\xi_2}{3} - \dfrac{7}{6} = 0 \end{cases}$$

我们对 $F'(x)$ 在区间 (ξ_1, ξ_2) 上使用罗尔定理, 得到:

$$\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2),\ s.t. F''(\xi) = f''(\xi) + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow f''(\xi) = -\frac{1}{3}$$

综上所述,$\exists \xi \in (0,4),\ s.t. f''(\xi) = -\dfrac{1}{3}$

注: 泰勒展开

我们将 $f(x)$ 在 $x=1$ 处泰勒展开得到:

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-1)^2$$

我们分别令 $x=0,x=4$ 得到:

$$\begin{cases} f(0)=f(1)-f'(1)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}=0,\ \xi_1\in(0,1) \\ \\ f(4)=f(1)+3f'(1)+\dfrac{9f''(\xi_2)}{2}=2,\ \xi_2\in(1,4) \end{cases}$$

我们将 $f'(1)$ 消去, 得到:

$$3f''(\xi_1)+9f''(\xi_2)=-2$$

(i). 当 $f''(\xi_1)=f''(\xi_2)$ 时,$f''(\xi_1)=f''(\xi_2)=-\frac{1}{3}$, 命题成立

(ii). 当 $f''(\xi_1)\neq f''(\xi_2)$, 我们不妨假设 $f''(\xi_1)<f''(\xi_2)$, 我们可以得到:

$$\begin{cases} f''(\xi_1)<-\frac{1}{3} \\ f''(\xi_2)>-\frac{1}{3} \end{cases}$$

我们由达布定理可以知道: $\exists\xi_3\in(\xi_1,\xi_2),\ s.t. f''(\xi_3)=-\frac{1}{3}$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi\in(0,4),\ s.t. f''(\xi)=-\frac{1}{3}$

命题 5.9.4

设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 在 $(0,2)$ 内三阶可导, 且 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=2, f(1)=1, f(2)=6$, 证明: $\exists\xi\in(0,2), s.t. f'''(\xi)=9$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=f(x)-\frac{3}{2}x^3+\frac{5}{2}x^2-2x$

$$F(0)=F(1)=F(2)=0, F'(0)=0$$

我们对 $F(x)$ 在区间 $(0,1)$ 和区间 $(1,2)$ 上使用罗尔定理得到:

$$\begin{cases} \exists\xi_1 \in (0,1),\ s.t.F'(\xi_1) = f'(\xi_1) - \dfrac{9}{2}\xi_1^2 + 5\xi_1 - 2 = 0 \\ \\ \exists\xi_2 \in (1,2),\ s.t.F'(\xi_2) = f'(\xi_2) - \dfrac{9}{2}\xi_1^2 + 5\xi_2 - 2 = 0 \end{cases}$$

我们对 $F'(x)$ 在区间 $(0,\xi_1)$ 和区间 (ξ_1,ξ_2) 上使用罗尔定理得到:

$$\begin{cases} \exists\eta_1 \in (0,\xi_1),\ s.t.F''(\eta_1) = f''(\eta_1) - 9\eta_1 + 5 = 0 \\ \exists\eta_2 \in (\xi_1,\xi_2),\ s.t.F'(\eta_2) = f''(\eta_2) - 9\eta_2 + 5 = 0 \end{cases}$$

我们对 $F''(x)$ 在区间 (η_1,η_2) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi \in (\eta_1,\eta_2),\ s.t.F'''(\xi) = f'''(\xi) - 9 = 0$$

综上所述,$\exists\xi \in (0,2), s.t.f'''(\xi) = 9$

命题 5.9.5

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导,$f(0) = 0, f(1) = 1, \int_0^1 f(x)dx = 1$, 证明: $\exists\eta \in (0,1)$, $s.t.f''(\eta) < -2$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = f(x) + 3x^2 - 4x$

$$F(0) = F(1) = 0,\ \int_0^1 F(x) = 0$$

由积分中值定理, 我们得到:

$$\exists c \in (0,1),\ s.t.F(c) = 0$$

我们对 $F(x)$ 在区间 $(0,c)$ 和区间 $(c,1)$ 上使用罗尔定理得到:

$$\begin{cases} \exists\xi_1 \in (0,c),\ s.t.F'(\xi_1) = f'(\xi_1) + 6\xi_1 - 4 = 0 \\ \exists\xi_2 \in (c,1),\ s.t.F'(\xi_2) = f'(\xi_2) + 6\xi_2 - 4 = 0 \end{cases}$$

我们对 $F''(x)$ 在区间 (ξ_1,ξ_2) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi \in (\xi_1,\xi_2),\ s.t.F''(\xi) = f''(\xi) + 6 = 0$$

综上所述,$\exists\xi \in (0,1), s.t.f''(\xi) = -6 < -2$

命题 5.9.6

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导,$f(0) = f(1) = 0$, $[f(x)]_{min} = -1$, 证明: $\exists\xi \in (0,1)$, $s.t.f''(\xi) \geq 8$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=f(x)-4x^2+4x$

$$[f(x)]_{min}=-1\Rightarrow\exists c\in(0,1).\ s.t.f(c)=-1$$

(1). $c=\dfrac{1}{2}$, 此时 $F(\dfrac{1}{2})=0$

(2). $c\in(0,\dfrac{1}{2})$, 此时:

$$\begin{cases} F(c)=f(c)-4c^2+4c=4c-4c^2=-(2c-1)^2<0 \\ \\ F(\dfrac{1}{2})=f(\dfrac{1}{2})+1\geq 0 \end{cases}$$

根据零点定理, 我们得到: $\exists c_1\in(c,\frac{1}{2})$, $s.t.F(c_1)=0$

(3). $c\in(\dfrac{1}{2},1)$, 此时:

$$\begin{cases} F(c)=f(c)-4c^2+4c=4c-4c^2=-(2c-1)^2<0 \\ \\ F(\dfrac{1}{2})=f(\dfrac{1}{2})+1\geq 0 \end{cases}$$

根据零点定理, 我们得到: $\exists c_2\in(\frac{1}{2},c)$, $s.t.F(c_2)=0$

综上三种情况, 我们知道: $\exists\eta\in(0,1)$, $s.t.F(\eta)=0$

我们对 $F(x)$ 在区间 $(0,\eta)$ 和区间 $(\eta,1)$ 上使用罗尔定理得到:

$$\begin{cases} \exists\xi_1\in(0,\eta),\ s.t.F'(\xi_1)=f'(\xi_1)-8\xi_1+4=0 \\ \exists\xi_2\in(\eta,1),\ s.t.F'(\xi_2)=f'(\xi_2)-8\xi_1+4=0 \end{cases}$$

我们对 $F'(x)$ 在区间 (ξ_1,ξ_2) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2),\ s.t.F''(\xi)=f''(\xi)-8=0$$

综上所述,$\exists\xi\in(0,1),s.t.f''(\xi)=8\geq 8$

注: 泰勒展开

我们由 $[f(x)]_{min}=-1$, 且 $f(0)=f(1)=0$ 得到,$f(x)$ 一定在 $(0,1)$ 内部取的最小值, 我们不妨设 $f(c)=-1$, 我们由费马定理可得 $f'(c)=0$

我们将 $f(x)$ 在 $x=c$ 处进行泰勒展开得到:

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2$$

我们令 $x=0$ 和 $x=1$ 得到:

$$\begin{cases} f(0)=f(c)-f'(c)c+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}c^2=0 \\ f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\dfrac{f''(\xi_2)}{2}(1-c)^2=0 \end{cases}$$

我们有: $f(c)=-1,\ f'(c)=0$, 上面两个式子:

$$f''(\xi_1)=\frac{2}{c^2}, f''(\xi_2)=\frac{2}{1-c^2}$$

当 $c\in(0,\frac{1}{2}], f'(\xi_1)\geq 8$; 当 $c\in(\frac{1}{2},1), f''(\xi_2)\geq 8$
综上所述,$\exists\xi\in(0,1), s.t. f''(\xi)\geq 8$

命题 5.9.7
设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内二阶可导,$f(a)=g(a)$,$f(b)=g(b)$, 并且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 (a,b) 内存在相等的最大值, 证明: $\exists\xi\in(a,b), s.t. f''(\xi)=g''(\xi)$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=f(x)-g(x)$

$$F(a)=F(b)=0$$

$f(x),g(x)$ 在区间 (a,b) 内存在相等的最大值, 我们不妨假设 $f(x),g(x)$ 分别在 x_1,x_2 处取得最大值,$f(x_1)=g(x_2)=a$

(1). $x_1=x_2$, 此时 $F(x_1)=F(x_2)=0$

(2). $x_1<x_2$, 此时 $F(x_1)=f(x_1)-g(x_1)\geq 0,\ F(x_2)=f(x_2)-g(x_2)\leq 0$

$\exists x_3\in[x_1,x_2]\ s.t. F(x_3)=0$

(3). $x_1>x_2$, 此时 $F(x_1)=f(x_1)-g(x_1)\leq 0,\ F(x_2)=f(x_2)-g(x_2)\geq 0$

$\exists x_4\in[x_2,x_1],\ s.t. F(x_4)=0$

综上三种情况, 我们知道: $\exists\eta\in(a,b),\ s.t. F(\eta)=0$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a,η) 和区间 (η,b) 上使用罗尔定理得到:

$$\begin{cases} \exists\xi_1\in(a,\eta),\ s.t. F'(\xi_1)=f'(\xi_1)-g'(\xi_1)=0 \\ \exists\xi_2\in(\eta,b),\ s.t. F'(\xi_2)=f'(\xi_2)-g'(\xi_2)=0 \end{cases}$$

我们对 $F'(x)$ 在区间 (ξ_1,ξ_2) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2),\ s.t. F''(\xi)=f''(\xi)-g''(\xi)=0$$

综上所述,$\exists\xi\in(a,b), s.t. f''(\xi)=g''(\xi)$

命题 5.9.8

设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 三阶连续可导,$f(-1)=0,f'(0)=0,f(1)=1$, 证明: $\exists\xi\in(-1,1)$, $s.t.f'''(\xi)=3$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^3-\left(\frac{1}{2}-f(0)\right)x^2-f(0)$

$$F(-1)=F(0)=F(1)=0, F'(0)=0$$

我们对 $F(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 上使用罗尔定理:

$$\begin{cases} \exists\xi_1\in(-1,0),\ s.t.F'(\xi_1)=f'(\xi_1)-\frac{3}{2}\xi_1^2-(1-2f(0))\,\xi_1=0 \\ \\ \exists\xi_2\in(0,1),\ s.t.F'(\xi_2)=f'(\xi_2)-\frac{3}{2}\xi_2^2-(1-2f(0))\,\xi_2=0 \end{cases}$$

我们对 $F'(x)$ 在区间 $(\xi_1,0)$ 和 $(0,\xi_2)$ 上使用罗尔定理:

$$\begin{cases} \exists\eta_1\in(\xi_1,0),\ s.t.F''(\eta_1)=f''(\eta_1)-3\eta_1+2f(0)-1=0 \\ \exists\eta_2\in(0,\xi_2),\ s.t.F''(\eta_2)=f''(\eta_2)-3\eta_2+2f(0)-1=0 \end{cases}$$

我们对 $F''(x)$ 在区间 (η_1,η_2) 上使用罗尔定理:

$$\exists\xi\in(\eta_1,\eta_2),\ s.t.F'''(\xi)=f'''(\xi)-3=0\Rightarrow f'''(\xi)=3$$

综上所述,$\exists\xi\in(-1,1)$, $s.t.f'''(\xi)=3$

注: 泰勒展开

我们将 $f(x)$ 在 $x=0$ 处进行泰勒展开得到:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(\xi)}{6}x^3$$

我们令 $x=1$ 和 $x=-1$, 且 $f'(0)=0$, 得到:

$$\begin{cases} f(1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2}+\frac{f'''(\xi_1)}{6}=1 \\ \\ f(-1)=f(0)+\frac{f''(0)}{2}-\frac{f'''(\xi_2)}{6}=0 \end{cases}$$

上面两式相减得到:

$$\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{6}=1$$

我们不妨设 $f'''(x)$ 在 $[-1,1]$ 上最大值 M, 最小值 m, 我们得到:

$$\frac{m}{6} \le \frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{6} \le \frac{M}{6} \Rightarrow m \le 3 \le M$$

由介值定理得到: $\exists \xi \in (-1,1), s.t. f'''(\xi)=3$

5.9.2 复合函数零点问题

命题 5.9.9

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,(a,b) 可导,$f(a)=f(b)=0$, 证明: $\exists \xi \in (a,b),\ s.t. 2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=x^2 f(x)$

$$F(a)=F(b)=0$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a,b) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists \xi \in (a,b),\ s.t. F'(\xi)=2\xi f(\xi)+\xi^2 f'(\xi)=0$$

(1). 当 $\xi \ne 0 \Rightarrow 2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

(2). 当 $\xi=0$ 时,$F(a)=F(0)=F(b)=0$.

我们对 $F(x)$ 在区间 $(a,0)$ 和区间 $(0,b)$ 上使用罗尔定理得到:

$$\begin{cases} \exists \xi_1 \in (a,0),\ s.t. F'(\xi_1)=2\xi_1 f(\xi_1)+\xi_1^2 f'(\xi_1)=0 \\ \exists \xi_2 \in (0,b),\ s.t. F'(\xi_2)=2\xi_2 f(\xi_2)+\xi_2^2 f'(\xi_2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2f(\xi_1)+\xi_1 f'(\xi_1)=0,\ \xi_1 \in (a,0) \\ 2f(\xi_2)+\xi_2 f'(\xi_2)=0,\ \xi_2 \in (0,b) \end{cases}$$

综上所述,$\exists \xi \in (a,b),\ s.t. 2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

命题 5.9.10

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,(a,b) 可导,$f(a)=f(b)=0$, 证明: $\exists \xi \in (a,b), s.t. f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=xf(x)$

$$F(a)=F(b)=0$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a,b) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists \xi \in (a,b),\ s.t. F'(\xi)=f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$$

综上所述,$\exists \xi \in (a,b),\ s.t. f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

命题 5.9.11

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,(a,b) 可导,$a>0, f(a)=0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b), s.t. f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$

解

原命题等价于: $\exists\xi\in(a,b), s.t. \dfrac{a}{\xi-b}f(\xi)-f'(\xi)=0$

我们构造辅助函数: $F(x)=(x-b)^a f(x)$

$$F(a)=F(b)=0$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a,b) 上使用罗尔定理得到:

$\exists\xi\in(a,b),\ s.t. F'(\xi)=a(\xi-b)^{a-1}f(\xi)+(\xi-b)^a f'(\xi)=0\Rightarrow af(\xi)+(\xi-b)f'(\xi)=0$

综上所述,$\exists\xi\in(a,b),\ s.t. f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$

命题 5.9.12

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,(a,b) 可导,$f(a)=f(b)=0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b), s.t. f'(\xi)+f^2(\xi)=0$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=f(x)e^{\int_a^x f(t)dt}$

$$F(a)=F(b)=0$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a,b) 上使用罗尔定理:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t. F'(\xi)=e^{\int_a^\xi f(t)dt}(f'(\xi)+f^2(\xi))=0$$

综上,$\exists\xi\in(a,b), s.t. f'(\xi)+f^2(\xi)=0$

5.9.3 罗尔定理 & 费马定理

命题 5.9.13

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续,$(0,1)$ 可导,$f(0)=1, f(1)=\frac{1}{2}$, 证明: $\exists\xi\in(0,1), s.t. f'(\xi)+f^2(\xi)=0$

解

(1). 假设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上无零点

我们构造辅助函数: $F(x)=-\dfrac{1}{f(x)}+x$

$$F(0)=F(1)=-1$$

我们对 $F(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上使用罗尔定理:

$$\exists\xi\in(0,1),\ s.t. F'(\xi)=\frac{f'(\xi)+f^2(\xi)}{f^2(\xi)}=0$$

(2). 假设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上至少两个零点, 我们假设: $f(x_1)=f(x_2)=\cdots=0$

我们构造辅助函数: $F(x)=f(x)e^{\int_a^x f(t)dt}$

$$F(x_1)=F(x_2)=0$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (x_1,x_2) 上使用罗尔定理:

$$\exists\xi\in(x_1,x_2),\ s.t.F'(\xi)=e^{\int_a^\xi f(t)dt}(f'(\xi)+f^2(\xi))=0$$

(3). 假设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上只有一个零点,$f(x_0)=0$,$x=x_0$ 一定是最小值点.

我们由费马定理可得: $f'(x_0)=0$

$$\exists x_0\in(0,1),\ s.t.f'(x_0)+f^2(x_0)=0$$

综上,$\exists\xi\in(0,1),\ s.t.f'(\xi)+f^2(\xi)=0$

命题 5.9.14

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,(a,b) 可导, 且存在 $c\in(a,b)$, $s.t.f'(c)=0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$,$s.t.f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=(f(x)-f(a))e^{\frac{x}{a-b}}$

$$F'(x)=e^{\frac{x}{a-b}}[f'(x)+\frac{f(x)-f(a)}{a-b}]$$

$$F(a)=0,\ F(c)=(f(c)-f(a))e^{\frac{c}{a-b}},\ F'(c)=-e^{\frac{c}{a-b}}\frac{f(c)-f(a)}{b-a}$$

(1). 当 $f(a)=f(c)$ 时, 我们对 $F(x)$ 在区间 (a,c) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(a,c)\ ,s.t.F'(c)=e^{\frac{c}{a-b}}[f(c)-\frac{f(c)-f(a)}{a-b}]=0\Rightarrow f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$$

(2). 当 $f(a)\neq f(c)$ 时, 我们不妨假设 $f(a)>f(c)$, 此时我们有:

$$F(a)=0,\ F(c)<0,\ F'(c)>0$$

此时 $F(x)$ 在区间 $[a,c]$ 上的最小值一定在区间内, 我们不妨设 $F(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得最小值, 此时 $F'(x_0)=0$

$$\exists x_0\in(a,c),s.t.f'(x_0)=\frac{f(x_0)-f(a)}{b-a}$$

综上所述,$\exists\xi\in(a,b)$,$s.t.f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$

命题 5.9.15

$f(x)$ 在 $[-2,2]$ 二阶可导,$|f(x)|<1$,$[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$, 证明: $\exists\xi\in(-2,2)$,$s.t.f(\xi)+f''(\xi)=0$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=f(x)\sin x+f'(x)\cos x$

我们有:

$$F(-\frac{\pi}{2})=-f(\frac{\pi}{2}),\ F(\frac{\pi}{2})=f(\frac{\pi}{2}),\ F(0)=f'(0)$$

$$F'(x)=f'(x)\sin x+f(x)\cos x+f''(x)\cos x-f'(x)\sin x=\cos x[f(x)+f''(x)]$$

命题 5.9.16

设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 二阶可导,$2f(0)=\int_0^2 f(x)dx=f(2)+f(3)$, 证明: $\exists\xi\in(0,3)$,$s.t.f''(\xi)-2f'(\xi)=0$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=e^{-2x}f'(x)$

$$F'(x)=e^{-2x}[f''(x)-2f'(x)]$$

根据积分中值定理:

$$\exists\xi_1\in(0,2),\ s.t.\int_0^2 f(x)dx=2f(\xi_1)=2f(0)$$

我们得到: $\exists\xi_1\in(0,2),\ s.t.f(\xi_1)=f(0)$

我们对 $f(x)$ 在区间 $(0,\xi_1)$ 上使用罗尔定理:

$$\exists\eta_1\in(0,\xi_1),\ s.t.f'(\eta_1)=0$$

由介值定理得到: $\exists\xi_2\in(2,3),\ s.t.f(2)+f(3)=2f(\xi_2)=\int_0^2 f(x)dx\Rightarrow f(\xi_2)=f(\xi_1)$

我们对 $f(x)$ 在区间 (ξ_1,ξ_2) 上使用罗尔定理:

$$\exists\eta_2\in(\xi_1,\xi_2),\ s.t.f'(\eta_2)=0$$

$$F(\eta_1)=F(\eta_2)=0$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (η_1,η_2) 上使用罗尔定理:

$$\exists\xi\in(\eta_1,\eta_2),\ s.t.F'(\xi)=e^{-2\xi}[f''(\xi)-2f'(\xi)]=0$$

综上所述,$\exists\xi\in(0,3)$,$s.t.f''(\xi)-2f'(\xi)=0$

5.9.4 原函数、导函数、高阶导数关系

命题 5.9.17

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导,$f(a)=f(b)=0$,$f'_+(a)f'_-(b)>0$ 证明: $\exists\xi\in(a,b)$,$s.t.f''(\xi)=f(\xi)$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=e^{-x}[f(x)+f'(x)]$, $G(x)=e^{x}f(x)$

$$F'(x)=e^{-x}[-f(x)-f'(x)+f'(x)+f''(x)]=e^{-x}[f''(x)-f(x)]$$

此时: $G(a)=G(b)=0$, 又因为 $f'_+(a)f'_-(b)>0$, 我们不妨设 $f'_+(a)>0, f'_-(b)>0$

我们有:

$$\begin{cases} f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0 \\ f'_-(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(a,a+\sigma_1), f(x)>f(a)=0 \\ x\in(b-\sigma_2,b), f(x)<f(b)=0 \end{cases}$$

$$\exists c\in(a,b),\ s.t. f(c)=f(a)=f(b)=0$$

我们对 $G(x)$ 在区间 (a,c) 和区间 (c,b) 上使用罗尔定理得到:

$$\begin{cases} \exists x_1\in(a,c),\ s.t. G'(x_1)=e^{x_1}(f(x_1)+f'(x_1))=0\Rightarrow \exists x_1, s.t. F(x_1)=0 \\ \exists x_2\in(c,b),\ s.t. G'(x_2)=e^{x_2}(f(x_2)+f'(x_2))=0\Rightarrow \exists x_2, s.t. F(x_2)=0 \end{cases}$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (x_1,x_2) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(x_1,x_2),\ s.t. F'(\xi)=e^{-\xi}[f''(\xi)-f(\xi)]=0\Rightarrow f''(\xi)=f(\xi)$$

综上所述,$\exists\xi\in(a,b)$,$s.t. f''(\xi)=f(\xi)$

命题 5.9.18

设 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 二阶可导,$f''(x)\neq f(x)$, 证明: $\exists\xi\in(0,2\pi)$,$s.t. \tan\xi=\dfrac{2f'(\xi)}{f(\xi)-f''(\xi)}$ ♠

解

我们构造辅助函数: $F(x)=f(x)\sin x$

我们有: $F(0)=F(\pi)=F(2\pi)=0$

我们对 $F(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 和区间 $(\pi,2\pi)$ 上使用罗尔定理得到:

$$\begin{cases} \exists x_1\in(0,\pi),\ s.t. F'(x_1)=f'(x_1)\sin x_1+f(x_1)\cos x_1=0 \\ \exists x_2\in(\pi,2\pi),\ s.t. F'(x_2)=f'(x_2)\sin x_2+f(x_2)\cos x_2=0 \end{cases}$$

我们对 $F'(x)$ 在区间 (x_1,x_2) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(x_1,x_2),\ s.t. F''(\xi)=f''(\xi)\sin\xi+f'(\xi)\cos\xi+f'(\xi)\cos\xi-f(\xi)\sin\xi$$

$$\sin\xi(f(\xi)-f''(\xi))=2f'(\xi)\cos\xi$$

当 $\xi=\frac{\pi}{2}$ 或者 $\xi=\frac{3\pi}{2}$ 时, 此时 $f(\xi)=f''(\xi)$, 与题干矛盾.

综上所述,$\exists\xi\in(0,2\pi)$,$s.t. \tan\xi=\dfrac{2f'(\xi)}{f(\xi)-f''(\xi)}$

命题 5.9.19

设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 二阶可导, 证明: $\forall a>0, \exists c\in(2a,4a), s.t. f(4a)-2f(3a)+f(2a)=a^2f''(c)$

解

我们构造辅助函数 $F(x)=f(x+a)-f(x)$, 原命题转化为:

$$\exists c\in(2a,4a),\ s.t.F(3a)-F(2a)=a^2f''(c)$$

我们由拉格朗日中值定理得到:

$$\exists \xi\in(2a,3a),\ s.t.F(3a)-F(2a)=aF'(\xi)=a[f'(\xi+a)-f'(\xi)]$$

由拉格朗日中值定理得到:

$$\exists c\in(\xi,\xi+a)\subset(3a,4a),\ s.t.f'(\xi+a)-f'(\xi)=af''(c)$$

我们得到:

$$\forall a>0, \exists c\in(2a,4a),\ s.t.f(4a)-2f(3a)+f(2a)=a^2f''(c)$$

5.9.5 复合函数构造问题

命题 5.9.20

设 $f(x)$ 在 $[\frac{3}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi]$ 可导,$f(\frac{3}{4}\pi)=f(\frac{7}{4}\pi)=0$, 证明: $\exists\xi\in(\frac{3}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi), s.t. f'(\xi)+f(\xi)=\cos\xi$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=e^x[f(x)-\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x]$

$$F(\frac{3\pi}{4})=F(\frac{7\pi}{4})=0$$

我们对 $F(x)$ 在区间 $(\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4})$ 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}),\ s.t.F'(\xi)=e^{\xi}[f'(\xi)+f(\xi)-\cos\xi]=0$$

综上所述,$\exists\xi\in(\frac{3}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi), s.t. f'(\xi)+f(\xi)=\cos\xi$

命题 5.9.21

设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 可导, 证明: $\exists\xi\in(1,2), s.t. \xi f'(\xi)-f(\xi)=f(2)-2f(1)$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=\dfrac{f(x)+f(2)-2f(1)}{x}$

我们得到: $F(1)=F(2)=f(2)-f(1)$

$$F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)-f(2)+2f(1)}{x^2}$$

我们对 $F(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(0,1),\ s.t.F'(\xi)=0\Rightarrow\xi f'(\xi)-f(\xi)-f(2)+2f(1)=0$$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi\in(1,2)$,$s.t.\xi f'(\xi)-f(\xi)=f(2)-2f(1)$

注: 柯西中值定理

我们构造辅助函数: $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $G(x)=\dfrac{1}{x}$

$$F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2},\ G'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

我们对 $F(x),G(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上使用柯西中值定理得到:

$$\exists\xi\in(1,2),\ s.t.\frac{F(2)-F(1)}{G(2)-G(1)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

又因为:

$$\begin{cases}\dfrac{F(2)-F(1)}{G(2)-G(1)}=2f(1)-f(2)\\ \dfrac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=f(\xi)-\xi f'(\xi)\end{cases}\Rightarrow\exists\xi\in(1,2),s.t.\xi f'(\xi)-f(\xi)=f(2)-2f(1)$$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi\in(1,2)$,$s.t.\xi f'(\xi)-f(\xi)=f(2)-2f(1)$

命题 5.9.22

设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,(a,b) 可导,$g'(x)\neq 0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$,$s.t.\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=[f(x)-f(a)][g(x)-g(b)]$

我们有: $F(a)=F(b)=0$

$$F'(x)=f'(x)[g(x)-g(b)]+g'(x)[f(x)-f(a)]$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a,b) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.F'(\xi)=f'(\xi)[g(\xi)-g(b)]+g'(\xi)[f(\xi)-f(a)]\Rightarrow\frac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi\in(a,b),s.t.\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

命题 5.9.23

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导,$f(0)=0,\forall x\in(0,1),f(x)>0$, 证明: $\exists\xi\in(0,1),s.t.\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=f(x)f(1-x)$

我们有: $F(0)=F(1)=0$

$$F'(x)=f'(x)f(1-x)-f(x)f'(1-x)$$

我们对 $F(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(0,1),\ s.t.F'(\xi)=f'(\xi)f(1-\xi)-f(\xi)f'(1-\xi)\Rightarrow\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi\in(0,1),s.t.\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

命题 5.9.24

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导,$f(0)=0,\forall x\in(0,1),f(x)>0$, 证明: $\forall a>0,\exists\xi\in(0,1),s.t.a\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=f^a(x)f(1-x)$

我们有: $F(0)=F(1)=0$

$$F'(x)=af^{a-1}(x)f'(x)f(1-x)-f^a(x)f'(1-x)=f^{a-1}(x)[af'(x)f(1-x)-f(x)f'(1-x)]$$

我们对 $F(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(0,1),\ s.t.F'(\xi)=f^{a-1}(\xi)[af'(\xi)f(1-\xi)-f(\xi)f'(1-\xi)]=0$$

由因为 $\forall x\in(0,1),\ f(x)>0\Rightarrow f^{a-1}(\xi)>0$

我们得到:

$$af'(\xi)f(1-\xi)-f(\xi)f'(1-\xi)=0\Rightarrow a\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$

综上所述, 我们得到: $\forall a>0,\exists\xi\in(0,1),s.t.a\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

命题 5.9.25

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导,$f(a)=0,\forall x\in(a,b],f(x)>0$, 证明: $\forall m,n>0$, $\exists\lambda,\mu\in(0,1)$,$s.t.\dfrac{f'(\lambda)}{f(\lambda)}=\dfrac{mf'(\mu)}{nf(\mu)}$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=f^m(x)f^n(a+b-x)$

我们得到: $F(a)=F(b)=0$

$$F'(x)=mf^{m-1}(x)f'(x)f^n(a+b-x)-nf^m(x)f^{n-1}(a+b-x)$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a,b) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.F'(\xi)=0\Rightarrow mf'(\xi)f(a+b-\xi)=nf(\xi)f'(a+b-\xi)$$

我们得到: $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.\dfrac{mf'(\xi)}{nf(\xi)}=\dfrac{f'(a+b-\xi)}{f(a+b-\xi)}$

我们取 $\lambda=a+b-\xi$, $\mu=\xi$, 我们可以得到:

$$\forall m,n>0,\ \exists\lambda,\mu\in(0,1),\ s.t.\frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)}=\frac{mf'(\mu)}{nf(\mu)}$$

命题 5.9.26

设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导,$g''(x)\neq0,g(a)=g(b)=f(a)=f(b)=0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$,$s.t.\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=f'(x)g(x)-f(x)g'(x)$

我们有: $F(a)=F(b)=0$

$$F'(x)=f''(x)g(x)+f'(x)g'(x)-f'(x)g'(x)-f(x)g''(x)=f''(x)g(x)-f(x)g''(x)$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a,b) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.F'(\xi)=0\Rightarrow f''(\xi)g(\xi)-f(\xi)g''(\xi)=0$$

综上所述,$\exists\xi\in(a,b)$,$s.t.\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

命题 5.9.27

设 $f(x)$ 二阶可导,$f(1)>0,\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$, 证明: $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有两个根.

解

我们构造辅助函数: $F(x)=f(x)f'(x)$

我们有: $F'(x) = f(x)f''(x) + [f'(x)]^2$

我们由 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x} < 0$ 可以得到:

$$\begin{cases} f(0) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0 \\ \exists\xi > 0,\ x \in (0,\xi), f(x) < 0 \end{cases}$$

我们由零点定理可以得到:

$$\exists c \in (0,1),\ s.t. f(c) = 0$$

我们对 $f(x)$ 在区间 $(0,c)$ 上使用罗尔定理可以得到:

$$\exists\eta \in (0,c),\ s.t. f'(\eta) = 0$$

我们可以得到: $F(0) = F(\eta) = F(c) = 0$

我们对 $F(x)$ 在区间 $(0,\eta)$ 和区间 (η,c) 上使用罗尔定理得到:

$$\begin{cases} \exists x_1 \in (0,\eta),\ s.t. F'(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_1)f''(x_1) + [f'(x_1)]^2 = 0 \\ \exists x_2 \in (\eta,c),\ s.t. F'(x_2) = 0 \Rightarrow f(x_2)f''(x_2) + [f'(x_2)]^2 = 0 \end{cases}$$

综上所述, 我们得到 $f(x)f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$ 在 $(0,1)$ 内至少有两个根 $x_1 \in (0,\eta)$; $x_2 \in (\eta,c)$.

命题 5.9.28

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导,$f'(a) = f'(b) = 0,f(x) > 0$, 证明: $\exists\xi \in (a,b),s.t. f(\xi)f''(\xi) - [f'(\xi)]^2 = 0$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

我们有: $F(a) = F(b) = 0$

$$F'(x) = \frac{f''(x)f(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)}$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a,b) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi \in (a,b),\ s.t. F'(\xi) = 0 \Rightarrow f''(\xi)f(\xi) - [f'(\xi)]^2 = 0$$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi \in (a,b),s.t. f(\xi)f''(\xi) - [f'(\xi)]^2 = 0$

命题 5.9.29

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导,$f'(a) = f'(b) = 0,f(x) > 0$, 证明: $\exists\xi \in (a,b),s.t. f(\xi)f''(\xi) - 2[f'(\xi)]^2 = 0$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$

我们有: $F(a)=F(b)=0$

$$F'(x)=\frac{f''(x)f(x)-2[f'(x)]^2}{f^3(x)}$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a,b) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.F'(\xi)=0\Rightarrow f''(\xi)f(\xi)-2[f'(\xi)]^2=0$$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi\in(a,b),s.t.f(\xi)f''(\xi)-2[f'(\xi)]^2=0$

命题 5.9.30

设 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 二阶可导,$|f(x)|<1$,$[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$, 证明: $\exists\xi\in(-2,2)$,$s.t.f''(\xi)+f(\xi)=0$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=f^2(x)+f'^2(x)$

我们有: $F(0)=4$

$$F'(x)=2f(x)f'(x)+2f'(x)f''(x)=2f'(x)[f(x)+f''(x)]$$

我们利用拉格朗日中值定理可以得到:

$$\begin{cases}\exists x_1\in(0,2),\ s.t.f(2)-f(0)=2f'(x_1)\\ \exists x_2\in(-2,0),\ s.t.f(-2)-f(0)=-2f'(x_2)\end{cases}$$

又因为: $|f(x)|<1\Rightarrow -1<f(x)<1\Rightarrow\begin{cases}f(2)-f(0)\in(-2,2)\\ f(-2)-f(0)\in(-2,2)\end{cases}$

我们得到:

$$\begin{cases}|f'(x_1)|<1\\ |f'(x_2)|<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F(x_1)=f^2(x_1)+f'^2(x_1)<2\\ F(x_2)=f^2(x_2)+f'^2(x_2)<2\end{cases}$$

$F(0)=4>F(x_1)$,$F(0)=4>F(x_2)$, 我们知道 $F(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 最大值一定在区间内部取得, 我们不妨假设 $F(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得最大值, 我们由费马定理可以得到:

$$F'(x_0)=0\Rightarrow f'(x_0)[f'(x_0)+f(x_0)]=0$$

(i). 假设 $f'(x_0)=0$,$F(x_0)=f^2(x_0)<1$, 这与 $F(x_0)=M$ 是最大值 $M\geq 4$ 矛盾!!!

(ii). $f'(x_0)\neq 0\Rightarrow f'(x_0)+f(x_0)=0$

我们取 $\xi=x_0$, 我们得到: $\exists\xi\in(-2,2)$, $s.t.f''(\xi)+f(\xi)=0$

5.9.6 拉格朗日中值定理 & 柯西中值定理

命题 5.9.31

设 $a, b > 0$, 证明: $\exists \xi \in (a,b).\ s.t. ae^b - be^a = (1-\xi)e^{\xi}(a-b)$

解

我们构造辅助函数: $f(x) = \dfrac{e^x}{x},\ g(x) = \dfrac{1}{x}$

我们对 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 (a,b) 上使用柯西中值定理得到:

$$\exists \xi \in (a,b),\ s.t. \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

我们有:

$$\begin{cases} \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{ae^b - be^a}{a-b} \\ \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{\frac{e^{\xi}-\xi e^{\xi}}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}} = (1-\xi)e^{\xi} \end{cases}$$

综上所述, 我们得到: $\exists \xi \in (a,b).\ s.t. ae^b - be^a = (1-\xi)e^{\xi}(a-b)$

命题 5.9.32

设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 可导, 证明: $\exists \xi \in (1,2), s.t. f(2) - f(1) = \frac{1}{2}\xi^2 f'(\xi)$

解

我们构造辅助函数: $g(x) = \dfrac{1}{x}$

我们对 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上使用柯西中值定理得到:

$$\exists \xi \in (1,2),\ s.t. \frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

我们有:

$$\begin{cases} \dfrac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)} = -2[f(2)-f(1)] \\ \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = -\xi^2 f'(\xi) \end{cases} \Rightarrow f(2) - f(1) = \frac{1}{2}\xi^2 f'(\xi)$$

综上所述, 我们可以得到: $\exists \xi \in (1,2), s.t. f(2) - f(1) = \frac{1}{2}\xi^2 f'(\xi)$

命题 5.9.33

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,(a,b) 可导, 证明: $\exists \xi \in (1,2), s.t. 2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi)$

解

我们构造辅助函数: $g(x) = x^2$

我们对 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上使用柯西中值定理得到:

$$\exists \xi \in (1,2),\ s.t. \frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

我们有:

$$\begin{cases} \dfrac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2} \\ \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f'(\xi)}{2\xi} \end{cases} \Rightarrow 2\xi[f(b)-f(a)] = (b^2-a^2)f'(\xi)$$

综上所述, 我们可以得到: $\exists \xi \in (1,2)$,$s.t. 2\xi[f(b)-f(a)] = (b^2-a^2)f'(\xi)$

5.9.7 双中值问题

命题 5.9.34

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导,$f(a)=f(b)=1$, 证明: $\exists \xi_1,\xi_2 \in (a,b)$,$s.t. e^{\xi_2-\xi_1}[f'(\xi_2)+f(\xi_2)] = 1$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = e^x f(x)$

$$F'(x) = e^x[f'(x)+f(x)]$$

我们由拉格朗日中值定理得到:

$$\exists \xi \in (a,b),\ s.t. F(b)-F(a) = F'(\xi)(b-a) \Rightarrow \frac{e^b f(b)-e^a f(a)}{b-a} = e^{\xi}[f(\xi)+f'(\xi)]$$

我们有: $f(a)=f(b)=1 \Rightarrow \dfrac{e^b f(b)-e^a f(a)}{b-a} = \dfrac{e^b-e^a}{b-a}$

我们构造辅助函数: $g(x) = e^x$

我们由拉格朗日中值定理得到:

$$\exists \eta \in (a,b),\ s.t. \frac{e^b-e^a}{b-a} = g'(\eta) = e^{\eta}$$

我们可以得到:

$$e^{\eta} = e^{\xi}[f(\xi)+f'(\xi)]$$

我们取 $\xi_1=\eta$, $\xi_2=\xi$, 我们得到: $\exists \xi_1,\xi_2 \in (a,b)$,$s.t. e^{\xi_2-\xi_1}[f'(\xi_2)+f(\xi_2)] = 1$

注

我们如果取 $\xi_1=\xi_2$, 原命题直接转化为: $\exists \xi \in (a,b),\ s.t. f'(x)+f(x)-1=0$

我们构造辅助函数: $F(x) = e^x[f(x)-1]$,$F(a)=F(b)=0$

$$F'(x) = e^x[f'(x)+f(x)-1]$$

我们在区间 $[a,b]$ 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.F'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)+f(\xi)-1=0$$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi_1=\xi_2\in(a,b),s.t.e^{\xi_2-\xi_1}[f'(\xi_2)+f(\xi_2)]=1$

命题 5.9.35

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,(a,b) 可导, 且 $a>0$, 证明: $\exists\xi,\eta\in(a,b),s.t.f'(\xi)=(a+b)\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$

解

我们构造辅助函数: $g(x)=x^2$

我们对 $f(x),g(x)$ 在区间 (a,b) 上使用柯西中值定理得到:

$$\exists\eta\in(a,b),\ s.t.\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}\Rightarrow\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=(a+b)\frac{f'(\eta)}{2\eta}$$

我们对 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上使用拉格朗日中值定理得到:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi,\eta\in(a,b),s.t.f'(\xi)=(a+b)\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$

注

我们令 $\xi=\eta$, 原命题转化为: $\exists\sigma,\ s.t.f'(\sigma)[1-\dfrac{a+b}{2\sigma}]=0$

我们取 $\sigma=\dfrac{a+b}{2}$, 原命题得证明

命题 5.9.36

设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 连续,$(1,2)$ 可导, 且 $f'(x)\neq 0$, 证明: $\exists\xi,\eta,\gamma\in(1,2),s.t.\dfrac{f'(\gamma)}{f'(\xi)}=\dfrac{\xi}{\eta}$

解

我们构造辅助函数: $g(x)=\ln x$

我们对 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上使用柯西中值定理得到:

$$\exists\xi\in(1,2),\ s.t.\frac{f(2)-f(1)}{\ln 2-\ln 1}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}=\xi f'(\xi)$$

我们对 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上使用拉格朗日中值定理得到:

$$\exists\gamma\in(1,2),\ s.t.\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f'(\gamma)$$

我们得到: $\dfrac{f'(\gamma)}{f'(\xi)}=\xi\ln 2$

综上所述, 我们得到: 取 $\xi,\gamma\in(1,2),\eta=\dfrac{1}{\ln 2}\in(1,2),s.t.\dfrac{f'(\gamma)}{f'(\xi)}=\dfrac{\xi}{\eta}$

注

我们取 $\xi=\gamma=\eta\in(a,b),\ s.t.\dfrac{f'(\gamma)}{f'(\xi)}=\dfrac{\xi}{\eta}$ 恒成立

命题 5.9.37

设 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 二阶连续可导,$f'(0)=0$, 证明: $\exists\xi,\eta,\omega\in(0,\frac{\pi}{2}),s.t.f'(\xi)=\frac{\pi}{2}\eta\cdot\sin 2\xi\cdot f''(\omega)$

解

我们将要证的式子进行一些变形:

$$\frac{f'(\xi)}{\sin 2\xi}=\frac{\pi}{2}\eta f''(\omega)$$

后面的部分我们对 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上使用拉格朗日中值定理得到:

$$\exists\eta\in(0,\frac{\pi}{2}),\ s.t.f(\frac{\pi}{2})-f(0)=\frac{\pi}{2}f'(\eta)$$

又因为 $f'(0)=0$, 我们可以得到:

$$\exists\omega\in(0,\eta),\ s.t.f'(\eta)=f'(\eta)-f'(0)=\eta f''(\omega)$$

原命题转化为证明: $\exists\xi\in(0,\dfrac{\pi}{2}),\ s.t.\dfrac{f'(\xi)}{\sin 2\xi}=f(\frac{\pi}{2})-f(0)$

我们构造辅助函数: $g(x)=-\dfrac{1}{2}\cos 2x$

我们对 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上使用柯西中值定理得到:

$$\exists\xi\in(0,\frac{\pi}{2}),\ s.t.\frac{f(\frac{\pi}{2})-f(0)}{g(\frac{\pi}{2})-g(0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\Rightarrow f(\frac{\pi}{2})-f(0)=\frac{f'(\xi)}{\sin 2\xi}$$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi,\eta,\omega\in(0,\frac{\pi}{2}),s.t.f'(\xi)=\frac{\pi}{2}\eta\cdot\sin 2\xi\cdot f''(\omega)$

命题 5.9.38

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续,$(0,1)$ 可导,$f(0)=0,\ f(1)=1$, 证明:

(1).$\exists c\in(0,1),\ s.t.f(c)=1-c$

(2).$\exists\xi,\eta\in(0,1),(\xi\neq\eta)\ s.t.f'(\xi)f'(\eta)=1$

解

(1). 我们构造辅助函数: $F(x)=f(x)+x-1, F(0)=f(0)-1=-1<0,\ F(1)=F(1)=1>0$ $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上连续, 我们由零点定理可以得到:

$$\exists c\in(0,1),\ s.t. F(c)=0\Rightarrow f(c)=1-c$$

(2). 我们分别对 $F(x)$ 在区间 $(0,c)$ 和区间 $(c,1)$ 上使用拉格朗日中值定理得到:

$$\begin{cases}\exists x_1\in(0,c),\ s.t.\dfrac{F(c)-F(0)}{c}=F'(x_1)\Rightarrow\dfrac{1}{c}=f'(x_1)+1\\ \exists x_2\in(c,1),\ s.t.\dfrac{F(1)-F(c)}{c}=F'(x_2)\Rightarrow\dfrac{1}{1-c}=f'(x_2)+1\end{cases}$$

我们取 $\xi=x_1\in(0,c),\ \eta=x_2\in(c,1),\ s.t. f'(\xi)f'(\eta)=\dfrac{1-c}{c}\dfrac{c}{1-c}=1$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi,\eta\in(0,1),(\xi\neq\eta)\ s.t. f'(\xi)f'(\eta)=1$

命题 5.9.39

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续,$(0,1)$ 可导,$f(0)=0,\ f(1)=1$, 证明:

(1).$\exists c\in(0,1),\ s.t. f(c)=\frac{1}{2}$

(2).$\exists\xi,\eta\in(0,1),(\xi\neq\eta)\ s.t.\dfrac{1}{f'(\xi)}+\dfrac{1}{f'(\eta)}=2$

解

(1). 我们由 $f(0)=0,\ f(1)=1$, 我们由介值定理得到:

$$\exists c\in(0,1),\ s.t. f(c)=\frac{1}{2}$$

(2). 我们分别对 $f(x)$ 在区间 $(0,c)$ 和区间 $(c,1)$ 上使用拉格朗日中值定理得到:

$$\begin{cases}\exists x_1\in(0,c),\ s.t.\dfrac{f(c)-f(0)}{c}=f'(x_1)\Rightarrow\dfrac{1}{2c}=f'(x_1)\\ \exists x_2\in(\dfrac{1}{2},1),\ s.t.\dfrac{f(1)-f(c)}{1-c}=f'(x_2)\Rightarrow\dfrac{1}{2-2c}=f'(x_2)\end{cases}$$

我们取 $\xi=x_1\in(0,c),\ \eta=x_2\in(c,1),\ s.t.\dfrac{1}{f'(\xi)}+\dfrac{1}{f'(\eta)}=2c+2-2c=2$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi,\eta\in(0,1),(\xi\neq\eta)\ s.t.\dfrac{1}{f'(\xi)}+\dfrac{1}{f'(\eta)}=2$

命题 5.9.40

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导,$f(0)=0,\ f(1)=1,\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为正数, 证明: 存在互不相等的 $\xi_i\in(0,1),\ s.t.\dfrac{\lambda_1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{\lambda_2}{f'(\xi_2)}+\cdots+\dfrac{\lambda_n}{f'(\xi_n)}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$

解

由 $f(0)=0,\ f(1)=1$, 我们由介值定理可以得到: $\exists x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\in(0,1)$ 满足:

$$\begin{cases} f(x_1)=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} \\ f(x_2)=\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} \\ \cdots\cdots \\ f(x_{n-1})=\dfrac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{n-1}}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} \end{cases}$$

在区间 $(0,x_1),(x_1,x_2),\cdots,(x_{n-1},1)$ 上使用拉格朗日中值定理得到:

$$\frac{x_{i+1}-x_i}{f(x_{i+1})-f(x_i)}=\frac{1}{f'(\xi_i)}$$

$$\begin{cases} \exists\xi_1\in(0,x_1),\ s.t. x_1-0=\dfrac{\lambda_1}{f'(\xi_1)(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)} \\ \exists\xi_1\in(x_1,x_2),\ s.t. x_2-x_1=\dfrac{\lambda_2}{f'(\xi_2)(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)} \\ \cdots\cdots \\ \exists\xi_1\in(x_{n-1},1),\ s.t. 1-x_{n-1}=\dfrac{\lambda_n}{f'(\xi_n)(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)} \end{cases}$$

上面 n 个式子相加得到:

$$Left=1=\frac{\lambda_1}{f'(\xi_1)(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}+\frac{\lambda_2}{f'(\xi_2)(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}+\cdots+\frac{\lambda_n}{f'(\xi_n)(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}=Right$$

两边同时乘以 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$, 我们得到原命题.

综上所述, 我们得到: 存在互不相等的 $\xi_i\in(0,1)$, $s.t.\dfrac{\lambda_1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{\lambda_2}{f'(\xi_2)}+\cdots+\dfrac{\lambda_n}{f'(\xi_n)}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$

命题 5.9.41

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导,$f(0)=0$, $f(1)=1$, 证明: 存在互不相等的 $\xi_i\in(0,1)$, $s.t.\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{f'(\xi_i)}=n$

解

我们令 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$, 即可证明.

由 $f(0)=0,\ f(1)=1$, 我们由介值定理可以得到: $\exists x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\in(0,1)$ 满足:

$$\begin{cases} f(x_1)=\frac{1}{n} \\ f(x_2)=\frac{2}{n} \\ \cdots\cdots \\ f(x_{n-1})=\frac{n-1}{n} \end{cases}$$

在区间 $(0,x_1),(x_1,x_2),\cdots,(x_{n-1},1)$ 上使用拉格朗日中值定理得到:

$$\frac{x_{i+1}-x_i}{f(x_{i+1})-f(x_i)}=\frac{1}{f'(\xi_i)}$$

$$\begin{cases} \exists\xi_1 \in (0,x_1),\ s.t. x_1 - 0 = \dfrac{1}{nf'(\xi_1)} \\ \exists\xi_1 \in (x_1,x_2),\ s.t. x_2 - x_1 = \dfrac{1}{nf'(\xi_2)} \\ \cdots\cdots \\ \exists\xi_1 \in (x_{n-1},1),\ s.t. 1 - x_{n-1} = \dfrac{1}{nf'(\xi_n)} \end{cases}$$

上面 n 个式子相加得到:

$$Left = 1 = \frac{1}{nf'(\xi_1)} + \frac{1}{nf'(\xi_2)} + \cdots + \frac{1}{nf'(\xi_n)} = Right$$

两边同时乘以 n, 我们得到原命题

综上所述, 我们得到: 存在互不相等的 $\xi_i \in (0,1)$, $s.t. \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{f'(\xi_i)} = n$

命题 5.9.42

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导,$f(0)=0$, $f(1)=1$, 证明: $\xi \neq \eta \in (0,1)$, $s.t. \dfrac{a}{f'(\xi)} + \dfrac{b}{f'(\eta)} = a+b$

解

由 $f(0)=0$, $f(1)=1$, 我们由介值定理可以得到: $\exists c \in (0,1)$ 满足:

$$f(c) = \frac{a}{a+b}$$

在区间 $(0,c),(c,1)$ 上使用拉格朗日中值定理得到:

$$\begin{cases} \exists\xi \in (0,c),\ s.t. c - 0 = \dfrac{a}{f'(\xi)(a+b)} \\ \exists\eta \in (c,1),\ s.t. 1 - c = \dfrac{b}{f'(\eta)(a+b)} \end{cases}$$

上面两个式子相加得到: $\dfrac{a}{f'(\xi)(a+b)} + \dfrac{b}{f'(\eta)(a+b)} = 1$

综上所述, 我们得到: $\xi \neq \eta \in (0,1)$, $s.t. \dfrac{a}{f'(\xi)} + \dfrac{b}{f'(\eta)} = a+b$

命题 5.9.43

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导,$f(0)=0$, $f(1)=\frac{1}{4}$, 证明: $\xi \neq \eta \in (0,1)$, $s.t. f'(\xi)+f'(\eta) = \eta - \xi$

解

我们将原命题进行转换:

$$\xi \neq \eta \in (0,1),\ s.t. [f'(\xi)+\xi] + [f'(\eta)-\eta] = 0$$

我们构造两个辅助函数: $g(x) = f(x) + \dfrac{1}{2}x^2, h(x) = f(x) - \dfrac{1}{2}x^2$

我们在区间 $(0,c)$ 上对 $g(x)$ 用拉格朗日中值定理, 在区间 $(c,1)$ 上对 $h(x)$ 用拉格朗日中

值定理:

$$\begin{cases} \exists \xi \in (0,c),\ s.t.\dfrac{g(c)-g(0)}{c} = g'(\xi) \Rightarrow \dfrac{f(c)+\frac{c^2}{2}}{c} = f'(\xi)+\xi \\ \exists \eta \in (c,1),\ s.t.\dfrac{h(1)-h(c)}{1-c} = h'(\eta) \Rightarrow \dfrac{\frac{c^2}{2}-f(c)-\frac{1}{4}}{1-c} = f'(\eta)-\eta \end{cases}$$

我们令 $c=\dfrac{1}{2}$, 上面两式相加得到:

$$f'(\xi)+\xi+f'(\eta)-\eta=0$$

综上所述, 我们得到: $\xi \in (0,\frac{1}{2}),\eta \in (\frac{1}{2},1),\ s.t.f'(\xi)+f'(\eta)=\eta-\xi$

命题 5.9.44

设 $f(x) \in C[0,1],\int_0^1 f(x)dx \neq 0$, 证明: 存在互异的三个数 $\xi_1,\xi_2,\xi_3 \in [0,1]$, 满足下列不等式:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)dx &= \left[\frac{1}{1+\xi_1^2}\int_0^{\xi_1} f(x)dx + f(\xi_1)\arctan\xi_1\right]\xi_3 \\ &= \left[\frac{1}{1+\xi_2^2}\int_0^{\xi_2} f(x)dx + f(\xi_2)\arctan\xi_2\right](1-\xi_3) \end{aligned}$$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=\arctan x\int_0^x f(t)dt$, $F(0)=0,\ F(1)=\frac{\pi}{4}\int_0^1 f(x)dx$

$$F'(x)=\frac{1}{1+x^2}\int_0^x f(t)dt+f(x)\arctan x$$

原命题转化为证明:

存在互异的三个数 $\xi_1,\xi_2,\xi_3 \in [0,1],\ s.t.\dfrac{1}{2}F(1)=F'(\xi_1)\xi_3=F'(\xi_2)(1-\xi_3)$

我们不妨设存在 $c \in (0,1)$, 我们分别在 $(0,c)$ 和 $(c,1)$ 上对 $F(x)$ 应用拉格朗日中值定理得到:

$$\begin{cases} \exists x_1 \in (0,c),\ s.t.\dfrac{F(c)-F(0)}{c} = F'(x_1) \\ \exists x_2 \in (c,1),\ s.t.\dfrac{F(1)-F(c)}{1-c} = F'(x_2) \end{cases}$$

我们令 $F(c)=\dfrac{1}{2}F(c) \in (0,F(1)),(F(1)>0),\xi_3=c \in (0,1),\xi_1 \in (0,\xi_3),\xi_2 \in (\xi_3,1)$, 我们可以得到:

$$\frac{1}{2}F(1)=F'(\xi_1)\xi_3=F'(\xi_2)(1-\xi_3)$$

综上所述, 我们得到: 存在互异的三个数 $\xi_1,\xi_2,\xi_3 \in [0,1]$, 满足下列不等式:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)dx &= \left[\frac{1}{1+\xi_1^2}\int_0^{\xi_1} f(x)dx + f(\xi_1)\arctan\xi_1\right]\xi_3 \\ &= \left[\frac{1}{1+\xi_2^2}\int_0^{\xi_2} f(x)dx + f(\xi_2)\arctan\xi_2\right](1-\xi_3) \end{aligned}$$

命题 5.9.45

设 $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导,$\int_0^1 f(x)dx = 3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx$, 证明: 存在两个不同的点 $\xi,\eta \in (0,1)$,$s.t.f'(\xi) = g'(\xi)[f(\eta) - f(\xi)]$

解

我们由 $\int_0^1 f(x)dx = 3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx \Rightarrow \int_0^{\frac{2}{3}} f(x)dx = 2\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx$
我们由积分中值定理得到:

$$\begin{cases} \exists x_1 \in (0,\frac{2}{3}),\ s.t.\int_0^{\frac{2}{3}} f(x)dx = \frac{2}{3}f(x_1) \\ \exists x_2 \in (\frac{2}{3},1),\ s.t.\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx = \frac{1}{3}f(x_2) \end{cases} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

我们构造辅助函数: $F(x) = [f(x) - f(x_1)]e^{g(x)}$, $F(x_1) = F(x_2) = 0$

$$F'(x) = e^{g(x)}\{f'(x) + g'(x)[f(x) - f(x_1)]\}$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (x_1,x_2) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi \in (x_1,x_2),\ s.t.F'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) + g'(\xi)[f(\xi) - f(x_1)]$$

我们令 $\eta = x_1$, 我们得到: $\exists\xi \in (x_1,x_2)$, $\eta = x_1$, $s.t.f'(\xi) = g'(\xi)[f(\eta) - f(\xi)]$
综上所述, 我们得到: $\exists\xi,\eta \in (0,1)$,$s.t.f'(\xi) = g'(\xi)[f(\eta) - f(\xi)]$

5.9.8 泰勒公式

命题 5.9.46

设 $f(x)$ 二阶连续可导,$f''(x) \neq 0$, 若 $f(x+h) = f(x) + f'(x+\theta h)h(0 < \theta < 1)$, 证明: $\lim\limits_{h\to 0}\theta = \dfrac{1}{2}$

解

我们利用泰勒公式将 $f(x+h)$ 展开:

$$\begin{cases} f(x+h) = f(x) + f'(x+\theta h)h(0 < \theta < 1) \\ f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\eta)}{2!}h^2,\ \eta \in (x,x+h)\ or\ \eta \in (x+h,x) \end{cases} \Rightarrow f'(x+\theta h) - f'(x) = \frac{f''(\eta)}{2!}h$$

我们对 $f'(x)$ 在区间 $(x,x+\theta h)$ 上使用拉格朗日中值定理得到:

$$\exists\xi \in (x,x+\theta h),\ s.t f'(x+\theta h) - f'(x) = \theta h f''(\xi) \Rightarrow \theta = \frac{f''(\eta)}{2f''(\xi)}$$

$$\lim_{h\to 0}\theta = \lim_{h\to 0}\frac{f''(\eta)}{2f''(\xi)} = \frac{1}{2}$$

综上所述, 我们得到: $\lim\limits_{h\to 0}\theta = \dfrac{1}{2}$

命题 5.9.47

设 $f(x)$ 有 $n+1$ 阶导数, 若 $f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\dfrac{f''(a)}{2}h^2+\cdots+\dfrac{f^n(a+\theta h)}{n!}h^n(0<\theta<1)$, 且 $f^{(n+1)}(a)\neq 0$.

证明: $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$

解

我们利用泰勒公式将 $f(a+h)$ 展开:

$$\begin{cases} f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\dfrac{f''(a)}{2}h^2+\cdots+\dfrac{f^n(a+\theta h)}{n!}h^n(0<\theta<1) \\ f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\dfrac{f''(a)}{2}h^2+\cdots+\dfrac{f^n(a)}{n!}h^n+\dfrac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1},\ \xi\in(a,a+h)\ or\ \xi\in(a+h,a) \end{cases}$$

我们由上面的两个式子可以得到:

$$\frac{f^n(a+\theta h)}{n!}h^n=\frac{f^n(a)}{n!}h^n+\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}\Rightarrow f^{(n)}(a+\theta h)-f^{(n)}(a)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1}h$$

我们对 $f^{(n)}(x)$ 在区间 $(a,a+h)$ 上使用拉格朗日中值定理得到:

$$\exists\eta\in(a,a+h),\ s.t.f^{(n)}(a+\theta h)-f^{(n)}(a)=\theta hf^{(n+1)}(\eta)\Rightarrow\theta=\frac{1}{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{f^{(n+1)}(\eta)}$$

$$\lim_{h\to 0}\theta=\lim_{h\to 0}\frac{1}{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{f^{(n+1)}(\eta)}=\frac{1}{n+1}$$

命题 5.9.48

设 $f(x)$ 有 n 阶连续导数,$f^{(k)}(x_0)=0(k=2,3,\cdots,n-1)$,$f^{(n)}(x_0)\neq 0$,$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0+\theta h)$, 其中 $\theta\in(0,1)$, 证明: $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$

解

我们利用泰勒公式将 $f(x+h)$ 展开, 得到:

$$\begin{cases} f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0+\theta h) \\ f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\dfrac{f''(x_0)}{2}h^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1},\ \xi\in(x_0,x_0+h)\ or\ \xi\in(x_0+h, \end{cases}$$

由于 $f^{(k)}(x_0)=0(k=2,3,\cdots,n-1)$, 我们得到:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n\Rightarrow f'(x_0+\theta h)-f'(x_0)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^{n-1}$$

我们利用泰勒公式将 $f'(x_0+\theta h)$ 展开:

$$f'(x_0+\theta h)=f'(x_0)+f''(x_0)\theta h+\frac{f^{(3)}(x_0)}{2!}(\theta h)^2+\cdots+\frac{f^{n-1}(x_0)}{(n-2)!}(\theta h)^{n-2}+\frac{f^{(n)}(\eta)}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1},\eta\in(x_0,x_0+\theta h)\ or\ \eta\in($$

我们利用: $f^{(k)}(x_0)=0(k=2,3,\cdots,n-1)$, 我们得到:

$$f'(x_0+\theta h)=f'(x_0)+\frac{f^{(n)}(\eta)}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1}$$

我们得到:

$$\theta^{n-1}=\frac{f^{(n)}\xi}{nf^{(n)}(\eta)}\Rightarrow\lim_{h\to0}\theta^{n-1}=\frac{1}{n}$$

综上所述, 我们得到: $\lim_{h\to0}\theta=\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$

命题 5.9.49

设 $f(x)=\arctan x, x\in[0,a]$, 若 $f(a)-f(0)=af'(\theta a), \theta\in(0,1)$, 求 $\lim_{a\to0}\theta^2$

解

我们可知:

$$f(a)=\arctan a,\ f(0)=0,\ f'(x)=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow f'(a\theta)=\frac{1}{1+\theta^2a^2}$$

$$f(a)-f(0)=af'(\theta a)\Rightarrow\frac{a}{1+\theta^2a^2}=\arctan a\Rightarrow\theta^2=\frac{a-\arctan a}{a^2\arctan a}$$

原极限等价于:

$$I=\lim_{a\to0}\theta^2=\lim_{a\to0}\frac{a-\arctan a}{a^2\arctan a}=\frac{1}{3}$$

命题 5.9.50

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的邻域内四阶可导,$|f^{(4)}(x)|\le M(M>0)$, 证明: 对此邻域上任意一个不同于 x_0 的点 a, 我们有

$$\left|f''(x_0)-\frac{f(a)+f(b)-2f(x_0)}{(a-x_0)^2}\right|\le\frac{M}{12}(a-x_0)^2,\ a+b=2x_0$$

解

我们利用泰勒展开公式, 将 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处展开, 得到:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_(0))+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f^{(3)}(x_0)}{6}(x-x_0)^3+\frac{f''(\xi)}{24}(x-x_0)^4,\xi\in(x,x_0)\ or\ \xi\in(x_0,x)$$

我们得到:

$$\begin{cases}f(a)=f(x_0)+f'(x_0)(a-x_(0))+\frac{f''(x_0)}{2}(a-x_0)^2+\frac{f^{(3)}(x_0)}{6}(a-x_0)^3+\frac{f''(\xi_1)}{24}(a-x_0)^4\\ f(b)=f(x_0)+f'(x_0)(b-x_(0))+\frac{f''(x_0)}{2}(b-x_0)^2+\frac{f^{(3)}(x_0)}{6}(b-x_0)^3+\frac{f''(\xi_2)}{24}(b-x_0)^4\end{cases}$$

由于: $a+b=2x_0$, 我们将上面两式相加:

$$f(a)+f(b)-2f(0)=f''(x_0)(a-x_0)^2+\frac{[f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)]}{24}(a-x_0)^4$$

$$\left|f''(x_0)-\frac{f(a)+f(b)-2f(x_0)}{(a-x_0)^2}\right|=\left|\frac{[f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)]}{24}(a-x_0)^2\right|\le\frac{M}{12}(a-x_0)^2$$

综上所述, 我们得到:

$$\left|f''(x_0) - \frac{f(a)+f(b)-2f(x_0)}{(a-x_0)^2}\right| \le \frac{M}{12}(a-x_0)^2,\ a+b=2x_0$$

命题 5.9.51

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 三阶连续可导, 证明:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t. f(b)=f(a)+f'(\frac{a+b}{2})(b-a)+\frac{(b-a)^3}{24}f'''(\xi)$$

解

我们利用泰勒公式, 将 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 处展开, 得到:

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\frac{a+b}{2})}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2+\frac{f^{(3)}(\xi)}{6}(x-\frac{a+b}{2})^3,\xi\in(x,\frac{a+b}{2})$$

我们得到:

$$\begin{cases} f(a)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(\frac{a-b}{2})+\dfrac{f''(\frac{a+b}{2})}{2}(\frac{a-b}{2})^2+\dfrac{f^{(3)}(\xi_1)}{6}(\frac{a-b}{2})^3,\ \xi_1\in(a,\frac{a+b}{2}) \\ f(b)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(\frac{b-a}{2})+\dfrac{f''(\frac{a+b}{2})}{2}(\frac{b-a}{2})^2+\dfrac{f^{(3)}(\xi_2)}{6}(\frac{b-a}{2})^3,\ \xi_2\in(\frac{a+b}{2},b) \end{cases}$$

上面两式相减, 得到:

$$f(b)-f(a)=f'(\frac{a+b}{2})(b-a)+\frac{(b-a)^3}{48}[f^{(3)}(\xi_1)+f^{(3)}(\xi_2)]$$

由介值定理我们得到:

$$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2),\ s.t. f^{(3)}(\xi)=\frac{f^{(3)}(\xi_1)+f^{(3)}(\xi_2)}{2}$$

综上所述, 我们得到:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t. f(b)=f(a)+f'(\frac{a+b}{2})(b-a)+\frac{(b-a)^3}{24}f'''(\xi)$$

常数 K 值法

我们构造辅助函数: $F(x)=f(x)-f(a)-f'(\frac{a+x}{2})(x-a)+k(x-a)^3$

其中 k 是使得 $f(b)-f(a)-f'(\frac{a+b}{2})(b-a)+k(b-a)^3$ 成立的常数.

我们有: $F(a)=F(b)=0$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a,b) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t. F'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=\frac{1}{2}f''(\frac{a+\xi}{2})(\frac{\xi-a}{2})+f'(\frac{a+\xi}{2})+3k(\xi-a)^2$$

我们将 $f(x)$ 在 $x=\frac{\xi+a}{2}$ 处展开:

$$f'(\xi)=f'(\frac{\xi+a}{2})+f''(\frac{\xi+a}{2})(\frac{\xi-a}{2})+\frac{f^{(3)}(\eta)}{2}(\frac{\xi-a}{2})^2$$

我们对比两式,$\exists\xi\in(a,b),\ s.t. f(b)=f(a)+f'(\frac{a+b}{2})(b-a)+\frac{1}{24}f'''(\xi)(b-a)^3$

命题 5.9.52

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶连续可导, 证明:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t. f(a)-2f(\frac{a+b}{2})+f(b)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$$

解

我们利用泰勒公式, 将 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 处展开, 得到:

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\xi)}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2,\ \xi\in(x,\frac{a+b}{2})$$

我们得到:

$$\begin{cases} f(a)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(\frac{a-b}{2})+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}(\frac{a-b}{2})^2,\ \xi_1\in(a,\frac{a+b}{2}) \\ f(b)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(\frac{b-a}{2})+\dfrac{f''(\xi_2)}{2}(\frac{b-a}{2})^2,\ \xi_2\in(\frac{a+b}{2},b) \end{cases}$$

上面两式相加, 得到:

$$f(b)+f(a)=2f(\frac{a+b}{2})+\frac{(b-a)^2}{8}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]$$

由介值定理我们得到:

$$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2),\ s.t. f''(\xi)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$$

综上所述, 我们得到:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t. f(a)-2f(\frac{a+b}{2})+f(b)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$$

常数 K 值法

我们构造辅助函数: $F(x)=f(x)+f(a)-2f(\frac{x+a}{2})-k(x-a)^2$

其中 k 是使 $f(a)-2f(\dfrac{a+b}{2})+f(b)=k(b-a)^2$ 成立的值

我们有: $F(a)=F(b)=0$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a,b) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t. F'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=f'(\frac{\xi+a}{2})+4k(\frac{\xi-a}{2})$$

我们将 $f'(\xi)$ 在 $x=\frac{\xi+a}{2}$ 处泰勒展开得到:

$$\exists\eta,\ s.t. f'(\xi)=f'(\frac{\xi+a}{2})+f''(\eta)(\xi-\frac{\xi+a}{2})$$

我们对比上面两个式子可以得到: $k=\dfrac{f''(\eta)}{4}$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t. f(a)-2f(\dfrac{a+b}{2})+f(b)=\dfrac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$

命题 5.9.53

$f(x)$ 在 $[a,b]$上$n(n\geq 2)$ 阶可导, 满足 $f^{(i)}(a)=f^{(i)}(b)=0(i=1,2,\cdots,n-1)$, 证明:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.|f^{(n)}(\xi)|\geq\frac{2^{n-1}n!}{(b-a)^n}|f(b)-f(a)|$$

解

我们利用泰勒公式将 $f(x)$ 在 $x=a$ 和 $x=b$ 处进行泰勒展开:

$$\begin{cases} f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\dfrac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!}(x-a)^n,\ \xi_1\in(a,x)\\ f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\cdots+\dfrac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!}(x-b)^{n-1}+\dfrac{f^{(n)}(\xi_2)}{n!}(x-b)^n,\ \xi_2\in(x,b)\end{cases}$$

我们令上面两个式子中 $x=\dfrac{a+b}{2}$, 且有 $f^{(i)}(a)=f^{(i)}(b)=0(i=1,2,\cdots,n-1)$, 我们得到:

$$\begin{cases} f(\dfrac{a+b}{2})=f(a)+\dfrac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!}(\frac{b-a}{2})^n\\ f(\dfrac{a+b}{2})=f(b)+\dfrac{f^{(n)}(\xi_2)}{n!}(\frac{a-b}{2})^n\end{cases}\Rightarrow f(b)-f(a)=\frac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!}(\frac{b-a}{2})^n-\frac{f^{(n)}(\xi_2)}{n!}(\frac{a-b}{2})^n$$

我们得到:

$$\frac{2^{n-1}n!|f(b)-f(a)|}{(b-a)^n}=\frac{|(-1)^nf^{(n)}(\xi_2)+f^{(n)}(\xi_1)|}{2}\leq\frac{|f^{(n)}(\xi_2)|+|f^{(n)}(\xi_1)|}{2}$$

我们由介值定理可以得到:

$$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2),\ s.t. f^{(n)}(\xi)=\frac{f^{(n)}(\xi_1)+f^{(n)}(\xi_2)}{2}$$

综上所述, 我们得到:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.|f^{(n)}(\xi)|\geq\frac{2^{n-1}n!}{(b-a)^n}|f(b)-f(a)|$$

命题 5.9.54

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导, 且 $|f(x)|\leq a,\ |f''(x)|\leq b$, 证明: $|f'(x)|\leq 2a+\frac{b}{2}$

解

我们利用泰勒公式将 $f(x)$ 在 x 处展开, 我们可以得到:

$$\begin{cases} f(0) = f(x) + f'(x)(0-x) + f''(\xi_1)(0-x)^2,\ \xi_1 \in (0,x) \\ f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + f''(\xi_2)(1-x)^2,\ \xi_2 \in (x,1) \end{cases}$$

上面两式相减, 我们得到:

$$f(1)-f(0) = f'(x)+f''(\xi_2)(1-x)^2-f''(\xi_1)x^2 \Rightarrow |f'(x)| = |f(1)-f(0)+f''(\xi_1)x^2-f''(\xi_2)(1-x)^2|$$

由绝对值三角不等式可得:

$$|f'(x)| \le |f(1)| + |f()| + |f''(\xi_1)|x^2 + |f''(\xi_2)|(1-x)^2 \le 2a + b[x^2 + (1-x)^2] \le 2a + b$$

综上所述, 我们得到: $|f'(x)| \le 2a + \frac{b}{2}$

命题 5.9.55

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 三阶可导, 且 $f(x)$ 和 $f'''(x)$ 有界, 证明: $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上也有界

解

我们不妨设 $|f(x)| \le a,\ |f'''(x)| \le b$

(1). 当 $x > 1$ 时, 我们将 $f(x)$ 在 x 处泰勒展开:

$$\begin{cases} f(x+1) = f(x) + f'(x) + \dfrac{f''(x)}{2} + \dfrac{f^{(3)}(\xi_1)}{6} \\ f(x-1) = f(x) - f'(x) + \dfrac{f''(x)}{2} - \dfrac{f^{(3)}(\xi_2)}{6} \end{cases}$$

上面两式子相加得到:

$$|f''(x)| = |f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) + \frac{f'''(\xi_1 + f'''(\xi_2))}{6}| \le 4a + \frac{b}{3}$$

(2). $0 < x \le 1$ 时,$|f''(x)| = |f''(x) - f''(0) + f''(0)| \le |xf'''(\xi)| + |f''(0)| \le b + |f''(0)|$

综上所述, 我们得到: $f''(x)$ 有界, 我们记 $|f''(x)| < c$

下面来证明: $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界

(1). 当 $x > 1$ 时, 我们将 $f(x)$ 在 x 处泰勒展开:

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{f''(\xi_1)}{2}$$

$$|f'(x)| = |f(x+1) - f(x) - \frac{f''(\xi_1}{2}| \le 2a + \frac{c}{2}$$

(2). 当 $0 < x \le 1$ 时,$|f'(x)| = |f'(x) - f'(0) + f'(0)| \le |xf''(\eta)| + |f'(0)| \le c + |f'(0)|$

综上所述, 我们得到: $f'(x)$ 有界

命题 5.9.56

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 二阶可导, 记 $M_i = max|f^{(i)}(x)|(i = 0,1,2)$, 证明: $M_1^2 \le 4M_0M_2$

解

我们将 $f(x)$ 在 x 处进行泰勒展开:

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\xi)}{2}h^2$$

我们得到:

$$|f'(x)|=|\frac{f(x+h)}{h}-\frac{f''(\xi)}{2}h|\le|\frac{f(x+h)}{h}|+|\frac{f''(\xi)}{2}h|\Rightarrow M_1\le\frac{2M_0}{h}+\frac{M_2}{2}h$$

我们有: $M_1\le\max\{\frac{2M_0}{h}+\frac{M_2}{2}h\}\Rightarrow M_1\le 2\sqrt{M_0M_2}\Rightarrow M_1^2\le 2M_0M_2$

命题 5.9.57

$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 二阶可导, 记 $M_i=max|f^{(i)}(x)|(i=0,1,2)$, 证明: $M_1^2\le 2M_0M_2$

解

对于 $\forall h>0$, 我们有:

$$\begin{cases} f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\xi_1)}{2}h^2 \\ f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(\xi_2)}{2}h^2 \end{cases}$$

两式相减:

$$f(x+h)-f(x-h)=2f'(x)h+\frac{f''(\xi_1)}{2}h^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}h^2\Rightarrow|f'(x)|=|\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}+\frac{f''(\xi_1)}{4}h-\frac{f''(\xi_1)}{4}h|$$

我们得到:

$$|f'(x)|\le\frac{M_0}{h}+\frac{M_2}{2}h\Rightarrow M_1\le\max\{\frac{M_0}{h}+\frac{M_2}{2}h\}$$

我们由基本不等式得到: $M_1^2\le 2M_0M_2$

5.9.9 广义罗尔定理

命题 5.9.58

1. $f(x)$ 在 (a,b) 内可导, 且 $\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to b^-}f(x)=A$, 证明: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.f'(\xi)=0$
2. $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可导, 且 $f(0)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$, 证明: $\exists\xi\in(0,+\infty),\ s.t.f'(\xi)=0$

3.$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可导, 且 $0\le f(x)\le\frac{x}{1+x^2}$, 证明: $\exists\xi>0,\ s.t.f'(\xi)=\dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$

4.$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可导,$f(0)=1$, 且 $|f(x)|\le e^{-x}$, 证明: $\exists\xi>0,\ s.t.f'(\xi)+e^{-\xi}=0$

解

1. 我们构造辅助函数: $g(x)=\begin{cases} f(x),\ x\in(a,b) \\ A, x=a\ or\ x=b \end{cases}$

我们可以得到 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 我们由罗尔定理可得:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.g'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=0$$

综上所述, 我们得到: $\exists \xi \in (a,b)$, $s.t. f'(\xi) = 0$

2. 我们构造辅助函数: $g(x) = \begin{cases} f(tanx), \ x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ A, \ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$
我们可以得到 $g(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上连续,$(0, \frac{\pi}{2})$ 上可导, 且 $g(0) = g(\frac{\pi}{2}) = A$.
我们对 $g(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上使用罗尔定理可以得到:

$$\exists \eta \in (0, \frac{\pi}{2}),\ s.t. f'(\tan\eta) = 0 \Rightarrow \exists \xi \in (0, +\infty),\ s.t. f'(\xi) = 0$$

综上所述, 我们可以得到: $\exists \xi \in (0, +\infty)$, $s.t. f'(\xi) = 0$

3. 我们构造辅助函数: $g(x) = f(x) - \dfrac{x}{1+x^2}$
我们由: $0 \le f(x) \le \dfrac{x}{1+x^2}$, 由夹逼定理得到:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \end{cases}$$

我们得到: $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, 我们由第一问的结论可以得到:

$$\exists \xi \in (0, +\infty),\ s.t. g'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$$

4. 我们构造辅助函数: $g(x) = f(x) - e^{-x}$

$$g'(x) = f'(x) + e^{-x},\ g(0) = 0$$

我们由夹逼定理: $0 \le |f(x)| \le e^{-x}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

我们得到: $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, 我们由第一问的结论可以得到:

$$\exists \xi \in (0, +\infty),\ s.t. g'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) + e^{-\xi} = 0$$

5.9.10 常数 K 值法

命题 5.9.59

$f(x)$ 在 (a,b) 上三阶可导, 证明:

$$\exists \xi \in (a,b),\ s.t. f(b) = f(a) + \frac{f'(a)+f'(b)}{2}(b-a) - \frac{1}{12}f'''(\xi)(b-a)^3$$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f'(a)+f'(x)}{2}(x-a) + k(x-a)^3$, 其中 k 是使得

$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)+f'(b)}{2}(b-a)-k(b-a)^3$ 成立的常数.

我们有: $F(a)=F(b)=0$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a,b) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.F'(\xi)=0\Rightarrow f'(a)=f'(\xi)+f''(\xi)(a-\xi)-6k(a-\xi)^3$$

我们将 $f'(a)$ 在 $x=\xi$ 处进行泰勒展开:

$$f'(a)=f'(\xi)+f''(\xi)(a-\xi)+f^{(3)}(\xi)(a-\xi)^3$$

我们取 $k=-\frac{f^{(3)}(\xi)}{12}$ 满足上式,$\exists k=-\frac{f^{(3)}(\xi)}{12}$, $s.t.f(b)=f(a)+\frac{f'(a)+f'(b)}{2}(b-a)-\frac{1}{12}f'''(\xi)(b-a)^3$

命题 5.9.60

$f(x)$ 在 (a,b) 上三阶可导, 证明:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{4}\left[f(a)+3f(\frac{a+2b}{3})\right]-\frac{(b-a)^4}{216}f'''(\xi)$$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=\int_a^x f(t)dt-\frac{b-a}{4}[f(a)+3f(\frac{a+2x}{3})]+k(x-a)^4$

其中 k 是使 $\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{4}\left[f(a)+3f(\frac{a+2b}{3})\right]-k(b-a)^4$ 成立的值

$$F(a)=F(b)=0$$

$$F'(x)=f(x)-\frac{f(a)+3f(\frac{a+2x}{3})}{4}-\frac{x-a}{2}f'(\frac{a+2x}{3})+4k(x-a)^3,\ F'(a)=0$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a,b) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.F'(\xi)=0$$

我们对 $F'(x)$ 在区间 (a,ξ) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\eta\in(a,\xi),\ s.t.F''(\eta)=0\Rightarrow f'(\eta)=f'(\frac{a+2\eta}{3})+f''(\frac{a+2\eta}{3})(\eta-\frac{a+2\eta}{3})-12k(x-a)^2$$

我们将 $f'(\eta)$ 在 $x=\frac{a+2\eta}{3}$ 处进行泰勒展开得到:

$$f'(\eta)=f'(\frac{a+2\eta}{3})+f''(\eta)(x-\frac{a+2\eta}{3})+\frac{f'''(c)}{2}(x-\frac{a+2\eta}{3})^2$$

我们对比两个式子, 可以发现 $k=-\frac{f'''(c)}{216}$

我们取 $k=-\frac{f'''(c)}{216}$ 满足上式

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{4}\left[f(a)+3f(\frac{a+2b}{3})\right]-\frac{(b-a)^4}{216}f'''(\xi)$$

命题 5.9.61

设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, 且 $f(x)$ 在区间 $[a_1, a_n]$ 上二阶可导,$c \in [a_1, a_n]$,$f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_n) = 0$, 证明:

$$\exists \xi \in (a_1, a_n),\ s.t. f(c) = \frac{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

解

(i). 当 $c = a_i$ 时,$f(c) = f(a_i) = 0, c - a_i = 0$, 原命题等价于 $0 \equiv 0$

(ii). 当 $c \neq a_i$ 时, 我们构造辅助函数: $F(x) = f(x) - k\dfrac{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}{n!}$

其中 k 满足 $F(c) = 0 \Rightarrow k = \dfrac{n! f(x)}{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}$

我们发现: $F(x)$ 一共有 $x_1, x_2, \cdots, x_n, c$, 共计 $n+1$ 个零点.

我们多次使用罗尔定理可以得到:

$$\exists \xi \in (a_1, a_n),\ s.t. F^{(n)}(\xi) = 0 \Rightarrow f^{(n)}(\xi) = k$$

我们取 $k = f^{(n)}(\xi)$, 我们可以得到: $f^{(n)}(\xi) = \dfrac{n! f(x)}{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}$

综上所述,

$$\exists \xi \in (a_1, a_n),\ s.t. f(c) = \frac{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

命题 5.9.62

$f(x)$ 在 (a, b) 上二阶可导, 证明:

$$\forall c \in (a, b), \exists \xi \in (a, b),\ s.t. \frac{f''(\xi)}{2} = \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(a-b)(c-b)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = \dfrac{k}{2}(a-x)(a-c)(c-x) - f(a)(c-x) - f(x)(a-c) + f(c)(a-x)$

其中 k 满足: $k = 2[\dfrac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{f(b)}{(a-b)(c-b)} + \dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)}]$

我们有: $F(a) = F(b) = F(c) = 0$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a, c) 和区间 (c, b) 上使用罗尔定理得到:

$$\begin{cases} \exists \xi \in (a, c),\ s.t. F'(\xi) = 0 \\ \exists \eta \in (c, b),\ s.t. F'(\eta) = 0 \end{cases}$$

我们对 $F'(x)$ 在区间 (ξ, η) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists \gamma \in (\xi, \eta),\ s.t. F''(\gamma) = 0 \Rightarrow k = f''(\gamma)$$

我们证明: $\exists \gamma \in (a, b),\ s.t. f''(\gamma) = k = 2[\dfrac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{f(b)}{(a-b)(c-b)} + \dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)}]$

综上所述, 我们得到:

$$\forall c \in (a, b), \exists \xi \in (a, b),\ s.t. \frac{f''(\xi)}{2} = \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(a-b)(c-b)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$$

第 6 章 一元积分学

内容提要

- 不定积分
- 定积分
- 变限积分
- 反常积分
- 积分方法
- 积分应用

6.1 不定积分

定义 6.1.1 (不定积分)

$\forall x \in I$, 对于可导函数 $F(x)$, 均有 $F'(x) = f(x)$, 我们称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 记为 $\int f(x)dx = F(x) + C$ 是 $f(x)$ 的原函数

定理 6.1.1 (原函数存在定理 (充分条件))

连续函数 $f(x)$ 必存在原函数 $F(x)$

证明

1. 构造函数 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, 证明 $F'(x) = f(x)$

2. $\forall x \in (a,b), F'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} = \lim\limits_{\xi \to x} f(\xi) = f(x)$

定理 6.1.2 (达布定理 (必要条件))

1. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数 $F(x)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有介值性
2. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数 $F(x)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必无第一类间断点
3. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数 $F(x)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必无无穷间断点

6.1.1 不定积分计算

定理 6.1.3 (常用不定积分)

1. 基础不定积分

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C, \alpha \neq -1$ $\quad \begin{cases} \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}+C \\ \int \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}+C \end{cases}$
2. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C$
3. $\int e^x dx = e^x + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x dx = \sin x + C \qquad \int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$
5. $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C \quad \begin{cases} \int \frac{1}{\cos x}dx = \int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \\ \int \frac{1}{\sin x}dx = \int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C \end{cases}$
6. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a}+C$
7. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C \qquad \int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$
8. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C, |x|>|a|$
9. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$
10. $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C \qquad \int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+C$
11. $\int \sqrt{x^2\pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})+C$
12. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

2. 扩展不定积分

1. $\begin{cases} \int \sin^n x dx, & n=2,3,4,5 \\ \int \cos^n x dx, & n=2,3,4,5 \end{cases}$
2. $\begin{cases} \int \frac{1}{\sin^n x}dx, & n=2,3,4,5 \\ \int \frac{1}{\cos^n x}dx, & n=2,3,4,5 \end{cases}$
3. $\int \frac{1}{x^n+1}dx, n=3,4,6$

推论 6.1.1 (扩展不定积分)

命题 6.1.1

$$\int \sin^2 x dx \qquad \int \cos^2 x dx$$

解

$$\begin{cases}\int \sin^2 x dx = \int \dfrac{1-\cos 2x}{2} dx = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 2x}{4} + C \\ \int \cos^2 x dx = \int \dfrac{1+\cos 2x}{2} dx = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4} + C\end{cases}$$

命题 6.1.2

$$\int \sin^3 x dx \qquad \int \cos^3 x dx$$

解

$$\begin{cases}\int \sin^3 x dx = \int (\cos^2 x - 1) d(\cos x) = \dfrac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C \\ \int \cos^3 x dx = \int (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \sin x - \dfrac{\sin^3 x}{3} + C\end{cases}$$

命题 6.1.3

$$\int \sin^4 x dx \qquad \int \cos^4 x dx$$

解

$$\begin{cases}\int \sin^4 x dx = \int \dfrac{\cos^2 2x - 2\cos 2x + 1}{4} dx = \dfrac{\sin 4x}{32} - \dfrac{\sin 2x}{4} + \dfrac{3}{8} + C \\ \int \cos^4 x dx = \int \dfrac{\cos^2 2x - 2\cos 2x + 1}{4} dx = \dfrac{\sin 4x}{32} + \dfrac{\sin 2x}{4} + \dfrac{3}{8} + C\end{cases}$$

命题 6.1.4

$$\int \sin^5 x dx \qquad \int \cos^5 x dx$$

解

$$\begin{cases}\int \sin^5 x dx = -\int (1-\cos^2 x)^2 d(\cos x) = -\dfrac{\cos^5 x}{5} + \dfrac{2\cos^3 x}{3} - \cos x + C \\ \int \cos^5 x dx = \int (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x) = \dfrac{\sin^5 x}{5} - \dfrac{2\sin^3 x}{3} + \sin x + C\end{cases}$$

命题 6.1.5

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

解

$$\begin{cases} \int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C \\ \int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \end{cases}$$

命题 6.1.6

$$\int \frac{1}{\sin^3 x} dx \qquad \int \frac{1}{\cos^3 x} dx$$

解

$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{1}{\sin^4 x} d\cos x \\ &= -\int \frac{1}{(1-t^2)^2} dt \\ &= \int \left[\frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{C}{t-1} + \frac{D}{(t-1)^2} \right] dx \end{aligned}$$

我们令 $f(x) = A(t-1)^2(t+1) + B(t-1)^2 + C(t+1)^2(t-1) + D(t+1)^2 = -1$, 我们有:

$$\begin{cases} f(0) = A + B - C + D = -1 \\ f(-1) = 4B = -1 \\ f(1) = 4D = -1 \\ f(2) = 3A + B + 9C + 9D = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{4} \\ B = -\dfrac{1}{4} \\ C = \dfrac{1}{4} \\ D = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

原不定积分为:

$$\begin{aligned} I &= \int \left[-\frac{1}{4(t+1)} - \frac{1}{4(t+1)^2} + \frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4(t-1)^2} \right] dt \\ &= -\frac{ln|t+1|}{4} + \frac{1}{4(t+1)} + \frac{ln|t-1|}{4} + \frac{1}{4(t-1)} \\ &= \frac{1}{4} ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} \end{aligned}$$

综上所述, 我们有:

$$\begin{cases} \int \dfrac{1}{\sin^3 x} dx = \dfrac{1}{4} ln\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) - \dfrac{\cos x}{2\sin^2 x} + C \\ \int \dfrac{1}{\cos^3 x} dx = \dfrac{1}{4} ln\left(\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) - \dfrac{\sin x}{2\cos^2 x} + C \end{cases}$$

命题 6.1.7

$$\int \frac{1}{\sin^4 x} dx \qquad \int \frac{1}{\cos^4 x} dx$$

解

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^4 x} dx \\ &= \int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^4 x} d\tan x \\ &= -\frac{1}{3\tan^3 x} - \frac{1}{\tan x} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^4 x} dx \\ &= \int (1+\tan^2 x) d\tan x \\ &= \tan x - \frac{\tan^3 x}{3} + C \end{aligned}$$

综上所述, 我们有:

$$\begin{cases} \int \frac{1}{\sin^4 x} dx = -\frac{1}{3\tan^3 x} - \frac{1}{\tan x} + C \\ \int \frac{1}{\cos^4 x} dx = \tan x - \frac{\tan^3 x}{3} + C \end{cases}$$

命题 6.1.8

$$\int \frac{1}{\sin^5 x} dx \qquad \int \frac{1}{\cos^5 x} dx$$

解

$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{1}{\sin^6 x} d\cos x \\ &= \int \frac{1}{(t^2-1)^3} dt \\ &= \int \left[\frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{C}{(t+1)^3} + \frac{D}{t-1} + \frac{E}{(t-1)^2} + \frac{F}{(t-1)^3}\right] dx \end{aligned}$$

我们令:

$$f(x) = A(t-1)^3(t+1)^2 + B(t-1)^3(t+1) + C(t-1)^3 + D(t+1)^3(t-1)^2 + E(t+1)^3(t-1) + F(t+1)^3 = 1$$

我们有:

$$\begin{cases} A + D = 0 \\ -A + B + D + E = 0 \\ f(0) = -A - B - C + D - E + F = 1 \\ f(-1) = -8C = 1 \\ f(1) = 8F = 1 \\ f(2) = 9A + 3B + C + 27D + 27E + 27F = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{3}{16} \\ B = -\frac{3}{16} \\ C = -\frac{1}{8} \\ D = \frac{3}{16} \\ E = -\frac{3}{16} \\ F = \frac{1}{8} \end{cases}$$

原不定积分为:

$$\begin{aligned} I &= \int \left[-\frac{1}{8(t+1)} - \frac{3}{16(t+1)^2} - \frac{1}{8(t+1)^3} + \frac{3}{16(t-1)} - \frac{3}{16(t-1)^2} + \frac{1}{8(t-1)^3} \right] dx \\ &= -\frac{3ln|t+1|}{16} + \frac{3}{16(t+1)} + \frac{1}{16(t+1)^2} + \frac{3ln|t-1|}{16} + \frac{3}{16(t-1)} - \frac{1}{16(t-1)^2} \\ &= \frac{3}{16} ln\left(|\frac{1-t}{1+t}| \right) + \frac{6t^3 - 10t}{16(t^2-1)^2} \\ &= \frac{3}{16} ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right) + \frac{3\cos^3 x - 5\cos x}{8\sin^4 x} + C \end{aligned}$$

综上所述, 我们有:

$$\begin{cases} \int \frac{1}{\sin^5 x} dx = \frac{3}{16} ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right) + \frac{3\cos^3 x - 5\cos x}{8\sin^4 x} + C \\ \int \frac{1}{\cos^5 x} dx = \frac{3}{16} ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right) - \frac{3\sin^3 x - 5\sin x}{8\cos^4 x} + C \end{cases}$$

命题 6.1.9

$$\int \frac{1}{x^n+1} dx, n = 3, 4, 6$$

♠

解

(i).

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^3+1} dx &= \int \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} dx \\ &= \int \frac{1}{3} \left[\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1} \right] dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x-1-3}{x^2-x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

(ii).

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^4+1} dx &= \int \frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} dx \\ &= \int \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} dx + \int \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{x+\sqrt{2}}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} dx - \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{x-\sqrt{2}}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} \ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x+1) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x+1) + C \end{aligned}$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^6+1}dx &= \int \frac{1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}dx \\
&= \int \frac{1}{(x^2+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)}dx \\
&= \int \left[\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\frac{Ex+F}{x^2+\sqrt{3}x+1}\right]dx \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+1}dx+\frac{1}{6\sqrt{3}}\int \left[\frac{3x+2\sqrt{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1}-\frac{3x-2\sqrt{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right]dx \\
&= \frac{1}{3}\arctan x+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right| \\
&+ \frac{1}{12}\int \left[\frac{1}{(x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2}^2)}+\frac{1}{(x-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2}^2)}\right]dx \\
&= \frac{1}{3}\arctan x+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}\right|+\frac{1}{6}\left[\arctan(2x+\sqrt{3})+\arctan(2x-\sqrt{3})\right]+C
\end{aligned}
$$

♠

定义 6.1.2 (积分方法)

1. 第一换元法 (凑微分): $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int f(u)du$
2. 第二换元法: $\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$
3. 三角换元法: $\sqrt{a^2-x2}\to t=a\sin x,\ \sqrt{a^2+x^2}\to t=a\tan x$
4. 万能公式: $\int R(\sin x,\cos x)dx\to t=\tan\frac{x}{2}\to\begin{cases}\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}\\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{cases}$

$$
\begin{cases}
R(\sin x,\cos x)=-R(-\sin x,\cos x)\to t=\cos x\\
R(\sin x,\cos x)=-R(\sin x,-\cos x)\to t=\sin x\\
R(\sin x,\cos x)=R(-\sin x,-\cos x)\to t=\tan x
\end{cases}
$$

5. 分部积分法:

$$\int udv=uv-\int vdu$$

6. 组合积分法:

$$
\begin{cases}
\int f(x)dx=I+A\int g(x)dx\\
\int g(x)dx=J+B\int f(x)dx
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\int[f(x)+g(x)]dx=I\\
\int[f(x)-g(x)]dx=J
\end{cases}
$$

7. 递归积分法 (分部积分推广):

$$I_n=f(x)+I_{n-1}$$

♣

表 6.1: 分部积分表格

u各阶导数	u	u'	u''	$u^{(3)}$	$\cdots$	$u^{(n+1)}$
$v^{(n+1)}$的各阶原函数	$v^{(n+1)}$	$v^{(n)}$	v^{n-1}	v^{n-2}	$\cdots$	v

定理 6.1.4 (分部积分: 表格法)

$$\begin{aligned}\int uv^{(n+1)}dx &= uv^{(n)} - \int v^{n}u'dx \\ &= uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \int v^{(n-1)}u''dx \\ &= uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \int v^{(n-2)}u^{(3)}dx \\ &= uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \cdots + (-1)^{n}u^{(n)}v + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}vdx\end{aligned}$$

定理 6.1.5 (组合积分)

命题 6.1.10

$$\begin{cases} I = \int e^{ax}\sin(bx)dx \\ J = \int e^{ax}\cos(bx)dx \end{cases}$$

解

我们利用分部积分公式:

$$\begin{cases} I = -\dfrac{1}{b}e^{ax}\cos(bx) + \dfrac{1}{b}\int e^{ax}\cos(bx)dx \\ J = \dfrac{1}{b}e^{ax}\sin(bx) - \dfrac{1}{b}\int e^{ax}\sin(bx)dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I = -\dfrac{1}{b}e^{ax}\cos(bx) + \dfrac{1}{b}J \\ J = \dfrac{1}{b}e^{ax}\sin(bx) - \dfrac{1}{b}I \end{cases}$$

我们可以得到:

$$\begin{cases} I = \dfrac{ae^{ax}\sin(bx) - be^{ax}\cos(bx)}{a^2+b^2} = \dfrac{\begin{vmatrix} (e^{ax})' & (\sin(bx))' \\ e^{ax} & \sin(bx) \end{vmatrix}}{a^2+b^2} \\ J = \dfrac{ae^{ax}\cos(bx) + be^{ax}\sin(bx)}{a^2+b^2} = \dfrac{\begin{vmatrix} (e^{ax})' & (\cos(bx))' \\ e^{ax} & \cos(bx) \end{vmatrix}}{a^2+b^2} \end{cases}$$

定理 6.1.6 (递归积分)

命题 6.1.11

$$I_n = \int \frac{1}{\cos^n x}dx$$

解

我们用分部积分有:

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{1}{\cos^{n-2} x} d\tan x \\ &= \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} - \int \tan x d(\frac{1}{\cos^{n-2} x}) \\ &= \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} - (n-2)\int \frac{\sin^2 x}{\cos^n x} dx \\ &= \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} - (n-2)I_n + (n-2)\int \frac{1}{\cos^{n-2} x} dx \\ &= \tan x \sec^{n-2} x - (n-2)I_n + (n-2)I_{n-2} \\ I_n &= \frac{1}{n+1}\tan x \sec^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} \end{aligned}$$

我们有: $\begin{cases} I_0 = x + C_0 \\ I_1 = \int \dfrac{1}{\cos x} dx = \ln|\sec x + \tan x| + C_1 \end{cases}$

命题 6.1.12

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx$$

解

我们利用分部积分:

$$\begin{aligned} I_{n-1} &= \int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x d(\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}) \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2(n-1)\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^n} dx \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2(n-1)(I_{n-1} - a^2 I_n) \\ I_n &= \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{(2n-3)I_{n-1}}{2(n-1)a^2}, n = 2, 3, \cdots \end{aligned}$$

其中 $I_1 = \int \dfrac{1}{x^2+a^2} dx = \dfrac{1}{a}\arctan(\dfrac{x}{a}) + C_1, a > 0$

命题 6.1.13

$$I_n = \int \tan^n x dx$$

解

我们有: $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ 且 $d(\tan x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} dx$

因此:

$$\begin{aligned} I_n &= \int \tan^n x dx \\ I_n + I_{n-2} &= \int \tan^n x dx + \int \tan^{n-2} x dx \\ &= \int \tan^{n-2} x (1 + \tan^2 x) dx \\ &= \int \tan^{n-2} x d(\tan x) \\ &= \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x, n = 2, 3 \cdots \end{aligned}$$

我们有: $\begin{cases} I_0 = x + C_0 \\ I_1 = \int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C_1 \end{cases}$

命题 6.1.14

$$I_n = \int \ln^n x dx$$

解

我们利用分部积分:

$$\begin{aligned} I_n &= \int \ln^n x dx \\ &= x \ln^n x - \int x d(\ln^n x) \\ &= x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x dx \\ &= x \ln^n x - n I_{n-1} \\ I_n &= x \ln^n x - n I_{n-1}, n = 2, 3, \cdots \end{aligned}$$

其中: $I_1 = \int \ln x dx = x \ln x - x + C_1$

定理 6.1.7 (唯一因式分解定理 (有理积分))

有理函数指的是分子、分母都是 x 的多项式的分式 $\frac{p(x)}{q(x)}$, 其中 (m > n)

$$\begin{cases} p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, a_n \neq 0 \\ p(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^n, b_m \neq 0 \end{cases}$$

我们有在实数范围内, 任意实系数多项式 $q(x)$ 都可以分解为:

$$q(x) = b_m (x - a_1)^{r_1} \cdots (x - a_k)^{r_k} (x^2 + b_1 x + c_1)^{s_1} \cdots (x^2 + b_l x + c_l)^{s_l}$$

其中 $r_1 + \cdots + r_k + 2(s_1 + \cdots + s_l) = m$

我们可以得到:

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{A_{1,1}}{x-a_1}+\cdots+\frac{A_{1,r_1}}{(x-a_1)^{r_1}}\\&+\cdots+\\&\frac{A_{k,1}}{x-a_k}+\cdots+\frac{A_{k,r_k}}{(x-a_k)^{r_k}}\\&+\frac{M_{1,1}x+N_{1,1}}{x^2+b_1x+c_1}+\cdots+\frac{M_{1,s_1}x+N_{1,s_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{s_1}}\\&+\cdots+\\&\frac{M_{l,1}x+N_{l,1}}{x^2+b_lx+c_l}+\cdots+\frac{M_{l,s_l}x+N_{l,s_l}}{(x^2+b_lx+c_l)^{s_l}}\end{aligned}$$

我们只需要求解两种不定积分即可, $I=\int\frac{1}{(x-a)^k}dx$ 和 $J=\int\frac{mx+n}{(x^2+bx+c)^k}$, 其中 $c-\frac{b^2}{4}>0$

第一个不定积分: $I=\int\frac{1}{(x-a)^k}dx=\begin{cases}\ln(x-a), & k=1\\ \frac{1}{1-k}(x-a)^{1-k}, & k>1\end{cases}$

第二个不定积分: $J=\int\frac{mx+n}{(x^2+bx+c)^k}$

令 $t=x+\frac{b}{2},a^2=c-\frac{b^2}{4}$, 则有:

$$\begin{aligned}J &= \int\frac{m(t-\frac{b}{2})+n}{(t^2+a^2)}dt\\&=\frac{m}{2}\int\frac{2t}{(t^2+a^2)^k}dt+(n-\frac{mb}{2})\int\frac{1}{(t^2+a^2)^k}dt\\&=\frac{m}{2}\int\frac{1}{(t^2+a^2)^k}d(t^2+a^2)+(n-\frac{mb}{2})\int\frac{1}{(t^2+a^2)^k}dt\\&=\frac{m}{2}P+(n-\frac{mb}{2})Q\end{aligned}$$

其中 $P=\begin{cases}\ln(t^2+a^2), & k=1\\ \frac{1}{1-k}\frac{1}{(t^2+a^2)^{1-k}}, & k>1\end{cases}$

关于不定积分 Q, 我们在递归积分中已经求解, 详细证明见 **pro** :6.1.12

综上所述, 我们得到: 有理分式一定存在原函数

6.2 定积分

定义 6.2.1 (定积分)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 在 (a,b) 上任取 $n-1$ 个分点 $x_i(i=1,2,3,\cdots,n-1)$, 定义 $x_0=a, x_n=b$, 且满足 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$, 记 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}, k=1,2,\cdots,n$, 任取一点 $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$, 记 $\lambda=\max\{\Delta x_k\}$, 当 $\lambda\to 0$ 时, 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$ 存在且与分点 x_i 和 ξ_k 的取法无关, 则称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 记 $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分

任取 x_i: 变为将区间 $[a,b]$ 分为 n 个小区间, 且每个小区间的长度为 Δx_k, 且 $\Delta x_k\to 0$, 且 ξ_k 为每个小区间的右端点, $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(a+\frac{b-a}{n}i)\frac{b-a}{n}$

定理 6.2.1 (定积分存在定理)

1. 必要条件: 区间有界, 函数有界
2. 充分条件:

(1). $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

(2). $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 且只有有限个间断点, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

定理 6.2.2 (牛顿莱布尼茨公式)

$f(x)$ 是 $[a,b]$ 上连续函数, $\int_a^b f(x)dx=F(x)|_a^b=F(b)-F(a)$

定理 6.2.3 (对称函数积分)

(1). $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上连续, 我们有:

1. $f(x)$ 是奇函数, 则 $\int_{-l}^{l}f(x)dx=0$
2. $f(x)$ 是偶函数, 则 $\int_{-l}^{l}f(x)dx=2\int_0^l f(x)dx$

(2). $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续:

1. $f(a+b-x)=-f(x)$, 称 $f(x)$ 关于 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 奇对称, $\int_a^b f(x)dx=0$
2. $f(a+b-x)=f(x)$, 称 $f(x)$ 关于 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 偶对称, $\int_a^b f(x)dx=2\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)dx=2\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx$

(3). $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且:

1. $f(a+b-x)=f(x)$, $f(x)$ 关于 $\dfrac{a+b}{2}$ 对称
2. $g(a+b-x)+g(x)=A$, A 为常数

我们有:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\frac{A}{2}\int_a^b f(x)dx=A\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)dx=A\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx$$

(3). $f(x), g(x)$ 在 $[\frac{1}{a}, a]$ 上连续, 且:

1. $f(x) = f(\frac{1}{x})$
2. $g(x) + g(\frac{1}{a}) = A$, A 为常数

我们有:

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a} f(x)g(x)dx = \frac{A}{2}\int_{\frac{1}{a}}^{a} f(x)dx = A\int_{\frac{1}{a}}^{1} f(x)dx = A\int_{1}^{a} f(x)dx$$

定理 6.2.4 (华里士公式)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1, n\in\{2k+1|k\in\mathbb{N}\} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, n\in\{2k+2|k\in\mathbb{N}\} \end{cases}$$

关于公式的推导, 使用上面的递归积分法, 我们需要证明两个部分:

(1). $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$

我们利用区间再现公式: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

我们有: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$

(2). 我们利用分部积分计算: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d(-\cos x) \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} dx \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} dx \\ &= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \\ I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} \end{aligned}$$

我们有: $\begin{cases} I_0 = \frac{\pi}{2} \\ I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1 \end{cases}$

(i). 当 $n\in\{2k+1|k\in\mathbb{N}\}$ 时, 我们有:

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}I_{n-4} = \cdots = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}I_1 = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1$$

(ii). 当 $n\in\{2k+2|k\in\mathbb{N}\}$ 时, 我们有:

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}I_{n-4} = \cdots = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}I_0 = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

综上所述, 我们证明华里士公式.

推论 6.2.1 (华里士公式推论)

$$\int_0^{\pi}\sin^n xdx=\begin{cases}2\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3}\cdot 1, n\in\{2k+1|k\in\mathbb{N}\}\\ 2\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, n\in\{2k+2|k\in\mathbb{N}\}\end{cases}$$

$$\int_0^{\pi}\cos^n xdx=\begin{cases}0, n\in\{2k+1|k\in\mathbb{N}\}\\ 2\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, n\in\{2k+2|k\in\mathbb{N}\}\end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\sin^n xdx=\int_0^{2\pi}\cos^n xdx=\begin{cases}0, n\in\{2k+1|k\in\mathbb{N}\}\\ 4\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, n\in\{2k+2|k\in\mathbb{N}\}\end{cases}$$

命题 6.2.1

$$\int_0^1 x^k\ln^m x, k>0, m\in\mathbb{N}$$

命题 6.2.2

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+1}$$

6.3 变限积分

定义 6.3.1 (变限积分)

$x\in[a,b],\forall x\in[a,b]$, 积分 $\int_a^x f(t)dt$ 都有一个确定的值, 我们将这个关于 x 的函数 $\int_a^x f(t)dt$ 称作变限积分

推论 6.3.1 (变限积分)

1. $f(x)$ 可积, $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 一定连续
2. $f(x)$ 连续, $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 一定可导, 且 $F'(x)=f(x)$
3. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有唯一跳跃间断点 x_0, 则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $x=x_0$ 处不可导
4. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有唯一可去间断点 x_0, 则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $x=x_0$ 处可导, 且 $F'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$

定理 6.3.1 (变限积分的导数)

$f(x)$ 是连续函数, 则 $\left[\int_{\phi(x)}^{\varphi(x)}f(t)dt\right]'=f[\varphi(x)]\varphi'(x)-f[\phi(x)]\phi'(x)$

推论 6.3.2 (变上限积分奇偶性和周期性与原函数关系)

$f(x)$ 连续,$f(x)$ 与 $\int_a^x f(t)dt$ 之间的关系

(1). 如果 $f(x)$ 是奇函数,$\int_a^x f(t)dt$ 是偶函数

(2). 如果 $f(x)$ 是偶函数,$\int_a^x f(t)dt$ 是奇函数当且仅当 $a=0$ 时成立.

(3). 如果 $f(x)$ 是周期函数,$\int_a^x f(t)dt$是周期函数与 $\int_0^T f(t)dt=0$等价

证明

我们令: $F(x)=\int_a^x f(t)dt$

(i). 必要性: $F(x+T)-F(x)=\int_x^{x+T} f(t)dt=\int_0^T f(t)dt=0$

(ii). 充分性: $\int_0^T f(t)dt=0 \Leftrightarrow F(x+T)-F(x)=0$

6.4 反常积分

定义 6.4.1 (反常积分)

1. 积分区间无界: $\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$
2. 被积函数无界: $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$

反常积分敛散性判别

定理 6.4.1 (比较判别法)

1. 无穷区间: $f(x),g(x)$ 连续, 且 $0leqf(x)\le g(x)$
   1. 若 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛
   2. 若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散
2. 无穷函数: $f(x),g(x)$ 在 $(a,b]$ 连续, 瑕点为 $x=a$, 且 $0\le f(x)\le g(x)$
   1. 若 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛
   2. 若 $\int_a^b f(x)dx$ 发散, 则 $\int_a^b g(x)dx$ 发散

定理 6.4.2 (比较判别法的极限形式)

1. 无穷区间: $f(x),g(x)$ 连续, 且 $g(x)>0, f(x)\ge0, \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda$
   1. $\lambda\ne0$ 且 $\lambda\ne\infty$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同敛散
   2. $\lambda=0$, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛
   3. $\lambda=\infty$, 则 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散
2. 无穷函数: $f(x),g(x)$ 在 $(a,b]$ 连续, 瑕点为 $x=a$, 且 $g(x)>0, f(x)\ge0, \lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda$
   1. $\lambda\ne0$ 且 $\lambda\ne\infty$, 则 $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 同敛散

2. $\lambda = 0$, 则 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 收敛
3. $\lambda = \infty$, 则 $\int_a^b g(x)dx$ 发散 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 发散

推论 6.4.1 (p 级数判别法)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx \begin{cases} \text{收敛}, & 0 < p < 1 \\ \text{发散}, & p \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx \begin{cases} \text{收敛}, & p > 1 \\ \text{发散}, & p \leq 1 \end{cases}$$

6.5 一元积分学应用

6.5.1 几何应用

6.5.1.1 平面图形面积

定义 6.5.1 (定积分几何意义)

(i). 直角坐标 $y = f(x)$

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

S 表示的是由 $y = 0, y = f(x)$ 和 $x = a, x = b$ 四条直线围成的平面图形的面积.

(ii). 极坐标 $r = r_1(\theta)$ 与 $r = r_2(\theta)$

$$S = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left|[r_1(\theta)]^2 - [r_2(\theta)]^2\right| d\theta$$

S 表示的是由 $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2$ 和 $r = r_1(\theta), r = r_2\theta$ 四条曲线围成的平面图形的面积.

(iii). 参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$$

S 表示的是由 $t = \alpha, t = \beta$ 和 $x = x(t), y = y(t)$ 四条曲线围成的平面图形的面积.

6.5.1.2 平面曲线弧长

定理 6.5.1 (平面曲线的弧长)

(i). 直角坐标 $y = f(x)$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

(ii). 极坐标 $r = r(\theta)$

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta$$

(iii). 参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

6.5.1.3 旋转体体积

定理 6.5.2 (旋转体体积)

(i). 绕 x 轴旋转

$y = f(x)$ 与 $x = a, x = b$ 围成的几何图形绕 x 轴旋转得到的几何体体积 V :

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

(ii). 绕 y 轴旋转

$y = f(x)$ 与 $x = a, x = b$ 围成的几何图形绕 y 轴旋转得到的几何体体积 V :

$$V = 2\pi \int_a^b x|f(x)|dx$$

(iii). 绕任意直线 $L_0 : Ax + By + C = 0$ 旋转

$$\begin{cases} V = \pi \int_{l_1}^{l_2} r^2 dl \\ r = \dfrac{|Ax + Bf(x) + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ dl = \dfrac{\vec{n} \cdot \vec{l}}{|\vec{l}|} \\ \vec{n} = (dx, dy) \\ \vec{l} = (B, -A) \end{cases} \Rightarrow V = \frac{\pi}{(A^2 + B^2)^{\frac{3}{2}}} \int_a^b [Ax + Bf(x) + C]^2 \left|Af'(x) - B\right| dx$$

(iv). 平面区域 D 绕直线 $L_0 : Ax + By + C = 0$

$$V=2\pi\iint\limits_{(x,y)\in D} r\,d\sigma=2\pi\iint\limits_{(x,y)\in D}\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}d\sigma$$

6.5.1.4 旋转曲面侧面积

定理 6.5.3 (曲线绕 x 轴旋转得到的曲面的侧面积)

(i). 直角坐标

$$S=2\pi\int_a^b|y(x)|\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx$$

(ii). 参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta|y(t)|\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$$

(iii). 极坐标

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta|r\sin\theta|\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}d\theta$$

6.5.1.5 函数平均值和形心坐标

定理 6.5.4 (平均值和形心坐标)

(i). 平均值

$$\overline{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

(ii). 形心坐标

$$\begin{cases}\overline{x}=\dfrac{\iint x d\sigma}{\iint d\sigma}=\dfrac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}\\[2ex] \overline{y}=\dfrac{\iint y d\sigma}{\iint d\sigma}=\dfrac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}\end{cases}$$

6.5.2 物理应用

6.5.2.1 变力做功

定义 6.5.2 (变力做功)

1. $dW = Fds$
2. $W = \int_a^b Fds$

6.5.2.2 抽水做功

定义 6.5.3 (抽水做功)

1. 建立坐标系
2. 确立横截面积表达式
3. $W = \rho g \int_a^b xA(x)dx$

6.5.2.3 水压力

定义 6.5.4 (水中受到的压力)

1. 建立坐标系
2. 建立横截面积表达式: $S = (f(x) - h(x))dx$
3. $F = \rho g \int_a^b x(f(x) - h(x))dx$

积分训练

命题 6.5.1

$$\int \frac{x \sin x}{(1 + \cos^2 x)^{\frac{3}{2}}} dx$$

解

我们令 $f(x)=\dfrac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}$

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int f(x)dx \\
&= \int -\frac{d\cos x}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \int -\frac{du}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&\xlongequal{u=\tan t} \int (-\cos t)dt \\
&= -\sin t + C \\
&\xlongequal{\sin t=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}} -\frac{\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} + C
\end{aligned}$$

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned}
I &= \int xd(F(x)) \\
&= xF(x) - \int F(x)dx \\
&= -\frac{x\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} + \int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx \\
&= -\frac{x\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} + \int \frac{d\sin x}{\sqrt{2-\sin^2 x}} \\
&= \arcsin(\frac{\sin x}{\sqrt{2}}) - \frac{x\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} + C
\end{aligned}$$

命题 6.5.2

$\int \dfrac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

解

我们令 $f(x)=\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int f(x)dx \\
&= \int -\arccos x d(\arccos x) \\
&= -\frac{1}{2}(\arccos x)^2 + C
\end{aligned}$$

原不定积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \int x^3 d(F(x)) \\
&= x^3F(x) - \int F(x)dx \\
&= -\frac{x^3}{2}(\arccos x)^2 - \frac{1}{2}\int(\arccos x)^2 dx \\
&\xlongequal[x=\cos u]{u=\arccos x} -\frac{x^3}{2}(\arccos x)^2 + \frac{1}{2}\int u^2 \sin u du \\
&\xlongequal{\text{分部积分}} -\frac{x^3}{2}(\arccos x)^2 - \frac{u^2}{2}\cos u + u\sin u + \cos u + C \\
&\xlongequal[\sin u=\sqrt{1-x^2}]{u=\arccos x} -\frac{x^3}{2}(\arccos x)^2 - \frac{x(\arccos x)^2}{2} + \sqrt{1-x^2}\arccos x + x + C
\end{aligned}
$$

命题 6.5.3

$\int \frac{x+\sin x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}dx$ ♠

解

原不定积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{xd\tan x + \tan x dx}{(x\tan x+1)^2} \\
&= \int \frac{dx\tan x}{(x\tan x+1)^2} \\
&= -\frac{1}{x\tan x+1} + C
\end{aligned}
$$

命题 6.5.4

$\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx$ ♠

解

我们令: $f(x) = \frac{h(x)}{x-\ln x}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{h'(x)(x-\ln x) - h(x)(1-\frac{1}{x})}{(x-\ln x)^2} \\
&= \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}
\end{aligned}
$$

当 $h(x) = x$ 时,$f'(x) = \frac{1-\ln x}{(x-lnx)^2}$, 原不定积分为: $I = \frac{x}{x-\ln x} + C$

命题 6.5.5

$\int \frac{x\cos x}{(x+\cos x)^2}dx$ ♠

解

我们令: $f(x)=\dfrac{h(x)}{x+\cos x}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{h'(x)(x+\cos x)-h(x)(1-\sin x)}{(x+\cos x)^2}\\
&= \frac{x\cos x}{(x+\cos x)^2}
\end{aligned}
$$

当 $h(x)=\sin x+1$ 时,$f'(x)=\dfrac{x\cos x}{(x+\cos x)^2}$, 原不定积分为: $I=\dfrac{\sin x+1}{x+\cos x}+C$

命题 6.5.6

$$\int\frac{\cos^2 x-x^2\sin x}{(x+\cos x)^2}dx$$

解

我们令: $f(x)=\dfrac{h(x)}{x+\cos x}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{h'(x)(x+\cos x)-h(x)(1-\sin x)}{(x+\cos x)^2}\\
&= \frac{\cos^2 x-x^2\sin x}{(x+\cos x)^2}
\end{aligned}
$$

当 $h(x)=x\cos x$ 时,$f'(x)=\dfrac{x\cos x}{(x+\cos x)^2}$, 原不定积分为: $I=\dfrac{x\cos x}{x+\cos x}+C$

命题 6.5.7

$$\int\frac{x\sin x+\cos x}{x^2+\cos^2 x}dx$$

解

原不定积分等价为:

$$
\begin{aligned}
I &= \int\frac{\frac{x\sin x+\cos x}{x^2}}{1+\left(\frac{\cos x}{x}\right)^2}dx\\
&= -\int\frac{d\frac{\cos x}{x}}{1+\left(\frac{\cos x}{x}\right)^2}\\
&= -\arctan\left(\frac{\cos x}{x}\right)+C
\end{aligned}
$$

原不定积分为: $I=-\arctan(\dfrac{\cos x}{x})+C$

命题 6.5.8

$$\int\frac{e^x(x-1)}{x^2+e^{2x}}dx$$

解

原不定积分等价为:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\frac{e^x(x-1)}{x^2}}{1+(\frac{e^x}{x})^2}dx \\ &= -\int \frac{d\frac{e^x}{x}}{1+(\frac{e^x}{x})^2} \\ &= -\arctan(\frac{e^x}{x})+C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I=-\arctan(\frac{e^x}{x})+C$

命题 6.5.9

$\int e^{\sec x}(\tan x-\sin x)dx$

解

我们令: $f(x)=h(x)e^{\sec x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(x)e^{\sec x}+h(x)e^{\sec x}\frac{\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{h'(x)\cos^2 x+h(x)\sin x}{\cos^2 x}e^{\sec x} \\ &= (\tan x-\sin x)e^{\sec x} \end{aligned}$$

当 $h(x)=\cos x$ 时,$f'(x)=(\tan x-\sin x)e^{\sec x}$, 原不定积分为: $I=\cos x e^{\sec x}+C$

命题 6.5.10

$\int e^{\frac{1}{x}}(2x-1)dx$

解

我们令: $f(x)=h(x)e^{\frac{1}{x}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(x)e^{\frac{1}{x}}-h(x)e^{\sec x}\frac{1}{x^2} \\ &= \frac{h'(x)x^2-h(x)}{x^2}e^{\sec x} \\ &= (2x-1)e^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

当 $h(x)=x^2$ 时,$f'(x)=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$, 原不定积分为: $I=x^2e^{\frac{1}{x}}+C$

命题 6.5.11

$\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx$

解

我们令: $f(x)=h(x)\dfrac{e^{\sin x}}{\cos x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left[h(x)e^{\sin x}\cos x+h'(x)e^{\sin x}\right]\cos x+h(x)e^{\sin x}\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{e^{\sin x}}{\cos^2 x}\left[h(x)\cos^2 x+h'(x)\cos x+h(x)\sin x\right] \\ &= e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

当 $h(x)=x\cos x-1$ 时,$f'(x)=e^{\sin x}\dfrac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}$, 原不定积分为: $I=\dfrac{(x\cos x-1)e^{\sin x}}{\cos x}+C$

命题 6.5.12

$\int e^{x^3}(10x-9x^7)dx$

解

我们令: $f(x)=h(x)e^{x^3}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x^3}\left(h'(x)+3x^2h(x)\right) \\ &= e^{x^3}(10x-9x^7) \end{aligned}$$

当 $h(x)=5x^2-3x^5$ 时,$f'(x)=e^{x^3}(10x-9x^7)$, 原不定积分为: $I=e^{x^3}(5x^2-3x^5)+C$

命题 6.5.13

$\int \dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$

解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned} I &\xlongequal[x=u^2+1]{u=\sqrt{x-1}} \int \frac{2u}{(u^2+1)u}du \\ &= 2\arctan u+C \\ &= 2\arctan\sqrt{x-1}+C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I=2\arctan\sqrt{x-1}+C$

命题 6.5.14

$\int \dfrac{1}{x+\sqrt{x-1}}dx$

解

原不定积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I &\xlongequal[x=u^2+1]{u=\sqrt{x-1}} \int \frac{2u}{(u^2+1)+u}du \\
&= \int \frac{2u}{u^2+u+1}du - \int \frac{1}{\frac{3}{4}+(u+\frac{1}{2})^2}du \\
&= \ln(u^2+u+1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}} + C \\
&= \ln(x+\sqrt{x-1}) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{3}} + C
\end{aligned}
$$

原不定积分为: $I = \ln(x+\sqrt{x-1}) - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{3}} + C$

命题 6.5.15

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{2x-1}}dx$$

解

原不定积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I &\xlongequal[x=\frac{u^2+1}{2}]{u=\sqrt{2x-1}} \int \frac{4}{(u^2+1)^2}du \\
&\xlongequal{u=\tan t} \int 4\cos^2 t\,dt \\
&= 2t+\sin 2t \\
&= 2t+\frac{2\tan t}{1+\tan^2 t} \\
&= 2\arctan u + \frac{2u}{1+u^2} \\
&= 2\arctan\sqrt{2x-1} + \frac{\sqrt{2x-1}}{x} + C
\end{aligned}
$$

原不定积分为: $I = 2\arctan\sqrt{2x-1} + \dfrac{\sqrt{2x-1}}{x} + C$

命题 6.5.16

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{x^3}dx$$

解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned} I & \xlongequal[t=\sqrt{1-x}]{x=1-t^2} \int \frac{2t^2}{(t^2-1)^3}dt \\ & \xlongequal[t=\sec u]{u=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)} \int \frac{2\cos^2 u}{\sin^5 u}du \\ & = \int \frac{2}{\sin^5 u}du - \int \frac{2}{\sin^3 u}du \end{aligned}$$

我们有:

$$\begin{cases} \int \dfrac{1}{\sin^3 x}dx = \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) - \dfrac{\cos x}{2\sin^2 x} + C \\ \int \dfrac{1}{\sin^5 x}dx = \dfrac{3}{16}\ln\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + \dfrac{3\cos^3 x - 5\cos x}{8\sin^4 x} + C \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{8}\ln\left(\frac{1-\cos u}{1+\cos u}\right) + \frac{3\cos^3 u - 5\cos u}{4\sin^4 u} - \frac{1}{2}ln\left(\frac{1-\cos u}{1+\cos u}\right) + \frac{\cos u}{\sin^2 u} \\ &= -\frac{1}{8}\ln\left(\frac{1-\cos u}{1+\cos u}\right) - \frac{\cos^3 u + \cos u}{4\sin^4 u} \\ &= -\frac{1}{8}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) - \frac{t^3+t}{4(t^2-1)^2} \\ &= -\frac{1}{8}\ln\left(\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right) - \frac{(2-x)\sqrt{1-x}}{4x^2} + C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = -\dfrac{1}{8}\ln\left(\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right) - \dfrac{(2-x)\sqrt{1-x}}{4x^2} + C$

命题 6.5.17

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$$

♠

解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}{2}dx \\
&= \int \frac{x\sqrt{x+1}}{2}dx - \int \frac{x\sqrt{x-1}}{2}dx \\
&= I_1 - I_2 \\
I_1 &\xlongequal[u=\sqrt{x+1}]{x=u^2-1} \int (u^2-1)u^2du \\
&= \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \\
I_2 &\xlongequal[t=\sqrt{x-1}]{x=t^2+1} \int (t^2+1)t^2dt \\
&= \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} \\
I &= \frac{(x+1)^2\sqrt{x+1}}{5} - \frac{(x+1)\sqrt{x+1}}{3} - \frac{(x-1)^2\sqrt{x-1}}{5} - \frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{3} + C
\end{aligned}$$

原不定积分为: $I = \frac{(x+1)^2\sqrt{x+1}}{5} - \frac{(x+1)\sqrt{x+1}}{3} - \frac{(x-1)^2\sqrt{x-1}}{5} - \frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{3} + C$

命题 6.5.18

$\int \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{2}}dx$ ♠

解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2-2}dx \\
&= \int \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{2\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= \int \frac{1}{2\sqrt{1-x}}dx + \int \frac{1}{2\sqrt{1+x}}dx - \int \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin x + C
\end{aligned}$$

原不定积分为: $I = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin x + C$

命题 6.5.19

$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$ ♠

解

原不定积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I &\xlongequal[x=\frac{t^2-1}{t^2+1}]{t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \int \frac{4t^2}{(t^2+1)^2}dt \\
&\xlongequal{t=\tan u} \int 4\sin^2 u du \\
&= 2u - \sin 2u \\
&= 2u - \frac{2\tan u}{1+\tan^2 u} + C \\
&= 2\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}
$$

原不定积分为: $I = 2\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{1-x^2} + C$

命题 6.5.20

$\int x\sqrt{\frac{x}{3-x}}dx$

解

原不定积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I &\xlongequal[x=\frac{3t^2}{t^2+1}]{t=\sqrt{\frac{x}{3-x}}} \int \frac{18t^4}{(t^2+1)^3}dt \\
&\xlongequal{t=\tan u} \int 18\sin^4 u du \\
&= \int \frac{9(1-2\cos 2u+\cos^2 2u)}{2}du \\
&= \int \left(\frac{27}{4} + \frac{9}{4}\cos 4u - 9\cos 2u\right)du \\
&= \frac{27}{4}u + \frac{9}{16}\sin 4u - \frac{9}{2}\sin 2u \\
&\xlongequal[\sin 2u=\frac{2t}{1+t^2}]{\cos 2u=\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{27}{4}\arctan\sqrt{\frac{x}{3-x}} - \frac{(9+2x)\sqrt{3x-x^2}}{4} + C
\end{aligned}
$$

原不定积分为: $I = \frac{27}{4}\arctan\sqrt{\frac{x}{3-x}} - \frac{(9+2x)\sqrt{3x-x^2}}{4} + C$

命题 6.5.21

$\int \sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$

解

原不定积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I &\xlongequal[x=\frac{t^2}{1-t^2}]{t=\sqrt{\frac{x}{1+x}}} \int \frac{2t^2}{(t^2-1)^2}dt \\
&\xlongequal{t=\sec u} \int \frac{2}{\sin^3 u}du \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos u}{1+\cos u}\right) - \frac{\cos u}{\sin^2 u} + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) - \frac{t}{1-t^2} + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}\right) + \sqrt{x+x^2} + C
\end{aligned}
$$

原不定积分为: $I = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}\right) + \sqrt{x+x^2} + C$

命题 6.5.22

$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$

解

原不定积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I &\xlongequal[x=\frac{t^2+1}{t^2-1}]{t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \int -\frac{4t^2}{(t^2-1)^2}dt \\
&\xlongequal{t=\sec u} \int -\frac{4}{\sin^3 u}du \\
&= \ln\left(\frac{1+\cos u}{1-\cos u}\right) + \frac{2\cos u}{\sin^2 u} + C \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right) + \sqrt{x^2-1} + C
\end{aligned}
$$

原不定积分为: $I = \ln\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right) + \sqrt{x^2-1} + C$

命题 6.5.23

$\int \sqrt{x(x+2)}dx$

解

原不定积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I &\xlongequal[x=u-1]{u=x+1} \int \sqrt{u^2-1}du \\
&= \frac{u\sqrt{u^2-1}}{2} - \frac{\ln|u+\sqrt{u^2-1}|}{2} + C \\
&= \frac{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}{2} - \frac{\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}|}{2} + C
\end{aligned}
$$

原不定积分为: $I = \dfrac{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}{2} - \dfrac{\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}|}{2} + C$

命题 6.5.24

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{-x^2+2x+3}}dx$$

解

原不定积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I &\xlongequal[x=2\sin\theta+1]{\sin\theta=\frac{x-1}{2}} \int (2\sin\theta+1)^2 d\theta \\
&= 3\theta - \sin 2\theta - 4\cos\theta + C \\
&= 3\arcsin\frac{x-1}{2} - \frac{(x+3)\sqrt{-x^2+2x+3}}{2} + C
\end{aligned}
$$

原不定积分为: $I = 3\arcsin\dfrac{x-1}{2} - \dfrac{(x+3)sqrt{-x^2+2x+3}}{2} + C$

命题 6.5.25

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx$$

解

原不定积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I &\xlongequal[x=\arctan u]{\tan x=u} \int \frac{2u}{u^4+1}du \\
&= \int \frac{1}{(u^2)^2+1}d(u^2) \\
&= \arctan u^2 + C \\
&= \arctan(tan^2 x) + C
\end{aligned}
$$

原不定积分为: $I = \arctan(tan^2 x) + C$

命题 6.5.26

$$\int \frac{e^{\sin x}\sin 2x}{\sin^4(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})}dx$$

解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{8e^{\sin x}\sin x}{(1+\sin x)^2} d\sin x \\ &\xlongequal[x=\arcsin u]{\sin x = u} \int \frac{8e^u u}{(1+u)^2} du \\ &= \frac{8e^u}{1+u} + C \\ &= \frac{8e^{\sin x}}{1+\sin x} + C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = \dfrac{8e^{\sin x}}{1+\sin x} + C$

命题 6.5.27

$$\int \frac{1}{\sin^2 x + \sin 2x} dx$$

♠

解

原不定积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\tan^2 x + 2\tan x} d\tan x \\ &= \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\tan x + 2}\right) d\tan x \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tan x}{\tan x + 2}\right| + C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\tan x}{\tan x + 2}\right| + C$

命题 6.5.28

$$\int \frac{\sin x}{\cos x + 2\sin x} dx$$

♠

解

原不定积分等价于: $I = \dfrac{A(\cos x + 2\sin x) + B(2\cos x - \sin x)}{\cos x + 2\sin x}$

我们有: $\begin{cases} A + 2B = 0 \\ 2A - B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{2}{5} \\ B = -\dfrac{1}{5} \end{cases}$

原不定积分等价为:

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{5} - \frac{2\cos x - \sin x}{5(\cos x + 2\sin x)} \\ &= \frac{2x}{5} - \frac{\ln|\cos x + 2\sin x|}{5} + C \end{aligned}$$

原不定积分为: $I = \dfrac{2x}{5} - \dfrac{\ln|\cos x + 2\sin x|}{5} + C$

第二部分

高数（下）

第 2 部分目录

第 7 章 多元函数微分

内容提要

- 连续、偏导、可微、全微分
- 链式法则
- 隐函数存在定理
- 多元函数极值和最值
- 拉格朗日数乘法

7.1 多元函数微分概念

定义 7.1.1 (邻域)

1. δ 邻域: 设 $P_0(x_0, y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点, $U(P_0, \delta)$ 表示以 P_0 为中心, 半径为 δ 的圆盘, 即 $U(P_0, \delta) = \{(x, y) | \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$
2. 去心 δ 邻域: $\mathring{U}(P_0, \delta) = \{(x, y) | 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$

♣

定义 7.1.2 (多元函数极限)

设函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上有定义, $P_0(x_0, y_0) \in D$ 或为区域 D 边界上的一点, 如果对于任意给定的正数 ε, 总存 $\delta > 0$, 使得当点 $P(x, y) \in D$ 且 $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ 时, 对应的函数值 $f(x, y)$ 都满足不等式 $|f(x, y) - A| < \varepsilon$, 那么称函数 $f(x, y)$ 当 $(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时的极限为 A, 记为 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$

♣

定义 7.1.3 (连续)

设函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上有定义, $P_0(x_0, y_0) \in D$ 或为区域 D 边界上的一点, 如果 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, 那么称函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续, 如果函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上每一点都连续, 那么称函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上连续

♣

定义 7.1.4 (偏导数)

设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 邻域内有定义, 若极限 $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在, 我们将这记作 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数, 记作:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\qquad \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\qquad z'_x\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

类似地, 我们可以定义 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数, 记作:

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\qquad \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\qquad z'_y\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

对偏导数进一步求偏导数, 我们可以得到高阶偏导数: $f''_{xx}(x,y), f''_{yy}(x,y), f''_{xy}(x,y), f''_{yx}(x,y)$

♣

定义 7.1.5 (可微)

函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表示为:

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)\qquad \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

其中 A,B 只与 x,y 相关, 我们称 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微,$A\Delta x+B\Delta y$ 是 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全微分.

$$dz=A\Delta x+B\Delta y=Adx+Bdy$$

1. 可微必要条件: $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微 $\Rightarrow$ $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处偏导数必定存在且 $\begin{cases}A=\dfrac{\partial z}{\partial x}\\ B=\dfrac{\partial z}{\partial y}\end{cases}$
2. 可微充分条件: $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处偏导数连续 $\Rightarrow$ $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微

♣

定义 7.1.6 (偏导数连续性)

$$\begin{cases}f'_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}f'_x(x,y_0)\\ f'_y(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\lim\limits_{y\to y_0}f'_y(x_0,y)\end{cases}$$

如果这两个极限相等, 我们就称偏导数在此点连续

♣

7.2 链式法则

定义 7.2.1 (链式法则)

$$z=f(u,v),u=\varphi(x,y),v=\phi(x,y)$$

我们可以得到偏导数:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

高阶偏导数:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right]\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right]\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right]\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right]\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right]\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right]\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right]\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right]\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$$

综上所述, 我们有:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}(\frac{\partial u}{\partial x})^2+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}(\frac{\partial v}{\partial x})^2+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}(\frac{\partial u}{\partial y})^2+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}(\frac{\partial v}{\partial y})^2+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$$

♣

定义 7.2.2 (全微分形式不变性)

设 $z = f(x, y), x = x(u, v), y = y(u, v)$, 如果 $f(u, v), u(x, y), v(x, y)$ 分别有连续偏导数, 则复合函数 $z = f(u, v)$ 在 (x, y) 处的全微分:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

7.3 隐函数存在定理

定理 7.3.1 (隐函数存在定理 1)

如果函数 $F(x, y)$ 满足一下条件:

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某一个邻域内具有连续偏导数
3. $F'(x_0, y_0) \neq 0$

那么方程 $F(x, y) = 0$ 在点 (x_0, y_0) 的某一个邻域内能够确定唯一的连续且具有连续导数的函数 $y = f(x)$, 满足 $F(x, f(x)) = 0$ 且 $y_0 = y(x_0)$, 且有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

定理 7.3.2 (隐函数存在定理 2)

如果函数 $F(x, y, z)$ 满足一下条件:

1. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
2. $F(x, y, z)$ 在 (x_0, y_0, z_0) 的某一个邻域内具有连续偏导数
3. $F'(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

那么方程 $F(x, y, z) = 0$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 的某一个邻域内能够确定唯一的连续且具有连续导数的函数 $z = f(x, y)$, 满足 $F(x, y, z(x, y)) = 0$ 且 $z_0 = z(x_0, y_0)$, 且有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

7.4 多元函数极值和最值

定义 7.4.1 (多元函数极值和最值)

极值

设函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处有定义

1. 如果存在邻域 $U(P_0, \delta)$, 使得对于任意 $(x, y) \in U(P_0, \delta)$, 都有 $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, 那么称 $f(x_0, y_0)$ 是函数 $f(x, y)$ 的一个极大值

2. 如果存在邻域 $U(P_0, \delta)$, 使得对于任意 $(x, y) \in U(P_0, \delta)$, 都有 $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$, 那么

称 $f(x_0, y_0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的一个极小值

最值

1. 如果对于区域 D 上的任意 (x,y), 都有 $f(x,y) \le f(x_0,y_0)$, 那么称 $f(x_0,y_0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的一个最大值
2. 如果对于区域 D 上的任意 (x,y), 都有 $f(x,y) \ge f(x_0,y_0)$, 那么称 $f(x_0,y_0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的一个最小值

无条件极值

定义 7.4.2 (多元函数极值)

二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取极值的必要条件:

$$f'_x(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) = 0$$

二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取极值的充分条件:

$$\begin{cases} f''_{xx}(x_0,y_0) = A \\ f''_{xy}(x_0,y_0) = B \\ f''_{yy}(x_0,y_0) = C \end{cases} \qquad \Delta = AC - B^2 \Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0, \begin{cases} A > 0, & \min \\ A < 0, & \max \end{cases} \\ \Delta < 0, \text{非极值} \\ \Delta = 0, \text{方法失效} \end{cases}$$

条件极值

定义 7.4.3 (拉格朗日数乘法)

求目标函数 $u = f(x,y,z)$ 在条件 $\begin{cases} g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases}$ 下的最值

构造辅助函数: $F(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z)$

令

$$\begin{cases} F'_x = f'_x + \lambda g'_x + \mu h'_x = 0 \\ F'_y = f'_y + \lambda g'_y + \mu h'_y = 0 \\ F'_z = f'_z + \lambda g'_z + \mu h'_z = 0 \\ F'_\lambda = g(x,y,z) = 0 \\ F'_\mu = h(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

得到所有的备选点 P_i, 计算 $f(P_i)$ 得到最大值和最小值.

注

1. 在不封闭曲线上求最值, 可以用拉格朗日数乘法, 但是要注意边界条件
2. 闭区域上多元函数的最值, 分为两部分, 第一部分是在区域内部求最值, 第二部分是在区域边界求最值; 前者利用驻点, 后者利用拉格朗日数乘法, 两者结合求最值

第 8 章 二重积分

内容提要

- 二重积分定义
- 积分次序
- 极坐标和直角坐标下的二重积分
- 变量替换

8.1 概念和性质

定义 8.1.1 (二重积分)

设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上有界, D 的面积为 S_D, D 上的一个分割为 $D=\bigcup\limits_{i=1}^{n}D_i$, $\Delta\sigma_i$ 是 D_i 的面积, 任取 $(\varepsilon_i,\eta_i)\in D_i$, 作乘积 $f(\varepsilon_i,\eta_i)\sigma_i$, 并求和 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\varepsilon_i,\eta_i)\sigma_i$, 如果当 $\max\{d_i|d_i\text{是}D_i\text{区域的直径}\}\to 0$, 极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\varepsilon_i,\eta_i)\sigma_i$ 存在, 且与 D 的分割方法和 (ε_i,η_i) 的取法无关, 那么称此极限为 $f(x,y)$ 在区域 D 上的二重积分, 记作 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$

定义 8.1.2 (性质)

1. 二重积分的几何意义: 二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 表示区域 D 上以 $f(x,y)$ 为曲顶的曲顶柱体的体积
2. 二重积分的线性性质: $\iint\limits_D(\alpha f(x,y)+\beta g(x,y))d\sigma=\alpha\iint\limits_D f(x,y)d\sigma+\beta\iint\limits_D g(x,y)d\sigma$
3. 类比于一元积分学, 我们有:

$$\int_a^b 1dx=b-a\to\iint\limits_D 1d\sigma=S_D$$

定理 8.1.1 (对称性)

1. 普通对称性

(i). 区域 D 关于 $x=a$ 对称, 我们有:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & f(2a-x)=f(x)\\ 0, & f(2a-x)=-f(x)\end{cases}$$

特别的, 当 $a=0$ 时, 我们有:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & f(-x)=f(x)\\ 0, & f(-x)=-f(x)\end{cases}$$

(ii). 区域 D 关于 $y=b$ 对称, 我们有:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & f(x,2b-y)=f(x,y)\\ 0, & f(x,2b-y)=-f(x,y)\end{cases}$$

特别的, 当 $b=0$ 时, 我们有:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & f(x,-y)=f(x,y)\\ 0, & f(x,-y)=-f(x,y)\end{cases}$$

2. 轮换对称性

区域 D 关于 $x=y$ 对称, 我们有:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(y,x)d\sigma=\frac{1}{2}\iint_D\left[f(x,y)+f(y,x)\right]d\sigma$$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & f(x,y)=f(y,x)\\ 0, & f(x,y)=-f(y,x)\end{cases}$$

3. 区域 D 关于原点对称, 我们有:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma, & f(-x,-y)=f(x,y)\\ 0, & f(-x,-y)=-f(x,y)\end{cases}$$

8.2 计算

1. 直角坐标 (重要的是积分次序)

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}\int_a^b dx\int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)dy\\ \int_a^b dy\int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)dx\end{cases}$$

2. 极坐标计算 (二重积分变量替换公式)

$$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D'} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)drd\theta$$

3. 变量替换

设 D 和 D' 是平面上两个 (有界) 区域,D 到 D' 的对应 $\varphi:(u,v)\to(x,y)$ (这里 $x=x(u,v), y=y(u,v)$ 连续可微), 称为变量替换, 要求 φ 在一个面积为 0 的集合外是 $1\sim 1$, 我们有:

$$dxdy = J_{\varphi}(u,v)dudv$$

$$J_{\varphi}(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

注

$$d\sigma_1 = dudv \qquad d\sigma_2 = |l\times m|$$

$$\begin{cases} x(u,v+dv)-x(u,v)=x'_v dv \\ x(u+du,v)-x(u,v)=x'_u du \\ y(u,v+dv)-y(u,v)=x'_v dv \\ y(u+du,v)-y(u,v)=y'_u du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l=(x'_u du, y'_u du) \\ m=(x'_v dv, y'_v dv) \end{cases}$$

$$d\sigma_2 = (x'_u y'_v - x'_v y'_u)dvdu = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} d\sigma_1$$

8.3 二重积分解决一元积分

几个比较经典的例子:

1. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$

注

我们有: $I=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy$

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \\
&= \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy
\end{aligned}
$$

2. $\int_0^a f(x)dx \int_0^a \frac{1}{f(x)}dx \geq a^2$

第 9 章 常微分方程

内容提要

- 一阶微分方程
- 二阶可降解微分方程
- 二阶常系数微分方程
- 欧拉方程
- 伯努利方程

定义 9.0.1

方程 $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ 是微分方程, 当函数为一元函数时, 是常微分方程; 函数最高阶导数的阶数是微分方程的阶数.

9.1 一阶微分方程

分离变量型

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

一阶线性微分方程

定义 9.1.1

$$y' + p(x)y = q(x)$$

定理 9.1.1 (一阶线性微分方程解)

$$e^{\int p(x)dx}(y' + p(x)y) = e^{\int p(x)dx}q(x) \Rightarrow \left[e^{\int p(x)dx}y\right]' = e^{\int p(x)dx}q(x)$$

$$e^{\int p(x)dx}y = \int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + C$$

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C\right)$$

9.2 二阶可降解微分方程

定义 9.2.1

1. $y'' = f(y, y')$

我们令: $p = y'$, 则

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p' = f(y, p)$$

2. $y'' = f(x, y')$

我们令: $p(x) = y'$, 则

$$y'' = \frac{dp}{dx} = f(x, p)$$

9.3 二阶常系数微分方程

定义 9.3.1 (二阶常系数微分方程)

齐次二阶常系数微分方程:

$$y'' + py' + py = 0$$

非齐次性二阶常系数微分方程:

$$y'' + py' + py = f(x)$$

定理 9.3.1

对于齐次性二阶常系数微分方程:

特征方程: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

1. 当方程有两个不同的实数根 λ_1, λ_2 , 微分方程通解:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

2. 当方程有两个相同的实根 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, 微分方程通解:

$$y = C_1 + C_2 x e^{\lambda x}$$

3. 当方程有两个不同的虚根 $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$, 微分方程通解:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$$

定理 9.3.2 (二阶常系数微分方程解)

对于非齐次性二阶常系数微分方程:

$$y'' + py' + py = f(x)$$

通解为齐次性二阶常系数微分方程的通解加上特解: $y_0 = y^* + y$

1. 当 $f(x) = e^{\alpha x}Q_n(x)$ 时, 特解 y^*:

$$y^* = e^{\alpha x}x^k P_n(x)$$

(i). 当 α 不是特征方程的根,$k = 0$

(ii). 当 α 是特征方程的一个根,$k = 1$

(iii). 当 α 是特征方程的重根,$k = 2$

2. 当 $f(x) = e^{\alpha x}(Q_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$ 时, 特解 y^*:

$$y^* = e^{\alpha x}x^k(P_l^1(x)\cos\beta x + P_l^2(x)\sin\beta x), \quad l = max\{m, n\}$$

(i). 当 $\alpha \pm i\beta$ 不是特征方程的根,$k = 0$

(ii). 当 $\alpha \pm i\beta$ 是特征方程的根,$k = 1$

9.4 伯努利方程

定义 9.4.1 (伯努利方程)

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

定理 9.4.1

原方程可化简为:

$$y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

不妨设:

$$z = y^{1-n}, \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

原方程为:

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x)$$

9.5 欧拉方程

定义 9.5.1 (欧拉方程)

形如以下形式的微分方程:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+px\frac{dy}{dx}+qy=f(x)$$

1. 当 $x>0$ 时, 令 $x=e^t, t=\ln x$; $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

原微分方程可化为:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+p\frac{dy}{dt}+qy=f(e^t)$$

2. 当 $x<0$ 时, 令 $x=-e^t, t=\ln(-x)$; $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$, 同理可得

第 10 章 无穷级数

内容提要

- 常数项级数
- 收敛半径和收敛域
- 幂级数
- 和函数
- 函数展开式
- 傅里叶级数

定义 10.0.1

给定一个无穷数列 $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$, 将其各项相加得到 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$, 即:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

我们将 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 称为无穷级数, 简称为级数, 其中 u_n 是无穷级数的通项, 如果 u_n 是常数项, 则称为常数项级数; 如果 u_n 是函数, 则称为函数项级数

定义 10.0.2 (级数敛散性)

级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的敛散性研究:

引入 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$, 我们称 S_n 是无穷级数的部分和, 我们定义:

(1). 当 $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = S$ 时, 我们称级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛.

(2). 当 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \infty$ 或者不存在时, 我们称级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散.

推论 10.0.1

(1). 当 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛时, 我们有: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (必要条件)

(2). 当 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛时, 且这两个级数的和分别为 $S, T, \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\alpha u_n + \beta v_n)$ 收敛, 且级数和为 $\alpha S + \beta T$

(3). 如果存在去掉 m 项的级数 $\sum\limits_{n=m}^{+\infty} u_n$ 收敛, 原级数收敛; 反之亦然

10.1 常数项级数

常数项级数敛散性判别方法

1. 正项级数判别

(1). 定义法

定理 10.1.1 (收敛原则)

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ 有界

证明

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 是正项级数,$u_n > 0$,S_n 单调递增

如果 S_n 有界, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ 存在, 原级数收敛; 反之亦然

(2). 比较判别法

定理 10.1.2

存在无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$, 若从某一项起满足 $u_n < v_n$, 我们有下面的推论:

若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 发散

若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛

(3). 比较判别法的极限形式

定理 10.1.3

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=A$$

(i). $A=0$, 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n$ 收敛,$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛

(ii). $0<A<+\infty$,$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n$ 有相同的敛散性

(iii). $A=+\infty$, 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}v_n$ 发散,$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 发散

(4). 比值判别法

定理 10.1.4

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$$

(i). $\rho<1$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛

(ii). $\rho>1$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 发散

(iii). $\rho=1$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 敛散性不确定

(5). 根值判别法 (柯西判别法)

定理 10.1.5

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$$

(i). $\rho<1$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛

(ii). $\rho>1$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 发散

(iii). $\rho=1$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 敛散性不确定

2. 交错级数判别

定理 10.1.6 (莱布尼茨判别法)

u_n 单调不增且 $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛

3. 任意项级数判别

定义 10.1.1

$\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|$ 是原级数的绝对值级数

(i). 如果 $\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|$ 收敛, 称其**绝对收敛**

(ii). 如果 $\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|$ 发散,$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛, 称其**条件收敛**

定理 10.1.7

1. $\sum_{n=1}^{+\infty}|u_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛
2. $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(u_n>0)$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}u_n^2$ 收敛

证明

1. 我们构造级数 $v_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}(u_n+|u_n|)$, 我们发现当 $u_n<0$ 时,$v_n=0$; 当 $u_n>0$ 时,$v_n=u_n$, 我们得到:

$$0\leq v_n\leq |u_n|$$

我们得到 $v_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}(u_n+|u_n|)$ 收敛, 由收敛级数的可加性得到:

级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(2v_n-|u_n|)$ 收敛

综上,$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛

2. 我们由 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛可以得到:

$$\exists M>0,\ s.t.|u_n|<M\Rightarrow 0<u_n^2<Mu_n$$

我们得到 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n^2$ 收敛

10.2 幂级数

定义 10.2.1 (幂级数)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x) + \ldots$$

级数的每一项都是函数项, 函数的定义域 I, 当 $x = x_0$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$ 就是常数项级数.

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$ 收敛的 x_0 点被称为**收敛点**, 所有收敛点的集合被称为**收敛域**

定义 10.2.2

幂级数标准形式:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \ldots$$

幂级数的一般形式:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \ldots$$

定理 10.2.1 (阿贝尔定理)

幂级数收敛域判定 (阿贝尔定理):

当幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ 在 $x = x_1$ 处收敛时, $\forall x < |x_1|$, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ 都收敛

当幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ 在 $x = x_2$ 处发散时, $\forall x > |x_2|$, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ 都发散.

对于标准幂级数求收敛域, 我们利用公式法:

定理 10.2.2

$\lim\limits_{n \to +\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \rho$

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, \rho \neq 0 \\ 0, \rho = \infty \\ \infty, \rho = 0 \end{cases}$$

我们将 $(-R, R)$ 称为幂级数的收敛区间

幂级数的收敛域为 $(-R, R)$ or $[-R, R]$ or $(-R, R]$ or $[-R, R)$

10.3 幂级数求和函数

定义 10.3.1 (幂级数的和函数)

在幂级数收敛域上, 我们称 $S(x)$ 是幂级数的和函数:

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$$

定理 10.3.1 (可积性与可导性)

(i). 幂级数和函数 $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ 在收敛域上连续

(ii). 幂级数在收敛域 I 上可积, 有逐项积分公式 (收敛域 $I'\geq I$)

$$\int_0^x S(t)dt=\int_0^x(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n)dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},x\in I$$

(iii). 幂级数在收敛域 I 上可导, 有逐项求导公式 (收敛域 $I'\leq I$)

$$S'(x)=(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n)'=\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^{n-1},x\in I$$

10.3.1 重要展开式

定理 10.3.2

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,-\infty<x<+\infty$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\ldots,-1<x<1$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+\ldots,-1<x<1$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^nx^{n+1}}{n+1}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},-1<x\leq 1$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},-\infty<x<+\infty$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^nx^{2n}}{2n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},-\infty<x<+\infty$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

10.4 函数展开成幂级数

定义 10.4.1

泰勒级数: ($f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处存在任意阶导数)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

麦克劳林级数: ($f(x)$ 在点 $x=0$ 处存在任意阶导数)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

10.5 傅里叶级数

将满足特定条件的周期函数用一个序列的正弦函数叠加表示, 这种表示我们称为傅里叶级或者三角级数

定义 10.5.1 (傅里叶级数)

设 $f(x)$ 是周期函数且满足狄利克雷收敛定律

$f(x)=A_0+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)$ 是函数的傅里叶展开, 展开式是傅里叶级数. 通过一些变量代换, 可以得到:

$$f(x)=A_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

三角函数族的正交性

定义 10.5.2

$\{1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x,\ldots,\sin nx,\cos nx\ldots\}$ 被称为三角函数族, 满足任意两个不同的函数之积在 $[-\pi,\pi]$ 上的定积分 $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx=0$

利用三角函数族的正交性这一性质, 我们可以求出傅里叶级数的傅里叶系数:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}A_0\sin nxdx+\int_{-\pi}^{\pi}b_n\sin^2 nxdx\Rightarrow b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}A_0\cos nxdx+\int_{-\pi}^{\pi}a_n\cos^2 nxdx\Rightarrow a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}A_0dx\Rightarrow A_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

定理 10.5.1

$$f(x)\ \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

其中傅里叶系数 a_n, b_n 表达式:

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx, n=0,1,2,\cdots \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx, n=1,2,\cdots \end{cases}$$

定理 10.5.2

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$S(x)=\begin{cases} f(x), x\ is\ contiue \\ \frac{\lim\limits_{x\to x^+}f(x)+\lim\limits_{x\to x^-}f(x)}{2}, x\ is\ uncontiue \\ \frac{\lim\limits_{x\to x^+}f(x)+\lim\limits_{x\to x^-}f(x)}{2}, x=\pm\pi \end{cases}$$

任意对称区间中的傅里叶展开

定义 10.5.3

设 $f(x)$ 定义域为 $[-l,l]$, 我们令 $t=\frac{x\pi}{l}, t\in[-\pi,\pi]$

我们得到:

$$g(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\to f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l})$$

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cos nt dt, n=0,1,2,\cdots \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin nt dt, n=1,2,\cdots \end{cases}$$

我们进行变量代换:

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx, n=0,1,2,\cdots \\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx, n=1,2,\cdots \end{cases}$$

正弦级数和余弦级数

当 $f(x)$ 有奇偶性时,$a_n = 0\ or\ b_n = 0$;

$$f(x) = f(-x), b_n = 0, a_n = \frac{2}{l}\int_{-l} l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx$$

$$f(x) = -f(-x), a_n = 0, b_n = \frac{2}{l}\int_{-l} l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

总结

1. p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$, 当 $p > 1$ 时, 级数收敛; 当 $p \leq 1$ 时, 级数发散
2. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = e$

第 11 章 空间解析几何

11.1 向量代数

定义 11.1.1

1. 方向角: 非零向量 a 与 x, y, z 轴所成夹角 α, β, γ 称为向量 a 的方向角.
2. 方向余弦: $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为向量 a 的方向余弦.

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|a|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|a|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|a|}$$

3. 投影:

$$Prj_b a = \frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{|b|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

♣

11.2 空间平面和直线

11.2.1 平面

定义 11.2.1 (平面方程)

1. 一般式: $Ax + By + Cz + D = 0$

2. 点法式: $A(x - x_0) + B(y - y_0 + C(z - z_0) = 0$

3. 截距式: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

4. 三点式: $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \end{vmatrix}=0$,(平面过不共线的三点 $P(x_i,y_i,z_i)$)

11.2.2 直线

定义 11.2.2 (直线方程)

1. 一般式: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=0, n_1=(A_1,B_1,C_1) \\ A_2x+B_2y+C_2z=0, n_2=(A_2,B_2,C_2) \end{cases}$,n_1,n_2 不平行

2. 点向式: $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$,$(x_0,y_0,z_0)$ 是直线上的点,(l,m,n) 是直线的方向向量

3. 参数式: $\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}$,(x_0,y_0,z_0) 是直线上的点,(l,m,n) 是直线的方向向量

4. 两点式: $\dfrac{x-x_1}{x_1-x_2}=\dfrac{y-y_1}{y_1-y_2}=\dfrac{z-z_0}{z_1-z_2}$,$(x_1,y_1,z_1)$ 和 (x_2,y_2,z_2) 是直线上的点

11.3 空间曲面和曲线

定义 11.3.1 (空间曲面和曲线)

1. 空间曲线:

(i). 一般式: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$, 是两个曲面的交线

(ii). 参数方程式: $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \\ z=h(t) \end{cases}$,$t\in[\alpha,\beta]$ 为参数

(iii). 空间曲线在坐标面的投影:

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

2. 空间曲面

$$F(x, y, z) = 0$$

11.3.1 空间曲线的切线和法平面

定义 11.3.2 (曲线切线和法平面)

(i). 参数方程式: $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$ 在 $t = t_0$ 时, 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处

切线的方向向量: $\mathbf{n} = (f'(t_0), g'(t_0), h'(t_0))$

切线方程为: $\dfrac{x - x_0}{f'(t_0)} = \dfrac{y - y_0}{g'(t_0)} = \dfrac{z - z_0}{h'(t_0)}$

曲线法平面: $f'(t_0)(x - x_0) + g'(t_0)(y - y_0) + h'(t_0)(z - z_0) = 0$

(ii). 一般式: $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$

切线的方向向量: $\left(\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}\right)$

切线方程为: $\dfrac{x - x_0}{\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}} = \dfrac{y - y_0}{\begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}} = \dfrac{z - z_0}{\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}}$

曲线法平面: $\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}(x - x_0) + \begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}(y - y_0) + \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}(z - z_0) = 0$

11.3.2 空间曲面的切平面和法线

定义 11.3.3

曲面的切平面和法线

1. 曲面方程: $F(x,y,z)=0$

法向量: $\mathbf{n}=(F'_x(x,y,z),F'_y(x,y,z),F'_z(x,y,z))$

切平面方程: $F'_x(x,y,z)(x-x_0)+F'_y(x,y,z)(y-y_0)+F'_z(x,y,z)(z-z_0)=0$

法线方程: $\dfrac{x-x_0}{F'_x(x,y,z)}=\dfrac{y-y_0}{F'_y(x,y,z)}=\dfrac{z-z_0}{F'_z(x,y,z)}$

2. 曲面方程: $z=f(x,y)$

法向量: $\mathbf{n}=(f'_x(x,y),f'_y(x,y),-1)$

切平面方程: $f'_x(x,y)(x-x_0)+f'_y(x,y)(y-y_0)-(z-z_0)=0$

法线方程: $\dfrac{x-x_0}{f'_x(x,y)}=\dfrac{y-y_0}{f'_y(x,y)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$

11.4 场论初步

11.4.1 方向导数

定义 11.4.1 (方向导数)

设三元函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某空间邻域内 $U\subset R^3$ 有定义,l 是从 P_0 出发的一条射线,$P(x,y,z)$ 为 l 上且在 U 中的任意一点, 我们有:

$$\begin{cases} x-x_0=\Delta x=t\cos\alpha \\ y-y_0=\Delta y=t\cos\beta \\ z-z_0=\Delta z=t\cos\gamma \end{cases}$$

$t=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$ 表示 $|PP_0|$, 如果下面极限存在:

$$\lim\lim_{t\to 0}\frac{u(P)-u(P_0)}{t}=\lim\lim_{t\to 0}\frac{u(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-u(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

我们将此极限称为 $u=f(x,y,z)$ 在 P_0 处沿着 l 的方向导数, 记作 $\frac{\partial u}{\partial l}|_{P_0}$

定理 11.4.1 (方向导数计算公式)

$$\frac{\partial u}{\partial l}|_{P_0} = u'_x \cos\alpha + u'_y \cos\beta + u'_z \cos\gamma$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为方向 l 的方向余弦.

11.4.2 梯度

定义 11.4.2 (梯度)

设三元函数 $u = u(x, y, z)$ 在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 处具有一阶偏导数, 定义下面为 $u = u(x, y, z)$ 在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的梯度:

$$\mathbf{guad}\ u|_{P_0} = (u'_x(P_0), u'_y(P_0), u'_z(P_0))$$

梯度和方向导数之间的关系:

$$\frac{\partial u}{\partial l}|_{P_0} = \mathbf{guad}\ u|_{P_0} \bullet \mathbf{l} = |\mathbf{guad}\ u|_{P_0}|l|\cos\theta$$

11.4.3 散度和旋度

定义 11.4.3 (散度和旋度)

设向量场 $A(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$

散度:

$$div\ A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

旋度:

$$rot\ A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

第 12 章 三重积分

定义 12.0.1 (三重积分)

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$$

我们将 $f(x,y,z)$ 看作空间区域 dv 内的密度, 积分表示的就是空间区域的质量,$M = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$, 特别的, 当 $f(x,y,z)=1$ 时, 三重积分表示的积分区域 Ω 的体积.

12.1 三重积分对称性

12.1.1 普通对称性

定义 12.1.1

设 Ω 关于平面 xoz 对称, 我们有:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \begin{cases} 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv, f(x,y,z)=f(x,-y,z) \\ 0, f(x,y,z)=-f(x,-y,z) \end{cases}$$

12.1.2 轮换对称性

定义 12.1.2

若将 x,y,z 任意两个交换位置后积分区域 Ω 保持不变, 我们有:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x)dv = \iiint\limits_{\Omega} f(y)dv = \iiint\limits_{\Omega} f(z)dv$$

12.2 三重积分计算方法

12.2.1 直角坐标系

定义 12.2.1

1. 先一后二:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iint\limits_{D} d\sigma \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

适用于空间区域无侧面, 能" 压扁" 到一个坐标平面内.

2. 先二后一法:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \int_a^b dz \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)d\sigma$$

适用于旋转体, 不能 “压扁” 到一个坐标平面

12.2.2 柱面坐标系

定义 12.2.2 (柱坐标替换)

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \int_a^b dz \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)d\sigma$$

利用极坐标和直角坐标公式转换:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iint\limits_{D_{r\theta}} drd\theta \int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} rf(r\cos\theta, r\sin\theta, z)dz$$

12.2.3 球面坐标系

定义 12.2.3 (球面坐标替换)

令 $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$, 我们有: $dv = r^2\sin\varphi drd\theta$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint\limits_{\Omega} r^2\sin\varphi f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)drd\theta d\varphi$$

其中: $\varphi \in [0,\pi]$, $\quad \theta \in [0,2\pi]$

第 13 章 第一型曲线和曲面积分

13.1 第一型曲线积分

定义 13.1.1 (第一型曲线积分)

$$\int_\Gamma f(x,y)ds \qquad \int_\Gamma f(x,y,z)ds$$

我们将 $f(x,y,z)$ 称为曲线的线密度, 第一型曲线积分的意义是求曲线的质量, 类比定积分, 定积分是在直线上积分, 曲线积分则是在曲线上积分.

特别的, 我们有: $\int_\Gamma ds = L_\Gamma$

定理 13.1.1 (曲线积分的求解)

1. 空间曲线

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} ,t \in [\alpha,\beta]$$

我们有: $ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}dt$

$$\int_L f(x,y,z)ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}dt$$

2. 平面曲线

(i). $L: \ y = f(x), \quad x \in [a,b]$

$$\int_L f(x,y)ds = \int_a^b f(x,y)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$$

(ii). $L:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t\in[\alpha,\beta]$

$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$$

(iii). $L:\ r = r(\theta),\quad \theta\in[\theta_1,\theta_2]$

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}d\theta$$

13.2 第一型曲面积分

定义 13.2.1 (第一型曲面积分)

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS$$

我们将 $f(x,y,z)$ 称为曲面的面密度, 第一型曲面积分的意义是求曲面的质量, 类比二重积分, 二重积分是在平面上积分, 曲面积分则是在曲面上积分.

特别的, 我们有: $\iint_\Sigma dS = S_\Sigma$

定理 13.2.1

$$z = f(x,y) \quad F(x,y,z)=0$$

我们将曲面 Σ 投影到任意一个平面, 这里以 xoy 为例,$dS = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}d\sigma$

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z)\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}d\sigma$$

13.2.1 应用

1. 重心、形心
2. 转动惯量

定义 13.2.2 (转动惯量: $I = mr^2$)

(i). 平面物体:

对 x 轴: $I_x = \iint\limits_D y^2\rho(x,y)d\sigma$

对 y 轴: $I_y = \iint\limits_D x^2\rho(x,y)d\sigma$

对坐标原点 O: $I_O = \iint\limits_D (x^2+y^2)\rho(x,y)d\sigma$

(ii). 空间物体:

对 x 轴: $I_x = \iiint\limits_\Omega (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dv$

对 y 轴: $I_y = \iiint\limits_\Omega (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dv$

对 z 轴: $I_z = \iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dv$

对坐标原点 O: $I_O = \iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)dv$

(iii). 光滑曲线

对 x 轴: $I_x = \int\limits_L (y^2+z^2)\rho(x,y,z)ds$

对 y 轴: $I_y = \int\limits_L (x^2+z^2)\rho(x,y,z)ds$

对 z 轴: $I_z = \int\limits_L (x^2+y^2)\rho(x,y,z)ds$

对坐标原点 O: $I_O = \int\limits_L (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)ds$

(iiii). 曲面

对 x 轴: $I_x = \iint\limits_\Sigma (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dS$

对 y 轴: $I_y = \iint\limits_\Sigma (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dS$

对 z 轴: $I_z = \iint\limits_\Sigma (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dS$

对坐标原点 O: $I_O = \iint\limits_\Sigma (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)dS$

♣

3. 引力

定义 13.2.3 (引力公式: $F = \frac{GMm}{r^2}$)

(i). xoy 平面

$$F_x = GM\iint\limits_D \frac{\rho(x,y)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}d\sigma$$

$$F_y = GM\iint\limits_D \frac{\rho(x,y)(y-y_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}d\sigma$$

$$F_z = GM\iint\limits_D \frac{\rho(x,y)(z-z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}d\sigma, z=0$$

(ii). 空间物体

$$F_x = GM\iiint\limits_\Omega \frac{\rho(x,y)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}dv$$

$$F_y = GM\iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x,y)(y-y_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}dv$$

$$F_z = GM\iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x,y)(z-z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}dv$$

(iii). 曲线

$$F_x = GM\int\limits_{L} \frac{\rho(x,y)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}ds$$

$$F_y = GM\int\limits_{L} \frac{\rho(x,y)(y-y_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}ds$$

$$F_z = GM\int\limits_{L} \frac{\rho(x,y)(z-z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}ds$$

(iiii). 曲面

$$F_x = GM\iint\limits_{\Sigma} \frac{\rho(x,y)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}dS$$

$$F_y = GM\iint\limits_{\Sigma} \frac{\rho(x,y)(y-y_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}dS$$

$$F_z = GM\iint\limits_{\Sigma} \frac{\rho(x,y)(z-z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}dS$$

第 14 章 第二型曲线和曲面积分

14.1 第二型曲线积分

定义 14.1.1 (第二型曲线积分)

物理意义: 变力沿曲线做功

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad \int_\Gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

14.1.1 格林公式

定理 14.1.1

格林公式: (第二型曲线积分 → 二重积分)

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma$$

前提条件: L 取正向, 左手在内侧,L 闭合. 一般适用于平面曲线

14.1.2 斯托克斯公式

定理 14.1.2 (斯托克斯公式)

斯托克斯公式: (第二型曲线积分 → 第一型曲面积分)

$$\oint_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

14.2 第二型曲面积分

定义 14.2.1 (第二型曲面积分)

物理意义: 向量场通过一个曲面的通量

$$\iint\limits_{\Omega} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$$

14.2.1 高斯公式

定理 14.2.1 (高斯公式)

高斯公式: (第二型曲面积分 $\longrightarrow$ 三重积分)

$$\iint\limits_{\Omega} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy = \iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$$

第三部分

线代

第 3 部分目录

第 15 章 行列式

15.1 定义

定义 15.1.1

行列式的定义:

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

(i). 几何定义

n 阶行列式 D_n 的几何意义是 n 维空间中由 n 阶行列式中的 n 个向量围成的 n 维空间体的体积. 比较特别的有:

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = S$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = V$$

(ii). 逆序数法定义

n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

(iii). 行列式展开定理

余子式和代数余子式

行列式中任意一项 a_{ij} 所在行和列去掉后的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式 M_{ij}

行列式中任意一项 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

行列式按照某一行或者某一列展开:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} \end{cases}$$

15.2 性质

推论 15.2.1

行列式的性质:

性质 1 行列互换, 行列式的值不变, 即**行列等价**, 我们有 $|A| = |A^T|$

性质 2 行列式中某行或者某列元素全为 0, 行列式的值为 0, 我们有 $|A| = 0$

性质 3 行列式某行或者某列有公因子 $k(k \neq 0)$, 我们得到下面的式子:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 4 行列式某一行或者某一列元素均为两个元素之和, 我们可以拆成两个行列式之和,

我们得到:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5 行列式两行或者两列互换, 行列式的值相反.

性质 6 行列式中两行或者两列成比例, 行列式的值为 0.

性质 7 行列式中某一行加上另一行的 k 倍, 行列式的值不变.

15.3 几类特殊的行列式

定义 15.3.1

(i). 上三角行列式和下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

(ii). 副三角行列式

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \dots a_{n1}$$

(iii). 拉普拉斯展开式

设 A 为 m 阶矩阵,B 为 n 阶矩阵, 则:

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$$

(iiii). 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)$$

15.4 常见行列式计算技巧

定理 15.4.1

技巧方法

1. 所有行或者所有列之和相等

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} \xrightarrow[{[1]+\sum_{i=2}^{n}[i]}]{} [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \dots & b \\ 1 & a & b & \dots & b \\ 1 & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \dots & a \end{vmatrix} \xrightarrow[i=2,3,\dots n]{ⓝ-①}$$

$$[a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix} = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

有几个特别的例子:

$$\begin{vmatrix} b & b & \dots & b & a \\ b & b & \dots & a & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & a & \dots & b & b \\ a & b & \dots & b & b \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

(i). 当 $a=0, b=1$ 时,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)$$

(ii). 当 $a=2, b=1$ 时,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix} = n+1$$

(ii). 当 $a=x$ 时,

$$\begin{vmatrix} x & b & b & \dots & b \\ b & x & b & \dots & b \\ b & b & x & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \dots & x \end{vmatrix} = [x+(n-1)b](x-b)^{n-1}$$

2. 递推式

简单来说, 就是 n 阶行列式按照某行或者某列一次展开得到的 $n-1$ 阶行列式和原来有相同的结构, 我们可以利用上下阶行列式的关系找出递推公式.

$$D=\begin{vmatrix}1-a & a & 0 & 0\\ -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a\\ 0 & 0 & -1 & 1-a\end{vmatrix}$$

(i). 归纳法

$D_1=1-a$

$D_2=(-1)^{2+1}(-a)a+D_1$

$D_3=(-1)^{3+1}(-a)a^2+D_2$

$D_4=(-1)^{4+1}(-a)a^3+D_3$

$D_4=a^4-a^3+a^2-a+1$

(ii). 递推法

$D_4=(-1)^{4+1}(-a)a^3+D_3$

$D_3=(-1)^{3+1}(-a)a^2+D_2$

$D_2=(-1)^{2+1}(-a)a+D_1$

$D_1=1-a$

$D_4=a^4-a^3+a^2-a+1$

第 16 章 矩阵

16.1 矩阵的定义和运算

定义 16.1.1 (矩阵的定义和运算)

1. 矩阵的定义

由 $m\times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的矩形表格

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为一个 $m\times n$ 矩阵, 简记作 A 或者 $(a_{ij})_{m\times n}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$, 当 $m=n$ 时, 称 A 为 n 阶方阵或者 n 阶矩阵.

2. 矩阵的运算

(i). 加减

$$C=A\pm B=(a_{ij})_{m\times n}\pm(b_{ij})_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n}$$

其中,$c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}$

(ii). 数乘

$$kA=k(a_{ij})_{m\times n}=(ka_{ij})_{m\times n}$$

特别的, 我们有: $|kA|=k^n|A|$, $k\geq 2$

(iii). 矩阵乘法

设 A 是 $m\times s$ 矩阵,B 是 $s\times n$ 矩阵, 矩阵 A,B 可以相乘 (必须满足左乘矩阵的列数和右乘

矩阵的行数相等), 乘积 AB 是 $m\times n$ 矩阵, 记 $C=AB=(c_{ij})_{m\times n}$, 我们有:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj},(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

(iiii). 矩阵转置

将 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的行列互换得到的 $n\times m$ 矩阵称为 A 的转置矩阵, 记作 A_T, 我们有:

$$A^T=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$$

关于矩阵转置, 我们有几个常用的结论:

- $(A^T)^T=A$
- $(kA)^T=k(A)^T$
- $(A+B)^T=A^T+B^T$
- $(AB)^T=B^TA^T$
- 当 $m=n$ 时,$|A^T|=|A|$

(iv). 矩阵的幂

A 是 n 阶方阵,$A^m=\overbrace{AA\cdots A}^{m个}$ 称为 A 的 m 次幂

关于矩阵的幂, 我们需要注意:

- $(A\pm B)^2=A^2+b^2\pm AB\pm BA$
- $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$
- $(AB)^m=\overbrace{(AB)(AB)\cdots(AB)}^{m个}$
- 当 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 时,$f(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_nA^n$

(v). 方阵乘积行列式

A,B 是同阶方阵, 我们有 $|AB|=|A||B|$

定义 16.1.2 (向量的内积和正交)

1. 内积和模

设 $\alpha=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^T,\beta=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^T$, 则称:

$$\alpha^T\beta=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nB_n$$

为向量 α,β 的内积, 记作 $(\alpha,\beta)\Rightarrow(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta$

$\|\alpha\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$ 称为向量 α 的模, 特别的当 $\|\alpha\|=1$ 时, 称 α 为单位向量.

2. 正交

当 $\alpha^T\beta=0$ 时, 称向量 α,β 是正交向量

3. 标准正交向量组

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 满足:

$$\alpha_i^T\alpha_j=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$$

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是标准或单位正交向量.

4. 施密特正交化

线性无关的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的标准正交化公式:

$$\beta_1=\alpha_1$$
$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$
$$\cdots\cdots$$
$$\beta_n=\alpha_n-\frac{(\alpha_n,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_n,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_n,\beta_{n-1})}{(\beta_{n-1},\beta_{n-1})}\beta_{n-1}$$

得到的 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是正交向量组, 我们将 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 单位化得到:

$$\eta_1=\frac{\beta_1}{||\beta_1||},\ \eta_2=\frac{\beta_2}{||\beta_2||},\ \cdots,\ \eta_n=\frac{\beta_n}{||\beta_n||}$$

则 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是一个标准正交向量组.

定义 16.1.3 (重要矩阵)

(1). 零矩阵

所有元素均为 0 的矩阵, 记作 O

(2). 单位矩阵

主对角线元素均为 1, 其余元素全为 0 的 n 阶方阵, 称为 n 阶单位矩阵, 记作 E 或 I

(3). 数量矩阵

数 k 和单位矩阵乘积得到的矩阵被称为数量矩阵

(4). 对角矩阵

非主对角线元素均为 0 的矩阵称为对角矩阵

(5). 上 (下) 三角矩阵

当 $i>(<)j$ 时,$a_{ij}=0$ 的矩阵称为上 (下) 三角矩阵

(6). 对称矩阵

满足条件 $A^T=A$ 的矩阵称为对称矩阵, $A^T=A\Leftrightarrow a_{ij}=a_{ji}$

(7). 反对称矩阵

满足条件 $A^T=-A$ 的矩阵称为对称矩阵, $A^T=A \Leftrightarrow \begin{cases} a_{ij}=-a_{ji}, i\neq j \\ a_{ii}=0 \end{cases}$

(8). 正交矩阵

设 A 是 n 阶方阵, 满足 $A^TA=E$, 我们称 A 是正交矩阵.

A 是正交矩阵 $\Leftrightarrow A^TA=E \Leftrightarrow A^T=A^{-1} \Leftrightarrow A$ 的行 (列) 向量组是标准正交向量组

(9). 分块矩阵

$$A=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} B_1, & B_2, & \cdots, & B_n \end{bmatrix}$$

特别的, 我们有: $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} A^n & O \\ O & B^n \end{bmatrix}$

16.2 矩阵的逆和伴随矩阵

定义 16.2.1 (矩阵的逆和伴随矩阵)

1. 逆矩阵

A, B 是 n 阶方阵,E 是 n 阶单位矩阵, 若 $AB=BA=E$, 则称 A 是可逆矩阵, 并称 B 是 A 的逆矩阵, 且逆矩阵唯一, 我们将 A 的逆矩阵记作 A^{-1}

矩阵 A 可逆的充要条件为: $|A|\neq 0$, 且当 $|A|\neq 0$ 时, 我们有:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

(i). 逆矩阵的性质和公式

- $(A^{-1})^{-1}=A$
- AB可逆, $(AB)^{-1}=B^{-1}A_{-1}$
- 当$k\neq 0, (kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$
- $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$
- A^T可逆, $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

2. 伴随矩阵

将行列式 $|A|$ 的 n^2 个元素的代数余子式按照如下的形式排列成的矩阵称为 A 的伴随矩

阵, 记作 A^*.

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

我们有

$$AA^* = A^*A = |A|E \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

(i). 伴随矩阵的性质和公式

- 对于任意n阶方阵, 我们有$|A^*| = |A|^{n-1}$
- 当$|A| \neq 0, A^* = |A|A^{-1},\ A = |A|(A^*)^{-1}$
- 我们已知$AA^* = A^*A = |A|E$, 将A替换为A^*, A^T, A^{-1}仍然成立

16.3 初等变换和初等矩阵

定义 16.3.1 (初等变换和初等矩阵)

1. 初等变换

(1). 用一个非零常数乘以矩阵的某一行 (列)

(2). 互换矩阵中的某两行 (列) 的位置

(3). 将矩阵的某一行 (列) 的 k 倍加到另一行 (列)

2. 初等矩阵

由单位矩阵经过一次初等变换后得到的矩阵被称为初等矩阵.

(1).$E_i(k)$ 表示 E 的第 i 行 (列) 乘 k 倍

(2).E_{ij} 表示 E 的第 i 行 (列) 与第 j 行 (列) 互换位置

(3).$E_{ij}(k)$ 表示 E 的第 j 行 (列) 的 k 倍加到第 i 行 (列)

3. 初等矩阵的性质和公式

(1). 对任意一个矩阵进行初等变换, 我们可以理解为用对应的初等矩阵左乘或者右乘原矩阵 (行变换为左乘, 列变换为右乘)

(2). 初等矩阵都是可逆矩阵

(3).可逆矩阵可以表示为有限个初等矩阵的乘积, 若A为可逆矩阵, 存在初等矩阵$P_1, P_2, \cdots, P_s$, s.t.$A = P_1P_2\cdots P_s$

(4). 初等变换不会改变矩阵的秩

设 A 是 $m \times n$ 矩阵,P, Q 分别是 m, n 阶可逆矩阵, 我们有

$$r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ)$$

总结

求解逆矩阵的方法:

1. 利用伴随矩阵和原矩阵的关系: $AA^* = A^*A = |A|E$, 求解 $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$
2. 利用高斯-若尔当型解法, 利用初等行 (列) 变换, 来求解逆矩阵:

$$\begin{bmatrix} A & E \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} E & A^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{bmatrix} E \\ A^{-1} \end{bmatrix}$$

16.4 等价矩阵和矩阵的秩

定义 16.4.1 (等价矩阵和矩阵的秩)

1. 等价矩阵

设 A, B 均为 $m \times n$ 矩阵, 若存在可逆矩阵 $P_{m\times m}, Q_{n\times n}$, 使得 $PAQ = B$, 则称 A, B 是等价矩阵, 我们记作 $A \cong B$

我们不难发现, 矩阵 A, B 等价的充要条件为: $rank(A) = rank(B)$, 对于任意矩阵 $A_{m\times n}$, 存在可逆矩阵 P, Q, 使得: $PAQ = \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$, 后者称为 A 的等价标准型, 且 $r = rank(A)$

2. 矩阵的秩

设 A 是 $m \times n$ 矩阵,A 中最高阶非零子式的阶数称为矩阵 A 的秩, 记作 $r(A)$.

这也等价于存在 k 阶子式子不为零, 任意 $k+1$ 阶子式子全为零, 我们记 $r(A) = k$.

特别的, 对于方阵而言:

$$r(A_{n\times n}) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A\text{可逆}$$

3. 有关秩的重要结论

设 A 是 $m \times n$ 矩阵,B 是满足有关矩阵运算要求的矩阵, 我们有

- $0 \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$
- $r(kA) = r(A), k \neq 0$
- $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$
- $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$
- $r(A^*) = \begin{cases} n, r(A) = n \\ 1, r(A) = n-1 \\ 0, r(A) < n-1 \end{cases}$ 其中A为n阶方阵.

证明

(1). $r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$

我们假设 $A_{m\times n}$, $B_{n\times s}$

我们不妨将 B, C 按行写成行向量形式:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}, C = AB = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \cdots + a_{1n}\beta_n \\ a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + \cdots + a_{2n}\beta_n \\ \vdots \\ a_{m1}\beta_1 + a_{m2}\beta_2 + \cdots + a_{mn}\beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$$

我们可以得到: AB的行向量都可以由B的行向量线性表出.

$$r(AB) \le r(B)$$

同理, 我们不妨将 A, C 按列写成列向量形式

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \cdots, & \alpha_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix}, C = AB = \begin{bmatrix} \gamma_1, & \gamma_2, & \cdots, & \gamma_s \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \cdots, & \alpha_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}b_{11}\alpha_1 + b_{21}\alpha_2 + \cdots + b_{n1}\alpha_n\\ b_{12}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 + \cdots + b_{n2}\alpha_n\\ \vdots\\ b_{1s}\alpha_1 + a_{2s}\alpha_2 + \cdots + a_{ns}\alpha_n\end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix}\gamma_1, & \gamma_2, & \cdots, & \gamma_s\end{bmatrix}$$

我们可以得到: AB的列向量都可以由A的列向量线性表出.

$$r(AB) \leq r(A)$$

$$由r(AB) \leq r(A),\ r(AB) \leq r(B) \Rightarrow r(AB) \leq min\{r(A), r(B)\}$$

(2).$r(A+B) \leq r(A) + r(B)$
我们假设

$$A = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s], B = [\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s], [A, B] = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s]$$

$$A + B = [\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \cdots, \alpha_s + \beta_s]$$

$$可以由[A, B]的列向量线性表出 \Rightarrow r(A+B) \leq r([A, B]) \Rightarrow r(A+B) \leq r(A) + r(B)$$

(3).$A_{m\times k}, B_{k\times n}$, 我们有 $r(A) + r(B) - k \leq r(AB)$
我们设 $A_{m\times k}, B_{k\times n}$, 我们有:

$$\begin{bmatrix}E_m & -A\\ O & E_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & O\\ E_k & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_k & -B\\ O & E_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}O & -AB\\ E_k & O\end{bmatrix}$$

$$r(Left) \geq r(A) + r(B),\ r(Right) = r(AB) + k \Rightarrow r(A) + r(B) - k \leq r(AB)$$

$$(4).r(A^*)=\begin{cases} n, r(A)=n \\ 1, r(A)=n-1 \\ 0, r(A)<n-1 \end{cases}$$ 其中A为n阶方阵. 我们有: $AA^*=|A|E$

(i). 当$r(A)=n$, A是可逆矩阵 $\Rightarrow |A|\neq 0$

$$AA^*=|A|E \Rightarrow |A^*|=|A|^{n-1}\neq 0 \Rightarrow A^*\text{是可逆矩阵}, r(A^*)=n$$

(ii). 当$r(A)=n-1$
存在$n-1$阶子式行列式不为0, 我们得到A^*中至少有一个元素不为0, $r(A^*)\geq 1$
$AA^*=|A|E=O \Rightarrow r(A)+r(A^*)\leq n \Rightarrow r(A^*)\leq 1$

$$r(A^*)\geq 1,\ r(A^*)\leq 1 \Rightarrow r(A^*)=1$$

(iii). 当$r(A)<n-1$, 我们得到A的任意$n-1$阶子式行列式值为0, $A^*=O$

$$A^*=O \Rightarrow r(A^*)=0$$

总结

1. 计算仔细小心, 稳步前进
2. $AA^*=|A|E$!!!!
3. 注意: $(AB)^T=B^TA^T$, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
4. 如果某一个矩阵的列向量均为某一个固定列向量的倍数, 则这个矩阵可以写为 $A=\alpha\beta^T$,α, β 均为列向量, 方便计算 A^n.

第 17 章 向量组

17.1 向量和向量组的线性相关性

定义 17.1.1 (向量的定义和运算)

1. n 维向量,n 个数构成的有序数组 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 称为一个 n 维向量, 记作 $\alpha = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$,$\alpha$ 称为 n 维行向量,α^T 称为 n 维列向量, 其中 a_i 称为向量的第 i 个分量.

2. 向量间运算

(i). 加法

$$\alpha + \beta \xLongrightarrow{\text{def}} [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n]$$

(ii). 数乘

$$k\alpha \xLongrightarrow{\text{def}} [ka_1, ka_2, \cdots, ka_n]$$

(iii). 内积和叉积

内积

$$\alpha\dot{\beta} \xLongrightarrow{\text{def}} \sum_{i=1}^{n} a_i b_1$$

叉积： $\alpha = [a_1, a_2, a_3]$, $\beta = [b_1, b_2, b_3]$

$$\alpha\dot{\beta} \xLongrightarrow{\text{def}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

定义 17.1.2 (线性相关和线性表出)

1. 线性组合

设有 m 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_m$ 和 m 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 向量

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$$

称作向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_m$ 的线性组合.

2. 线性表出

如果向量 β 可以表示为向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_m$ 的线性组合, 即存在 m 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$$

我们称向量 β 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_m$ 线性表出.

3. 线性相关

对于向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_m$, 如果存在 m 个不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$$

我们称向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_m$ 线性相关线性相关.

4. 线性无关

对于向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_m$, 如果不存在 m 个不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$$

当且仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$ 时上式成立, 我们称向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_m$ 线性相关线性无关.

定理 17.1.1 (判别线性相关性的七大定理)

定理 一

向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性相关的充要条件为: 至少有一个向量可以由其余的 $n-1$ 个向量线性表出.

逆否命题:

向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性无关的充要条件为: 任意一个向量都不可以由其余的 $n-1$ 个向量线性表出.

证明

(i). 必要性

向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性相关, 我们得到存在不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$, 使得:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

我们不妨假设 $k_1 \neq 0$, 我们可以得到:

$$\alpha_1 = -\frac{k_1}{k_1}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_n}{k_1}\alpha_n$$

至少有一个向量可以由其余的 $n-1$ 个向量线性表出

(ii). 充分性

如果有一个向量可以由其余的 $n-1$ 个向量线性表出, 我们不妨假设 α_1 可以由其余的 $n-1$ 个向量线性表出, 我们得到:

$$\alpha_1 = k_2\alpha_2 + k_2\alpha_3 + \cdots + k_n\alpha_n \Rightarrow 1\alpha_1 - k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

存在不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_n (k_1 = 1)$, 使得:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性相关

定理 二

若向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性无关,$\beta, \alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性相关, 则 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性表出, 且表示法唯一.

证明

(i). 证明存在性

$\beta, \alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性相关, 存在不全为 0 的数 $k_\beta, k_1, k_2, \cdots, k_n$, 使得:

$$k_\beta \beta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

假设 $k_\beta = 0$, 我们得到:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

此时得到不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 使得: $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性无关, 矛盾!!!

我们得到 $k_\beta \neq 0$, 我们可以得到:

$$\beta = -\frac{k_1}{k_\beta}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_\beta}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_n}{k_\beta}\alpha_n$$

向量 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性表出, 证毕

(ii). 证明唯一性 (反证法)

假设向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 对 β 存在两种不同的线性表出, 我们可以得到:

$$\begin{cases} \beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_n\alpha_n \\ \beta = h_1\alpha_1 + h_2\alpha_2 + \cdots + h_n\alpha_n \end{cases}$$

两式相减, 得到:

$$(l_1 - h_1)\alpha_1 + (l_2 - h_2)\alpha_2 + \cdots + (l_n - h_n)\alpha_n = 0$$

至少存在 $l_i - h_i \neq 0, i \in (1, n)$, 这说明向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性相关, 矛盾!!!

我们证明了 β 的线性表出的唯一性.

定理 三

如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_s$ 线性表出, 且 $t > s$, 则 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性相关.

如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_s$ 线性表出, 且 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性相关, 则 $t \leq s$.

证明

向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$ 线性表出, 我们得到:

$$\begin{cases}\beta_1=l_{11}\alpha_1+l_{12}\alpha_2+\cdots+l_{1s}\alpha_s\\ \beta_2=l_{21}\alpha_1+l_{22}\alpha_2+\cdots+l_{2s}\alpha_s\\ \cdots\cdots\\ \beta_t=l_{t1}\alpha_1+l_{t2}\alpha_2+\cdots+l_{ts}\alpha_s\end{cases}$$

我们要证明是否存在不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_t$, 使得:

$$\begin{aligned}k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_t\beta_t &= 0\\ k_1(l_{11}\alpha_1+l_{12}\alpha_2+\cdots+l_{1s}\alpha_s) &+\\ k_2(l_{21}\alpha_1+l_{22}\alpha_2+\cdots+l_{2s}\alpha_s) &+\\ \cdots+k_t(l_{t1}\alpha_1+l_{t2}\alpha_2+\cdots+l_{ts}\alpha_s) &= 0\end{aligned}$$

即:

$$(\sum_{i=1}^{t}k_il_{i1})\alpha_1+(\sum_{i=1}^{t}k_il_{i2})\alpha_2+\cdots+(\sum_{i=1}^{t}k_il_{is})\alpha_s=0$$

当 $\sum_{i=1}^{t}k_il_{i1}=\sum_{i=1}^{t}k_il_{i2}=\cdots=\sum_{i=1}^{t}k_il_{is}=0$ 显然满足, 此时我们得到一个关于 $k_1,k_2,\cdots,k_t$ 的 t 元方程组, 一共有 s 个方程,$t>s$ 时, 未知数个数大于方程数量, 原方程组一定存在非零解.

我们得到存在不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_t$, 使得:

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_t\beta_t=0$$

我们得到: $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性相关, 证毕.

定理四

设 m 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$, 其中

$$\begin{aligned}\alpha_1&=[a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1}]^T\\ \alpha_2&=[a_{12},a_{22},\cdots,a_{n2}]^T\\ &\cdots\cdots\\ \alpha_m&=[a_{1m},a_{2m},\cdots,a_{nm}]^T\end{aligned}$$

向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 线性相关的充要条件时齐次线性方程组

$$AX=0$$

有非零解, 也等价于零空间非零.

$$A=[\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m]=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1m}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nm}\end{bmatrix},\ X=[x_1,x_2,\cdots,x_m]^T$$

逆否命题:

向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 线性无关的充要条件时齐次线性方程组

$$AX=0$$

只有零解, 也等价于零空间为零.

证明

(i). 必要性

向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 线性无关, 我们得到存在不全为 0 的数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$, 使得:

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$$

$$x_1[a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1}]^T+x_2[a_{12},a_{22},\cdots,a_{n2}]^T+\cdots+x_m[a_{1m},a_{2m},\cdots,a_{nm}]^T=0$$

存在不全为 0 的数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 是方程组:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m=0\\\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m=0\end{cases}$$

有非零解, 证毕

(ii). 充分性

方程组 $AX=0$ 有非零解, 我们得到存在不全为 0 的数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 使得:

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$$

此时向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 线性相关, 证毕.

定理 五

如果向量 β 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_s$ 线性表出, 等价于非齐次方程组方程 $AX = \beta$ 有解; 如果向量 β 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_s$ 线性表出, 等价于非齐次方程组方程 $AX = \beta$ 无解.

证明

向量 β 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_s$ 线性表出, 我们可以得到存在不全为 0 的数 $x_1, x_2, \cdots, x_s$ 使得:

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = 0 \Rightarrow [\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_s] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_s \end{bmatrix} = \beta$$

方程组 $AX = \beta$ 有非零解.

定理 六

如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$, 一部分向量线性相关, 那么整个向量组也线性相关.
逆否命题:
如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性无关, 其任意部分向量组也线性无关.

证明

我们不妨设 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_j$ $(j < n)$ 线性相关, 我们得到存在不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_j$ 使得:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_j\alpha_j = 0$$

我们取 $k_1, k_2, \cdots, k_j, k_{j+1} = k_{j+2} = \cdots = k_n = 0$, 我们得到:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_j\alpha_j + 0\alpha_{j+1} + \cdots + 0\alpha_n = 0$$

$k_1, k_2, \cdots, k_j, k_{j+1} = k_{j+2} = \cdots = k_n = 0$ 不全为 0, 整个向量组也线性相关.

定理 七

如果一组 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性无关, 那么把这些向量各任意添加 m 个分量得到的新向量组 $(n+m)$维$\alpha_1^*, \alpha_2^* \cdots, \alpha_n^*$ 线性无关; 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$ 线性相关, 那他们各去掉相同的若干个分量所得到的新向量组也是线性相关.

17.2 极大线性无关组和向量组的秩

定义 17.2.1 (极大线性无关组)

在向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$, 如果存在部分向量组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2}\cdots,\alpha_{i_r}$ 满足:

- $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2}\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性无关.
- 向量组中任意向量α_i, $(i=1,2,\cdots,s)$都可以被向量组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2}\cdots,\alpha_{i_r}$线性表出.

则称向量组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2}\cdots,\alpha_{i_r}$ 是原向量组的一个极大线性无关组.

我们注意到: 一个向量组的极大线性无关组不唯一, 对于线性无关的向量组, 它的极大线性无关组是自身.

♣

定义 17.2.2 (向量组的秩)

向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$ 的极大线性无关组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2}\cdots,\alpha_{i_r}$ 中所含向量的个数 r 称为向量组的秩, 记作:

$$rank(\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s)=r \text{ 或 } r=(\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s)=r$$

性质 1.

- $r(A)$(矩阵的秩) $=r(A$列向量$)$(列秩) $=r(A$行向量$)$(行秩)
- 初等行变换和列变换不改变矩阵的秩
- $A\xrightarrow{\text{初等行变换}}B$, A的行向量与B的行向量是等价向量组
- 设向量组$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$及$\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_t$,若$\beta_i(i=1,2,\cdots,t)$均可由$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$线性表出, 则:
$$r(\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s)\le r(\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_t)$$

♣

17.3 等价向量组

定义 17.3.1 (等价向量组)

设两个向量组: (I) $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$, (II) $\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_t$, 若 (I) 中向量 α_i, $(i=1,2,\cdots,s)$ 均可由 (II) 中向量线性表出, 则称向量组 (I) 可由向量组 (II) 线性表出; 若向量组 (I) 和向量组 (II) 互相线性表出, 称向量组 (I) 与向量组 (II) 是等价向量组, 记作 (I) $\cong$ (II).

性质 1.

- (I) $\cong$ (I)
- 如果 (I) $\cong$ (II), 则 (II) $\cong$ (I)
- 如果 (I) $\cong$ (II), (II) $\cong$ (III), 则 (I) $\cong$ (III)
- 向量组和它的极大线性无关组是等价向量组

17.4 向量空间

定义 17.4.1 (向量空间)

设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中线性无关的有序向量, 对于任意向量 $\alpha \in \mathbb{R}^n$ 均可由向量组 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 线性表出, 我们将表出式记:

$$\alpha = a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \cdots + a_n\xi_n$$

我们称 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 基向量的个数 n 称为向量空间的维度,$[a_1, a_2, \cdots, a_n]^T$ 是向量 α 在基向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 的坐标.

定义 17.4.2 (基变换)

如果 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 和 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 是向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中的两个基, 其有关系:

$$[\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n] = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]C$$

上式是由基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 的基变换公式, 矩阵 C 是由基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 的过渡矩阵,C 的第 i 列即是 η_i 在基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 下的坐标, 过渡矩阵 C 为可逆矩阵.

定义 17.4.3 (坐标变换)

设向量 α 在基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 和基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 下的坐标为别是 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T, \mathbf{y} = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^T$

$$\alpha = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n]\mathbf{x} = [\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n]\mathbf{y}$$

不妨假设由基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 到基 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 的过渡矩阵 C, 我们有:

$$[\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n] = [\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n]C$$

我们得到:

$$\mathbf{x} = C\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} = C^{-1}\mathbf{x}$$

第 18 章 线性方程组

18.1 具体型方程组

18.1.1 齐次方程组

定义 18.1.1 (齐次方程组)

1. 形式

方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

称为 m 个方程,n 个未知数的齐次方程组.

其向量形式为:

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$$

其中:

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} (j = 1, 2, \cdots, n)$$

方程组的矩阵形式为:

$$A_{m\times n}X = 0$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

2. 有解的条件

(i). 当 $r(A)=n$时, ($\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关), 方程组只有零解.

(ii). 当 $r(A)=r<n$时, ($\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关), 方程组有非零解, 且有 $n-r$ 个线性无关解.

3. 解的性质

如果 $A\xi_1=0,\ A\xi_2=0, \forall k_1,k_2\in\mathbb{R},\ A(k_1\xi_1+k_2\xi_2)=0$

4. 基础解系和解的结构

(1). 基础解系

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 满足:

- $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是方程组的解
- $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关
- 方程组$AX=0$的任意一个解均可以由$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性表出

我们称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为方程组 $AX=0$ 的基础解系.

(2). 通解

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为方程组 $AX=0$ 的基础解系, 则 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$ 是方程组 $AX=0$ 的通解, 其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}\in\mathbb{R}$

18.1.2 非齐次方程组

定义 18.1.2 (非齐次方程组)

1. 形式

方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

称为 m 个方程,n 个未知数的非齐次方程组.

其向量形式为:

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$$

其中:

$$\alpha_i=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{bmatrix}(j=1,2,\cdots,n),\ \beta=\begin{bmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{mj}\end{bmatrix}$$

方程组的矩阵形式为:

$$A_{m\times n}X=\beta$$

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

矩阵 $\left[\begin{array}{cccc:c}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_{1j}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_{2j}\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_{mj}\end{array}\right]$ 记作为矩阵 A 的增广矩阵, 简记为 $\left[\begin{array}{c:c}A&\beta\end{array}\right]$

2. 有解的条件

(i).$r(A)\neq r([A,\beta])$, 方程组无解.(β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表出)

(ii). $r(A)=r([A,\beta])=n$, 方程组有唯一解

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{线性无关},\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{线性相关}$$

(iii).$r(A)=r([A,\beta])<n$, 方程组有无穷多组解.

3. 解的性质

设 η_1,η_2,η_3 是非齐次方程组 $AX=\beta$ 的解,ξ 是对应齐次方程组 $AX=0$ 的解, 我们有:

- $\eta_1-\eta_2$是$AX=0$的解
- $k\xi+\eta$是方程组$AX=\beta$的解

4. 解的结构

(1). 特解

η是非齐次性方程组$AX=\beta$的一个特解

(2). 通解

设 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$ 是方程组 $AX=0$ 的通解, 其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}\in\mathbb{R}$, 我们可以得到非齐次性方程组的通解:

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta$$

18.2 两个方程组的公共解

定义 18.2.1 (两个方程组的公共解)

(1). 齐次线性线性方程组 $A_{m\times n}X=0$ 和 $B_{m\times n}X=0$ 的公共解是满足方程组 $\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}X=0$ 的解.

(2). 非齐次线性线性方程组 $A_{m\times n}X=\alpha$ 和 $B_{m\times n}X=\beta$ 的公共解是满足方程组 $\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}$ 的解.

(3). 给出方程组 $A_{m\times n}X=0$ 的通解 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s$, 代入第二个方程组 $B_{m\times n}X=0$ 得到 $k_i(i=1,2,\cdots,s)$ 之间的关系, 代回方程 $A_{m\times n}X=0$

(4). 给出方程组 $A_{m\times n}X=0$ 的基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 和方程组 $B_{m\times n}X=0$ 的基础解系 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$, 公共解为:

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s=l_1\eta_1+l_2\eta_2+\cdots+l_t\eta_t$$

♣

18.3 同解方程组

定义 18.3.1 (同解方程组)

如果两个方程组 $A_{m\times n}X=0$ 和 $B_{m\times n}X=0$ 有完全相同的解, 则称它们为同解方程组.

- $AX=0$的解满足$BX=0$并且$BX=0$的解满足$AX=0$
- $r(A)=r(B)$并且$AX=0$的解满足$BX=0(BX=0$的解满足$AX=0)$
- $r(A)=r(B)=r(\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix})$

♣

第 19 章 特征值和特征向量 2012.08.18

19.1 特征值和特征向量定义

定义 19.1.1 (特征值和特征向量)

设 A 是 n 阶矩阵,λ 为常数, 存在非零列向量 ξ, 满足:

$$A\xi = \lambda\xi$$

则称 λ 为 A 的特征值,ξ 是 A 对应于特征值 λ 的特征向量

注

$$(\lambda E - A)\xi = O \Rightarrow |\lambda E - A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) = 0$$

上面右边是关于 λ 的特征多项式, 也是 A 的特征方程:

$$\lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$$

我们得到:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \\ \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = |A| \end{cases}$$

推论 19.1.1 (特征向量)

- k重特征值至多只有k个线性无关的特征向量
- 若ξ_1, ξ_2是A的属于不同特征值λ_1, λ_2的特征向量, λ_1, λ_2线性无关
- 若ξ_1, ξ_2是A的属于同一特征值λ的特征向量
  $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2(k_1, k_2$不同时为0)仍然是$A$属于特征值$\lambda$的特征向量

表 19.1: 常用特征值和特征向量

矩阵	A	kA	A^k	$f(A)$	A^{-1}	A^*	$P^{-1}AP$
特征值	λ	$k\lambda$	λ^k	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\lvert A\rvert}{\lambda}$	λ
特征向量	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	$P^{-1}\xi$

19.2 相似

定义 19.2.1 (矩阵的相似)

设 A, B 是两个 n 阶方阵, 若存在 n 阶可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP = B$, 则称 A 相似于 B, 记作 $A \sim B$

注

(1). $A \sim A$ 反身性

(2). $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ 对称性

(3). $A \sim B,\ B \sim C \Rightarrow A \sim C$ 传递性

推论 19.2.1 (相似矩阵)

(1).$A \sim B$, 我们得到:

- $r(A) = r(B)$
- $|A| = |B|$
- $|\lambda A - E| = |\lambda B - E|$
- A, B具有相同的特征值

(2).$A \sim B$, 我们得到:

- $A^m \sim B^m$
- $f(A) \sim f(B)$

(3).$A \sim B$且A可逆, 我们得到:

- $A^{-1} \sim B^{-1}$
- $f(A^{-1}) \sim f(B^{-1})$

(4).$A \sim B$, 我们得到:

- $A^T \sim B^T$
- $A^* \sim B^*$

19.2.1 矩阵的相似对角化

定义 19.2.2 (相似对角化)

设 A 是 n 阶方阵, 若存在 n 阶可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$, 其中 Λ 是对角矩阵, 则称 A 可相似对角化, 记作 $A \sim \Lambda$, 称 Λ 为 A 的相似标准型

注

$$P = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n], \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \Lambda \Rightarrow AP = P\Lambda$$

$$A[\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n] = [\lambda_1\xi_1, \lambda_2\xi_2, \cdots, \lambda_n\xi_n] \Rightarrow A\xi_i = \lambda_i\xi_i (i = 1, 2, \cdots, n)$$

推论 19.2.2 (对角化)

- n阶矩阵A可相似对角化 $\Leftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量
- n阶矩阵A可相似对角化 $\Leftrightarrow$ 对于每个k_i重特征值都有k_i个特征向量
- A有n个特征值 $\Rightarrow$ n阶矩阵A可相似对角化
- n阶矩阵A为实对称矩阵 $\Rightarrow$ A可相似对角化

19.2.2 实对称矩阵的相似对角化

定义 19.2.3 (实对称矩阵相似对角化)

$A^T = A$且A中元素全为实数, 我们把A称作实对称矩阵

性质

- 实对称矩阵必可相似对角化, 特征值为实数, 特征向量为实向量
- 实对称矩阵属于不同特征值的特征向量互相正交
- $\exists$正交矩阵Q, s.t. $Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \Lambda$

第 20 章 二次型

20.1 二次型定义

定义 20.1.1 (二次型)

n 元变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + & \cdots & +2a_{1n}x_1x_n \\
+a_{22}x_2^2 + & \cdots & +2a_{2n}x_2x_n \\
+ & \cdots & \\
& & +a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

称为 n 元二次型, 简称为二次型.

我们令 $a_{ij} = a_{ji}$, 我们可以得到:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n + \cdots + a_{n1}x_nx_1 + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

我们令

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

二次型可表示为: $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, A 为二次型 $f(\mathbf{x})$ 的矩阵

20.2 二次型的标准型和规范型

定义 20.2.1 (线性变换)

对于 n 元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 令:

$$\begin{cases} x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n \\ x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n \\ \qquad\qquad\cdots\cdots \\ x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n \end{cases}$$

记

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

上面的线性变化可写作:

$$\mathbf{x}=C\mathbf{y}$$

我们把这种变换称为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的**线性变换**, 如果线性变换矩阵 C 可逆,$|C|\neq 0$, 则称为**可逆线性变换**.

我们有:

$$f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^TA\mathbf{x},\ \mathbf{x}=C\mathbf{y}\Rightarrow f(\mathbf{x})=(C\mathbf{y})^TA(C\mathbf{y})=\mathbf{y}^T(C^TAC)\mathbf{y}$$

如果我们记 $B=C^TAC$, 我们得到

$$f(\mathbf{x})=y^TBy=g(\mathbf{y})$$

二次型 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ 通过线性变换 $\mathbf{x}=C\mathbf{y}$ 得到了一个新二次型 $g(\mathbf{y})=y^TBy$

定义 20.2.2 (矩阵合同)

设 A,B 为 n 阶矩阵, 若存在可逆矩阵 C, 使得:

$$B=C^TAC$$

则称 A,B 合同, 记作 $A\simeq B$, 其对应的二次型 $f(\mathbf{x})$ 与 $g(\mathbf{y})$ 为合同二次型.

注

(1). $A\simeq A$　反身性

(2). $A\simeq B\Rightarrow B\simeq A$　对称性

(3). $A\simeq B,\ B\simeq C\Rightarrow A\simeq C$　传递性

定义 20.2.3 (标准型和规范型)

1. 二次型中只有平方项, 而没有交叉项 (所有交叉项系数全为 0), 形如:

$$d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$$

的二次型为标准二次型.

2. 在标准二次型中, 如果二次型的系数 $d_i = \{0, 1, -1\}$, 这样的二次型称为规范型二次型.

3. 二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ 合同于标准型 $d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$, 则称 $d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$ 为二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ 的合同标准型.

4. 二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ 合同于规范型 $x_1^2 + \cdots + +x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_q^2$, 则称 $x_1^2 + \cdots + +x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_q^2$ 为二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ 的合同规范型.

5. 任何二次型都可以通过可逆线性变换化为标准型或者规范型, 对任意实对称矩阵 A, 必存在可逆矩阵 C, 使得 $C^TAC = \Lambda$

6. 任何二次型都可以通过正交变换化为标准型, 对任意实对称矩阵 A, 必存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^{-1}AC = Q^TAQ = \Lambda$

♣

定义 20.2.4 (惯性定理)

无论用什么样的可逆线性变换得到的二次型标准型或者规范型, 标准型或者规范型中正项个数 p, 负项个数 q 都是不变的,p 被称为正惯性指数,q 被称为负惯性指数.

♣

注

(1). 二次型的秩为r, $r = p + q$

(2). 两个二次型合同的充要条件为有相同的正、负惯性指数, 或者相同的秩及正 (负) 惯性指数

20.3 正定二次型

定义 20.3.1 (正定矩阵)

n 元二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \mathbf{x}^TA\mathbf{x}$, 对于任意 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T \neq 0$, 都有 $\mathbf{x}^TA\mathbf{x} > 0$, 则称 f 为正定二次型, 二次型对应的矩阵 A 为正定矩阵.

推论 20.3.1 (二次型正定充要)

- f正定 $\Leftrightarrow$ f正惯性指数$p = n$
- f正定 $\Leftrightarrow$ ∃可逆矩阵D, s.t. $A = D^TD$
- f正定 $\Leftrightarrow$ $A \simeq E$
- f正定 $\Leftrightarrow$ A的所有特征值$\lambda_i > 0$
- f正定 $\Leftrightarrow$ A的全部顺序主子式大于0

♠

推论 20.3.2 (二次型正定必要)

- f 正定 $\Rightarrow a_{ii} > 0$
- f 正定 $\Rightarrow |A| > 0$

第四部分

概率论

第 4 部分目录

第 21 章 随机事件和概率

定义 21.0.1 (随机试验)

- 试验可以在相同条件下重复进行
- 试验的所有结果是明确可知道的, 并且不止一个
- 每一次试验出现哪一个结果, 事先并不确定

定义 21.0.2 (随机事件)

- 每一次试验中可能出现也可能不出现的结果称为随机事件
- 在试验中一定发生的事件为必然事件, 一定不发生的事件为不可能事件

定义 21.0.3 (样本空间)

- 随机试验的每一个可能的结果称为样本点, 记作ω
  样本点的全体组成的几何称为样本空间, 记作$\Omega \Rightarrow \Omega = \{\omega\}$
- 由一个样本点构成的事件为基本事件
- 随机事件A是由若干个基本事件组成 $\Rightarrow A \subset \Omega$

21.1 事件的关系和运算

定义 21.1.1 (事件间关系)

- 包含: 事件A发生, 事件B发生 $\Rightarrow A \subset B$
- 相等: $A \subset B,\ B \subset A \Rightarrow A = B$
- 相容: $AB \neq \varnothing$
- 互斥: $AB = \varnothing$
- 对立: $A \cup B = \Omega, A \cap B = \varnothing$

定义 21.1.2 (运算法则)

- 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- 分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $De\ Morgan's\ laws$: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

21.2 概率定义

定义 21.2.1 (概率定义)

1. 描述性定义

通常将随机事件 A 发生的可能性大小的度量 (非负值) 称为事件 A 发生的概率, 记作 $P(A)$

2. 统计性定义

在相同条件下做重复实验, 事件 A 出现的次数 k 和总的试验次数 n 的比 $\frac{k}{n}$ 称为事件 A 在这 n 次试验中出现的频率. 当试验次数 n 足够大时, 频率将稳定于某个常数 p,n 越大, 频率偏离 p 的可能性越小, 我们把这个常数 p 称为事件 A 发生的概率.

3. 公理化定义

设随机事件的样本空间为 Ω, 如果对于每一个事件 A 都有一个确定的实数 $P(A)$, 且事件函数 $P(*)$ 满足:

- 非负性: $P(A) \geq 0$
- 规范性: $P(\Omega) = 1$
- 可列可加性: 对于任意两个互不相容的事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$, 我们有:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

21.3 古典概率型和几何概率型

定义 21.3.1 (古典概率型)

古典概率型样本空间满足:

- 只有有限个基本事件
- 每个基本事件都是等可能发生

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{事件}A\text{所含的基本事件的个数}}{\text{样本空间内的基本事件个数}}$$

定义 21.3.2 (几何概率型)

几何概率型样本空间满足:

- 无限个基本事件
- 每个基本事件都是等可能发生
- 样本空间是一个可以度量的有界区域

$$P(A)=\frac{S_A\text{的几何度量}}{\text{样本空间内的几何度量}}$$

21.4 概率论基本公式

定义 21.4.1 (性质和基本公式)

- $0\leq P(A)\leq 1, P(\varnothing)=0, P(\Omega)=1$
- $A\subset B\Rightarrow P(B-A)=P(B)-P(A), P(B)\geq P(A)$
- $P(\overline{A})=1-P(A)$
- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

定义 21.4.2 (公式)

定理 21.4.1 (条件概率公式)

A,B 是两个任意事件, 如果 $P(A)>0$, 我们称在 A 发生的条件下 B 发生的概率为条件概率, 我们记作 $P(B|A)$.

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

定理 21.4.2 (乘法公式)

$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件, 且 $P(A_i)>0,(i=1,2,\cdots,n), P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$, 我们有:

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

特别的, 当 $n=2$ 时, 我们有:

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$$

定理 21.4.3 (全概率公式)

如果有完备事件组 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$, 满足 $\bigcup_{i=1}^n A_i=1, A_iA_j=\varnothing$, 对于任意事件 B, 我们有:

$$B=\bigcup_{i=1}^n A_iB,\ P(B)=\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

定理 21.4.4 (贝叶斯公式)

如果有完备事件组 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$, 满足 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = 1, A_iA_j = \varnothing$, 对于任意事件 B, 我们有:

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_jB)}{P(B)} = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}, j = 1,2,\cdots,n$$

21.5 事件独立性和独立重复实验

定义 21.5.1 (定义)

1. 事件的独立性

(1). 描述性定义

事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意一个事件 A_i 发生的概率不受其他 $n-1$ 个事件的影响, 我们称这 n 个事件相互独立.

(2). 数学定义

A, B 为两个事件, 如果我们有: $P(AB) = P(A)P(B)$, 则称事件 A, B 相互独立.

2. 试验的独立性

如果各个试验的结果是相互独立的, 我们称这些试验是相互独立的, 试验序列 $\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ 中任意两个试验 E_i, E_j, 在这两个试验中任意两个结果 A_{ip}, A_{iq} 满足: $P(A_{ip}A_{jq}) = P(A_{ip})P(A_{jq})$, 我们称试验序列相互独立.

注

相互独立 $\Rightarrow$ 两两独立, 两两独立 $\nRightarrow$ 相互独立

第 22 章 一维随机变量及其分布

22.1 一维随机变量

定义 22.1.1 (随机变量)

设随机试验 E 的样本空间 $\Omega = \{\omega\}$ 满足: $\forall \omega \in \Omega$ 都有唯一的实数 $X(\omega)$ 与之对应, 且对任意实数 x, 都有 $\{\omega | X(\omega) \le x, \omega \in \Omega\}$ 是随机事件, 我们则称定义在 Ω 上的单值函数 $X(\omega)$ 是随机变量.

定义 22.1.2 (分布函数)

设 X 是随机变量,x 是任意实数, 称函数 $F(x) = P(X \le x)$ 为随机变量 X 的分布函数, 或者称 X 服从 $F(x)$ 分布, 记作 $X \sim F(x)$

- $F(x)$ 是单调不减函数,$\forall x_1 \le x_2$, 我们有 $F(x_1) \le F(x_2)$
- $F(x)$ 是右连续函数, 我们有 $\lim\limits_{x \to x_0^+} F(x_0^+) = F(x_0)$
- $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0,\ F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- $P\{X \le a\} = F(a),\ P\{X < a\} = F(a^-),\ P\{X = a\} = F(a) - F(a^-)$

22.2 一维离散型随机变量

定义 22.2.1 (一维离散型随机变量)

随机变量 X 只能取有限个值 $x_1, x_2, \cdots$, 则称 X 为离散型随机变量, 我们有:

$$P\{X = x_i\} = p_i, i = 1, 2, \cdots$$

我们将上面的式子称为随机变量 X 的分布列、分布律或者概率分布, 记作 $X \sim p_i$, 概率

分布通常用表格或者矩阵形式表示.

X	x_1	x_2	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$

或 $X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$

数列 $\{p_i\}$ 是离散型随机变量的概率分布的充要条件为: $p_i \geq 0, \sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$

我们假设离散型随机变量的概率分布为: $P(X = x_i) = p_1$, 我们得到离散型随机变量 X 的分布函数:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

对实轴上任意集合 B, 我们有:

$$P(X \in B) = \sum_{x_i \in B} P(X = x_i)$$

$$P(a < X \leq b) = P(x \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

定义 22.2.2 (常见离散型随机变量分布)

(1).0-1分布

$X \sim B(1, p)$

$$P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$$

(2).二项分布

$X \sim B(n, p)$, 试验次数为 n, 成功概率为 p, 随机变量 X 为成功次数

$$P(X = k) = C_k^n p^k (1 - p)^{n-k}, (k = 0, 1, 2, \cdots, n), 0 < p < 1$$

(3).泊松分布

$X \sim P(\lambda)$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, (k = 0, 1, 2, \cdots), 0 < p < 1$$

(4).几何分布

$X \sim G(p)$

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p, (k = 1, 2, \cdots), 0 < p < 1$$

(5).超几何分布

$X \sim H(n, N, M)$

$$P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, (max\{0, n - M + N\} \leq k \leq min\{M, n\})$$

22.3 一维连续型随机变量

定义 22.3.1 (连续型随机变量分布函数和密度函数)

随机变量 X 的分布函数可以表示为:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt, t\in\mathbb{R}$$

其中 $f(x)$ 是非负可积函数, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$, 我们称 X 是连续型随机变量,$f(x)$ 是随机变量 X 的**概率密度函数**, 记作 $X\sim f(x)$

对于连续型随机变量 X, 我们有:

$$P(X=c)=0$$

$$P(a<X<b)=P(a\le X<b)=P(a<X\le b)=P(a\le X\le b)$$

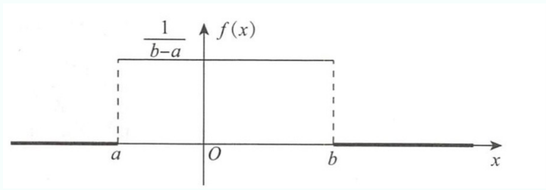
$$P(a<X<b)=\int_{a}^{b}f(x)dx$$

定义 22.3.2 (常见连续型随机变量分布)

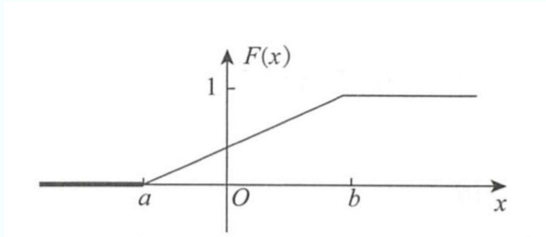
(1).均匀分布

$X\sim U(a,b)$,X 的概率密度函数 $f(x)$ 和分布函数 $F(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & x\le a 或 x\ge b\end{cases},\quad F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x<b\\ 1, & x\ge b\end{cases}$$



(a) 概率密度

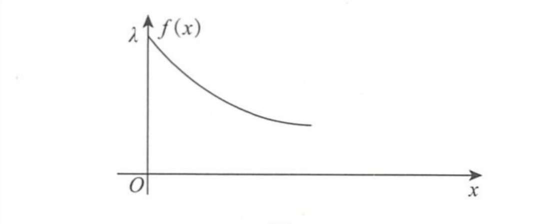


(b) 分布函数

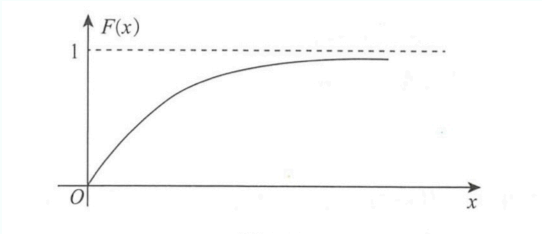
(2).指数分布

$X\sim E(\lambda)X$ 的概率密度函数 $f(x)$ 和分布函数 $F(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},\quad F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}\quad(\lambda>0)$$



(c) 概率密度



(d) 分布函数

(3).正态分布

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$,X 的概率密度 $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}, (-\infty < x < +\infty)$$

特别的, 当 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时,$X \sim f(x)$ 是标准正态分布:

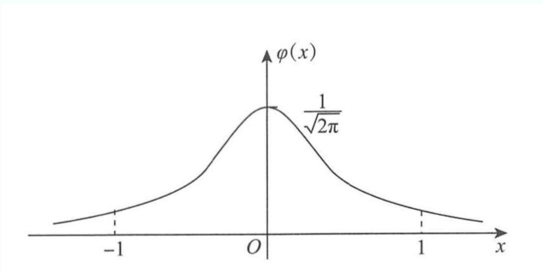
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, (-\infty < x < +\infty)$$

关于正态分布, 我们有:

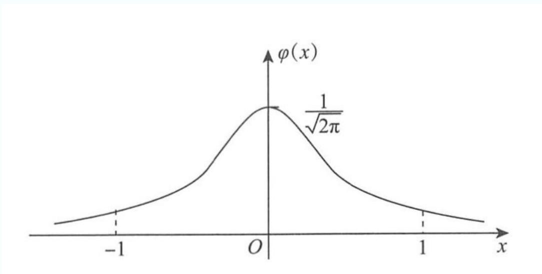
$$F(x) = P(X \leq x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

$$P(a \leq x \leq b) = \Phi(\frac{b-u}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

$$F(\mu - x) + F(\mu + x) = 1,\ aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$



(e) 概率密度



(f) 分布函数

22.4 一维随机变量函数的分布

定义 22.4.1

设 X 是随机变量, 函数 $y = g(x)$, 以随机变量 X 作为自变量的函数 $Y = g(X)$ 也是随机变量, 称为随机变量函数.

我们一般有离散型 $\rightarrow$ 离散型和连续型 $\rightarrow$ 离散型两种随机变量函数.

第 23 章 多维随机变量及其分布

23.1 基本概念

定义 23.1.1 (n 维随机变量)

如果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是定义在同一个样本空间 Ω 上的 n 个随机变量，我们称 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 n 维随机向量.

对于任意的 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 我们把 n 元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

称为 n 维随机向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的**联合分布函数**

特别的, 当 $n = 2$ 时, 记 (X, Y) 为**二维随机变量**或者**二维随机向量**, 我们称 $F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\}$ 为二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数, 记作:

$$(X, Y) \sim F(x, y) \Leftrightarrow F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\}$$

随机变量 X 与 Y 的分布函数 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 分别称为随机变量关于 (X, Y) 关于 X 和 Y 的边缘分布函数.

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < +\infty\} = F(x, +\infty)$$

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X < +\infty, Y \le y\} = F(+\infty, y)$$

注

二维随机变量联合分布性质

(1). 单调性 (单调不减)

$$\forall x,\ \text{当} y_1 < y_2 \text{时}, F(x, y_1) \leq F(x, y_2)$$

$$\forall y,\ \text{当} x_1 < x_2 \text{时}, F(x_1, y) \leq F(x_1, y)$$

(2). 右连续性

$$\lim_{x \to x_0^+} F(x, y) = F(x_0 + 0, y) = F(x_0, y)$$

$$\lim_{y \to y_0^+} F(x, y) = F(x, y_0 + 0) = F(x, y_0)$$

(3). 有界性

$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0,\ F(+\infty, +\infty) = 1$$

(4). 非负性 $\forall x_1 < x_2, y_1 < y_2$, 我们有:

$$F(x_1 < x \leq x_2, y_1 < y \leq y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \geq 0$$

♣

23.2 二维离散型随机变量

表 23.1: 离散型二维随机变量概率分布

$X \backslash Y$	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$P\{X = x_i\}$
x_1	p_{11}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	p_{1*}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	p_{i*}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$P\{Y = y_j\}$	p_{*1}	$\cdots$	p_{*j}	$\cdots$	1

定义 23.2.1 (二维离散型随机变量)

1. 概率分布

二维随机变量 (X, Y) 只能取有限对值或可列对值 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n), \cdots$, 则称

(X,Y) 为离散型随机变量,(X,Y) 满足概率分布:

$$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\},i,j=1,2,\cdots$$

上面的式子称为 (X,Y) 的联合分布律, 记作 $(X,Y)\sim p_{ij}$, 如 **table** : 23.1所示

数列$\{p_{ij}\},i,j=1,2,\cdots$是某一二维随机变量的概率分布的充要条件:

$$p_{ij}\geq 0,\ \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1$$

2. 联合分布函数、边缘分布、条件分布

(1). 联合分布函数

$$F(x,y)=P\{X\leq x,Y\leq y\}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}$$

(2). 边缘分布

X 的边缘分布:

$$p_{i*}=P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},(i=1,2,\cdots)$$

Y 的边缘分布:

$$p_{*j}=P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij},(j=1,2,\cdots)$$

(3). 条件分布

X 在 $Y=y_j$ 下的条件分布:

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{*j}},i=1,2,\cdots$$

Y 在 $X=x_i$ 下的条件分布:

$$P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i*}},j=1,2,\cdots$$

♣

23.3 二维连续型随机变量

定义 23.3.1 (二维连续型随机变量)

1. 联合分布函数、概率密度

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv,(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$F(x,y)$ 是二维随机变量 (X,Y) 的概率分布函数,$f(x)$ 是二维随机变量 (X,Y) 的概率密度函数.

$$f(x,y) \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy$$

注

- $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续, 我们有: $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}|_{(x_0,y_0)} = f(x_0,y_0)$
- $F(x,y)$ 连续且可导, $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$

2. 边缘分布函数、边缘概率密度

$(X,Y) \sim f(x,y)$,X 的边缘分布函数和边缘概率密度:

边缘分布函数

$$F_X(x) = F(x,+\infty) = \int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dv\right]du$$

边缘概率密度

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$(X,Y) \sim f(x,y)$,Y 的边缘分布函数和边缘密度函数:

边缘分布函数

$$F_Y(y) = F(+\infty,y) = \int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)du\right]dv$$

边缘概率密度

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

3. 条件分布函数、条件概率密度

$(X,Y) \sim f(x,y)$,X 在 $Y=y$ 条件下的条件分布函数和条件概率密度:

条件概率密度

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, (f_Y(y) > 0)$$

条件分布函数

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)dx = \int_{-\infty}^{x}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx$$

$(X,Y) \sim f(x,y)$,Y 在 $X=x$ 条件下的条件分布函数和条件概率密度:

条件概率密度

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, (f_X(x) > 0)$$

条件分布函数

$$F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(y|x)dy = \int_{-\infty}^{y} \frac{f(x,y)}{f_X(x)}dy$$

定义 23.3.2 (常见二维分布)

(1). 二维均匀分布

(X,Y) 在有界区域 D 服从均匀分布,(X,Y) 的概率密度为:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{S_D}, & (x,y) \in D \\ 0, \text{其他} \end{cases} \quad S_D\text{是区域的面积}$$

(2). 二维正态分布

(X,Y) 概率密度为:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$$

其中 $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1$, 我们称 (X,Y) 服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 的二维正态分布, 记作 $(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$

注

- $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$,$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$,$\rho$ 是 X 与 Y 的相关系数

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_1\sigma_2}$$

- X 和 Y 的条件分布都是正态分布
- $aX + bY(a \neq 0\text{或者}b \neq 0)$ 服从正态分布
- X,Y 相互独立的充要条件为 X,Y 不相关 $\Leftrightarrow \rho = 0$

23.4 独立性

定义 23.4.1 (独立性)

1. 概念

设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布 $F(x,y)$, 边缘分布分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 如果对任意实数 (x,y), 我们都有:

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \Leftrightarrow X\text{和}Y\text{相互独立}$$

- 随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立 $\Leftrightarrow F(x_1, x_1, \cdots, x_n) = F(x_1)\ldots F(x_2)\cdots F(x_n)$
- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 则其中任意 $k(2 \leq k \leq n)$ 个随机变量也相互独立

- 两个多维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 与 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_m)$ 相互独立, 我们有:

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m) = F_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \ldots F_2(y_1, y_2, \cdots, y_m)$$

- (X, Y) 为独立的二维随机变量, 边缘分布和条件分布相等, 边缘概率密度与条件概率密度相等.$(P\{Y = y_j\} > 0,\ P\{X = x_i\} > 0)$

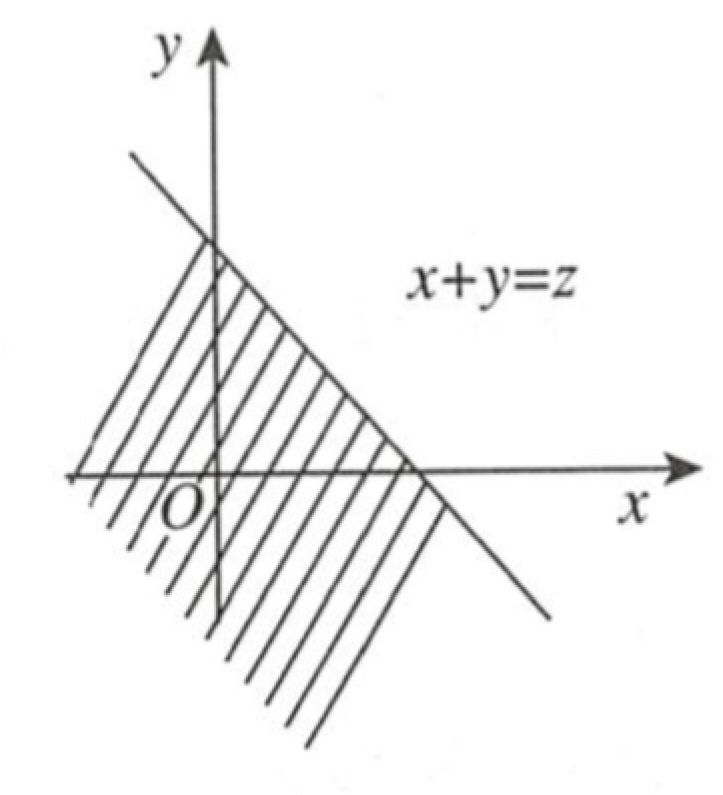
$$P\{X = x_i|Y = y_j\} = P\{X = x_i\},\ P\{Y = y_j|X = x_i\} = P\{Y = y_j\}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = f_X(x)(f_Y(y) > 0),\ f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = f_Y(y)(f_X(x) > 0)$$

定义 23.4.2 (连续型多维随机变量函数的分布)

$(X, Y) \sim f(x, y)$

(1). 和的分布



(a) $X + Y$

$Z = X + Y$

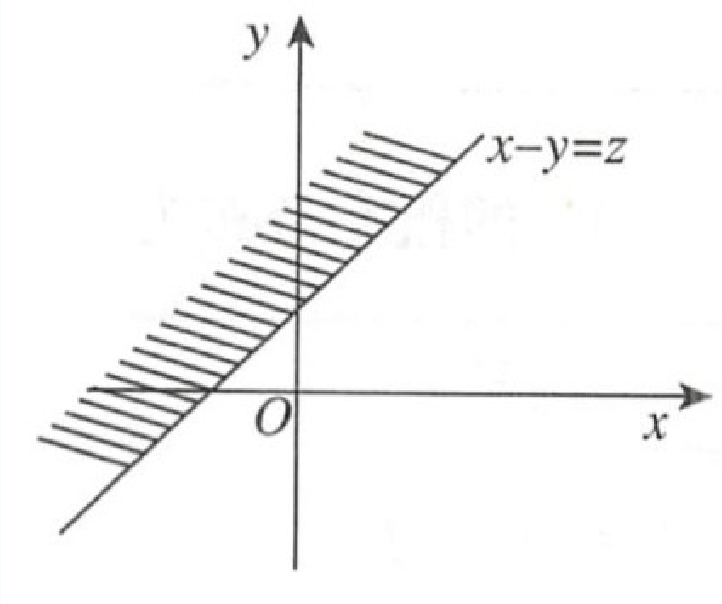
分布函数:

$$F_Z(z) = P\{X + Y \le z\} = \iint\limits_{D_z: x+y\le z} f(x, y)d\sigma = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y)dy \\ \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{z-y} f(x, y)dx \end{cases}$$

概率密度:

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)dy \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx \end{cases}$$

(2). 差的分布



(b) $X-Y$

$Z = X - Y$

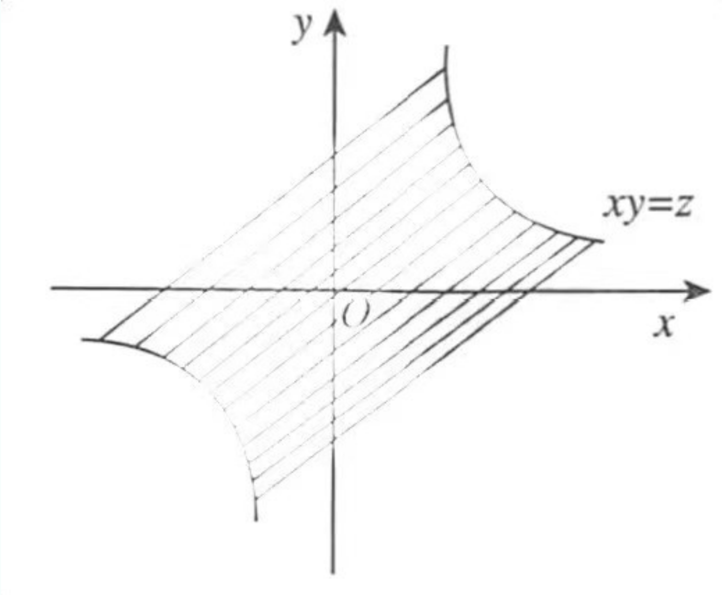
分布函数:

$$F_Z(z) = P\{X - Y \le z\} = \iint\limits_{D_z: x-y\le z} f(x,y)d\sigma = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{x-z}^{+\infty} f(x,y)dy \\ \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{y+z} f(x,y)dx \end{cases}$$

概率密度:

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z+y, y)dy \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, x-z)dx \end{cases}$$

(3). 积的分布



(c) XY

$Z = XY$

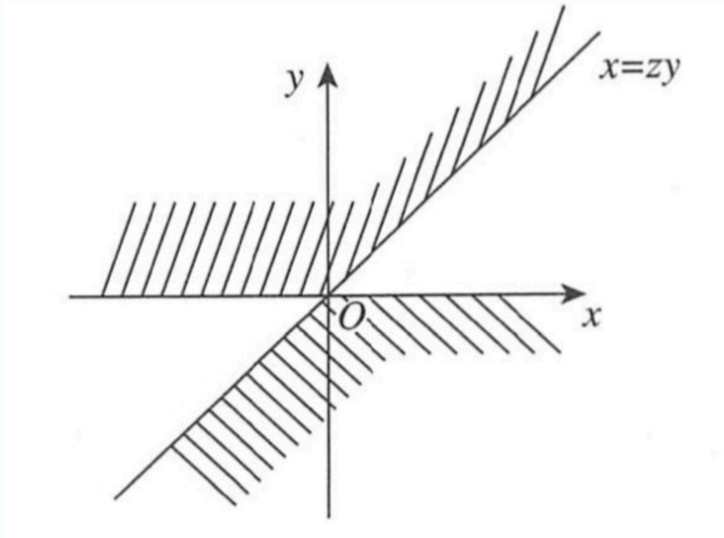
分布函数:

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{XY \le z\} = \iint\limits_{D_z: xy\le z} f(x,y)d\sigma \\
&= \begin{cases} \int_{-\infty}^{0} dy \int_{\frac{z}{y}}^{+\infty} f(x,y)dx + \int_{0}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{\frac{z}{y}} f(x,y)dx \\ \int_{-\infty}^{0} dx \int_{\frac{z}{x}}^{+\infty} f(x,y)dy + \int_{0}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{\frac{z}{x}} f(x,y)dy \end{cases}
\end{aligned}
$$

概率密度:

$$
f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{0}(-\frac{1}{y})f(\frac{z}{y},y)dy + \int_{0}^{+\infty}\frac{1}{y}f(\frac{z}{y},y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|y|}f(\frac{z}{y},y)dy \\ \int_{-\infty}^{0}(-\frac{1}{x})f(x,\frac{z}{x})dx + \int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x}f(x,\frac{z}{x})dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f(x,\frac{z}{x})dx \end{cases}
$$

(4). 商的分布



(d) $\frac{X}{Y}$

$Z = \dfrac{X}{Y}$

分布函数:

$$F_Z(z) = P\{\frac{X}{Y} \le z\} = \iint\limits_{D_z:\frac{X}{Y}\le z} f(x,y)d\sigma = \int_{-\infty}^{0} dy \int_{zy}^{+\infty} f(x,y)dx + \int_{0}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{zy} f(x,y)dx$$

概率密度:

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \int_{-\infty}^{0} (-y)f(zy,y)dy + \int_{0}^{+\infty} yf(zy,y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |y|f(zy,y)dy$$

(5).$max\{X,Y\}$

$Z = max\{X,Y\}$

分布函数:

$$\begin{aligned} F_Z(z) = P\{Z \le max\{X,Y\}\} &= P\{X \le z\} \cup P\{Y \le z\} \\ &= P\{X \le z\} + P\{Y \le z\} - P\{X \le z, Y \le z\} \\ &= F_X(z) + F_Y(z) - F(z,z) \end{aligned}$$

概率密度:

$$f_Z = F_Z'(z) = f(z,z)$$

(6).$min\{X,Y\}$

$Z = min\{X,Y\}$

分布函数:

$$F_Z(z) = P\{Z \le min\{X,Y\}\} = P\{X \le z, Y \le z\} = F(z,z) \Rightarrow F_{max}(z) = F(z,z)$$

概率密度:

$$f_Z = F_Z'(z) = f_X(z) + f_Y(z) - f(z,z)$$

注

- n 个相互独立的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$,$Z_1 = max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$, $Z_2 = min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$,$Z_1, Z_2$ 的分布函数:

$$F_{max}(z) = F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)$$

$$F_{min}(z) = 1 - [1 - F_{Z_1}(z)][1 - F_{Z_2}(z)]\cdots[1 - F_{Z_n}(z)]$$

- $X_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 独立同分布, 我们有:

$$F_{max}(x) = [F(x)]^n,\ f_{max}(x) = n[F(x)]^{n-1}f(x)$$

$$F_{min}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n,\ f_{min}(x) = nf(x)[1 - F(x)]^{n-1}$$

表 23.2: 常见分布可加性

X	Y	$X+Y$
$B(n,p)$	$B(m,p)$	$B(n+m,p)$
$P(\lambda_1)$	$P(\lambda_2)$	$P(\lambda_1+\lambda_2)$
$N(\mu_1,\sigma_1^2)$	$N(\mu_2,\sigma_2^2)$	$N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$
$\chi^2(n)$	$\chi^2(m)$	$\chi^2(n+m)$

第 24 章 随机变量的数字特征

24.1 一维随机变量的数字特征

定义 24.1.1 (数学期望)

1. X 是离散型随机变量,X 的分布列为 $p_i = P\{X = x_i\}(i = 1, 2, \cdots, n)$, 如果级数 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} x_i p_i$ 绝对收敛, 我们称随机变量 X 的数学期望存在, 并将其记作 $E(X)$.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i$$

2. X 是连续型随机变量,X 的概率密度为 $f(x)$, 如果积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$ 绝对收敛, 我们称随机变量 X 的数学期望存在, 并将其记作 $E(X)$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$$

- a_i为常数,$E\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$
- $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$, $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$
- X与Y相互独立 $\Rightarrow$ $E(XY) = E(X)E(Y), E\left[g_1(X)\ldots g_2(Y)\right] = E\left[g_1(X)\right]\ldots E\left[g_2(Y)\right]$
- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 我们有:

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i),\ E\left[\prod_{i=1}^{n} g_i(X_i)\right] = \prod_{i=1}^{n} E\left[g_i(X_i)\right]$$

定义 24.1.2 (方差和标准差)

设 X 是随机变量, 如果 $E[(X-EX)^2]$ 存在, 我们将 $E[(X-EX)^2]$ 记作 X 的方差 $D(X)(DX)$:

$$D(X)=E[(X-EX)^2]=E(X^2)-[E(X)]^2$$

我们将 $\sqrt{D(X)}$ 称为随机变量的**标准差**或者**均方差**, 记作 $\sigma(X)$.

- $DX \geq 0,\ E(X^2)=DX+(EX)^2$
- $D(c)=0,\ c$为常数
- $D(aX+b)=a^2D(X),\ D(X+b)=D(X)$
- $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2Cov(X,Y)$
- $X^*=\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ 是 X 的标准化随机变量,$E(X^*)=0, D(X^*)=1$
- 如果X和Y相互独立, 我们得到
$$D(aX+bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)$$
- $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是相互独立, 我们有:
$$D\left(\sum_{i=1}^n a_iX_i\right)=\sum_{i=1}^n a_i^2D(X_i)$$
$$D\left(\sum_{i=1}^n g_i(X_i)\right)=\sum_{i=1}^n D\left[g_i(X_i)\right]$$

定义 24.1.3 (切比雪夫不等式)

如果随机变量 X 的期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 都存在, 对任意 $\varepsilon>0$, 我们都有:

$$\boxed{P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}\text{或者}P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}}$$

注

24.2 二维随机变量的数字特征

定义 24.2.1 (数学期望)

设 X,Y 为随机变量,$g(X,Y)$ 为 X,Y 的函数 (g 是连续函数)

1. (X,Y) 是离散型随机变量, 联合分布为:

$$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}(i,j=1,2,\cdots)$$

级数 $\sum_i \sum_j g(x_i, y_j)p_{ij}$ 绝对收敛, 我们定义:

$$E[g(X,Y)] = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j)p_{ij}$$

2. (X,Y) 是连续型随机变量, 概率密度为 $f(x,y)$, 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy$ 绝对收敛, 我们定义:

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy$$

定义 24.2.2 (协方差与相关系数)

如果随机变量 X 与 Y 的方差存在且 $D(X) > 0, D(Y) > 0$, 我们定义随机变量 X,Y 的协方差 $Cov(X,Y)$:

$$Cov(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

其中 $E(XY)$:

$$E(XY) = \begin{cases} \sum_i \sum_j x_i y_i p_{ij}, & (X,Y)\text{是离散型随机变量} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy, & (X,Y)\text{是连续型随机变量} \end{cases}$$

我们将 $\rho_{XY} = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$ 定义为随机变量 X,Y 的**相关系数**.

- $\rho_{XY} = 0 \Rightarrow X,Y$不相关
- $\rho_{XY} \neq 0 \Rightarrow X,Y$相关
- 对称性 $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$, $Cov(X,X) = D(X)$, $\rho_{XX} = 1$
- 线性 $Cov(aX+b,Y) = aCov(X,Y)$, $Cov(X_1+X_2,Y) = Cov(X_1,Y) + Cov(X_2,Y)$

表 24.1: 常用分布表

名称	概率分布	均值	方差	参数范围
两点分布	$P(X=k)=p^k q^{1-k}$ $(k=0,1)$	p	pq	$0<p<1$ $q=1-p$
二项分布 $B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^k p^x q^{n-k}$ $(x=0,1,\cdots,n)$	np	npq	$0<p<1$ $q=1-p$ $n\in N$
泊松分布 $P(\lambda)$	$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $(k=0,1,2,\cdots)$	λ	λ	$\lambda>0$
超几何分布 $H(n,N,M)$	$P(X=k)=\frac{C_{N-M}^{n-k}C_M^k}{C_N^n}$ $(k=0,1,\cdots min\{M,n\})$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{n(N-n)(N-M)M}{N^2(N-1)}$	$n,N,M\in N$ $n\le N,M\le N$
几何分布 $G(p)$	$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$ $(k=0,1,\cdots)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$0<p<1$ $q=1-p$
均匀分布 $U(a,b)$	$p(x)=\frac{1}{b-a}(a\le x\le b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^3}{12}$	$0<p<1$ $q=1-p$ $r\in\mathbb{R}$
指数分布 $E(\lambda)$	$p(x)=\lambda e^{-\lambda x}(x>0)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\lambda>0$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2	$\sigma>0$
Γ分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$	$p(x)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}(x>0)$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$\alpha>0$ $\beta>0$

第 25 章 大数定理和中心极限定理

25.1 依概率收敛

定义 25.1.1 (依概率收敛)

设随机变量 X 与随机变量序列 $\{X_n\}(n=1,2,3,\cdots)$, 如果对于任意 $\varepsilon>0$, 我们有:

$$\lim_{n\Rightarrow\infty} P\{|X_n-X|\geq\varepsilon\}=0\text{或者}\lim_{n\Rightarrow\infty} P\{|X_n-X|<\varepsilon\}=1$$

我们称随机变量序列 $\{X_n\}$ **依概率收敛于随机变量** X, 记作:

$$\lim_{n\Rightarrow\infty} X_n=X(P)\text{或者}X_n\xrightarrow{P}X(n\Rightarrow\infty)$$

25.2 大数定理

定理 25.2.1 (切比雪夫大数定理)

假设 $\{X_n\}(n=1,2,\cdots)$ 是相互独立的随机变量序列, 如果方差 $D(X_i)$ 存在且一致有上界, 即存在常数 $C,\forall i\geq 1, s.t.D(X_i)\leq C,\{X_n\}$ 服从大数定理.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$$

定理 25.2.2 (伯努利大数定理)

假设 μ_n 是 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数, 在每次试验中事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$, 则 $\frac{\mu_n}{n}\xrightarrow{P}p$.

$$\forall\varepsilon>0,\lim_{n\Rightarrow\infty} P\{|\frac{\mu_n}{n}-p|<\varepsilon\}=1$$

定理 25.2.3 (辛钦大数定理)

假设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，如果 $E(X_i)=\mu,(i=1,2,\cdots)$ 存在，则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{P} \mu$.

$$\forall \varepsilon>0, \lim_{n\Rightarrow\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu|<\varepsilon\}=1$$

25.3 中心极限定理

定理 25.3.1 (列维-林德伯格定理)

假设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 如果 $E(X_i)=\mu, D(X_i)=\sigma^2>0,(i=1,2,\cdots)$ 存在,$\forall x\in\mathbb{R}$, 我们有:

$$\lim_{n\Rightarrow\infty} P\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}<x\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x)$$

注

- 定理满足X_n独立同分布、方差和期望存在
- $\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(n\mu,n\sigma^2)$
- $P\{a<\sum_{i=1}^{n}X_i<b\}\approx\Phi(\frac{b-n\mu}{\sqrt{n}\sigma})-\Phi(\frac{a-n\mu}{\sqrt{n}\sigma})$

定理 25.3.2 (棣莫弗-拉普拉斯定理)

假设随机变量 $Y_n\sim B(n,p),(0<p<1,n\geq 1)$,$\forall x\in\mathbb{R}$, 我们有:

$$\lim_{n\Rightarrow\infty} P\{\frac{Y_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}<x\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x)$$

这一部分的内容我推荐一个 B 站视频观看.

- 中心极限定理
- 正态分布

第 26 章 数理统计

26.1 总体和样本

定义 26.1.1 (统计概念和统计量)

1. **总体**: 研究对象的全体称为总体

2. **样本**: n 个相互独立且与总体具有相同概率分布的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 所组成的整体 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 称为来自总体 X, 容量为 n 的一个**简单随机样本**, 一次抽样结果的具体的 n 个数值 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的一个观测值.

3. **样本分布**

假设总体的分布函数 $F(x)$, 概率密度函数 $f(x)$, 样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数和概率密度:

$$\text{离散型: } P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i = x_i\}$$

$$\text{连续型分布函数: } F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i)$$

$$\text{连续型概率密度: } f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

26.2 统计量及其分布

定义 26.2.1

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本,$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 n 元函数, 如果函数 g 中不含任何参数, 我们称 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一个**统计量**.

1. **常用统计量**

(1). 数字特征

- **样本均值 (一阶原点矩)** $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
- **样本方差 (二阶中心矩)** $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_1 - \overline{X})^2$
- **样本** k阶原点矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, (k = 1, 2, \cdots)$
- **样本** k阶中心矩 $B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k, (k = 2, \cdots)$

(2). 顺序统计量

将样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的 n 个观测值从小到大顺序排序得到:

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)} \leq$$

随机变量 $X_{(k)}$ 称作第 k 顺序统计量,$X_{(1)}$ 为最小顺序统计量,$X_{(n)}$ 为最大顺序统计量.

注

假设总体期望 $E(X) = \mu$, 总体方差为 $D(X) = \sigma^2$,$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体的一个样本,$\overline{X}, S^2$ 分别为样本的均值和方差, 我们有:

1.$E(X_i) = \mu$

2.$D(X_i) = \sigma^2$

3.$E(\overline{X}) = E(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}) = E(X) = \mu$

4.$E(S^2) = D(X) = \sigma^2$

5.$D(\overline{X}) = \frac{1}{n}D(X) = \frac{\sigma^2}{n}$

定义 26.2.2 (三大分布)

1. χ^2 分布

随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 且都服从标准正态分布, 则随机变量 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 服从自由度为 n 的卡方分布 $\chi^2(n)$, 记作 $X \sim \chi^2(n)$.

α 分位点: 对于给定的$\alpha(0 < \alpha < 1)$, 满足

$$P\{\chi^2 > \chi_\alpha^2(n)\} = \int_{\chi_\alpha^2(n)}^{+\infty} f(x)dx$$

的 $\chi_\alpha^2(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 分布上的 α 分位点.

- $X_1 \sim \chi^2(n_1)$, $X_2 \sim \chi^2(n_2)$,X_1, X_2 相互独立, 我们有: $X_1 + X_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$
- $X \sim \chi^2(n) \Rightarrow E(X) = n, D(X) = 2n$

2. t 分布

设随机变量 $X \sim N(0,1)$,$Y \sim \chi^2(n)$,X, Y 相互独立, 记随机变量 $t = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布, 记作 $t \sim t(n)$

- $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$
- t 分布概率密度关于 x 轴对称

3. F 分布

设随机变量 $X \sim \chi^2(n_1)$,$Y \sim \chi^2(n_2)$, 且 X, Y 相互独立, 则 $F = \dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从自由度为 (n_1, n_2) 的 F 分布, 记作 $F \sim F(n_1, n_2)$.

- $F \sim F(n_1, n_2) \Rightarrow \dfrac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$
- $F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \dfrac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}$

注

正态总体条件下常见结论:

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本,$\overline{X}, S^2$ 分别是样本的均值和方差.

1. $\overline{X} \sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow \dfrac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$

2. $\dfrac{1}{\sigma^2} \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$

3. $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum\limits_{i=1}^{n} (\dfrac{X_i - \overline{X}}{\sigma})^2 \sim \chi^2(n)$

4. $\overline{X}$ 和 S^2 相互独立,$\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1)$

5. σ未知时: $\dfrac{n(\overline{X} - \mu)^2}{S^2} \sim F(1, n-1)$

26.3 参数的点估计

定义 26.3.1 (矩估计和最大似然估计)

1. 概念

设总体 X 的分布函数 $F(x, \theta)$, 其中 θ 是一个未知参数,$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体的一个样本, 由样本构造一个适当的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 作为参数 θ 的估计, 称统计量为参数的估计量,$\theta = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$.

2. 矩估计法

设总体分布中有 k 个未知的参数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$, 来自总体 X 的一组样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$,

如果 X 的原点矩 $E(X^l)(l=1,2,\cdots,k)$ 存在, 我们令样本的原点矩 = 总体原点矩:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^l = E(X^l) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x^l f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)dx \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^l P\{X=x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\} \end{cases}$$

3. 最大似然估计法对未知参数 θ 进行估计, 在该参数可能的取值范围 I 中选取, 使用使样本观测值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 最大的参数 $\hat{\theta}$ 作为参数 θ 的估计值.

(1). 总体 X 是离散型分布, 分布函数的参数为 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$, 样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 出现取值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的概率为:

$$P\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\} = \prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i) = \prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$$

我们得到似然函数:

$$L(\theta) = L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)$$

$$\exists\hat{\theta}\in I,\ s.t. L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\hat{\theta}) = max_{\theta\in I}L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)$$

(2). 总体 X 是连续型分布, 概率密度为 $f(x;\theta),\theta\in I$, 样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 出现取值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的概率为:

$$L(\theta) = L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta) = \prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)$$

$$\exists\hat{\theta}\in I,\ s.t. L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\hat{\theta}) = max_{\theta\in I}L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)$$

我们得到了参数的最大似然估计 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

估计量的评判标准

1. 无偏性
2. 有效性 (最小方差性)
3. 一致性 (相和性)

26.4 参数的区间估计

定义 26.4.1 (概念)

设 θ 是总体 X 的一个未知参数, 对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$, 如果由样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 确定的两个统计量 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 满足:

$$P\{\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\theta<\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)\} = 1-\alpha$$

则称随机区间 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 是 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的**置信区间**,$\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 分别称为**置信上限和置**

信下限,$1-\alpha$ 为置信水平,α 为显著性水平.

表 26.1: 正态总体均值的置信区间

待估参数	其他参数	枢轴量分布	置信区间
μ	σ^2已知	$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$
μ	σ^2未知	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$

26.5 假设检验

定义 26.5.1 (统计性检验)

1. H_0: 虚无假设, H_1: 备择假设
2. 双边检验和单侧检验
3. 正态总体下的六大检查和拒绝域
   - σ^2已知, μ未知, H_0: $\mu=\mu_0, H_1$: $\mu\neq\mu_0$
     $$拒绝域: (-\infty,\mu_0-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}})\cup(\mu_0+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},+\infty)$$
   - σ^2未知, μ未知, H_0: $\mu=\mu_0, H_1$: $\mu\neq\mu_0$
     $$拒绝域: (-\infty,\mu_0-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))\cup(\mu_0+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),+\infty)$$
   - σ^2已知, μ未知, H_0: $\mu\leq\mu_0, H_1$: $\mu>\mu_0$
     $$拒绝域: (\mu_0+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},+\infty)$$
   - σ^2已知, μ未知, H_0: $\mu\geq\mu_0, H_1$: $\mu<\mu_0$
     $$拒绝域: (-\infty,\mu_0-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}})$$
   - σ^2未知, μ未知, H_0: $\mu\leq\mu_0, H_1$: $\mu>\mu_0$
     $$拒绝域: (\mu_0+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),+\infty)$$
   - σ^2未知, μ未知, H_0: $\mu\geq\mu_0, H_1$: $\mu<\mu_0$
     $$拒绝域: (-\infty,\mu_0-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$$

第五部分

每日一题 I

第 5 部分目录

第 27 章 January

27.1 Week I

January 1

1. 已知 $f(x+1)$ 的定义域为 $[0,a]$,$(a>0)$, 求 $f(x)$ 定义域

解

$f(x+1)$ 的定义域为 $[0,a]$, 则 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,a-1]$

2. 已知 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 并求出定义域

解

由题意得: $f[\varphi(x)]=1-x \Rightarrow e^{\varphi^2(x)}=1-x$, 因此: $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}, x\geq 1$

3. 设

$$g(x)=\begin{cases}2-x, x\leq 0\\ x+2, x>0\end{cases}$$

,

$$f(x)=\begin{cases}x^2, x<0\\ -x, x\geq 0\end{cases}$$

求 $g[f(x)]$

解

由题意得:

$$g[f(x)]=\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ x+2, & x\geq 0\end{cases}$$

4. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}1-2x^2, x<-1\\ x^3, -1\leq x\leq 2\\ 12x-16, x>2\end{cases}$$

求 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式

解

$$g(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, & x\in(-\infty,-1)\\ \sqrt[3]{x}, & x\in[-1,8]\\ \dfrac{x+16}{12}, & x\in(8,+\infty)\end{cases}$$

5. 证明: 定义在 $[-a,a]$ 上的任意一个函数 $f(x)$ 都可以表示为一个奇函数和一个偶函数之和

解

令 $g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2},\quad h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$, 我们有:

$$\begin{cases}g(-x)=\dfrac{f(-x)+f(x)}{2}=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}=g(x)\\ h(-x)=\dfrac{f(-x)-f(x)}{2}=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}=-h(x)\\ f(x)=g(x)+h(x)\end{cases}$$

其中 $g(x)$ 是偶函数, $h(x)$ 是奇函数

6. 判断函数 $f(x)=x\tan x\cdot e^{\sin x}$ 的奇偶性、单调性、周期性和有界性

解

$f(x)$ 定义域为 $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi), k\in\mathbb{Z}$, 关于原点对称

(1). 奇偶性: $f(-x)=x\tan x\cdot e^{-\sin x}\neq -f(x),\quad f(-x)\neq f(x)$

$f(x)$ 是非奇非偶函数

(2). 单调性: $f'(x)=\tan x\cdot e^{\sin x}+x\sec^2 x\cdot e^{\sin x}+x\tan x\cos x\cdot e^{\sin x}=e^{\sin x}\left[\tan x+x\sin x+x\sec^2 x\right]$

$f(x)$ 不是单调函数

(3). 有界性: $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 时, $f(x) > \frac{x\tan x}{e}$, 函数 $g(x) = \frac{x\tan x}{e}$ 为无界函数
$f(x)$ 是无界函数
(4). 周期性: $f(x+2\pi) = (x+2\pi)\tan(x+2\pi)\cdot e^{\sin(x+2\pi)} = (x+2\pi)\tan x \cdot e^{\sin x} \neq f(x)$
$f(x)$ 不是周期函数

7. 函数 $f(x) = \dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界

- A. $(-1, 0)$
- B. $(0, 1)$
- C. $(1, 2)$
- D. $(2, 3)$

解

(1). $x \to 0^-, f(x) \to -\dfrac{\sin 2}{4}; x \to 0^+, f(x) \to \dfrac{\sin 2}{4}$
(2). $x \to 1^-, f(x) \to +\infty; x \to 1^+, f(x) \to -\infty$
(3). $x \to 2^-, f(x) \to -\infty; x \to 2^+, f(x) \to \infty$
$f(x)$ 在区间 $(-1, 0)$ 有界

January 2

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n} - \sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n} - \sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} - \sqrt{\frac{(n-1)n}{2}}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}\right]}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} + \sqrt{\frac{(n-1)n}{2}}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{2}n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2(4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})}+x(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(1+\frac{\sin x}{x^2})}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}} \\
&=1
\end{aligned}
$$

January 3

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I^+ &= \lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right) \\
&= \lim_{x\to0^+}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x} \\
&=0+1=1 \\
I^- &= \lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right) \\
&= \lim_{x\to0^-}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x} \\
&=2-1=1
\end{aligned}
$$

综上所述, 原极限 $I=1$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-(x^2-x)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} \\
&=1
\end{aligned}
$$

January 4

1. 求极限 $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)} \\
&= \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}\cdot\frac{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}} \\
&= \lim_{x\to0}\frac{1+\tan x-1-\sin x}{x(1-\cos x)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})} \\
&= \lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x(1-\cos x)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})} \\
&= \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{\frac{1}{2}x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})} \\
&=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

2. 已知 $\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos 2x}{ax^b}=1$, 求 a,b

解

利用泰勒展开式:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos 2x}{ax^b} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1+x^2+\dfrac{x^4}{2}-1+\dfrac{4x^2}{2!}-\dfrac{8x^4}{4!}}{ax^b} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{3x^2-\dfrac{x^4}{6}}{ax^b} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{3}{a}=1 \end{aligned}$$

因此我们有: $a=3, b=2$

January 5

1. 已知 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$, 下列结论正确的个数为

- A. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$
- B. $\lim\limits_{x\to x_0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi}}=e$
- C. 当 $x\to x_0$ 时,$\sin\varphi(x)\sim\varphi(x)$
- D. 若 $\lim\limits_{u\to 0}f(u)=A$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=A$

解

正确的个数: 0, 令 $\varphi(x)=0, x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$, A,B,C,D 四个选项均不正确

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\arctan x}{\sin x-\tan x}$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\arctan x}{\sin x-\tan x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2}x^3}{-\dfrac{1}{2}x^3} \\ &= -1 \end{aligned}$$

January 6

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{x}{\ln(1+x)}}{x}$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{x}{\ln(1+x)}}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}\\
&=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}}\\
&= \lim_{x\to+\infty} e^{x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})}\\
&= \lim_{x\to+\infty} e^{x-x^2(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2})}\\
&= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{2}}\\
&=e^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

January 7

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos(\sin x)}{x^4}$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)}{x^4}(\text{Lagrange's Mean Value Theorem})\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin\xi(x-\sin x)}{x^4}, \xi\in(\sin x\sim x)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin\xi}{6x}\\
&= -\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

我们由夹逼定理: $\sin\xi \in (\sin x \sim x) \to \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\xi}{x} = 1$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left[\arctan(x+1) - \arctan x\right]$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to+\infty} x^2[\arctan(x+1) - \arctan x](\text{Lagrange's Mean Value Theorem})\\
&= \lim_{x\to+\infty} x^2\frac{1}{1+\xi^2}, \xi \in (x, x+1)\\
&=1
\end{aligned}
$$

我们由夹逼定理: $\xi \in (x, x+1) \longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+(x^2)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+(x+1)^2} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+\xi^2} = 1$

27.2 Week II

January 8

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left[\arctan\dfrac{a}{n} - \arctan\dfrac{a}{n+1}\right]$

解

由归结原理, 原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to\infty} x^2[\arctan\frac{a}{x} - \arctan\frac{a}{x+1}](\text{Lagrange's Mean Value Theorem})\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{ax^2}{x(x+1)}\frac{1}{1+\xi^2}, \xi \in (\frac{a}{x}, \frac{a}{x+1})\\
&=a
\end{aligned}
$$

我们由夹逼定理: $\xi \in (\dfrac{a}{x}, \dfrac{a}{x+1}) \longrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a}{x+1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\xi = 0$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}]$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to+\infty}[\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}]\text{(Lagrange's Mean Value Theorem)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\cos\xi(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}),\xi\in(\sqrt{x},\sqrt{x+1})\\
&= \lim_{x\to+\infty}\cos\xi(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}})\\
&=0
\end{aligned}
$$

January 9

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x^2)}-\dfrac{1}{\ln(1+\tan^2x)}\right]$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to0}\left[\frac{1}{\ln(1+x^2)}-\frac{1}{\ln(1+\tan^2x)}\right]\\
&= \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\tan^2x)-\ln(1+x^2)}{\ln(1+x^2)\ln(1+\tan^2x)}\text{(Lagrange's Mean Value Theorem)}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{(\tan x+x)(\tan x-x)}{x^4\xi},\xi\in(1+x^2,1+\tan^2x)\\
&= \lim_{x\to0}\frac{2x\cdot\frac{x^3}{3}}{x^4}\\
&=\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

我们由夹逼定理: $\xi\in(1+x^2,1+\tan^2x)\to\lim\limits_{x\to0}(1+x^2)=\lim\limits_{x\to0}(1+\tan^2x)=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\xi=1$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x^2)}-\dfrac{1}{\sin^2x}\right]$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x^2)}-\frac{1}{\sin^2 x}\right]\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\ln(1+x^2)}{\ln(1+x^2)\sin^2 x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2+x^2-\ln(1+x^2)}{x^4}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}+\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\ln(1+x^2)}{x^4}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x+x)(\sin x-x)}{x^4}+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^4}{x^4}\\
&=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot(-\frac{1}{6}x^3)}{x^4}\\
&=\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

我们由夹逼定理: $\xi\in(1+\sin^2 x,1+x^2)\to\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 x)=\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\xi=1$

January 10

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}\\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{2\ln(x+2^x)}{x}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln(x+2^x)}{x}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(x+2^x-1)}{x}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\ln 2}{x}}\\
&= e^{2+2\ln 2}\\
&= 4e^2
\end{aligned}
$$

2. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e$, 求 k

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}} \\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{\sin kx}\ln\frac{1-\tan x}{1+\tan x}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin kx}\ln(1-\frac{2\tan x}{1+\tan x})} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}-\frac{2\tan x}{(1+\tan x)sinkx}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}-\frac{2x}{kx}} \\
&= e^{-\frac{2}{k}} = e
\end{aligned}
$$

综上所述, $k=-2$

January 11

1. 若 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=1$, 求 a,b

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln(e^x+ax^2+bx)} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+ax^2+bx-1}{x^2}} \qquad \text{(Taylor's Formula)} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(a+\frac{1}{2})x^2+(b+1)x+o(x^2)}{x^2}} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

综上所述, $a=-\dfrac{1}{2}, b=-1$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}\\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\arctan x}{x}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\arctan x}{x}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\ln(1+\frac{\arctan x-x}{x})}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\frac{\arctan x-x}{x}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}-\frac{2x^3}{3x^3}}\\
&= e^{-\frac{2}{3}}
\end{aligned}
$$

January 12

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

解

由归结原理, 原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to\infty}\left(x\tan\frac{1}{x}\right)^{x^2}\\
&= \lim_{x\to\infty} e^{x^2\ln(x\tan\frac{1}{x})}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to\infty}x^2\ln(x\tan\frac{1}{x})}\\
&= e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(\frac{\tan t}{t})}{t^2}}\\
&= e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\tan t-t}{t^3}}\\
&= e^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}
$$

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$

解

由归结原理,原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to\infty} e^{x\ln(\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}))} \\
&= \lim_{x\to\infty} e^{x\ln(\frac{1+\tan(\frac{1}{x})}{1-\tan(\frac{1}{x})})} \\
&= \lim_{t\to 0} e^{\frac{2\tan t}{t(1-\tan t)}} \\
&= e^2
\end{aligned}
$$

January 13

1. 求极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x(e^x-1)}} \\
&= e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}} \\
&= e^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

2. 求极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}} \\
&= e^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

January 14

1. 求极限 $\lim_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0} e^{\frac{2x\sin x+\cos 2x-1}{x^4}} \quad \text{(Taylor's Formula)} \\
&= e^{\lim_{x\to 0}\frac{2x(x-\frac{x^3}{6})-2x^2+\frac{2}{3}x^4}{x^4}} \\
&= e^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}
$$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned}I=&\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}e^{\frac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}}\\=&e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos x(1-\tan x)}}\\=&e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{\cos x}}\\=&e^{-\sqrt{2}}\end{aligned}$$

27.3 Week III

January 15

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned}I=&\lim_{x\to0}e^{\frac{\ln\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}}{x}}\\=&e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1+e^{2x}-1+\cdots+e^{nx}-1}{nx}}\\=&e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{n(n+1)x}{2}}{nx}}\\=&e^{\frac{n+1}{2}}\end{aligned}$$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^n}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\right)^x$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I = &\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{-x}\cdots\left(1+\frac{n}{x}\right)^{-x}\\
=&e^{\lim\limits_{x\to+\infty}-x\ln(1+\frac{1}{x})}e^{\lim\limits_{x\to+\infty}-x\ln(1+\frac{2}{x})}\cdots e^{\lim\limits_{x\to+\infty}-x\ln(1+\frac{n}{x})}\\
=&e^{-1}e^{-2}\cdots e^{-n}\\
=&e^{-\frac{n(n+1)}{2}}
\end{aligned}
$$

January 16

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I = &\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x\\
=&e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})}\\
=&e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(\sin t+\cos t)}{t}}\\
=&e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t+\cos t-1}{t}}\\
=&e
\end{aligned}
$$

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}-1\right]$

解

由归结原理得, 原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I = &\lim_{x\to\infty}x\left[e\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}-1\right]\\
=&\lim_{x\to\infty}x(e^{1-x\ln(1+\frac{1}{x})}-1)\\
=&\lim_{t\to0}\frac{e^{1-\frac{\ln(1+t)}{t}}-1}{t}\\
=&\lim_{t\to0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\\
=&e^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

January 17

1. 设 $a>0, a\neq1$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})=\ln a$, 求 p

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to+\infty} x^p(a^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}})(\text{Lagrange's Mean Value Theorem}) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{x(x+1)} a^{\xi} \ln a, \xi \in (\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x}) \\ &= \ln a \lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{x(x+1)} \\ &= \ln a \end{aligned}$$

我们由夹逼准则: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \xi = 0$

综上所述, 我们有: $p = 2$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\sqrt{\cos x})(1-\sqrt[3]{\cos x})\cdots(1-\sqrt[n]{\cos x})}{(1-\cos x)^{n-1}}$

解

我们利用等价无穷小 $x \to 0, 1-\sqrt[n]{\cos x} \sim -(\sqrt[n]{1+\cos x - 1} - 1) \sim \dfrac{1-\cos x}{n}$, 原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\sqrt{\cos x})(1-\sqrt[3]{\cos x})\cdots(1-\sqrt[n]{\cos x})}{(1-\cos x)^{n-1}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^{n-1}}{n!(1-\cos x)^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

January 18

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\sin^2 x + e^x) - x}{\ln(x^2 + e^{2x}) - 2x}$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - x}{\ln(x^2 + e^{2x}) - 2x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\frac{\sin^2 x}{e^x} + 1)}{\ln(\frac{x^2}{e^{2x}} + 1)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin^2 x}{x^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. 已知极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \tan x}{x^k} = c$, 其中 k, c 为常数, 且 $c \neq 0$, 求 k, c

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned}I &= \lim_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x^k}\\ &= \lim_{x\to0}-\frac{x^3}{3x^k}\\ &= c\end{aligned}$$

我们有: $k=3, c=-\dfrac{1}{3}$

January 19

1. 若 $\lim_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x^4}{x^4}-\dfrac{f(x)}{x^3}\right)=2$, 则当 $x\to0$ 时,$f(x)$ 是 x 的:

- A. 等价无穷小
- B. 同阶但非等价无穷小
- C. 高阶无穷小
- D. 低阶无穷小

解

我们记 $\begin{cases} I=\lim_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x^4}{x^4}-\dfrac{f(x)}{x^3}\right)=2\\ J=\lim_{x\to0}\dfrac{\sin x^4}{x^4}=1\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^3}=-1$

我们得到: $\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^4}\cdot\lim_{x\to0}x^3=0$

综上所述, $f(x)$ 是 x 的高阶无穷小.

2. 当 $x\to0$ 时,$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 时等价无穷小, 求 k

解

由等价无穷小定义得到:

$$\begin{aligned}I &= \lim_{x\to0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{kx^2}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin x}-1}{kx^2}-\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{kx^2}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{x\arcsin x}{2kx^2}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2kx^2}\\ &= \frac{3}{4k}\\ &= 1\end{aligned}$$

综上所述, 我们有: $k = \dfrac{3}{4}$

January 20

1. 当 $x \to 0^+$ 时, 与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量为:

- A. $1 - e^{\sqrt{x}}$
- **B**. $\ln \dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$
- C. $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$
- D. $1 - \cos\sqrt{x}$

解

我们有:

$$\begin{cases} 1 - e^{\sqrt{x}} \sim -\sqrt{x} \\ 1 - \cos\sqrt{x} \sim \dfrac{1}{2}x \\ \sqrt{1+\sqrt{x}} - 1 \sim \dfrac{1}{2}\sqrt{x} \\ \ln \dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}} \sim \sqrt{x} \end{cases}$$

我们得到: $\ln \dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}} \sim \sqrt{x}$

2. 设 $\alpha_1 = x(\cos\sqrt{x} - 1), \alpha_2 = \sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x}), \alpha_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1$, 当 $x \to 0^+$ 时, 以上 3 个无穷小量从低阶到高阶的排序为:

- A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
- **B**. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$
- C. $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3$
- D. $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$

解

我们有:

$$\begin{cases} \alpha_1 \sim -\dfrac{1}{2}x^2 \\ \alpha_2 \sim x^{\frac{5}{6}} \\ \alpha_3 \sim \dfrac{1}{3}x \end{cases}$$

我们得到: $\alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_1$

January 21

1. 函数 $f(x) = \dfrac{(e^{\frac{1}{x}} + e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的第一类间断点是:

- **A**. 0
- B. 1
- C. $-\dfrac{\pi}{2}$
- D. $\dfrac{\pi}{2}$

解

我们有: $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上无定义的点有 $x=0, x=1, x=\pm\dfrac{\pi}{2}$

- $x\to 0^+, f(x)\to 1; x\to 0^-, f(x)\to -1$
- $x\to 1^+, f(x)\to -\infty; x\to 1^-, f(x)\to +\infty$
- $x\to \dfrac{\pi}{2}^+, f(x)\to -\infty; x\to \dfrac{\pi}{2}^-, f(x)\to +\infty$
- $x\to -\dfrac{\pi}{2}^+, f(x)\to -\infty; x\to -\dfrac{\pi}{2}^-, f(x)\to +\infty$

综上所述, $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点, 是第一类间断点

2. 设函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$, 则 $f(x)$ 有

- **A**. 1 个可去间断点,1 个跳跃间断点
- B. 1 个可去间断点,1 个无穷间断点
- C. 2 个跳跃间断点
- D. 2 个无穷间断点

解

我们有: $f(x)$ 在定义域上无定义的点有 $x=0, x=1$

- $x\to 0^+, f(x)\to 0; x\to 0^-, f(x)\to 0$
- $x\to 1^+, f(x)\to \sin 1; x\to 1^-, f(x)\to -\sin 1$

综上所述, $f(x)$ 有 1 个可去间断点, 1 个跳跃间断点

27.4 Week IV

January 22

1. 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为:

- A. 0
- **B**. 1
- C. 2
- D. 3

解

我们有: $f(x)$ 在定义域上无定义的点有 $x=0, x=\pm 1$

- $x \to 0^+, f(x) \to 1; x \to 0^-, f(x) \to -1$
- $x \to 1^+, f(x) \to \dfrac{\sqrt{2}}{2}; x \to 1^-, f(x) \to \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $x \to -1^+, f(x) \to +\infty; x \to -1^-, f(x) \to -\infty$

综上所述, $f(x)$ 有 1 个可去间断点, 1 个跳跃间断点, 1 个无穷间断点

2. 函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为:

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

解

我们有: $f(x)$ 在定义域上无定义的点有 $x=0, x=\pm 1$

- $x \to 0^+, f(x) \to 1; x \to 0^-, f(x) \to 1$
- $x \to 1^+, f(x) \to \dfrac{1}{2}; x \to 1^-, f(x) \to \dfrac{1}{2}$
- $x \to -1^+, f(x) \to +\infty; x \to -1^-, f(x) \to -\infty$

综上所述, $f(x)$ 有 2 个可去间断点, 1 个无穷间断点

January 23

1. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$, 讨论函数的间断点, 其结论为:

- A. 不存在间断点
- **B**. 存在间断点 $x=1$
- C. 存在间断点 $x=0$
- D. 存在间断点 $x=-1$

解

我们得到:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,-1)\\ 0, & x=-1\\ x+1, & x\in(-1,1)\\ 1, & x=1\\ 0, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$$

综上所述, $f(x)$ 存在唯一的跳跃间断点 $x=1$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{h\to 0}\frac{f(h^2)}{h^2}=1$, 则:

- A. $f(0)=0$ 且 $f'_{-}(0)$ 存在
- B. $f(0)=1$ 且 $f'_{-}(0)$ 存在
- C. $f(0)=0$ 且 $f'_{+}(0)$ 存在
- D. $f(0)=1$ 且 $f'_{+}(0)$ 存在

解

我们由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续得到:

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h^2)}{h^2}=1\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{h^2\to 0}f(h^2)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}\cdot\lim\limits_{h\to 0}h^2=0\\ f'_{+}(0)=\lim\limits_{h^2\to 0}\dfrac{f(h^2)-f(0)}{h^2}=1\end{cases}$$

综上所述，$f(0)=0$ 且 $f'_{+}(0)$ 存在

January 24

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内有定义, 若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时, 恒有 $|f(x)|\le x^2$, 则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的:

- A. 间断点
- B. 连续而不可导的点
- C. 可导的点, 且 $f'(0)=0$
- D. 可导的点, 且 $f'(0)\neq 0$

解

(1). 连续性: $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

- $|f(x)|\le x^2, x\in(-\delta,\delta)\Rightarrow|f(0)|\le 0\Rightarrow f(0)=0$
- 夹逼准则:$\lim_{x\to 0}0=\lim_{x\to 0}x^2=0\Rightarrow\lim_{x\to 0}|f(x)|=0$
- $\forall\varepsilon>0,\exists\xi>0,|f(x)|<\varepsilon\Rightarrow\lim_{x\to 0}f(x)=0$

(2). 可导性: $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)=0$

- $|f(x)|\le x^2, x\in(-\delta,\delta)\Rightarrow 0<|\frac{f(x)}{x}|<|x|$
- 夹逼准则:$\lim_{x\to 0}0=\lim_{x\to 0}|x|=0\Rightarrow\lim_{x\to 0}|\frac{f(x)}{x}|=0$
- $\forall\varepsilon>0,\exists\xi>0,|\frac{f(x)}{x}|<\varepsilon\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$
- $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\cos\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$ $(\alpha>0,\beta>0)$, 若 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则:

- A. $\alpha-\beta>1$
- B. $0<\alpha-\beta\le 1$
- C. $\alpha-\beta>2$
- D. $0<\alpha-\beta\le 2$

解

首先 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, $\alpha>0$, 我们得到:

$$f'(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha-1}\cos\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x=0 \\ \alpha x^{\alpha-1}\cos\dfrac{1}{x^{\beta}}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>0 \end{cases}$$

$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续 $\Rightarrow \begin{cases} \alpha-1>0 \\ \alpha-\beta-1>0 \end{cases} \Rightarrow \alpha-\beta>1$

January 25

1. 曲线 $x+y+e^{2xy}=0$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线方程

解

我们设 $\begin{cases} F(x,y)=x+y+e^{2xy}=0 \\ y=y(x) \end{cases}$, 我们有:

$$F'_x+F'_y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow 1+2ye^{2xy}+(1+2xe^{2xy})\frac{dy}{dx}=0$$

在 $(0,-1)$ 邻域附近, $F'_y\neq 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}\Big|_{(0,-1)}=-\dfrac{1+2ye^{2xy}}{1+2xe^{2xy}}=1$

综上所述, $(0,-1)$ 处的切线方程为: $x-y-1=0$

2.

(1). 设函数 $u(x),v(x)$ 可导, 利用导数定义证明:$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

(2). 设函数 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$ 可导,$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$, 写出 $f(x)$ 的求导公式

解

(1). 我们利用导数定义得到: $f(x)=u(x)v(x)$

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x+\Delta x)v(x)+u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x+\Delta x)v(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x)}{\Delta x}\\&=v'(x)\lim_{\Delta x\to 0}u(x+\Delta x)+v(x)u'(x)\\&=u(x)v'(x)+u'(x)v(x)\end{aligned}$$

(2). $f'(x)=\sum_{i=1}^{n}u_i'(x)\prod_{\substack{1\le j\le n\\ i\ne j}}u_j$

January 26

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, x\ge 1\\ 2x-1, x<1\end{cases}$,$y=f(f(x))$, 则 $\frac{dy}{dx}\big|_{x=e}$

解

(1). 我们得到: $f(f(x))=\begin{cases}\ln\dfrac{\ln x}{2}, & x\in[e^2,+\infty)\\ \ln x-1, & x\in[1,e^2)\\ 4x-3, & x\in(-\infty,1)\end{cases}$

综上所述, $\frac{dy}{dx}\big|_{x=e}=\frac{1}{e}$

(2).

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=e}=f'(u)f'(x)\Big|_{\substack{x=e\\ u=\ln\sqrt{x}}}=2\cdot\frac{1}{2e}=\frac{1}{e}$$

2. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $xy+e^y=x+1$ 确定的隐函数, 则 $\frac{d^2y}{dx^2}\big|_{x=0}$

解

我们令: $F(x,y)=xy+e^y-x-1=0$, 我们有:

$$F_x'+F_y'\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow y-1+(x+e^y)\frac{dy}{dx}=0$$

我们令: $G(x,y)=y-1+(x+e^y)\frac{dy}{dx}=0$, 我们有:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx^2}(x+e^y)+(1+e^y\frac{dy}{dx})\frac{dy}{dx}=0$$

我们令: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = a \\ \dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0} = b \end{cases}$, 我们有:

$$\begin{cases} x = 0, y = 0 \\ a - 1 = 0 \\ a + b + (1 + a)a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$$

综上所述, $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0} = -3$

January 27

1. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t - \ln(1 + t) \\ y = t^3 + t^2 \end{cases}$ 所确定, 则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

解

我们有:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{(3t^2 + 2t)(1 + t)}{t} = (3t + 2)(1 + t)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{(6t + 5)(t + 1)}{1 + t}$$

2. 设 $y = x^2 2^x$, 求 $y^{(n)}$

解

我们由莱布尼茨求导公式: $(uv)^{(n)} = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{i}{n} u^{(i)} v^{(n-i)}$, 其中 $u(x) = x^2, v(x) = 2^x$

$$\begin{aligned} y^{(n)} =& (x^2 2^x)^n \\ =& \binom{0}{n}(x^2)^{(0)}(2^x)^{(n)} + \binom{1}{n}(x^2)^{(1)}(2^x)^{(n-1)} + \binom{2}{n}(x^2)^{(2)}(2^x)^{(n-2)} \\ =& (\ln 2)^n x^2 2^x + 2n(\ln 2)^{n-1} x 2^x + n(n-1)(\ln 2)^{n-2} 2^x \end{aligned}$$

January 28

1. 设 $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, 求 $y^{(n)}$

解

我们有: $y = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right]$, 且:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x-1} \\ g(x) = \dfrac{1}{x+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} \\ g^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} \end{cases}$$

我们有: $y^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$

2. 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数, 且 $f'(x) = [f(x)]^2$, 则当 n 为大于 2 的正整数时,$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是:

- A. $n![f(x)]^{n+1}$
- B. $n[f(x)]^{n+1}$
- C. $[f(x)^{2n}]$
- D. $n![f(x)]^{2n}$

解

我们有:

$$\begin{cases} f'(x) = [f(x)]^2 \\ f''(x) = 2f(x)f'(x) = 2[f(x)]^3 \\ f^{(3)}(x) = 6[f(x)]^2 f'(x) = 2\cdot 3[f(x)]^4 \\ \cdots\cdots \\ f^{(n)}(x) = n![f(x)]^{n+1} \end{cases}$$

综上所述, $f^{(n)}(x) = n![f(x)]^{n+1}$

January 29

1. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且对任意 x_1, x_2, 当 $x_1 > x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则:

- A. 对任意 $x, f'(x) > 0$
- B. 对任意 $x, f'(-x) \le 0$
- C. 函数 $f(-x)$ 单调增加
- D. 函数 $-f(-x)$ 单调增加

解

我们有: $f'(x) \ge 0$

- $[f(-x)]' = -f'(-x) \le 0$
- $[-f(-x)]' = f'(-x) \ge 0$

我们有: $f(-x)$ 单调递减, $-f(-x)$ 单调递增

2. 设 $f(x), g(x)$ 是恒大于零的可导函数, 且 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$, 当 $a < x < b$ 时, 有:

- **A**. $f(x)g(b) > f(b)g(x)$
- B. $f(x)g(a) > f(a)g(x)$
- C. $f(x)g(x) > f(b)g(b)$
- D. $f(x)g(x) > f(a)g(a)$

解

构造辅助函数: $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, x \in (a,b), F'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} < 0$

我们得到: $F(x)$ 在 (a,b) 内单调递减, $F(a) > F(x) > F(b) \Rightarrow \begin{cases} f(a)g(x) > f(x)g(a) \\ f(x)g(b) > f(b)g(x) \end{cases}$

January 30

1. 设 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = -1$, 其中 n 为大于 1 的整数, 则在点 $x = a$ 处:

- A. $f(x)$ 的导数存在, 且 $f'(a) \neq 0$
- B. $f(x)$ 取得极大值
- C. $f(x)$ 取得极小值
- **D**. $f(x)$ 是否取得极值与 n 的取值有关

解

我们有: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) - f(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n} \lim\limits_{x\to a}(x-a)^n = 0 \\ f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n} \lim\limits_{x\to a}(x-a)^{n-1} = 0 \end{cases}$

(1). 当 n 为偶数时, $x \in (a-\delta, a), f(x) < f(a); x \in (a, a+\delta), f(x) < f(a), x = a$ 是极大值点

(2). 当 n 为奇数时, $x \in (a-\delta, a), f(x) > f(a); x \in (a, a+\delta), f(x) < f(a), x = a$ 不是极值点

综上所述, $f(x)$ 是否取极值点与 n 的取值有关

2. 设 $f(x)$ 的导数在 $x = a$ 处连续, 又 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{x-a} = -1$, 则:

- A. $x = a$ 是 $f(x)$ 的极小值点
- **B**. $x = a$ 是 $f(x)$ 的极大值点
- C. $(a, f(a))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
- D. $x = a$ 不是 $f(x)$ 的极值点,$(a, f(a))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

解

我们有:

$$\begin{cases} f'(a) = \lim\limits_{x\to a} f'(x) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{x-a} \lim\limits_{x\to a}(x-a) = 0 \\ x \in (a-\delta, a), f'(x) > 0 \\ x \in (a, a+\delta), f'(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow f''(a) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{x-a} = -1$$

综上所述, $x = a$ 是 $f(x)$ 的极大值点, $(a, f(a))$ 不是曲线 $f(x)$ 的拐点.

January 31

1. 曲线 $y = (x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为:

解

我们有:

$$\begin{cases} y' = x^{\frac{2}{3}} + \dfrac{2}{3}(x-5)x^{-\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{3}}(\dfrac{5}{3}x - \dfrac{10}{3}) \\ y'' = -\dfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}(\dfrac{5}{3}x - \dfrac{10}{3}) + \dfrac{5}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}(x+1) \end{cases}$$

令 $y''(x) = 0 \Rightarrow x = -1$, 因此拐点坐标 $(-1, -6)$

2. 已知函数 $y = f(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$, 若 $f'(x_0) = 0(x_0 \neq 0)$, 则:

- A. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
- **B**. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
- C. $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
- D. $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,$(x_0, f(x_0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

解

我们得到: $f''(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x} - 3[f'(x)]^2$

当 $f'(x_0) = 0(x_0 \neq 0)$ 时, $f''(x_0) = \dfrac{1-e^{-x_0}}{x_0} > 0$

综上所述, $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 点 $(x_0, f(x_0))$ 不是 $f(x)$ 的拐点.

第 28 章 February

28.1 Week I

February 1

1. 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$ 且 $f'(0)=0$, 则:
- A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
- B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
- C. $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点
- D. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 其导函数图形如图所示, 则:
- A. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点
- B. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点
- C. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点
- D. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点

February 2

1. 曲线 $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$ $(x>0)$ 的渐近线方程为:

2. 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为:
- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

February 3

1. 设函数 $y = \frac{x^3+4}{x^2}$, 求

(1). 函数的增减区间及极值

(2). 函数图像的凹凸区间及拐点

(3). 渐近线

(4). 作出其图形

2. 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内, 方程 $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$:

- A. 无实根
- B. 有且仅有一个实根
- C. 有且仅有两个实根
- D. 有无穷多个实根

February 4

1. 函数 $f(x) = \ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为:

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

2. 设 $f(x) = x^2(1-x)^2$, 则方程 $f''(x) = 0$ 在 $(0, 1)$ 上:

- A. 无实根
- B. 有且仅有一个实根
- C. 有且仅有两个实根
- D. 有且仅有三个实根

February 5

1. 设常数 $k > 0$, 设函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点个数为:

- A. 3
- B. 2
- C. 1
- D. 0

2. 证明: 当 $x > 0$ 时, 有不等式 $\ln(1+\frac{1}{x}) > \frac{1}{1+x}$

February 6

1. 证明: 当 $x > 0$ 时, 有不等式 $\arctan x + \frac{1}{x} > \frac{\pi}{2}$

2. 设 p,q 是大于 1 的常数, 并且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 证明: 对于任意的 $x>0$, 有 $\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}\geq x$

February 7

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续, 在 $(0,3)$ 内可导, 且 $f(0)+f(1)+f(2)=3, f(3)=1$, 试证明: 必存在 $\xi\in(0,3), s.t.\ f'(\xi)=0$

2. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有二阶导数, 且 $f(a)=f(b)=0,f'(a)f'(b)>0$, 试证明: 存在 $\xi\in(a,b)$ 和 $\eta\in(a,b)$,$s.t.\ f(\xi)=0$ 且 $f''(\eta)=0$

28.2 Week II

February 8

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a)=f(b)=0$, 试证明:

(1). $\exists\xi\in(a,b), s.t.\ f'(\xi)+f(\xi)=0$

(2). $\exists\eta\in(a,b), s.t.\ f'(\eta)-f(\eta)=0$

(3). $\exists\zeta\in(a,b), s.t.\ f'(\zeta)+\lambda f(\zeta)=0$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(1)=0$, 试证明:$\exists\xi\in(0,1), s.t.\ \xi f'(\xi)=-f(\xi)$

February 9

1. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=\frac{1}{3}$, 证明: 存在 $\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right), \eta\in\left(\frac{1}{2},1\right), s.t.\ f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$

2. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 a,b 同号, 证明: 存在 $\xi,\eta\in(a,b), s.t.\ abf'(\xi)=\eta^2 f'(\eta)$

February 10

1. 求下列的不定积分

(1). $\int\frac{1}{\cos x}dx$

(2). $\int\frac{1}{\sin x}dx$

2. 求下列的不定积分

(1). $\int\frac{x+1}{x(1+xe^x)}dx$

(2). $\int(1+\ln x)(\ln x+\ln\ln x)dx$

February 11

1. 求下列的不定积分

(1). $\int \frac{1+x}{1+x^3}dx$

(2). $\int \frac{1-x}{1+x^3}dx$

2. 求下列的不定积分

(1). $\int \frac{dx}{1+x^3}$

(2). $\int \frac{x}{1+x^3}dx$

February 12

1. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2 x$, 求 $\int xf'(x)dx$

2. 设 $f(\ln x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$, 求 $\int f(x)dx$

February 13

1. 计算不定积分 $\int \max(1,x^2)dx$

2. 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x dx, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx, P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$, 则有:

- A. $N<P<M$
- B. $M<P<N$
- C. $N<M<P$
- D. $P<M<N$

February 14

1. 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx, K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx$, 则有:

- A. $M>N>K$
- B. $M>K>N$
- C. $K>M>N$
- D. $K>N>M$

2. 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}dx, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}dx$, 则:

- A. $I_1>I_2>1$
- B. $1>I_1>I_2$

- C. $I_2 > I_1 > 1$
- D. $1 > I_2 > I_1$

28.3 Week III

February 15

1. 求定积分 $\int_{-2}^{2}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}]dx$

2. 求定积分 $\int_{-\pi}^{\pi}|x|[x^3+\sin^2 x]\cos^2 x dx$

February 16

1. 求定积分 $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx$

2. 求定积分 $\int_{\sqrt{e}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$

February 17

1. 求定积分 $\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$

February 18

1. 求定积分 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$

2. 已知函数 $f(x)=\int_1^x\sqrt{1+t^4}dt$, 则 $\int_0^1 x^2 f(x)dx$

February 19

1. 已知 $f(x)$ 连续,$\int_0^x tf(x-t)dt=1-\cos x$, 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

2. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, 0\le x\le 1 \\ 2-x, 1<x\le 2 \end{cases}$, 记 $F(x)=\int_0^x f(t)dt(0\le x\le 2)$, 则有:

- A. $F(x)=\begin{cases} \frac{x^3}{3}, 0\le x\le 1 \\ 2x-\frac{x^2}{2}, 1<x\le 2 \end{cases}$
- B. $F(x)=\begin{cases} \frac{x^3}{3}, 0\le x\le 1 \\ \frac{1}{3}+2x-\frac{x^2}{2}, 1<x\le 2 \end{cases}$

- C. $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3},0\le x\le 1\\ -\frac{7}{6}+2x-\frac{x^2}{2},1<x\le 2\end{cases}$
- D. $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3},0\le x\le 1\\ \frac{x^3}{3}+2x-\frac{x^2}{2},1<x\le 2\end{cases}$

February 20

1. 设 $x\ge -1$, 求 $\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt$

2. 设 $x=x(t)$ 由方程 $\sin t-\int_1^{x-t}e^{-u^2}du=0$ 所确定, 试求 $\frac{d^2x}{dt^2}|_{t=0}$

February 21

1. 设函数 $f(x)=\int_0^1|t(t-x)|dt(0<x<1)$, 求 $f(x)$ 的极值、单调区间及曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间

2. 下列反常积分中发散的是:
- A. $\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx$
- B. $\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx$
- C. $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}dx$
- D. $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$

28.4 Week IV

February 22

1. 求 $I=\int_5^{+\infty}\frac{dx}{x^2-4x+3}$

2. 求 $I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^{1+x}+e^{3-x}}$

February 23

1. 求 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}dx$

2. 已知抛物线通过 x 轴上的两点 $A(1,0),B(3,0)$
(1). 求证: 两坐标轴与该抛物线所围图形的面积等于 x 轴与该抛物线所围图形的面积
(2). 计算上述两平面图形绕 x 轴旋转一周所产生的两个旋转体体积之比

February 24

1. 求心形线 $r = a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ 所围图形的面积

2. 已知平面区域 $D = \{(x,y)|0 \le y \le \dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}, x \ge 1\}$
(1). 求 D 的面积 (2). 求 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积

February 25

1. 某水库的闸门形状为等腰梯形, 它的两条底边各长 $10m$ 和 $6m$, 高为 $20m$, 较长的底边与水面相齐, 求闸门的一侧所受水的压力

2. 一个半径为 $R(m)$ 的球形贮水箱盛满了水, 如果把箱中的水从顶部全部抽出, 需要作的功

February 26

1. 方程 $(xy^2+x)dx + (y - x^2y)dy = 0$ 的通解

2. 方程 $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$ 的通解

February 27

1. 方程 $(y + \sqrt{x^2+y^2})dx - xdy = 0$ 满足条件 $y|_{x=1} = 0$ 的特解

2. 方程 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x+y^4}$ 的通解

February 28

1. 求不定积分 $\int \dfrac{x\ln x + x\ln^2 x}{2 + x\ln x}dx$

2. 求不定积分 $\int \dfrac{\sin 2x \sin^2 x}{2+\cos^4 x}dx$

February 29

1. 求不定积分 $\int \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx$

2. 求不定积分 $\int \dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x(1+\sin^2 x)}dx$

第 29 章 March

29.1 Week I

March 1

1. 求不定积分 $\int \frac{1}{\cos^3 x} dx$

2. 求不定积分 $\int \frac{2+x}{(1+x^2)^2} dx$

March 2

1. 求不定积分 $\int \frac{\arcsin\sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx$

2. 求不定积分 $\int e^x \arcsin\sqrt{1-e^{2x}} dx$

March 3

1. 已知 $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, 求 $\int f(x) dx$

2. 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x \cos^2 x dx$

March 4

1. 求定积分 $\int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos\sqrt{x} dx$

2. 求定积分 $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2} dx$

March 5

1. 求定积分 $\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}dx$

2. 求定积分 $\int_1^2 (x-1)^2(x-2)^2 dx$

March 6

1. 求定积分 $\int_{-2}^2 x\ln(1+e^x)dx$

2. 设 D 是由曲线 $xy+1=0$ 与直线 $y+x=0$ 及 $y=2$ 围成的有界区域, 求 D 的面积

March 7

1. 设 D 是由曲线 $y=x^2$ 与 $y=x$ 围成的有界区域, 求区域 D 分别绕直线 $y=0, x=0, x=1, x=2$ 旋转所得旋转体的体积

2. 方程 $y''+4y'+4y=e^{-2x}$ 满足条件 $y(0)=1, y'(0)=0$ 的特解

29.2 Week II

March 8

1. 具有特解 $y_1=e^{-x}, y_2=2xe^{-x}, y_3=3e^x$ 的三阶常系数线性齐次方程为:

- A. $y'''-y''-y'+y=0$
- B. $y'''+y''-y'-y=0$
- C. $y'''-6y''+11y'-6y=0$
- D. $y'''-2y''-y'+2y=0$

2. 方程 $y''-2y'=xe^{2x}$ 的特解形式为:

- A. $y=axe^{2x}$
- B. $y=(ax+b)e^{2x}$
- C. $y=x(ax+b)e^{2x}$
- D. $y=x^2(ax+b)e^{2x}$

March 9

1. 方程 $y''+y=e^x+1+\sin x$ 的特解形式为:

- A. $ae^x+b+c\sin x$
- B. $ae^x+b+c\cos x+d\sin x$
- C. $ae^x+b+x(c\cos x+d\sin x)$

- D. $y = ae^x + b + cx\sin x$

2. 设函数 $f(x)$ 具有一阶连续导数, 且满足 $f(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f'(t)dt + x^2$, 求 $f(x)$ 表达式

March 10

1. 设 L 是一条平面曲线, 其上任意一点 $P(x, y)(x > 0)$ 到坐标原点的距离恒等于该点处切线在 y 轴上的截距, 且 L 经过 $(\frac{1}{2}, 0)$, 求曲线 L 的渐近线方程为

2. 二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处:

- A. 不连续
- B. 两个偏导数都不存在
- C. 偏导数存在但不可微
- D. 可微

March 11

1. 二元函数 $f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处两个偏导数 $f_x'(x_0, y_0), f_y'(x_0, y_0)$ 存在, 是 $f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续的:

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 不充分不必要条件

2. 已知 $f(x, y) = \sin\sqrt{x^4 + y^4}$, 则:

- A. $f_x'(0, 0), f_y'(0, 0)$ 都存在
- B. $f_x'(0, 0)$ 不存在, $f_y'(0, 0)$ 存在
- C. $f_x'(0, 0)$ 存在, $f_y'(0, 0)$ 不存在
- D. $f_x'(0, 0), f_y'(0, 0)$ 都不存在

March 12

1. 设 $f(x, y) = \dfrac{2x + y^2}{1 + y^2\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$, 则 $df(0, 0)$

2. 已知 $dF(x, y) = xye^x dx + (f(x) + y^2)dy$, 且 $f(x)$ 有连续一阶导数, $f(x) = 0$, 求 $F(x, y)$

March 13

1. 设函数 $f(x, y)$ 可微, 且对于任意 x, y 都有 $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0, \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$, 则下列结论正确

的是:

- A. $f(1,1) > f(0,0)$
- B. $f(-1,1) > f(0,0)$
- C. $f(-1,-1) > f(0,0)$
- D. $f(1,-1) > f(0,0)$

2. 设 $z = (x + e^y)^x$, 求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}$

March 14

1. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(x + 1)z + y \ln z - \arctan(2xy) = 1$ 确定, 求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,2)}$

2. 设 $f(x, y, z) = e^x + y^2 z$, 其中 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x + y + z + xyz = 0$ 所确定的隐函数, 求 $f'_x(0, 1, -1)$

29.3 Week III

March 15

1. 设 $z = xyf(\dfrac{y}{x})$, 其中 $f(u)$ 可导, 求 $xz'_x + yz'_y$

2. 设 $z = e^{xy} + f(x + y, xy)$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, 其中 $f(u, v)$ 有二阶连续偏导数

March 16

1. 已知 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处取得极小值, 则:

- A. $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$
- B. $f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0$, 且 $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$
- C. $f(x_0, y)$ 在 y_0 处取得极大值
- D. $f(x, y_0)$ 在 x_0 处取得极小值

2. 设函数 $f(x), g(x)$ 均有二阶连续导数, 满足 $f(0) > 0, g(0) < 0$, 且 $f'(0) = g'(0) = 0$, 则函数 $z = f(x)g(y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取得极小值的一个充分条件是:

- A. $f''(0) < 0, g''(0) > 0$
- B. $f''(0) < 0, g''(0) < 0$
- C. $f''(0) > 0, g''(0) > 0$
- D. $f''(0) > 0, g''(0) < 0$

March 17

1. 已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $dz=(ay-x^2)dx+(ax-y^2)dy,(a>0)$, 则函数 $f(x,y)$:

- A. 无极值点
- B. 点 (a,a) 为极小值点
- C. 点 (a,a) 为极大值点
- D. 是否有极值点与 a 的取值有关

2. 设函数 $z=f(xy,yg(x))$, 其中 f 函数具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}|_{(1,1)}$

March 18

1. 求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值

2. 求 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)|x^2+\frac{y^2}{4}\leq 1\right\}$ 上的最大值和最小值

March 19

1. 交换二次积分的积分次序 $(a>0)$

(1). $\int_0^2 dx\int_{\frac{x^2}{4}}^{3-x} f(x,y)dy$

(2). $\int_0^a dy\int_0^{\sqrt{ay}} f(x,y)dx+\int_a^{2a} dy\int_0^{2a-y} dx$

2. 设 $f(x)$ 是连续函数, 则 $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$ 等价于:

- A. $\int_0^1 dx\int_0^{x-1} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$
- B. $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)dy$
- C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$
- D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

March 20

1. 设函数 $f(t)$ 连续, 则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{2\cos\theta}^2 f(r^2)rdr$

- A. $\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)dy$
- B. $\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2+y^2)dy$
- C. $\int_0^2 dy\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)dx$
- D. $\int_0^2 dy\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x^2+y^2)dx$

2. 计算二重积分

(1). $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}(2x+3y)^2 d\sigma$

(2). $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{y}^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx$

(3). $\int_0^1 dy \int_y^1 \sqrt{x^2-y^2} dx$

(4). $\int_0^1 dy \int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^3}\right) dx$

(5). $\iint\limits_D \left(xy^5-1\right) dxdy, D = \left\{(x,y) | -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \sin x \leq y \leq 1\right\}$

(6). $\iint\limits_D x^2 y dxdy$, 其中 D 是由双曲线 $x^2-y^2=1$ 以及直线 $y=0, y=1$ 所围成的平面区域

(7). $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2} dxdy, D = \left\{(x,y) | 0 \leq y \leq x, x^2+y^2 \leq 2x\right\}$

(8). $\iint\limits_D r^2 \sin\theta \sqrt{1-r^2\cos 2\theta} dr d\theta, D = \left\{(r,\theta) | 0 \leq r \leq \sec\theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right\}$

29.4 Week IV

第 30 章 April

30.1 Week I

30.2 Week II

30.3 Week III

30.4 Week IV

April 21

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1})$

解

令 $f(x)=\arctan x$, 由拉格朗日中值定理得:

$$\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1}=f'(\varepsilon)(\frac{a}{x}-\frac{a}{x+1}),\varepsilon\in(\frac{a}{x+1},\frac{a}{x})$$

原极限等价于:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\varepsilon^2}\frac{ax^2}{x(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\varepsilon^2}\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2}{x(x+1)}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a}{x+1}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a}{x}=0$, 夹逼准则得到: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\varepsilon^2}=1$

原极限: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(\arctan\frac{a}{x}-\arctan\frac{a}{x+1})=2$

2. $\int_0^1 dy\int_y^1\sqrt{x^2-y^2}dx$

解

积分区域是由直线 $x=1, y=0, y=x$ 围成的一个三角形, 采用极坐标方法计算二重积分:

$$\theta \in [0, \frac{\pi}{4}], r \in [0, \frac{1}{\cos x}]$$

原二重积分等价于:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r^2\sqrt{\cos^2\theta - \sin^2\theta} dr$$

化简得到:

$$\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^2\theta - \sin^2\theta}\frac{1}{\cos^3\theta} d\theta = \frac{1}{3}\int_0 \frac{\pi}{4}\sqrt{1-\tan^2\theta} d\tan\theta$$

我们有: $\int \sqrt{1-x^2}dx = \dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \dfrac{\arcsin x}{2} + C$

因此, 原二重积分:

$$\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-\tan^2\theta} d\tan\theta = \frac{1}{3}(\frac{\tan\theta\sqrt{1-\tan^2\theta}}{2} + \frac{\arcsin\theta}{2})|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{12}$$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \dfrac{nx^n}{1+e^x}dx$

引理 30.4.1 (第一积分中值定理)

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx$$

其中 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导, 则: $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx = 0$ $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导,$|f(x)| \le M$ 因此:

$$0 \le \int_0^1 x^n f(x)dx \le \int_0^1 Mx^n dx = \frac{M}{n+1}$$

由夹逼准则得到:

$$\lim_{n\to+\infty} 0 = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{M}{n+1} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx = 0$$

利用不等式: $x > \sin x; x > \ln(1+x)$, 可以将上面的式子进行一些变换

引理 30.4.2

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 nx^n f(x)dx$$

利用 **lem** : 30.4.1, 原极限可以化为:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 (n+1)x^n f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(x)dx^n = \lim_{n\to+\infty}[(f(x)x^n)|_0^1 - \int_0^1 f'(x)x^n dx] = f(1)$$

解

令: $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$
利用引理, 我们得到:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{nx^n}{1+e^x}dx=f(1)=\frac{1}{1+e}$$

April 22

1. $\int_0^1 dy\int_y^1(\dfrac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2})dx$

解

积分区域是由直线 $y=0,y=1,x=1$ 围成的三角形, 交换积分次序, 原二重积分等价于:

$$\int_0^1dx\int_0^x(\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2})dy=\int_0^1e^{x^2}dx-\int_0^1dx\int_0^xe^{y^2}dy$$

后面的二重积分再次交换积分次序:

$$\int_0^1dy\int_y^1e^{y^2}dx=\int_0^1(e^{y^2}-ye^{y^2})dy$$

原二重积分化为:

$$\int_0^1e^{x^2}dx-\int_0^1(e^{y^2}-ye^{y^2})dy=\int_0^1xe^{x^2}dx=(\frac{1}{2}e^{y^2})|_{x=0}^{x=1}=\frac{e-1}{2}$$

2. $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$

解

两个等价无穷小:

$$x\longrightarrow0,\sqrt{1+x^2}-1\sim\frac{1}{2}x^2,x\sim\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

设 $f(x)=\ln x,f'(x)=\frac{1}{x}$
原极限可以化为:

$$\lim_{x\to0}-\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\ln(1+x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})\ln(1+x)}\xrightarrow{Lagrange}\lim_{x\to0}-\frac{f'(\varphi)(\sqrt{1+x^2}-1)}{x^2}=\lim_{x\to0}-\frac{1}{2}f'(\varphi)$$

$$1+x<\varphi<x+\sqrt{1+x^2},\lim_{x\to0}(x+1)=\lim_{x\to0}\sqrt{1+x^2}=1\xrightarrow{squeezetheorem}f'(\varphi)=1$$

原极限: $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]=-\dfrac{1}{2}$

3. $\int\dfrac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}dx$

解

我们有: $2+\sin 2x = 1+(\sin x+\cos x)^2$

不妨设 $I = A(\sin x+\cos x), J = B(\cos x-\sin x)$

$I+J = \sin x \Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$

原不定积分化为:

$$\int \frac{I+J}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}}dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}dx - \int \frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}}dx\right)$$

原不定积分为:

$$\frac{1}{2}\left[\arcsin\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}} - \ln(\sin x+\cos x+\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2})\right]+C$$

April 23

1. 区域 D 是由曲线 $y=\sin x, x=\pm\frac{\pi}{2}, y=1$ 围成, 求 $\iint\limits_D (xy^5-1)dxdy$

解

$$\iint\limits_D (xy^5-1)dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^{1}(xy^5-1)dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{6}-\frac{x\sin^6}{6}+\sin x-1\right)dx = -\pi$$

2. $\int_{\frac{1}{6}}^{+\infty}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]dx$

解

$$\begin{cases} \left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] = 0, x \geq 1 \\ \left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] = 1, \frac{1}{4} \leq x \leq 1 \\ \left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right] = 2, \frac{1}{6} \leq x \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

原积分为:

$$\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{4}}\frac{2}{x}dx + \int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{x}dx = 2\ln 3$$

3. 已知函数 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin x^2\cos y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 求 $f_x'(0,0), f_y'(0,0)$

解

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2}|\Delta x|$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)}{\Delta y}=0$$

$f'_x(0,0)$ 不存在, $f'_y(0,0)=0$

April 24

1. $\iint\limits_D x^2ydxdy$, 区域 D 是由曲线 $x^2-y^2=1$ 以及直线 $y=0, y=1$ 围成的平面区域的面积

解

原二重积分等价于:

$$\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}}x^2ydx=\int_0^1\frac{2}{3}y(1+y^2)^{\frac{3}{2}}dy=\frac{8\sqrt{2}-2}{15}$$

2. 设 $z=e^{xy}+f(x+y,xy)$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, 其中 $f(u,v)$ 有二阶连续偏导数

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}+f'_1(x+y,xy)+yf'_2(x+y,xy)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(1+xy)e^{xy}+f''_{11}(x+y,xy)+xf''_{12}(x+y,xy)+f'_2(x+y,xy)+y(f''_{21}(x+y,xy)+xf''_{22}(x+y,xy))$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(1+xy)e^{xy}+f''_{11}(x+y,xy)+xyf''_{22}(x+y,xy)+(x+y)f''_{12}(x+y,xy)+f'_2(x+y,xy)$$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^4}\prod\limits_{k=1}^{2n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$

解

原极限等价于:

$$\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{n}\ln(\prod_{k=1}^{2n}(n^2+k^2))-4\ln n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{n}\ln(\prod_{k=1}^{2n}(1+(\frac{k}{n})^2))}=e^{\int_0^2\ln(1+x^2)dx}$$

$$\int_0^2\ln(1+x^2)dx=x\ln(1+x^2)|_{x=0}^{x=2}-\int_0^2\frac{x^2}{1+x^2}dx=2\ln 5-2+\arctan 2$$

原极限: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^4}\prod\limits_{k=1}^{2n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}=25e^{\arctan 2-2}$

April 25

1. $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, 其中 $D=\{(x,y)|0\le y\le x,\ x^2+y^2\le 2x\}$

解

采用极坐标积分方法:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2dr=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\theta d\theta=\frac{10\sqrt{2}}{9}$$

2. 设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{x\to0,y\to1}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$, 求 $dz|_{(0,1)}$

解

$$dz|_{(0,1)}=2dx-dy$$

April 26

1. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos2\theta}drd\theta$, 其中 $D=\left\{(r,\theta)|0\le r\le\sec\theta,0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$

解

原二重积分化为直角坐标形式:

$$I=\iint\limits_{D'}y\sqrt{1+y^2-x^2}dxdy$$

其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le1,0\le y\le x\}$

$$I=\int_0^1dx\int_0^x y\sqrt{1+y^2-x^2}dy=\frac{1}{3}\left[\int_0^1(1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}})dx\right]=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}$$

2. $\int_0^1 x^a(1-x)^b\ln xdx$

引理 30.4.3 (特殊反常积分)

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\begin{cases}p>1,\ \text{收敛}\\ p\le1,\ \text{发散}\end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx \begin{cases} 0 < p < 1, \text{收敛} \\ p \geq 1, \text{发散} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p}dx \begin{cases} 0 < p < 1, \text{收敛} \\ p \geq 1, \text{发散} \end{cases}$$

解

我们发现这个题可能的瑕点为 $x = 0,\ x = 1$

$$x \to 1^-, f(x) = x^a(1-x)^b \ln x \sim -(1-x)^{b+1} \Rightarrow 0 < -(b+1) < 1 \Rightarrow -2 < b < -1$$
$$x \to 0^+, f(x) = x^a(1-x)^b \ln x \sim x^a \ln x = \frac{\ln x}{x^{-a}} \Rightarrow 0 < -a < 1 \Rightarrow -1 < a < 0$$

(1).$x = 1, x = 0$ 均为瑕点, 我们得到:

$$\begin{cases} -2 < b < -1 \\ -1 < a < 0 \end{cases}$$

(2).$x = 1$ 是瑕点,$x = 0$ 不是瑕点, 我们有:

$$\begin{cases} a > 0 \\ -2 < b < -1 \end{cases}$$

(3).$x = 0$ 是瑕点,$x = 1$ 不是瑕点, 我们有:

$$\begin{cases} -1 < a < 0 \\ b > -1 \end{cases}$$

3. $\int \frac{x^2}{(x\cos x - \sin x)(x\sin x + \cos x)}dx$

解

$$\int \frac{x(x\cos x - x\sin x) + x\sin x(x\sin x + \cos x)}{(x\cos x - \sin x)(x\sin x + \cos x)}dx = \int \frac{x\cos x}{x\sin x + \cos x}dx + \int \frac{x\sin x}{x\cos x - \sin x}dx$$
$$\int \frac{x\cos x}{x\sin x + \cos x}dx = \ln(x\sin x + \cos x) + C$$
$$\int \frac{x\sin x}{x\cos x - \sin x}dx = \ln(x\cos x + \sin x) + C$$

原不定积分为:

$$\int \frac{x^2}{(x\cos x - \sin x)(x\sin x + \cos x)}dx = \ln(x\sin x + \cos x) + \ln(x\cos x + \sin x) + C$$

4. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x^2+\frac{1}{2})^2} dx$

引理 30.4.4 (特殊积分)

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$$

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr = \frac{\pi}{2}(-\frac{1}{2}e^{-r^2})|_{r=0}^{r=+\infty} = \frac{\pi}{4}$$

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

解

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x^2+\frac{1}{2})^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{2x} d(\frac{4x^2}{2x^2+1}) = \frac{e^{-x^2}}{2x}\frac{4x^2}{2x^2+1}|_{x=0}^{x=+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{4x^2}{2x^2+1}\frac{e^{-x^2}(-4x^2-2)}{4x^2} dx$$

$$\Downarrow$$

$$I = \frac{2xe^{-x^2}}{2x^2+1}|_{x=0}^{x=+\infty} + 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2xe^{-x^2}}{2x^2+1} = \frac{2e^{-x^2}}{2x+\frac{1}{x}} = 0 \quad \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{-x^2}}{2x^2+1} = 0$$

因此, 我们得到原定积分为:

$$I = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

April 27

1. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{1+\cos x - \sin x} dx$

引理 30.4.5 (对称积分变换)

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a (f(x)+f(-x))dx$$

解

由 **lem** : 30.4.5 , 我们得到:

$$f(x) = \frac{\cos^3 x}{1+\cos x - \sin x}, f(-x) = \frac{\cos^3 x}{1+\cos x + \sin x}$$

原定积分等价于:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\cos^3 x}{1+\cos x-\sin x}+\frac{\cos^3 x}{1+\cos x+\sin x})dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2(1+\cos x)\cos^3 x}{2\cos x(1+\cos x)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 xdx=\frac{\pi}{4}$$

April 28

1. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=8$

解

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2,\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=3$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=8$$

2. $\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{x(1+\ln^2 x)}dx$

解

令 $t=\dfrac{1}{x},x=\dfrac{1}{t},dx=-\dfrac{1}{t^2}dt$

原反常积分等价于:

$$\int_0^{+\infty}\frac{t\arctan\frac{1}{t}}{1+\ln^2 t}\frac{1}{t^2}dt=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\frac{1}{x}}{x(1+\ln^2 x)}dx$$

两式相加得到:

$$2I=\int_0^{+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}}{x(1+\ln^2 x)}dx=\frac{\pi}{2}\arctan\ln x|_0^{+\infty}=\frac{\pi^2}{2}$$

$$I=\frac{\pi^2}{4}$$

3. $\int\dfrac{2x^4}{1+x^6}dx$

解

$$\int\frac{2x^4}{1+x^6}dx=\int\frac{x^4-1}{1+x^6}dx+\int\frac{x^4+1}{1+x^6}dx=\int\frac{x^2+1}{1+x^4-x^2}dx+\int\frac{x^4-x^2+1+x^2}{1+x^6}dx$$

$$\int\frac{x^2-1}{1+x^4-x^2}dx=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{3}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{3}}|+C$$

$$\int \frac{x^4 - x^2 + 1 + x^2}{1 + x^6} dx = \arctan x + \frac{1}{3} \arctan x^3 + C$$

April 29

1. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (1 - \cos \frac{\alpha}{n}), \quad \alpha > 0$ 绝对收敛

解

$$n \to +\infty, 1 - \cos \frac{\alpha}{n} \sim \frac{\alpha^2}{2n^2}$$

原级数和 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\alpha^2}{2n^2}$ 同敛散性, 后者绝对收敛.

April 30

1. 设 $u_n = (-1)^n \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$, 判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 和级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ 的敛散性

解

比较判别法的极限形式:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$$

级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$ 和级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 同敛散性.
判断交错级数 u_n 敛散性, 我们有: $\ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$ 单调递减, 且 $\lim_{n \to +\infty} \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}) = 0$
我们有级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 发散, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 条件收敛.
比较判别法的极限形式:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln^2(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})}{\frac{1}{n}} = 1$$

级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ 发散.

2. 已知 $y^2(x - y) = x^2$, 求 $\int \frac{1}{y^2} dx$

解

隐函数转为参数方程

令 $\frac{y}{x}=t$, 我们有 $xt^2(1-t)=1$, 我们得到参数方程:

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{t^2(1-t)} \\ y=\dfrac{1}{t(1-t)} \end{cases}$$

原不定积分:

$$\int t^2(t-1)^2\frac{t(3t-2)}{t^4(1-t)^2}dt=\int(3-\frac{2}{t})dt=3t-2\ln t+C$$

第 31 章 May

31.1 Week I

May 1

1. 已知级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛, 求 α 取值范围.

解

p 级数敛散性:

$$\begin{cases} 2-\alpha > 0 \\ 2-\alpha \le 1 \end{cases} \Rightarrow 1 \le \alpha < 2$$

比较判别法的极限形式:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}} = 1 \Rightarrow \alpha - \frac{1}{2} > 1 \Rightarrow \alpha > \frac{3}{2}$$

我们得到 α 取值范围 $\dfrac{3}{2} < \alpha < 2$

2. $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

解

$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}, S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{2n!}x^{2n}$.

我们得到:

$$S(x) + S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n = e^x$$

原问题转化为微分方程: $y'+y=e^x$ 的求解, 且 $y(0)=0$

一阶微分方程的求解公式:

$$y'+p(x)y=q(x)\Rightarrow y=e^{-\int p(x)dx}(e^{\int p(x)dx}q(x)+C)$$

我们得到: $S(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

3. 求二重积分 $\iint\limits_D y^2dxdy$ 和 $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, 其中 D 是由参数方程 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$,$t\in[0,2\pi]$

解

积分区域是摆线, $x\in[0,2\pi a]$, 二重积分可以化为:

$$\iint\limits_D y^2dxdy=\int_0^{2\pi a}dx\int_0^{y(x)}y^2dy=\int_0^{2\pi a}\frac{1}{3}y^3(x)dx$$

$$\int_0^{2\pi a}\frac{1}{3}y^3(x)dx=\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}a^3(1-\cos t)^3(a-a\cos t)dt=\frac{2}{3}\int_0^{\pi}(2\sin^2 t)^4dt$$

华里士公式:

$$\frac{2}{3}\int_0^{\pi}(2\sin^2 t)^4dt=\frac{2}{3}\times 16\times\frac{7}{8}\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{35\pi}{12}$$

二重积分 $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$ 可化为:

$$\int_0^{2\pi a}dx\int_0^{y(x)}(x+2y)dy=\int_0^{2\pi a}(y^2(x)+xy(x))dx$$

$$I=\int_0^{2\pi}[a^2(1-\cos t)^2+a^2(t-\sin t)(1-\cos t)](a-a\cos t)dt$$

$$I=a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt+a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2(t-\sin t)dt$$

$$I_1=2\int_0^{\pi}(2\sin^2 t)^3dt=5\pi$$

$$I_2=\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos x)^2(x+\pi+\sin x)dx=2\pi\int_0^{\pi}(1+\cos x)^2dx=3\pi^2$$

May 2

1. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sin(n+k))$ 敛散性

解

设 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$,$u_n<a_n$

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 部分和 $S_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$$

原级数绝对收敛.

2. $\lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{2(\sec x-1)} - \sqrt[3]{6(x-\sin x)}}{\int_0^{x^2} \arctan(e^{\sqrt{t}}-1)dt}$

解

对于变上限积分, 当 $x\to0, g(x)\to0, h(x)\to0$, 我们有:

$$\lim_{x\to0^+}\int_0^{g(x)} h(t)dt \Rightarrow \lim_{x\to0^+}\int_0^{G(x)} H(t)dt, x\to0, f(x)\sim F(x), h(x)\sim H(x)$$

我们得到原极限等价于:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{2(\sec x-1)}-\sqrt[3]{6(x-\sin x)}}{\frac{2}{3}x^3} = \lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{2(\sec x-1)}-\sqrt{2\frac{1}{2}x^2}+\sqrt[3]{6\frac{1}{6}x^3}-\sqrt[3]{6(x-\sin x)}}{\frac{2}{3}x^3}$$

前一个极限:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{2(\sec x-1)}-\sqrt{2\frac{1}{2}x^2}}{\frac{2}{3}x^3} = \lim_{x\to0^+}\frac{2(\sec x-1-\frac{1}{2}x^2)}{\frac{2}{3}x^3(\sqrt{2(\sec x-1)}+x)}$$

我们有: $\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{2(\sec x-1)}+x}{2x} = 1$

前一个极限:

$$I_1 = \frac{3}{2}\frac{1-\cos x-\frac{1}{2}x^2\cos x}{x^4\cos x} = \frac{5}{16}$$

同理可得:

$$I_2 = -\lim_{x\to0^+}\frac{3}{2}\frac{\sqrt[3]{6\frac{x-\sin x}{x^3}}-1}{x^2} = -\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2}\frac{6(x-\sin x)-x^3}{x^5} = \frac{1}{40}$$

原极限为: $I = I_1 + I_2 = \frac{27}{80}$

May 3

1. 级数 $\sum_{n=2}^{+\infty}[sin\frac{1}{n} - k\ln(1-\frac{1}{n})]$ 收敛, 求 k 的值.

解

泰勒公式和级数的比较判别法极限形式

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{sin\frac{1}{n}-kln(1-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to+0}\frac{sinx-kln(1-x)}{x}$$

分子利用泰勒展开式得到:

$$x \to 0, \sin x - kln(1-x) \sim x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + kx + k\frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim (1+k)x + o(x)$$

我们得到:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{sin\frac{1}{n} - k\ln(1-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1+k$$

当且仅当 $k=-1$ 时, 级数收敛, 因为当 $k \neq -1$ 时, 原级数敛散性和 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ 一致, 级数发散.

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^3 dx$

解

原定积分:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)^3 dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x dx$$

令 $tanx = t, x = \arctan t, dx = \frac{1}{1+t^2}dt, t \in [0,1]$, 原定积分为:

$$I = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}dt^2 = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t}{1+t}dt = \frac{\ln 2 - 1}{2}$$

May 4

1. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|, \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n, \sum_{n=1}^{+\infty} a_n a_{n+1}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 敛散性

解

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n} \quad b_n = (-1)^n \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

a_n 收敛,$|a_n|$ 发散;

a_n 收敛,$(-1)^n a_n$ 发散;

b_n 收敛,$b_n b_{n+1}$ 发散;

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x - \cos x} dx$

解

原定积分内有瑕点, 原积分等价于:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x - \cos x}dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x - \cos x}dx$$

我们有: $\int \frac{1}{\sin x - \cos x} dx = \ln|\frac{1-\cos(x-\frac{\pi}{4})}{\sin(x-\frac{\pi}{4})}| + C$
我们可以得到原反常积分发散.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{\cot x}{e^{-2x}} + \frac{1}{e^{-x}\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$

解

原极限等价于:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2e^x - \frac{1}{2}x^2\sin 2xe^{2x} - \sin^2 x}{x^4} = -\frac{7}{6}$$

May 5

1. 判断下列命题是否正确

(i). $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(u_{2n+1}+u_{2n})$ 收敛,$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n$ 收敛

(ii). $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n$ 发散.

解

(i). $u_n = (-1)^n$, 第一个排除

(ii). 正项级数比较判别法

2. $(1+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}$

解

我们有:

$$(1+\sqrt{3})^{n+1} = (1+\sqrt{3})^n(1+\sqrt{3}) = (a_n+b_n\sqrt{3})(1+\sqrt{3})$$

我们得到:

$$(a_n+3b_n)+(a_n+b_n)\sqrt{3} = a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

我们化简得:

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{\frac{a_n}{b_n}+3}{\frac{a_n}{b_n}+1}$$

不妨设 $x_n = \frac{a_n}{b_n}$, 我们有 $x_{n+1} = 1 + \frac{2}{x_n+1}$,$x_1 = 1$
因为 $1 < x_1 < \sqrt{3}, x_n > 1$, 我们得到:

$$0 < |x_{n+1}-\sqrt{3}| = |1+\frac{2}{x_n+1} - (1+\frac{2}{\sqrt{3}+1})| = \frac{2}{(x_n+1)(\sqrt{3}+1)}|x_n-\sqrt{3}|$$

化简得:

$$0 < |x_{n+1} - \sqrt{3}| < \frac{1}{\sqrt{3}+1}|x_n - \sqrt{3}| = \frac{1}{(\sqrt{3}+1)^{n-1}}a_1$$

夹逼定理得到: $\lim\limits_{n\to+\infty}|x_n - \sqrt{3}| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \sqrt{3}$

May 6

1. $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

解

令 $x = \sec t, t \in [1, \frac{\pi}{2}], dx = \tan t \sec t dt$, 我们有:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t \tan t}{\sec^2 t \tan t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 1$$

2. $\int_0^1 \dfrac{xdx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

解

令 $x = \sin t, t \in [0, \frac{\pi}{2}], dx = \cos t dt$, 我们有:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \cos t}{(2-\sin^2 t)\cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{2-\sin^2 t} dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\cos t}{\cos^2 t + 1} = -\arctan(\cos t)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

3. $y = x^2$ 与 $y = mx$ 围成的部分绕着 $y = mx(m > 0)$ 旋转一周得到的旋转体体积 V

解

$$V = \int_0^L \pi r^2 dl = \int_0^m \pi r^2\sqrt{1+m^2}dx = \frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}}\int_0^m x^2(m-x)^2 dx = \frac{m^5\pi}{30\sqrt{1+m^2}}$$

May 7

1. $f(x)$ 在 $(2,4)$ 上二阶导数连续,$f(3) = 0$, 求证: $f''(\varepsilon) = 3\int_2^4 f(x)dx$

解

设 $F(x) = \int_2^x f(x)dx$, 原命题转化为证明:

$$\text{已知} F(2) = 0, F'(3) = 0, \text{求证} F'''(\varepsilon) = 3F(4)$$

$F(x)$ 在 $x = 3$ 处的泰勒展开式为:

$$F(x) = F(3) + F'(3)(x-3) + \frac{F''(3)}{2}(x-3)^2 + \frac{F'''(\varepsilon_1)}{6}(x-3)^3$$

我们得到:

$$\begin{cases} F(2) = F(3) - F'(3) + \frac{F''(3)}{2} - \frac{F'''(\varepsilon_1)}{6}, \varepsilon_1 \in (2,3) \\ F(4) = F(3) + F'(3) + \frac{F''(3)}{2} + \frac{F'''(\varepsilon_2)}{6}, \varepsilon_2 \in (3,4) \end{cases}$$

我们得到: $F(4) = \dfrac{F'''(\varepsilon_1) + F'''(\varepsilon_2)}{6}$

由平均值定理得到:

$$\exists \varepsilon_3 \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2),\ s.t\ F'''(\varepsilon_3) = \frac{F'''(\varepsilon_1) + F'''(\varepsilon_2)}{2}$$

我们得到: $F(4) = \dfrac{F'''(\varepsilon_3)}{3}$, 证毕

2. $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导,$f(0) = 0$, 其反函数为 $g(x)$, 若 $\int_0^{f(x)} g(t)dt = x^2e^x$, 求 $f(x)$

解

我们对 $\int_0^{f(x)} g(t)dt = x^2e^x$ 左右两边同时对 x 求导:

$$g(f(x))f'(x) = (x^2 + 2x)e^x \Rightarrow f'(x) = (x+2)e^x$$

我们得到: $f(x) = (x+1)e^x + C, f(0) = 1 + C = 0, C = -1$

$$f(x) = (x+1)e^x - 1$$

31.2 Week II

May 8

1. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{\ln n}{2^n}(x+1)^{2n+1}$ 收敛区间

解

求解收敛半径的两种方法:

(i).$\rho = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

(ii).$\rho = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

本题中采用第二种方法: $\rho = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2}\sqrt[n]{\ln n} = \dfrac{1}{2}$

此题中幂级数只有奇数项, 收敛半径 $R = \sqrt{\dfrac{1}{\rho}} = \sqrt{2}$

原幂级数收敛区间: $(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$

2. 证明: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx = \dfrac{n\pi}{2}$

解

我们不妨设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\sin nx}{\sin x})^2 dx$, 我们有:

$$a_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$a_{n+1} - a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(n+1)x - \sin^2 nx}{\sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx$$

我们令 $c_n = a_{n+1} - a_n$,$c_0 = \frac{\pi}{2}$

$$c_{n+1} - c_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+3)x - \sin(2n+1)x}{\sin x} dx$$

我们利用和差化积公式得到:

$$c_{n+1}-c_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin[(2n+2)x+x] - \sin[(2n+2)x-x]}{\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x\cos(2n+2)x}{\sin x} dx = 0 \Rightarrow c_n = \frac{\pi}{2}$$

我们得到: a_n 是等差数列,$a_n = \dfrac{n\pi}{2}$

3. 由方程 $F(cx-az, cy-bz) = 0$ 确立了函数 $z = z(x,y)$, 求 $a\dfrac{\partial z}{\partial x} + b\dfrac{\partial z}{\partial y}$

解

隐函数求导法则: $G(x,y,z) = F(u,v)$, $\begin{cases} u = cx - az \\ v = cy - bz \end{cases}$, 我们有:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F'_x}{F'_z} = \dfrac{cF'_1}{aF'_1 + bF'_2} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F'_y}{F'_z} = \dfrac{cF'_2}{aF'_1 + bF'_2} \end{cases}$$

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c$$

May 9

1. 设函数 f, g 均可微, 且 $z = f[xy, \ln x + g(xy)]$, 求 $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}$

解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = yf'_1 + (\frac{1}{x} + yg')f'_2 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = xf'_1 + xg'f'_2 \end{cases}$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = f'_2$$

2. $f'(x)$ 连续, $|f'(x)| \le M$, $\int_0^1 f(x)dx = 0$, 证明: $\forall a \in [0,1]$, $|\int_0^a f(x)dx| \le \frac{M}{8}$

解

我们令: $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 原命题等价于:

$$|F''(x)| \le M, F(0) = F(1) = 0, \forall a \in [0,1], |F(x)| \le \frac{M}{8}$$

利用泰勒反向展开:

$$\begin{cases} F(0) = F(x) + F'(x)(0-x) + \dfrac{F''(\varepsilon_1)}{2}(0-x)^2 & ① \\ F(1) = F(x) + F'(x)(1-x) + \dfrac{F''(\varepsilon_2)}{2}(1-x)^2 & ② \end{cases}$$

我们利用 $(1-x)①+x②$ 得到:

$$F(x) = -\frac{F''(\varepsilon_1)}{2}x^2(1-x) - \frac{F''(\varepsilon_2)}{2}x(1-x)^2$$

$$|F(x)| \le \frac{M}{2}[x^2(1-x) + x(1-x)^2] = \frac{M}{8}$$

May 10

1. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x-1)^n$ 的收敛域

解

先求幂级数收敛半径:

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n+(-2)^n}{n}} = 3 \Rightarrow r = \frac{1}{3}$$

原幂级数中心点 $x=1$, 收敛区间为 $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$, 我们验证端点值 $x = \frac{2}{3}, x = \frac{4}{3}$

当 $x = d\frac{2}{3}$ 时, 原幂级数为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^n+(-2)^n}{(-3)^n n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n}{n3^n}$, 原级数收敛.

当 $x = d\frac{4}{3}$ 时, 原幂级数为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-2)^n}{n3^n}$, 原级数发散.

幂级数收敛域为 $[\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3})$

2. 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ 和 $\dfrac{1}{3}$, 则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n^2}{b_n^2} x^n$ 收敛半径为

解 由题意知:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} |\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{3}{\sqrt{5}} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} |\dfrac{b_{n+1}}{b_n}| = 3 \end{cases}$$

后面幂级数收敛半径 $R = \frac{1}{\rho}$, 我们有:

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}^2 b_n^2}{a_n^2 b_{n+1}^2}| = \frac{9}{5}\frac{1}{9} = \frac{1}{5} \Rightarrow R = 5$$

(有些许问题)

May 11

1. $f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$, 计算 $f''_{xy}(0,0)$ 和 $f''_{yx}(0,0)$

解

$$\begin{cases} f'_x(0,0) = \lim\limits_{x\to0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0 \\ f'_y(0,0) = \lim\limits_{y\to0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_x = \frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \\ f'_y = \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f''_{xy}(0,0) = \lim\limits_{y\to0} \frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y} = -1 \\ f''_{yx}(0,0) = \lim\limits_{x\to0} \frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x} = 1 \end{cases}$$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $f(0) = f(1) = 0, \min\limits_{x\in[0,1]}\{f(x)\} = -1$, 证明: $\exists \varepsilon \in (0,1)$, 使得 $f''(\varepsilon) \geq 8$

解

$f(0) = f(1) = 0, \min\limits_{x\in[0,1]}\{f(x)\} = -1$, 由费马定理我们得到:

$$\exists x_0 \in (0,1), f'(x_0) = 0$$

我们利用泰勒展开,$f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的泰勒展开式:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(\eta)}{2}(x-x_0)^2, \eta \in x \sim x_0$$

(1). 当 $x = 0$ 时,$f(0) = -1 + \frac{f''(\eta_1)}{2}x_0^2 = 0 \Rightarrow f''(\eta_1) = \frac{2}{x_0^2}$

(2). 当 $x = 0$ 时,$f(1) = -1 + \frac{f''(\eta_2)}{2}(1-x_0)^2 = 0 \Rightarrow f''(\eta_1) = \frac{2}{(1-x_0)^2}$

我们不妨记 $f''(\eta)=max(f''(\eta_1),f''(\eta_2))$, 利用不等式的知识, 我们得到:

$$f''(\eta)\geq\frac{2}{(\frac{1}{2})^2}=8$$

我们得到: $\exists\varepsilon=\eta\in(0,1)$, 使得 $f''(\varepsilon)\geq 8$

3. 设 m,n 均是正整数, 证明: $\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 收敛性与 m,n 无关

解

令 $f(x)=\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}=x^{-\frac{1}{n}}[\ln(1-x)]^{-\frac{2}{m}}$

我们需要讨论 $x\to0^+$ 和 $x\to1^-$ 两个可能的瑕点

(i). $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=x^{\frac{2}{m}-\frac{1}{n}}=\begin{cases}0,\frac{2}{m}>\frac{1}{n}\\1,\frac{2}{m}=\frac{1}{n}\\+\infty,\frac{2}{m}<\frac{1}{n}\end{cases}$

(ii). $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$

综合 (i)(ii), 我们知道 $x=1$ 一定是 $f(x)$ 的瑕点,$x=0$ 在一定情况下是 $f(x)$ 的瑕点.

$$\int_0^1f(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1f(x)dx=I_1+I_2$$

(1). 我们讨论 I_2 的收敛性, 我们比较 $f(x)$ 和 $\dfrac{1}{\sqrt[m]{1-x}}$:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)}{\frac{1}{\sqrt[m]{1-x}}}=\sqrt[m]{\frac{\ln^2(1-x)}{\frac{1}{1-x}}}\overset{t=1-x}{\Longrightarrow}\lim_{t\to0^+}\sqrt[m]{t\ln^2t}=0$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1f(x)dx<\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{\sqrt[m]{1-x}}dx$$

后面的定积分收敛,I_2 收敛

(2). 我们讨论 I_1 的收敛性, 我们比较 $f(x)$ 和 $\dfrac{1}{\sqrt[n]{x}}$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{\frac{1}{\sqrt[n]{x}}}=\lim_{x\to0^+}\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}=0$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt[n]{x}}dx$$

后面的定积分收敛,I_1 收敛.

I 积分收敛, 与 m,n 的取值无关.

May 12

1. 设数列 a_n 单调减少, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0, S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k (n = 1, 2\ldots)$ 无界, 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x-1)^n$ 收敛域.

解

我们不难发现幂级数的中心点为 $x = 1$, 数列 a_n 单调减少, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 \Rightarrow a_n$ 是正项级数.

(i). 当 $x = 0$ 时, 我们得到幂级数为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$, 莱布尼兹判别法得到级数收敛, 由阿贝尔定理我们得到: $x \in (0, 2)$, 级数收敛.

(ii). 当 $x = 2$ 时, 我们得到幂级数为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, 级数发散, 由阿贝尔定理我们得到: $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, 级数发散.

综合 (i)(ii), 我们的得到幂级数收敛域为 $[0, 2)$

2. 多元函数连续、偏导数、可微、一阶偏导数连续

验证函数 $f(x,y) = \begin{cases} y\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y) \neq 0 \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处是否连续, 是否可微, 一阶偏导数的值和是否连续.

解

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} y\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} y\frac{\pi}{2} = 0 = f(0,0)$$

(i).$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \arctan\frac{1}{|y|} = \frac{\pi}{2}$$

(ii).$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数为 $f'_x(0,0) = 0, f'_y(0,0) = \dfrac{\pi}{2}$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-f'_x(0,0)(x-0)-f'_y(0,0)(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = y\frac{\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

(iii).$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

公式法求 $f(x,y)$ 偏导数:

$$f'_x = y\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}(-x)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} = -xy\frac{(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}}{1+x^2+y^2}$$

$$f'_y = \arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - y^2\frac{(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}}{1+x^2+y^2}$$

我们得到一阶偏导数在 $(0,0)$ 处的极限:

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0} f_x'(x,0) = 0 = f_x'(0,0) \\ \lim_{y\to 0} f_y'(0,y) = \frac{\pi}{2} = f_y'(0,0) \end{cases}$$

(iiii). 原函数一阶偏导数在 $(0,0)$ 处连续.

May 13

1. 将 $f(x) = \frac{5x-12}{x^2+5x-6}$ 展开为 x 的幂级数.

解

$$\frac{5x-12}{x^2+5x-6} = \frac{6}{x+6} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1+\frac{x}{6}} + \frac{1}{1-x}$$

我们由常见幂级数展开式得到:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,\ -1<x<1$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n,\ -1<x<1$$

我们可以得到:

$$\frac{1}{1+\frac{x}{6}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (\frac{x}{6})^n, -1 < \frac{x}{6} < 1$$

我们可以得到:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (\frac{x}{6})^n + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (1+\frac{(-1)^n}{6^n}) x^n, -1<x<1$$

2. 证明: $f_x'(x,y)$ 和 $f_y'(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续,$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微.

解

由题意得:

$$\begin{cases} \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} = f_x'(x_0,y_0) \Rightarrow f(x,y_0)-f(x_0,y_0) = f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+\alpha(x,y) \\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0} = f_y'(x_0,y_0) \Rightarrow f(x_0,y)-f(x_0,y_0) = f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)+\beta(x,y) \end{cases}$$

我们要证明函数在 (x_0,y_0) 处可微, 我们只需要证明:

$$f(x,y)-f(x_0,y_0) = f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)+o(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})$$

$$\begin{aligned}
f(x,y)-f(x_0,y_0) &= (f(x,y)-f(x_0,y))+(f(x_0,y)-f(x_0,y_0)) \\
&= f_x'(\varepsilon_1,y)(x-x_0)+f_y'(x,\varepsilon_2)(y-y_0) \\
&= \left[f_x'(\varepsilon_1,y)-f_x'(x_0,y_0)+f_x'(x_0,y_0)\right](x-x_0) \\
&+ \left[f_y'(x,\varepsilon_2)-f_y'(x_0,y_0)+f_y'(x_0,y_0)\right](y-y_0) \\
&= dz+\alpha_1(x,y)+\beta_1(x,y)
\end{aligned}$$

我们有:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\alpha_1(x,y)=0\ \ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\beta_1(x,y)=0$$

证毕.

May 14

1. 将函数 $f(x)=\ln(1-x-2x^2)$ 展开为 x 的幂级数, 并指出其收敛区间.

解

$$\ln(1-x-2x^2)=\ln(1+x)+\ln(1-2x)$$

我们根据:

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},-1<x\le 1$$

得到上面式子的展开式:

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},-1<x\le 1$$

$$\ln(1-2x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2x)^n}{n},-1<-2x\le 1$$

我们得到 $f(x)$ 的展开式为:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}[\frac{(-1)^n-2^n}{n}]x^n,-\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}$$

函数 $f(x)$ 的收敛区间为 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

2. 设 $f(x),g(x)$ 在 $x\in[0,1]$ 上的导数连续, 且 $f(0)=0,f'(x)\ge 0,g'(x)\ge 0$, 证明: $\forall a\in[0,1]$, 有 $\int_0^a g(x)f'(x)dx+\int_0^1 f(x)g'(x)dx\ge f(a)g(1)$

解

我们设 $F(x)=\int_0^x g(t)f'(t)dt+\int_0^1 f(t)g'(t)dt-f(x)g(1)$.
我们有:

$$F'(x)=g(x)f'(x)-g(1)f'(x)=f'(x)[g(x)-g(1)]$$

我们知道: $f'(x) \geq 0, g'(x) \geq 0 \Rightarrow g(x) \leq g(1), x \in [0,1]$
我们得到: $F'(x) \leq 0 \Rightarrow F(x)$单调递减

$$F(x) \geq F(1) = \int_0^1 g(x)df(x) + \int_0^1 f(x)g'(x)dx - f(1)g(1) = -f(0)g(0) = 0$$

原命题得证, 证毕.

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调递减, 证明: $\lambda \in (0,1), \int_0^\lambda f(x)dx > \lambda \int_0^1 f(x)dx$

解

我们构造: $F(x) = \dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}$
我们对 $F(x)$ 求导得到:

$$F'(x) = \frac{xf(x) - \int_0^x f(t)dt}{x^2}$$

我们令 $G(x) = xf(x) - \int_0^x f(t)dt$, 我们得到:

$$G'(x) = f(x) + xf'(x) - f(x) = xf'(x),\ x \in [0,1]$$

我们已知 $f(x)$在$[0,1]$上连续且单调递减, 我们可以得到$f'(x) < 0,\ x \in (0,1)$
我们得出: $G'(x) < 0,\ x \in (0,1)$
$G(x)$在$(0,1)$上单调递减, $G(x) < G(0) = 0 \Rightarrow F'(x) < 0,\ x \in (0,1), F(x)$单调递减 我们得到:

$$F(x) > F(1) \Rightarrow \frac{\int_0^x f(t)dt}{x} > \frac{\int_0^1 f(x)dx}{1}$$

即 $\forall \lambda \in (0,1), \int_0^\lambda f(x)dx > \lambda \int_0^1 f(x)dx$

4. $z = (x^2+y^2)f(x^2+y^2), \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, f(1) = 0, f'(1) = 1$, 求 $f(x)$ 表达式

解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xf(x^2+y^2) + 2x(x^2+y^2)f'(x^2+y^2) \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2yf(x^2+y^2) + 2y(x^2+y^2)f'(x^2+y^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f(x^2+y^2) + 4x^2f'(x^2+y^2) + (6x^2+2y^2)f'(x^2+y^2) + 4x^2(x^2+y^2)f''(x^2+y^2) \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2f(x^2+y^2) + 4y^2f'(x^2+y^2) + (6y^2+2x^2)f'(x^2+y^2) + 4y^2(x^2+y^2)f''(x^2+y^2) \end{cases}$$

我们可以得到:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4f(u) + 12uf'(u) + 4u^2f''(u) = 0,\ u = x^2+y^2$$

问题转化为:

$$u^2f''(u)+3uf'(u)+f(u)=0 \Rightarrow (u^2f''(u)+2uf'(u))+(uf'(u)+f(u))=[u^2f'(u)+uf(u)]'=0$$

我们得到: $u^2f'(u)+uf(u)=C$, 又因为 $f(1)=0, f'(1)=1 \Rightarrow C=1$

我们得到一个一阶线性微分方程: $uf'(u)+f(u)=\dfrac{1}{u}$

利用公式法, 我们得到:

$$(uf(u))'=\frac{1}{u} \Rightarrow uf(u)=\ln u+C_2 \Rightarrow uf(u)=\ln u$$

我们得到: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

31.3 Week III

May 15

1. 将 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数

解

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}, -1<x^2<1$$

我们有:

$$f(x)-f(0)=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}dx$$

$$\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x(-1)^n x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

$f(0)=\dfrac{\pi}{4}$, 我们有: $f(x)=\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, -1<x<1$

2. 微分方程 $y'=\frac{y(1-x)}{x}$ 通解

解

分离变量

原微分方程可以化为:

$$\begin{aligned}&(i)\quad y\neq 0\quad \frac{1}{y}dy=(\frac{1}{x}-1)dx\\&(ii)\quad y=0\quad y'(x)=0, \text{满足条件}\end{aligned}$$

针对 (i), 我们同时求不定积分得到:

$$\ln|y| = \ln|x| - x + C_1 \Rightarrow \ln|y| = \ln|cxe^{-x}| \Rightarrow y = cxe^{-x}$$

综合 (i)(ii), 我们得到微分方程通解: $y = Cxe^{-x}, C \in \mathbb{R}$

3. 隐函数渐近线 $x^3 + y^3 = 3axy, a > 0$, 求 $y = y(x)$ 的斜渐近线.

解

令 $t = \dfrac{y}{x} \to y = tx$

我们得到: $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$ 当 $x \to \infty, t \to -1$

我们得到:

(i).

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to-1^-} t = -1 \\ b &= \lim_{x\to+\infty} (y - ax) = \lim_{t\to-1^-} (\frac{3at^2}{1+t^3} + \frac{3at}{1+t^3}) = -a \end{aligned}$$

(ii).

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to-1^+} t = -1 \\ b &= \lim_{x\to-\infty} (y - ax) = \lim_{t\to-1^+} (\frac{3at^2}{1+t^3} + \frac{3at}{1+t^3}) = -a \end{aligned}$$

斜渐近线为: $y = -x - a$

4. 已知函数 $y = y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y = \dfrac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha$, 当 $\Delta x \to 0$,α 是 Δx 的高阶无穷小,$y(0) = \pi$, 求 $y(1)$

解

我们由题意得到微分方程:

$$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{1+x^2}dx \Rightarrow \ln|y| = \arctan x + C \Rightarrow y = Ce^{\arctan x}$$

由 $y(0) = \pi, \Rightarrow C = \pi$, 我们得到$y(x)$表达式 : $y(x) = \pi e^{\arctan x} \Rightarrow y(1) = \pi e^{\frac{\pi}{4}}$

May 16

1. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域, 并求其和函数.

解

(i). 先求幂级数收敛半径:

$$\rho = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+3}{2n+1} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\rho} = 1$$

(ii). 验证两个端点

当 $x=\pm 1$ 时, 幂级数对应的级数发散.

我们得到原幂级数的收敛域为 $(-1,1)$.

$$S(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 2x[\sum_{n=1}^{+\infty} x^n]' + \frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2}, -1<x<1$$

2. 微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{1}{2}(\frac{y}{x})^3$, 满足 $y|_{x=1}=1$ 的特解

解

令 $z=\frac{y}{x}$, 我们得到 : $y = xz \Rightarrow \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$

原微分方程可化为:

$$(z + x\frac{dz}{dx}) = z - \frac{1}{2}z^3 满足 z|_{x=1} = 1$$

我们可以得到: $-\frac{2}{z^3}dz = \frac{1}{x}dx \Rightarrow \frac{1}{z^2} = \ln x + c$

我们有$z|_{x=1}=1$, 得到 : $1+\ln x = \frac{1}{z^2} \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{1+\ln x}$

我们得到: $\frac{dy}{dx}|_{(1,1)} = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt{1+\ln x}}$

3. 求微分方程 $(x+y)dx + (y-x)dy = 0$满足条件$y(1)=-1$的特解

解

我们对微分方程进行一些简单的变形:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$$

我们令 $z=\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$

原微分方程可以化简为:

$$\frac{1}{x}dx = \frac{1-z}{1+z^2}dz \Rightarrow \ln|x| = \arctan z - \ln\sqrt{z^2+1} + C$$

即: $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \arctan\frac{y}{x} + C$, 由$y(1)=-1$得到$C = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}$

我们得到微分方程的特解为: $\ln\sqrt{x^2+y^2} - \arctan\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}$

4. $f(x,y)$连续 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-xy}{x^2+y^2} = 1$, $f(0,0)$是极大值还是极小值?

解

极小值点, 理由如下: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-xy}{x^2+y^2}=1$, 我们可以得到在 $(0,0)$ 的一个去心邻域内, 我们有:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= xy+(x^2+y^2)(1+\alpha)=\frac{1}{2}(x+y)^2+(x^2+y^2)(\frac{1}{2}+\alpha) \\ \text{其中} & \lim_{(x,y)\to(0,0)} \alpha = 0 \end{aligned}$$

我们得到在 $(0,0)$ 的一个邻域内,$f(x,y)\geq 0$, $f(0,0)$是极小值

May 17

1. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\dfrac{1}{2n+1}-1)x^{2n}$在区间$(-1,1)$内的和函数$S(x)$

解

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}-\sum_{n=1}^{+\infty}x^{2n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}-\frac{x^2}{1-x^2}$$

(i). 当 $x\neq 0$, $S(x)=\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}-\dfrac{x^2}{1-x^2}=\dfrac{1}{x}\int_0^x\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^{2n}-\dfrac{x^2}{1-x^2}$

$$S(x)=\frac{\ln\frac{1-x}{1+x}}{2x}-\frac{1}{1-x^2}$$

(ii). 当 $x=0$,$S(x)=0$.

综上,$S(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\frac{1-x}{1+x}}{2x}-\dfrac{1}{1-x^2}, 0<|x|<1\\ 0, x=0\end{cases}$

2. 微分方程 $(y+x^3)dx-2xdy=0$满足$y|_{x=1}=\dfrac{6}{5}$的特解为

解

我们对微分方程化简: $y'-\dfrac{1}{2x}y=\dfrac{x}{2}\Rightarrow(\frac{y}{\sqrt{x}})'=\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{2}$

我们得到: $y=\dfrac{x^3+C\sqrt{x}}{5}$, $y|_{x=1}=\dfrac{6}{5}\Rightarrow C=5$

原微分方程的解: $y=\dfrac{x^3+5\sqrt{x}}{5}$

3. 微分方程 $xy'+2y=x\ln x$满足$y(1)=-\frac{1}{9}$的特解为

解

原微分方程可化为: $y'+\dfrac{2}{x}y=\ln x\Rightarrow(x^2y)'=x^2\ln x$

原微分方程的解为: $y=\dfrac{\int x^2\ln x dx+C}{x^2}\Rightarrow y=\dfrac{x(3\ln x-1)}{9}+\dfrac{C}{x^2}$

我们由 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 得到: $y=\dfrac{x(3\ln x-1)}{9}$

4.$f(x,y)=x^4+2y^2-3x^2y$, $f(0,0)$是极大值还是极小值?

解

$f(0,0)$ 不是极值点, 理由如下:

$$f(x,y)=(x^2-\frac{3}{2}y)^2-\frac{1}{4}y^2$$

(i). 当 $y=0, f(x,y)\geq 0$

(ii). 当 $x^2=\dfrac{3}{2}y, f(x,y)\leq 0$

May 18

1.$\int_0^{+\infty}\left[\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^x e^{-t^2}dt\right]dx$

解

方法 1: 分部积分法

$$\int_0^{+\infty}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^x e^{-t^2}dt\right]dx=x\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^x e^{-t^2}dt\right]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^x e^{-t^2}dt}{\frac{1}{x}}-\frac{1}{2}d(e^{-x^2})=\frac{1}{2}$$

方法 2: 二重积分交换积分次序

$$\int_0^{+\infty}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^x e^{-t^2}dt\right]dx=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt-\int_0^x e^{-t^2}dt\right]dx$$

我们得到:

$$\int_0^{+\infty}(\int_x^{+\infty}e^{-t^2}dt)dx=\int_0^{+\infty}dt\int_0^t e^{-t^2}dx=\int_0^{+\infty}te^{-t^2}dt=\frac{1}{2}$$

2. 设 $F(x)=f(x)g(x)$, 其中函数 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足以下条件: $f'(x)=g(x), g'(x)=f'(x)$, 且 $f(0)=0, f(x)+g(x)=2e^x$

(i). 求 $F(x)$ 满足的一阶微分方程

(ii). 求 $F(x)$ 表达式

解

(i). 我们有:

$$F'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)=f^2(x)+g^2(x)=(f(x)+g(x))^2-2f(x)g(x)$$

我们得到 $F(x)$ 满足的微分方程为：$F'(x)+2F(x)=4e^{2x}$

(ii). 我们利用一阶线性微分方程公式得到：

$$(e^{2x}F(x))'=4e^{4x}\Rightarrow F(x)=\frac{e^{4x}+C}{e^{2x}}$$

由 $f(0)=0\Rightarrow F(0)=1+C=0\Rightarrow C=-1, F(x)=e^{2x}-e^{-2x}$

3. 求级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$

解

我们引入幂级数：

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2-1}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2}(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1})x^n=\frac{1}{2}(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n-1}-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1})$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n-1}=x(\sum_{n=2}^{+\infty}\int_0^x x^{n-2}dx)=x\int_0^x(\sum_{n=2}^{+\infty}x^{n-2})dx=-x\ln(1-x)$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}}{x}=\frac{\sum_{n=2}^{+\infty}\int_0^x x^n dx}{x}=\frac{\int_0^x(\sum_{n=2}^{+\infty}x^n)dx}{x}=-\frac{x}{2}-1-\frac{\ln(1-x)}{x}$$

原幂级数的和函数为：

$$S(x)=\frac{1}{2}(-x\ln(1-x)+\frac{\ln(1-x)}{x}+\frac{x}{2}+1),-1<x<1$$

我们得到：$S(\frac{1}{2})=\frac{5}{8}-\frac{3\ln 2}{4}$

May 19

1. 已知 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}\quad(x\geq 0), g(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$，求 $f(g(x))$

解

我们易得到：$f(x)=\begin{cases}x^2, x\geq 2\\ 2x,\frac{1}{2}<x<2\\ 1,0\leq x\leq\frac{1}{2}\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}-x,|x|>1\\ 0,x=1\\ 1,-1\leq x<1\end{cases}$.

我们可以得到：

$$f(g(x))=\begin{cases}x^2, x\leq -2\\ -2x,-2<x<-1\\ 2,-1\leq x<1\\ 1,x=1\end{cases}$$

2. 已知 $y_1=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$,$y_2=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解, 求 $q(x)$

解

由题意得:

$$\begin{cases} y_1'+p(x)y_1=q(x) \\ y_2'+p(x)y_2=q(x) \end{cases} \Rightarrow (y_1-y_2)'+p(x)(y_1-y_2)=0 \Rightarrow p(x)=-\frac{(y_1-y_2)'}{y_1-y_2}$$

我们得到: $p(x)=-\dfrac{x}{1+x^2}$

任意带入一个方程: $q(x)=y_1'+p(x)y_1=3x(1+x^2)$

3. 设 $z=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,$f_y'\neq 0$, 证明: 对任意的常数 k, 曲线 $f(x,y)=k$ 是直线的充分必要条件为 $(f_y')^2f_{xx}''-2f_x'f_y'f_{xy}''+(f_x')^2f_{yy}''=0$

解

$f(x,y)=k$为直线 $\Rightarrow f(x,y)=ax+by+c=k$

(i). 必要性

$f(x,y)=k$为直线 $\Rightarrow f_{xx}''=f_{yy}''=f_{xy}''=0$, 我们可以得到:

$$(f_y')^2f_{xx}''-2f_x'f_y'f_{xy}''+(f_x')^2f_{yy}''=0$$

(ii). 充分性

我们记 $\begin{cases} f_x'=f_1' \\ f_y'=f_2' \\ f_{xx}''=f_{11}'' \\ f_{xy}''=f_{12}'' \\ f_{yx}''=f_{21}'' \\ f_{yy}''=f_{22}'' \end{cases}$, 我们将 $f(x,y)=k$ 对 x 求导:

$$f_1'+f_2'\frac{dy}{dx}=0$$

再次对等式两边对 x 求导:

$$f_{11}''+f_{12}''\frac{dy}{dx}+(f_{21}''+f_{22}''\frac{dy}{dx})\frac{dy}{dx}+f_2'\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

若要证明 $f(x,y)=k$ 是直线, 我们只需要证明:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0\Rightarrow f_{11}''+f_{12}''\frac{dy}{dx}+(f_{21}''+f_{22}''\frac{dy}{dx})\frac{dy}{dx}=0$$

由隐函数求导公式: $\frac{dy}{dx}=-\frac{f_1'}{f_2'}$, 我们化简上式:

$$f_{11}''+f_{12}''(-\frac{f_1'}{f_2'})+(f_{21}''-f_{22}''\frac{f_1'}{f_2'})(-\frac{f_1'}{f_2'})=\frac{(f_2'')^2f_{11}''-2f_1'f_2'f_{12}''+(f_1')^2f_{22}''}{(f_2'')^2}=0$$

令分子为 0 即可:

$$(f_2'')^2f_{11}''-2f_1'f_2'f_{12}''+(f_1')^2f_{22}''=0\Rightarrow(f_y')^2f_{xx}''-2f_x'f_y'f_{xy}''+(f_x')^2f_{yy}''=0$$

May 20

1. 判断级数的敛散性 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

解

我们不妨记 $u_n=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

级数的部分和 $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$

$$\begin{aligned}S_n&=(\sqrt{3}-\sqrt{2})-(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots\\&+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\\&=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{2}-\sqrt{1})\end{aligned}$$

我们得到: $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=1-\sqrt{2}$, 原级数收敛

2. 判断级数的敛散性 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^\alpha}$

解 我们有:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$n\to+\infty,\quad\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\sim\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^\alpha}\sim\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

我们可以得到:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^\alpha}\begin{cases}\text{收敛},\alpha>\frac{1}{2}\\\text{发散},\alpha\le\frac{1}{2}\end{cases}$$

3. 设连续函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加, 下列说法正确的是:

- A. $\tan f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加

- B. $f'(x) > 0, \quad x \in (-\infty, +\infty)$
- C. $\int_{-1}^{x} \dfrac{f(t)}{1+f^2(t)} dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加
- D. $\int_{-1}^{e^x} \dfrac{1}{1+f^2(t)} dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加

解

(i). 对于 $f(x) = x^3$: $f'(x) \geq 0, tanf(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不单调,A、B 错误

(ii). 令 $F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{f(t)}{1+f^2(t)} dt, F'(x) = \frac{f(x)}{1+f^2(x)}, f(x)$ 正负性未知, 无法判断函数单调性,C 错误

(iii) 令 $F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{1}{1+f^2(t)} dt, F'(x) = \frac{1}{1+f^2(x)} > 0, F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增.

正确答案: D

4. 下列微分方程是以 $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x, (C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R})$ 为通解的微分方程为:

- A. $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$
- B. $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$
- C. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$
- D. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$

解

我们易得: $y = C_1 e^x + C_4 e^0 (A \cos 2x + B \sin 2x)$

我们可以得到原三阶微分方程对应的特征方程的三个根 $x_1 = 1,\ x_2 = 2i,\ x_3 = -2i$, 特征方程为: $(r-1)(r^2+4) = 0 \Rightarrow r^3 - r^2 + 4r - 4 = 0$

我们得到微分方程表达式为: $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$, 故答案选 D

5. 设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 连续可导, 证明: $\int_0^a dx \int_0^x \dfrac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} dy = \pi[f(a) - f(0)]$

解

原二重积分等价于:

$$\begin{aligned} \int_0^a dy \int_y^a \frac{f'(y)}{\sqrt{(\frac{a-y}{2})^2 - (x - \frac{a+y}{2})^2}} dx &= \int_0^a f'(y)[\arcsin(\frac{2x-a-y}{a-y})]|_y^a dy \\ &= \pi \int_0^a f'(y) dy = \pi[f(a) - f(0)] \end{aligned}$$

May 21

1. $f(x)$ 连续且为奇函数, 下列函数一定是偶函数的是:

- A. $\int_0^x du \int_a^u t f(t) dt$
- B. $\int_a^x du \int_0^u f(t) dt$

- C. $\int_0^x du\int_a^u f(t)dt$
- D. $\int_a^x du\int_0^u tf(t)dt$

解

(i). 对于 A、C, 我们交换二重积分的积分次序:

A: $\int_0^x du\int_a^0 tf(t)dt+\int_0^x du\int_0^u tf(t)dt = x\int_a^0 tf(t)dt+\int_0^x t^2f(t)dt$, 前一个是奇函数, 后一个是偶函数

C: $\int_0^x du\int_a^u f(t)dt = \int_0^x du\int_a^0 f(t)dt + \int_0^x du\int_0^u f(t)dt$, 前一个是奇函数, 后一个是奇函数

(ii). 对于 B、D, 我们交换二重积分的积分次序:

$$B:\ \int_a^0 du\int_0^u f(t)dt + \int_0^x du\int_0^u f(t)dt = \int_a^x tf(t)dt, \text{奇函数}$$

$$D:\ \int_a^0 du\int_0^u tf(t)dt + \int_0^x du\int_0^u tf(t)dt = \int_a^x t^2f(t)dt, \text{偶函数}$$

此题答案为: D

2. 证明: $\int_0^1 dx\int_0^1 (xy)^{xy}dy = \int_0^1 x^x dx$

解

我们令 $xy=t, y=\frac{1}{x}t$, 我们得到原二重积分为: $\int_0^1 dx\int_0^x \frac{1}{x}t^t dt$.
我们交换二重积分的积分次序:

$$\int_0^1 dt\int_t^1 \frac{1}{x}t^t dx = -\int_0^1 t^t\ln t dt = -\int_0^1 x^x\ln x dx$$

我们只需要证明:

$$-\int_0^1 x^x\ln x dx = \int_0^1 x^x dx \Rightarrow \int_0^1 x^x(1+\ln x)dx = \int_0^1 e^{x\ln x}d(x\ln x) = 0$$

证毕.

3. 微分方程 $y''-4y'+8y=e^{2x}(1+\cos 2x)$ 的特解可以设为哪种形式:

- A. $Ae^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$
- B. $Axe^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$
- C. $Ae^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$
- D. $Axe^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

解

原微分方程对应的特征方程为: $r^2-4r+8=0 \Rightarrow r_1=2+2i,\ r_2=2-2i$
齐次微分方程的通解为: $e^{2x}(A\cos 2x+B\sin 2x)$
对于方程: $y''-4y'+8y=e^{2x}$, 特解为: C_1e^{2x}

对于方程: $y''-4y'+8y=e^{2x}\cos 2x$, 特解为: $xe^{2x}(C_2\cos 2x+C_3\sin 2x)$
我们得到方程的特解形式为: $y=C_1e^{2x}+xe^{2x}(C_2\cos 2x+C_3\sin 2x)$, 故此答案选 C

31.4 Week IV

May 22

1. $f(x)$ 连续且为偶函数, 下列函数一定是偶函数的是:

- A. $\int_0^x(x-t^2)f(t)dt$
- B. $\int_a^x f(x-t)dt$
- C. $\int_0^x(x-2t)f(t)dt$
- D. $\int_a^x(x-2t)f(t)dt$

解

令 $f(x)=1$, 我们得到:
(i).$\int_0^x(x-t^2)f(t)dt=\int_0^x(x-t^2)dt=x^2-\frac{x^3}{3}$　非奇非偶函数
(ii).$\int_a^x f(x-t)dt=\int_a^x dt=x-a$, 当$a=0$时为奇函数
(iii).$\int_0^x(x-2t)f(t)dt=\int_0^x(x-2t)dt=-\frac{x^2}{2}$, 偶函数
(iiii). $\int_a^x(x-2t)f(t)dt=\int_a^x(x-2t)dt=-\frac{x^2}{2}-\frac{ax}{2}+a^2$, 当$a=0$时为偶函数
故答案为: C

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x t^{-5}dt}{\int_1^x t^{-3}dt}$

解

原极限为: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{4x^4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2}$
3. 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的通解为

解

原微分方程对应的特征方程为: $r^2-4r+3=0\Rightarrow r_1=1,\ r_2=3$
齐次微分方程的通解为: $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$
我们设方程的特解为: $y^*=Ae^{2x}\Rightarrow A(4-8+3)e^{2x}=2e^{2x}\Rightarrow A=-2$
我们得到原微分方程的通解为:

$$y=-2e^{2x}+C_1e^x+C_2e^{3x},C_1,C_2\in\mathbb{R}$$

4. 求微分方程 $y''-2y'-e^{2x}=0$ 满足条件 $y(0)=1,y'(0)=1$ 的解.

解

原微分方程对应的特征方程为: $r^2-2r=0 \Rightarrow r_1=0,\ r_2=2$
我们得到齐次微分方程的通解: $y=C_1e^{2x}+C_2$
我们设微分方程的特解为:

$$y^*=Axe^{2x} \Rightarrow A(4+4x-2-4x)e^{2x}=e^{2x} \Rightarrow A=\frac{1}{2}$$

我们得到方程的解为: $y=C_1e^{2x}+C_2+\frac{1}{2}xe^{2x}$
又因为 $y(0)=1, y'(0)=1 \Rightarrow$, 我们得到:

$$\begin{cases} C_1+C_2=1 \\ 2C_1+\frac{1}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=\frac{1}{4} \\ C_2=\frac{3}{4} \end{cases}$$

原微分方程的解: $y=\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}+\frac{3}{4}$

5. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续,$f(x)>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$,$\lim\limits_{h\to0}\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}}$, 求 $f(x)$

解

我们得到:

$$\lim_{h\to0} e^{\frac{1}{h}\ln(1+\frac{f(x+hx)-f(x)}{f(x)})}=\lim_{h\to0} e^{\frac{1}{h}\frac{f(x+hx)-f(x)}{f(x)}}=e^{\frac{1}{x}}$$

我们进而得到:

$$\lim_{h\to0}\frac{x}{f(x)}\frac{f(x+x)-f(x)}{hx}=\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x^2}$$

即: $\ln f(x)=-\frac{1}{x}+C$, 又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, 两边同时取 $x\to+\infty$ 的极限:

$$\lim_{x\to+\infty}\ln f(x)=\lim_{x\to+\infty}(-\frac{1}{x}+C) \Rightarrow C=0$$

我们得到: $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$

May 23

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n}{5^n-3^n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}-1}$ 敛散性

解

采取抓大头的方式, 利用级数判别方法中的比较法的极限形式

(i). $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(\frac{4^n}{5^n-3^n})^n}{(\frac{4}{5})^n}=1 \Rightarrow$ 原级数和级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(\frac{4}{5})^n$ 同敛散性, 原级数收敛

(ii). $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n^3-1}}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}}=1 \Rightarrow$ 原级数和级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ 同敛散性, 原级数收敛

2. 设函数 $f(x)$ 连续, 且对于任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$, 恒有 $f(x+1) = -f(x)$, 下面结论不正确的是:

- A. $f(x)$是以 2 为周期的函数
- B. $\int_0^x [f(t) - f(-t)]dt$是以 2 为周期的函数
- C. $\int_0^x f(t)dt - \frac{x}{2}\int_0^2 f(t)dt$是以 2 为周期的函数
- D. $f'(x)$是以 2 为周期的函数

解

我们得到: $\begin{cases} f(x+1) + f(x) = 0 \\ f(x+2) + f(x+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x+2) = f(x)$

我们得到: $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数,A 正确

我们由原函数和导函数周期性关系得到:

$$f(x)\text{周期函数}, \int_0^x f(t)dt\text{周期函数} \Leftrightarrow \int_0^T f(x)dx = 0$$

对于 B 选项, 我们发现 $g(x) = f(x) - f(-x)$, $g(x)$是奇函数

$g(x)$是周期函数, 且 $\int_{-1}^1 g(x)dx = 0 \Rightarrow \int_0^x g(t)dt$是周期函数

对于 C 选项, 我们得到: $\int_0^x [f(t) - \frac{\int_0^2 f(x)dx}{2}]dt$

我们只需要证明:

$$\int_0^2 [f(t) - \frac{\int_0^2 f(x)dx}{2}]dt = 0$$

不妨设 $\int_0^2 f(x)dx = A$, 我们有:

$$\text{左边} = \int_0^2 [f(t) - \frac{A}{2}]dt = \int_0^2 f(x)dx - A = 0 \Rightarrow \text{原命题得证}$$

对于 D 选项, 我们未知 $f(x)$ 是否可导, 故此题答案选 D

3. 求微分方程: $y'' + y = 4\sin x$ 的通解

解

特征方程为: $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = i,\ r_2 = -i$

齐次微分方程的通解为: $y = A\sin x + B\cos x$

非齐次微分方程特解: $y^* = x(C_1 \sin x + C_2 \cos x) \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = -2 \end{cases}$

原微分方程的通解为: $y = -2x\cos x + A\sin x + B\cos x, A、B \in \mathbb{R}$

4. 求微分方程: $y'' + y = \sin x + x\cos 2x$ 的通解

解

特征方程为: $r^2+1=0 \Rightarrow r_1=i,\ r_2=-i$

齐次微分方程的通解为: $y=A\sin x+B\cos x$

非齐次微分方程特解:

$$y_1^*=x(C_1\sin x+C_2\cos x) \Rightarrow \begin{cases} C_1=0 \\ C_2=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y_1^*=-\frac{x}{2}\cos x$$

$$y_1^*=(Ax+B)\sin 2x+(Cx+D)\cos 2x) \Rightarrow \begin{cases} C=-\frac{1}{3} \\ A=D=0 \\ B=\frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow y_2^*=-\frac{x}{3}\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x$$

原微分方程的通解为: $y=y_1^*+y_2^*+A\sin x+B\cos x, A$、$B\in\mathbb{R}$

5.$\lim\limits_{x\to 0}\int_0^{2x}du\int_0^{\sqrt{2ux-u^2}}\dfrac{cos(t-u)^2}{\ln(1+x|x|)}dt$

解

我们不难发现此题需要分左右极限分别来求:

$$I_{左}=\lim_{x\to 0}\frac{-\iint\limits_{D_1}\cos(t-u)^2d\sigma}{-x^2}$$

由二元函数的积分中值定理:

$$\iint\limits_{D_1}\cos(t-u)^2d\sigma=S_{D_1}f(\varepsilon_1,\varphi_1),(\varepsilon_1,\varphi_1)\text{在以}(0,x)\text{为半径},x\text{为半径的圆内}$$

$$I_{左}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2\pi}{2}}{-x^2}\cos(\varepsilon_1-\varphi_1)^2=\frac{\pi}{2}$$

$$I_{右}=\lim_{x\to 0}\frac{\iint\limits_{D_2}\cos(t-u)^2d\sigma}{x^2}$$

由二元函数的积分中值定理:

$$\iint\limits_{D_2}\cos(t-u)^2d\sigma=S_{D_2}f(\varepsilon_2,\varphi_2),(\varepsilon_2,\varphi_2)\text{在以}(0,x)\text{为半径},x\text{为半径的圆内}$$

$$I_{右}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2\pi}{2}}{x^2}\cos(\varepsilon_2-\varphi_2)^2=\frac{\pi}{2}$$

综上所述: $I=\frac{\pi}{2}$

May 24

1. 下列函数中原函数必为周期函数的是:

- A. $|\sin x|$
- B. $\sin^4 x$
- C. $\dfrac{1}{1+\sin^2 x}$
- D. $\dfrac{\sin x}{1+\sin^4 x}$

解

原函数为周期函数, 只需满足函数为周期函数, 且 $\int_0^T f(t)dt = 0$
对于四个选项: A, B, C对应的$f(t)$在一个周期中函数值大于 0, $\int_0^T f(t)dt > 0$
此题答案选 D

2. 设 $y = \dfrac{1}{2}e^{2x} + (x - \frac{1}{3})e^x$ 是二阶常系数线性微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个特解, 则:

- A. $a = -3,\ b = 2,\ c = -1$
- B. $a = 3,\ b = 2,\ c = -1$
- C. $a = -3,\ b = 2,\ c = 1$
- D. $a = 3,\ b = 2,\ c = 1$

解

我们可以得到特征方程的两根: $r_1 = 1,\ r_2 = 2 \Rightarrow$ 特征方程为: $r^2-3r+2 = 0 \Rightarrow a = -3,\ b = 2$

我们将特解 $y* = xe^x$ 代入微分方程, 得到: $c = -1$, 故此题选 A

3. 设 $F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - a\cos x|dx$, 求 $F(a)$ 的最小值

解

$$F(a) = \sqrt{a^2+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(x+\varphi)|dx, \text{其中} \begin{cases} \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \\ \sin\varphi = -\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases}$$

(1).$a > 0,\ \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$

$$\frac{F(a)}{\sqrt{a^2+1}} = \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}+\varphi} |\sin t|dt = 2\int_0^{-\varphi} \sin t dt + \int_{-\varphi}^{\frac{\pi}{2}+\varphi} \sin t dt = 2 - \cos\varphi + \sin\varphi = 2 - \frac{a+1}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\begin{aligned} F(a) &= 2\sqrt{a^2+1}-(a+1) \\ F'(a) &= \frac{2a-\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}} \\ \text{当}x &= \frac{\sqrt{3}}{3}, F(a)_{min}=\sqrt{3}-1 \end{aligned}$$

(2).$a<0,\ \varphi\in(0,\frac{\pi}{2})$

$$\frac{F(a)}{\sqrt{a^2+1}}=\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}+\varphi}|\sin t|dt=\cos\varphi+\sin\varphi=\frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$F(a) = 1-a,\ F(a)\geq 1,\ F(a)_{min}=1$$

综上,$F(a)_{min}=\sqrt{3}-1$

May 25

1. 设 $f(x)$ 连续且以 T 为周期, 则下列函数以 T 为周期的是:

- A. $\int_0^x f(t)dt$
- B. $\int_{-x}^0 f(t)dt$
- C. $\int_0^x f(t)dt-\int_{-x}^0 f(t)dt$
- D. $\int_0^x f(t)dt+\int_{-x}^0 f(t)dt$

解

我们知道如果原函数也为周期函数, 那么必有: $\int_0^T f(t)dt=0$

对于 A,B 选项, 我们自然可以排除掉, 没有任何附加条件

对于 C,D 选项

$$C\Rightarrow\int_0^x[f(t)-f(-t)]dt\text{奇函数}\Rightarrow\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[f(t)-f(-t)]dt=0$$

$$D\Rightarrow\int_0^x[f(t)+f(-t)]dt\text{偶函数}$$

故此题答案选 C

2. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^3)}$

解

令 $x=\frac{1}{t}, t\in(0,+\infty), dx=-\frac{1}{t^2}dt$, 原积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty}\frac{t^3}{(1+t^2)(1+t^3)}dt=\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{(1+x^2)(1+x^3)}dx \\ 2I &= \int_0^{+\infty}\frac{1+x^3}{(1+x^2)(1+x^3)}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^3)}=\frac{\pi}{4}$$

3. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+2\int_0^x f(t)dt=x^2$, 求 $f(x)$

解

令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt, F'(x)=f(x)$, 原微分方程等价于:

$$F'(x)+2F(x)=x^2\Rightarrow[e^{2x}F(x)]'=x^2e^{2x}$$

$$e^{2x}F(x)=\int x^2e^{2x}dx\Rightarrow e^{2x}F(x)=\frac{x^2e^{2x}}{2}-\frac{xe^{2x}}{2}+\frac{e^{2x}}{4}+C$$

我们得到:

$$F(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+Ce^{-2x}$$

$f(x)=F'(x)=x-\frac{1}{2}-2Ce^{-2x}, f(0)=-\frac{1}{2}-2C=0\Rightarrow C=-\frac{1}{4}$

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-2x}+x-\frac{1}{2}$$

4. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $x\int_0^1 f(tx)dt=f(x)+x$, 求 $f(x)$

解

对于 $x\int_0^1 f(tx)dt$, 令 $u=tx, t=\frac{u}{x}, dt=\frac{du}{x}$, 原微分方程为:

$$\int_0^x f(u)du=f(x)+x$$

令 $F(x)=\int_0^x f(u)du=f(x)+x, F'(x)=f(x)$, 原微分方程等价于:

$$F(x)-F'(x)=x\Rightarrow[e^{-x}F(x)]'=-xe^{-x}$$

$$e^{-x}F(x)=\int(-xe^{-x})dx=(x+1)e^{-x}+C\Rightarrow F(x)=Ce^x+x+1$$

$$f(x)=F'(x)=Ce^x+1, f(0)=0\Rightarrow C=-1$$

$$f(x)=1-e^x$$

5. 求抛物线 $y=x^2$ 和直线 $x-y-2=0$ 之间的最短距离

解

方法一 (不太严谨):

设抛物线上任意一点坐标 $P(x_0, y_0)$, 点 P 到直线 $x - y - 2 = 0$ 的距离为:

$$d = \frac{|x_0 - x_0^2 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{(x_0 - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}}{\sqrt{2}}$$

$$d_{min} = \frac{7\sqrt{2}}{8}$$

方法二:

我们设抛物线上一点 P 坐标为 (x, y), 直线 $x - y - 2 = 0$ 上一点 Q 坐标 (α, β), 我们得到 $|PQ|^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$.

我们令 $f(x, y, \alpha, \beta, \lambda, \mu) = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + \lambda(y - x^2) + \mu(\alpha - \beta - 2)$

我们令:

$$\begin{cases} f'_x = 2(x - \alpha) - 2\lambda x = 0 \\ f'_y = 2(y - \beta) + \lambda = 0 \\ f'_\alpha = -2(x - \alpha) + \mu = 0 \\ f'_\beta = -2(y - \beta) - \mu = 0 \\ f'_\lambda = y - x^2 = 0 \\ f'_\mu = \alpha - \beta - 2 = 0 \end{cases}$$

我们解得:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \\ \alpha = \frac{11}{8} \\ \beta = -\frac{5}{8} \\ \lambda = -\frac{7}{4} \\ \mu = -\frac{7}{4} \end{cases}$$

$$f(x, y, \alpha, \beta, \lambda, \mu)_{min} = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{11}{8}, -\frac{5}{8}, -\frac{7}{4}, -\frac{7}{4}) = \frac{7\sqrt{2}}{8}$$

May 26

1. 设 $f(x)$ 二阶可导,$f(-x) = -f(x), f(x + 1) = f(x), x \in (-\infty, +\infty)$, 且 $\lim_{x\to1} \frac{f(x)}{\sin(x - 1)} = 1$, 则

- A. $f''(99) \le f'(100) \le f(101)$
- B. $f(99) = f(100) < f'(101)$
- C. $f'(99) \le f(100) < f''(101)$
- D. $f(99) < f'(100) = f''(100)$

解

由题意知道:

$$f(x), f'(x), f''(x)\text{周期为}1, f(x), f''(x)\text{是奇函数,且}f(1)=0$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\sin(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=1$$

我们从而得到: $f(n)=0, f'(n)=1, f''(n)=0$

此题答案选 B

2. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x(x-t)f(t)dt+e^{-x}-1$, 求 $f(x)$

解

原微分方程等价于:

$$\int_0^x f(t)dt=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt+e^{-x}-1$$

对微分方程左右两边对 x 求导, 得到:

$$f(x)=\int_0^x f(t)dt-e^{-x}$$

我们令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt, f(x)=F'(x)$, 上式等价于:

$$F(x)-F'(x)=e^{-x}\Rightarrow[e^{-x}F(x)]'=-e^{-2x}$$
$$F(x)=Ce^x+\frac{1}{2}e^{-x}$$
$$f(x)=F'(x)=Ce^x-\frac{1}{2}e^{-x}, f(0)=-1\Rightarrow C=-\frac{1}{2}$$
$$f(x)=-\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}$$

3. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)dt$, 求 $f(x)$

解

对微分方程左右两边对 x 求导, 得到:

$$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)dt$$

令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt, f(x)=F'(x)$, 上式等价于:

$$F''+F=\cos x$$

特征方程为 $r^2+1=0, r_1=i,\ r_2=-i$, 方程通解为 $F(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$

特解设为 $F(x)=x(A\cos x+B\sin x)$, 代入得到:

$$A=0,\ B=\frac{1}{2}$$
$$F(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{x}{2}\sin x$$

$$f(x)=F'(x)=C_2\cos x-C_1\sin x+\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x\Rightarrow\begin{cases}f(0)=0\\f'(0)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=0\\C_2=0\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x$$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$

解

典型的区间再现

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan(\frac{\pi}{4}-x))dx$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\ln 2-\ln(1+\tan x))dx$$

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2dx=\frac{\ln 2}{4}\pi$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx=\frac{\ln 2}{8}\pi$$

5. 设 $f(x)$ 是连续的正值函数, 且单调减少, 证明: $\dfrac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx}\le\dfrac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}$

解

原命题等价于:

$$\int_0^1 xf^2(x)dx\int_0^1 f(y)dy-\int_0^1 xf(x)dx\int_0^1 f^2(y)dy\le 0$$

$$I=\iint\limits_D[xf(x)f(y)(f(x)-f(y))]dxdy, D=\{0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1\}$$

积分区域关于 $y=x$ 对称, 我们交换 x,y 位置, 得到

$$2I=\iint\limits_D[f(x)f(y)(f(x)-f(y))(x-y)]dxdy, D=\{0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1\}$$

我们知道 $f(x)$ 单调递减, 且 $f(x)>0$, 我们得到:

$$f(x)f(y)>0,\ (x-y)(f(x)-f(y))\le 0\Rightarrow I\le 0, \text{证毕}$$

6. $\iint\limits_D\dfrac{1}{\arcsin\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, 其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1,\ x^2+y^2\ge y,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$

解

利用极坐标公式进行代换,$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$, 我们得到:

$$I = \iint\limits_{D_1} \frac{r}{\arcsin r} dr d\theta, \theta \in (0, \frac{\pi}{2}),\ r \in (\sin\theta, 1)$$

上面的积分可以化为:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\sin\theta}^1 \frac{r}{\arcsin r} dr = \int_0^1 dr \int_0^{\arcsin r} \frac{r}{\arcsin r} d\theta = \frac{1}{2}$$

$$\iint\limits_{D} \frac{1}{\arcsin\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = \frac{1}{2}$$

May 27

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $\int_0^1 f(x)dx = 1$, 证明: $\exists \xi \neq \eta \in (0,1)$, s.t. $f(\xi) + 3f(\eta) = 4f(\xi)f(\eta)$

解

我们令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 我们有:

$$F(0) = 0,\ F(1) = 1, F(x)\text{在}[0,1]\text{连续, 在}(0,1)\text{可导}$$

原命题转化为证明:

$$\exists \xi \neq \eta \in (0,1), \text{s.t. } F'(\xi) + 3F'(\eta) = 4F'(\xi)F'(\eta)$$

上面的式子我们进行一些变形:

$$\exists \xi \neq \eta \in (0,1), \text{s.t. } \frac{1}{F'(\eta)} + \frac{3}{F'(\xi)} = 4$$

$F(x)$在$[0,1]$连续, $F(0) = 0, F(1) = 1$,$\exists c \in (0,1)$s.t. $F(c) = \frac{1}{4}$.
由拉格朗日中值定理我们得到:

$$\exists \xi \in (0,c), \eta \in (c,1), \text{s.t.} \begin{cases} \dfrac{F(c)-F(0)}{c} = F'(\xi) \\ \dfrac{F(1)-F(c)}{1-c} = F'(\eta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{F'(\xi)} = 4c \\ \dfrac{1}{F'(\eta)} = \frac{4}{3}(1-c) \end{cases}$$

$$\frac{1}{F'(\xi)} + \frac{3}{F'(\eta)} = 4c + 4(1-c) = 4$$

$$\exists \xi \neq \eta \in (0,1), \text{s.t. } f(\xi) + 3f(\eta) = 4f(\xi)f(\eta), \text{证毕}$$

2. 函数 $\dfrac{|x|e^{\frac{1}{x-1}}\ln(x-1)^2}{x(x-1)(x-2)}$ 在下列哪个区间内无界:

- A. $(-\infty, 0)$
- B. $(0,1)$

- C. $(1,2)$
- D. $(2,+\infty)$

解

$$\lim_{x\to0^-}\frac{-2x\ln(1-x)}{2ex}=0,\ \lim_{x\to0^+}\frac{2x\ln(1-x)}{2ex}=0$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{2e^{\frac{1}{x-1}}\ln(1-x)}{1-x}=0,\ \lim_{x\to1^+}\frac{2e^{\frac{1}{x-1}}\ln(x-1)}{1-x}=\infty$$

$$\lim_{x\to2}\frac{2e\ln(x-1)}{x-2}=2e$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x-1)}{(x-1)(x-2)}=0,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{-2\ln(1-)}{(x-1)(x-2)}=0$$

答案:C

3. 计算极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$ 和 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to1}}\left(1+\frac{1}{xy}\right)^{\frac{y^2}{\sin\frac{2}{x}}}$

解

$$I_1=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1+x^2+y^2-1}{(x^2+y^2)(\sqrt{1+x^2+y^2}+1)}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}+1}=\frac{1}{2}$$

$$I_2=\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to1}}e^{\frac{y^2}{\sin\frac{2}{x}}}\ln(1+\frac{1}{xy})$$

$$I_2=\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to1}}e^{\frac{xy^2}{2}\frac{1}{xy}}=e^{\frac{1}{2}}$$

4. $\int_0^\pi(e^{-\cos x}-e^{\cos x})\,dx$

解

区间再现

原积分等价于:

$$I=\int_0^\pi(e^{\cos x}-e^{-\cos x})\,dx$$

$$2I=0\Rightarrow I=0$$

5. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\arctan e^x)\sin^2 x dx$

解

区间再现

原积分等价于:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - \arctan e^x) \sin^2 x dx$$

$$2I = \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{4}$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\arctan e^x) \sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{8}$$

6. 设 $f(x) = \int_0^x f(x-t)\sin t dt + x$, 求 $f(x)$

解

我们有: $\int_0^x f(x-t)\sin t dt = \sin x \int_0^x f(t)\cos t dt - \cos x \int_0^x f(t)\sin t dt$

原微分方程等价于:

$$f(x) = \sin x \int_0^x f(t)\cos t dt - \cos x \int_0^x f(t)\sin t dt + x$$

两边对 x 求导得到:

$$f'(x) = 1 + \cos x \int_0^x f(t)\cos t dt + \sin x \int_0^x f(t)\sin t dt$$

再次两边对 x 求导得到:

$$f''(x) = f(x) + \cos x \int_0^x f(t)\sin t dt - \sin x \int_0^x f(t)\cos t dt \Rightarrow f''(x) = f(x) + x - f(x)$$

$$f''(x) = x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + C_1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{6}x^3 + C_1 x + C_2$$

我们有: $f(0) = 0,\ f'(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 1,\ C_2 = 0$

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + x$$

May 28

1. 下列函数在区间 $(0,1)$ 内无界的是:

- A. $\int_0^x \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} dt$
- B. $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$
- C. $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1-t)^3}} dt$
- D. $\int_0^x \frac{1}{(t-1)^2} \sin\frac{1}{t-1} dt$

解

$A \quad f(x)=\int_0^x \frac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}dt=e^{-\frac{1}{x}}$

$B \quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$C \quad f(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1-t)^3}}dt=\frac{2}{\sqrt{1-x}}-2,\ f(1)\to+\infty$

$D \quad f(x)=\int_0^x \frac{1}{(t-1)^2}\sin\frac{1}{t-1}dt=\cos\frac{1}{x-1}+\frac{\pi}{2}$ 有界

答案:C

May 29

1. $I=\iint\limits_D \frac{x^3\sin y\cos y e^{\sqrt{x^2+2}}}{\sqrt{x^2\cos^2 y+2\sqrt{x^2+2}}}dxdy$, 其中$D=\{(x,y)|\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le\frac{\pi}{2}\}$

解

原二重积分可以化为:

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{D'} \frac{r^2\sin\theta\cos\theta e^{\sqrt{r^2+2}}}{\sqrt{r^2\cos^2\theta+2\sqrt{r^2+2}}}rdrd\theta,\ \text{其中}D'=\{(r,\theta)|\ 0\le r\le 1,\ \theta\in(0,\frac{\pi}{2})\}\\
&= \iint\limits_{D''} \frac{xye^{\sqrt{x^2+y^2+2}}}{\sqrt{x^2+2\sqrt{x^2+y^2+2}}}dxdy\\
&= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{ye^{\sqrt{x^2+y^2+2}}}{\sqrt{x^2+y^2+2}}dy\\
&= e^{\sqrt{3}}\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx-\int_0^1\frac{xe^{\sqrt{x^2+2}}}{\sqrt{x^2+2}}dx\\
&= e^{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-\sqrt{2})-e^{\sqrt{3}}+e^{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

2. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\int_0^x\ln(1+t^2)dt}{x^\alpha}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界, 则 α 的取值范围为:

- A. $(0,+\infty)$
- B. $(0,3]$
- C. $(0,2)$
- D. $(1,3]$

解

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界, 我们可以得到:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)\text{和}\lim_{x\to 0}f(x)\text{存在}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^{3-\alpha}}{\alpha(\alpha-1)(1+x^2)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^{3-\alpha}}{\alpha(\alpha-1)}$$

我们得到:

$$\begin{cases} 3-\alpha \geq 0 \\ 3-\alpha \leq 2 \\ \alpha \neq 1 \end{cases} \Rightarrow 1 < \alpha \leq 3$$

综上所述, 答案:D

May 30

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos(\frac{\pi}{4}-x)\cos x}dx$

解

区间再现

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\pi}{4}-x}{\cos(\frac{\pi}{4}-x)\cos x}dx$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\pi}{4}}{\cos(\frac{\pi}{4}-x)\cos x}dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x + \sin x\cos x} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\tan x}{1+\tan x} = \frac{\ln 2\sqrt{2}\pi}{4}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos(\frac{\pi}{4}-x)\cos x}dx = \frac{\ln 2\sqrt{2}\pi}{8}$$

2. 计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{1}{xy}dxdy,\ D = \{(r,\theta)|\frac{\cos\theta}{4} \leq r \leq \frac{\cos\theta}{2}, \frac{\sin\theta}{4} \leq r \leq \frac{\sin\theta}{2}\}$

解

二重积分积分区域如下图所示:

$$I = 2\iint_{D_{ACB}} \frac{1}{xy}dxdy = 2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\frac{\cos\theta}{4}}^{\frac{\sin\theta}{2}} \frac{1}{r\sin\theta\cos\theta}dr$$

$$I = 2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln 2\tan\theta}{\sin\theta\cos\theta}d\theta = 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln 2t}{t}dt = \ln^2 2$$

3. 当n充分大时, $a-\frac{1}{n} < a_n < a+\frac{1}{n}$是数列$a_n$收敛于$a$的什么条件?

- A. 充分必要条件
- B. 必要条件但非充分条件
- C. 充分条件但非必要条件

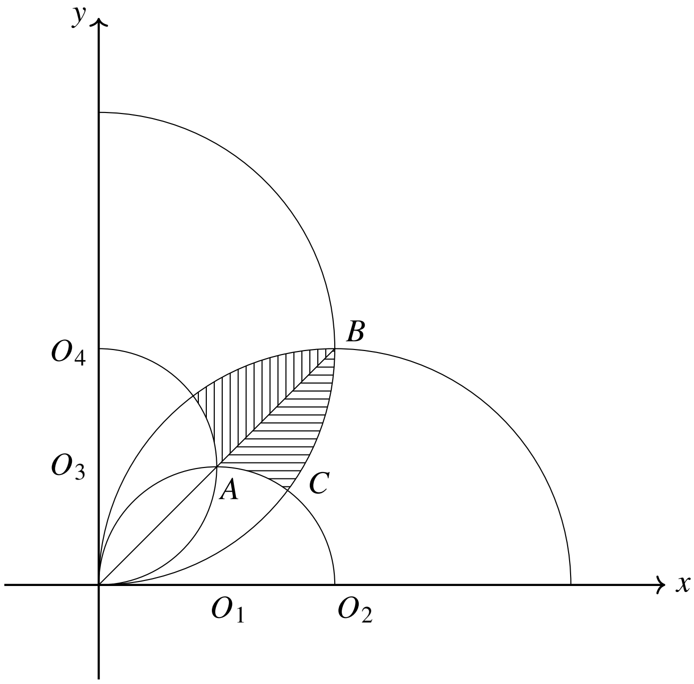


图 31.1: 二重积分区域示意图

- D. 既非充分也非必要条件

解

(i). 充分性:

$a-\frac{1}{n}<a_n<a+\frac{1}{n}$, 由夹逼定理得到:

$$\lim_{n\to+\infty}(a-\frac{1}{n})<\lim_{n\to+\infty}a_n<\lim_{n\to+\infty}(a+\frac{1}{n})$$

我们有: $\lim\limits_{n\to+\infty}(a-\frac{1}{n})=\lim\limits_{n\to+\infty}(a+\frac{1}{n})=a$ 因此:

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=a\Rightarrow \text{充分性成立}$$

(ii). 必要性

$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists N_0>0,$ 当 $n>N_0,|a_n-a|<\varepsilon$

我们得到:

$n>N_0, a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$, 当 $\frac{1}{N_0+1}<\varepsilon$, 我们不能得到 $a-\frac{1}{n}<a_n<a+\frac{1}{n}$, 必要性不成立

答案:C

4. $\iint\limits_D|x^2+y^2-\sqrt{2}(x+y)|dxdy,\ D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 4\}$

解

原二重积分等价于:

$$I = I_1 + 2I_2 = \iint\limits_D [x^2 + y^2 - \sqrt{2}(x+y)]dxdy + 2\iint\limits_{D_1} [\sqrt{2}(x+y) - (x^2+y^2)]dxdy$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r(r^2 - \sqrt{2}r(\sin\theta + \cos\theta))dr = \int_0^{2\pi} (4 - \frac{8\sqrt{2}}{3}(\sin\theta + \cos\theta))d\theta = 8\pi$$

$$I_2 = \iint\limits_{D_1} [\sqrt{2}(x+y) - (x^2+y^2)]dxdy, D_1 : (x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (y - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 \le 1$$

做变量替换: $\begin{cases} x - \frac{\sqrt{2}}{2} = R\cos\alpha \\ y - \frac{\sqrt{2}}{2} = R\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(R,\alpha)}\right| dRd\alpha = RdRd\alpha$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^1 (1 - R^2)RdR = \frac{\pi}{2}$$

$$I = I_1 + 2I_2 = 9\pi$$

May 31

1. 设 $f(x)$ 可积, 则下列结论正确的是:

- A.如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$, 则 $\lim\limits_{x\to0} f(x) = A$
- B.如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, 且 $\lim\limits_{x\to0} f(x) = A$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$
- C.如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = A$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$
- D.如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{|f(t)|}{1+t^2}dt = A$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{|f(t)|}{1+t^2}dt = A$

解

针对于此题, 我们需要区分几个概念:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \text{只要求在}x\text{邻域内有定义, 不要求}x\text{处有定义}$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = A, f(x)\text{单调}, \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = A$$

对于 A, 我们只能得到在 $x = 0$ 的邻域内的一组特殊的离散点满足极限的定义, 其余点未知, 我们举一个反例,$x_n = \frac{1}{n\pi}$, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$

对于 B, 我们举出一个反例 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, x \ne 0 \\ 2 \end{cases}$,$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, n\text{为奇数} \\ 0, n\text{为偶数} \end{cases}$

对于 C, 不清楚 $f(x)$ 单调性, 举一个反例,$f(x) = \sin\pi x$

对于 D, 利用积分的几何意义知道 $g(x) = \int_0^x \frac{|f(t)|}{1+t^2}dt$ 单调递增

答案:D.

2. 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$, 又 $g(x,y)=f(xy,\frac{1}{2}(x^2-y^2))$, 求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$

解

我们令 $\begin{cases} u=xy \\ v=\dfrac{1}{2}(x^2-y^2) \end{cases}$

我们有:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=y\dfrac{\partial f}{\partial u}+x\dfrac{\partial f}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=x\dfrac{\partial f}{\partial u}-y\dfrac{\partial f}{\partial v} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}=y(y\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+x\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v})+\dfrac{\partial f}{\partial v}+x(y\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+x\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}) \\ \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x(x\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}-y\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v})-\dfrac{\partial f}{\partial v}-y(x\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}-y\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}) \end{cases}$$

我们得到:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=(x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=x^2+y^2$$

3. $\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{x\sin x\arctan e^x}{1+\cos^2 x}dx$

解

区间再现

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x(\frac{\pi}{2}-\arctan e^x)}{1+\cos^2 x}dx$$

$$2I=\frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

令 $J=\int_0^{\pi}\dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$$J=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx\Rightarrow 2J=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi^2}{2}$$

$$J=\frac{\pi^2}{4},I=\frac{\pi}{2}J=\frac{\pi^3}{8}$$

4. 求 $\iint\limits_D \frac{1}{3x^2+y^2}dxdy$, D是由$x^2+y^2-xy=1,\ x^2+y^2-xy=2$和直线$y=\sqrt{3}x,\ y=0$围成

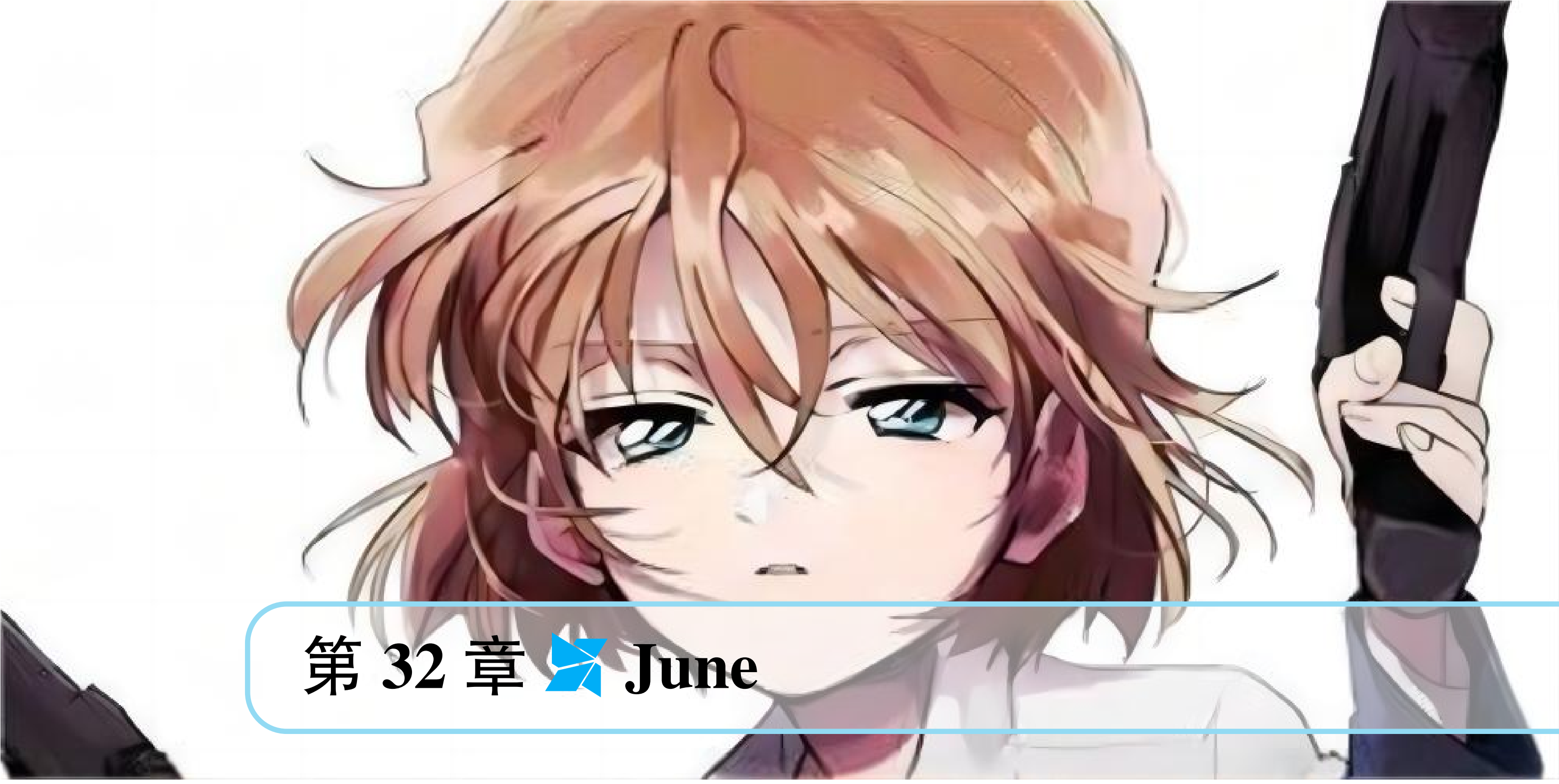
解

原二重积分等价于:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{r_1}^{r_2}\frac{r}{3r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}dr,\text{其中}\begin{cases}r_1=\sqrt{\dfrac{1}{1-\sin\theta\cos\theta}}\\ r_2=\sqrt{\dfrac{2}{1-\sin\theta\cos\theta}}\end{cases}$$

$$I=\frac{\ln 2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin^2\theta+3\cos^2\theta}d\theta=\frac{\ln 2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3+\tan^2\theta}d\tan\theta$$

$$I=\frac{\ln 2}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan\theta}{\sqrt{3}}\right)\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{\pi\ln 2}{8\sqrt{3}}$$



第 32 章 June

32.1 Week I

June 1

1. $f(x)$在$[0,1]$上连续, $\forall x,y\in\mathbb{R}, |f(x)-f(y)|\le M|x-y|$, 求证: $\left|\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})\right|\le\frac{M}{2n}$

解

引理 32.1.1 (积分和求和)

$$\int_0^1 f(x)dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)dx$$

我们利用上面的式子, 对不等式的左边进行处理:

$$左边: \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)dx-\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(\frac{k}{n})dx\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}[f(x)-f(\frac{k}{n})]dx\right|$$

由绝对值不等式得到:

$$左边\le\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|[f(x)-f(\frac{k}{n})]\right|dx\le\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}M(\frac{k}{n}-x)dx$$

$$左边\le M\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n^2}=\frac{M}{2n}=右边$$

June 2

1. 已知数列 $\{x_n\}$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{x_{n+1}}=\int_0^1 e^{-x^2}dx$, 则:

- A. $\lim\limits_{n\to+\infty}=0$
- B. $\lim\limits_{n\to+\infty}=\infty$
- C. $\lim\limits_{n\to+\infty}=a\ (a\neq 0)$
- D. $\lim\limits_{n\to+\infty}$不存在但不是$\infty$

解

首先我们可以得到:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=a,\ a\in(0,1)$$

我们由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{x_{n+1}}=a\Rightarrow|x_n|=a|x_{n+1}|<|x_{n+1}|\Rightarrow x_n$单调递增

我们假设 x_n 有上界

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}x_{n+1}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{x_{n+1}}=1\neq a\text{矛盾!!!}$$

答案:B

2. 设 $f(x,y)$二阶偏导数连续, $f(1,y)=f(x,1)=0$, $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=a$, 其中 $D\in[0,1]\times[0,1]$, 计算 $\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)d\sigma$

解

原二重积分可以化为:

$$\begin{aligned}\int_0^1 xdx\int_0^1 ydf'_x(x,y)&=\int_0^1 x\left[yf'_x(x,y)|_{y=0}^{y=1}-\int_0^1 f'_x(x,y)dy\right]dx\\&=-\int_0^1 xdx\int_0^1 f'_x(x,y)dy\\&=-\int_0^1 dy\int_0^1 xdf(x,y)\\&=-\int_0^1\left[xf(x,y)|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 f(x,y)dx\right]dy\\&=\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy=a\end{aligned}$$

$$\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)d\sigma=\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy=a$$

3. 设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx\ (n=0,1,2,\cdots)$

(1).证明: 数列$\{a_n\}$单调减少, 且$a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}$, $(n=2,3,\cdots)$

(2). 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$

解

(1). 我们令 $x=\sin t,\ t\in[0,\frac{\pi}{2}],\ dx=\cos tdt$, 我们有:

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\cos^2 tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n tdt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2} tdt$$

$$a_0=\frac{\pi}{4},\ a_1=\frac{1}{3}$$

根据华里士公式, 我们有:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1, n\text{为大于 1 的奇数}\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, n\text{为正偶数}\end{cases}$$

$$a_n-a_{n-1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n tdt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2} tdt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1} tdt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1} tdt$$

$$a_n-a_{n-1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}-(1-\sin t)^2\sin^{n-1} tdt<0\Rightarrow a_n<a_{n-1}\Rightarrow\{a_n\}\text{单调递减}$$

(i). 当 n 为奇数时, 我们有:

$$\begin{cases}a_n=(1-\frac{n+1}{n+2})\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1\\ a_{n-2}=(1-\frac{n-1}{n})\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_n=\frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1\\ a_{n-2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1\end{cases}$$

$$a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$$

(i). 当 n 为偶数数时, 我们有:

$$\begin{cases}a_n=(1-\frac{n+1}{n+2})\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\\ a_{n-2}=(1-\frac{n-1}{n})\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_n=\frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\\ a_{n-2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$$

综上所述,数列$\{a_n\}$单调减少, 且$a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2},\ (n=2,3,\cdots)$

(2). 我们不妨设 $b_n=\frac{a_n}{a_{n-1}},\ (n=1,2,\cdots)$

$b_1=\frac{4}{3\pi}$, 当 $n\geq 2$ 是, 我们有:

$$b_n b_{n-1} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \frac{n-1}{n+2}$$

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$

$$A^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+2} = 1 \Rightarrow A = 1(A > 0)$$

我们来严格证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$

原命题转换为:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ 当n > N时, |\frac{a_n}{a_{n-1}} - 1| < \epsilon$$

$$\int_0^1 (1-x)x^{n-1}\sqrt{1-x^2}dx < \varepsilon \int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x^2}dx \Rightarrow \int_0^1 (1-x-\varepsilon)x^{n-1}\sqrt{1-x^2}dx < 0$$

$$\int_0^{1-\varepsilon} (1-x-\varepsilon)x^{n-1}\sqrt{1-x^2}dx < \int_{1-\varepsilon}^1 (x+\varepsilon-1)x^{n-1}\sqrt{1-x^2}dx$$

$$左式 < (1-\varepsilon)^{n-1} \int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x^2}dx = P(1-\varepsilon)^{n-1}$$

$$右式 > \int_{1-\frac{\varepsilon}{2}}^1 (x+\varepsilon-1)x^{n-1}\sqrt{1-x^2}dx > (1-\frac{\varepsilon}{2})^{n-1} \int_{1-\frac{\varepsilon}{2}}^1 (x+\varepsilon-1)\sqrt{1-x^2}dx > Q(1-\frac{\varepsilon}{2})^{n-1}$$

其中 P, Q 均为与 n 无关的正数, 我们只需找到 N, 使得 $Q(1-\frac{\varepsilon}{2})^{n-1} > P(1-\varepsilon)^{n-1}$

$$n > [1 + \frac{\ln P - \ln Q}{\ln(1-\frac{\varepsilon}{2}) - \ln(1-\varepsilon)}]$$

综上,$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = [1 + \frac{\ln P - \ln Q}{\ln(1-\frac{\varepsilon}{2}) - \ln(1-\varepsilon)}] + 1 > 0,\ 当n > N时, |\frac{a_n}{a_{n-1}} - 1| < \epsilon$

注

(1). 我们可以得到:

$$a_{n+1} - a_n = \int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x^2}dx - \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^1 (x-1)x^n\sqrt{1-x^2}dx < 0$$

我们可以得到数列 $\{a_n\}$ 单调递减.

我们还有:

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx \\ &= -\frac{1}{3}\int_0^1 x^{n-1}d(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}(1-x^2)dx \\ &= \frac{n-1}{3}a_{n-2}-\frac{n-1}{3}a_n \\ a_n &= \frac{n-1}{n+2}a_{n-2} \end{aligned}$$

(2). 我们由 (1) 知道,$\{a_n\}$ 单调递减且 $a_n > 0$, 我们得到:

$$\begin{cases} a_n < a_{n-1} \\ a_{n-1} < a_{n-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \\ \dfrac{a_n}{a_{n-2}} < \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \end{cases}$$

我们由夹逼定理可以得到:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-2}} = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$$

综上所述, 我们得到: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = 1$

June 3

1.$xy'-(2x^2+1)y = x^2(x \geq 1)$, 且 $y(1) = a$, 讨论 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$

解

我们得到微分方程:

$$y'-(2x+\frac{1}{x})y = x \Rightarrow (e^{\int(-2x-\frac{1}{x})dx}y)' = xe^{\int(2x+\frac{1}{x})dx}$$

$$y = xe^{x^2}(\int_1^x e^{-t^2}dt + C)$$

我们由: $y(1) = a \Rightarrow C = \dfrac{a}{e}$

原问题转化为:

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{x^2}(\int_1^x e^{-t^2}dt+\frac{a}{e})$$

我们有:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

原极限可以写作:

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{x^2}(\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^1 e^{-t^2}dt+\frac{a}{e})$$

(i). 当 $a=e(\int_0^1 e^{-t^2}dt-\frac{\sqrt{\pi}}{2})$
洛必达法则:

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{x^2}(\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^1 e^{-t^2}dt+\frac{a}{e})=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{-2x^2-1}=-\frac{1}{2}$$

(ii). 当 $a\neq e(\int_0^1 e^{-t^2}dt-\frac{\sqrt{\pi}}{2})$, 极限不存在.

2. 已知当 n 充分大时,$|a_n|\le|b_n|\le|c_n|$, 且 $\lim_{x\to\infty} a_n=\lim_{x\to\infty}|c_n|$, 则:

- A. $\lim_{x\to\infty}(|a_n|-b_n)$
- B. $\lim_{x\to\infty}(|b_n|-c_n)$
- C. $\lim_{x\to\infty}(|b_n|-c_n)$
- D. $\lim_{x\to\infty}(|b_n|-a_n)$

解

我们有: $\lim_{x\to\infty} x_n=A\Rightarrow\lim_{x\to\infty}|x_n|=A$
我们假设: $\lim_{x\to\infty} a_n=\lim_{x\to\infty}|c_n|=A$
我们得到: $\lim_{x\to\infty}|a_n|=A$
根据夹逼定理: $\lim_{x\to\infty}|b_n|=A$
我们已知的极限有 $\lim_{x\to\infty} a_n$, $\lim_{x\to\infty}|a_n|$, $\lim_{x\to\infty}|b_n|$, $\lim_{x\to\infty}|c_n|$
答案:D.

June 4

1. $\lim_{n\to+\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+3n})$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+3n}-\pi n) &= \lim_{n\to+\infty}\sin^2(\frac{3n\pi}{\sqrt{n^2+3n}+n})\\ &= \sin^2(\frac{3\pi}{2})=1\end{aligned}$$

June 5

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\left[\frac{1}{n+\ln 1}+\frac{2}{n+\ln 2}+\cdots+\frac{n}{n+\ln n}\right]$

解

我们不妨设 $b_n=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\left[\frac{1}{n+\ln 1}+\frac{2}{n+\ln 2}+\cdots+\frac{n}{n+\ln n}\right]$

$$a_n=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}[\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}],\ c_n=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}[\frac{1}{n+\ln n}+\frac{2}{n+\ln n}+\cdots+\frac{n}{n+\ln n}]$$

我们得到:

$$c_n<b_n<a_n\Rightarrow\frac{n+1}{2(n+\ln n)}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}<b_n<\frac{n+1}{2n}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

我们有: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2(n+\ln n)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$

对于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

引理 32.1.2 (斯特林公式)

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$$

我们可以知道: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$

注

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}&=\lim_{n\to+\infty}e^{-\frac{1}{n}(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n})}\\&=e^{-\int_0^1\ln x dx}\\&=e\end{aligned}$$

我们得到: $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\frac{e}{2}$

由夹逼定理, 我们得到: $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\frac{e}{2}$

2. $f(x)>0, f(x)f''(x)\ge[f'(x)]^2, f(0)=1$, 证明: $f(x)\ge e^{f'(0)x}$

解

这个题还有第一问: $f(x_1)f(x_2)\ge f^2(\frac{x_1+x_2}{2})$

我们由:

$$f(x)f''(x)\ge[f'(x)]^2\Rightarrow \text{可以构造出函数}\frac{f'(x)}{f(x)}\text{单调递增}$$

我们将 $f(x_1)f(x_2) \geq f^2(\frac{x_1+x_2}{2})$ 取对数得到:

$$\ln f(x_1) + \ln f(x_2) \geq 2\ln f(\frac{x_1+x_2}{2})$$

我们构造函数 $g(x) = \ln f(x)$

原命题转化为: $\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2} \geq g(\frac{x_1+x_2}{2})$

我们只需要证明: $g(x)$是凹函数, $g''(x) \geq 0$

我们有:

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)},\ g''(x) = \frac{f(x)f''(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)} \geq 0$$

$g(x)$为凹函数 $\Rightarrow \frac{g(x_1)+g(x_2)}{2} \geq g(\frac{x_1+x_2}{2})$

我们证明了: $f(x_1)f(x_2) \geq f^2(\frac{x_1+x_2}{2})$

$$g''(x) \geq 0 \Rightarrow g'(x) \geq g'(0) = \frac{f'(0)}{f(0)}$$

我们可以理解为: $g(x)$始终大于$g(0)$处的切线

$$g(x) \geq g'(0)x + g(0) \Rightarrow \ln f(x) \geq f'(0)x \Rightarrow f(x) \geq e^{f'(0)x}$$

3. 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明: $|f(x)| \leq \frac{1}{2}\int_a^b |f'(x)|dx$

解

我们可以得到:

$$f(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)tdt,\ f(x) = -(f(b) - f(x)) = -\int_x^b f'(t)tdt$$

我们得到:

$$\begin{cases} |f(x)| = |\int_a^x f'(t)tdt| \leq \int_a^x |f'(t)|dt \\ |f(x)| = |\int_x^b f'(t)tdt| \leq \int_x^b |f'(t)|dt \end{cases} \Rightarrow 2|f(x)| \leq \int_a^b |f'(x)|dx$$

我们证明: $|f(x)| \leq \frac{1}{2}\int_a^b |f'(x)|dx$

June 6

1. $\iint_D \ln|sin(x-y)|dxdy,\ D = \{(x,y)|0 \leq x \leq y \leq 2\pi\}$

解

利用二重积分换元公式: $\begin{cases} u = y - x \\ v = x \end{cases} \Rightarrow dudv = dxdy,\ 0 \leq u \leq \pi - v, 0 \leq v \leq \pi$

我们得到原二重积分等价于:

$$I=\int_0^{\pi}du\int_0^{\pi-u}\ln(sinu)dudv=\int_0^{\pi}(\pi-u)\ln(\sin u)du$$

利用区间再现公式:

$$2I=\pi\int_0^{\pi}\ln(\sin u)du\Rightarrow I=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin u)du$$

$$I=-\frac{\ln 2\pi^2}{2}$$

引理 32.1.3 (区间再现例子)

- $\int_0^{\pi}\ln(\sin x)dx=\int_0^{\pi}\ln(\cos x)dx=-\frac{\ln 2\pi}{2}$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\tan x)dx=0$

注

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)dx$$

我们有:

$$\begin{aligned}2I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x\cos x)dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln 2dx\\&=I-\frac{\ln 2\pi}{2}\\I&=-\frac{\ln 2\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$$

2. 设 $x_n=(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})$, 求 $\lim_{n\to\infty}x_n$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned}I &= \lim_{n\to\infty} e^{\ln(1+\frac{1}{n^2})}e^{\ln(1+\frac{2}{n^2})}\cdots e^{\ln(1+\frac{n}{n^2})}\\ &= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n^2}}e^{\frac{2}{n^2}}\cdots e^{\frac{n}{n^2}}\\ &= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n(n+1)}{2n^2}}\\ &= e^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

引理 32.1.4 (不等式放缩)

- 琴生不等式: $\frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x, x\in[0,\frac{\pi}{2}]$
- 琴生不等式: $x \le \tan x \le \frac{4}{\pi}x, x\in[0,\frac{\pi}{4}]$
- 泰勒不等式: $\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x,\ x\in[0,+\infty)$

我们利用不等式放缩:

$$\frac{k}{n^2+k} \le \ln(1+\frac{k}{n^2}) \le \frac{k}{n^2} \Rightarrow \frac{k}{n^2+n} \le \ln(1+\frac{k}{n^2}) \le \frac{k}{n^2}$$

我们得到:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n} \le \sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n^2}) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \frac{1}{2}$$

由夹逼定理, 我们得到: $\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n^2}) = \frac{1}{2} \Rightarrow I = e^{\frac{1}{2}}$

3. 若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数, 且满足 $\varphi(2) > \varphi(1)$,$\varphi(2) > \int_2^3 \varphi(x)dx$, 证明: 至少存在一点 $\xi\in(1,3)$,$s.t.\varphi''(x) < 0$

解

我们有积分中值定理得到:

$$\exists\eta\in(2,3),\ s.t. \int_2^3\varphi(x)dx = \varphi(\eta)$$

我们由拉格朗日中值定理得到:

$$\begin{cases}\exists\xi_1\in(1,2),\ s.t.\dfrac{\varphi(2)-\varphi(1)}{2-1} = \varphi'(\xi_1) > 0\\ \exists\xi_2\in(2,\eta),\ s.t.\dfrac{\varphi(\eta)-\varphi(2)}{\eta-2} = \varphi'(\xi_2) < 0\end{cases}$$

我们在区间 (ξ_1,ξ_2) 内使用拉格朗日中值定理得到:

$$\exists \xi_3 \in (\xi_1,\xi_2),\ s.t.\frac{\varphi(\xi_2)-\varphi(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}=\varphi'(\xi_3)<0$$

综上所述, 我们得到: $\exists \xi \in (1,3), s.t.\varphi''(x)<0$

June 7

1. 设 $x_0=0, x_n=\dfrac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

解

我们有: $x_1=1, x_2=\dfrac{3}{2}, x_n>0$

我们使用数学归纳法来证明 x_n 单调递增: $(x_{n+1}>x_n)$

(1). 当 $n=1$ 时,$x_2>x_1$ 成立

(2). 当 $n\geq 1$ 时, 假设 $n=k$ 时,$x_{k+1}>x_k$, 我们有:

$$x_{k+1}=\frac{1+2x_k}{1+x_k}>x_k \Rightarrow 1+2x_k-x_k>0$$

当 $n=k+1$ 时:

$$x_{k+2}=\frac{1+2\dfrac{1+2x_k}{1+x_k}}{1+\dfrac{1+2x_k}{1+x_k}}=\frac{3+5x_k}{2+3x_k}$$

$$x_{k+2}-x_{k+1}=\frac{3+5x_k}{2+3x_k}-\frac{1+2x_k}{1+x_k}=\frac{1+2x_k-x_k^2}{(2+3x_k)(1+x_k)}>0$$

我们证明: x_n 单调递增, 且 $x_n-2x_n-1<0 \Rightarrow |x_n|<3$

$\{x_n\}$ 单调递增且有上界, 我们得到 x_n 极限必定存在, 我们不妨设:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n=A(A>0)\Rightarrow A=\frac{1+2A}{1+A}\Rightarrow A=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_n^{n+1} x^2\sin\dfrac{1}{x}dx$

解

我们有:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty} x\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=+\infty$$

我们有: $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_n^{n+1} x^2\sin\dfrac{1}{x}dx=+\infty$

3. 判断级数的敛散性: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n+1}{\sqrt{n^5-n+2}}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$

解

我们运用比较判别法的极限形式:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n+1}{\sqrt{n^5-n+2}}}{n^{-\frac{3}{2}}}=1$$

原级数收敛.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}}{2n^{-\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2}$$

原级数收敛.

4. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x)dx=A$, 求 $\int_0^1 dx\int_x^1 dy\int_x^y f(x)f(y)f(z)dz$

解

我们不妨设: $F(x)=\int_0^x f(t)dt,\ F(0)=0, F(1)=A$, 原积分等价于:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)[F(y)-F(x)]dy\\
&= \int_0^1 f(x)dx\int_x^1 f(y)F(y)dy-\int_0^1 f(x)F(x)dx\int_x^1 f(y)dy\\
&= \int_0^1 f(x)[\frac{F^2(1)}{2}-\frac{F^2(x)}{2}]dx-\int_0^1 f(x)F(x)[F(1)-F(x)]dx\\
&= \frac{A^3}{2}-\frac{A^3}{6}-\frac{A^3}{2}+\frac{A^3}{3}\\
&= \frac{A^3}{6}
\end{aligned}$$

32.2 Week II

June 8

1. 设 $2x_1=1, 2x_{n+1}=1-x_n^2,\ n=1,2,\cdots$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$

解

我们有: $x_1=\frac{1}{2}, x_{n+1}=\frac{1}{2}-\frac{x_n^2}{2}\Rightarrow x_n\in(0,\frac{1}{2})$
我们发现数列 $\{x_n\}$ 不单调, 不能使用单调有界准则来判断.

方法一

使用夹逼定理, 先假定极限存在求出后证明:

$$a=\sqrt{2}-1 \Rightarrow a=\frac{1-a^2}{2}$$

$$|x_n-a|=|\frac{1-x_n^2}{2}-\frac{1-a^2}{2}|=|\frac{x_{x_{n-1}^2}-a^2}{2}|\leq\frac{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}{2}|x_{n-1}-a|\leq\cdots\leq(\frac{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}{2})^{n-1}|x_1-a|$$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}{2})^{n-1}=0$$

由夹逼定理: $\lim_{n\to\infty}|x_n-a|=0$

方法二

构造无穷级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_{n+1}-x_n)$, 证明此级数收敛.

$$|a_{n+1}-a_n|=|\frac{a_{n-1}^2-a_n^2}{2}|\leq\frac{1}{2}|a_n-a_{n-1}|\leq\cdots\leq\frac{1}{2^{n-1}}|a_2-a_1|$$

我们知道级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛, 由比较判别法我们知道级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}|x_{n+1}-x_n|$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 收敛

我们得到:

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}-x_1\text{存在}\Rightarrow\text{数列}\{x_n\}\text{极限存在}$$

方法三

用奇数项和偶数项极限相等推出数列 $\{x_n\}$ 极限存在

我们可以证明奇数项和偶数项单调递减, 如果极限存在奇数项和偶数项极限存在且相等.

我们不妨设: $\lim_{n\to\infty}x_{2n}=A$, $\lim_{n\to\infty}x_{2n-1}=B$

我们有:

$$\begin{cases}2A=1-B^2\\2B=1-A^2\end{cases}\Rightarrow A=B=\sqrt{2}-1$$

不妨设 $\lim_{n\to\infty}x_n=A(A>0)$, 我们对 $2x_{n+1}=1-x_n^2$ 两边同时取极限得到:

$$2A=1-A^2\Rightarrow A=\sqrt{2}-1$$

引理 32.2.1 (不单调数列极限)

(1). 夹逼准则

从定义出发, 证明: $|x_n - a|$ 极限为 0. (2). 构造无穷级数

我们构造出无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x_{n+1}-x_n)$, 证明这个级数收敛即可证明出数列 $\{x_n\}$ 极限存在.

(3) 奇数项和偶数项极限存在且相等

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = A$$

命题 32.2.1

设 $x_1 = 1, x_n = 1 + \dfrac{1}{1+x_{n-1}}, (n = 1, 2, \cdots)$, 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在并求出此极限

解

我们发现: $x_1 = 1, x_2 = \dfrac{3}{2}, x_3 = \dfrac{7}{5}, x_4 = \dfrac{17}{12} \Rightarrow x_1 < x_3, x_2 > x_4$

我们发现 x_n 不单调, 我们考虑数列 $\{x_n\}$ 的奇数项和偶数项.

我们不妨假设 $x_{2k-1} < x_{2k+1}, x_{2k} > x_{2k+2}$

我们有:

$$x_{2k+3} = 1 + \frac{1}{1+x_{2k+2}} > 1 + \frac{1}{1+x_{2k}} = x_{2k+1}$$

$$x_{2k+4} = 1 + \frac{1}{1+x_{2k+3}} < 1 + \frac{1}{1+x_{2k+1}} = x_{2k+2}$$

我们得到奇数项单调递增, 偶数项单调递减, 我们不妨假设:

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = A(A > 0), \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = B(B > 0)$$

我们有:

$$\begin{cases} A = 1 + \dfrac{1}{1+B} \\ B = 1 + \dfrac{1}{1+A} \end{cases} \Rightarrow A = B = \sqrt{2}$$

命题 32.2.2

设 $x_1 = 1, 2x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n^2 + \dfrac{1}{n^2}}, (n = 1, 2, \cdots)$, 证明极限数列 $\{x_n\}$ 收敛.

解

我们有: $x_1 = 1, x_n \geq 1$

$$2x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n^2 + \frac{1}{n^2}} \Rightarrow x_n > 0, \text{且} x_{n+1} > x_n$$

我们不好找出 x_n 的上界, 我们要证明 x_n 收敛, 可以转化为证明:

$$\text{级数} \sum_{n=1}^{+\infty}(x_{n+1}-x_n)\text{收敛}$$

$$x_{n+1}-x_n=\frac{\frac{1}{n^2}}{2(\sqrt{x_n+\frac{1}{n^2}}+x_n)}\leq\frac{1}{4n^2}$$

级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2}$ 收敛, 我们由比较判别法得到原级数收敛.
数列 $\{x_n\}$ 收敛, 极限 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在.

命题 32.2.3

设 $x_0=1, x_{n+1}=\frac{1}{x_n^3+4}, (n=0,1,2,\cdots)$, 证明极限 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在并求出此极限

解

我们有: $x_1=\frac{1}{5}, x_2=\frac{125}{601}, x_n\in(0,1)$

$$|x_{n+1}-x_n|=\frac{1}{x_n^3+4}-\frac{1}{x_{n-1}^3+4}=\frac{|x_n-x_{n-1}^3|}{(x_n^3+4)(x_{n-1}^3+4)}\leq\frac{3}{16}|x_n-x_{n-1}|\leq\cdots\leq(\frac{3}{16})^n|x_1-x_0|$$

级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{3}{16})^n$ 收敛, 根据比较判别法, 我们得到:

$$\text{级数}\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n-x_{n-1})\text{收敛}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n-x_0\text{存在}$$

我们不妨设 $\lim_{n\to\infty}x_n=A(A>0)$, 我们有:

$$A=\frac{1}{A^3+4}\Rightarrow A^4+4A-1=0$$

A 是方程 $x^4+4x-1=0$ 的唯一正根.

2. 判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2+(-1)^n}{n^2}$ 敛散性

解

我们不妨设: $a_n=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n^2}, b_n=\sum_{n=1}^{+\infty}-\frac{1}{n^2}$
我们根据莱布尼茨判别法得到: a_n 收敛,b_n 收敛, 原级数收敛.

3. $\iint_D|\frac{x+y}{2}-x^2-y^2|dxdy, D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$

解

原二重积分可化为:

$$I=\iint_D|\frac{1}{8}-(x-\frac{1}{4})^2-(y-\frac{1}{4})^2|dxdy, D:\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$$

$$I=\iint_D(x^2+y^2-\frac{x+y}{2})dxdy-2\iint_{D'}(x^2+y^2-\frac{x+y}{2})dxdy$$

其中:

$$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\},\ D'=\{(x,y)|(x-\frac{1}{4})^2+(y-\frac{1}{4})^2\le\frac{1}{8}\}$$

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1[r^3-\frac{r^2}{2}(\sin\theta+\cos\theta)]dr-2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}}[r^3-\frac{r^2}{2}(\sin\theta+\cos\theta)]dr$$

$$I=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{24}\int_0^{\pi}\sin^4\theta d\theta=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{64}=\frac{33\pi}{64}$$

4. 设 $f(x,y)$ 在区域 $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$ 上连续, $f(0,0)=0$, 且 $f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, $f'_y(0,0)=1$, 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}dt\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)du}{1-e^{-\frac{x^4}{4}}}$

解

我们交换积分次序得到:

$$\begin{aligned}I&=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x du\int_0^{u^2}f(t,u)dt}{\frac{x^4}{4}}\\&=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}f(t,x)dt}{x^3}\end{aligned}$$

我们由积分中值定理得到:

$$\exists\xi\in(0,x^2),\ s.t.\int_0^{x^2}f(t,x)dt=x^2f(\xi,x)$$

原极限可以化为:

$$I=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2f(\xi,x)}{x^3}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{f(\xi,x)}{x}$$

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微, 我们得到:

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)=f(0,0)+f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$$

我们有:

$$f(\xi,x)=f(0,0)+f'_x(0,0)\xi+f'_y(0,0)x+o(\sqrt{(\xi)^2+x^2})=f'_x(0,0)\xi+x+o(\sqrt{\xi^2+x^2})$$

我们知道:

$$0<\xi<x^2\to\lim_{x\to 0}\frac{\xi}{x}=0$$

$$0<\sqrt{\xi^2+x^2}<\sqrt{(x^4+x^2}\to\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\xi^2+x^2}}{x}=0$$

我们得到原极限 $I=-1$

June 9

1. 设 $f(x)=1-\cos x$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\sqrt{\cos x})(1-\sqrt[3]{\cos x})(1-\sqrt[4]{\cos x})(1-\sqrt[5]{\cos x})}{f\{f[f(x)]\}}$

解

我们有:

$$\begin{cases} x\to 0, \sqrt{\cos x}-1=\sqrt{1+\cos x-1}-1\sim\frac{1}{2}(\cos x-1) \\ x\to 0, \sqrt[3]{\cos x}-1=\sqrt[3]{1+\cos x-1}-1\sim\frac{1}{3}(\cos x-1) \\ x\to 0, \sqrt[4]{\cos x}-1=\sqrt[4]{1+\cos x-1}-1\sim\frac{1}{4}(\cos x-1) \\ x\to 0, \sqrt[5]{\cos x}-1=\sqrt[5]{1+\cos x-1}-1\sim\frac{1}{5}(\cos x-1) \end{cases}$$

原极限为:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{120}(1-\cos x)^4}{\dfrac{1}{8}(1-\cos x)^4}=\frac{1}{15}$$

2. $z(x,y)=\int_0^x dt\int_t^x f(t+y)g(yu)du$,$f$和$g'$ 连续, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

解

我们交换积分次序:

$$z(x,y)=\int_0^x du\int_0^u f(t+y)g(yu)dt$$

我们得到:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=g(xy)\int_0^x f(t+y)dt$$

我们令 $t+y=u, t=u-y, dt=du$, 我们得到:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=g(xy)\int_y^{x+y} f(u)du$$

我们得到:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xg'(xy)\int_y^{x+y} f(t)dt+g(xy)[f(x+y)-f(y)]$$

June 10

1.$F(x)=\int_0^x e^{tx-t^2}dt$, 求 $F'(x)$

解

$$F(x)=\int_0^x e^{\frac{x^2}{4}-(t-\frac{x}{2})^2}dt=e^{\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{-(t-\frac{x}{2})^2}dt$$

令 $t-\frac{x}{2}=u, t=u+\frac{x}{2}, dt=du$, 我们得到:

$$F(x)=e^{\frac{x^2}{4}}\int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}}e^{-u^2}du$$

$$F'(x)=\frac{x}{2}e^{\frac{x^2}{4}}\int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}}e^{-u^2}du+e^{\frac{x^2}{4}}e^{-1\frac{x^2}{4}}=\frac{x}{2}e^{\frac{x^2}{4}}\int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}}e^{-u^2}du+1$$

2.$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(\sin x)-x}{\arctan x-\arcsin x}$

解

原极限等价于:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin x)-\sin x}{\arctan x-\arcsin x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{\arctan x-\arcsin x}$$

$$I_1=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\sin^3 x}{-\frac{1}{2}x^3}=-\frac{2}{3}$$

$$I_2=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3}{-\frac{1}{2}x^3}=\frac{1}{3}$$

$$I=I_1+I_2=-\frac{1}{3}$$

3. 设 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足 $x_1=y_1=\frac{1}{2}$,$x_{n+1}=\sin x_n$,$y_{n+1}=y_n^2$, 判断 x_n 和 y_n 的阶数

- A.$\{x_n\}$比$\{y_n\}$高阶
- B.$\{y_n\}$比$\{x_n\}$高阶
- C.$\{x_n\}$和$\{y_n\}$等价
- D.$\{x_n\}$和$\{y_n\}$同阶不等价

解

我们用数学归纳法来证明:

$$0<y_n\le x_n\le\frac{1}{2}$$

(1). 当 $n=1$ 时, 上式显然成立

(2). 假设当 $n=k$ 时上式成立

(3). 当 $n=k+1$ 时:

$$x_{k+1}=\sin x_k<\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$y_{k+1}=y_k^2<\frac{1}{2}$$

$$\text{我们有}x_k\ge\sin x_k\ge x_k^2\ge y_k^2\Rightarrow x_{k+1}\ge y_{k+1}$$

我们得到:

$$\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} < \frac{\frac{1}{2}y_n}{\frac{2}{\pi}x_n} = \frac{\pi}{4}\frac{y_n}{x_n} < (\frac{\pi}{4})^n$$

两边取极限, 由夹逼定理可以得到:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{y_n}{x_n} = 0$$

4.$f(x)$ 可微, 且 $x = \int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t-x)dt$, 求 $f(x)$

解

我们对方程后面部分 $\int_0^x tf(t-x)dt$ 进行换元, 得到:

$$\int_0^x tf(t-x)dt = x \in_{-x}^{0} f(-t)dt + \int_{-x}^{0} tf(t)dt$$

我们对方程两边对 x 求导, 得到:

$$f(x) + \int_0^x f(-t)dt = 1 \Rightarrow f'(x) + f(-x) = 0 \Leftrightarrow f'(-x) + f(x) = 0$$

我们继续对 x 求导得到:

$$f''(x) - f'(-x) = 0 \Rightarrow f''(x) + f(x) = 0$$

$$f(x) = c_1\sin x + c_2\cos x, f(0) = 1, f'(0) = -1 \Rightarrow c_1 = -1.c_2 = 1$$

$$f(x) = \cos x - \sin x$$

June 11

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[4]{1-\sqrt[3]{1-\sqrt{1-x}}}-1}{(1+x)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}-1}$

解

原极限等价于:

$$I = -\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1-\sqrt{1-x}}}{x^{-\frac{2}{3}}\ln(1+x)} = -\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{1+\sqrt{1-x}}} = -\frac{1}{4\sqrt[3]{2}}$$

2.$y'' + ay' = f(x), a > 0, f(+\infty) = b$, 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} y''(x)$

解

我们由 $y''+ay'=f(x), a>0$, 利用一阶线性微分方程通解公式得到:

$$y'=e^{-ax}\left(\int_0^x e^{at}f(t)dt+C\right)$$

我们得到:

$$\lim_{x\to+\infty} y'=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{at}f(t)dt+C\right)}{e^{ax}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{ax}f(x)}{ae^{x-1}}=\frac{b}{a}$$

我们又有: $y''+ay'=f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} y''=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ay']=0$$

June 12

1.$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(3+\sin x^2)^x-3^{\sin x}}{x^3}$

解

我们令 $f(x)=e^x$, 由拉格朗日中值定理得到:

$$\exists\xi\in(x\ln 3, x\ln(3+x^2)),\ s.t. e^{x\ln(3+x^2)}-e^{\sin x\ln 3}=e^{\xi}[x\ln(3+\sin x^2)-\sin x\ln 3]$$

由夹逼定理得到:

$$\lim_{x\to0}x\ln 3=\lim_{x\to0}x\ln(3+x^2)=0\Rightarrow\lim_{x\to0}e^{\xi}=1$$

原极限等价于:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to0}e^{\xi}\lim_{x\to0}\frac{[x\ln(3+\sin x^2)-x\ln 3+x\ln 3-\sin x\ln 3]}{x^3}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{[x\ln(3+\sin x^2)-x\ln 3]}{x^3}+\lim_{x\to0}\frac{x\ln 3-\sin x\ln 3}{x^3}\\
&= \frac{2+\ln 3}{6}
\end{aligned}$$

综上所述, 原极限 $I=\dfrac{2+\ln 3}{6}$

2.$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n(n+1)x^n$

解

幂级数的收敛域:

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}=1\Rightarrow R=1, \text{幂级数收敛域为}(-1,1)$$

原幂级数可化为:

$$\begin{aligned} S(x) &= x\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^{n-1} \\ &= x\sum_{n=1}^{+\infty}(x^{n+1})'' \\ &= x\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n+1}\right)'' \\ &= x\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'' \\ &= \frac{-2x}{(x-1)^3}, x\in(-1,1) \end{aligned}$$

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 连续可导,$f'(x)\geq 0$, 证明:

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx\right| \leq \frac{2}{n}[f(2\pi)-f(0)]$$

解

由分部积分法:

$$\begin{aligned} \left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx\right| &= \frac{1}{n}\left|\int_0^{2\pi} f(x)d\cos nx\right| \\ &= \frac{1}{n}\left|f(x)\cos nx|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(x)\cos nx dx\right| \\ &\leq \frac{1}{n}[f(2\pi)-f(0)] + |\int_0^{2\pi} f'(x)\cos nx dx| \\ &= \frac{1}{n}[f(2\pi)-f(0)] + |\int_0^{2\pi} f'(x)dx| \\ &= \frac{2}{n}[f(2\pi)-f(0)] \end{aligned}$$

4. 证明 $\left|\int_x^{x+1}\sin t^2 dt\right| \leq \frac{1}{x}$

解

分部积分:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\left|\int_x^{x+1}\frac{1}{t}d\cos t^2\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\frac{1}{t}\cos t^2|_x^{x+1}+\int_x^{x+1}\frac{1}{t^2}\cos t^2 dt\right| \\
&\le \frac{1}{2}[\left|\frac{1}{t}\cos t^2|_x^{x+1}\right|+\left|\int_x^{x+1}\frac{1}{t^2}dt\right|] \\
&= \frac{1}{2}[\frac{\cos x^2}{x}-\frac{\cos(x+1)^2}{x+1}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}] \\
&\le \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

June 13

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$

解

原极限可以写作:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 1}\frac{x-e^{x\ln x}}{1-x+\ln(1+x-1)}(\text{泰勒展开}) \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{x-(1+x(x-1))}{1-x+(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2} \\
&= 2
\end{aligned}$$

2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}$

解

原级数等价于:

$$\begin{aligned}
S &= \lim_{n\to+\infty}u_n \\
&= \lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}) \\
&= \lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{(n+1)!}) \\
&= 1
\end{aligned}$$

3. 设函数 $u=f(x,y,x)$ 有连续偏导数, 且 $z=z(x,y)$ 由方程 $xe^x-ye^y=ze^z$ 所确定, 求 du

解

我们得到关于 x, y, z 的方程 $F(x, y, z)$, 利用隐函数导数公式:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{(x+1)e^x}{(z+1)e^z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{(y+1)e^y}{(z+1)e^z}$$

我们得到:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = f_1 + f_3\dfrac{\partial z}{\partial x} = f_1 + f_3\dfrac{(x+1)e^x}{(z+1)e^z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = f_2 + f_3\dfrac{\partial z}{\partial y} = f_1 - f_3\dfrac{(y+1)e^y}{(z+1)e^z} \end{cases}$$

$$du = (f_1 + f_3\frac{(x+1)e^x}{(z+1)e^z})dx + (f_1 - f_3\frac{(y+1)e^y}{(z+1)e^z})dy$$

4. 设 $u = f(x, y, z)$,$\varphi(x^2, e^y, z) = 0$,$y = \sin x$ 确定了函数 $u(x)$, 其中 f, φ 具有一阶偏导数, 且 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \neq 0$, 求 $\dfrac{du}{dx}$

解

复合函数偏导数:

$$\frac{du}{dx} = f_1 + f_2\frac{dy}{dx} + f_3(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx})$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x\varphi_1}{\varphi_3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{e^y\varphi_2}{\varphi_3}$$

我们最终得到 $\dfrac{du}{dx}$:

$$\frac{du}{dx} = f_1 + f_2\cos x - f_3\frac{2x\varphi_1 + e^{\sin x}\cos x\varphi_2}{\varphi_3}$$

5.

$$\lim_{t\to 0^+}\lim_{x\to +\infty}\frac{\int_0^{\sqrt{t}} dx \int_{x^2}^{t} \sin y^2 dy}{\left[\left(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{x}{t^2}\right)^x - 1\right]\int_0^t (e^{\sqrt{u}} - 1)du}$$

解

原极限可以化为:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{t\to 0^+}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^t dy\int_0^{\sqrt{t}}\sin y^2dy}{[e^{x\ln(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{x}{t^2})}-1]\int_0^t(e^{\sqrt{u}}-1)du} \\ &= \lim_{t\to 0^+}\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^t\sqrt{y}\sin y^2dy}{\int_0^t(e^{\sqrt{u}}-1)du[e^{-\frac{x\pi}{2}\arctan\frac{t^2}{x}}-1]} \\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^t\sqrt{y}\sin y^2dy}{[e^{-\frac{2t^2}{\pi}}-1]\int_0^t(e^{\sqrt{u}}-1)du} \\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}}}{-\frac{4}{3\pi}t^{\frac{7}{2}}} \\ &= -\frac{3\pi}{14} \end{aligned}$$

June 14

1. 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2[1-\ln(e^x+\sin x)]}{x}$

解

原极限可化为:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0}\frac{e^2[e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}-2}+\ln(e^x+\sin x)-1]}{x} \\ I_1 &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\ln(1+x)}{x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x)-2x}{x^2}=-1 \\ I_2 &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+e^x+\sin x-1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x-1}{x}=2 \\ I &= e^2(I_1+I_2)=e^2 \end{aligned}$$

2. $f(x)$ 二阶可导,$f(a)=f'(a)=f''(a)=f(b)=0$, 证明: $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t.(\xi-a)^2f''(\xi)-2f(\xi)=0$

解

我们令 $g(x)=(x-a)^2, g'(x)=2(x-a), g''(x)=2$

原式等价于: $\exists\xi\in(a,b)$, $s.t. g(\xi)f''(\xi)-g''(\xi)f(\xi)=0$

我们构造辅助函数: $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

$$F'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

我们对分子继续求导:

$$(f'(x)g(x)-g'(x)f(x))'=f''(x)g(x)+f'(x)g'(x)-g''(x)f(x)-g'(x)f'(x)=f''(x)g(x)-g''(x)f(x)$$

此时 $F(x)=\dfrac{f(x)}{(x-a)^2},\lim\limits_{x\to a}F(x)=0$, 我们构造:

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{(x-a)^2}, x\in(a,b]\\ 0, x=a\end{cases}$$

$F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $F(a)=F(b)=0$

我们在区间 (a,b) 上对 $F(x)$ 使用罗尔定理得到:

$$\exists c\in(a,b),\ s.t.F'(c)=0\Rightarrow(c-a)^2f'(c)-2(c-a)f(c)=0$$

对于函数 $H(x)=(x-a)^2f'(x)-2(x-a)f(x)$, 我们有: $H(a)=H(c)=0$

我们对 $H(x)$ 在区间 (a,c) 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(a,c),\ s.t.H'(\xi)=0\Rightarrow(\xi-a)^2f''(\xi)-2f(\xi)=0$$

32.3 Week III

June 15

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$

解

由拉格朗日中值定理:

$e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e^{\frac{1}{2x}\ln(1+2x)}=e^{\xi}(\dfrac{1}{x}\ln(1+x)-\dfrac{1}{2x}\ln(1+2x)),\xi\in(\dfrac{1}{x}\ln(1+x),\dfrac{1}{2x}\ln(1+2x))$

原极限可化为:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\xi}[\frac{1}{x}\ln(1+x)-\frac{1}{2x}\ln(1+2x)]}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}e^{\xi}\frac{2\ln(1+x)-\ln(1+2x)}{2x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}e^{\xi}\frac{1}{2(1+x)(1+2x)}=\frac{e}{2}\end{aligned}$$

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数,$f(0)=f(2)=0,M=max_{x\in[0,2]}\{|f(x)|\}$, 证明:

(1).$\exists\xi\in(0,2),\ s.t.|f'(\xi)|\geq M$

(2). 若对任意的 $x\in(0,2),|f'(x)|\leq M$, 则 $M=0$

解

(1). 我们不妨假设 $|f(c)|=M$

- 当 $c=0$或者$c=2$, 我们得到: $f(x)\equiv 0$, 我们得到: $M=0,\exists\xi\in(0,2),\ s.t.|f'(\xi)|\geq M$

- 当 $c\in(0,2),|f(c)|=M$, 我们由拉格朗日中值定理得到:

$$\begin{cases} f(c)-f(0)=cf'(\xi_1),\ \xi_1\in(0,c) \\ f(2)-f(c)=(2-c)f'(\xi_2),\ \xi_2\in(c,2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |f'(\xi_1)|=\dfrac{M}{c},\ \xi_1\in(0,c) \\ |f'(\xi_2)|=\dfrac{M}{2-c},\ \xi_2\in(c,2) \end{cases}$$

当 $c\in(0,1],|f'(\xi_1)|\geq M$; 当 $c\in(1,2),|f'(\xi_2)|\geq M$.

(2). 我们不妨假设 $M>0,|f(d)|=M,f(0)=f(2)=0\Rightarrow\exists\eta\in(0,2),\ s.t.f'(\eta)=0$

我们得到:

$$\begin{cases} |f(d)-f(0)|=|\int_0^d f'(x)dx|\leq\int_0^c|f'(x)|dx\leq Md \\ |f(2)-f(d)|=|\int_d^2 f(x)dx|\leq\int_d^2|f(x)|dx\leq M(2-d) \end{cases}$$

我们化简:

$$\begin{cases} M\leq Md \\ M\leq M(2-d) \end{cases}\Rightarrow M(1-d)=0$$

当 $M=0$ 时,$f(x)\equiv0$

当 $M\neq0$, 则 $d=1,M=\begin{cases} |f(1)-f(0)|\leq\int_0^1|f'(x)|dx\leq M \\ |f(2)-f(1)|\leq\int_1^2|f'(x)|dx\leq M \end{cases}$

此时当且仅当 $|f'(x)|\equiv M$ 时等号成立, 如果 $M\neq0,f(2)\neq0$, 矛盾

综上所述,$M=0$

June 16

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac{x^2}{2}-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$

解

泰勒展开:

原极限可化为:

$$I=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{x^2}{2}-(1+\frac{x^2}{2}+\frac{\frac12(\frac12-1)}{2}x^4)}{x^2(1-\frac{x^2}{2}-1-x^2)}=-\frac{1}{12}$$

2. 证明方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1(n\geq2)$ 在 $(\frac12,1)$ 内有且仅有一个实数根, 我们将这个实数根记作 x_n, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$

解

设函数 $f(x)=x+x^2+\cdots+x^n-1$, 我们有: $f'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}>0\Rightarrow f(x)$在$(\frac12,1)$单调递增

$$f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2^n} < 0, f(1) = n - 1 > 0$$

根据零点定理，我们得到 $f(x)$ 在区间 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内有且仅有一个零点.

我们可以得到 $\frac{1}{2} < x_n < 1$

我们知道: $f(x)$ 单调递增, 当 $x = x_n$ 时, 我们有:

$$x_n + x_n^2 + \cdots + x_n^n - 1 = 0$$

假设 $x_{n+1} \geq x_n$, 我们得到:

$$x_{n+1} + x_{n+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^n + x_{n+1}^{n+1} - 1 > x_n + x_n^2 + \cdots + x_n^n - 1 = 0$$

我们要求:

$$x_{n+1} + x_{n+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^{n+1} - 1 = 0 \Rightarrow x_n > x_{n+1}$$

$\{x_n\}$ 单调递减且有下界,$\{x_n\}$ 极限一定存在, 我们不妨设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$, 我们有:

$$\frac{A}{1-A} = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

3. 方程 $\cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x = 1(n \geq 2)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{3})$ 的根 x_n, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

解

我们令 $t = \cos x, x \in (\frac{1}{2}, 1)$, 原方程为:

$$t + t^2 + \cdots + t^n = 1\text{在区间}(\frac{1}{2}, 1)\text{内的根}t_n$$

我们构造辅助函数: $F(t) = t + t^2 + \cdots + t^n - 1$, 我们有:

$$F(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2^n}, F(1) = n - 1 > 0, F;(x) = 1 + 2t + 3t^2 + \cdots + nt^{n-1} > 0$$

$F(t)$ 在区间 $(\frac{1}{2}, 1)$ 有且只有一个实数根 $t_n, \frac{1}{2} < t_n < 1$

上面的题已证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{\pi}{3}$

June 17

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x \sin x^2 - 2(1-\cos x)\sin x}{x^5}$

解

泰勒展开:

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6),\ 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4),\ sinx = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$$

原极限等价于:

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 - \frac{1}{6}x^7 - 2(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^5 + \frac{1}{144}x^7)}{x^5} = \frac{1}{4}$$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(2\sqrt[n]{n}-1)^n}{n^2}$

解

原极限等价于:

$$I=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x\ln(1+2x^{\frac{1}{x}}-2)}}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)}}{x^2}$$

$$I=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^{\frac{\ln x}{x}}}{x^2}=1$$

June 18

1. 设 $f'(0)=0, f''(0)$ 存在, 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}$

解

我们由拉格朗日中值定理得到:

$$f(x)-f(\ln(1+x))=f'(\xi)(x-\ln(1+x)),\ \xi\in(\ln(1+x),x)$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\xi}{x}=1,\ (\text{夹逼定理})$$

原极限等价于:

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to0}\frac{f'(\xi)(x-\ln(1+x))}{x^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{f'(\xi)}{2x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{f'(\xi)}{\xi}\frac{\xi}{2x}\\&=\frac{f''(0)}{2}\end{aligned}$$

2. 求椭圆 $x^2+2xy+3y^2-8y=0$ 与直线 $x+y=8$ 的最短距离.

解

我们不妨设椭圆上任意一点 $P(x,y)$, 我们要求 $F(x,y)=\dfrac{1}{2}(x+y-8)^2$ 的最小值.
我们利用拉格朗日数乘法构造辅助函数:

$$F(x,y,\lambda)=\frac{1}{2}(x+y-8)^2+\lambda(x^2+2xy+3y^2-8y)$$

我们令:

$$\begin{cases}F'_x=x+y-8+2\lambda(x+y)=0\\F'_y=x+y-8+2\lambda(x+3y-4y)=0\\F'_\lambda=x^2+2xy+3y^2-8y=0\end{cases}$$

我们解得:

$$\begin{cases} x = 2 \pm 2\sqrt{2} \\ y = 2 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

我们得到两个驻点: $(2+2\sqrt{2},2)$ 和 $(2-2\sqrt{2},2)$

$$L(2+2\sqrt{2},2) = 2\sqrt{2}-2,\ L(2+2\sqrt{2},2) = 2\sqrt{2}+2$$

综上所述, 距离最小值为 $2\sqrt{2}-2$.

3. 证明 $\tan x = x$ 在区间 $(n\pi, n\pi+\frac{\pi}{2})$ 内存在实根 x_n, 并求出极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)$

解

我们令 $f(x) = tanx - x, x \in (n\pi, n\pi+\frac{\pi}{2})$, $f'(x) = \sec^2 x - 1 \geq 0 \Rightarrow f(x)$单调递增

$$f(n\pi) < 0, f(n\pi+\frac{\pi}{2}) > 0 \Rightarrow f(x)\text{存在唯一零点}x_n \in (n\pi, n\pi+\frac{\pi}{2})$$

我们有: $x_{n+1}-x_n \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

$$\begin{aligned} x_{n+1}-x_n &= \tan x_{n+1} - \tan x_n \\ &= \tan(x_{n+1}-x_n)(1+\tan x_{n+1}\tan x_n) \\ &= \tan(x_{n+1}-x_n)(1+x_{n+1}x_n) \\ \lim_{n\to+\infty}\tan(x_{n+1}-x_n) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{1+x_{n+1}x_n} = 0 \end{aligned}$$

我们得到: $\lim\limits_{n\to+\infty}\tan(x_{n+1}-x_n) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1}-x_n = \pi$

June 19

1. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x\sqrt{x}}(\sqrt{a}\arctan\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b}\arctan\sqrt{\frac{x}{b}})$

解

原极限可化为:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x\sqrt{x}}[\sqrt{a}(\arctan\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{\frac{x}{a}})-\sqrt{b}(\arctan\sqrt{\frac{x}{b}}-\sqrt{\frac{x}{b}})] \\
&= I_1 - I_2 \\
I_1 &= \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x\sqrt{x}}\sqrt{a}(\arctan\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{\frac{x}{a}}) \\
&= \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{-\sqrt{a}}{3}(\sqrt{\frac{x}{a}})^3}{x\sqrt{x}} \\
&= -\frac{1}{3a} \\
I_2 &= \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x\sqrt{x}}\sqrt{b}(\arctan\sqrt{\frac{x}{b}}-\sqrt{\frac{x}{b}}) \\
&= \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{-\sqrt{b}}{3}(\sqrt{\frac{x}{b}})^3}{x\sqrt{x}} \\
&= -\frac{1}{3b}
\end{aligned}$$

综上所述:

$$I=\begin{cases}0, & a=b\\ \frac{1}{3b}-\frac{1}{3a}, & a\neq b\end{cases}$$

2. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|\arcsin(\sin t)|dt}{x}$

引理 32.3.1 (周期函数积分性质)

$f(x)=\int_0^x|\sin t|dt$

(i). 设 n 为正整数, 当 $n\pi\le x\le(n+1)\pi$, 证明: $2n\le f(x)\le 2(n+1)$

(ii). 求 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|\sin t|dt}{x}$

解

(i). 我们有:

$$\int_0^{n\pi}|\sin t|dt\le f(x)\le\int_0^{(n+1)\pi}|\sin t|dt$$

我们知道对于周期函数 $f(x)$, 我们有:

$$\int_0^{nT}f(t)dt=n\int_0^T f(t)dt\Rightarrow\begin{cases}\int_0^{n\pi}|\sin t|dt=2n\\ \int_0^{(n+1)\pi}|\sin t|dt=2(n+1)\end{cases}$$

我们得到: $2n\le f(x)\le 2(n+1)$

(ii). 当 $x \in (n\pi, (n+1)\pi)$ 时, 我们有:

$$\frac{\int_0^{n\pi} |\sin t| dt}{(n+1)\pi} \le \frac{\int_0^x |\sin t| dt}{x} \le \frac{\int_0^{(n+1)\pi} |\sin t| dt}{n\pi}$$

$$\begin{cases} \text{左边} = \dfrac{2n}{(n+1)\pi} \\ \text{右边} = \dfrac{2(n+1)}{n\pi} \end{cases}$$

两边同时取极限, 我们有 $\lim\limits_{n\to+\infty}$ 左边 $= \lim\limits_{n\to+\infty}$ 右边 $= \dfrac{2}{\pi}$

由夹逼定理, 我们可以得到:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x |\sin t| dt}{x} = \frac{2}{\pi}$$

定理 32.3.1 (周期函数性质)

$f(x)$ 是周期函数, 我们有:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x} = \frac{\int_0^T f(x)dx}{T}$$

解

我们发现 $f(x) = |\arcsin(\sin x)|$ 是周期 $T = \pi$ 的周期函数, 且

$$\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (x - \frac{\pi}{2})dx = \frac{\pi^2}{4}$$

我们得到原极限等价于:

$$I = \frac{\int_0^T f(x)dx}{T} = \frac{\pi}{4}$$

June 20

1. 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \ne 0$, 求极限 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x\int_0^x f(x-t)dt}{\int_0^x t f(t-x)dt}$

解

我们令: $F(x) = \int_0^x f(t)dt,\ F'(x) = f(x),\ F(0) = 0$

$$\lim_{x\to0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x} = F'(0) = f(0)$$

原极限等价于:

$$I = \lim_{x\to0} \frac{x\int_0^x f(t)dt}{x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x t f(t)dt} = \lim_{x\to0} \frac{\int_0^x f(t)dt + x f(x)}{\int_0^x f(t)dt}$$

$$I = 1 + \lim_{x\to0} \frac{f(x)}{\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}} = 2$$

2. $f(x)=\int_1^x e^{t^2}dt$

(i). 证明: $\exists\xi\in(1,2),\ s.t.f(\xi)=(2-\xi)e^{\xi^2}$

(ii). 证明: $\exists\eta\in(1,2),\ s.t.f(2)=e^{\eta^2}\eta\ln 2$

解

(i). 我们构造辅助函数: $F(x)=(x-2)f(x)$

我们有:

$$F'(x)=f(x)+(x-2)f'(x),\ f'(x)=e^{x^2},\ F(1)=F(2)=0$$

我们对 $F(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上使用罗尔定理得到:

$$\exists\xi\in(1,2),\ s.t.F'(\xi)=0\Rightarrow f(\xi)+(\xi-2)f'(x)=0$$

(ii). 原式子可以化为 $\dfrac{f(2)-f(1)}{\ln 2-\ln 1}=\dfrac{e^{\eta^2}}{\frac{1}{\eta}}$

我们构造辅助函数: $g(x)=\ln x,\ g'(x)=\dfrac{1}{x}$, 我们由柯西中值定理得到:

$$\exists\eta\in(1,2),\ s.t.\frac{f(2)-f(1)}{\ln 2-\ ln1}=\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}\Rightarrow f(2)=e^{\eta^2}\eta\ln 2$$

June 21

1. 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^{xt}\arctan(x-t)^2dt}{\int_0^x tf(x-t)dt}$

解

我们得到: $f(0)=0,\ f'(0)=2$

我们利用广义积分中值定理得到:

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\xi}\int_0^x\arctan(x-t)^2dt}{\int_0^x tf(x-t)dt},\ \xi\in(0,x)$$

我们再进行换元, 原极限等价于:

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\xi}\int_0^x\arctan u^2dt}{x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\int_0^x f(u)du}$$

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{f(x)}=2\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{f(x)-f(0)}=1$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导,$f(0)=0$, $f(1)=1$, 证明:

$$\exists\xi\in(0,1),\ s.t.\xi f''(\xi)+(1+\xi)f'(\xi)=1+\xi$$

解

原命题等价于:

$$\exists\xi\in(0,1),\ s.t. f''(\xi)+\frac{1+\xi}{\xi}[f'(\xi)-1]$$

我们构造辅助函数:

$$F(x)=[f'(x)-1]e^{\int(1+\frac{1}{x})dx}\Rightarrow F(x)=xe^{x}[f'(x)-1]$$

我们有: $F(0)=0$, 由拉格朗日中值定理得到:

$$\exists\eta\in(0,1),\ s.t. f'(\eta)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1\Rightarrow F(\eta)=0$$

我们对 $F(x)$ 在区间 $(0,\eta)$ 上使用罗尔定理, 可以得到:

$$\exists\xi\in(0,\eta),\ s.t. F'(\xi)=e^{\xi}[\xi f''(\xi)+(\xi+1)[f'(\xi)-1]]=0$$

综上所述,$\exists\xi\in(0,1),\ s.t. \xi f''(\xi)+(1+\xi)f'(\xi)=1+\xi$

3. 已知微分方程 $y'+y=f(x)$, 其中 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数, 证明: 该微分方程存在唯一的以 T 为周期的解.

解

我们利用一阶微分方程通接公式得到:

$$y(x)=e^{-x}(\int_0^x e^t f(t)dt+C)$$

我们由此得到:

$$\begin{aligned}
y(x+T) &= e^{-x-T}(\int_0^{x+T} e^t f(t)dt+C)\\
&= e^{-x}(\int_0^{x+T} e^{t-T} f(t)dt+Ce^{-T})\\
&= e^{-x}(\int_{-T}^{x} e^t f(t)dt+Ce^{-T})\\
&= e^{-x}(\int_0^{x} e^t f(t)dt+Ce^{-T}+\int_{-T}^{0} e^t f(t)dt)\\
y(x) &= e^{-x}(\int_0^x e^t f(t)dt+C)
\end{aligned}$$

如果 $y(x)$ 是周期函数, 我们可以得到:

$$C=Ce^{-T}+\int_{-T}^{0} e^t f(t)dt\Rightarrow C=\frac{\int_0^T e^t f(t)dt}{e^T-1}$$

当且仅当 $C=\dfrac{\int_0^T e^t f(t)dt}{e^T-1}$ 时,$y(x)$ 为周期函数.

32.4 Week IV

June 22

1. $f(x)$ 一阶连续可导, 且 $f(0)=0, f'(0)\neq 0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}f(t)dt}{x^2\int_0^x f(t)dt}$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0}\frac{2xf(x^2)}{2x\int_0^x f(t)dt + x^2 f(x)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2f(x^2)}{2\int_0^x f(t)dt + xf(x)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{4xf'(x)}{3f(x)+xf'(x)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{4f'(x)}{\frac{3f(x)}{x}+f'(x)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. 设 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$,$f'(0)=2$, 求 $f(x)$

解

我们令 $x=y=0\Rightarrow f(0)=0$

我们令 $y=\Delta x$, 我们有:

$$f(x+\Delta x)=\frac{f(x)+f(\Delta)}{1-f(x)f(\Delta)}$$

又因为:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)+f(\Delta x)-f(x)[1-f(x)f(\Delta x)]}{[1-f(x)f(\Delta x)]\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)[1+(f(x))^2]}{[1-f(x)f(\Delta x)]\Delta x} \\ &= 2[1+(f(x))^2] \end{aligned}$$

我们得到: $\dfrac{f'(x)}{1+(f(x))^2}=2\Rightarrow \arctan f(x)=2x+C,\ f(0)=0\Rightarrow C=0$

综上所述,$f(x)=tan(2x)$

June 23

1. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x[\int_u^x u^2\arctan(1+tu)dt]du}{(\int_0^x \ln(1+t)dt)^2}$

解

我们对分子交换积分次序,原极限等价于:

$$I=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x[\int_0^t u^2\arctan(1+tu)du]dt}{\frac{x^4}{4}}$$

利用洛必达法则:

$$I=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x u^2\arctan(1+xu)du}{x^3}$$

令 $xu=v$, $u=\frac{v}{x}$, $du=\frac{dv}{x}$, 原极限等价于:

$$I=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2} v^2\arctan(1+v)dv}{x^6}$$

再次使用洛必达法则:

$$I=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x^5\arctan(1+x^2)}{6x^5}=\frac{\pi}{12}$$

2. 设 $f'(x)$ 在 $[0,2]$ 连续, 证明: $|f(2)|\le\frac{1}{2}|\int_0^2 f(x)dx|+\int_0^2|f'(x)|dx$

解

我们由积分中值定理得到:

$$\exists\xi\in(0,2),\ s.t.\int_0^2 f(x)dx=2f(\xi)\Rightarrow\frac{1}{2}|\int_0^2 f(x)dx|=|f(\xi)|$$

原命题等价于:

$$|f(2)|-|f(\xi)|\le\int_0^2|f'(x)|dx$$

由绝对值三角不等式得到:

$$\text{左边}\le|f(2)-f(\xi)|=|\int_\xi^2 f'(x)dx|\le\int_\xi^2|f(x)|dx$$

我们有: $\xi\in(0,2),\Rightarrow\int_\xi^2|f(x)|dx\le\int_0^2|f(x)|dx$

综上, 我们得到 $|f(2)|\le\frac{1}{2}|\int_0^2 f(x)dx|+\int_0^2|f'(x)|dx$

3. 设 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明: $\max\limits_{0\le x\le 1}\{|f(x)|\}\le\int_0^1[|f(x)|+|f'(x)|]$

解

我们不妨假设 $\exists\xi\in(0,1)$, $s.t.|f(x)|_{max}=|f(\xi)|$, 原命题等价于:

$$f(\xi)-\int_0^1|f(x)|dx\le\int_0^1|f'(x)|dx$$

我们由积分中值定理得到:

$$\exists\eta\in(0,1),\ s.t.\int_0^1|f(x)|dx=|f(\eta)|$$

命题等价于:

$$|f(\xi)|-|f(\eta)|\le\int_0^1|f'(x)|dx$$

$$\text{左边}\le|f(\xi)-f(\eta)|=|\int_\xi^\eta f'(x)dx|\le\int_\xi^\eta|f'(x)|dx\le\text{右边}$$

综上所述, 我们得到: $\max\limits_{0\le x\le1}\{|f(x)|\}\le\int_0^1[|f(x)|+|f'(x)|]$

June 24

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x t|\sin t|dt}{x^2}$

解

我们不妨假设 $x\in(n\pi,(n+1)\pi)$, 我们有:

$$\int_0^{n\pi}t|\sin t|dt<\int_0^x t|\sin t|dt<\int_0^{(n+1)\pi}t|\sin t|dt$$

我们由区间再现公式可以得到:

$$\int_0^{n\pi}t|\sin t|dt=\int_0^{n\pi}(n\pi-t)|\sin t|dt\Rightarrow\int_0^{n\pi}t|\sin t|dt=\pi n^2$$

同理我们可以得到:

$$\int_0^{(n+1)\pi}t|\sin t|dt=\pi(n+1)^2$$

我们得到: $\pi n^2<\int_0^x t|\sin t|dt<\pi(n+1)^2$

我们有:

$$\frac{\pi n^2}{(n+1)^2\pi^2}<\frac{\int_0^x t|\sin t|dt}{x^2}<\frac{\pi(n+1)^2}{n^2\pi^2}$$

由夹逼定理可以得到, 原极限 $I=\dfrac{1}{\pi}$

2. 已知 $|A|=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\\2^2&3^2&4^2&5^2\\2^3&3^3&4^3&5^3\end{vmatrix}$, 求 $\sum\limits_{i=1}^4\sum\limits_{j=1}^4A_{ij}$

解

我们将行列式按照第一行展开得到:

$$|A| = A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}$$

我们发现: $A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}$ 其实就是将原行列式中第二行所有元素替换为 1 的新行列式的值, 根据行列式两行相同值为 0, 我们可以得到:

$$\begin{cases} A_{21} + A_{22} + A_{23} + A_{24} = 0 \\ A_{31} + A_{32} + A_{33} + A_{34} = 0 \\ A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = 0 \end{cases}$$

我们得到: $\sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=1}^{4} A_{ij} = |A|$

根据范德蒙行列式的求值公式:

$$|A| = (3-2)(4-2)(5-2)(4-3)(5-3)(5-4) = 12$$

综上所述,$\sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=1}^{4} A_{ij} = 12$

June 25

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{x}\int_x^{x^2}(1+\dfrac{1}{2t})^t \sin\dfrac{1}{\sqrt{t}}dt$

解

我们利用广义积分中值定理和 $x\to 0,\ \sin x \sim x$, 原极限等价于:

$$I = \lim_{x\to+\infty}\frac{(1+\dfrac{1}{2\xi})^\xi \int_x^{x^2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{t}dt}}{x},\ \xi \in (x, x^2)$$

利用洛比达法则得到:

$$I = \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{2\xi})^\xi \lim_{x\to+\infty}\frac{2x\sin\frac{1}{x} - \sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{1} = I_1 I_2$$

由夹逼定理得到:

$$I_1 = e^{\dfrac{1}{2}},\ I_2 = 2 \Rightarrow I = 2e^{\dfrac{1}{2}}$$

2. 三对角线行列式

求 $D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & a+b & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & a+b & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & a+b \end{vmatrix}$

解

我们将行列式按照第一行展开后得到:

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2},\ D_1 = a+b,\ D_2 = a^2 + b^2 - ab$$

我们可以得到:

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2})$$

我们构造数列 $\{x_n\} = D_{n+2} - aD_{n+1},\ x_1 = b^2 \Rightarrow x_n = b^{n+1}$

我们得到:

$$D_n - aD_{n-1} = b^n$$

同样我们可以得到:

$$D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2})$$

我们构造数列 $\{y_n\} = D_{n+2} - bD_{n+1},\ y_1 = a^2 \Rightarrow y_n = a^{n+1}$

我们得到:

$$D_n - bD_{n-1} = a^n$$

我们有:

$$\begin{cases} D_n - aD_{n-1} = b^n \\ D_n - bD_{n-1} = a^n \end{cases} \Rightarrow (a-b)D_n = a^{n+1} - b^{n+1}$$

(1). 当 $a = b$ 时, 我们直接得到: $D_n - aD_{n-1} = a^n,\ D_1 = a+b$

我们有: $\{\frac{D_n}{a^n}\}$ 是首项为 2, 公差为 1 的等差数列,$D_n = (n+1)a^n$

(2). 当 $a \neq b$ 时, 我们得到: $D_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$

综上所述, 我们得到:

$$D_n = \begin{cases} \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} \\ (n+1)a^n \end{cases}$$

June 26

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1-\dfrac{\ln x}{x})^x$

解

原极限等价于:

$$I = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x + x\ln(1-\frac{\ln x}{x})}$$

$$I = e^{\lim\limits_{x\to 0}}\frac{\ln(1+x\ln x)-x\ln x}{x}$$

我们有: $\ln(1+x)-x\sim -\frac{1}{2}x^2$

原极限 $I=1$

June 27

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$

解

原极限等价于:

$$I = \frac{\sin x + \sin x\int_0^x e^{t^2} - (e^x-1)}{x^2}$$

我们利用泰勒展开可以得到:

$$I = \frac{x+o(x^2)+(x+o(x^2))\int_0^x(1+o(t))dt - x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

2. $A = \begin{pmatrix} a^n & (a+1)^n & \cdots & (a+n)^n \\ a^{n-1} & (a+1)^{n-1} & \cdots & (a+n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a+1 & \cdots & a+n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 求伴随矩阵 A^* 的所有元素之和.

解

我们知道 A 的伴随矩阵 A^* 的所有元素之和为 A 的所有代数余子式的和, 我们可以得到:

$$\mathrm{sum}(A^*) = \sum_{i,j\in n} A_{ij}$$

我们对每一行的代数余子式表示为原行列式对应行全换为 1 的新行列式的值, 我们得到:

$$\sum_{i,j\in n} A_{ij} = |A|$$

我们将 A 上下颠倒即可得到一个范德蒙行列式.

$$|A| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{n=1}^{n} n!$$

June 28

1. 求极限: $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)+\int_0^x t(1+t)^{\frac{1}{t}dt}}\right]$

解

我们首先有:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t(1+t)^{\frac{1}{t}}dt}{x^2} = \frac{e}{2}$$

我们可以得到:

$$x \to 0,\ \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \sim x,\ \int_0^x t(1+t)^{\frac{1}{t}}dt \sim \frac{e}{2}x^2$$

原极限等价于: (泰勒展开)

$$I = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x+\frac{e-1}{2}x^2+o(x^2)-x+o(x^2)}{x(x+o(x))}\right] = \frac{e-1}{2}$$

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{j=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+j^2}$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n^2}\frac{1}{n}\frac{1}{1+(\frac{j}{n})^2} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^n \frac{1}{1+x^2}dx \\ &= \lim_{n\to+\infty}(\arctan n - \frac{\pi}{4}) \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

3. 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}$

解

我们可以得到:

$$\frac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n}\frac{n}{n+1}<\frac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}<\frac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n+1}$$

我们得到:

$$\begin{cases}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}>\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n}\\ \sum_{k=1}^{2n}\frac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}<\sum_{k=1}^{2n}\frac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n}\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}>\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\int_0^2\sqrt{1+\sin\pi x}dx\\ \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\sqrt{1+\sin\frac{\pi k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}<\int_0^2\sqrt{1+\sin\pi x}dx\end{cases}$$

我们由夹逼定理可以得到:

$$\begin{aligned}I &= \int_0^2\sqrt{1+\sin\pi x}dx\\ &= \pi\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin x}dx\\ &= 2\pi\int_0^{\pi}|\sin x+\cos x|dx\\ &= 2\pi\int_0^{\frac{3}{4}\pi}(\sin x+\cos x)dx-2\pi\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}(\sin x+\cos x)dx\\ &= 4\sqrt{2}\end{aligned}$$

June 29

1. 求极限 $\lim_{x\to+\infty}\left[(x^3-x^2+\frac{x}{2}+1)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+x^2+x+1}\right]$

解

我们令 $t=\dfrac{1}{x}$, 原极限等价于:

$$I=\lim_{t\to0}\left[\frac{(t^3+\frac{1}{2}x^2-t+1)e^t-\sqrt{t^6+t^5+t^4+1}}{t^3}\right]$$

我们利用泰勒展开得到:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{t\to0}\left[\frac{(t^3+\frac{1}{2}x^2-t+1)e^t-\sqrt{t^6+t^5+t^4+1}}{t^3}\right]\\
&= \lim_{t\to0}\left[\frac{(t^3+\frac{1}{2}x^2-t+1)(1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3)-(1+t^4+t^5+t^6)}{t^3}\right]\\
&= \lim_{t\to0}\frac{\frac{7}{6}t^3+o(t^3)}{t^3}\\
&= \frac{7}{6}
\end{aligned}$$

2. 求 $\sum\limits_{n=1}^{100}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 的整数部分.

解

我们可以得到原和式等价于:

$$I=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}}$$

我们把这个理解为 100 个长方形面积之和, 我们有:

$$\begin{cases}
I>\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\int_2^3\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\cdots+\int_{100}^{101}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int_1^{101}\frac{1}{\sqrt{x}}dx\\
I<1+\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\int_2^3\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\cdots+\int_{99}^{100}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=1+\int_1^{100}\frac{1}{\sqrt{x}}dx
\end{cases}$$

我们可以得到:

$$2(\sqrt{101}-1)<I<1+2(\sqrt{100}-1\Rightarrow 18<I<19$$

综上所述, 原和式的整数部分为 18.

3. 设 $f(x)$ 是满足 $\int_x^{\frac{\pi}{2}}f(t-x)f(t)dt=\cos^4 x$ 的连续函数, 求 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的平均值.

解

我们要求的是:

$$I=\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx}{\frac{\pi}{2}}$$

我们对 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t-x)f(t)dt=\cos^4 x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上取定积分得到:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_x^{\frac{\pi}{2}}f(t-x)f(t)dt\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 xdx=\frac{3}{16}\pi$$

我们交换积分次序可以得到:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt\int_0^t f(t-x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt\int_0^t f(u)du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)F(t)dt=\frac{3}{16}\pi$$

其中 $F'(t) = f(t)$, 我们得到:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)F(t)dt = \frac{1}{2}F^2(x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}F^2(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{16}\pi$$

我们可以得到:

$$I = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \pm\sqrt{\frac{3}{2\pi}}$$

4. 求行列式 $|A| = \begin{vmatrix} a+x_1 & a+x_1^2 & \cdots & a+x_1^n \\ a+x_2 & a+x_2^2 & \cdots & a+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+x_n & a+x_n^2 & \cdots & a+x_n^n \end{vmatrix} (a \neq 0)$

解

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+a-a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+x_1 & a+x_1^2 & \cdots & a+x_1^n \\ a & a+x_2 & a+x_2^2 & \cdots & a+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a+x_n & a+x_n^2 & \cdots & a+x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a-a & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ a & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ a & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1+a & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 0 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ a & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ a & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$= (1-a)\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} + (-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$A = (1-a)\prod_{k=1}^n x_k \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i) - a\prod_{k=1}^n (x_k - 1)\prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)$$

$$A = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)\left[(1-a)\prod_{k=1}^n x_k - a\prod_{k=1}^n (x_k - 1)\right]$$

范德蒙行列式应用

求行列式: $|A| = \begin{vmatrix} a+x_1 & a+x_2 & \cdots & a+x_n \\ a^2+x_1^2 & a^2+x_2^2 & \cdots & a^2+x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n+x_1^n & a^n+x_2^n & \cdots & a^n+x_n^n \end{vmatrix} (a \neq 0)$

解

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+x_1 & a+x_2 & \cdots & a+x_n \\ a^2 & a^2+x_1^2 & a^2+x_2^2 & \cdots & a^2+x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n & a^n+x_1^n & a^n+x_2^n & \cdots & a^n+x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ a & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ a^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ a^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ a^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \\ &= 2\prod_{k=1}^{n} x_k \prod_{1<i\leq j<n}(x_j - x_i) - \prod_{k=1}^{n}(x_k - a) \prod_{1<i\leq j<n}(x_j - x_i) \\ &= \prod_{1<i\leq j<n}(x_j - x_i)\left[2\prod_{k=1}^{n} x_k - \prod_{k=1}^{n}(x_k - a)\right] \end{aligned}$$

June 30

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x^4}\left[\ln(1+\sin^2 x) - 6(\sqrt[3]{2-\cos x} - 1)\right]$

解

我们利用泰勒展开:

$$\begin{aligned}I &= \lim_{x\to 0}\frac{(x-\frac{x^3}{6})^2-\frac{1}{2}(x-\frac{x^3}{6})^4-6[\frac{1-\cos x}{3}-\frac{(1-\cos x)^2}{9}]}{x^4}\\ &= \frac{x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)-2(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4)+o(x^4)+\frac{2}{3}\frac{1}{4}x^4+o(x^4)}{x^4}\\ &= -\frac{7}{12}\end{aligned}$$

2. $\int_0^1 x\arcsin 2\sqrt{x-x^2}dx$

解

我们利用区间再现公式:

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2}\int_0^1 \arcsin 2\sqrt{x-x^2}dx\\ &= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\arcsin(\cos t)dt\\ &= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos t\arcsin(\cos t)dt\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\arcsin(\cos t)dt\\ &= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(\frac{\pi}{2}+t)\cos tdt+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-t)\cos tdt\\ &= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos tdt\\ &= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-1)\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

3. 设 $a_n \geq 0$, 且 $\{na_n\}$ 有界, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ 收敛.

解

我们由 $\{na_n\}$ 收敛得出:

$$\forall M>0, \exists N_0>0,\ 当 n>N_0, na_n<M \Rightarrow a_n<\frac{n}{M}\Rightarrow a_n^2<\frac{M^2}{n^2}$$

我们知道级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{M^2}{n^2}$($M$ 为常数) 收敛, 我们通过比较判别法得出: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ 收敛.

4. A 是三阶矩阵,$\forall i,j\in\{1,2,3\}$, 我们有: $a_{ij}=A_{ij}$,$a_{33}=1$, 证明: A 是正交矩阵.

解

我们由: $\forall i,j \in \{1,2,3\}$, $a_{ij} = A_{ij} \Rightarrow A^T = A^*$
我们有:

$$AA^T = AA^* = |A|E \Rightarrow |A|^2 = |A|^3 \Rightarrow |A| = 1\text{或者}0$$

我们将 $|A|$ 按照第三行展开得到:

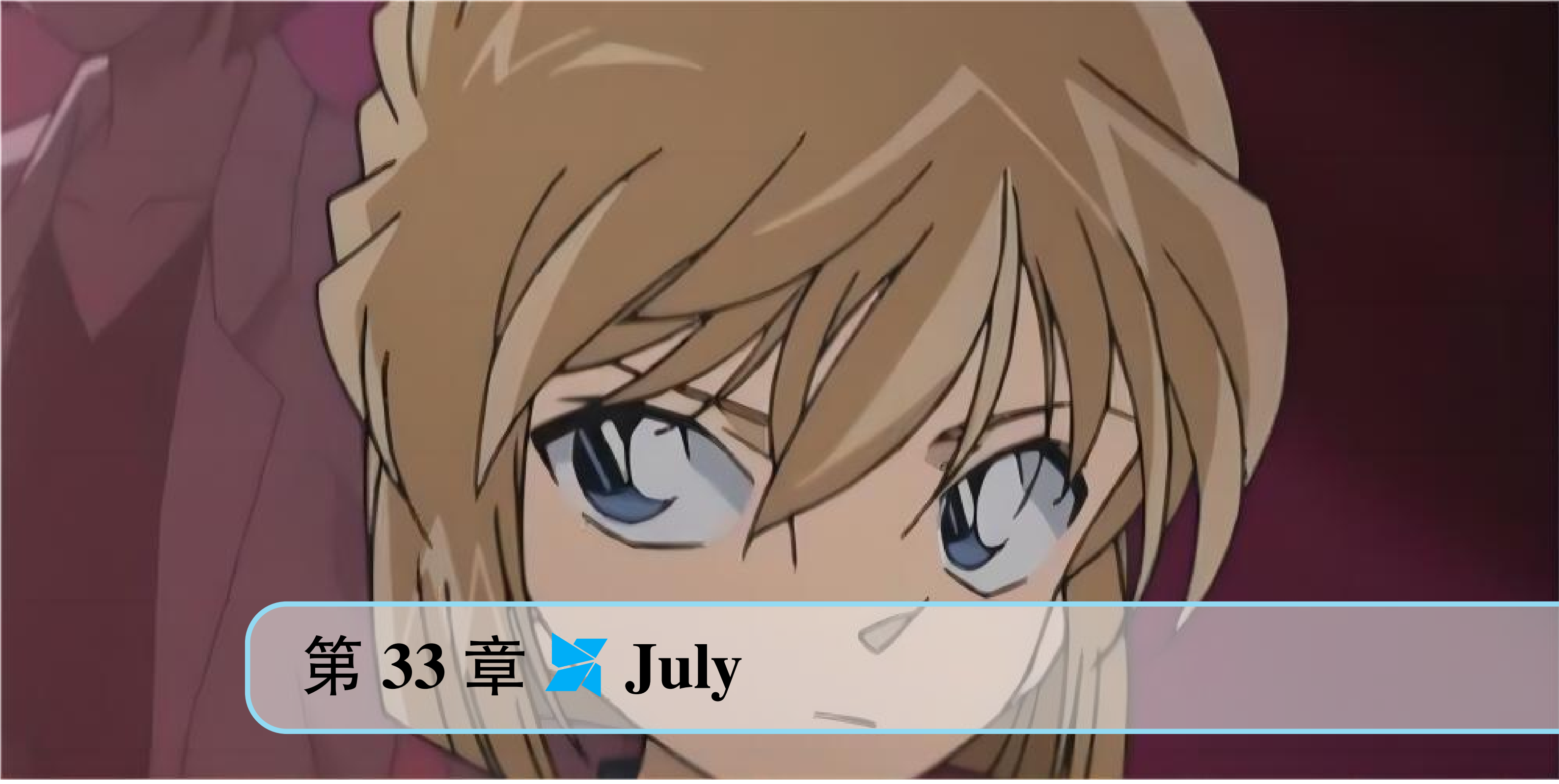
$$|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = a_{31}^2 + a_{32}^2 + 1 \geq 1$$

我们得到: $|A| = 1$
我们有: $AA^T = AA^* = E \Rightarrow A$是正交矩阵.

第六部分

每日一题 II

第 6 部分目录



第 33 章 July

33.1 Week I

July 1

1. 证明: $e^{\int_0^1 f(x)dx} \le \int_0^1 e^{f(x)}dx$

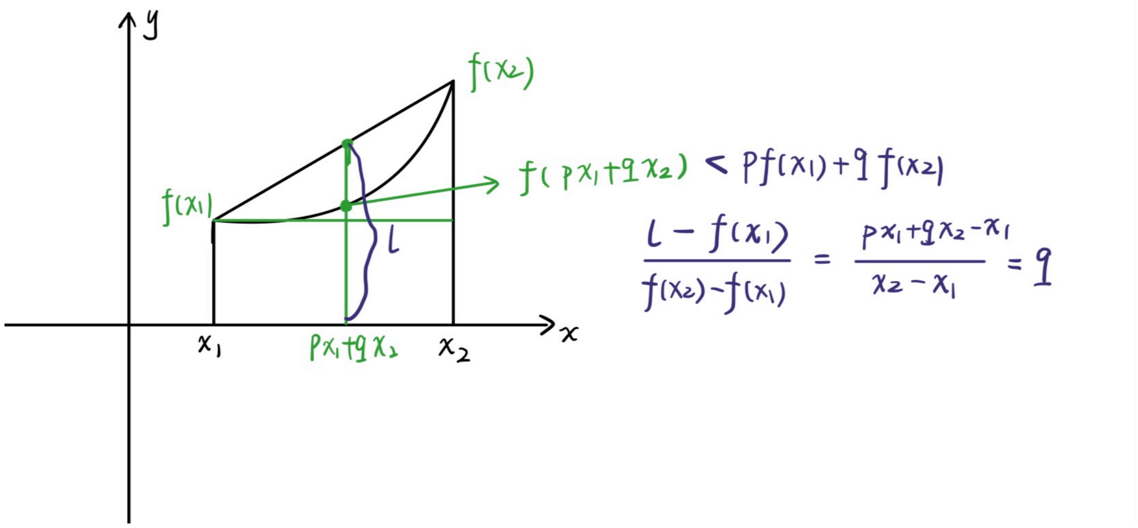


图 33.1: 凹函数性质

解

凹函数性质

我们不妨假设 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凹函数, 我们有以下的定理.

$$\forall x_1,x_2,\cdots,x_n\in(a,b),x_1<x_2<\cdots<x_n,\exists p_1,p_2,\cdots,p_n>0,\sum_{i=1}^{n}p_n=1,\ s.t.\sum_{i=1}^{n}p_if(x_i)\geq f(\sum_{i=1}^{n}p_ix_i)$$

证明

(1). 当 $n=1$ 时, 原命题显然成立.

(2). 当 $n=2$ 时, 原命题等价于:

$$p+q=1,\ f(px_1+qx_2)\leq pf(x_1)+qf(x_2)$$

我们由 *Figure* :33.1得到:

$$\begin{cases} px_1+qx_2>(p+q)x_1=x_1 \\ px_1+qx_2<(p+q)x_2=x_2 \end{cases} px_1+qx_2\in(x_1,x_2)$$

$$\frac{l-f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}=\frac{px_1+qx_2-x_1}{x_2-x_1}=q\Rightarrow l=qf(x_1)+(1-q)f(x_1)=pf(x_1)+qf(x_2)$$

(3). 假设当 $n=k$ 时, 我们有:

$$\sum_{i=1}^{k}p_if(x_i)\geq f(\sum_{i=1}^{k}p_ix_i)$$

当 $n=k+1$ 时, 我们有:

$$\begin{aligned} f(x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}) &= f((1-x_{k+1})[\frac{x_1}{1-p_{k+1}}+\frac{x_2}{1-p_{k+1}}+\cdots+\frac{x_k}{1-p_{k+1}}+p_{k+1}x_{k+1}]) \\ &\leq p_{k+1}f(x_{k+1})+\frac{1}{1-p_{k+1}}f(\sum_{i=1}^{k}\frac{p_i}{1-p_{k+1}}x_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k+1}p_if(x_i) \end{aligned}$$

原命题等价于:

$$\lim_{n\to+\infty}e^{\sum\limits_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})\frac{i}{n}}\leq\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}e^{f(\frac{i}{n})}$$

我们得到:

$$e^{\int_0^1 f(x)dx} \le \int_0^1 e^{f(x)}dx$$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \int_0^x (\frac{\arctan t}{t})^{\frac{1}{\int_0^t \ln(1+u)du}} \cot x dt$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \int_0^x (\frac{\arctan t}{t})^{\frac{1}{\int_0^t \ln(1+u)du}}}{\sin x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (\frac{\arctan t}{t})^{\frac{1}{\int_0^t \ln(1+u)du}} dt}{x} \\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\frac{\arctan x}{x})}{\int_0^x \ln(1+u)du}} \\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{3}x^2}{\int_0^x \ln(1+u)du}} \\ &= e^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

3. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 我们有 $\int_0^1 xf(x)dx = 1$, $\int_0^1 f(x)dx = 0$, 证明:

$$\exists \xi \in (0,1),\ s.t. |f(\xi)| \ge 4$$

解

我们由 $\int_0^1 xf(x)dx = 1$, $\int_0^1 f(x)dx = 0$ 得到:

$$\int_0^1 (x+a)f(x) = 1 \Rightarrow \int_0^1 |x+a||f(x)| \ge 1$$

我们假设 $f(x) < 4$, 我们得到:

$$4\int_0^1 |x+a|dx > 1$$

我们有:

$$4\int_0^1 |x+a|dx = \begin{cases} 4a+2, a \ge 0 \\ -4a-2, a \le -1 \\ 4a^2+4a+2, a \in (-1,0) \end{cases}$$

我们要得出矛盾, 即令 $4\int_0^1|x+a|dx\le 1$, 我们令 $a=-\dfrac{1}{2}$,$4\int_0^1|x+a|dx=1$ 矛盾!!!
综上所述, 我们得到: $\exists\xi\in(0,1)$, $s.t.|f(\xi)|\ge 4$

July 2

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}\right]^{x^2\ln x}$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to+\infty} e^{x^2\ln x\ln\left[1+\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}\right]}\\
I_1 &= \lim_{x\to+\infty} x^2\ln x\ln\left[1+\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}\right]\\
&= \lim_{x\to+\infty} x^2\ln x(\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{\ln(x+\sqrt{x^2-1})})\\
&= \lim_{x\to+\infty} x^2\ln x(\frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})}{\xi\ln(2x)}),\xi\in(x+\sqrt{x^2-1},x+\sqrt{x^2+1})\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\xi}\frac{2x}{(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\xi}
\end{aligned}
$$

我们用夹逼定理: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\xi}=\dfrac{1}{2}$

原极限 $I=e^{\frac{1}{2}}$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 导函数连续, 且 $\int_0^1 x^2f'(x)dx=1$, 证明:
(1). $\exists\xi\in(0,1)$, $s.t.f'(\xi)=3$
(2). 若 $f(1)=\int_0^1 f(x)dx=0$, 则 $\exists\eta\in(0,1)$, $s.t.f'(\eta)=-\dfrac{6}{7}$

解

(1). 我们不妨设 $g(x)=x^2$, 我们有 $x\in(0,1),g(x)>0$, 我们根据第一积分中值定理得到:

$$\exists\xi\in(0,1),\ s.t.\int_0^1 f'(x)g(x)dx=f'(\xi)\int_0^1 g(x)dx\Rightarrow\int x^2f'(x)dx=f'(\xi)\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}f'(\xi)=1$$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi\in(0,1)$, $s.t.f'(\xi)=3$
(2). 我们由 $\int_0^1 x^2f'(x)dx=1$ 得到:

$$\int_0^1 f(x)dx=xf(x)|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 xf'(x)dx=0\Rightarrow\int_0^1 xf'(x)dx=0$$

我们得到:

$$\begin{cases} \int_0^1 xf'(x)dx = 0 \\ \int_0^1 x^2 f'(x)dx = 1 \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 (x^2 - kx)f'(x)dx = 1$$

我们假设 $h(x) = x^2 - kx$, 我们不妨假设 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上恒有 $h(x) > 0$ 或者 $h(x) < 0$, 我们由第一积分中值定理得到:

$$\exists \eta \in (0, 1),\ s.t. \int_0^1 h(x)f'(x) = f'(\eta)\int_0^1 h(x)dx \Rightarrow f'(\eta)\int_0^1 (x^2 - kx)dx = 1 \Rightarrow f'(\eta) = \frac{6}{2 - 3k}$$

当 $k = 3$ 时, 我们有 $h(x) = x^2 - 3x$, 当 $x \in (0, 1)$,$h(x) < 0$, 满足第一积分中值定理使用条件, 我们可以得到: $\exists \eta \in (0, 1),\ s.t. f'(\eta) = -\dfrac{6}{7}$

July 3

1. 设 $f(x)$ 连续,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 1$, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1 + \int_0^x tf(x^2 - t^2)dt\right]^{\frac{1}{(\tan x - x)\ln(1+x)}}$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0} e^{\frac{3\int_0^{x^2} -\frac{1}{2}f(x^2-t^2)d(x^2-t^2)}{x^4}} \\ &= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\frac{3}{2}\int_0^{x^2} f(u)du}{x^4}} \\ &= \lim_{x\to 0} e^{\frac{3f(x^2)}{4x^2}} \\ &= e^{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

2. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上连续的周期为 1 的周期函数且满足 $0 \le f(x) \le 1$ 与 $\int_0^1 f(x)dx = 1$, 证明: $x \in [0, 13]$ 时,$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)dt + \int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)dt + \int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)dt \le 11$

解

我们由 $0 \le f(x) \le 1$ 得到:

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)dt + \int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)dt + \int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)dt \le \sqrt{x} + \sqrt{x+27} + \sqrt{13-x} = 1\cdot\sqrt{x} + a\cdot\frac{1}{a}\sqrt{x+27} + b\cdot\frac{1}{b}\sqrt{13-x}$$

我们由柯西不等式得到:

$$1\cdot\sqrt{x} + a\cdot\frac{1}{a}\sqrt{x+27} + b\cdot\frac{1}{b}\sqrt{13-x} \le \sqrt{(1 + a^2 + b^2)(x + \frac{x+27}{a^2} + \frac{13-x}{b^2})}$$

我们需要满足:

$$\begin{cases} 1+\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=0 \\ (1+a^2+b^2)(\dfrac{27}{a^2}+\dfrac{13}{b^2})=121 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=2 \\ b^2=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

我们可以得到原不等式取等号条件 $\dfrac{\sqrt{x}}{1}=\dfrac{\sqrt{x+27}}{2}=\dfrac{3\sqrt{13-x}}{2}$, 当且仅当 $x=9$ 时等号成立.

当 $x=9$ 时, 原不等式为:

$$\int_0^3 f(t)dt+\int_0^6 f(t)dt+\int_0^2 f(t)dt=11\int_0^1 f(t)dt=11$$

综上所述, 等号成立条件为 $x=9$, 原不等式成立.

3. 设 $D=\{(x,y)|0\le x\le 2, 0\le y\le 2\}$,$f(x,y)$ 在 D 上连续,$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=0$,$\iint\limits_D xyf(x,y)dxdy=1$, 证明: $\exists(\xi,\eta)\in D,\ s.t.|f'(\xi,\eta)|\ge\dfrac{2}{4\ln 2+3}$

解

我们由: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=0$,$\iint\limits_D xyf(x,y)dxdy=1$ 得到:

$$\iint\limits_D (xy-k)f(x,y)dxdy=1\Rightarrow\iint\limits_D |xy-k||f(x,y)|dxdy\ge 1$$

我们由二重积分第一积分中值定理得到:

$$\exists(\xi,\eta)\in D,\ s.t.|f(\xi,\eta)|\iint\limits_D |xy-k|dxdy=\iint\limits_D |xy-k||f(x,y)|dxdy\ge 1$$

我们得到:

$$\exists(\xi,\eta)\in D,\ s.t.|f(\xi,\eta)|\ge\frac{1}{\iint\limits_D |xy-k|dxdy}$$

我们只需要找到 k 使得 $\iint\limits_D |xy-k|dxdy=2\ln 2+\dfrac{3}{2}$.

原二重积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{D_1}(xy-k)dxdy+\iint\limits_{D_2}(k-xy)dxdy \\ &= \int_{\frac{k}{2}}^2 dx\int_{\frac{k}{x}}^2(xy-k)dy+\int_0^{\frac{k}{2}}dx\int_0^2(k-xy)dy+\int_{\frac{k}{2}}^2 dx\int_0^{\frac{k}{x}}(k-xy)dy \\ &= \frac{3}{4}k^2-4k+4+\frac{3}{4}k^2+k^2\ln 2-k^2\ln\frac{k}{2} \\ &= 2k^2\ln 2-k^2\ln k+\frac{3}{2}k^2+4-4k \end{aligned}$$

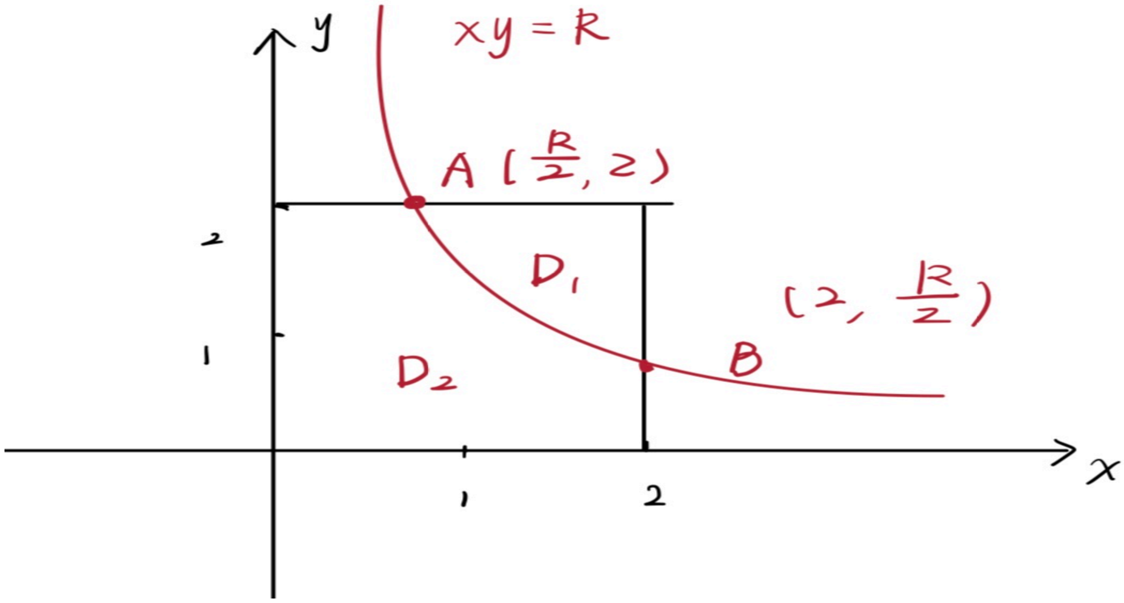


图 33.2: 积分区域图

我们得到:

$$\begin{cases} 2k^2 = 2 \\ \ln k = 0 \\ \dfrac{3}{2}k^2 + 4 - 4k = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow k = 1$$

综上所述, 我们找到 $k = 1$ 使得上式成立, 我们有: $\exists(\xi, \eta) \in D,\ s.t. |f'(\xi, \eta)| \geq \dfrac{2}{4\ln 2 + 3}$

July 4

1. 求极限: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}}$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1)}{\ln x}} \\ &\overset{L}{=} \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{(1 - \ln x)e^{\frac{\ln x}{x}}}{x(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1)}} \\ &= \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{(1 - \ln x)e^{\frac{\ln x}{x}}}{\ln x}} \\ &= e^{-1} \end{aligned}$$

注

- 如果 $f \sim g$, 我们有 $\ln f \sim \ln g$

2. 已知 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$,$b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{\pi^2}{6}$

(1). 证明: $a_{2n} = \frac{1}{4}a_n + b_n$, $(n = 1, 2, \cdots)$

(2). 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{3}{4}\right)$

解

(1). 我们有:

$$\frac{1}{4}a_n = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2}$$

因此, 我们有:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}a_n + b_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2} \\
&= \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^2} \\
&= a_{2n}
\end{aligned}$$

(2). 原极限等价于:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_{2n}-a_n}{a_n}\right) \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} n(a_{2n}-a_n)}{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n} \\
&= \frac{6}{\pi^2}\lim_{n\to+\infty} n\left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+k)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}\right] \\
&= \frac{6}{\pi^2}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+\frac{k}{n})^2} \\
&= \frac{6}{\pi^2}(-\frac{1}{1+x})|_0^1 \\
&= \frac{3}{\pi^2}
\end{aligned}$$

注

- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

- $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{24}$

July 5

1. 若 $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(xe^x)-e^{-\frac{x^2}{2}e^{2x}}}{x^\alpha}=\beta\neq 0$, 求 α,β

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}x^2e^{2x}+\frac{1}{24}x^4e^{4x}-(1-\frac{1}{2}x^2e^{2x}+\frac{1}{8}x^4e^{4x})}{x^\alpha} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4e^{4x}}{x^\alpha} \\ &= \beta \end{aligned}$$

我们得到: $\alpha=4,\ \beta=-\frac{1}{12}$

2. 求 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}dx\ (a>0)$

解

原积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\frac{\ln a+\ln\frac{x}{a}}{(\frac{x}{a})^2+1}d(\frac{x}{a}) \\ &= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\frac{\ln a+\ln u}{u^2+1}du \\ &= \frac{\ln a}{a}\int_0^{+\infty}\frac{1}{u^2+1}du+\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\frac{\ln u}{u^2+1}du \\ &= I_1+I_2 \\ I_1 &= \frac{\pi\ln a}{2a} \\ I_2 &= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\frac{\ln u}{u^2+1}du=\frac{1}{a}\int_{+\infty}^{0}\frac{-\ln t}{(\frac{1}{t})^2+1}(-\frac{1}{t^2})dt=-\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+1}dt\Rightarrow I_2=0 \\ I &= I_1+I_2=\frac{\pi\ln a}{2a} \end{aligned}$$

$\int_0^{+\infty}f(x)dx$ **积分技巧**

- 倒代换
- 分割为 $\int_0^1 f(x)+\int_1^{+\infty}f(x)dx$
- 利用正切三角换元法

July 6

1. 若 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^\alpha}=\beta\neq 0$, 求 α,β

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 2x-\cos^2 x\cos 2x}{(\cos x+\cos x\sqrt{\cos 2x})x^\alpha}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos 2x\sin^2 x}{(\cos x+\cos x\sqrt{\cos 2x})x^\alpha}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos 2x}{\cos x+\cos x\sqrt{\cos 2x}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\\
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\\
&= \beta
\end{aligned}$$

我们可以得到: $\alpha=2,\ \beta=-\dfrac{1}{2}$

2. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+3x+9x^2}$, 求 $f^{(100)}(0)$

解

我们可以得到:

$$f(x)=\frac{1-3x}{(1-3x)(1+3x+9x^2)}=\frac{1}{1-(3x)^3}-3x\frac{1}{1-(3x)^3}$$

我们将 $f(x)$ 在 $x=0$ 处泰勒展开得到:

$$\begin{cases}
f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{100}x^{100}+\cdots+a_nx^n+\cdots\\
f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(100)}}{100!}x^{100}+\cdots
\end{cases}\Rightarrow f^{(100)}(0)=a_{100}100!$$

我们有:

$$-1<x<1,\ 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n=\frac{1}{1-x}$$

我们得到:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(3x)^{3n}-\sum_{n=0}^{+\infty}(3x)^{3n+1}$$

我们得到: $a_{100}=-3^{100}\Rightarrow f^{(100)}(0)=-3^{100}100!$

July 7

1. 如果 $\lim_{x\to 0}\dfrac{ax^2+bx+1-e^{x^2-2x}}{x^2}=2$, 求 a,b

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to0}\frac{ax^2+bx+1-(1+x^2-2x+\frac{1}{2}(x^2-2x)^2)}{x^2}\\
&= \lim_{x\to0}\frac{(b+2)x+(a-3)x^2}{x^2}\\
&= a-3
\end{aligned}
$$

我们得到: $\begin{cases} a-3=2 \\ b+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-2 \end{cases}$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{n!x^n-\sin x\sin 2x\cdots\sin nx}{x^{n+2}}$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= n!\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{\sin x\sin 2x\cdots\sin nx}{n!x^n}}{x^2}\\
&= n!\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{\sin x}{x}\frac{\sin 2x}{2x}\cdots\frac{\sin nx}{nx}}{x^2}\\
&= -n!\lim_{x\to0}\frac{\ln(\frac{\sin x}{x}\frac{\sin 2x}{2x}\cdots\frac{\sin nx}{nx})}{x^2}\\
&= -n!\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\frac{\sin kx-kx}{kx})}{x^2}\\
&= n!\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to0}\frac{kx-\sin kx}{kx^3}\\
&= n!\sum_{k=1}^{n}(\frac{k^2}{6})\\
&= n!\frac{n(n+1)(2n+1)}{36}\\
&= \frac{n(2n+1)(n+1)!}{36}
\end{aligned}
$$

33.2 Week II

July 8

1. 若 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})+ax^2+bx^3}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^2$, 求 a,b

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to0} e^{\frac{\ln\left(\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+ax^2+bx^3-x}{x}+1\right)}{x^2}} \\ &= \lim_{x\to0} e^{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+ax^2+bx^3-x}{x^3}} \\ &= e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)+ax^2+bx^3-x}{x^3}} \\ &= e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{(b-\frac{1}{6})x^3+o(x^3)+ax^2}{x^3}} \\ &= e^2 \end{aligned}$$

我们得到: $\begin{cases} b-\frac{1}{6}=2 \\ a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\dfrac{13}{6} \\ a=0 \end{cases}$

注

$x\longrightarrow0,\ x\sim\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

我们可以得到:

$$[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^3+\cdots$$

我们可以得到: $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的泰勒展开式:

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

2. 设 n 阶矩阵 A,B 满足 $AB+aA+bB+cE=O$, 其中 $ab\neq c$, 证明:

(1). $A+bE$ 与 $B+aE$ 均为可逆矩阵

(2).$AB=BA$

解

(1). 我们由 $AB+aA+bB+cE=O$ 可以得到:

$$(A+bE)(B+aE)=(ab-c)E$$

我们得到:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{ab-c}(A+bE)(B+aE)=E \\ (A+bE)\dfrac{1}{ab-c}(B+aE)=E \end{cases}$$

我们得到: $A+bE$ 与 $B+aE$ 均为可逆矩阵

(2). 我们可以得到:

$$\frac{1}{ab-c}(A+bE)(B+aE)=\frac{1}{ab-c}(B+aE)(A+bE)$$

我们化简一下:

$$\begin{cases} 左边 = AB+bB+aA+abE \\ 右边 = BA+aA+bB+abE \end{cases} \Rightarrow AB=BA$$

July 9

1. 已知常数 $a>0,\ bc\neq 0$, 使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}[x^a\ln(1+\frac{x}{b})-x]=c$, 求 a,b,c

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+bx)-x^{a-1}}{x^a} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{bx-\frac{1}{2}b^2x^2-x^{a-1}}{x^a} \\ &= c \end{aligned}$$

我们得到: $\begin{cases} a-1=1 \\ b=1 \\ c=-\dfrac{1}{2}b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

2. 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{6n}}\frac{\sin y}{y}dy+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{3}{6n}}\frac{\sin y}{y}dy+\cdots+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{(2n-1)}{6n}}\frac{\sin y}{y}dy\right]$$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2k-1}{6n}}\frac{\sin y}{y}dy\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{2k-1}{2n})\\
&= \int_0^1[\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}x}\frac{\sin y}{y}dy]dx\\
&= -\int_0^{\frac{1}{3}}dy\int_0^{3y}\frac{\sin y}{y}dx\\
&= -\int_0^{\frac{1}{3}}3\sin ydy\\
&= 3(\cos\frac{1}{3}-1)
\end{aligned}
$$

July 10

1. 设 A 为 n 阶反对称矩阵, 证明: 对于任意向量 x, 均有 $x^T(A+E)x \geq 0$.

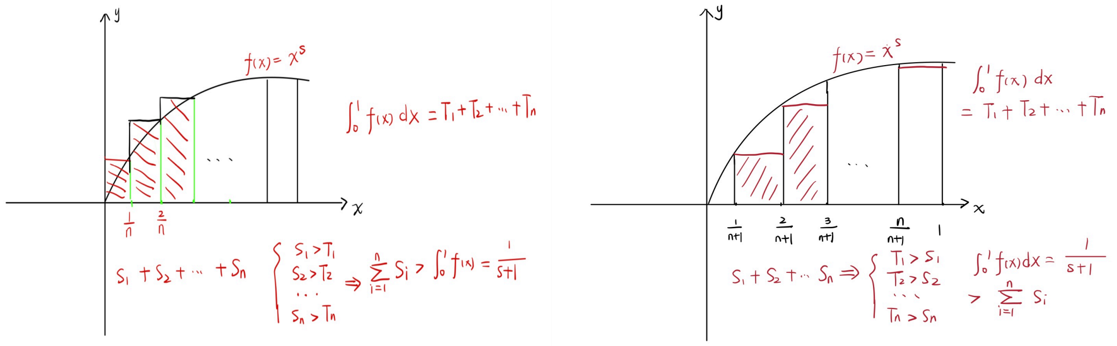
解

我们有:

$$x^T(A+E)x = [x^T(A+E)x]^T = x^T(A^T+E)x = x^T(-A+E)x$$

$$x^T(A+E)x + x^T(A-E)x = 2x^TAx = 0 \Rightarrow x^T(A+E)x = x^TAx + x^TEx = x^Tx \geq 0$$

2. $s>0$, 证明: $\dfrac{n^{s+1}}{s+1} < 1^s+2^s+\cdots+n^s < \dfrac{(n+1)^{s+1}}{s+1}$



(a) 定积分定义示意图 α (b) 定积分定义示意图 β

图 33.3: 积分和求和关系图

解

原不等式可以化为:

$$\begin{cases} \frac{1}{n}[(\frac{1}{n})^s + (\frac{2}{n})^s + \cdots + (\frac{n}{n})^s] > \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{n+1}[(\frac{1}{n+1})^s + (\frac{2}{n+1})^s + \cdots + (\frac{n}{n+1})^s] < \frac{1}{s+1} \end{cases}$$

如图 (a) 第一个不等式:

$$\text{左边} = \sum_{i=1}^{n} S_i > \int_0^1 x^s dx = \frac{1}{s+1} = \text{右边}$$

如图 (b) 第二个不等式:

$$\text{左边} = \sum_{i=1}^{n} S_i < \int_0^1 x^s dx = \frac{1}{s+1} = \text{右边}$$

3. 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1^{p+1} + 2^{p+1} + \cdots + n^{p+1}}{n(1^p + 2^p + \cdots + n^p)} (p > 0)$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(\frac{1}{n})^{p+1} + (\frac{2}{n})^{p+1} + \cdots + (\frac{n}{n})^{p+1}}{(\frac{1}{n})^p + (\frac{2}{n})^p + \cdots + (\frac{n}{n})^p} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}[(\frac{1}{n})^{p+1} + (\frac{2}{n})^{p+1} + \cdots + (\frac{n}{n})^{p+1}]}{\frac{1}{n}[(\frac{1}{n})^p + (\frac{2}{n})^p + \cdots + (\frac{n}{n})^p]} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^{p+1}}{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^p} \\ &= \frac{\int_0^1 \frac{x^{p+2}}{p+2} dx}{\int_0^1 \frac{x^{p+1}}{p+1} dx} \\ &= \frac{p+1}{p+2} \end{aligned}$$

July 11

1. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求 A^{99}

解

我们将矩阵 A 相似对角化:

(1). 求矩阵 A 的特征值和特征向量

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -2 & \lambda+3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)$$

矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -2$

当 $\lambda_1 = 0$ 时,$(-A)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \xi_1 = (3,2,2)^T$

当 $\lambda_2 = -1$ 时,$(-E - A)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \xi_2 = (1,1,0)^T$

当 $\lambda_3 = -2$ 时,$(-2E - A)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \xi_3 = (1,2,0)^T$

存在可逆矩阵 $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $s.t.\ P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$, 其中 $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

我们得到:

$$A = P\Lambda P^{-1} \Rightarrow A^{99} = P\Lambda^{99}P^{-1}$$

上面的式子可以化为:

$$\begin{aligned} A^{99} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -2^{99} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2^{99} \\ 0 & -1 & -2^{100} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2^{99}-2 & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ 2^{100}-2 & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. 设 3 阶实对称矩阵 A 特征值为 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 对应于 λ_1 的特征向量为 $\xi_1 = [0,1,1]^T$, 求 A.

解

我们不妨设特征值 λ_2, λ_3 对应的特征向量为 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, 我们由实对称矩阵不同特征值对应的特征向量相互正交得到:

$$x_2 + x_3 = 0$$

我们不妨取 $\xi_2 = (1,0,0)^T$, $\xi_3 = (0,-1,1)^T$ 作为特征值 λ_2, λ_3 的特征向量. 我们将 ξ_1, ξ_2, ξ_3 单位化得到:

$$\begin{cases} \eta_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T \\ \eta_2 = (1,0,0)^T \\ \eta_3 = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T \end{cases}$$

我们得到:

$$\exists 可逆矩阵 P = [\eta_1, \eta_2, \eta_3],\ s.t. P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

其中 $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

我们得到:

$$\begin{aligned} A &= P\Lambda P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. 设 A 是任意的 $m \times n$ 矩阵, 证明: 方程组$A^T Ax = A^T b$ 一定有解.

解

我们知道非齐次方程组有解的充要条件为: $rank(A) = rank([A, b])$

在此题中,我们需要证明:

$$rank(A^TA) = rank([A^TA, A^Tb]) = rank(A^T[A, b])$$

显然,我们由 $rank(AB) \le min\{rank(A), rank(B)\}$ 有:

$$rank(A^TA) \le rank([A^TA, A^Tb]) = rank(A^T[A, b]) \le rank(A^T)$$

我们还有: $rank(A) = rank(A^T) = rank(AA^T) = rank(A^TA)$

因此我们得到:

$$\begin{cases} rank(A^TA) = rank(A) \le rank([A^TA, A^Tb]) \\ rank([A^TA, A^Tb]) \ge rank(A^T) = rank(A) = rank(A^TA) \end{cases} \Rightarrow rank(A^TA) = rank([A^TA, A^Tb])$$

原方程组一定有解.

July 12

1. 设 A 为 3 阶实对称矩阵,$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,$\alpha = (1, 0, 1)^T$ 是矩阵 A 特征值 3 的一个特征向量,若 $r(3E - A) > 1$, 且 $A^2 - 4E + 3E = 0$, 下列选项错误的是:

- A. 矩阵 A 必可相似对角化
- B. 矩阵 B 不可以相似对角化
- C. 矩阵方程 $AX - XB = 0$ 有可逆解
- D. $r(3E - A) = 2$

解

A. 我们由实对称矩阵必可相似对角化得到矩阵 A 一定可以相似对角化.

B. 矩阵 B 的三个特征值为 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 对于特征值 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$,$n - r(E - B) = 1$, 不满足相似对角化条件.

C. 假设方程 $AX - XB = 0$ 存在可逆解, 我们有 $AXX^{-1} = XBX^{-1} \Rightarrow A = XBX^{-1}$, 我们可以得到: $A \sim B$, 我们有 $A \sim \Lambda$, 可以得到: $B \sim \Lambda$, 矛盾!!

D. 我们有: $A^2 - 4E + 3E = 0 \Rightarrow (A - 3E)(A - E) = 0$, 矩阵 A 的特征值有 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$, 对应 $r(3E - A) = 1$或者2, 又因为 $r(3E - A) > 1 \Rightarrow r(3E - A) = 2$.

2. 求 $f(x) = \sqrt{4x^2 + x}\ln(2 + \frac{1}{x})$ 的斜渐近线.

解

我们不妨假设 $f(x)$ 的斜渐近线为 $y = ax + b$, 我们得到:

(1).

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax) \end{cases}$$

我们得到:

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4+\frac{1}{x}}\ln(2+\frac{1}{x}) = 2\ln 2 \\ b = \lim\limits_{x\to+\infty} [\sqrt{4x^2+x}\ln(2+\frac{1}{x}) - 2\ln 2x] = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\sqrt{4+t}\ln(2+t)-2\ln 2}{t} = \lim\limits_{t\to 0^+}(\dfrac{\ln(2+t)}{2\sqrt{4+t}} + \dfrac{\sqrt{4+t}}{t+2}) = \dfrac{\ln 2}{4}+1 \end{cases}$$

(2).

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-ax) \end{cases}$$

我们得到:

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{4+\frac{1}{x}}\ln(2+\frac{1}{x}) = -2\ln 2 \\ b = \lim\limits_{x\to-\infty} [\sqrt{4x^2+x}\ln(2+\frac{1}{x}) + 2\ln 2x] = \lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{2\ln 2-\sqrt{4+t}\ln(2+t)}{t} = -\dfrac{\ln 2}{4} - 1 \end{cases}$$

综上所述,$f(x)$ 的斜渐近线为 $y = 2\ln 2\, x + \dfrac{\ln 2}{4} + 1$ 和 $y = -2\ln 2\, x - \dfrac{\ln 2}{4} - 1$

注

利用泰勒展开式来求渐近线.

$f(x) = \sqrt{4x^2+x}\ln(2+\frac{1}{x})$, 我们利用泰勒展开式得到:

$$\begin{cases} x\to+\infty,\ f(x) \sim 2x\sqrt{1+\frac{1}{4x}}[\ln 2+\ln(1+\frac{1}{2x})] = 2x(1+\frac{1}{8x})(\ln 2+\frac{1}{2x}) = 2\ln 2\, x + \frac{\ln 2}{4} + 1 \\ x\to-\infty,\ f(x) \sim -2x\sqrt{1+\frac{1}{4x}}[\ln 2+\ln(1+\frac{1}{2x})] = -2x(1+\frac{1}{8x})(\ln 2+\frac{1}{2x}) = -2\ln 2\, x - \frac{\ln 2}{4} - 1 \end{cases}$$

July 13

1. 当 $x\to 0$ 时, 下列无穷小量最高阶的是:

- A. $(1+x)^{x^2}-1$
- B. $e^{x^4-2x}-1$
- C. $\int_0^{x^2}\sin t^2 dt$
- D. $\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}$

解

A. $e^{x^2\ln(1+x)}-1 \sim x^2\ln(1+x) \sim x^3 \Rightarrow$ 最高阶3阶

B. $e^{x^4-2x}-1 \sim x^4-x^2 \Rightarrow$ 最高阶4阶

C. $\int_0^{x^2}\sin t^2 dt \sim \dfrac{x^6}{3} \Rightarrow$ 最高阶6阶

D. $\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x} = 1+\dfrac{1}{2}2x-\dfrac{1}{8}(2x)^2-[1+\dfrac{1}{3}3x-\dfrac{1}{27}(3x^2)] \sim \dfrac{1}{12}x^2 \Rightarrow$ 最高阶2阶

2. 求曲线 $y=\sqrt{x^4-3x^3+4}$ 在 $x\to+\infty$ 方向的渐进二次曲线.

解

$$\begin{aligned} \text{当}x \to +\infty,\ f(x) &= x^2\sqrt{1+\frac{4-3x^3}{x^4}} \\ &= x^2[1+\frac{4-3x^3}{2x^4}-\frac{(4-3x^3)^2}{8x^8}] \\ &= x^2-\frac{3}{2}x-\frac{9}{8}+o(\frac{1}{x}) \end{aligned}$$

原函数的渐近二次曲线为: $y = x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{8}$

July 14

1. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 n 个 n 维列向量, 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关的充要条件为:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{vmatrix} \neq 0$$

解

我们不妨设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n), A^T = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \cdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix}$, 我们可以得到:

$$|AA^T| = \begin{vmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{vmatrix} \Rightarrow |A|^2 = \begin{vmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{vmatrix}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关等价于 $|A| \neq 0$, 证毕!

2. 当 $x \to 0^+$ 时, 下列无穷小量中最高阶的是:

- A. $\int_0^{1-\cos x} \frac{\sin t}{t} dt$
- B. $\int_0^x t \tan\sqrt{x^2-t^2} dt$
- C. $\int_{\sin x}^{1-\sqrt{\cos x}} e^{xt}\ln(1+t^3) dt$
- D. $\int_{\sin x}^{x} \sqrt{\sin^3 t} dt$

解

A. $\int_0^{1-\cos x}\frac{\sin t}{t}dt\sim\int_0^{\frac{1}{2}x^2}1dt\sim\frac{1}{2}x^2\Rightarrow$ 最高阶2阶

B. 我们进行换元 $u=x^2-t^2, d(t^2)=-du$, 原积分等价于: $\int_0^{x^2}\frac{tan\sqrt{u}}{2}du\sim\frac{1}{3}x^3\Rightarrow$ 最高阶3阶

C. 我们可以得到原积分等价于: $\int_{\sin x}^{1-\sqrt{\cos x}}e^{xt}\ln(1+t^3)dt=I_1-I_2$

$$I_1=\int_0^{1-\sqrt{\cos x}}e^{xt}\ln(1+t^3)dt$$

$$I_2=\int_0^{\sin x}e^{xt}\ln(1+t^3)dt$$

由积分中值定理得到:

$I_1=e^{x\xi}\int_0^{1-\sqrt{\cos x}}\ln(1+t^3)dt\sim\frac{1}{4^5}x^8\Rightarrow$ 最高阶8阶

$I_2=e^{x\xi}\int_0^{\sin x}\ln(1+t^3)dt\sim\frac{1}{4}x^4\Rightarrow$ 最高阶4阶

$\int_{\sin x}^{1-\sqrt{\cos x}}e^{xt}\ln(1+t^3)dt\sim\frac{1}{4}x^4\Rightarrow$ 最高阶4阶

D. 由积分中值定理得到: $\int_{\sin x}^{x}\sqrt{\sin^3 t}dt=(x-\sin x)\sin^{\frac{3}{2}}\xi\sim\frac{1}{6}x^{\frac{9}{2}}, \xi\in(\sin x,x)\Rightarrow$ 最高阶$\frac{9}{2}$阶

33.3 Week III

July 15

1. 求级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)}$ 的和.

解

我们可以得到: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$

我们有:

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\Rightarrow\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}+\cdots$$

我们不妨设 $S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$, $T=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$, 我们有:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)} &= \frac{1}{2}(S-T)\\ &= \frac{1}{2}(-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n-1}+\cdots)-\frac{1}{2}(-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}+\cdots)\\ &= -\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4}-1)\\ &= \frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

泰勒级数

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1+i\theta+\frac{(i\theta)^2}{2!}+\frac{(i\theta)^3}{3!}+\cdots+\frac{(i\theta)^n}{n!}+\cdots \\
&= [1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^k\theta^{2k}}{2k}+\cdots]+i[\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^k\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots] \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\theta^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}
$$

- $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!},\ x\in\mathbb{R}$
- 欧拉公式: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

- $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!},\ x\in\mathbb{R}$
- $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x\in\mathbb{R}$
- $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x\in\mathbb{R}$
- $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x\in\mathbb{R}$

- $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n,\ x\in(-1,1)$
- $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^n,\ x\in(-1,1)$
- $\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+x}dx=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^nx^{n+1}}{n+1}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{n+1}}{n+1},\ x\in(-1,1]$
- $\ln(1-x)=-\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots]=-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1},\ x\in[-1,1)$

- $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^nx^{2n}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^{2n},\ x\in(-1,1)$
- $\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{2n+1}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{2n+1},\ x\in[-1,1]$

- $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,\ x\in(-1,1)$
- $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{(2n-1)!!}{2^nn!}x^{2n}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}x^{2n},\ x\in(-1,1)$

- $\arcsin x=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_0^x\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}x^{2n}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1},\ x\in(-1,1)$

我们还可以得到几个常用的数列和:

- $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$
- $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}=\ln 2$
- $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

2. 设 $A=(a_{ij})_{3\times3}$,A 的每行元素之和为 a, 且 $|A|=b$, 将 A 中的每个元素加 k 得到矩阵 $B=(a_{ij}+k)_{3\times3}$, 求 $|B|$

解

我们不妨设: $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}a_{11}+k&a_{12}+k&a_{13}+k\\a_{21}+k&a_{22}+k&a_{23}+k\\a_{13}+k&a_{23}+k&a_{33}+k\end{bmatrix}$

我们有:

$$|A|=a\begin{vmatrix}1&a_{12}&a_{13}\\1&a_{22}&a_{23}\\1&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}=b\Rightarrow\begin{vmatrix}1&a_{12}&a_{13}\\1&a_{22}&a_{23}\\1&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}=\frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned}|B|&=(a+3k)\begin{vmatrix}1&a_{12}+k&a_{13}+k\\1&a_{22}+k&a_{23}+k\\1&a_{23}+k&a_{33}+k\end{vmatrix}\\&=(a+3k)\begin{vmatrix}1&a_{12}&a_{13}+k\\1&a_{22}&a_{23}+k\\1&a_{23}&a_{33}+k\end{vmatrix}+(a+3k)\begin{vmatrix}1&k&a_{13}+k\\1&k&a_{23}+k\\1&k&a_{33}+k\end{vmatrix}\\&=(a+3k)\begin{vmatrix}1&a_{12}&a_{13}\\1&a_{22}&a_{23}\\1&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}+(a+3k)\begin{vmatrix}1&a_{12}&k\\1&a_{22}&k\\1&a_{23}&k\end{vmatrix}\\&=\frac{(a+3k)b}{a}\end{aligned}$$

3. 求 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$ 的和.

解

我们有:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x},\ x\in(-1,1)\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}=\frac{2}{3}$$

我们对 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n$ 求导得到:

$$\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n=\dfrac{1}{(1-x)^2}\\ \sum\limits_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)x^n=\dfrac{2}{(1-x)^3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)(-\dfrac{1}{2})^n=\dfrac{4}{9}\\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)(-\dfrac{1}{2})^n=\dfrac{16}{27}\end{cases}$$

原级数等价为:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n[(n+2)(n+1)-4(n+1)+3]}{2^n}\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n+2)(n+1)}{2^n}-4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{2^n}+3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\\&=\frac{16}{27}-4\frac{4}{9}+3\frac{2}{3}\\&=\frac{22}{27}\end{aligned}$$

July 16

1. 设 A 是 3 阶矩阵, 且满足 $|A-2E|=|A-3E|=|A-4E|=3$, 求 $|A-E|$

解

我们不妨设: $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{bmatrix}$, 我们有:

$$|A-xE|=\begin{vmatrix}a_{11}-x&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}-x&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}-x\end{vmatrix}=-x^3+bx^2+cx+d$$

又因为: $|A-2E|=|A-3E|=|A-4E|=3$, 我们不妨设 $|A-xE|=f(x)=-x^3+bx^2+cx+d$
我们可以得到: $f(x)=-(x-2)(x-3)(x-4)+3$, 因此: $f(1)=9\Rightarrow|A-E|=9$

2. 设 $f(x)$ 连续, 且 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=1$,$\alpha(x)=\int_0^{\sqrt{x}}\dfrac{\ln(1+t^4)}{f(t)}dt$,$\beta(x)=\int_0^{\sin x}\dfrac{\sqrt{1+t^3}-1}{f(t)}dt$, 则当

$x \to 0^+$ 时,$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的:

- A. 等价无穷小
- B. 同阶但非等价无穷小
- C. 高阶无穷小
- D. 低阶无穷小

解

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\frac{\ln(1+t^4)}{f(t)}dt}{\int_0^{\sin x}\frac{\sqrt{1+t^3}-1}{f(t)}dt}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x^2)}{2\sqrt{x}f(\sqrt{x})}}{\frac{\cos x[\sqrt{1+(\sin x)^3}-1]}{f(\sin x)}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)}{\sin x}\frac{\sqrt{x}}{f(\sqrt{x})}\frac{1}{x}\\
&= +\infty
\end{aligned}$$

$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的低阶无穷小.

3. 证明: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 收敛, 并求其和.

解

我们不妨设 $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, 我们可以得到:

$$x \to a_n \sim \ln n$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}}{(k+1)(k+2)}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k+1)(k+2)}\\
&= \frac{a_1}{2}-\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3}-\frac{a_2}{4}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}\\
&= \frac{a_1}{2}+\frac{a_2-a_1}{3}+\cdots+\frac{a_n-a_{n-1}}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}\\
&= \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}-\frac{a_n}{n+2}\\
&= 1-\frac{1}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to+\infty}S_n = \lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n+1}-\frac{\ln n}{n+2}) = 1$$

原级数收敛, 其和 $S=1$.

July 17

1. 当 $x \to 0$ 时,$2\arctan x - \ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 是 x 的 n 阶无穷小, 求 n.

解

利用泰勒展开式将函数展开:

$$\begin{cases} \arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3) \\ \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3) \\ \ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \to 0, f(x) &= 2\arctan x - \ln(1+x) + \ln(1-x) \\ &= 2(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)) - (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)) - (x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)) \\ &= -\frac{4}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

综上所述, 我们可以得到: $n=3$.

2. 关于函数 $f(x,y) = \begin{cases} xy,\ xy \neq 0 \\ x,\ y=0 \\ y,\ x=0 \end{cases}$, 下列结论正确的是:

- A. $\dfrac{\partial f}{\partial x}|_{(0,0)} = 1$
- B. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}|_{(0,0)} = 1$
- C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$
- D. $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = 0$

解

$A.\ \dfrac{\partial f}{\partial x}|_{(0,0)} \lim\limits_{x\to 0+\infty} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 1$

$B. \dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,y)} = \begin{cases} 1,\ y=0 \\ \text{不存在},\ y \neq 0 \end{cases}$

$C.\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

$D.\ \lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \begin{cases} xy=0,\ x\neq 0 \\ y=0,\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = 0$

3. 求 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{x^{2n+2}}{n+1}$ 的和函数 $S(x)$

解

我们先求收敛区间:

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=x^2<1\Rightarrow x\in(-1,1)$$

我们对 $S(x)$ 求导得到:

$$S'(x)=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}=2f(x)$$

我们再对 $f(x)$ 求导:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}\\
&= 1+x[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}]\\
&= 1+x[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}]'\\
&= 1+x[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+2}]'\\
&= 1+x[x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}]'\\
&= 1+x[xf(x)]'\\
&= 1+x[f(x)+xf'(x)]\\
&= 1+xf(x)+x^2f'(x)
\end{aligned}$$

我们得到:

$$f'(x)-\frac{x}{1-x^2}f(x)-\frac{1}{1-x^2}=0$$

我们解出

$$f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow S(x)=2\int_0^x f(x)dx+S(0)=(\arcsin x)^2$$

当 $x=\pm1$ 时, 我们需要判断级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{1}{n+1}$ 的敛散性:

我们有:

$$\begin{cases} 2\times 4\le 3^3 \\ 4\times 6\le 5^2 \\ \cdots \\ (2n-2)\times 2n\le (2n)^2 \\ (2n)\times(2n+2)\le(2n+1)^2 \end{cases} \Rightarrow [(2n)!!]^2\le(n+1)[(2n+1)!!]^2 \Rightarrow \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\le\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

我们得到: $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{1}{n+1}\le\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$, 由比较判别法可知, 级数收敛.

综上所述, 我们得到: $S(x)=(\arcsin x)^2,\ x\in[-1,1]$

July 18

1. 当 $x\to 0^+$ 时,$(1+x)^{\frac{1}{x}}-(e+ax+bx^2)$ 是比 x^2 高阶的无穷小, 求 a,b

解

我们利用泰勒展开得到:

$$\begin{aligned} x\to 0^+, f(x) &= e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-(e+ax+bx^2) \\ &= e(1+\frac{\ln(1+x)-x}{x}+\frac{[\ln(1+x)-x]^2}{2x^2}+o(x^2))-(e+ax+bx^2) \\ &= (-a-\frac{e}{2})x+(\frac{11e}{24}-b)x^2+o(x^2) \end{aligned}$$

我们得到: $\begin{cases} a=-\frac{e}{2} \\ b=\frac{11e}{24} \end{cases}$

综上所述, 我们得到: $a=-\frac{e}{2},\ b=\frac{11e}{24}$

2. 设 $f(x)$ 二阶可导,$f(0)=0$, 证明: $\exists\xi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\ s.t. f''(\xi)=3f'(\xi)\tan\xi+2f(\xi)$.

解

我们构造辅助函数: $F(x)=f(x)\cos^2 x$

我们得到: $F(-\frac{\pi}{2})=F(0)=F(\frac{\pi}{2})=0$

$$\begin{cases} G(x)=f'(x)\cos x-2\sin x f(x) \\ F'(x)=f'(x)\cos^2 x-2\sin x\cos x f(x)=\cos x G(x) \end{cases} \Rightarrow G'(x)=f''(x)\cos x-3f'(x)\sin x-2\cos x f(x)$$

我们对 $F(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},0)$ 和 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上使用罗尔定理得到:

$$\begin{cases} \exists\xi_1\in(-\frac{\pi}{2},0),\ s.t.F'(\xi_1)=\xi_1 G(\xi_1)=0 \\ \exists\xi_2\in(0,\frac{\pi}{2}),\ s.t.F'(\xi_2)=\xi_2 G(\xi_2)=0 \end{cases}$$

我们对 $G(x)$ 在 (ξ_1,ξ_2) 上使用罗尔定理得到:

$\exists\eta\in(\xi_1,\xi_2),\ s.t.G'(\eta)=f''(\eta)\cos\eta-3f'(\eta)\sin\eta-2\cos\eta f(\eta)=0\Rightarrow f''(\eta)=3f'(\eta)\tan\eta+2f(\eta)$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\ s.t.f''(\xi)=3f'(\xi)\tan\xi+2f(\xi)$.

July 19

1. 设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$, 求 a,b,c

解

我们由泰勒展开式:

$$\begin{cases}\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)\\ \dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+o(x^3)\end{cases}$$

我们可以得到:

$$\begin{aligned}x\to0,f(x)&=\frac{\sin x}{1+x^2}\\&=(x-\frac{x^3}{6})(1-x^2)\\&=x-\frac{7}{6}x^3+o(x^3)\end{aligned}$$

我们得到: $\begin{cases}a=1\\ b=0\\ c=-\dfrac{7}{6}\end{cases}$

2. 求极限 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{(1+x)^{\frac{1}{x}}}-(1+x)^{\frac{e}{x}}}{x^2}$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to0}e^{\frac{e\ln(1+x)}{x}}\frac{e^{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-\frac{e\ln(1+x)}{x}}-1}{x^2}\\&=e^{e+1}\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x}}-\frac{\ln(1+x)-x}{x}-1}{x^2}\\&=e^{e+1}\lim_{x\to0}\frac{\frac{(\ln(1+x)-x)^2}{2x^2}}{x^2}\\&=\frac{e^{e+1}}{8}\end{aligned}$$

July 20

1. 设函数 $f(x)=\sec x$ 在 $x=0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $1+ax+bx^2$, 求 a,b

解

我们有:

$$\sec x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nE_{2n}}{(2n)!}x^{2n}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+\cdots,\ x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$$

我们可以知道: $\begin{cases} a=0\\ b=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

2. 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 二阶导数连续, 证明: $\exists\xi\in[-1,1],\ s.t.\int_{-1}^{1}xf(x)dx=\dfrac{2f'(\xi)+\xi f''(\xi)}{3}$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=\int_0^x tf(t)dt$,$F(0)=F'(0)=0$, 我们有:

$$\begin{cases} F'(x)=xf(x)\\ F''(x)=f(x)+xf'(x)\\ F'''(x)=2f'(x)+xf''(x)\end{cases}$$

原命题等价于: $\exists\xi\in[-1,1],\ s.t.F(1)-F(-1)=\dfrac{1}{3}F'''(\xi)$

我们将 $F(x)$ 在 $x=0$ 处进行泰勒展开:

$$F(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{F''(0)}{2}x^2+\frac{F'''(\xi)}{6}x^3,\ \xi\in(0,x)$$

我们有:

$$\begin{cases} F(1)=\dfrac{F''(0)}{2}+\dfrac{F'''(\xi_1)}{6}\\ F(-1)=\dfrac{F''(0)}{2}-\dfrac{F'''(\xi_2)}{6}\end{cases}\Rightarrow F(1)-F(-1)=\frac{1}{3}\frac{F'''(\xi_1+F'''(\xi_2))}{2}$$

我们由 $F'''(x)$ 连续, 由介值定理可以知道:

$$\exists\eta\in(-1,1),\ s.t.\frac{F'''(\xi_1)+F'''(\xi_2)}{2}\Rightarrow\exists\xi\in[-1,1],\ s.t.F(1)-F(-1)=\frac{1}{3}F'''(\eta)$$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi\in[-1,1],\ s.t.\int_{-1}^{1}xf(x)dx=\dfrac{2f'(\xi)+\xi f''(\xi)}{3}$

33.4 Week IV

July 21

1. 函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)|x-1|}{e^{\frac{1}{x-2}}\ln|x|}$ 的可去间断点个数.

解

我们发现可能的间断点为 $x=0,\ x=1,\ x=-1,\ x=2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=e^{\frac{1}{2}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\ln x}=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=e^{\frac{1}{2}}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{\ln(-x)}=0 \end{cases} \Rightarrow x=0\text{是}f(x)\text{的可去间断点}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2e\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{\ln x}=2e \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2e\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x}{\ln(-x)}=-2e \end{cases} \Rightarrow x=1\text{不是}f(x)\text{的可去间断点}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=2e^{\frac{1}{3}}\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x+1}{\ln(-x)}=-2e^{\frac{1}{3}} \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=2e^{\frac{1}{3}}\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1+x}{\ln(-x)}=-2e^{\frac{1}{3}} \end{cases} \Rightarrow x=-1\text{是}f(x)\text{的可去间断点}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\dfrac{3}{\ln 2}\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{+\infty}=0 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\dfrac{3}{\ln 2}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{0}=+\infty \end{cases} \Rightarrow x=2\text{不是}f(x)\text{的可去间断点}$$

综上所述,$f(x)$ 的可去间断点有两个, 分别为 $x=0,\ x=-1$

July 22

1. 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,$f(x)$ 为连续函数,$\varphi(x)$ 有间断点, 下列命题正确的是:

- A. $f(x)[|\varphi(x)|+\varphi^2(x)]$ 必有间断点
- B. 若 $f(x)$ 单调, 则 $\dfrac{\varphi(x)}{|f(x)|}$ 必有间断点
- C. $\dfrac{\varphi(x)}{1+f^2(x)}$ 必有间断点
- D. $f(x)\varphi(x)$ 必有间断点

解

我们知道:

$$f(x)\text{有间断点}\nRightarrow |f(x)|\text{有间断点},\ |f(x)|\text{有间断点}\Rightarrow f(x)\text{有间断点}$$

我们知道 $|\varphi(x)|$ 不一定有间断点, 令 $f(x)=0\Rightarrow f(x)g(x)$ 连续不存在间断点, 我们可以得到 A,D 错误.

我们知道 $f(x)$连续 $\Rightarrow |f(x)|$连续, 我们不妨假设: $\dfrac{\varphi(x)}{|f(x)|}$ 连续, 我们知道连续函数之积仍然是连续函数, 我们得到: $\varphi(x)$ 连续, 矛盾!!!

对于 C 选项, 我们同理假设 $\dfrac{\varphi(x)}{1+f^2(x)}$ 连续, 我们知道 $1+f^2(x)$ 连续, 我们得到: $\varphi(x)$ 连续, 矛盾!!!

2. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是 n 阶矩阵 A 的 m 个两两互异的特征值 $(m\le n)$, 对应的特征向量分

别为 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$, 令 $\eta = \sum_{k=1}^{m} \xi_k$, 证明:

$$\eta, A\eta, A^2\eta, \cdots, A^{m-1}\eta \text{线性无关}$$

解

我们由:

$$\begin{cases} A\xi_1 = \lambda_1\xi_1 \\ A\xi_2 = \lambda_2\xi_2 \\ \cdots \\ A\xi_m = \lambda_m\xi_m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \eta = \sum_{k=1}^{m} \xi_k \\ A\eta = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\xi_k \\ A^2\eta = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^2\xi_k \\ \cdots \\ A^{m-1}\eta = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^{m-1}\xi_k \end{cases}$$

我们不妨假设矩阵 $C = [\eta, A\eta, \cdots, A^{m-1}\eta]$, 我们有:

$$C = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m] \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{bmatrix}$$

我们可以知道 $C = DB$, 其中 D 为列满秩矩阵,B 为范德蒙矩阵.

我们有 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 两两互异, 我们得到 $|B| \neq 0$,B 为可逆矩阵, 我们得到: $r(C) = r(D)$,$D = [\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m]$ 线性无关, 因此我们得到:

$$\eta, A\eta, A^2\eta, \cdots, A^{m-1}\eta \text{线性无关}$$

July 23

1. 设 $f(x) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n} + x^{2n}}}$, 则 $f(x)$ 在其定义域内:

- A. 连续
- B. 有 1 个可去间断点
- C. 有 1 个跳跃间断点
- D. 有 1 个第二类间断点

解

我们首先得到:

$$f(x)=\begin{cases}0,\ -2<x<2\\ 2\sqrt{2},\ x=2\\ x^2,\ x>2\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $(-\infty,-2]$ 上没有定义, 在 $(-2,+\infty)$ 上有且仅有一个间断点 $x=2$, 且为跳跃间断点.

2. 求积分 $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}}(\frac{e^x}{x}-\frac{e^{y^2}}{\sqrt{x}})dy$

解

原二重积分等价于:

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1\frac{e^x}{\sqrt{x}}dx-\int_0^1 dy\int_{y^2}^1\frac{e^{y^2}}{\sqrt{x}}dx\\ &= \int_0^1\frac{e^x}{\sqrt{x}}dx-\int_0^1 2e^{y^2}dy+e^{y^2}|_{y=0}^{y=1}\\ &= \int_0^1 2e^{t^2}dt-\int_0^1 2e^{y^2}dy+e-1\\ &= e-1\end{aligned}$$

July 24

1. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$, 则函数 $f(x)$:

- A. 仅有 1 个间断点
- B. 仅有 2 个间断点, 其中 1 个可去,1 个无穷
- C. 仅有 2 个间断点,2 个都是跳跃
- D. 有 2 个跳跃间断点和 1 个可去间断点

解

我们可以知道:

$$f(x)=\begin{cases}x^2,\ |x|>1\\ 0,\ |x|=0\\ -1,\ 0<|x|<1\end{cases}$$

我们知道 $f(x)$ 有 3 个间断点, 其中 $x=0$ 是可去间断点;$x=1$ 和 $x=-1$ 是两个跳跃间断点.

2. $\int_0^1\dfrac{x^b-x^a}{\ln x}dx$

解

原积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\ln x} dx \int_a^b (\ln x) x^y dy \\ &= \int_a^b dx \int_0^1 x^y dx \\ &= \int_a^b \frac{1}{y+1} \\ &= \ln |\frac{b+1}{a+1}| \end{aligned}$$

3. $\int_0^1 \sin(\ln \frac{1}{x}) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$

解

原积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= -\int_0^1 \sin(\ln x) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \\ &= -\int_0^1 \frac{\sin(\ln x)}{\ln x} dx \int_a^b (\ln x) x^y dy \\ &= -\int_0^1 dx \int_a^b \sin(\ln x) x^y dy \\ &= -\int_a^b dy \int_{-\infty}^0 e^{(y+1)t} \sin t dt \\ &= -\int_a^b \frac{\begin{vmatrix} (y+1)e^{(y+1)t} & \cos t \\ e^{(y+1)t} & \sin t \end{vmatrix}}{1 + (1+y)^2} \Big|_{t=0}^{t=-\infty} dy \\ &= \int_a^b \frac{1}{1 + (y+1)^2} dy \\ &= \arctan(y+1) \Big|_{y=a}^{y=b} \\ &= \arctan(b+1) - \arctan(a+1) \end{aligned}$$

July 25

1. 设 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, 且 $\dfrac{f(x) - 2x}{e^{x-1} - 1} - \dfrac{1}{\ln x}$ 在 $x = 1$ 的某去心邻域有界, 求 $f(1)$

解

我们由题意可得:

$$\lim_{x\to1}[\frac{f(x)-2x}{e^{x-1}-1}-\frac{1}{\ln x}](e^{x-1}-1)=0$$

上述极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to1}[f(x)-2x-\frac{e^{x-1}-1}{\ln x}] \\ &= \lim_{x\to1}(f(x)-2x)-1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

我们知道:

$$\lim_{x\to1}[f(x)-2x]=1\Rightarrow\lim_{x\to1}f(x)=3$$

综上所述,$f(1)=3$.

2. 设 α,β 均为 3 维单位列向量,$\alpha^T\beta=\frac{1}{2}$,$A=\alpha\beta^T+\beta\alpha^T$, 求二次型 x^TAx 在正交变换下的标准型.

解

我们由: $\alpha^T\beta=\frac{1}{2}$,$A=\alpha\beta^T+\beta\alpha^T$ 可以得到:

$$\begin{cases} A\alpha=\frac{1}{2}\alpha+\beta \\ A\beta=\alpha+\frac{1}{2}\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}(\alpha+\beta) \\ A(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}(\alpha-\beta) \end{cases}$$

我们可以知道: 矩阵 A 有两个特征向量 $\lambda_1=\frac{3}{2}$, $\lambda_2=-\frac{1}{2}$.

我们有 $r(\alpha\beta^T)=r(\beta\alpha^T)=1\Rightarrow r(A)\le r(\alpha\beta^T)+r(\beta\alpha^T)=2$

我们由 $r(A)\le2\Rightarrow|A|=0\Rightarrow\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0$

我们可得到 A 的三个特征值为 $\lambda_1=\frac{3}{2}$, $\lambda_2=-\frac{1}{2}$, $\lambda_3=0$.

综上所述, 二次型 $f=x^TAx$ 的标准型为 $f=\frac{3}{2}y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2$.

变式

$A=\alpha\beta^T$, 求二次型 $f=x^TAx$ 在正交变换下的标准型.

解

我们首先要求出二次型对应的矩阵 B, 我们有: $f^T=f\Rightarrow x^TA^Tx=B^T$

我们得到: $B=\dfrac{A+A^T}{2}=\dfrac{\alpha\beta^T+\beta\alpha^T}{2}$

我们有:

$$\begin{cases} B\alpha = \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{2}\beta \\ B\beta = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(\alpha+\beta) = \frac{3}{4}(\alpha+\beta) \\ B(\alpha-\beta) = -\frac{1}{4}(\alpha-\beta) \end{cases}$$

我们可以知道: 矩阵 B 有两个特征向量 $\lambda_1 = \frac{3}{4}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$.
我们有 $r(\alpha\beta^T) = r(\beta\alpha^T) = 1 \Rightarrow r(B) \le r(\alpha\beta^T) + r(\beta\alpha^T) = 2$
我们由 $r(B) \le 2 \Rightarrow |B| = 0 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$
我们可得到 A 的三个特征值为 $\lambda_1 = \frac{3}{4}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$, $\lambda_3 = 0$.
综上所述, 二次型 $f = x^TAx$ 的标准型为 $f = \frac{3}{4}y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2$.

July 26

1. 已知函数 $f(x) = \dfrac{(x^2+a^2)(x-1)}{e^{\frac{1}{x}}+b}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有一个可去间断点和一个跳跃间断点, 求 a, b

解

我们发现 $f(x)$ 的间断点为 $x=0$ 和 $x = \dfrac{1}{\ln(-b)}$, 我们有:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\dfrac{a^2}{b} \end{cases} \quad a \ne 0 \Rightarrow x = 0\text{是}f(x)\text{跳跃间断点}$$

我们进而得到 $x = \dfrac{1}{\ln(-b)}$ 是 $f(x)$ 可去间断点, 我们得到:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\ln(-b)^+} f(x) = \dfrac{\ln^2(-b)+a^2}{-b} \lim\limits_{x\to\ln(-b)^+} \dfrac{x-1}{x-\ln(-b)} = a \\ \lim\limits_{x\to0\ln(-b)^-} f(x) = \dfrac{\ln^2(-b)+a^2}{-b} \lim\limits_{x\to\ln(-b)^-} \dfrac{x-1}{x-\ln(-b)} = a \end{cases} \Rightarrow b = -e$$

综上所述,$a \ne 0$, $b = -e$

2. 求不定积分 $\int \dfrac{x^2(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}+1)}e^x dx$

解

原不定积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+1)}{\sqrt{1+x^2}}e^x dx \\
&= \int (\sqrt{x^2+1}-x+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1)e^x dx \\
&= \int (g(x)+g'(x))e^x dx \\
&= e^x g(x)+C \\
&= e^x(\sqrt{x^2+1}-x)+C
\end{aligned}
$$

July 27

1. 函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$,判断 $x=0$ 处连续性、可导性以及极值情况.

解

首先判断连续性:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=1=f(0)\Rightarrow f(x)\text{在}x=0\text{处连续}$$

可导性:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}, & x\neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & x=0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f'(0)=\frac{1}{2}=f'(0)$$

我们得到 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续可导, 且导函数连续.

2. $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ 是实对称矩阵,A 的每行元素之和为 0, 设 2,3 是 A 的非零特征值, 求 a_{11} 对应的代数余子式.

解

我们可以知道矩阵 A 的三个特征值分别为 0,2,3, 其中特征值 0 对应的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

我们根据 A^* 和 A 特征值和特征向量之间的关系可以知道 A^* 的三个特征值分别为 6,0,0,

其中特征值 6 对应的特征向量为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

对于 A^*, 我们根据谱分解定理可以得到: $A^* = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i G_i = 6e_1^T e_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

综上所述: a_{11} 对应的代数余子式 $A_{11} = A_{11}^* = 2$.

July 28

1. 下列函数在 $x = 0$ 处不可导的是:

- A. $\int_0^x (|t| + t)dt$
- B. $|x|[x + \int_0^{|x|} e^{t^2} dt]$
- C. $|\tan x - \sin x|$
- D. $\sin|x| + \cos|x|$

解

$$A.\ f(x) = \begin{cases} x^2,\ x \geq 0 \\ 0,\ x < 0 \end{cases} \quad f(x)在x = 0处可导$$

$$B. \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{cases} \quad f(x)在x = 0处可导$$

$$C. \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{cases} \quad f(x)在x = 0处可导$$

$$D. \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \end{cases} \quad f(x)在x = 0处不可导$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 内可导, 证明:

$$存在互不相同的\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n \in (a, b),\ s.t.\ f'(\xi_1)f'(\xi_2)\cdots f'(\xi_n) = \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right]^n$$

解

我们构造辅助函数 $F(x) = [f(x) - f(a)]^n$, $G(x) = [x - a]^n$, 我们有 $F(a) = G(a) = 0$

我们由柯西中值定理可以得到:

$$\exists \xi_1 \in (a, b),\ s.t. \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} \Rightarrow \frac{f'(\xi_1)\,[f(\xi_1) - f(a)]^{n-1}}{(\xi_1 - a)^{n-1}} = \frac{[f(b) - f(a)]^n}{(b - a)^n}$$

我们继续构造辅助函数 $H(x) = [f(x) - f(a)]^{n-1}$，$J(x) = [x-a]^{n-1}$，我们有 $H(a) = J(a) = 0$

我们由柯西中值定理可以得到:

$$\exists \xi_2 \in (\xi_1, b),\ s.t. \frac{H'(\xi_2)}{J'(\xi_2)} = \frac{F(\xi_1) - F(a)}{G(\xi_1) - G(a)} \Rightarrow \frac{f'(\xi_2)\left[f(\xi_{\xi_2}) - f(a)\right]^{n-2}}{(\xi_2 - a)^{n-2}} = \frac{[f(\xi_1) - f(a)]^{n-1}}{(\xi_1 - a)^{n-1}}$$

$$\cdots\cdots$$

我们构造辅助函数 $P(x) = f(x) - f(a)$，$Q(x) = x - a$，我们有 $P(a) = Q(a) = 0$ 我们由拉格朗日中值定理可以得到:

$$\exists \xi_n \in (\xi_{n-1}, b),\ s.t. f'(\xi_n) = \frac{f(\xi_{n-1}) - f(a)}{\xi_{n-1}}$$

我们将上面 n 个式子相乘可以得到:

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2)\cdots f'(\xi_n) = \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right]^n$$

综上所述，我们得到:

$$\text{存在互不相同的}\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n \in (a, b),\ s.t.\ f'(\xi_1)f'(\xi_2)\cdots f'(\xi_n) = \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right]^n$$

July 29

1. 已知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内有定义，且 $\lim_{x\to 0}\varphi(x) = 0$，则 $\lim_{x\to 0}\frac{f[\varphi(x)] - f(0)}{\varphi(x)}$ 存在和 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导之间关系

解

(1). 必要性

$f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = A \Rightarrow \lim_{\varphi(x)\to 0}\frac{f[\varphi(x)] - f(0)}{\varphi(x)} = A$$

当 $\varphi(x) \equiv 0$ 时，充分性不成立.

(2). 充分性

我们不妨取 $\varphi(x) = |x|$，我们可以得到:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f[\varphi(x)] - f(0)}{\varphi(x)} = A \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'_+(0)$$

充分性不成立.

综上所述，$\lim_{x\to 0}\frac{f[\varphi(x)] - f(0)}{\varphi(x)}$ 存在是 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的既不充分也不必要条件.

2. 设存在连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = 1 + \lambda\int_x^1 f(y)f(y-x)dy$，证明: $\lambda \le \frac{1}{2}$

解

我们对等式两边分别在区间 $[0,1]$ 上取定积分得到:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= 1+\lambda\int_0^1[\int_x^1 f(y)f(y-x)dy]dx \\ &= 1+\lambda\int_0^1[f(y)\int_0^y f(y-x)dx]dy \\ &= 1+\lambda\int_0^1[f(y)\int_0^y f(x)dx]dy \\ &= 1+\lambda\int_0^1[\int_0^y f(x)dx]d(\int_0^y f(x)dx) \\ &= 1+\frac{\lambda}{2}[\int_0^1 f(x)dx]^2\end{aligned}$$

我们不妨记 $A=\int_0^1 f(x)dx$, 我们可以得到:

$$A=1+\frac{\lambda}{2}A^2\text{在}\mathbb{R}\text{上有实数根}\Rightarrow 1-2\lambda\geq 0\Rightarrow\lambda\leq\frac{1}{2}$$

July 30

1. 已知 $f(x)$ 为奇函数, 则 $f'_+(0)$ 存在和 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导关系

解

(1). 充分性

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=A\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}f(x)=0$$

我们可以得到:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(-x)-f(0)}{-x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-f(x)-f(0)}{-x}=A$$

我们得到:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=A$$

充分性成立

(2). 必要性

$$f(x)\text{在}x=0\text{处可导}\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=A$$

必要性成立

综上所述,$f'_+(0)$ 存在是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件.

2. 求 $\int_0^1 dx\int_{1-x}^{2-x}e^{(x+y)^2}(\sin^2 x+\cos^2 y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x}e^{(x+y)^2}(\sin^2 x+\cos^2 y)dy$

解

我们画出二重积分的积分区域, 不难发现积分区域关于直线 $y = x$ 对称, 原二重积分等价于:

$$I = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{2-x} e^{(y+x)^2}(\sin^2 y + \cos^2 x)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} e^{(y+x)^2}(\sin^2 y + \cos^2 x)dy$$

我们得到:

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^1 dx \int_{1-x}^{2-x} 2e^{(x+y)^2}dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} 2e^{(x+y)^2}dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}} 2re^{r^2(1+\sin 2\theta)}dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^4 - e}{1+\sin 2\theta}d\theta \\ I &= \frac{e^4-e}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2\theta}}{(1+\tan\theta)^2}d\theta \\ &= \frac{e^4-e}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}dx \\ &= \frac{e^4-4}{2} \end{aligned}$$

July 31

1. 已知函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的邻域内可导, 则 $f'(x_0) > 0$ 是 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某邻域内单调递增之间关系

解

(1). 充分性

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A > 0$$

我们可以得出,$x \in (x_0 - \delta, x_0), f(x) < f(x_0); x \in (x_0, x_0 + \delta), f(x) > f(x_0)$, 并不能得出函数的单调性.

(2). 必要性

$f(x)$ 在某邻域内单调递增, 我们只能得出 $f'(x_0) \geq 0$

综上所述,$f'(x_0) > 0$ 是 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某邻域内单调递增的既不充分也不必要条件.

2. $I_n = \int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{t-1}}{t^n}dt \ (n \geq 2)$, 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}$

解

我们令 $t=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$, $dt=\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$, 我们可以得到:

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x}\cos^{2n}x\frac{2\sin x}{\cos^3 x}dx\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-4}xdx-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}xdx\end{aligned}$$

由此我们可以得到:

$$\begin{cases}I_{n+1}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}xdx-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}xdx\\ I_n=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-4}xdx-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}xdx\end{cases}$$

我们得到:

$$\frac{I_{n+1}}{I_n}=\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}xdx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}xdx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-4}xdx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}xdx}$$

我们计算:

$$\begin{aligned}J_{2n} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}xdx\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-1}xd\sin x\\ &= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^{2n-2}xdx\\ &= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}xdx-(2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}xdx\\ &= (2n-1)J_{2n-2}-(2n-1)J_{2n}\\ J_{2n} &= \frac{2n-2}{2n}J_{2n-2}\end{aligned}$$

我们得到:

$$\frac{I_{n+1}}{I_n}=\frac{J_{2n-2}-J_{2n}}{J_{2n-4}-J_{2n-2}}=\frac{\frac{2}{2n}J_{2n-2}}{\frac{2}{2n-2}J_{2n-4}}=\frac{n-1}{n}\frac{2n-4}{2n-2}=\frac{n-2}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n-2}{n}=1$$

第 34 章 August

34.1 Week I

August 1

1. 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某个邻域内有定义, 下列命题中正确的个数:

- A. 若 $f'(x_0)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续
- B. 若 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续
- C. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x), \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续
- D. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续

解

A. 导函数存在, 原函数连续, 正确

B. 左右导数存在, 我们得到:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A \\ \lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = B \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

C、*D* 我们取 $f(x) = sign(x) = \begin{cases} 1,\ x>0 \\ 0,\ x=0 \\ -1,\ x<0 \end{cases}$, 此时 $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 0$, 函数在 $x=x_0$ 处间断.

综上所述, 上述命题正确的个数为 2 个.

2. A 为 3 阶实对称矩阵, 特征值为 $0,1,1$, 且 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\a\\0\end{pmatrix}$,$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix}$ 是 A 的两个不同的特征向量, 若 $A(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_2$, 求矩阵 A

解

(1). 我们可以得到:

α_1 是矩阵 A 特征值 0 对应的特征向量; α_2 是矩阵 A 特征值 1 对应的特征向量.

(2). 我们知道实对称矩阵不同特征值对应的特征向量是正交的 $\Rightarrow \alpha_1^T\alpha_2=0 \Rightarrow a=1$

(3). 根据谱分解定理, 我们可以得到: $A=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i G_i$

我们发现矩阵 $A-E$ 更好求, 因为矩阵 $A-E$ 的特征值为 $-1,0,0$, 因此 $A-E=-G_1=-e_1e_1^T$, 我们得到:

$$\begin{cases} A=E-e_1e_1^T \\ e_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\end{cases} \Rightarrow A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

August 2

1. 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sqrt{\dfrac{(1+x^2)\sqrt{x}}{e^{x-1}}}+\arctan\dfrac{x^2-1}{\sqrt{1+x^2}}$ 在点 $(1,\sqrt{2})$ 处相切, 求 $\lim\limits_{x\to1}(f(x)+1-\sqrt{2})^{\frac{1}{\ln x}}$

解

原极限可以化为:

$$\begin{aligned} I &= e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(f(x)+1-\sqrt{2})}{\ln x}} \\ &= e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-\sqrt{2}}{x-1}} \\ &= e^{\lim\limits_{x\to1} f'(x)} \end{aligned}$$

我们有:

$$\begin{cases} g(x)=\sqrt{\dfrac{(1+x^2)\sqrt{x}}{e^{x-1}}} \\ h(x)=\arctan\dfrac{x^2-1}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln(g(x)) = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}\ln x + \ln(1+x^2) - x + 1] \\ h'(1) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{g'(1)}{g(1)} = \frac{1}{2}[\frac{1}{2x} + \frac{2x}{1+x^2} - 1]|_{x=1} = \frac{1}{4} \\ g'(1) = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ h'(1) = \sqrt{2} \end{cases}$$

我们由 $f'(1) = g'(1) + h'(1) = \frac{5\sqrt{2}}{4}$, 我们得到原极限 $I = e^{\frac{5\sqrt{2}}{4}}$

2. 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + mx_3)(2x_1 + 3x_2 + nx_3)$ 的正惯性指数

解

我们令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + mx_3 \\ y_2 = 2x_1 + 3x_2 + nx_3 \\ y_3 = ax_1 + bx_2 + bx_3 \end{cases}$ 可以得到二次型 $g(y_1, y_2, y_3) = y_1y_2$

我们再令 $\begin{cases} z_1 = y_1 + y_2 \\ z_2 = y_1 - y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$ 可以得到二次型 $h(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - z_2^2$

我们作的线性变换 $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & 3 & n \\ a & b & c \end{bmatrix}$ 和 $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 均为可逆线性变换, 二次型 f 和二次型 h 为合同二次型, 具有相同的正惯性指数和负惯性指数.

综上所述, 原二次型的正惯性指数为 1.

August 3

1. 确定函数 $g(x) = |x^3 - x - \sin x|$ 不可导的点的个数

解

我们知道, 对于连续函数 $f(x)$, 当 $f(x) \neq 0$ 时,$f(x)$ 可导,$|f(x)|$ 也可导; 当 $f(x) = 0$ 时, 当且仅当 $f'(x) = 0$ 时,$|f(x)|$ 可导.

我们已知 $f(x) = x^3 - x - \sin x$ 在 $x \in \mathbb{R}$ 处处可导, 当 $f(x) \neq 0$ 时,$g(x) = |f(x)|$ 可导, 我们只需要关注 $f(x) = 0$ 处的导函数值是否为 0.

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - x - \sin x \\ f'(x) = 3x^2 - 1 - \cos x \\ f''(x) = 6x + \sin x \\ f'''(x) = 6 + \cos x > 0 \end{cases}$$

我们知道:

$f''(x)$ 单调递增,$f''(0) = 0$, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时,$f''(x) < 0$; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时,$f''(x) > 0$.

我们得到:

$f'(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减; 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增 $\Rightarrow f'(x)_{min} = f'(0) = -2 < 0$

我们取 $a = -\dfrac{\pi}{2}$, $b = \dfrac{\pi}{2}$, 我们有: $\begin{cases} f'(a) = \dfrac{3}{4}\pi^2 - 1 > 0 \\ f'(b) = \dfrac{3}{4}\pi^2 - 1 > 0 \end{cases}$

我们得到: $\exists x_1 \in (a, 0)$, $x_2 \in (0, b)$, $s.t. f'(x_1) = f'(x_2) = 0$

我们得到: $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, $f'(x) > 0$;$x \in (x_1, x_2)$, $f'(x) < 0$.

$f(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 单调递增;(x_1, x_2) 单调递减;$(x_2, +\infty)$ 单调递减, 其中 $x_1 < 0 < x_2$

我们有 $\begin{cases} f(a) < 0 \\ f(0) = 0 \\ f(b) > 0 \end{cases}$,我们得到:

$$\exists 唯一的 \xi_1 \in (a, 0), \xi_2 \in (0, b), s.t.\ f(\xi_1) = f(\xi_2) = f(0) = 0$$

此时对应 $f'(x)$ 均不为 0, 我们可以得到 $g(x)$ 不可导的点有 3 个: $x = \xi_1$, $x = 0$, $x = \xi_2$.

2. 设 A 为 n 阶矩阵,n 维列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 是方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, 若存在 β_i, 使得 $A\beta_i = \alpha_i$, $(i = 1, 2, \cdots, t)$, 分析下列命题正确的个数

- (1). 向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性无关
- (2). 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性无关
- (3). 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 均是方程组 $A^2x = 0$ 的解
- (4). 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 均是方程组 $A^2x = 0$ 的基础解系

解

(1). 我们令 $C = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t)$,$B = \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$, 我们有 $AB = C$

我们根据 $rank(AB) \leq min\{rank(A), rank(B)\}$, 我们可以得到: $rank(A) \geq rank(C), rank(B) \geq rank(C) \Rightarrow rank(B) \geq t$, 又因为矩阵 B 有 t 列,$rank(B) \leq t$, 矩阵 B 是列满秩矩阵, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性无关

(2). 我们假设存在不全为 0 的数 $l_1, l_2, \cdots, l_t, r_1, r_2, \cdots, r_t$, 使得:

$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_t\alpha_t + r_1\beta_1 + r_2\beta_2 + \cdots + r_t\beta_t = 0$$

上面的式子同时左乘 A 得到:

$$r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \cdots + r_t\alpha_t = 0$$

由于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 线性无关, 我们可以知道: $r_1 = r_2 = \cdots = r_t = 0$.

原式子化为: $\exists$不全为0的数$l_1, l_2, \cdots, l_t, s.t.\ l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_t\alpha_t = 0$

由于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 线性无关, 我们可以知道: $l_1 = l_2 = \cdots = l_t = 0$.

综上所述, 我们得到: $l_1 = l_2 = \cdots = l_t = r_1 = r_2 = \cdots = r_t = 0$, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性无关.

(3). $\begin{cases} A\alpha_i = 0 \\ A\beta_i = \alpha_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(A\alpha_i) = 0 \\ A(A\alpha_i) = A\beta_i = 0 \end{cases}$

我们可以得到: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 均是方程组 $A^2x = 0$ 的解

(4). 由 (2), (3) 可以知道 $A^2x = 0$ 至少存在 $2t$ 个线性无关的解, 我们可以推出 $n - rank(A^2) \geq 2t$, 我们有 $ran(AB) \geq rank(A) + rank(B) - n$, 结合起来我们有:

$$\begin{cases} n - rank(A^2) \geq 2t \\ rank(A^2) \geq 2(n-t) - n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} rank(A^2) \leq n - 2t \\ rank(A^2) \geq n - 2t \end{cases} \Rightarrow rank(A^2) = n - 2t$$

方程组 $A^2x = 0$ 基础解析向量个数为 $r = n - rank(A^2) = 2t$, 因此向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 均是方程组 $A^2x = 0$ 的基础解系.

综上所述, 命题 (1), (2), (3), (4) 都是正确的, 命题正确个数为 4 个.

August 4

1. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2,\ x \geq 0 \\ x^4,\ x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} -\sqrt{x},\ x > 0 \\ x^2,\ x \leq 0 \end{cases}$, 若 $y = f(g(x))$, 求 $\frac{dy}{dx}|_{x=1}$ 和 $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$

解

我们令 $h(x) = f(g(x))$, 我们有:

$$h(x) = \begin{cases} x^2,\ x > 0 \\ x^4,\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow h'(x) = \begin{cases} 2x,\ x > 0 \\ 4x^3,\ x \leq 0 \end{cases}$$

我们得到: $\begin{cases} h'(1) = 2 \\ h'(0) = 0 \end{cases}$

综上所述, 我们得到: $\frac{dy}{dx}|_{x=1} = 2$, $\frac{dy}{dx}|_{x=0} = 0$.

2. 设 A 为 3 阶矩阵,α 为 3 维列向量,$A^2\alpha \neq 0$,$A^3\alpha = 0$, 下列说法错误的是:

- A. A 只有 0 特征值
- B. $r(A) = 2$
- C. A 能相似对角化

- $D.\ A$ 不是对称矩阵

解

我们可以证明向量组 $(\alpha, A\alpha, A^2\alpha)$ 线性无关, 我们不妨假设存在不全为 0 的数 k_1, k_2, k_3 使得:

$$k_1\alpha + k_2A\alpha + k_3A^2\alpha = 0$$

我们有 $A^2\alpha \neq 0,\ A^3\alpha = 0$, 我们在上面式子两边左乘 A, A^2, A^3 得到:

$$\begin{cases} k_1A\alpha + k_2A^2\alpha = 0 \\ k_1A^2\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

我们得到向量组 $(\alpha, A\alpha, A^2\alpha)$ 线性无关, 我们令 $P = (\alpha, A\alpha, A^2\alpha)$, 矩阵 P 为可逆矩阵, 我们得到:

$$AP = (A\alpha, A^2\alpha, 0) = (\alpha, A\alpha, A^2\alpha)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow AP = PB, 其中B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

我们得到: $A = PBP^{-1}$, P为可逆矩阵,A 与 B 相似

我们可以求出矩阵 B 只有 0 特征值, 且 $rank(B) = 2$, 不能相似对角化.

August 5

1. 设 $\varphi(x) = \begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x},\ x \neq 0 \\ 0,\ x = 0 \end{cases}$, 函数 $f(x)$ 可导, 求 $F(x) = f[\varphi(x)]$ 的导数

解

我们有 $\varphi'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)}{x} = 0$, 我们可以得到:

$$F'(x) = \begin{cases} f'(x^3\sin\frac{1}{x})(3x^2\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}),\ x \neq 0 \\ f'(0)\varphi'(0) = 0,\ x = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$F'(x) = \begin{cases} f'(x^3\sin\frac{1}{x})(3x^2\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}),\ x \neq 0 \\ 0,\ x = 0 \end{cases}$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上导函数连续,$f(0) = f(\dfrac{1}{2}) = f(1) = 0$,$|f'(x)| \leq M$,求证: $|\int_0^1 f(x)dx| \leq \dfrac{M}{8}$

解

我们由绝对值不等式可以得到:

$$|\int_0^1 f(x)dx| \leq \int_0^1 |f(x)|dx = \begin{cases} \int_0^1 |\int_0^x f'(t)dt|dx \leq \int_0^1 \int_0^x |f'(t)|dtdx \leq \int_0^1 |\int_0^x Mdt|dx \\ \int_0^1 |\int_1^x f'(t)dt|dx \leq \int_0^1 \int_1^x |f'(t)|dtdx \leq \int_0^1 |\int_1^x Mdt|dx \\ \int_0^1 |\int_{\frac{1}{2}}^x f'(t)dt|dx \leq \int_0^1 \int_{\frac{1}{2}}^x |f'(t)|dtdx \leq \int_0^1 |\int_{\frac{1}{2}}^x Mdt|dx \end{cases}$$

我们将 $[0,1]$ 区间分为 $[0,\frac{1}{4}],[\frac{1}{4},\frac{3}{4}],[\frac{3}{4},1]$, 我们可以得到:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)|dx &= \int_0^{\frac{1}{4}} |f(x)|dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} |f(x)|dx + \int_{\frac{3}{4}}^1 |f(x)|dx \\ &\leq \int_0^{\frac{1}{4}} \int_0^x Mdtdx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \int_{\frac{1}{2}}^x Mdtdx + \int_{\frac{3}{4}}^1 \int_1^x Mdtdx \\ &= \int_0^{\frac{1}{4}} |Mx|dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} |Mx - \frac{M}{2}|dx + \int_{\frac{3}{4}}^1 |Mx - M|dx \\ &= \frac{M}{32} + \frac{M}{32} + \frac{M}{32} + \frac{M}{32} \\ &= \frac{M}{8} \end{aligned}$$

综上所述, 我们证明: $|\int_0^1 f(x)dx| \leq \frac{M}{8}$

3. 设 A 是 n 阶矩阵, 则下列说法错误的是:

- A. 对于任意的 n 维列向量 ξ, 有 $A\xi = 0$, 则 $A = 0$
- B. 对于任意的 n 维列向量 ξ, 有 $\xi^T A\xi = 0$, 则 $A = 0$
- C. 对于任意的 n 阶矩阵 B, 有 $AB = 0$, 则 $A = 0$
- D. 对于任意的 n 阶矩阵 B, 有 $B^T AB = 0$, 则 $A = 0$

解

(1). 我们可以知道矩阵 A 的零空间为 $N(A) = R^n$, 我们可以得到 A 的行空间 $R(A) = 0$,$A = 0$

(2). 当 A 为反对称矩阵时, 我们可以得到 $\xi^T A\xi = 0$

(3). 我们不妨取 $B = E$, 可以得到 $A = 0$, 矩阵 A 只能为零矩阵, 在 $A = 0$ 时, 任意的 n 阶矩阵 B 满足 $AB = 0$

(4). 同 (3), 取 $B = E$, 可以得到 $A = 0$, 矩阵 A 只能为零矩阵, 在 $A = 0$ 时, 任意的 n 阶矩阵 B 满足 $B^T AB = 0$

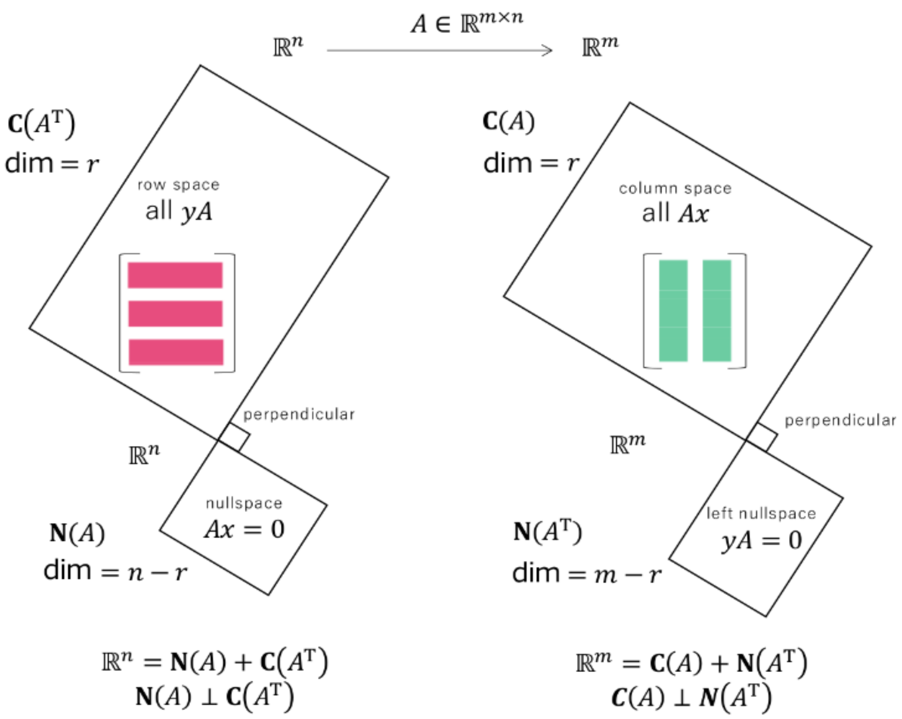


图 34.1: 四个子空间

August 6

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 上可导, 且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f[(x+h)^2]-f(x^2+h)}{h}=1, f(1)=1$, 求 $f(x)$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{h\to 0}\frac{f[(x+h)^2]-f(x^2+h)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f[(x+h)^2]-f(x^2)+f(x^2)-f(x^2+h)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f[(x+h)^2]-f(x^2)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x^2)-f(x^2+h)}{h}\\
&= [f(x^2)]'-f'(x^2)\\
&= (2x-1)f'(x^2)\\
&= 1
\end{aligned}$$

我们得到:

$$f'(x^2)=\frac{1}{2x-1}\Rightarrow 2xf'(x^2)=\frac{2x}{2x-1}\Rightarrow f(x^2)=x+\frac{1}{2}\ln(2x-1)+C$$

我们由 $f(1)=1\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x^2)=x+\dfrac{1}{2}\ln(2x-1)$

我们得到 $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}\ln(2\sqrt{x}-1)$

2. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上导函数连续,$f(0)=f(1)=0$, 证明: $\int_0^1 f^2(x)dx \le \frac{1}{8}\int_0^1 [f'(x)]^2 dx$

定理 34.1.1 (积分形式柯西不等式)

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$$

我们知道 $\forall t\in\mathbb{R}$, 我们有:

$$[tf(x)-g(x)]^2 \ge 0 \Rightarrow t^2f^2(x)-2tf(x)g(x)+g^2(x)\ge 0$$

我们对上式子两边在区间 $[a,b]$ 上积分, 可以得到:

$$t^2\int_a^b f^2(x)dx - 2t\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \ge 0$$

我们可以得到一个关于 t 的一元二次方程方程:

$$At^2+Bt+C\ge 0,\text{其中}\begin{cases} A=\int_a^b f^2(x)dx \\ B=-2\int_a^b f(x)g(x)dx \\ C=\int_a^b g^2(x)dx \end{cases} \Rightarrow B^2-4AC\le 0$$

我们得到:

$$4\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 - 4\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx \le 0$$

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$$

解

$$\text{我们知道:}\begin{cases} f(x)=\int_0^x f'(t)dt \\ f(x)=\int_1^x f'(t)dt \end{cases}\text{ 我们有:}$$

$$\int_0^1 f^2(x)dx = \begin{cases} \int_0^1\left[\int_0^x f'(t)dt\right]^2 dx \le \int_0^1\left[\int_0^x 1^2dt\int_0^x |f'(t)|^2dt\right]dx \\ \int_0^1\left[\int_1^x f'(t)dt\right]^2 dx \le \int_0^1\left[\int_1^x 1^2dt\int_0^x |f'(t)|^2dt\right]dx \end{cases}$$

我们可以得到:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f^2(x)dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} f^2(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f^2(x)dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^x f'(t)dt\right]^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\int_x^1 f'(t)dt\right]^2 dx \\
&\leq \int_0^{\frac{1}{2}} [\int_0^x 1^2dt \int_0^x |f'(t)|^2dt]dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 [\int_x^1 1^2dt \int_x^1 |f'(t)|^2dt]dx \\
&\leq \int_0^{\frac{1}{2}} [x \int_0^x |f'(t)|^2dt]dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 [(1-x) \int_x^1 |f'(t)|^2dt]dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(t)|^2dt \int_t^{\frac{1}{2}} xdx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(t)|^2dt \int_{\frac{1}{2}}^t (1-x)dx \\
&= (\frac{1}{8} - \frac{t^2}{2}) \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(t)|^2dt + (t - \frac{t^2}{2} - \frac{3}{8}) \int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(t)|^2dt \\
&= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(t)|^2dt + \frac{1}{8} \int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(t)|^2dt \\
&= \frac{1}{8} \int_0^1 [f'(x)]^2dx
\end{aligned}
$$

3. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) + \frac{1}{2}\right]^{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}$

解

原极限等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= e^{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right)}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2}} \\
&= e^{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2}} \\
&= e^{\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{2}} \\
&= e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

August 7

1. 设可导函数 $y = y(x)$ 由方程 $\sin x - \int_x^y \varphi(u)du = 0$ 所确定, 其中可导函数 $\varphi(u) > 0$, 且 $\varphi(0) = \varphi'(0) = 1$, 求 $y''(0)$

解

我们可以得到: 当 $x=0$ 时,$\int_0^y \varphi(u)du=0$, 且 $\varphi(u)>0$, 我们得到 $y=0$.

我们对方程 $\sin x-\int_x^y \varphi(u)du=0$ 两边对 x 求导得到:

$$\begin{cases} \cos x-[\varphi(y)y'-\varphi(x)]=0 \\ -\sin x-[\varphi'(y)y'^2+\varphi(y)y''-\varphi'(x)]=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-y'(0)\varphi(0)+\varphi(x)=0 \\ -\varphi'(0)y'(0)^2-y''(0)\varphi(0)+\varphi'(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'(0)=2 \\ y''(0)=-3 \end{cases}$$

2. 设 $a_n=\int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}dx$

(1). 证明: $\dfrac{1}{2(n+1)}\le a_n\le \dfrac{1}{2n}$, $n=1,2,\cdots$

(2). 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(\dfrac{1}{2n}-\int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}dx)$ 绝对收敛.

解

(1). 我们有:

$$\begin{cases} \dfrac{x^n}{1+x}\ge \dfrac{x^n}{2},\ x\in(0,1) \\ \dfrac{x^n}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}x^{n-1}\le \dfrac{x^{n-1}}{2},\ x\in(0,1) \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^n}{2}dx\le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx\le \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{2}dx$$

我们有:

$$\begin{cases} \int_0^1 \dfrac{x^n}{2}dx=\dfrac{x^{n+1}}{2(n+1)}\Big|_0^1=\dfrac{1}{2(n+1)} \\ \int_0^1 \dfrac{x^{n-1}}{2}dx=\dfrac{x^n}{2n}\Big|_0^1=\dfrac{1}{2n} \end{cases}$$

我们证明了: $\dfrac{1}{2(n+1)}\le a_n\le \dfrac{1}{2n}$, $n=1,2,\cdots$

(2). 我们不妨设 $b_n=\dfrac{1}{2n}-a_n=\dfrac{1}{2n}-\int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}dx$.

我们由 (1) 可得: $|b_n|\le \dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{2(n+2)}=\dfrac{1}{2n^2+4n}<\dfrac{1}{2n^2}$

我们知道级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{2n^2}$ 收敛, 由比较判别法我们可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛, 原级数绝对收敛.

34.2 Week II

August 8

1. 设 $x=x(y)$ 是函数 $y=\ln x+e^x$ 的反函数, 求 $\dfrac{d^2x}{dy^2}$.

解

我们有: $\begin{cases} y = f(x) \\ x = g(y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'(x) = f'(x) \\ 1 = f'(x)g'(y) \end{cases} \Rightarrow g'(y) = \dfrac{1}{f(x)}$

我们有: $f(x) = \ln x + e^x \Rightarrow f'(x) = e^x + \dfrac{1}{x}$

我们得到: $g'(y) = \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{x}{1 + xe^x}$

我们有:

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{\frac{dx}{dy}}{dx}\frac{dx}{dy} = \frac{x - x^3e^x}{(1 + xe^x)^3}$$

2. 设 $a_0 = 1, a_1 = 0, a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}(na_n + a_{n-1})$ $(n = 1, 2, 3\cdots)$,$S(x)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ 的和函数.

(1). 证明: 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ 的收敛半径不小于 1.

(2). 证明: $(1 - x)S'(x) - xS(x) = 0,\ x \in (-1, 1)$, 并求出 $S(x)$ 的表达式.

解

(1). 我们由 $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}(na_n + a_{n-1})$ 得到:

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n+1}(a_n - a_{n-1})$$

我们不妨设 $b_n = a_n - a_{n-1} \Rightarrow b_{n+1} = -\dfrac{1}{n+1}b_n,\ b_1 = a_1 - a_0 = -1$

我们有:

$$\begin{cases} b_n = -\dfrac{1}{n}b_{n-1} \\ b_{n-1} = -\dfrac{1}{n-1}b_{n-2} \\ \dots \\ b_2 = -\dfrac{1}{2}b_1 \\ b_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow b_n = \frac{(-1)^n}{n!}$$

我们由累加法可以得到: $a_n = \begin{cases} a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!},\ n \geq 1 \\ 1,\ n = 0 \end{cases} \Rightarrow a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$

我们利用根值审敛法:

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!})}{n}} = 1$$

我们得到级数的收敛半径: $r = \dfrac{1}{\rho} = 1$, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ 的收敛半径不小于 1.

(2). 我们有: $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$, 我们得到:

$$\begin{cases} S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \\ S(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n \end{cases}$$

$$a_{n+1}=\frac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})\Rightarrow(n+1)a_{n+1}=na_n+a_{n-1}\Rightarrow(n+2)a_{n+2}=(n+1)a_{n+1}=a_n$$

我们得到:

$$\begin{aligned}
(1-x)S'(x)-xS(x) &= (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-x\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}[(n+1)a_{n+1}+a_n]x^{n+1} \\
&= a_1+\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}[(n+1)a_{n+1}+a_n]x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)a_{n+2}x^{n+1}-\sum_{n=0}^{+\infty}[(n+1)a_{n+1}+a_n]x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}[(n+2)a_{n+2}-(n+1)a_{n+1}-a_n]x^{n+1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

我们得到:

$$(1-x)S'(x)-xS(x)=0\Rightarrow\frac{S'(x)}{S(x)}=\frac{x}{1-x}\Rightarrow S(x)=\frac{C_1}{e^x(1-x)}$$

我们有 $S(0)=1\Rightarrow C_1=1$, 因此 $S(x)=\dfrac{1}{e^x(1-x)}$, $x\in(-1,1)$

August 9

1. 设 $y=y(x)$ 由 $e^y\sin t-y+1=0$ 和 $x=\begin{cases}\dfrac{e^t-1}{t},\ t\neq0\\ 1,\ t=0\end{cases}$ 所确定, 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}|_{t=0}$

解

我们知道: 当 $t=0$ 时, $\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$, 我们由:

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{e^t-1}{t},\ t\neq0\\ 1,\ t=0\end{cases}\Rightarrow x(t)=1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{6}+\frac{t^3}{24}+\cdots\Rightarrow\begin{cases}x'(0)=\dfrac{1}{2}\\ x''(0)=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

我们由: $e^y \sin t - y + 1 = 0 \Rightarrow e^{y(t)} \sin t - y(t) + 1 = 0$ 得到:

$$\begin{cases} e^{y(t)} \cos t + y'(t)e^{y(t)} \sin t - y'(t) = 0 \\ y'(t)e^{y(t)} \cos t - e^{y(t)} \sin t + \left\{[y'(t)]^2 e^{y(t)} + y''(t)e^{y(t)}\right\} \sin x + \cos x \left[y'(t)e^{y(t)}\right] - y''(t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(0) = e \\ y''(0) = 2e^2 \end{cases}$$

我们由参数方程二阶导数公式:

$$\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=0} = \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{[x'(t)]^3}|_{t=0} = 8e^2 - \frac{8e}{3}$$

2. 下列命题正确的是:

- A. 设 A 为 3 阶矩阵, 若 A 的特征值 $\lambda_1\lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$, 则 $r(A) = 2$
- B. 设 A 为 3 阶非零矩阵, 若 $A^2 = 0$, 则 $r(A) = 1$
- C. 设 A, B 为 3 阶矩阵, 若 A 与 B 等价, 则 $|A| = |B|$
- D. 设 A, B 为 3 阶实对称矩阵, 若 A 与 B 合同, 则 $|A| = |B|$

解

(A). 我们可以得到矩阵 $A \sim diag\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, 对角矩阵的秩和矩阵 A 的秩相同,$r(A) = 2$

(B). $A^2 = 0 \Rightarrow 2r(A) \leq 3 \Rightarrow r(A) = 1$

(C). A 与 B 等价 $\Rightarrow r(A) = r(B)$

(D). A 与 B 合同 $\Rightarrow A = P^TBP$

3. 已知 $f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{2nx + x^2}{2n^2}\right)^{-n}, & x \neq 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2\left[\dfrac{n}{(n+1)^2} + \dfrac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \dfrac{n}{(n+n)^2}\right], & x = 0 \end{cases}$, 求 $\int f(x)dx$

解

当 $x \neq 0$ 时:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{2nx + x^2}{2n^2}\right)^{-n} \\ &= e^{\lim\limits_{n\to+\infty} (-n)\frac{2nx + x^2}{2n^2}} \\ &= e^{-x} \end{aligned}$$

当 $x=0$ 时:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{n\to+\infty} 2\left[\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n+n)^2}\right] \\
&= 2\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{(1+\frac{2}{n})^2}+\cdots+\frac{1}{(1+\frac{n}{n})^2}\right] \\
&= 2\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}dx \\
&= 2(1-\frac{1}{2}) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

我们得到: $f(x)=e^{-x} \Rightarrow \int f(x)dx=-e^{-x}+C$

August 10

1. 已知函数 $f(x)=x^2\ln(1-x)$, 当 $n\geq 3$ 时, 求 $f^{(n)}(0)$

解

我们利用 $\ln(1-x)$ 的泰勒展开式:

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^n}{n}-\cdots$$

我们可以得到:

$$f(x)=-x^3-\frac{x^4}{2}-\frac{x^5}{3}-\cdots-\frac{x^n+2}{n}-\cdots$$

我们有:

$$
\begin{cases}
f'(0)=0 \\
f''(0)=0 \\
f^{(3)}(0)=-6 \qquad \Rightarrow f^{(n)}(0)=-\dfrac{n!}{n-2},\ n\geq 3 \\
f^{(4)}(0)=-\dfrac{4!}{2} \\
\cdots\cdots
\end{cases}
$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导,$f(0)=f(1)=-2$, 证明: $\exists\xi\in(0,1),\ s.t. f'(\xi)-f(\xi)=\xi$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=e^{-x}\left[f(x)+x+1\right]$, 我们有:

$$F(0)=-1,\ F(1)=0,\ F'(x)=e^{-x}\left[f'(x)-f(x)-x\right]$$

我们由积分中值定理可以得到:

$$\exists\eta\in(0,1),\ s.t.\int_0^1 f(x)dx=f(\eta)\Rightarrow\exists\eta\in(0,1),\ s.t.f(\eta)=0$$

我们有:

$$F(\eta)=e^{-\eta}\left[f(\eta)+\eta+1\right]=e^{-\eta}(\eta+1)>0$$

我们根据零点定理, 可知: $\exists\delta\in(0,\eta),\ s.t.F(\delta)=0$.

我们对 $F(x)$ 在区间 $[\delta,1]$ 上使用罗尔定理可以得到:

$$\exists\xi\in(\delta,1),\ s.t.F'(\xi)=e^{-\xi}\left[f'(\xi)-f(\xi)-\xi\right]=0\Rightarrow f'(\xi)-f(\xi)=\xi$$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi\in(0,1),\ s.t.f'(\xi)-f(\xi)=\xi$

August 11

1. 设数列 $\{u_n\}$ 满足 $u_1=1,\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+3}{u_n+1},\ (n=1,2,\cdots)$, 试证明数列 $\{u_n\}$ 收敛, 并求其极限.

解

我们有:

$$u_1=1,\ u_2=2,\ u_3=\frac{5}{3},\ u_4=\frac{7}{4},\cdots\ (u_n>0)$$

我们发现数列 $\{u_n\}$ 不是单调数列, 我们从奇数项和偶数项入手:

$$\begin{cases} u_{2k+2}=\dfrac{u_{2k+1}+3}{u_{2k+1}+1}=\dfrac{\frac{u_{2k}+3}{u_{2k}+1}+3}{\frac{u_{2k}+3}{u_{2k}+1}+1}=2-\dfrac{1}{u_{2k}+2} \\ u_{2k+1}=\dfrac{u_{2k}+3}{u_{2k}+1}=\dfrac{\frac{u_{2k-1}+3}{u_{2k-1}+1}+3}{\frac{u_{2k-1}+3}{u_{2k-1}+1}+1}=2-\dfrac{1}{u_{2k-1}+2}\end{cases}\Rightarrow f(x)=2-\frac{1}{x+2}\text{单调递增}$$

我们首先证明数列 $\{u_{2k-1}\}$ 极限存在:

(1). 当 $n=1$ 时,$u_1<u_3$.

(2). 当 $n=k$ 时, 假设 $u_{2k-1}<u_{2k+1}$

(3). 当 $n=k+1$ 时,$u_{2k-1}<u_{2k+1}\Rightarrow f(u_{2k-1})<f(u_{2k+1})\Rightarrow u_{2k+1}<u_{2k+3}$

数列 $\{u_{2k-1}\},(k=1,2,\cdots)$ 单调递增, 且 $u_{2k-1}<2$

我们继续证明数列 $\{u_{2k}\}$ 极限存在:

(1). 当 $n=1$ 时,$u_2>u_4$.

(2). 当 $n=k$ 时, 假设 $u_{2k}>u_{2k+2}$

(3). 当 $n=k+1$ 时,$u_{2k}>u_{2k+2}\Rightarrow f(u_{2k})>f(u_{2k+2})\Rightarrow u_{2k+2}<u_{2k+4}$

数列 $\{u_{2k}\},(k=1,2,\cdots)$ 单调递减少, 且 $u_{2k}>\dfrac{3}{2}$

我们不妨假设:

$$\begin{cases}\lim\limits_{k\to+\infty}u_{2k-1}=A \\ \lim\limits_{k\to+\infty}u_{2k}=B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\dfrac{B+3}{B+1} \\ B=\dfrac{A+3}{A+1}\end{cases}\Rightarrow A=B=\sqrt{3}$$

我们可以得到:

(1). $\forall\varepsilon>0,\exists N_1>0$, 当 $n=2k-1>N_1$ 时, 我们有:$|u_{2k-1}-\sqrt{3}|<\varepsilon$.

(2). $\forall\varepsilon>0,\exists N_2>0$, 当 $n=2k>N_2$ 时, 我们有:$|u_{2k}-\sqrt{3}|<\varepsilon$.

(3). 取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$, 当 $n>N$ 时, 我们有:$|u_n-\sqrt{3}|<\varepsilon$.

综上所述, 我们证明数列 $\{u_n\}$ 收敛, 极限为 $\sqrt{3}$.

2. $f(x)=\int_1^x \dfrac{\arctan t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\ln(1+t^2)}dt$, 求 $\int_0^1 \dfrac{x}{1+x^2}f(x)dx$

解

原定积分等价于:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{f(x)}{2}d(\ln(1+x^2))\\
&= \frac{f(x)\ln(1+x^2)}{2}\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1\frac{\ln(1+x^2)}{2}d(f(x))\\
&= -\int_0^1\frac{\arctan x}{2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\cos\theta d\theta\\
&= -\frac{1}{2}\theta\sin\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta\\
&= -\frac{\sqrt{2}\pi}{16}+\frac{2-\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

3. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+2x+4x^2}$, 求 $f^{(100)}(0)$

解

$$f(x)=\frac{1-2x}{(1-2x)(4x^2+2x+1)}=\frac{1-2x}{1-(2x)^3}$$

$$\frac{1}{1-(2x)^3}=1+(2x)^3+(2x)^6+(2x)^9+\cdots+(2x)^{3n}$$

我们得到:

$$f(x)=(1-2x)\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^{3n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^{3n}-\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^{3n+1}$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$\dfrac{f^{(100)}(0)}{100!}$ 是 $f(x)$ 中 x^{100} 前面的系数, 我们可以得到:

$$f^{(100)}(0) = -2^{100} \times 100!$$

4. 证明: 在区间 $(0,2)$ 内存在三个不同的点 x_1, x_2, x_3, 使得 $\dfrac{1-\ln(1+x_1)}{(1+x_1)^2}x_3 = \dfrac{1-\ln(1+x_2)}{(1+x_2)^2}(2-x_3)$

解

我们构造辅助函数: $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$, 我们有:

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2} \\ f(0) = 0 \\ f(2) = \dfrac{\ln 3}{3} \end{cases}$$

我们不妨假设 $\exists x_3 \in (0,2), f(x_3) = A$, 我们分别在区间 $(0, x_3)$ 和区间 $(x_3, 2)$ 上使用拉格朗日中值定理可以得到:

$$\begin{cases} \exists x_1 \in (0, x_3),\ s.t. \dfrac{f(x_3)-f(0)}{x_3} = f'(x_1) = \dfrac{1-\ln(1+x_1)}{(1+x_1)^2} \\ \exists x_2 \in (x_3, 2),\ s.t. \dfrac{f(2)-f(x_3)}{2-x_3} = f'(x_2) = \dfrac{1-\ln(1+x_2)}{(1+x_2)^2} \end{cases}$$

我们令 $f(x_3) - f(0) = f(2) - f(x_3) \Rightarrow A = f(2) - A \Rightarrow f(x_3) = A = \dfrac{f(2)}{2} = \dfrac{\ln 3}{6}$ 时, 我们可以得到:

$$\frac{1-\ln(1+x_1)}{(1+x_1)^2}x_3 = \frac{1-\ln(1+x_2)}{(1+x_2)^2}(2-x_3)$$

综上所述, 我们可以得到: 在区间 $(0,2)$ 内存在三个不同的点 x_1, x_2, x_3, 使得 $\dfrac{1-\ln(1+x_1)}{(1+x_1)^2}x_3 = \dfrac{1-\ln(1+x_2)}{(1+x_2)^2}(2-x_3)$

August 12

1. 设 $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

(1). 证明: $(1-x^2)y^{(n+1)} - (2n+1)xy^{(n)} - n^2 y^{(n-1)} = 0 (n \geq 1)$;

(2). 求 $y^{(n)}(0)$

解

(1). 我们对 $f(x)$ 求导可以得到:

$$f'(x) = \frac{1 + \dfrac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 + xf(x)}{1-x^2} \Rightarrow (1-x^2)f'(x) - xf(x) - 1 = 0$$

我们令 $g(x)=(1-x^2)f'(x)-xf(x)-1$, 我们利用莱布尼兹公式可以得到:

$$g^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(1-x^2)^{(k)}f^{(n-k+1)}(x)-\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x)^{(k)}f^{(n-k)}=0$$

当 $k\geq 3$ 时,$(1-x^2)^{(k)}=0$; 当 $k\geq 2$ 时,$x^{(k)}=0$, 我们有:

$$g^{(n)}(x)=(1-x^2)f^{(n+1)}(x)-2nxf^{(n)}(x)-n(n-1)f^{(n-1)}(x)-xf^{(n)}(x)-nf^{(n-1)}(x)=0$$

我们得到:

$$(1-x^2)f^{(n+1)}(x)-(2n+1)xf^{(n)}(x)-n^2f^{(n-1)}(x)=0$$

综上所述, 我们得到: $(1-x^2)y^{(n+1)}-(2n+1)xy^{(n)}-n^2y^{(n-1)}=0(n\geq 1)$

(2). 我们将 $x=0$ 代入上面式子可以得到:

$$\begin{cases} y^{(n)}=(n-1)^2y^{(n-2)} \\ y(0)=0 \\ y^{(1)}(0)=1 \end{cases} \Rightarrow y^{(n)}(0)=\begin{cases} 0,\ n\text{为偶数}, n=2k(k=0,1,\cdots) \\ (2k!!)^2,\ n\text{为奇数}, n=2k+1(k=0,1,\cdots) \end{cases}$$

2. 已知极限 $\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$, 记此极限为 $f(x)$, 求函数 $f(x)$ 的间断点, 并指出其类型.

解

$$f(x)=e^{\lim\limits_{t\to x}\frac{x}{\sin t-\sin x}\ln(1+\frac{\sin t-\sin x}{\sin x})}=e^{\frac{x}{\sin x}}$$

我们发现 $f(x)$ 的间断点为 $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

(1). 当 $k=0$ 时, 我们有:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=e \\ \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=e \end{cases} \Rightarrow x=0\text{是}f(x)\text{可去间断点}$$

(2). 当 $k\neq 0$ 时, 我们有:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to k\pi^+}f(x)=+\infty\text{或者}0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0\text{或者}+\infty \end{cases} \Rightarrow x=k\pi\text{是}f(x)\text{无穷间断点}$$

3. 证明: $\int_0^\pi xa^{\sin x}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{-\cos x}dx\geq\dfrac{\pi^3}{4}$

解

我们由区间再现公式可以得到:

$$\begin{cases} I_1 = \int_0^{\pi}(\pi - t)a^{\sin t}dt \\ 2I_1 = \pi\int_0^{\pi} a^{\sin t}dt \\ I_1 = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\cos t}dt \end{cases}$$

我们可以得到原定积分等价于:(柯西不等式)

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\cos x}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\cos x}dx \\ &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx\int_0^{\frac{\pi}{2}} g^2(x)dx \\ &\geq \pi\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x)dx\right]^2 \\ &= \frac{\pi^3}{4} \end{aligned}$$

August 13

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x|x|, \ x \leq 0, \\ x\ln x, \ x > 0, \end{cases}$, $x = 0$ 处 $f(x)$ 的可导性判断、$x = 0$ 是否为 $f(x)$ 的极值点

解

当 $x = 0$ 时, 我们有 $f(0) = 0$, 且我们有:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(-x^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow f(x)\text{在}x = 0\text{处连续}$$

我们有:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = -x = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x)\text{在}x = 0\text{处不可导}$$

取 $\varepsilon \in (0,1)$, 当 $x \in (-\varepsilon, 0)$ 时,$f(x) = -x^2 < f(0) = 0$; 当 $x \in (0,\varepsilon)$ 时,$f(x) = x\ln x < f(0) = 0$,$x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

2. 已知 $f(x) = \prod\limits_{n=1}^{100}\left(\tan\dfrac{\pi x^n}{4} - n\right)$, 求 $f'(1)$

我们令 $g(x) = \prod\limits_{n=2}^{100}\left(\tan\dfrac{\pi x^n}{4} - n\right)$, 我们得到:

$$f(x) = (\tan\frac{\pi x}{4} - 1)g(x)$$

$$f'(x)=\frac{\pi}{4\cos^2\frac{\pi x}{4}}g(x)+g'(x)(\tan\frac{\pi x}{4}-1)$$

$$f'(1)=\frac{\pi}{2}g(1)=\frac{\pi}{2}\times(1-2)\times(1-3)\cdots\times(1-100)=-\frac{\pi}{2}99!$$

August 14

1. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\int_0^x\cos\frac{1}{t}dt,\ x\neq 0\\ 0,\ x=0\end{cases}$，求 $f'(0)$

解

我们有:$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$, 我们根据导数的定义可以得到:

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\cos\frac{1}{t}dt}{x}\\&=\lim_{x\to 0}-\frac{\int_0^x t^2d\sin\frac{1}{t}}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\left[-t\sin\frac{1}{t}|_{t=0}^{t=x}\right]+\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x 2t\sin\frac{1}{t}dt}{x}\\&=0+2\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}\\&=0\end{aligned}$$

综上所述, 我们得到:$f'(0)=0$

2. $f(x)$ 可导, 且满足 $x=\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t-x)dt$, 求 $f(x)$ 以及 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}|f(x)|^6dx$

解

我们令 $u=t-x,t=u+x$, 我们得到:

$$x=\int_0^x f(t)dt+\int_{-x}^0(u+x)f(u)du\Rightarrow x=\int_0^x f(t)dt+\int_{-x}^0 uf(u)du+x\int_{-x}^0 f(u)du$$

我们对方程左右两边对 x 求导, 得到:

$$1=f(x)-xf(-x)+\int_{-x}^0 f(u)du+xf(-x)\Rightarrow f(x)+\int_{-x}^0 f(u)du=1$$

我们再求一次导数, 得到:

$$f'(x)+f(-x)=0\Rightarrow f''(x)-f'(-x)=0\Rightarrow f''(x)=f(x)$$

我们得到特征方程:$\lambda^2+1=0\Rightarrow\lambda_1=i,\lambda_2=-i$

我们不妨设 $f(x)=C_1\sin x+C_2\cos x$

我们有:$\begin{cases} f(0)=1 \\ f'(1)=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=-1 \\ C_2=1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})$

我们得到:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}|f(x)|^6dx &= 8\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\cos^6(x+\frac{\pi}{4})dx \\ &= 8\int_0^{\pi}\cos^6 tdt \\ &= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 tdt \\ &= 16\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{5\pi}{2} \end{aligned}$$

3. 设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}t\ln|t|dt$, $x=0$ 处 $f(x)$ 的可导性判断、$x=0$ 是否为 $f(x)$ 的极值点

解

我们有 $g(x)=x\ln|x|$ 在 $x=0$ 处可去间断, 且 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$, 我们得到 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

我们有:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{\int_0^x t\ln tdt}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{\int_x^0 t\ln(-t)dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)\ln(-x)=0 \end{cases} \Rightarrow f'(0)=0$$

当 $x\in(-1,0)$ 时,$f(x)>f(0)$; 当 $x\in(0,1)$ 时,$f(x)>f(0)$,$f(x)$ 在 $x=0$ 处取极小值.

34.3 Week III

August 15

1. 函数 $f(x)=(x+1)|x^2-1|$ 驻点和极值点个数

解

我们得到: $f(x)=\begin{cases} x^3+x^2-x-1, & |x|\geq 1 \\ x+1-x^2-x^3, & |x|<1 \end{cases}$, 我们对 $f(x)$ 求导得到:

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2+2x-1, & x\leq -1 \\ 1-2x-3x^2, & -1<x<1 \\ 3x^2+2x-1, & x>1 \end{cases} \Rightarrow f(x)在x=-1处可导; 在x=1处不可导$$

$$f'(x)=\begin{cases}(3x-1)(x+1),\ x\le -1\\(1-3x)(x+1),\ -1<x<1\\(3x-1)(x+1),\ x>1\end{cases}$$

我们发现:

$$\begin{cases}x\in(-\infty,-1),f'(x)>0\\x\in(-1,\frac{1}{3}),f'(x)>0\\x\in(\frac{1}{3},1),f'(x)<0\\x\in(1,+\infty),f'(x)>0\end{cases}$$

在可导点处,$f(x)$ 有两个驻点 $x=\frac{1}{3}$ 和 $x=-1$;$f(x)$ 有一个极值点 $x=\frac{1}{3}$.
在不可导点 $x=1$ 处,$x=1$ 不是驻点,$x=1$ 两侧导数值异号,$x=1$ 是极值点.
综上所述, 我们得到 $f(x)$ 有 $x=\frac{1}{3}$ 和 $x=-1$ 两个驻点和 $x=\frac{1}{3}$ 和 $x=1$ 两个极值点.

2. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内二阶可导, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right]=\frac{1}{3}$, 求 $f(0)$、$f'(0)$ 及 $f''(0)$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x+xf(x)+x}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x^2}\\&=-\frac{1}{6}+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x^2}\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

我们得到: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x^2}=\frac{1}{2}$
我们得到:

$$\begin{cases}f(0)=-1\\\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\\\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(0)=-1\\f'(0)=0\\f''(0)=1\end{cases}$$

3. 设 $f(x)$ 连续, 且 $x>1$ 时, 我们有 $f(x)\left[\int_0^x f(t)dt+1\right]=\frac{xe^x}{2(1+x)^2}$, 求 $f(x)$

解

我们不妨设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt \Rightarrow F'(x)=f(x)$

我们构造辅助函数:$G(x)=[F(x)+1]^2 \Rightarrow G'(x)=\dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$

我们可以得到: $\begin{cases} G(x)=\dfrac{e^x}{1+x}+C \\ G(0)=[F(0)+1]^2=1 \end{cases} \Rightarrow C=0$

我们得到:

$$\begin{cases} F(x)+1=\sqrt{\dfrac{e^x}{1+x}} \\ f(x)=F'(x)=\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

综上所述, 我们得到: $f(x)=\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$

August 16

1. 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f'(0)=0, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)+f(x)-f(-x)}{|x|}=1$, 下列说法正确的是:

- A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 极大值
- B. $f''(0)>0, f(0)$ 是 $f(x)$ 极小值
- C. $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点
- D. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极值点,$(0,f(0))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)+f(x)-f(-x)}{|x|} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)+[f(0)+f'(0)x+o(x)]-[f(0)-f'(0)x+o(x)]}{|x|} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)+2f'(0)x+o(x)}{|x|} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{|x|} \\ &= 1 \end{aligned}$$

我们得到:$f''(0)=0$, 且 $x\in(-\xi,\xi), f''(x)>0$, 我们知道 $f'(x)$ 在 $x\in(-\xi,\xi)$ 上单调递增,$x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点,$(0,f(0))$ 不是函数 $f(x)$ 的拐点.

2. 计算极限

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{t}{\cos\theta}}\frac{\sin(r^2\sin\theta\cos\theta)}{\sin\theta}dr$$

解

原极限等价于:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{t}{\cos\theta}}\frac{\sin(r^2\sin\theta\cos\theta)}{r\sin\theta}rdr \\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^t dx\int_0^x\frac{\sin(xy)}{y}dy}{t^3} \\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^{t^2}\frac{\sin u}{u}du}{3t^2} \\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{2t\sin(t^2)}{6t^3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

3. 设 $f(x)$ 连续, 且 $f(x)\neq 0, f(1)=\sqrt{2}$, 若对任意 $x,y\in(-\infty,+\infty)$, 有 $f(x+y)-f(x)=\int_x^{x+y}\frac{t}{f(t)}(t^2+1)dt$, 求 $f(x)$

解

我们可以得到:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}\frac{t}{f(t)}(t^2+1)dt}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)}{f(x+\Delta x)}\left[(x+\Delta x)^2+1\right] \\ &= \frac{x(x^2+1)}{f(x)} \end{aligned}$$

我们得到: $f'(x)f(x)=x^3+x\Rightarrow[f^2(x)]'=2x^3+2x$

我们得到: $f^2(x)=\frac{x^4}{2}+x^2+C,\ f(1)=\sqrt{2}\Rightarrow C=\frac{1}{2}$

我们得到: $f(x)=\sqrt{\frac{x^4}{2}+x^2+\frac{1}{2}}=\frac{x^2+1}{\sqrt{2}}$

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续, 在 $(0,+\infty)$ 恒正,$x>0$ 时, 我们有 $[f(x)]^3\leq 3\int_0^x f^2(t)dt$, 证明:$x\geq 0$时, 均有$f(x)\leq x$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=\int_0^x f^2(t)dt,\ F'(x)=f^2(x)$

我们得到:

$$[F'(x)]^{\frac{3}{2}} \le 3F(x) \Rightarrow F'(x) \le 3^{\frac{2}{3}}[F(x)]^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{F'(x)}{[F(x)]^{\frac{2}{3}}} \le 3^{\frac{2}{3}}$$

我们构造: $G(x) = F(x)\frac{1}{3}$, $G'(x) = \dfrac{F'(x)}{3[F(x)]^{\frac{2}{3}}} \le 3^{-\frac{1}{3}}$

我们得到:$G(x) \le \int_0^x 3^{-\frac{1}{3}} = 3^{-\frac{1}{3}}x \Rightarrow F(x)^{\frac{1}{3}} \le 3^{-\frac{1}{3}}x$

我们有:

$$F'(x) \le 3^{\frac{2}{3}}[F(x)]^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f^2(x) \le x^2 \Rightarrow f(x) \le x$$

我们补充 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, 综上所述, 我们得到: $x \ge 0$时, 均有$f(x) \le x$

August 17

1. 已知 $f(x) = \dfrac{x|x|}{1+x}$, 求 $f(x)$ 的凹凸区间以及渐近线

解

我们有:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x}{(1+x)^2}, & x \ge 0 \\ -\dfrac{x^2+2x}{(1+x)^2}, & x < 0, \text{且} x \ne -1 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(1+x)^3}, & x > 0 \\ -\dfrac{2}{(1+x)^3}, & x < 0, \text{且} x \ne -1 \end{cases}$$

$f'(0) = 0$, 我们利用导数定义得到:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f'(x)}{x} = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f'(x)}{x} = -2 \end{cases} \Rightarrow f''(x)\text{在}x = 0\text{跳跃间断}$$

当 $x \in (0,+\infty)$,$f''(x) > 0$, 我们可以得到:$(0,+\infty)$ 是 $f(x)$ 的凹区间;

当 $x \in (-\infty,-1)$,$f''(x) > 0$, 我们可以得到:$(-\infty,-1)$ 是 $f(x)$ 的凹区间;

当 $x \in (-1,0)$,$f''(x) < 0$, 我们可以得到:$(-1,0)$ 是 $f(x)$ 的凸区间.

铅锤渐近线:$x = -1$; 无水平渐近线

斜渐近线:

(1).

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

(2).

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - ax) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

综上所述,$f(x)$ 有三条渐近线, 铅锤渐近线 $x = -1$; 斜渐近线 $y = x - 1$ 和 $y = -x + 1$.

2. 函数 $f(x)$ 具有二阶连续的导数, 曲线 $y=f(x)$ 既关于 y 轴对称也关于直线 $x=1$ 对称, 求 $\int_{-2}^{2}(x-2024)f''(x)dx$

解

周期性、轴对称性、中心对称性

我们可以得到 $f(x)$ 是以 $T=2$ 为周期的周期函数; 且 $f(x)$ 是偶函数,$f'(x)$ 是奇函数且为周期函数.

原定积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^{2}(x-2024)df'(x) \\ &= (x-2024)f'(x)|_{x=-2}^{x=2} - \int_{-2}^{2} f'(x)dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. 设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} x+y, \ 0\le x\le 1, \ 0\le y\le 1 \\ 0, \ 其他 \end{cases}$

(1). 求 $\max\{X,Y\}$ 的分布函数和概率密度

(2). 求 $\min\{X,Y\}$ 的分布函数和概率密度

解

August 18

1. 曲线 $y=x(1+\arcsin\dfrac{2}{x})$ 的斜渐近线方程

解

(1). $x\Rightarrow +\infty$

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}(1+\arctan\dfrac{2}{x}) \\ b = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\arctan\dfrac{2}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

(2). $x\Rightarrow -\infty$

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}(1+\arctan\dfrac{2}{x}) \\ b = \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\arctan\dfrac{2}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

综上所述,$f(x)$ 的斜渐近线方程为:$y=x+2$

2. $\int_0^1 \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{x^2-x+1}dx$

解

我们有:$\begin{cases}\sin\theta=\sqrt{x}\\ \cos\theta=\sqrt{1-x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\arcsin\sqrt{x}=\theta\\ \arcsin\sqrt{1-x}=\frac{\pi}{2}-\theta\end{cases}$ 我们利用区间再现公式得到:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{1-x}}{x^2-x+1}dx\\
2I &= \int_0^1 \frac{\pi}{2(x^2-x+1)}dx\\
I &= \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{\pi}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx\\
&= \frac{\pi}{4}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}|_{x=0}^{x=1}\\
&= \frac{\sqrt{3}\pi^2}{18}
\end{aligned}$$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$

解

我们利用区间再现公式得到:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x})dx\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\frac{2}{1+\tan x})dx\\
2I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2dx\\
I &= \frac{\pi\ln 2}{8}
\end{aligned}$$

4. 设 $f(x)=\arctan x$, 求 $f^{(n)}(0)(n$ 为奇数)

解

我们利用泰勒展开式:

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}$$

$$\begin{cases}f(x)=\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}\\ f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}+\cdots\end{cases}$$

我们可以得到:$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\Rightarrow f^{(n)}(0)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!$

综上所述, 我们得到: $f^{(n)}(0)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!$, n为奇数

5. 设 $f(x)=\begin{cases} ax+1,\ x<0 \\ be^x,\ x\geq 0 \end{cases}$ 为可导函数, 求 $\int f(\ln x)dx$

解

我们可以知道 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=b \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1 \end{cases} \Rightarrow b=1$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=b \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=a \end{cases} \Rightarrow a=b=1$$

我们令 $g(x)=f(\ln x)$, 我们得到:$g(x)=\begin{cases} 1+\ln x,\ x\in(0,1) \\ x,\ x\in[1,+\infty) \end{cases}$

我们得到:$\int g(x)dx=\begin{cases} x\ln x+C \\ \dfrac{x^2-1}{2}+C \end{cases}$

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导,$f(a)=a,\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$, 证明:$\exists\xi\in(a,b),\ s.t. f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=\dfrac{f(x)-x}{e^x}$, 我们有: $F(a)=0$

我们由 $\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$ 得到:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b xdx\Rightarrow\int_a^b [f(x)-x]\,dx=0\Rightarrow\exists\theta\in(a,b),\ s.t. f(\theta)=\theta$$

我们有:

$$\begin{cases} F'(x)=\dfrac{f'(x)-f(x)+x-1}{e^x} \\ F(a)=F(\theta)=0 \end{cases}$$

我们对 $F(x)$ 在区间 (a,θ) 上使用罗尔定理可以得到:

$$\exists\xi\in(a,b),\ s.t. F'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1$$

综上所述, 我们得到: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t. f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1$

August 19

1. 求 $\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{x\sin x}{(1+2^x)(1+\cos^2 x)}dx$

解

我们可以得到:

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2^x x\sin x}{(1+2^x)(1+\cos^2 x)}dx\Rightarrow 2I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx\Rightarrow I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

我们利用区间再现公式得到:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx \\ &= \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

2. 求 $\int_0^1\frac{\arctan e^{2x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}dx$

解

我们利用区间再现公式:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1\frac{\arctan e^{1-2x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}dx \\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}dx \\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta \\ &= \frac{\pi}{4}\left[2-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}d(\theta+\frac{\pi}{4})\right] \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}\pi}{4}\ln(\sqrt{2}+1) \end{aligned}$$

3. 求曲线 $y=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+x^2}$ 的渐近线所围区域的面积

解

我们由题意知:$f(x)$ 在 $x=0$ 处无定义,$x=0$ 是 $f(x)$ 的铅垂渐近线.

我们知道 $x\Rightarrow+\infty,f(x)\Rightarrow+\infty$; 当 $x\Rightarrow-\infty,f(x)\Rightarrow+\infty$.

$$(1).\begin{cases} a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{t\to0^+}e^t\sqrt{1+t^2}=1 \\ b=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{e^t\sqrt{1+t^2}-1}{t}=1 \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $+\infty$ 处的渐近线为 $y=x+1$

$$(2).\begin{cases} a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{t\to0^-}-e^t\sqrt{1+t^2}=-1 \\ b=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]=\lim\limits_{t\to0^-}\dfrac{1-e^t\sqrt{1+t^2}}{t}=-1 \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $-\infty$ 处的渐近线为 $y=-x-1$

我们可以得到: $S=1$

4. 随机变量 X 服从分布 $X\sim E(1)$, 随机变量 Y 服从分布 $Y\sim B(1,\frac{1}{2})$,X,Y 相互独立, 随机变量 $Z=X-Y$, 求 $f_z(Z)$

解

5. 设 $f(x)$ 是单调可导函数,$f(-\frac{\pi}{2})=-f(\frac{\pi}{2})$,$g(x)$ 是 $f(x)$ 反函数, 且 $f(x)$ 满足:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{f(x)} g(t)dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\left(\frac{1}{1+e^{-|t|}}+\frac{\sin t}{1+e^{-\frac{\pi}{2}}}\right)\sin tdt$$

求积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

解

我们对上述等式两边对 x 求导可以得到:

$$g(f(x))\cdot f'(x)=\frac{\sin x}{1+e^{-|x|}}+\frac{\sin^2 x}{1+e^{-\frac{\pi}{2}}}\Rightarrow xf'(x)=\frac{\sin x}{1+e^{-|x|}}+\frac{\sin^2 x}{1+e^{-\frac{\pi}{2}}}$$

我们利用分部积分可以得到:

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx &= xf(x)|_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx\\ &= -\frac{2}{1+e^{-\frac{\pi}{2}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 dx\\ &= \frac{-\pi}{2(1+e^{-\frac{\pi}{2}})}\end{aligned}$$

August 20

1. 设 $f(x)=\arctan x\cdot e^{ax}$, 且 $f'''(0)=2$, 求 a^2

解

我们根据泰勒展开式:

$$\begin{cases}\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\\ e^{ax}=1+ax+\frac{(ax)^2}{2!}+\cdots\end{cases}\Rightarrow f(x)=x+ax^2+(\frac{a^2}{2}-\frac{1}{3})x^3+\cdots$$

我们可以得到: $f'''(0)=3a^2-2=2\Rightarrow a^2=\frac{4}{3}$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 的导函数连续,$f(0)=0$,$|f'(x)-f(x)|\le 1$, 证明: $|f(x)|\le e^x-1$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=e^{-x}f(x)\Rightarrow F'(x)=e^{-x}(f'(x)-f(x))$

我们由: $|f'(x)-f(x)|\le 1\Rightarrow |F'(x)|\le e^{-x}$

我们对 $F(x)$ 在 $[0,x](x>0)$ 上求不定积分, 我们可以得到:

$$\begin{cases}-e^{-x}\le F'(x)\le e^{-x}\\ \int_0^x -e^{-t}dt\le \int_0^x F'(t)dt\le \int_0^x e^{-t}dt\end{cases}\Rightarrow \int_0^x |F'(t)|dt=|F(x)|-|F(0)|=e^{-x}|f(x)|\le \left|\int_0^x e^{-t}dt\right|=1-e^{-x}$$

综上所述, 我们得到: $|f(x)|\le e^x-1$

3. 求曲线 $y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}(x>0)$ 的斜渐近线方程

解

我们不妨设曲线的斜渐近线方程为: $y=ax+b$, 我们可以得到:

$$\begin{cases}a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=e^{\lim\limits_{t\to0}-\frac{\ln(t+1)}{t}}=e^{-1}\\ b=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\dfrac{1}{2e}\end{cases}$$

综上所述, 曲线的斜渐近线方程为: $y=\frac{x}{e}+\frac{1}{2e}$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx$

解

我们利用区间再现公式:

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)dx\\ 2I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x\cos x)dx\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln 2dx\\ &=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin x)dx-\frac{\pi\ln 2}{2}\\ &=I-\frac{\pi\ln 2}{2}\\ I&=\frac{\pi\ln 2}{2}\end{aligned}$$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{1+\tan^n x}dx$

解

原定积分等价于: $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^n)(1+x^2)}dx$

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^n)(1+x^2)}dx\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{x^n}{(1+x^n)(1+x^2)}dx\\ 2I &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx\\ &= \frac{\pi}{2}\\ I &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

6. 设随即变量 (X,Y) 的联合概率密度为: $f(x,y)=\begin{cases}\frac{21}{4}x^2y,\ x^2\le y\le 1\\ 0,\ 其他\end{cases}$, 求 $P\{Y\geq 0.75|X=0.5\}$

解

August 21

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{g(x)}{x},\ x\neq 0\\ 0,\ x=0\end{cases}$, 其中 $g(x)$ 在 $x=0$ 的一个邻域内有二阶导数, 且 $g(0)=0, g'(0)=0$, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处

- A. 不连续
- B. 连续, 但 $f'(0)$ 不存在
- C. $f'(0)$ 存在, 但 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续
- D. $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

解

(1). $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续性

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}g'(x)=0\\ f(0)=0\end{cases}\Rightarrow f(x)在x=0处连续$$

(2). $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续性

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{xg'(x)-g(x)}{x^2},x\neq0\\ f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)}{x^2}=\frac{g''(0)}{2}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to0} f'(x) = \lim_{x\to0}\frac{xg'(x)-g(x)}{x^2} = \frac{g''(0)}{2} = f'(0)$$

综上所述, 我们得到 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续,$\int_0^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛,$a_n = \int_0^1 f(nx)dx$, 证明: $k>0$时, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n^2}{n^k}$ 收敛.

解

我们由 $a_n = \int_0^1 f(nx)dx \Rightarrow a_n = \frac{1}{n}\int_0^n f(x)dx$, 我们可以得到:

$$\begin{cases} a_n^2 = \dfrac{[\int_0^n f(x)dx]^2}{n^2} \le \dfrac{\int_0^n [f(x)]^2dx}{n}(\text{积分形式柯西不等式}) \\ b = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n [f(x)]^2dx = \int_0^{+\infty} f^2(x)dx\text{收敛} \end{cases}$$

我们得到:

$$\frac{a_n^2}{n^k} \le \frac{\int_0^n [f(x)]^2dx}{n^{1+k}} \le \frac{b}{n^{1+k}}$$

我们已知级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b}{n^{1+k}}(k>0,b>0)$ 收敛, 我们根据比较判别法可以得到: 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n^2}{n^k}$ 收敛

3. 已知方程 $x^5-5x+k=0$ 有三个不同的实数根, 求 k 的取值范围

解

我们令 $f(x)=x^5-5x+k, f'(x)=5x^4-5=5(x^2+1)(x+1)(x-1)$

$$\begin{cases} x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty),\ f'(x)>0 \\ x\in(-1,1),\ f'(x)<0 \end{cases}$$

我们得到: $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增;$(-1,1)$ 上单调递减;$(1,+\infty)$ 上单调递增.

我们有: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$,$f(x)$ 有三个不同的实数根, 我们需要满足:

$$\begin{cases} f(-1)>0 \\ f(1)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k+4>0 \\ k-4>0 \end{cases} \Rightarrow k\in(-4,4)$$

综上所述, 我们得到 k 的取值范围为 $(-4,4)$.

4. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)}dx$

解

原定积分可以化为:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} dx \\ 2I &= \int_0^{+\infty} \frac{1+x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \\ I &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

5. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$

解

原定积分可以化为:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\frac{2}{1+\tan\theta}) d\theta \\ 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 d\theta \\ &= \frac{\pi \ln 2}{4} \\ I &= \frac{\pi \ln 2}{8} \end{aligned}$$

6. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \int_{\ln(1+x)}^{x} \frac{(1-2t)^{\frac{1}{t}}}{t^2} dt$

解

我们利用第二积分中值定理可以得到:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\xi}{x} = 1$$

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}(x-\ln(1+x))\frac{(1-2\xi)^{\frac{1}{\xi}}\xi^2}{,}\ \xi\in(\ln(1+x),x)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{\xi^2}\lim_{\xi\to 0}(1-2\xi)^{\frac{1}{\xi}}\\
&= \frac{e^{-2}}{2}
\end{aligned}
$$

34.4 Week IV

August 22

1. 已知 $f(x)=[x]\sin\pi x$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 求 $f'(x)$

解

(1).

$$x\in(n,n+1),(n\in\mathbb{Z}),\ [x]=n$$

我们得到:

$$f'(x)=n\pi\cos(\pi x),\ x\in(n,n+1),\ n\in\mathbb{Z}$$

(2). 当 $x=n,\ n\in\mathbb{Z}$ 时, 我们利用导数定义可以得到:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to n^+}\dfrac{n\sin\pi x}{x-n}\\ \lim\limits_{x\to n^-}\dfrac{(n-1)\sin\pi x}{x-n}\end{cases}\Rightarrow f'(n)\text{不存在}$$

综上所述, 我们得到: $f'(x)=\begin{cases}[x]\cos\pi x,\ x\neq n,\ n\in\mathbb{Z}\\ \text{不存在},\ x=n,\ n\in\mathbb{Z}\end{cases}$

2. 设函数 $f(x)=ax-b\ln x(a>0)$ 有两个零点, 求 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围.

解

我们首先得到 $f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$, 我们有: $f'(x)=\dfrac{ax-b}{x}$.
(1). 当 $b\le 0$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 至多存在一个零点.
(2). 当 $b>0$ 时, 令 $f'(x)=0\Rightarrow x=\dfrac{b}{a}$.

$$\begin{cases}x\in(0,\frac{b}{a}),\ f'(x)<0\\ x\in(\frac{b}{a},+\infty),\ f'(x)>0\end{cases}\Rightarrow f(x)_{min}=f(\frac{b}{a})$$

我们有:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$$

当且仅当 $f(\frac{b}{a}) < 0$ 时,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个零点.

$$f(\frac{b}{a}) = b(1-\ln\frac{b}{a}) < 0 \Rightarrow \frac{b}{a} > e$$

综上所述, 我们得到 $\frac{b}{a}$ 的取值范围为 $(e,+\infty)$.

3. $\int_0^1 \frac{x^2}{x+\sqrt{1-x^2}}dx$

解

原定积分可以化为:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta \\ 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\cos\theta+\cos^2\theta\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \\ I &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

4. $\int_0^1 \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}dx$

解

原定积分可以化为:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta} d\theta \\ 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \\ I &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

5. 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1+\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right)\right]^n$

解

原极限可以化为:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n\to+\infty}\left[1+\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)\right]^n \\ &= e^{\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left[1+\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)\right]} \\ &= e^{\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)} \\ &= e^{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi n}{\sqrt{1+4n^2}+2n}} \\ &= e^{\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

6. 设 $f_n(x)=\tan^n x(n=1,2,\cdots)$, 且曲线 $y=\tan^n x$ 在点 $x=\frac{\pi}{4}$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(x_n,0)$, 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n)$

解

我们先求切线方程:

$$\begin{cases} f(x)=\tan^n x \\ f(\frac{\pi}{4})=1 \\ f'(x)=n\tan^{n-1}x\sec^2 x \end{cases} \Rightarrow l:\ y-1=2n(x-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow x_n=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2n}$$

原极限可以化为:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n\to+\infty} \tan^n\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2n}\right) \\ &= e^{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\tan(\frac{\pi}{4}-x))}{2x}} \\ &= e^{-1} \end{aligned}$$

综上所述, 我们得到: $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = e^{-1}$

7. 设 A 是 3 阶实对称矩阵, 且不可逆, $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 3 \\ -12 & -6 & 12 \end{pmatrix}$, 求 A

解

我们利用谱分解定理: $A = \sum\limits_{i=1}^{3} \lambda_i G_i$, $G_i = e_i e_i^T$

我们将上述方程两边取转置得到:

$$A^T \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \\ & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -6 & -6 \\ 3 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A^T\xi_1 = 3\xi_1 \\ A^T\xi_2 = 6\xi_2 \end{cases}$$

我们知道矩阵 A^T 的两个特征值为 $3, 6$, 又因为矩阵 A 不可逆, 矩阵 A^T 的三个特征值分别为 $0, 3, 6$

我们可以得到: $A^T = \sum\limits_{i=1}^{3} \lambda_i G_i = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

我们有 $A^T = A$, 综上所述, 我们得到: $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

August 23

1. 已知方程 $\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} = k$ 在区间 $(0,1)$ 有实数根, 求 k 的取值范围

解

我们构造辅助函数: $f(x) = \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}$, 我们有:

$$f'(x) = \frac{(1+x)\ln^2(1+x) - x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)},\ x \in (0,1)$$

我们构造辅助函数: $g(x) = 2\ln x - \dfrac{x^2-1}{x}$, $x \in (1,2)$

我们有:

$$\begin{cases} g'(x) = \dfrac{-(x-1)^2}{x^2} \le 0 \\ g(x)\text{单调递减} \\ g(x) \le g(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow 2\ln t \le \frac{t^2-1}{t},\ t \in (1,2) \Rightarrow \ln^2(1+x) \le \frac{x^2}{1+x}$$

我们得到: $f'(x) \le 0,\ x \in (0,1) \Rightarrow f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减.

我们有:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{\ln 2} - 1 \end{cases}$$

综上所述,k 的取值范围为: $(\frac{1}{\ln 2} - 1, \frac{1}{2})$

2. 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x},\ x \ne 0 \\ 1,\ x = 0 \end{cases}$, 则下列关于 $y = \dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}$ 的命题正确的个数

- A. 有垂直渐近线
- B. 有水平渐近线
- C. 有斜渐近线
- D. 是有界函数

解

我们可以得到: $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 我们令 $g(x) = \dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}$

首先 $g(x)$ 在 $x=0$ 处无定义, 我们可以得到:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow g(x)\text{没有垂直渐近线}$$

其次 $g(x)$ 在 ∞ 处水平渐近线:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow g(x)\text{在}x \Rightarrow -\infty\text{时有水平渐近线}y = 0$$

在 $x \Rightarrow +\infty$ 时, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x-1}{2x^2} = +\infty$,$g(x)$ 不存在斜渐近线, 且 $g(x)$ 为无界函数.

3. $\int_0^{+\infty} \dfrac{\ln x}{1+x^2} dx$

解

原定积分可以化为:

$$\begin{aligned} I &= -\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}dt \\ &= -I \\ I &= 0 \end{aligned}$$

4. $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1-x^2+x^4)}{(1+x^2)\ln x}dx$

解

原定积分可以化为:

$$\begin{aligned} I &= -\int_0^{+\infty}\frac{\ln(t^4-t^2+1)}{(1+t^2)\ln t}dt+\int_0^{+\infty}\frac{4}{1+t^2}dt \\ &= -I+2\pi \\ I &= \pi \end{aligned}$$

5. 已知函数 $f(x)$ 三阶可导, 则下列命题中不是 $(0,f(0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点的必要条件的有:

- A. 存在 $\delta>0$,$f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调下降,$f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加
- B. 存在 $\delta>0$, 当 $x\in(-\delta,\delta)$, 有 $f''(-x)=-f''(x)$
- C. $f''(0)=0,\ f'''(0)\neq 0$

解

拐点是函数凹凸性发生改变的函数点, 由函数 $f(x)$ 三阶可导, 我们可以得到 $f''(x_0)=0$, 且有:

$$\begin{cases} f''(a)\cdot f''(b)<0,\ a\in(x_0-\xi,x_0),\ b\in(x_0,x_0+\xi) \\ f'''(x_0)\text{符号不确定} \\ f(x)=x^3 \end{cases}$$

综上所述, 上述三个命题都不正确.

6. 下列命题正确的是:

- A. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=a$, 则 $f'(x_0)=a$
- B. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 不存在, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处不可导
- C. 若 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续, 则在 x_0 的某邻域内 $f'(x)$ 存在
- D. 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导,$g(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导, 则 $f(x)\cdot g(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导

解

重要反例:

(1). 函数在某个点无定义, 但是这个点处导数极限存在

$$f(x)=\arctan\frac{1}{x},\ f'(x)=-\frac{1}{1+x^2}$$

(2). 函数导函数在某点处可导, 但是导函数在该点处极限不存在

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x},\ x\neq 0\\ 0\end{cases},f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},\ x\neq 0\\ 0\end{cases}$$

7. (1). 证明: $\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2},\ (n\in\mathbb{N}^*)$

(2). 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{n^2+i}{n^2}$

解

(1). 我们构造辅助函数: $f(x)=x-\ln(1+x)-\frac{x^2}{2},\ x\in(0,1]$

我们有: $f'(x)=1-x-\frac{1}{1+x}=\frac{-x^2}{1+x}<0, f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减, 我们得到: $f(x)<f(x)_{max}=f(0)=0$

我们得到: $f(x)<0,\ x\in(0,1]\Rightarrow\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2},\ (n\in\mathbb{N}^*)$

(2). 我们由:

$$\begin{cases}\ln(1+x)<x,\ x\in(0,1]\\ \ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2},\ x\in(0,1]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ln(1+\frac{i}{n^2})<\frac{i}{n^2}\\ \ln(1+\frac{i}{n^2})>\frac{i}{n^2}-\frac{i^2}{2n^4}\end{cases}$$

我们可以得到:

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{n^2+i}{n^2}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\ln(1+\frac{i}{n^2})}$$

$$e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\frac{i}{n^2}-\frac{i^2}{2n^4}}\leq I\leq e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\frac{i}{n^2}}$$

$$e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4}}\leq I\leq e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n}}$$

左边 = 右边 = $e^{\frac{1}{2}}$, 我们由夹逼定理可以得到原式子 $I=e^{\frac{1}{2}}$

8. 设区域 $D_1:\{(x,y)|0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1\}$,$D_2:\{(x,y)|x^2+y^2\leq r^2,\ (r>0)\}$, 比较 $I=\iint\limits_{D_1}(\cos x^2+\sin y^2)\,dxdy$, $J=\iint\limits_{D_1}\sqrt{2}dxdy$, $K=\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{D_2}e^{x^2-y^2}\cos(x+y)dxdy$ 大小

解

我们首先可以得到: $J=\sqrt{2}$

我们根据轮换对称性:

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{D_1} \left(\cos x^2 + \sin y^2\right) dxdy \\ &= \iint\limits_{D_1} \left(\cos x^2 + \sin x^2\right) dxdy \\ &= \iint\limits_{D_1} \left(\sqrt{2}\sin(x^2 + \frac{\pi}{4})\right) dxdy \\ &\in (1, \sqrt{2}) \end{aligned}$$

我们对于 K, 我们根据积分中值定理可以得到:

$$\begin{aligned} K &= \lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} e^{\xi^2-\eta^2} \cos(\xi+\eta) \iint\limits_{D_2} 1dxdy \\ &= \lim_{r\to 0} e^{\xi^2-\eta^2} \cos(\xi+\eta) \\ &= 1 \end{aligned}$$

综上所述, 我们得到: $\begin{cases} I \in (1, \sqrt{2}) \\ J = \sqrt{2} \\ K = 1 \end{cases} \Rightarrow K < I < J$

August 24

1. 证明: 若在区间 I 上 $f^{(n)}(x) \neq 0$, 则方程 $f(x) = 0$ 在 I 上最多 n 个实数根

解

我们利用反证法, 来证明: 方程 $f(x) = 0$ 在区间 I 上有超过 n 个实数根, 则 $f^{(n)}(x) = 0$ 在区间 I 上有解.

我们不妨假设 $\exists x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} \in I$, 且满足 $f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_n) = f(x_{n+1}) = 0$.

我们对 $f(x)$ 在区间 $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \cdots, (x_n, x_{n+1})$ 上使用罗尔定理:

$$\begin{cases} \exists \xi_1 \in (x_1, x_2),\ s.t. f'(\xi_1) = 0 \\ \exists \xi_2 \in (x_2, x_3),\ s.t. f'(\xi_2) = 0 \\ \cdots\cdots \\ \exists \xi_n \in (x_n, x_{n+1}),\ s.t. f'(\xi_n) = 0 \end{cases}$$

我们以此类推, 我们可以得到: $\exists \eta_1, \eta_2 \in I,\ s.t. f^{(n-1)}(x) = 0$, 我们再次使用罗尔定理, 可以得到: $\exists \mu \in (\eta_1, \eta_2),\ s.t. f^{(n)}(\mu) = 0$

综上所述, 原命题的逆否命题成立, 原命题成立.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $(0, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0$, 下列命题正确的是:

- A. 若 $f(0)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在
- B. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2024$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=2024$
- C. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=1$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$
- D. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=1$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt=\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在

解

(A). $f(x)=\sqrt{x}$

(B). $f(x)=2024x+\sin x$, $f'(x)=2024+\cos x$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$不存在

(C). $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(x)dt}{x}$

我们有:

$$\int_0^x f(t)dt<\int_0^x f(x)dt<\int_x^{2x}f(t)dt\Rightarrow\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}<\frac{\int_0^x f(x)dt}{x}<\frac{\int_x^{2x}f(t)dt}{x}$$

我们有: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^{2x} f(t)dt}{x}=2\end{cases}$

我们可以得到: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

(D). 我们假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在, 我们可以得到:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\lim_{x\to+\infty}f(x)\neq1$$

3. 讨论 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x^m|\ln x|^n}{1+x^k}dx$ 的敛散性

解

我们可知函数可能的暇点为 $x=0$, $x=1$, $x=+\infty$

(1). $x=0$

当 $k\geq0$ 时,$1+x^k$ 非零, 原反常积分敛散性等价于: $\int_0^{\frac12}x^m|\ln x|^n dx$

$$\begin{cases}m>-1,\text{反常积分收敛}\\ m=-1,n<-1\text{反常积分收敛}\end{cases}$$

当 $k<0$ 时, 原反常积分敛散性等价于: $\int_0^{\frac12}x^{m-k}|\ln x|^n dx$

$$\begin{cases}m-k>-1,\text{反常积分收敛}\\ m-k=-1,n<-1,\text{反常积分收敛}\end{cases}$$

(2). $x=1$

原反常积分敛散性等价于: $\int_{\frac12}^1|\ln x|^n dx$ 和 $\int_1^2|\ln x|^n dx$ 收敛 $\Rightarrow n>-1$

(3).$x=+\infty$

当 $k\geq 0$ 时, 原反常积分敛散性等价于: $\int_2^{+\infty} x^{m-k}|\ln x|^n dx$

$$\begin{cases} m-k<-1, \text{反常积分收敛} \\ m-k=-1, n<-1, \text{反常积分收敛} \end{cases}$$

当 $k<0$ 时, 原反常积分敛散性等价于: $\int_2^{+\infty} x^{m}|\ln x|^n dx$

$$\begin{cases} m<-1, \text{反常积分收敛} \\ m=-1, n<-1, \text{反常积分收敛} \end{cases}$$

综上所述, 我们得到: $\begin{cases} n>-1 \\ k<0, k-1<m<-1 \\ k>0, -1<m<k-1 \end{cases}$ 时, 原反常积分收敛

4. 对于 $y=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ 而言, 下列说法正确的是:

- A. 当 n 无论为偶数还是奇数时, 函数都取极值
- B. 当 n 无论为偶数还是奇数时, 函数都不取极值
- C. 当 n 为偶数时, 函数取极值; 当 n 为奇数时, 函数不取极值
- D. 当 n 为偶数时, 函数不取极值; 当 n 为奇数时, 函数取极值

解

我们对原函数求导, 可以得到:

$$f'(x)=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}$$

(1). 当 n 为偶数时,$f'(x)\leq 0$,$f(x)$ 没有极值点

(2). 当 n 为奇数时,$x<0$ 时,$f'(x)>0$;$x>0$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 在 $x=0$ 处取极值.

5. 设 $f(x)$ 连续,$g(x)=f(x)\cdot\int_0^x f(t)dt$ 单调不增, 证明 $f(x)\equiv 0$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=\frac{1}{2}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2$

我们有:

$$\begin{cases} F(0)=0 \\ F'(x)=f(x)\int_0^x f(t)dt\text{单调不增} \\ F'(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,0), F'(x)\geq 0 \\ x\in(0,+\infty), F'(x)\leq 0 \end{cases} \Rightarrow F(x)\leq F(0)=0$$

我们有: $F(x)=\frac{1}{2}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2\geq 0 \Rightarrow F(x)=0 \Rightarrow f(x)\equiv 0$

综上所述, 我们得到: $f(x)\equiv 0$

August 25

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导, 且 $f''(x)\neq 0, \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{xf'(x)}=\alpha>0$, 且存在一点 $f(x_0)<0$, 证明: 方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上恰有两个实数根

解

我们可以得到:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\dfrac{1}{\alpha}>0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\dfrac{1}{\alpha}<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\exists x_1\in(0,+\infty),f(x_1)>0\\ \exists x_2\in(-\infty,0),f(x_2)>0\end{cases}$$

我们由 $f''(x)\neq 0$, 且 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)>0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)<0\end{cases}\Rightarrow f''(x)>0$

我们可以得到 $f'(x)$ 单调递增,$\exists x_3\in(-\infty,+\infty)$, $s.t. f'(x_3)=0$.

我们可以得到 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_3)$ 上单调递减,$(x_3,+\infty)$ 上单调递增, 且 $\exists x_0, s.t. f(x_0)<0$.

我们根据单调性可知 $f(x)$ 至多两个零点, 根据零点定理可知 $(-\infty,x_0)$ 和 $(x_0,+\infty)$ 上都有一个零点, 我们得到 $f(x)$ 有且仅有两个零点.

综上所述, 我们得到: 方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上恰有两个实数根

2. 讨论 $\int_0^{+\infty}\dfrac{(1+x^p)\ln|\ln x|}{x^q}dx$ 的敛散性

解

我们可以找到函数可能的暇点为 $x=0,x=1,x=+\infty$

(1). $x=0$

当 $p\geq 0$ 时,$1+x^p$ 非零, 原反常积分敛散性等价于: $\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{\ln|\ln x|}{x^q}dx$

$$\begin{cases}q<1,\text{反常积分收敛}\\ q=1,n<-1\text{反常积分发散}\end{cases}$$

当 $p<0$ 时, 原反常积分敛散性等价于: $\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{\ln|\ln x|}{x^{q-p}}dx$

$$\begin{cases}q-p<1,\text{反常积分收敛}\\ q-p=1,\text{反常积分发散}\end{cases}$$

(2). $x=1$

原反常积分敛散性等价于: $\int_{\frac{1}{2}}^1\ln|\ln x|dx$ 和 $\int_1^2\ln|\ln x|dx$ 收敛

(3).$x=+\infty$

当 $p \le 0$ 时, 原反常积分敛散性等价于: $\int_2^{+\infty} \frac{\ln|\ln x|}{x^q} dx$

$$\begin{cases} q > 1, \text{反常积分收敛} \\ q = 1, , \text{反常积分发散} \end{cases}$$

当 $p > 0$ 时, 原反常积分敛散性等价于: $\int_2^{+\infty} \frac{\ln|\ln x|}{x^{q-p}} dx$

$$\begin{cases} q - p > 1, \text{反常积分收敛} \\ q - p = 1, \text{反常积分发散} \end{cases}$$

综上所述, 我们得到, 原反常积分一定发散.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某个邻域内可导,$g(x)$ 在 $x = 0$ 的某个邻域内连续, 且 $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = 0$, $f'(x) = \sin^2 x + \int_0^x g(x-t)dt$, 则下列命题正确的是:

- A. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点
- B. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点
- C. $(0, f(0))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点
- D. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0, f(0))$ 不是 $y = f(x)$ 的拐点

解

我们首先可以得到: $g(0) = 0, g'(0) = 0$, 我们有:

$$\begin{cases} f''(x) = 2\sin x \cos x + g(x) \\ f''(0) = 0 \\ f'''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x \cos x + g(x)}{x} = 2 \end{cases}$$

我们可以得到:

$$\begin{cases} x \in (-\xi, 0), f''(x) < 0 \\ x \in (0, \xi), f''(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)\text{在}(-\xi, 0)\text{单调递减}; f'(x)\text{在}(0, \xi)\text{单调递增} \Rightarrow f'(x) \ge f'(0) = 0$$

我们有: $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点;$(0, f(0))$ 是 $f(x)$ 的拐点.

4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 是来自正态总体 X 的简单随机样本,$Y_1 = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_6}{6}$,$Y_2 = \frac{X_7 + X_8 + X_9}{3}$,$S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9}(X_i - Y_2)^2$,$Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S}$, 证明: $Z \sim t(2)$

解

August 26

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上可导, 且 $f'(x) > f(x) > 0$, 下列命题正确的是:

- A. $\dfrac{f(-2)}{f(-1)} > 1$
- B. $\dfrac{f(0)}{f(-1)} > e$
- C. $\dfrac{f(1)}{f(-1)} < e^2$
- D. $\dfrac{f(2)}{f(-1)} < e^3$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = \dfrac{f(x)}{e^x}$

我们有: $F'(x) = \dfrac{f'(x) - f(x)}{e^x} > 0$,$F(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上单调递增.

$$\begin{cases} F(-1) > F(-2) \\ F(0) > F(-1) \\ F(1) > F(-1) \\ F(2) > F(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{f(-2)}{f(-1)} < \dfrac{1}{e} \\ \dfrac{f(0)}{f(-1)} > e \\ \dfrac{f(1)}{f(-1)} > e^2 \\ \dfrac{f(2)}{f(-1)} > e^3 \end{cases}$$

2. 设 $D = \{(p, q) | \int_0^{+\infty} \dfrac{x^p |x-1|^q}{(x+1)\ln x \ln(x+2)} dx$收敛$\}$, 求 D 绕 q 轴旋转一周扫过的体积

解

我们可以找到函数可能的暇点为 $x = 0, x = 1, x = +\infty$

(1). $x = 0$

原反常积分敛散性等价于: $\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{x^p}{\ln x} dx$

$$\begin{cases} p > -1, \text{反常积分收敛} \\ p \le -1, \text{反常积分发散} \end{cases}$$

(2). $x = 1$

原反常积分敛散性等价于: $\int_{\frac{1}{2}}^1 \dfrac{|x-1|^q}{\ln x} dx$ 和 $\int_1^2 \dfrac{|x-1|^q}{\ln x} dx$

$$\begin{cases} q - 1 > -1, \text{反常积分收敛} \\ q - 1 \le -1, \text{反常积分发散} \end{cases}$$

(3).$x = +\infty$

原反常积分敛散性等价于: $\int_2^{+\infty}\frac{x^{p+q-1}}{\ln^2 x}dx$

$$\begin{cases} p+q-1<-1, \text{反常积分收敛} \\ p+q-1=-1, \text{反常积分收敛} \\ p+q-1>-1, \text{反常积分发散} \end{cases}$$

综上所述, 我们得到 $\begin{cases} p>-1 \\ q>0 \\ p+q\le 0 \end{cases}$ 时, 原反常积分收敛.

我们可以得到: $D=\{(p,q)|-1<p<0, 0<q<-p\}$, 我们可以得到:

$$V=\frac{2\pi}{3}$$

3. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 下列哪些命题是 $\int_0^x f(t)dt$ 是以 T 为周期的周期函数的充分条件:

- A. $\int_0^T [f(t)-f(-t)]\,dt=0$
- B. $f(-x)=f(x)$
- C. $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ 收敛

解

我们设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, 已知函数 $f(x)$ 为周期函数,$F(x)$ 为在周期函数等价于:

$$F(x)\text{为周期函数} \Leftrightarrow \int_0^T f(x)dx=0$$

(1). $f(x)=1, F(x)=x$

(2). $f(-x)=-f(x)\Rightarrow f(x)\text{为奇函数}\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx=0$

(3). $\int_0^{+\infty} f(t)dt=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=0}^{n}\int_{iT}^{(i+1)T} f(x)dx=\lim\limits_{n\to+\infty} nA$收敛

我们得到: $\int_0^T f(x)dx=A=0$

4. 设随机变量 X 和 Y 独立同分布,X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}, & x>0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$, 令 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$, 求 $D(Z)$

解

August 27

1. 已知常数 $k\ge \ln 2-1$, 证明: $(x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)\ge 0$

解

我们构造辅助函数: $f(x)=x-\ln^2 x+2k\ln x-1, x>0$

我们有: $\begin{cases} f'(x)=\dfrac{x-2\ln x+2k}{x} \\ f(1)=0 \end{cases}$

我们不妨设 $g(x)=x-2\ln x+2k$,$g(x)$ 与 $f'(x)$ 同号,$g'(x)=\dfrac{x-2}{x}$

我们可以得到:

$$\begin{cases} x\in(0,2), g'(x)<0 \\ x\in(2,+\infty), g'(x)>0 \end{cases} \Rightarrow g(x)_{min}=g(2)=2-2\ln 2+2k\geq 0$$

我们得到: $g(x)\geq 0\Rightarrow f'(x)\geq 0\Rightarrow f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增

我们得到:

$$\begin{cases} x\in(0,1), f(x)<0, x-1<0 \\ x\in(1,+\infty), f(x)>0, x-1>0 \\ x=1, f(x)=0, x-1=0 \end{cases} \Rightarrow (x-1)f(x)\geq 0$$

综上所述, 我们得到: $(x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)\geq 0$

2. 求 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(n-1)^3}{n(n+1)}x^n$ 的和函数 $S(x)$

解

我们不妨设 $a_n=\dfrac{(n-1)^3}{n(n+1)}$, 我们可以得到:

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=1\Rightarrow R=\frac{1}{\rho}$$

我们得到幂级数的收敛区间为 $(-1,1)$, 当 $x=\pm 1$ 时, 原级数发散, 因此原级数的收敛域为 $(-1,1)$

我们有: $a_n=\dfrac{(n-1)^3}{n(n+1)}=\dfrac{n^3-3n^3+3n-1}{n^2+n}=n-4+\dfrac{8}{n+1}-\dfrac{1}{n}$

原级数可以等价于:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n-1)^3}{n(n+1)}x^n &= \sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)x^n-5\sum_{n=1}^{+\infty}x^n+8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} \\ &= (\frac{x^2}{1-x})'-\frac{5x}{1-x}+\frac{8}{x}[-\ln(1-x)-x]+\ln(1-x) \\ &= \frac{1}{(1-x)^2}-9-\frac{5x}{1-x}-\frac{8\ln(1-x)}{x}+\ln(1-x) \end{aligned}$$

综上所述,$S(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}-9-\dfrac{5x}{1-x}-\dfrac{8\ln(1-x)}{x}+\ln(1-x)$, $x\in(-1,1)$

3. 设 $f(x)=x[\frac{1}{x}]$, $[\frac{1}{x}]$ 表示不超过 $\frac{1}{x}$ 的最大整数, 判断 $f(x)$ 的间断点及其类型

解

我们发现 $f(x)$ 可能的间断点在 $x=0,\pm\frac{1}{n}$, 且 $x-1<[x]\le x \Rightarrow \frac{1}{x}-1<[\frac{1}{x}]<\frac{1}{x}$

(1). 当在 $x=0$ 处附近,$f(x)$ 在 $x=0$ 处无定义

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\in(1-x,1)\\ \lim\limits_{x\to0^-}f(x)\in(1,1-x)\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^-}f(x)=1$$

$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点

(2). 当 $x=\frac{1}{n}$ 处附近:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}^+}f(x)=1-\frac{1}{n}\\ \lim\limits_{x\to\frac{1}{n}^-}f(x)=1\end{cases}\Rightarrow f(x)\text{在}x=\frac{1}{n}\text{跳跃间断}$$

(3). 当 $x=-\frac{1}{n}$ 处附近:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\frac{1}{n}^+}f(x)=1+\frac{1}{n}\\ \lim\limits_{x\to-\frac{1}{n}^-}f(x)=1\end{cases}\Rightarrow f(x)\text{在}x=\frac{1}{n}\text{跳跃间断}$$

综上所述,$f(x)$ 有且仅有一个可去间断点 $x=0$, 有无数多个跳跃间断点 $x=\pm\frac{1}{n}$

4. 设 $f(x,y)$ 在全平面上有连续的偏导数, 且 $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0$, 证明: $f(x,y)$ 为常数.

解

我们构造辅助函数: $g(t)=f(tx,ty)$, 我们有:

$$\begin{cases}g'(t)=xf_1(tx,ty)+yf_2(tx,ty)\\ tg'(t)=txf_1(tx,ty)+tyf_2(tx,ty)\quad tg'(t)=0\\ x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$$

(1). 当 $t\ne0$, 我们可以得到: $g'(t)=0\Rightarrow g(t)=C$

(2). 当 $t\ne0$ 时, 我们由 $f(x,y)$ 在全平面上有连续的偏导数, 可以得到: $g'(t)$ 连续 $\Rightarrow g'(0)=0$

综上所述,$g'(t)=0\Rightarrow g(t)=C\Rightarrow g(0)=g(1)\Rightarrow f(0,0)=f(x,y)=C$,$f(x,y)$ 为常数.

August 28

1. 设函数 $f(x)$ 二阶可导,$f(0)=1$, $f'(0)=0$, 且对任意 $x\ge0$, 有 $f''(x)-5f'(x)+6f(x)\ge0$,

证明不等式 $f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x}$, $(x \geq 0)$

解

我们构造辅助函数: $F(x) = e^{-3x}(f'(x) - 2f(x))$, 我们有:

$$\begin{cases} F'(x) = e^{-3x}(f''(x) - 5f'(x) + 6f(x)) \geq 0, x \geq 0 \\ F(x)\text{在}(0,+\infty)\text{上单调递增} \\ F(x) \geq F(0) = -2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) - 2f(x) + 2e^{3x} \geq 0$$

我们构造辅助函数: $G(x) = e^{-2x}(f(x) + 2e^{3x}), x \geq 0$, 我们有:

$$\begin{cases} G'(x) = e^{-2x}(f'(x) - 2f(x) + 2e^{3x}), x \geq 0 \\ G'(x) \geq 0 \\ G(x) \geq G(0) = 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x}$$

综上所述, 我们证明: $f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x}$, $(x \geq 0)$

2. 求 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n!}{(2n+1)!!(n+1)}$ 的和

解

我们构造幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)} x^{2n+2}$, 我们设该幂级数的和函数为 $S(x)$

我们可以得到原和式为 $2S(\dfrac{1}{\sqrt{2}})$, 我们需要求出幂级数的和函数 $S(x)$

我们不妨设 $a_n = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)}$, 我们可以得到:

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 1 \Rightarrow R^2 = 1$$

我们可以得到幂级数的收敛区间为 $(-1,1)$, 我们对幂级数逐项求导可以得到:

$$S'(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1}$$

我们不妨设 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1}$, 我们有: $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!} x^{2n}$

我们对 $f'(x)$ 稍作变形:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} x^{2n} \\ &= x\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} x^{2n}\right]' \\ &= x\left[x\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} x^{2n-1}\right)\right]' \\ &= x\left[xf(x) + x^2\right]' \end{aligned}$$

我们得到: $f'(x)-\dfrac{x}{1-x^2}f(x)=\dfrac{2x^2}{1-x^2}$

我们可以解得: $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-x+C, f(0)=0\Rightarrow C=0$

我们得到: $S'(x)=\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-2x, S(0)=0\Rightarrow S(x)=(\arcsin x)^2-x^2$

我们得到原和式为: $I=2S(\dfrac{1}{\sqrt{2}})=\dfrac{\pi^2}{8}-1$

3. 计算 $\iint\limits_D\left[x(1-y^3)+y(1+x^3)\right]dxdy$, 其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 2x+2y\}$

解

我们根据轮换对称性, 可以得到:

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D\left[x(1-y^3)+y(1+x^3)\right]dxdy\\
&= \iint\limits_D\left[y(1-x^3)+x(1+y^3)\right]dxdy\\
&= \iint\limits_D(x+y)dxdy\\
&= \iint\limits_D(x-1+y-1)dxdy+\iint\limits_D 2dxdy\\
&= 2S_D\\
&= 4\pi
\end{aligned}$$

4. 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin nxdx$, 证明: $a_n=\dfrac{1}{2^{n+1}}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2^k}{k}$, $(n\ge 1)$

解

我们可以得到:

$$\begin{cases} a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin nxdx\\ a_{n-1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\sin(n-1)xdx\end{cases}\Rightarrow a_{n-1}=a_n-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\sin x\cos nxdx$$

我们利用分部积分对 a_n 进行简化:

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx dx \\ &= -\frac{1}{n}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x d\cos nx\right) \\ &= -\frac{1}{n}\left(\cos^n x \cos nx|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin x \cos nx dx\right) \\ &= \frac{1}{n} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin x \cos nx dx \end{aligned}$$

我们可以得到:

$$a_n = \frac{1}{n} + a_{n-1} - a_n \Rightarrow a_n - \frac{a_{n-1}}{2} = \frac{1}{2n}$$

我们有: $a_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x dx = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2} \\ a_n - \dfrac{a_{n-1}}{2} = \dfrac{1}{2n} \end{cases} \Rightarrow \text{数列}\{a_n\}\text{唯一}$$

我们不妨假设: $a_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{2^k}{k}$, 下面用数学归纳法证明:

(1). 当 $n = 1$ 时,$a_1 = \dfrac{1}{2}$

(2). 当 $n = k$ 时, 我们有: $a_k = \dfrac{1}{2^{k+1}}\sum_{i=1}^{k}\dfrac{2^i}{i}$

$$a_{k+1} = \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2}a_k = \frac{2^{k+1}}{2^{k+2}(k+1)} + \frac{1}{2^{k+2}}\sum_{i=1}^{k}\frac{2^i}{i} = \frac{1}{2^{k+2}}\sum_{i=1}^{k+1}\frac{2^i}{i}$$

综上所述, 我们得到: $a_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{2^k}{k}$, $(n \geq 1)$

5. 设三元二次型 $f = x^TAx$ 正定, 其中 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$,A 为实对称矩阵, 则下列说法不正确的是:

- A. 仅在 $x = 0$ 处 f 取得最小值
- B. 齐次方程组 $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \end{cases}$ 只有零解

- C. 二阶偏导数矩阵

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{3\times 3} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} \text{正定}$$

- D. 存在三维非零列向量 α, 使得 $A = \alpha\alpha^T$, 从而 $f = (\alpha^T x)^2$

解

我们不妨假设 $f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$, 我们可以得到:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(1). 我们由 f 正定, 可以得到: $f \geq 0$, 当且仅当 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 时等号成立.

(2)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3 = 0 \\ 2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 + 2a_{23}x_3 = 0 \\ 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + 2a_{33}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{12} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{13} & 2a_{23} & 2a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2Ax = 0$$

矩阵 A 为正定矩阵 $\Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ 原方程组只有零解.

(3). 我们可以得到:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{3\times 3} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{12} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{13} & 2a_{23} & 2a_{33} \end{pmatrix} = 2A\text{正定}$$

(4)$|A| \neq 0 \Rightarrow rank(A) = 3$, 假设 $A = \alpha\alpha^T$,$rank(A) = 1$ 矛盾!!!

August 29

1. 证明不等式:

$$\left|\frac{\sin x - \sin y}{x - y} - \cos y\right| \leq \frac{1}{2}|x - y|, \ (x \neq y)$$

解

我们利用带拉格朗日余项的泰勒公式将 $f(x)=\sin x$ 进行展开:

$$\sin x=\sin y+(x-y)\cos y+\frac{(x-y)^2}{2}\sin\xi,\xi\text{位于}x,y\text{之间}$$

我们可以得到:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sin x-\sin y}{x-y}-\cos y\right| &= \left|\frac{\sin\xi}{2}(x-y)\right| \\ &\leq \frac{1}{2}|x-y|\end{aligned}$$

2. 求 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2+3n+4}{2^n(n+1)!}x^{2n}$ 的和函数 $S(x)$

解

我们可以将原级数化为: $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2+3n+4}{(n+1)!}(\frac{x^2}{2})^n$

我们设 $a_n=\frac{n^2+3n+4}{(n+1)!}$, 我们可以得到:

$$a_n=\frac{1}{(n-1)!}+\frac{2}{n!}+\frac{2}{(n+1)!}$$

我们先求出收敛半径:

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0\Rightarrow R=\infty$$

原级数可以化为:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2+3n+4}{2^n(n+1)!}x^{2n} &= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}(\frac{x^2}{2})^n+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2}{n!}(\frac{x^2}{2})^n+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2}{(n+1)!}(\frac{x^2}{2})^n \\ &= \frac{x^2}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}(\frac{x^2}{2})^n+2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!}(\frac{x^2}{2})^n+\frac{4}{x^2}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n!}(\frac{x^2}{2})^n \\ &= \frac{x^2}{2}\left[e^{\frac{x^2}{2}}-1\right]+2\left[e^{\frac{x^2}{2}}-1-\frac{x^2}{2}\right]+\frac{4}{x^2}\left[e^{\frac{x^2}{2}}-1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}\right] \\ &= \frac{x^2e^{\frac{x^2}{2}}}{2}+2e^{\frac{x^2}{2}}+\frac{4e^{\frac{x^2}{2}}}{x^2}-2x^2-4-\frac{4}{x^2}\end{aligned}$$

综上所述, 我们得到: $S(x)=\begin{cases}\frac{x^2e^{\frac{x^2}{2}}}{2}+2e^{\frac{x^2}{2}}+\frac{4e^{\frac{x^2}{2}}}{x^2}-2x^2-4-\frac{4}{x^2},\ x\neq 0\\ 0,\ x=0\end{cases}$

3. 设线性方程组 $Ax=\alpha$ 有解, $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ 无解, 则下列结论正确的是:

- A. $r(B,\beta)=r(B)+1$

- B. $r\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix} < r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + 1$
- C. $r\left[B^T(B,\beta)\right] > r(B^TB)$
- D. $r\left[(A^T,B^T)\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix}\right] = r\left[(A^T,B^T)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right]$

解

(1). 方程组 $Ax=\alpha$ 与 $Bx=\beta$ 无公共解,$r(B,\beta)$ 和 $r(B)+1$ 可能相等, 也可能不等

(2). 方程组 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ 无解 $\Rightarrow r\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + 1$

(3). $$\begin{cases} r\left[B^T(B,\beta)\right] \le r(B^T) \\ r(B^T) = r(B) = r(BB^T) = r(B^TB) \\ r\left[B^T(B,\beta)\right] = r(B^TB, B^T\beta) \ge r(B^TB) \end{cases} \Rightarrow r\left[B^T(B,\beta)\right] = r(B^TB)$$

(4).
$$\begin{cases} r\left[(A^T,B^T)\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix}\right] \ge r\left[(A^T,B^T)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right] \\ r\left[(A^T,B^T)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right] = r(A^T,B^T) \\ r(A^T,B^T) \ge r\left[(A^T,B^T)\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix}\right] \end{cases} \Rightarrow r\left[(A^T,B^T)\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix}\right] = r\left[(A^T,B^T)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\right]$$

4. 已知 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^{\ln(3\cos x)}-3^{\ln x}}{x^k\ln x}=c$, $(c\neq0)$, 求 c、k

解

原极限可以化为:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to0^+}\frac{x^{\ln(3\cos x)}-3^{\ln x}}{x^k\ln x} \\ &= \lim_{x\to0^+}\frac{e^{\ln x\ln(3\cos x)}-e^{\ln 3\ln x}}{x^k\ln x} \\ &= \lim_{x\to0^+}\frac{e^{\ln 3\ln x}[e^{\ln(\cos x)\ln x}-1]}{x^k\ln x} \\ &= \lim_{x\to0^+}\frac{x^{\ln 3}[\ln x\ln(\cos x)]}{x^k\ln x} \\ &= \lim_{x\to0^+}\frac{-x^{2+\ln 3}}{2x^k} \\ &= c \end{aligned}$$

我们可以得到: $\begin{cases} k=2+\ln 3 \\ c=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

5. 设 $f(x,y)$ 在 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le1\}$ 内具有连续的偏导数, 且在边界上取值为 0, 证明:

$$f(0,0)=\lim_{\xi\to0^+}\frac{-1}{2\pi}\iint_{D_1}\frac{x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}}{x^2+y^2}dxdy,\ (D_1=\{(x,y)|\xi^2\le x^2+y^2\le1\})$$

解

我们利用极坐标代换:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}\Rightarrow f(x,y)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

我们得到: $r\dfrac{\partial f}{\partial r}=x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}$

原极限可以化为:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\xi\to0^+}\frac{-1}{2\pi}\iint_{D_1}\frac{\partial f}{\partial r}drd\theta \\ &= \lim_{\xi\to0^+}\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_\xi^1\frac{\partial f}{\partial r}dr \\ &= \lim_{\xi\to0^+}\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(\cos\theta,\sin\theta)-f(\xi\cos\theta,\xi\sin\theta)]d\theta \\ &= \lim_{\xi\to0^+}\frac{-1}{2\pi}(-2\pi)f(\xi\cos\alpha,\xi\sin\alpha),\alpha\in(0,2\pi)(\text{积分中值定理}) \\ &= f(0,0) \end{aligned}$$

August 30

1. 设 $f(x)$ 二阶可导,$f(x)>0,\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{x}=1$, 且 $f(x)f''(x)>[f'(x)]^2$, 下列命题一定成

立的是:

- A. $e^{-x}f(x) \geq 1$
- B. $e^{-x}f(x) < 1$
- C. $\dfrac{\ln f(x)}{x} < 1$
- D. $\dfrac{\ln f(x)}{x} > 1$

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} = 1 \Rightarrow \begin{cases} f(0)=1 \\ f'(0)=1 \end{cases} \text{我们构造辅助函数: } F(x)=\ln f(x), \text{我们有:}$$

$$\begin{cases} F'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \\ F''(x) = \dfrac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2} > 0 \\ F(0)=0 \\ F'(0)=1 \end{cases}$$

我们将 $F(x)$ 在 $x=0$ 处进行泰勒展开得到:

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(\xi)}{2}x^2,\ F''(x) > 0 \Rightarrow F(x) \geq x \Rightarrow e^{-x}f(x) \geq 1$$

2. 求 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^3x^n$ 的和函数 $S(x)$

解

首先求收敛域, 不妨设 $a_n = n^3$, 我们有:

$$\rho = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 \Rightarrow R = 1$$

当 $x=\pm1$ 时, 原幂级数发散, 因此幂级数的收敛域为 $(-1,1)$

我们已知幂级数: $G(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^n = \dfrac{x}{1-x}, x\in(-1,1)$

我们可以得到:

$$\begin{cases} G'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \dfrac{1}{(x-1)^2} \\ xG'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^n = \dfrac{x}{(x-1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [xG'(x)]' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2x^{n-1} = \dfrac{1+x}{(1-x)^3} \\ x[xG'(x)]' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2x^n = \dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \{x[xG'(x)]'\}' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^3x^{n-1} = \dots \\ S(x) = x\{x[xG'(x)]'\}' = \dfrac{x^3+\dots}{(x\dots} \end{cases}$$

综上所述, 原幂级数的和函数 $S(x) = \dfrac{x^3+4x^2+x}{(x-1)^4}$

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+2)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+\sin x}}\right]$

解

原极限可化为:

$$\begin{aligned}I &= \lim_{x\to+\infty} 2(x+2)^{\frac{1}{x}} + \lim_{x\to+\infty} x\left[(x+2)^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{x+\sin x}}\right] \\ &= 2 + \lim_{x\to+\infty} x\left[e^{\frac{\ln(x+2)}{x}} - e^{\frac{\ln x}{x+\sin x}}\right] \\ &= 2 + \lim_{x\to+\infty} e^{\xi} x\left[\frac{\ln(x+2)}{x} - \frac{\ln x}{x+\sin x}\right] (\text{拉格朗日中值定理}) \\ &= 2\end{aligned}$$

August 31

1. 设 A 为 n 阶方阵,β 为 n 维非零列向量, 且 $r\begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} < r\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix}$, 下列说法正确的是:

- A. $\begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ 必有非零解
- B. $\begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ 只有零解
- C. 方程组 $Ax = \beta$ 必无解
- D. 方程组 $Ax = \beta$ 必有解

解

$$\begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (A,\beta)v = 0$$

我们由: $r\begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} < r\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix}$ 得到:

(1). 当 $r\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix} = n+1$ 时,$(A,\beta)v = 0$ 只有零解 $\Rightarrow \begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ 只有零解

(2). 当 $r\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix} < n+1$ 时,$\begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ 必有非零解

以上两种情况我们都有: $r\begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} < r\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ \beta^T & 1 \end{pmatrix} < r\begin{pmatrix} A^T \\ \beta^T \end{pmatrix} + 1 \Rightarrow r(A,\beta) = r(A)$, 我们可以得到:
方程组 $Ax = \beta$ 一定有解

2. 设 $X \sim N(0,1)$, 求 $E(X^4 e^X)$

解

3. 设 $f(x)$ 为非负连续函数, 且当 $x>0$ 时, 有 $\int_0^x f(x)f(x-t)dt=x^3$, 求 $f(x)$

解

我们不妨设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt, F(0)=0$, 上述条件可化为:

$$\int_0^x f(x)f(x-t)dt=x^3 \Rightarrow f(x)\int_0^x f(t)dt=x^3 \Rightarrow F(x)F'(x)=x^3 \Rightarrow F(x)=\frac{x^2}{\sqrt{2}}$$

$$f(x)=F'(x)=\sqrt{2}x$$

4. $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+2}a_{n+1}+\dfrac{3}{(n+2)(n+1)}a_n(n\geq 0),a_0=0,a_1=1$, 已知 $a_3>a_4>a_5$, 求 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$

解

我们利用数学归纳法证明 $\{a_n\}(n\geq 3)$ 单调递减:

(1). 当 $n=3,4,5,a_3>a_4>a_5$

(2). 假设 $n=k(k\geq 3)$ 时,$a_{k+1}<a_k$, 我们有:

$$a_{k+2}=\frac{2}{k+2}a_{k+1}+\frac{3}{(k+2)(k+1)}a_k<\frac{2}{k+1}a_k+\frac{3}{(k+1)k}a_{k-1}=a_{k+1}$$

我们可以得到 $\{a_n\}(n\geq 3)$ 单调递减,$a_n>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 存在

我们假设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=A$ 存在, 我们有:

$$A=A\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n+2}+\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{(n+2)(n+1)}\Rightarrow A=0\Rightarrow \text{收敛域}(-\infty,+\infty)$$

我们可以得到:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}=2(n+1)a_{n+1}+3a_n\Rightarrow (a_{n+2}x^{n+2})''=2(a_{n+1}x^{n+1})'+3a_nx^n$$

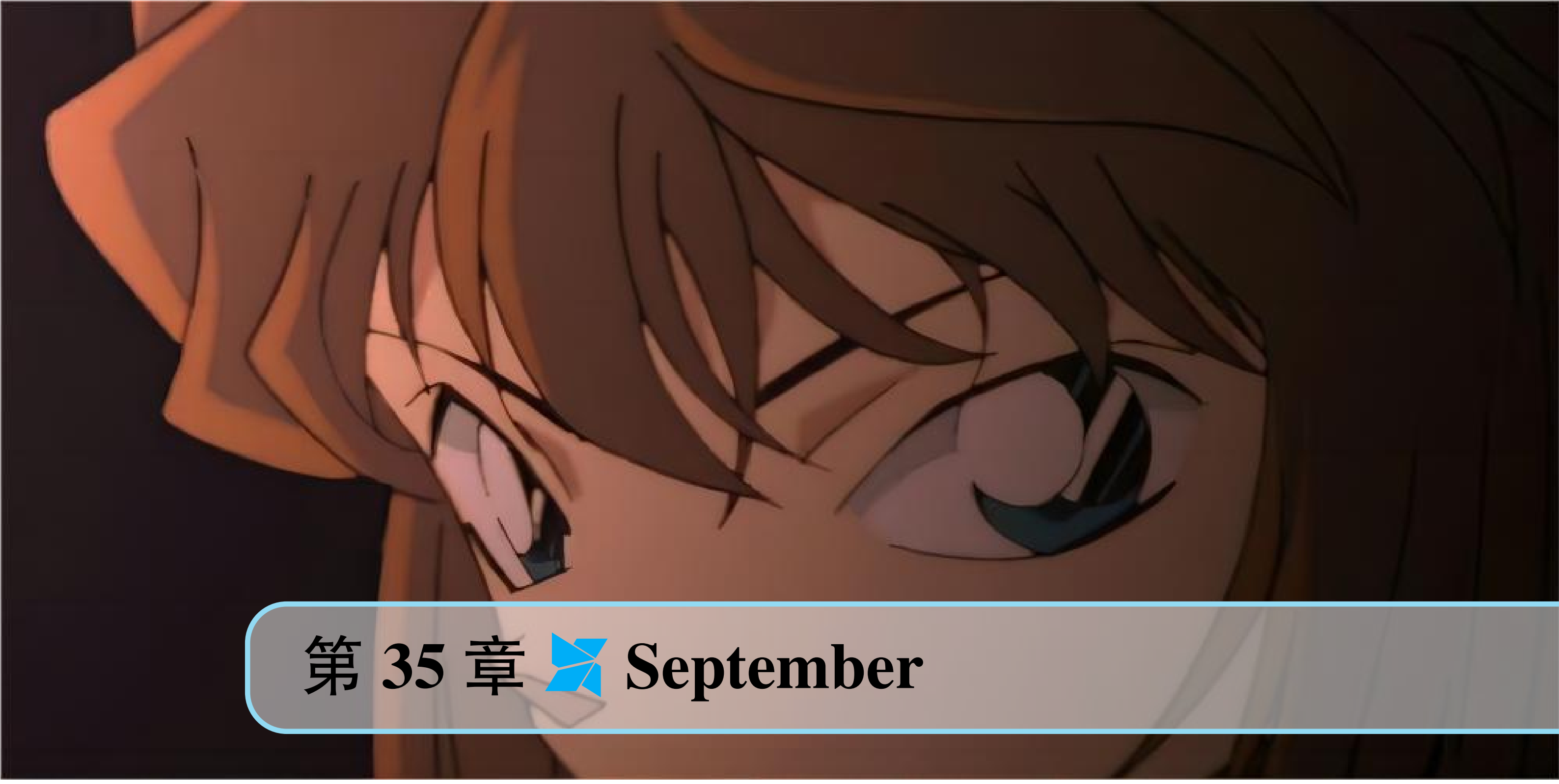
我们得到:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_{n+2}x^{n+2})''=2\sum_{n=0}^{+\infty}(a_{n+1}x^{n+1})'+3\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$$

我们进一步得到:

$$[S(x)-a_0-a_1x]''=2[S(x)-a_0]'+3S(x)\Rightarrow S''(x)=2S'(x)+3S(x),\begin{cases}S(0)=a_0=0\\S'(0)=a_1=1\end{cases}$$

我们可以得到: $S(x)=\dfrac{e^{3x}-e^{-x}}{4}$



第 35 章 September

35.1 Week I

September 1

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=2,\int_0^1 f(x)dx=1$.

(1). 证明: $\exists\xi\in(0,1)$, $s.t. f'(\xi)=f(\xi)-2\xi+2$

(2). 证明: $\exists\eta\in(0,1)$, $s.t. f''(\eta)=0$

(3). 证明: $\exists\zeta\in(0,1)$, $s.t. \int_0^{\zeta} f(t)dt+\zeta f(\zeta)=2\zeta$

(4). 证明: $\exists\mu\in(0,1)$, $s.t. \mu f(\mu)=2\int_0^{\mu} f(t)dt$

解

我们由题意可得:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=2\\ \int_0^1 f(x)dx=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(0)=0\\ f'(0)=2\\ \exists c\in(0,1),\ s.t. f(c)=1\end{cases}$$

(1) 我们构造辅助函数: $F(x)=\dfrac{f(x)-2x}{e^x}$, 我们可以得到:

$$\begin{cases}F(0)=0\\ \int_0^1[f(x)-2x]=0\\ F'(x)=e^{-x}[f'(x)-2-f(x)+2x]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F(0)=0\\ \exists c\in(0,1),\ s.t. F(c)=0(\text{积分中值定理})\end{cases}$$

我们对 $F(x)$ 在 $(0,c)$ 上使用罗尔定理可以得到:

$$\exists\xi\in(0,c)\subset(0,1),\ s.t. F'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=f(\xi)-2\xi+2$$

(2). 我们构造辅助函数: $G(x)=f(x)-2x$, 我们可以得到:

$$\begin{cases} G(0)=0 \\ G'(0)=0 \\ \int_0^1 G(x)dx=0 \Rightarrow \exists a\in(0,1), s.t.G(a)=0 \end{cases} \Rightarrow G(0)=G(d)=0$$

我们对 $G(x)$ 在 $(0,a)$ 上使用罗尔定理得到:

$$\exists b\in(0,a), s.t.G'(b)=0$$

我们对 $G'(x)$ 在 $(0,b)$ 上使用罗尔定理得到:

$$\exists \eta\in(0,b), s.t.G''(\eta)=0 \Rightarrow f''(\eta)=0$$

(3). 我们构造辅助函数: $H(x)=x\int_0^x f(t)dt-x^2$, 我们有:

$$\begin{cases} H(0)=H(1)=0 \\ H'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-2x \end{cases}$$

我们对 $H(x)$ 在 $(0,1)$ 上使用罗尔定理可以得到:

$$\exists \zeta\in(0,1),\ s.t.H'(\zeta)=0 \Rightarrow \int_0^{\zeta} f(t)dt+\zeta f(\zeta)=2\zeta$$

(4). 我们构造辅助函数: $P(x)=\begin{cases} \dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}, x\in(0,1] \\ 1, x=0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^+} P(x)=1$

我们可以得到: $P(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,$(0,1)$ 上可导, 我们还可以得到:

$$\begin{cases} P(0)=P(1)=1 \\ P'(x)=\dfrac{xf(x)-2\int_0^x f(t)dt}{x^3} \end{cases}$$

我们对 $P(x)$ 在 $(0,1)$ 上使用罗尔定理可以得到:

$$\exists \mu\in(0,1),\ s.t.P'(\mu)=0 \Rightarrow \mu f(\mu)=2\int_0^{\mu} f(t)dt$$

2. 设 $I=\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos x^2dx$,$J=\int_0^{\sqrt{\pi}}\cos x^2dx$,$K=\int_0^{\pi}\sqrt{x}\cos xdx$, 比较 I,J,K 的大小

解

我们有: $I=\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos x^2dx=\dfrac{\sin x^2}{2}|_0^{\sqrt{\pi}}=0$

$$J=\int_0^{\sqrt{\pi}}\cos x^2dx=\int_0^{\pi}\frac{\cos t}{2\sqrt{t}}dt>0$$

$$K=\int_0^{\pi}\sqrt{x}\cos xdx<0$$

综上所述, 我们可以得到: $K<I<J$

3. 已知曲线 $L: y=x^2-1(-1\le x\le 2)$, 方向从 $A(-1,0)$ 到 $B(2,3)$, 求曲线积分 $\int_L \dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$

解

原曲线积分可化为:

$$\begin{aligned}\int_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} &= \int_{-1}^{2}\frac{x^2+1}{x^2+(x^2-1)^2}dx\\ &= \int_{-1}^{2}\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx\\ &= \int_{-1}^{2}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}-1}dx\\ &= \int_{-1}^{2}\frac{1}{1+(x-\frac{1}{x})^2}d(x-\frac{1}{x})\\ &= \int_{-1}^{0^-}\frac{1}{1+(x-\frac{1}{x})^2}d(x-\frac{1}{x})+\int_{0^+}^{2}\frac{1}{1+(x-\frac{1}{x})^2}d(x-\frac{1}{x})\\ &= \arctan(x-\frac{1}{x})|_{x=-1}^{x=0^-}+\arctan(x-\frac{1}{x})|_{x=0^+}^{x=2}\\ &= \arctan\frac{3}{2}+\pi\end{aligned}$$

4. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}(x>0)$, 求 $\int f(x)dx$

解

我们可以得到:

$$f(x)=\begin{cases}1, x\in(0,1]\\ x, x\in(1,2]\\ \dfrac{x^2}{2}, x\in(2,+\infty)\end{cases}\Rightarrow\int f(x)=\begin{cases}x+C,\ x\in(0,1]\\ \dfrac{x^2+1}{2}+C,\ x\in(1,2]\\ \dfrac{x^3+7}{6}+C,\ x\in(2,+\infty)\end{cases}$$

September 2

1. 设 $f(x)$ 连续,$f(x+2)-f(x)=\sin x,\int_0^2 f(x)dx=0$, 求 $\int_1^3 f(x)dx$

解

我们可以得到:

$$\begin{aligned}\int_1^3 f(x)dx &= \int_1^3 f(x)dx - \int_0^2 f(x)dx \\ &= \int_2^3 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \\ &= \int_0^1 f(x+2)dx - \int_0^1 f(x)dx \\ &= \int_0^1 [f(x+2)-f(x)]dx \\ &= \int_0^1 \sin x dx \\ &= 1-\cos 1\end{aligned}$$

注

我们构造辅助函数: $F(x)=\int_x^{x+2} f(t)dt$, 我们有:

$$\begin{cases} F'(x)=f(x+2)-f(x)=\sin x \\ F(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x)=-\cos x+1 \\ F(1)=\int_1^3 f(x)dx=1-\cos 1 \end{cases}$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=1, f(1)=0$

(1). 证明: $\exists \xi_1,\xi_2 \in (0,1)(\xi_1 \neq \xi_2),\ s.t.\ f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=-2$

(2). 证明: $\exists \eta,\zeta \in (0,1)(\eta \neq \zeta),\ s.t.\ f'(\eta)f'(\zeta)=1$

解

(1). 我们取 $c=f(\frac{1}{2})$, 我们在 $(0,\dfrac{1}{2})$ 和 $(\dfrac{1}{2},1)$ 上分别对 $f(x)$ 使用拉格朗日中值定理可以得到:

$$\begin{cases} \exists \xi_1 \in (0,\frac{1}{2}),\ s.t.\dfrac{c-1}{\frac{1}{2}}=f'(\xi_1) \\ \exists \xi_2 \in (\frac{1}{2},1),\ s.t.\dfrac{-c}{\frac{1}{2}}=f'(\xi_2) \end{cases} \Rightarrow f(\xi_1)+f(\xi_2)=-2$$

(2). 我们构造辅助函数: $F(x)=f(x)-x$, 我们有:

$$\begin{cases} F(0)=f(0)=1>0 \\ F(1)=f(1)-1=-1<0 \end{cases} \Rightarrow \text{根据零点定理: } \exists c \in (0,1),\ s.t.F(c)=f(c)-c=0$$

我们对 $f(x)$ 分别在 $(0,c)$ 和 $(c,1)$ 上使用拉格朗日中值定理得到:

$$\begin{cases} \exists \eta \in (0,c), s.t.\dfrac{f(c)-1}{c}=f'(\eta) \\ \exists \zeta \in (c,1), s.t.\dfrac{-f(c)}{1-c}=f'(\zeta) \end{cases} \Rightarrow f'(\eta)f'(\zeta)=\frac{c-1}{c}\cdot\frac{-c}{1-c}=1$$

3. 设 $f(x)=\int_{-1}^{x} t\cos t dt, x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 则曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的图形面积为:

- A. $2\int_0^1 x\sin x dx$
- B. $2\int_0^1 x^2\sin x dx$
- C. $2\int_0^1 x\cos x dx$
- D. $2\int_0^1 x^2\cos x dx$

解

我们可以得到: $f(x)$ 为偶函数, 且 $f'(x)=x\cos x$, 我们可以得到:

$$\begin{cases} x\in(-\frac{\pi}{2}), f'(x)<0 \\ x\in(0,\frac{\pi}{2}), f'(x)>0 \end{cases} \Rightarrow f(x)\text{在}(-\frac{\pi}{2},0)\text{上单调递减, 在}(0,\frac{\pi}{2})\text{上单调递增}$$

我们有: $f(1)=f(-1)=0$, 我们得到:

$$\begin{aligned} S &= -2\int_0^1 f(x)dx \\ &= 2\int_0^1 xf'(x)dx \\ &= 2\int_0^1 x^2\cos x dx \end{aligned}$$

4. 设 Γ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线, 从 z 轴正向往负向看去为逆时针, 计算积分 $\oint_\Gamma xzdx+xdy+\frac{y^2}{2}dz$

解

原曲线积分可以化为:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi}\left[-\sin\theta\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta)+\cos^2\theta+\frac{\sin^2\theta}{2}(\cos\theta-\sin\theta)\right]d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos\theta d\theta-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^3\theta d\theta \\ &= \pi \end{aligned}$$

5. $\int\frac{1}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$

解

原不定积分可以化为:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{(\sin x+\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cos x)}dx\\
&= \int \frac{d(\sin x-\cos x)}{(1+2\sin x+\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cos x)}\\
&= \int \frac{2d(\sin x-\cos x)}{[2-(\sin x-\cos x)^2][1+(\sin x-\cos x)^2]}\\
&= \int \frac{2du}{(2-u^2)(1+u^2)}\\
&= \frac{2}{3}[\int \frac{1}{2-u^2}du+\int \frac{1}{1+u^2}du]\\
&= \frac{2}{3}[\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u}|+\arctan u]\\
&= \frac{1}{3\sqrt{2}}\ln|\frac{1+\sin(x-\frac{\pi}{4})}{1-\sin(x-\frac{\pi}{4})}|+\frac{2}{3}\arctan(\sin x-\cos x)+C
\end{aligned}$$

6. 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t dt$, 求 $F(x)$

解

我们不妨设 $f(x)=e^{\sin x}\sin x$,$f(x)$ 为周期函数, 我们可以得到:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t dt\\
&= \int_0^{2\pi} e^{\sin x}\sin x dx\\
&= \int_0^{\pi} e^{\sin x}\sin x dx+\int_\pi^{2\pi} e^{\sin x}\sin x dx\\
&= \int_0^{\pi} e^{\sin x}\sin x dx-\int_0^{\pi} e^{-\sin x}\sin x dx\\
&= \int_0^{\pi}(e^{\sin x}-e^{-\sin x})\sin x dx>0
\end{aligned}$$

我们可以得到: $F(x)=C>0$

September 3

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $I=\int_0^1 f(x)dx\neq 0$, 证明: $\exists\xi,\eta\in(0,1)(\xi\neq\eta), s.t.\frac{1}{f(\xi)}+\frac{1}{f(\eta)}=\frac{2}{I}$

解

我们构造辅助函数: $F(x)=\int_0^x f(t)dt$,$F(0)=0, F(1)=I\neq 0$

我们由介值定理可以得到:

$$\exists c \in (0,1), s.t.\ F(c) = \frac{I}{2}$$

我们对 $F(x)$ 在区间 $(0,c)$ 和 $(c,1)$ 上使用拉格朗日中值定理得到:

$$\begin{cases} \exists \xi \in (0,c),\ s.t. \dfrac{F(c)}{c} = F'(\xi) = f(\xi) \\ \exists \eta \in (c,1).\ s.t. \dfrac{F(1)-F(c)}{1-c} = F'(\eta) = f(\eta) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{f(\xi)} + \frac{1}{f(\eta)} = \frac{2c}{I} + \frac{2(1-c)}{I} = \frac{I}{2}$$

综上所述, 我们得到: $\exists \xi, \eta \in (0,1)(\xi \neq \eta), s.t. \dfrac{1}{f(\xi)} + \dfrac{1}{f(\eta)} = \dfrac{2}{I}$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义, 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内可导,$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 存在,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分条件为:

- A $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ 存在
- B $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{x}$ 存在
- C $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续
- D $\int_0^x f(t)dt$ 在点 $x=0$ 处可导

解

我们可以得到:

$$\begin{cases} f(x)\text{在}(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\text{上可导} \\ \lim\limits_{x\to 0} f'(x)\text{存在} \end{cases}$$

(1). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ 存在 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在

(2). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{x}$ 存在 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ 存在

(3). $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} f'(x) = k \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} f'(x) \end{cases} \Rightarrow f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} f'(x) = k$$

(4). $\int_0^x f(t)dt$ 在点 $x=0$ 处可导 $\Rightarrow f(0)$ 存在

September 4

1. 求不定积分 $\int x \arctan x \cdot \ln(1+x^2)dx$

解

原不定积分可化为:

$$\begin{aligned}
I &= \int x\arctan x\cdot\ln(1+x^2)dx \\
&= \frac{1}{2}\int \arctan x\cdot\ln(1+x^2)d(x^2+1) \\
&= \frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\int\ln(x^2+1)dx-\int x\arctan x dx \\
&= \frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}x\ln(x^2+1)+x-\arctan x-\frac{1}{2}x^2\arctan x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\arctan x \\
&= \frac{(x^2+1)\ln(x^2+1)-x^2-3}{2}\arctan x-\frac{x\ln(x^2+1)}{2}+\frac{3}{2}x+C
\end{aligned}$$

2. 设 $\Gamma := \begin{cases} x=2\sqrt{1-y^2} \\ z=x+y \end{cases}$, 从 z 轴正向往负向看去为逆时针, 计算积分 $\int_\Gamma \frac{ydx+zdy+xdz}{x^2+y^2+z^2}$

解

原曲线积分可化为:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\cos^2\theta-2\sin^2\theta-3\cos\theta\sin\theta}{2\sin^2\theta+8\cos^2\theta+4\cos\theta\sin\theta}d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+3\cos 2\theta-\frac{3}{2}\sin 2\theta}{3\cos 2\theta+2\sin\theta+5}d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+3\cos x-\frac{3}{2}\sin x}{3\cos x+2\sin x+5}dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{6}{13}dx+\frac{11}{26}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2\cos x-3\sin x}{3\cos x+2\sin x+5}-\frac{17}{13}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{3\cos x+2\sin x+5}dx\right] \\
&= \frac{6}{13}\pi+0-\frac{17\sqrt{3}\pi}{39} \\
&= \frac{(36-17\sqrt{3})\pi}{78}
\end{aligned}$$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是以 T 为最小正周期的连续奇函数, 下列函数中不是周期函数的个数:

- (1). $\int_a^x f(t)dt$
- (2). $\int_{-x}^a f(t)dt$
- (3). $\int_{-x}^x tf(t)dt$
- (4). $\int_{-x}^x t^2f(t)dt$

解

$f(x)$ 是周期函数, 且为奇函数 $\Rightarrow \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx=0$

(1). 我们不妨设 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, 我们有:

$$\begin{cases} F(x+T)=\int_a^{x+T} f(t)dt \\ F(x+T)-F(x)=\int_x^{x+T} f(t)dt=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx=0 \end{cases} \Rightarrow F(x+T)=F(x) \Rightarrow F(x)\text{为周期函数}$$

(2). 我们不妨设 $F(x)=\int_{-x}^a f(t)dt$, 我们有:

$$\begin{cases} F(x+T)=\int_{-x-T}^{a} f(t)dt \\ F(x+T)-F(x)=\int_{-x-T}^{-x} f(t)dt=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx=0 \end{cases} \Rightarrow F(x+T)=F(x) \Rightarrow F(x)\text{为周期函数}$$

(3). 我们不妨设 $F(x)=\int_{-x}^x tf(t)dt$, 我们有:

$$\begin{cases} F(x+T)=\int_{-x-T}^{x+T} tf(t)dt \\ F(x+T)-F(x)=2\int_x^{x+T} tf(t)dt\neq 0 \end{cases} \Rightarrow F(x+T)\neq F(x) \Rightarrow F(x)\text{不是周期函数}$$

(4). $\int_{-x}^x t^2f(t)dt\equiv 0 \Rightarrow F(x)$是周期函数

综上所述, 上述函数只有 (3) 不是周期函数,(1)(2)(4) 均为周期函数.

4. 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布,$X\sim N(1,3^2),Y\sim N(0,4^2)$, 且满足 $\rho_{XY}=-\dfrac{1}{2}$,$Z=\dfrac{X}{3}+\dfrac{Y}{2}$

(1). 求 $E(Z)$ 与 $D(Z)$

(2). 求 ρ_{XZ}

(3). 证明 X 与 Z 是否独立

解

September 5

1. 计算二重积分: $\iint\limits_D \dfrac{1}{\sqrt{xy}}dxdy$,$D:\{(x,y)|(\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4})^2\leq\dfrac{x}{6},x,y\geq 0\}$

解 原二重积分可化为:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{2}{3}} dx\int_0^{4\sqrt{\frac{x}{6}}-2x}\frac{1}{\sqrt{xy}}dy \\ &= 2\int_0^{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{4\sqrt{\frac{x}{6}}-2x}dx \\ &= 8\sqrt{6}\int_0^{\frac{1}{3}}\sqrt{t-3t^2}dt \\ &= \frac{24\sqrt{2}}{36}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{3} \end{aligned}$$

注

我们不妨设 $\sqrt{x}=m,\sqrt{y}=n$, 我们有: $\dfrac{(m-\frac{1}{\sqrt{6}})^2}{2}+\dfrac{n^2}{4}=\dfrac{1}{12}(m,n>0)$.
我们根据雅可比行列式, 得到:

$$dxdy=4mndmdn\Rightarrow\iint\limits_{D}\frac{1}{\sqrt{xy}}dxdy=\iint\limits_{D'}4dmdn$$

我们得到原二重积分与椭圆面积之间的关系: $I=2S_{D'}=2ab\pi=2\pi\times\dfrac{1}{\sqrt{6}}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}\pi}{3}$

2. $\int\dfrac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}dx$

解

我们令 $\sqrt{x-1}=t,x=t^2+1,dx=2tdt$, 原不定积分可化为:

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{2t^2\arctan t}{t^2+1}dt\\&=2\int\arctan t\,dt-2\int\frac{\arctan t}{1+t^2}dt\\&=2t\arctan t-\ln|1+t^2|-(\arctan t)^2\\&=2\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}-\ln|x|-(\arctan\sqrt{x-1})^2+C\end{aligned}$$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足 $f(x)=f(x-\pi)+\sin x$, 且 $f(x)=x,x\in[0,\pi)$, 求 $\int_{\pi}^{3\pi}f(x)dx$

解

我们由: $\begin{cases}f(x)=f(x-\pi)+\sin x\\f(x)=x,x\in[0,\pi)\end{cases}$ 可以得到:

$$f(x)=x+\sin x-\pi,x\in[\pi,2\pi)$$

我们有:

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{3\pi} f(x)dx &= \int_{\pi}^{3\pi} [f(x-\pi)+\sin x]dx \\ &= \int_{\pi}^{3\pi} f(x-\pi)dx \\ &= \int_{0}^{2\pi} f(x)dx \\ &= \int_{0}^{\pi} xdx + \int_{\pi}^{2\pi} [x+\sin x-\pi]dx \\ &= \pi^2-2\end{aligned}$$

September 6

1. $\int \dfrac{\cos^3 x - 2\cos x}{1+\sin^2 x+\sin^4 x}dx$

解

我们令 $t=\sin x$, 我们可以得到原不定积分为:

$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{t^2+1}{1+t^2+t^4}dt \\ &= -\int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{1+t^2+\frac{1}{t^2}}dt \\ &= -\int \frac{d(t-\frac{1}{t})}{(t-\frac{1}{t})^2+3} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{t-\frac{1}{t}}{\sqrt{3}})+C \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}\sin x})dx+C\end{aligned}$$

2. 下列积分中, 与积分 $I=\int_0^1 \frac{1}{2}xe^{-\sqrt{x}}dx$ 值最接近的是:

- A. $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$
- B. $\int_0^1 xe^{-x}dx$
- C. $\int_0^1 x^2e^{-x}dx$
- D. $\int_0^1 x^4e^{-x}dx$

解

我们可以得到:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{1}{2} x e^{-\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 t^3 e^{-t} dt \\ &= \int_0^1 x^3 e^{-x} dx \end{aligned}$$

我们可以得到:

$$\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx > \int_0^1 x e^{-x} dx > \int_0^1 x^2 e^{-x} dx > \int_0^1 x^3 e^{-x} dx > \int_0^1 x^4 e^{-x} dx$$

我们只需要比较 $x^2 - x^3$ 和 $x^3 - x^4$ 的大小, 我们有: $x^2 - x^3 > x^3 - x^4$, 我们得到最接近 I 的是 $\int_0^1 x^4 e^{-x} dx$

3. $f(x) = \dfrac{(\sqrt[n]{x} - 1)^n}{x + 1}$, 求 $f^{(n)}(1)(n \geq 2)$

解

我们有:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{(x-1)^n} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt[n]{x} - 1)^n}{(x-1)^n} = \frac{1}{2n^n}$$

我们利用泰勒展开式:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{(x-1)^n} = \lim_{x \to 1} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-1)^k + o[(x-1)^n]}{(x-1)^n}$$

上述极限存在, 我们可以得到: $f^{(k)} = 0(k = 1, 2, \cdots, n-1)$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{(x-1)^n} = \frac{f^{(n)}(1)}{n!} \Rightarrow f^{(n)}(1) = \frac{n!}{2n^n}$$

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶导数连续,$f(1) = f'(1) = 0$,$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

(1). 证明: $\iint\limits_D f(x) dxdy = \iint\limits_D x^2 y f''(x) dxdy$

(2). 证明: $\exists \xi, \eta \in (0, 1)$, $s.t. \xi^2 f''(\xi) = 2f'(\eta)(\xi - 1)$

解

(1).

$$\begin{aligned}
\text{左边} &= \iint\limits_D f(x)dxdy \\
&= \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 dy \\
&= \int_0^1 f(x)dx \\
&= xf(x)|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 xf'(x)dx \\
&= -\int_0^1 xf'(x)dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{右边} &= \iint\limits_D x^2 y f''(x)dxdy \\
&= \int_0^1 x^2 f''(x)dx \int_0^1 ydy \\
&= \int_0^1 \frac{x^2}{2} df'(x) \\
&= \frac{x^2}{2} f'(x)|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 xf'(x)dx \\
&= -\int_0^1 xf'(x)dx
\end{aligned}$$

综上所述,左边 = 右边 $\Rightarrow \iint\limits_D f(x)dxdy = \iint\limits_D x^2 y f''(x)dxdy$

(2). 原命题等价于: $\exists \xi, \eta \in (0,1), \ s.t. \xi^2 f''(\xi) = 2f'(\eta)(\xi - 1) = 2[f(\xi) - f(1)] = 2f(\xi)$

我们需要证明: $\exists \xi \in (0,1), \ s.t. \xi^2 f''(\xi) - 2f(\xi) = 0$

我们由 (1) 得到: $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2} f''(x)dx \Rightarrow \int_0^1 [x^2 f''(x) - 2f(x)]dx = 0$

我们由积分中值定理得到:

$$\exists \xi \in (0,1), \ s.t. \xi^2 f''(\xi) - 2f(\xi) = 0$$

我们由拉格朗日中值定理得到:

$$\exists \eta \in (\xi, 1), \ s.t. f(\xi) - f(1) = f'(\eta)(\xi - 1)$$

综上所述, 我们得到: $\exists \xi, \eta \in (0,1), \ s.t. \xi^2 f''(\xi) = 2f'(\eta)(\xi - 1)$

September 7

1. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x \left(\arctan e^x + \int_0^x e^{t^2} dt\right)}{1 + \cos^2 x} dx$

解

原定积分可以化为:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\sin x \arctan e^{x}}{1+\cos^2 x}dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\sin x \arctan e^{-x}}{1+\cos^2 x}dx \\
2I &= \pi\int_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx \\
&= \pi\int_{0}^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx \\
4I &= \pi^2\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx \\
4I &= \frac{\pi^3}{2} \\
I &= \frac{\pi^3}{8}
\end{aligned}$$

2. 若 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(ax)}{x^n}dx$ 收敛, 求 n 的取值范围

解

原积分可能的暇点为 $x=0, x=+\infty$

(1). $x=0$ 处,$\frac{\arctan(ax)}{x^n} \sim ax^{1-n}$ 收敛 $\Rightarrow 1-n>-1 \Rightarrow n<2$

(2). $x=+\infty$,$\frac{\arctan(ax)}{x^n} \sim \frac{\pi}{2}x^{-n}$ 收敛 $\Rightarrow -n<-1 \Rightarrow n>1$

综上所述,$n\in(1,2)$

3. 设 $0<a<1$,$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin ax}{\sin x}dx$,$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan ax}{\tan x}dx$, 比较 I_1, I_2 和 $\frac{\pi a}{4}$ 的大小

解

我们可以得到: $\begin{cases} x\in(0,\frac{\pi}{4}) \\ ax\in(0,\frac{\pi}{4}) \\ ax<x \end{cases}$ 和函数 $\begin{cases} y=\sin x \\ y=\tan x \end{cases}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内单调递增.

我们得到:

$$\begin{cases} \frac{\sin(ax)}{\sin x}<1 \\ \frac{\tan(ax)}{\tan x}<1 \\ \frac{\frac{\tan(ax)}{\tan x}}{\frac{\sin(ax)}{\sin x}}=\frac{\cos(ax)}{\cos x}>1 \end{cases} \Rightarrow I_1<I_2<\frac{\pi a}{4}$$

4. 求 $\iint\limits_D \frac{\tan^3 x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, 其中 $D=\{(x,y)|y\geq|x|,(x^2+y^2)^3\leq y^4\}$

解

原二重积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D \frac{\tan^3 x + y}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy \\ &= \iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sin^2\theta} r\sin\theta dr \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{2}\sin^5\theta d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta d\theta \\ &= \frac{43\sqrt{2}}{120} \end{aligned}$$

5. 已知 $\int_1^{+\infty}\left(\frac{2x^2+bx+a}{2x^2+ax}-1\right)dx = 0$, 求 a, b

解

原积分可化为: $\int_1^{+\infty}\frac{(b-a)x+a}{2x^2+ax}dx = 0$收敛

(1). $x = +\infty$, 假设 $a \neq b \Rightarrow \frac{(b-a)x+a}{2x^2+ax} \sim \frac{1}{x}$发散, 我们得到: $a = b$

原积分等价于:

$$\int_1^{+\infty}\frac{a}{2x^2+ax}dx = \int_1^{+\infty}(\frac{1}{x}-\frac{2}{2x+a})dx = 0 \Rightarrow \ln|\frac{x}{2x+a}|_{x=1}^{x=+\infty} = 0 \Rightarrow a = b = 0$$

35.2 Week II

September 8

1. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)}{n+\frac{1}{k}} - \ln n\right]$

解

我们利用夹逼准则:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)}{n+1} - \ln n < I < \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)}{n} - \ln n$$

$$
\begin{aligned}
\text{左边} &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)}{n+1}-\ln n \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left\{\frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[\ln(n+k)-\ln n]-\frac{\ln n}{n+1}\right\} \\
&= \int_0^1 \ln(1+x)dx \\
&= 2\ln 2-1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{右边} &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)}{n}-\ln n \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[\ln(n+k)-\ln n] \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n}) \\
&= \int_0^1 \ln(1+x)dx \\
&= 2\ln 2-1
\end{aligned}
$$

综上所述, 我们可以得到原极限 $I=2\ln 2-1$

2. $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{(1+x^2)(1+x^4)}$

解

原定积分等价于:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty}\frac{x^4}{(1+x^2)(1+x^4)}dx \\
2I &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \frac{\pi}{2} \\
I &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

3. 设随机变量 $Y=min\{|X|,1\}$,其中 X 为随机变量,且密度函数为 $f(x)=\dfrac{k}{1+x^2}$(k为常数,$-\infty<x<+\infty$),下列说法不正确的是:

- A. $k=\dfrac{1}{\pi}$
- B. $E(X)=0$
- C. Y 没有概率密度
- D. $E(Y)=\dfrac{\ln(2e^{\frac{\pi}{2}})}{\pi}$

解

4. 求 $y=e^{-x}\sqrt{\sin x}(0\le x<+\infty)$ 绕 x 轴旋转一周的旋转体体积

解

我们可以得到:

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{+\infty}\pi y^2dx \\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\pi e^{-2x}\sin x dx \\
&= \lim_{n\to+\infty}A(1+e^{-4\pi}+e^{-8\pi}+\cdots+e^{-4n\pi}) \\
&= \frac{A\pi}{1-e^{-4\pi}} \\
A &= = \int_0^{\pi}e^{-2x}\sin x dx=\frac{e^{-2\pi}+1}{5} \\
V &= \frac{e^{-2\pi}+1}{5(1-e^{-4\pi})}=\frac{e^{2\pi}\pi}{5(e^{2\pi}-1)}
\end{aligned}$$

September 9

1. 已知 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^{\alpha}}dx$ 收敛, 求 α 的取值范围

解

原积分可能存在的暇点为 $x=0,x=+\infty$

(1). $x=0$ 时,$\dfrac{\ln(1+x)}{x^{\alpha}}\sim x^{1-\alpha}$ 收敛 $\Rightarrow 1-\alpha>-1\Rightarrow\alpha<2$

(2). $x=+\infty$ 时,$\dfrac{\ln(1+x)}{x^{\alpha}}\sim x^{-\alpha}$ 收敛 $\Rightarrow -\alpha<-1\Rightarrow\alpha>1$

我们得到: $\alpha\in(1,2)$

2. 设随机变量 X,Y 相互独立, 且 $X\sim N(0,1)$,$Y\sim B(n,p)$,$0<p<1$, 且 $X+Y$ 的分布函数:

- A. 是连续函数
- B. 恰有 $n+1$ 个间断点
- C. 恰有 1 个间断点
- D. 有无穷个间断点

解

3. 已知微分方程 $\cos^4 x\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\cos^2 x(1-\sin x\cos x)\dfrac{dy}{dx}+y=e^{-\tan x}$, 求该微分方程在 $t=\tan x$ 变换下所得的 y 对 t 的微分方程, 并求出其通解

解

我们可以得到:

$$\begin{cases} t = \tan x \\ \sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{(1+t^2)dy}{dt} \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\frac{dy}{dx}}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{(1+t^2)^2d^2y}{dt^2} - \dfrac{2t(1+t^2)dy}{dt} \end{cases}$$

我们可以得到原微分方程等价于:

$$\frac{d^2y}{(1+t^2)^2dx^2} + \frac{2dy}{(1+t^2)dx} - \frac{2tdy}{(1+t^2)^2dx} + y = e^{-t}$$

我们可以得到:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = e^{-t} \Rightarrow y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{-t}$$

我们得到特征方程: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$

我们可以得到: $y = (C_1x + C_2)e^{-x} + y^* \Rightarrow y^* = Ax^2e^{-x} \Rightarrow y^* = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$

综上所述, 微分方程的通解为: $y = (C_1x + C_2)e^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x}$

4. 求二重积分 $I = \iint\limits_D \arcsin(2\sqrt{x - x^2})dxdy, D = \{(x, y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$

解

原二重积分可化为:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x\arcsin(2\sqrt{x - x^2})dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arcsin(\cos\theta)\cos\theta(\sin\theta + 1)}{4}d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arcsin(\cos\theta)\cos\theta}{4}d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - \theta)\cos\theta d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta d\sin\theta \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

September 10

1. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^{n+1}-x^2}{x^n+1}$,$F(x)=\int_0^x f(t)dt$, 下列说法正确的是:

- A. $f(x)$ 有 1 个间断点,$F(x)$ 有 1 个不可导点
- B. $f(x)$ 有 1 个间断点,$F(x)$ 有 2 个不可导点
- C. $f(x)$ 有 2 个间断点,$F(x)$ 有 1 个不可导点
- D. $f(x)$ 有 2 个间断点,$F(x)$ 有 2 个不可导点

解

我们可以得到: $f(x)=\begin{cases} x,\ x<-1 \\ -x^2,\ -1<x<1 \\ 0,\ x=1 \\ x,\ x>1 \end{cases}$

$f(x)$ 在 $x=-1$ 处无定义,$x=-1$ 是可去间断点,$x=1$ 是跳跃间断点.

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 处处连续, 仅在 $x=1$ 处不可导.

2. 设当 $x\geq 0$ 时, 连续函数 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 非负, 且满足方程 $\int_0^{x^2} f(x^2)f(t)dt=\frac{1}{2}(\sqrt{1+x^2}-1)$,$F(0)=0$, 求 $f(x)$

解

我们设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, 我们令 $x^2=u$, 我们得到:

$$f(u)\int_0^u f(t)dt=\frac{1}{2}(\sqrt{1+u}-1)\Rightarrow F'(x)F(x)=\frac{1}{2}(\sqrt{1+x}-1)\Rightarrow\frac{1}{2}[F^2(x)]'=\frac{1}{2}(\sqrt{1+x}-1)$$

我们得到:

$$F^2(x)=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}-x+C,F(0)=0\Rightarrow\begin{cases} F(x)=\sqrt{\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}-x-\frac{2}{3}} \\ f'(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{2\sqrt{\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}-x-\frac{2}{3}}}\end{cases}$$

3. 证明: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$

解

我们有:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)}+\cdots$$

我们有: $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}=1-\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^4}{5!}+\cdots+\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)}+\cdots$

我们知道 $f(x)$ 有零点 $x=\pm\pi,\pm2\pi,\cdots\Rightarrow f(x)=A(x-\pi)(x+\pi)(x-2\pi)(x+2\pi)\cdots$

我们有:

$f(x)=A(x^2-\pi^2)(x^2-4\pi^2)\cdots$, 令$x=0$, 我们有: $A(-\pi^2)(-4\pi^2)\cdots=1\Rightarrow A=\dfrac{1}{(-\pi^2)(-4\pi^2)\cdots}$

我们有:

$$f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^4}{5!}+\cdots+\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)}+\cdots\\(1-\dfrac{x^2}{\pi^2})(1-\dfrac{x^2}{4\pi^2})\cdots\end{cases}\Rightarrow x^2\text{项系数相等}\Rightarrow-\frac{1}{6}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-\frac{1}{n^2\pi^2})$$

我们可以得到: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$

September 11

1. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有连续的一阶导数,$f'(x)=\dfrac{1}{1+f^2(x)}\left[\sqrt{\dfrac{1}{x}}-\sqrt{\ln(1+\dfrac{1}{x})}\right]$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在

解

我们由: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-f(1)=\int_1^{+\infty}f'(x)dx\Rightarrow$ 我们只需要证明: $\int_1^{+\infty}f'(x)dx$ 收敛

我们有:

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}f'(x)dx&=\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+f^2(x)}\left[\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})}\right]dx\\&\le\int_1^{+\infty}\left[\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})}\right]dx\end{aligned}$$

我们由拉格朗日中值定理得到:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{\xi}}\left(\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x})\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{4}$$

我们由比较判别法可以得到: $\begin{cases}\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}dx\text{收敛}, p>1\\\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}dx\text{收敛}\end{cases}$

综上所述, 我们得到: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在

2. 函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导,$f(0)=1$ 且满足等式:

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0$$

(1). 求导数 $f'(x)$

(2). 证明: 当 $x\ge0$ 时, 不等式 $e^{-x}\le f(x)\le1$ 成立

解

(1). 我们可以得到:

$$(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)dt=0$$

我们对上式子求导可以得到:

$$(x+1)f''(x)+(x+2)f''(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} (x+1)e^x f'(x)=C \\ f'(0)=-1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{(1+x)e^x}$$

(2). 我们有:

$$\begin{cases} F(x)=f(x)-1 \\ G(x)=f(x)-e^{-x} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} F'(x)=f'(x)=-\frac{1}{(1+x)e^x}<0 \\ F(0)=0 \\ G'(x)=f'(x)+e^{-x}=\frac{x}{(1+x)e^x}>0 \\ G(0)=0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} F(x)\text{单调递减} \\ F(x)\le F(0)=1 \\ G(x)\text{单调递增} \\ G(x)\ge G(0)\Rightarrow f(x)\ge e^{-x} \end{cases}$$

September 12

1. 设 $f(x)=\int_{-1}^x(1-|t|)dt(x\ge -1)$, 求曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的面积

解

我们可以得到 $f(x)$ 表达式:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{(x+1)^2}{2}, & x\in[-1,0] \\ \frac{2x-x^2+1}{2}, & x\in(1,+\infty) \end{cases}$$

我们可以得到:

$$S=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^{1+\sqrt{2}} f(x)dx=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}+\frac{2\sqrt{2}}{3}=1+\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

2. 设函数 $f(x)$ 连续,$f'(0)$ 存在,并对于任意 $x,y\in\mathbb{R}$,$f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}$,且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$,求 $f(x)$

解

我们有: $f(0)=\dfrac{2f(0)}{1-4f^2(0)}\Rightarrow f(0)=0$
我们利用导数定义:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)+f(\Delta x)}{1-4f(x)f(\Delta x)}-f(x)}{\Delta x} \\ &= (1+4f^2(x))\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta} \\ &= \frac{1+4f^2(x)}{2} \end{aligned}$$

我们可以得到微分方程的解:

$$\arctan[2f(x)]=x+C,\ f(0)=0\to f(x)=\frac{1}{2}\tan x$$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上具有二阶连续导数,$f(0)=f'(0)=0, f''(0)=1$, 对于任意的 $x>0$,$u(x)$ 表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距, 当 $x\to 0^+$ 时, 下列等价无穷小不成立的是:

- A. $f(x)\sim\dfrac{x^2}{2}$
- B. $x\cdot f(u(x))\sim\dfrac{u(x)\cdot f(x)}{2}$
- C. $\int_0^x u(t)dt\sim\dfrac{x^2}{4}$
- D. $\int_0^{f(x)} u(t)dt\sim\dfrac{x^4}{4}$

解

我们求出 $f(x)$ 在 $(x,f(x))$ 处的切线方程:$y-f(x)=f'(x)(x'-x)$
我们有:

$$u(x)=x'=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

我们利用泰勒展开式, 将 $f(x)$ 展开:

$$\begin{cases} f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2) \\ f'(x)=f'(0)+f''(0)x+o(x) \end{cases}\to\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2) \\ f'(x)=x+o(x) \end{cases}$$

当 $x\to 0^+$ 时,$f(x)\sim\dfrac{1}{2}x^2, u(x)\sim\dfrac{1}{2}x$

我们得到:

$$\begin{cases} x \cdot f(u(x)) \sim \dfrac{u(x) \cdot f(x)}{2} \\ \int_0^x u(t)dt \sim \dfrac{x^2}{4} \\ \int_0^{f(x)} u(t)dt \sim \dfrac{x^4}{16} \end{cases}$$

September 13

1. 比较 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}dx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2}dx$ 的大小

解

我们不妨设:$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}dx, J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^2}dx$, 我们有:

$$\begin{aligned} I - J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1+x^2}dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{1+x^2}dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{1+(t+\frac{\pi}{4})^2}dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{\sin t}{1+(t+\frac{\pi}{4})^2}dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{1+(t+\frac{\pi}{4})^2}dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t[\frac{1}{1+(t+\frac{\pi}{4})^2} - \frac{1}{1+(\frac{\pi}{4}-t)^2}]dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\pi t \sin t}{[1+(t+\frac{\pi}{4})^2][1+(\frac{\pi}{4}-t)^2]}dt < 0 \end{aligned}$$

2. 求曲线 $y = \frac{x^2}{1+x^2}$ 与其渐近线所围区域绕该渐近线旋转所得旋转体体积

解

我们可以得到 $f(x)$ 的渐近线为 $y=1$, 因此我们有:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}dx \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta \\ &= \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

3. 设 A 是 n 阶矩阵,A 的第 i 行第 j 列元素为 a_{ij}, 满足 $a_{ij} = i \cdot j$, 下列命题正确的是:

- A. $r(A) = 1$

- B. 矩阵 A 不可相似对角化
- C. 矩阵 A 的特征值之和为 $\sum_{k=1}^{n} k$
- D. 矩阵 A 的特征值之和为 $\sum_{k=1}^{n} k^2$

解

我们由:$a_{ij} = i \cdot j \to a_{ij} = a_{ji} = i \cdot j$, 即矩阵 A 为实对称矩阵,A 一定可以相似对角化

我们可以得到:$|A| \neq 0 \to r(A) = n$ 且矩阵 A 的特征值之和为 $\sum_{i=1}^{n} i^2$

4. 求二重积分 $\iint\limits_D \frac{1}{x^4+y^2}dxdy,\ D = \{(x,y)|y \geq x^2+1\}$

解

原二重积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{x^2+1}^{+\infty} \frac{1}{x^4+y^2}dy \\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\arctan(\frac{x^2}{x^2+1})dx \\ &= 2\int_0^{+\infty} \arctan(\frac{1}{t^2+1})dt \\ &= \end{aligned}$$

5. 求二重积分 $\iint\limits_D \frac{1}{x^4+y^2}dxdy,\ D = \{(x,y)|x \geq 1, y \geq x^2\}$

解

原二重积分等价于:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{+\infty} dx \int_{x^2}^{+\infty} \frac{1}{x^4+y^2}dy \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{\pi}{4x^2}dx \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

September 14

1. 曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = mx(m > 0)$ 在第一象限内所围成的图形绕该直线旋转所形成的旋转体的体积 V

解

我们设围成区域中任意一点 (x, y), 我们有:$d = \dfrac{mx - y}{\sqrt{1+m^2}}$

$$\begin{aligned} V &= \iint\limits_S 2\pi d dx dy \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{1+m^2}} \int_0^m dx \int_{x^2}^{mx} (mx - y) dy \\ &= \frac{\pi m^5}{30\sqrt{1+m^2}} \end{aligned}$$

2. 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} (xy + a|x| + b\sqrt{|y|}) \arctan \dfrac{1}{|x| + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, 下列说法中正确的是:

- A. $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处的连续性和 a, b 的取值有关
- B. $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处偏导数存在的充要条件是 $ab = 0$
- C. $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微的充要条件是 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处偏导数存在
- D. $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极值点

解

3. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导,$f'(x) + f^2(x) \geq 0, f(0) = 1, f(x) \neq 0$, 证明: $f(x) \geq \dfrac{1}{x+1}$

解

35.3 Week III

September 15

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $\int_0^1 f(x)dx = 0$, 则

- A. 当 $f'(x) < 0$ 时,$f(\frac{1}{2}) < 0$
- B. 当 $f''(x) < 0$ 时,$f(\frac{1}{2}) < 0$
- C. 当 $f'(x) > 0$ 时,$f(\frac{1}{2}) < 0$
- D. 当 $f''(x) > 0$ 时,$f(\frac{1}{2}) < 0$

解

2. 设 $f(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2 & x^3\\ 1 & 2 & 4 & 8\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, 则曲线 $y=f(x)$ 在 $(-1,2)$ 内存在水平切线的条数

解

September 16

1. 已知正值连续函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调减少, 对于任意的 $a,b(0<a<b<1)$, 下列结论不正确的是

- A. $a\int_0^b f(x)dx > b\int_0^a f(x)dx$
- B. $b\int_0^a f(x)dx > a\int_0^b f(x)dx$
- C. $a\int_0^b \sqrt{f(x)}dx < b\int_0^a \sqrt{f(x)}dx$
- D. $b\int_0^a \sqrt{f(x)}dx < a\int_0^b \sqrt{f(x)}dx$

解

2. 设函数 $\varphi(x,y)$ 的全微分为 $dz=(2x-y^2-2y)dx+(-2xy-2x+y^3+3y)dy$,$f(x,y)$ 连续, 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{\varphi(x,y)}=-1$

- A. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点
- B. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点
- C. 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点
- D. 不能确定点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点

解

3. 求 $\int_L \dfrac{|y|}{x^2+y^2+z^2}ds$, 其中 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x^2+y^2=2ax \qquad (a>0)\\ a\geq 0\end{cases}$

解

September 17

1. 设 $I_1=\int_0^{\pi}\dfrac{x\sin^2 x}{1+e^{\cos^2 x}}dx$,$I_2=\int_0^{\pi}\dfrac{\sin^2 x}{1+e^{\cos^2 x}}dx$,$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 x}{1+e^{\sin^2 x}}dx$, 比较 I_1,I_2,I_3 的大小

解

2. 设 $f(u,v)$ 有一阶偏导数,$f(x,1-x)=1, f_1'(x,1-x)=x$

(1) 设 $z(t)=f(\cos t,\sin t)$, 计算 $z'(0)$

(2) 证明: $f(u,v)$ 在单位圆周上至少存在两个不同的点满足方程: $v\dfrac{\partial f}{\partial u}=u\dfrac{\partial f}{\partial v}$

解

September 18

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续可导,$\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{5}{2}$,$\int_0^1 xf(x)dx=\dfrac{3}{2}$, 证明:$\exists\xi\in(0,1)$, $s.t. f'(\xi)=3$

解

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos^3 x)(1-\cos^{17} x)}{\frac{x^2}{2}-\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)!}t^{2n+1}dt}$

解

3. 设偶函数 $f(t)$ 具有连续的导函数, 且满足 $f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\le 4t^2} f(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2})dxdy$, 求方程 $\int_0^x\sqrt{1+4\pi t^2}dt+\int_{\cos x}^0\dfrac{1+4\pi t^2}{f(t)}dt=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内根的个数

解

4. 设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=f(2)=0$,$f(1)=a>0$ 且 $f''(x)<0$, 则

- A. $\int_0^2 f(x)dx>a$
- B. $\int_0^2 f(x)dx<a$
- C. $\int_0^1 f(x)dx>\int_1^2 f(x)dx$
- D. $\int_0^1 f(x)dx<\int_1^2 f(x)dx$

解

September 19

1. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2\sin x}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处

- A. 不连续

- B. 连续但不可导
- C. 可导但不可微
- D. 可微

解

2. 求 $\iint_D \dfrac{1-x^3y^2}{(y+2\sqrt{1-x^2})^2}dxdy$, 其中 $D:\{(x,y)|x^2+y^2\le 1,-y\le x\le y\}$

解

September 20

1. 求 $\iiint\limits_{\Omega}(mx+ly+nz)^2dv$, 其中 $\Omega=\{(x,y,x)|x^2+y^2+z^2\le a^2(a>0)\}$

解

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上导函数连续,$f'(a)=f'(b)$, 证明: $\exists\xi\in(a,b),\ s.t.\ f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$

解

3. 下列函数在 $(0,0)$ 点可微的是:

- A.$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$
- B.$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$
- C.$\varphi(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$
- D.$\psi(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

解

4. 已知 $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-c)=k$, 求行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

解

5. 求 $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_{x+y}^1 \frac{\sin z}{z} dz$

解

September 21

1. 已知函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的某邻域内有定义, 则 $\lim\limits_{x\to 0} f_x'(x,0)=f_x'(0,0)$, $\lim\limits_{y\to 0} f_y'(0,y)=f_y'(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微的什么条件?

解

2. 设 n 阶可逆矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$, 其中 $b\neq 0$, 求 A^{-1}

解

3. 求微分方程 $y''+(4x+e^{2y})(y')^3=0$ 的通解, 其中 $y'\neq 0$

解

4. 设 $f(x)$ 二阶可导,$f^2(x)-f^2(y)=f(x+y)-f(x-y)$

(1) 证明:$f''(x)f(y)=f(x)f''(y)$

(2) 若 $f''(1)=f(1)=1$, 求 $f(x)$

解

35.4 Week IV

September 22

1. 设 $z=\dfrac{x\cos(y-1)-(y-1)\cos x}{1+\sin x+\sin(y-1)}$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}|_{(0,1)}$

解

2. 已知 A 是正交矩阵, 则 $A^*=A^T$ 是 $|A|=1$ 的什么条件?

解

3. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(1-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\sqrt{i}}\right)$

解

September 23

1. 已知 $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$, 求 $f''_{xy}(0,0)\cdot f''_{yx}(0,0)$

解

2. 设矩阵 $A=(a_{ij})$ 满足 $a_{ij}=A_{ij}$,$a_{11}=-1$, 求 $Ax=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ 的解

解

3. 求 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1-e^{-x}}{\sqrt{x^3}}dx$

解

4. 方程 $x=e^{\sin^n x}(n=1,2,\cdots)$

(1). 证明方程在 $(\dfrac{\pi}{2},e)$ 内有唯一实数根

(2). 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n-\frac{\pi}{2}}}$

解

September 24

1. 若 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1$, 且当 $x=0$ 时,$z=\sin y$, 当 $y=0$ 时,$z=\sin x$, 求 $z(x,y)$

解

2. 设矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ 满秩, 则直线 $l_1:\dfrac{x-a_1}{a_1-a_2}=\dfrac{y-b_1}{b_1-b_2}=\dfrac{z-c_1}{c_1-c_2}$ 与直线 $l_2:\dfrac{x-a_1}{a_2-a_3}=\dfrac{y-b_1}{b_2-b_3}=\dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$ 关系

解

3. 设 $A=\begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求 A^n

解

4. 求 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n n^2}{(n+1)!}x^n$ 的和函数 $S(x)$

解

September 25

1. 设可微函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-f(x,y)$,$f(0,\dfrac{\pi}{2})=1$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{f(0,y+\frac{1}{n})}{f(0,y)}\right]^n=e^{\cot y}$, 求 $f(x,y)$

解

2. $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可微,$|f'(x)|<k\cdot f(x)(0<k<1)$

(1).$\exists\xi\in(-\infty),+\infty)$, $s.t.$ $\ln f(\xi)=\xi$

(2). 设 $a_n=\ln f(a_{n-1})(n=1,2,\cdots)$, 证明 $\{a_n\}$ 收敛

解

September 26

1. 设 $f(x)$ 有连续一阶导数,$(xy - yf(x))dx + (f(x) + y^2)dy = du(x, y)$, 且 $f(0) = -1$, 求 $u(x, y)$

解

2. 积分计算

(1).$\int_0^{\ln 2} dy \int_{e^y}^2 \frac{e^{xy}}{x^x - 1} dx$

(2).$\int_0^1 dx \int_x^1 ydy \int_y^1 \sqrt{1 + z^4} dz$

解

September 27

1. $f(x)$ 在 $x = 0$ 处 $n + 1$ 阶可导,$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$,$f^{(n)}(0) = a$, 求 $\lim_{x \to 0} \frac{f(e^x - 1) - f(x)}{x^{n+1}}$

解

2. 若函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z} + \frac{xyz}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}} = 1$ 确定, 求 $dz|_{(0,0)}$

解

September 28

1. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有一阶连续导数, 对半空间 $x \geq 0$ 中任意光滑闭曲面 Σ, 我们有 $\oiint_{\Sigma} \lim e^{-x} f(x)dydz + y\sqrt{e^x - 1} f^2(x)dzdx = 0$, 求 $f(x)$

解

2. 设 $f(t)$ 在 $[t, +\infty)$ 上有连续二阶导数, 且 $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$,$z = (x^2 + y^2)f(x^2 + y^2)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, 求 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最大值

解

September 29

1. 设 $u = f(x, y, z)$,$z = z(x, y)$ 是由方程 $\varphi(x + y, z) = 1$ 所确定的隐函数, 其中 f 和 φ 有二阶连续偏导数且 $\varphi_2 \neq 0$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, du, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

解

September 30

1. 设函数 $z = z(x, y)$ 的微分 $dz = (2x+12y)dx+(12x+4y)dy$ 且 $z(0, 0) = 0$, 求函数 $z = z(x, y)$ 在 $4x^2 + y^2 \leq 25$ 上的最大值

解

第 36 章 October

36.1 Week I

October 1

1. 求累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$ 的等价形式

解

October 2

1. 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} \rho^2 d\rho + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dy$

解

October 3

1. 求 $\int_0^1 dy \int_y^1 \sqrt{2xy-y^2}dx$

解

October 4

1. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{2n+1}} \left[\int_1^{\frac{1}{2n}} e^{-y^2}dy + \int_1^{\frac{3}{2n}} e^{-y^2}dy + \cdots + \int_1^{\frac{2n-1}{2n}} e^{-y^2}dy\right]$

解

October 5

1. 设 D 是由 $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ 所确定的平面区域, 求 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$

解

October 6

1. 计算二重积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} \left[\sin\theta + \cos\theta\sqrt{1+r^2\sin^2\theta}\right] r^2 dr$

解

October 7

1. 已知平面区域 $D = \{(x,y)||x|+|y| \le \frac{\pi}{2}\}$, 记 $I_1 = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}d\sigma$,$I_2 = \iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$,$I_3 = \iint\limits_D (1-\cos\sqrt{x^2+y^2})d\sigma$, 比较 I_1, I_2, I_3 的大小

解

36.2 Week II

October 8

1. 已知平面区域 $D = \{(x,y)||x|+|y| \le 1\}$, 记 $I_1 = \iint\limits_D (2x^2+\tan(xy^2))dxdy$,$I_2 = \iint\limits_D (x^2y + 2\tan(y^2))dxdy$,$I_3 = \iint\limits_D (|xy|+y^2)dxdy$, 比较 I_1, I_2, I_3 的大小

解

October 9

1. 可微函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(x)dx$, 且 $f(0) = 1$, 求 $f(x)$

解

October 10

1. 设 $f(x)$ 是可导函数, 且 $f(0) = 0$,$g(x) = \int_0^1 xf(tx)dt$ 满足方程 $f'(x) + g'(x) = x$, 则由曲线 $y = f(x), y = e^{-x}$ 及直线 $x = 0, x = 2$ 围成的平面图形的面积

解

October 11

1. 设函数 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f'(x) = f(1-x), f(0) = 1$, 求 $f(x)$

解

October 12

1. 设函数 $f(x)$ 连续, 且对任意实数 x, h 满足 $f(x+h) = \int_x^{x+h} t\left[f(t+h)+t^2\right]dt + f(x), \lim\limits_{x\to 0}\left[1+f(x)\right]^{\frac{1}{x^4}} = a(a>0)$, 求 $f(x)$ 表达式和常数 a

解

October 13

1. 设 $f(x)$ 为 $[0,+\infty)$ 上的正值连续函数, 已知曲线 $y = \int_0^x f(u)du$ 和 x 轴及直线 $x = t(t>0)$ 所围成区域绕 y 轴旋转所得体积与曲线 $y = f(x)$ 和两坐标轴及直线 $x = t(t>0)$ 所围区域的面积之和为 t^2, 求曲线 $y = f(x)$ 的方程

解

October 14

1. 下列级数收敛的是:

- A. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{\ln(n!)}$
- B. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(2-\dfrac{1}{n})^n\ln(1+\dfrac{1}{n2^n})$
- C. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-2)^n n^2+e^n}{ne^n}$
- D. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n e^n}{3^n-2^n}$

解

36.3 Week III

October 15

1. 下列级数条件收敛的是:

- A. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$
- B. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\ln(1+\dfrac{1}{n})$

- C. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\left[(-1)^n+\ln n\right]}{n}$
- D. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$

解

October 16

1. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}$ 的敛散性

解

October 17

1. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 条件收敛, 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n^2$ 的敛散性

解

October 18

1. 已知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则下列级数一定收敛的是:

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n}$
- B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$
- C. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$
- D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^3+a_n^2}$

解

October 19

1. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 下列四个级数一定收敛的个数:

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$
- B. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$
- C. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n}-a_{2n-1})$
- D. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}^2-a_n^2)$

解

October 20

1. 设 a_n 为曲线 $y = \sin x, (0 \le x \le n\pi)$ 与 x 轴所围区域绕 x 轴旋转所得到旋转体的体积, 求级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \pi^2}{2a_{n+1}}$ 的和

解

October 21 1. 若 $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \dfrac{nt^{n-1}}{1+e^{xt}}dt$, 求 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$

解

2. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 收敛并求其和

解

36.4 Week IV

October 22

1. 设 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$, 其中 n 为正整数

(1). 若 $n \ge 2$, 计算 $I_n + I_{n-2}$

(2). 设 p 为实数, 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n I_n^p$ 的绝对收敛性和条件收敛性

解

October 23

1. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \dfrac{x^{2n+2}}{n+1}$

(1). 求该幂级数的收敛区间以及和函数

(2). 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n!}{(2n+1)!!} \dfrac{1}{n+1}$ 的和

(3).$2f(\dfrac{1}{\sqrt{2}}) - 1 = \dfrac{\pi^2}{8} - 1$

解

October 24

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续可微,λ 为实数, 证明: 当且仅当 $f(x)e^{\lambda x}$ 单调不减时,$f'(x)+\lambda f(x)$ 单调不减

解

2. 设 Ω 为区域 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$, 求 $\iiint\limits_{\Omega}(3x+2y+z)^2dv$

解

October 25

1. 设曲线 $C: x^2+y^2=2x$, 求 $\oint_C \frac{(x+y+1)^2}{(x-1)^2+y^2}ds$

解

October 26

1. 设曲面 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=2y$, 求 $\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+2y^2+3z^2)dS$

解

October 27

1. 计算线积分 $I=\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+xy+y^2}$, 其中 L 为 $|x|+|y|=1$, 其方向为逆时针方向

解

October 28

1. 计算曲线积分 $I=\oint_L\left[\frac{4x-y}{4x^2+y^2}-\frac{y}{(x-1)^2+y^2}\right]dx+\left[\frac{x+y}{4x^2+y^2}+\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\right]dy$, 其中 L 是 $x^2+y^2=4$, 方向为逆时针方向

解

October 29

1. 设 Ω 是由平面曲线 $\begin{cases} 4y^2+z^2=4 \\ x=0 \end{cases}$ $(z\geq 0)$ 绕 z 轴旋转一周形成的空间曲面, 取上侧, 计

算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Omega}\frac{x^2ydydz+y^2zdzdx+(z^2+1)dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+(\frac{z}{2})^2+3}}$

解

October 30

1. 设函数 $f(x,y,z)$ 在区域 $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leq 1\}$ 上具有连续一阶偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z})dxdydz$

解

October 31

1. 设 A 为三阶方阵, 并有可逆矩阵 $P=(p_1,p_2,p_3)$,$p_i(i=1,2,3)$ 为三维列向量, 使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(1). 证明:p_1,p_2 是方程 $(E-A)x=0$ 的解,p_3 是方程 $(E-A)x=-p_2$ 的解, 且 A 不可相似对角化

(2). 当 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-1&-2\\-1&1&2\end{pmatrix}$ 时, 求可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

解

第 37 章 November

37.1 Week I

November 1

1. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x f(x)+\sin x}{x^2}=1$, 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+\sin x}{x^2}$

解

November 2

1. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内可导,$f(0)+3f'(0)=1$,求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_x^{\ln(1+x)}f(x+t)dt+[\sin x-\ln(1+x)]f(x)}{x^3}$

解

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{x}{(e^x-1)\cos\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{(1+\sin x^2)^{\frac{1}{x}}-1}}$

解

November 3

1. 设 $f(x)$ 连续, 且 $f(0)\neq0$, 且 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+\int_0^x(x-t)f(t)dt\right]^{\frac{1}{x\int_0^x f(x-t)dt}}$

解

November 4

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶导数连续,$f(1)\le 0, \lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-|x|]=0$, 证明:

(1). 存在 $\xi\in(1,+\infty)$, 使得 $f'(\xi)>1$

(2). 存在 $\eta\in(-\infty,+\infty)$, 使得 $f''(\eta)=0$

解

2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}$

$dfrac\int_0^{2x}|t-x|\sin t dt|x|^3$

解

November 5

1. 求使得 $\oint_L(2y^3-3y)dx-x^3dy$ 的值最大的平面正向边界曲线 L

解

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{(1+x)^{\frac{1}{x}}}-(1+x)^{\frac{e}{x}}}{x^2}$

解

3. 设曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与平面 $z=x$ 的交线为 L, 起点为 $A(0,1,0)$, 终点为 $B(0,-1,0)$, 求 $\oint_L(x+y-z)dx+|y|dz$

解

November 6

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1-\dfrac{k}{n}\right)\ln(1+\dfrac{k}{n^2})$

解

November 7

1. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{n}{n^2+n+\ln 1}+\dfrac{n}{n^2+n+\ln 2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+\ln n}\right]^n$

解

37.2 Week II

November 8

1. 求 $\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right]^n$

解

2. 以下两个矩阵, 可以用同一个可逆矩阵 $\mathbf{P}$ 相似对角化的是:

- A.$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$
- B.$\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$
- C.$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}$
- D.$\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}$

解

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上一阶可导,$f(0)=0$,$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得最大值 $Mx_0, x_0\in(0,2)$, 且 $f'(x)\leq M$, 证明:

(1). 当 $x\in[0,x_0]$ 时, 有 $f(x)=Mx$

(2).$M=0$

解

4. 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 对任意的正整数, 满足 $a_n<b_n<a_{n+1}$, 则:

- A. 数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均收敛, 且 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$
- B. 数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均发散, 且 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$
- C. 数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 具有相同的敛散性
- D. 数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 具有不同的敛散性

解

November 9

1. 若可逆线性变换 $\mathbf{x}=\mathbf{P}\mathbf{y}$ 可将二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2$ 化为规范型 $y_1^2+y_2^2$, 同时将二次型 $g(x_1,x_2)=-x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2$ 化为标准型 $k_1y_1^2+k_2y_2^2$, 求可逆矩阵 $\mathbf{P}$ 及 k_1,k_2 的值

解

November 10

1. 设有数列 $\{x_n\}$, 已知 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$, 求下列说法正确的个数:

- (1). $\{x_n\}$ 必收敛
- (2). 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 必收敛
- (3). 若 $\{x_n\}$ 有界, 则 $\{x_n\}$ 必收敛
- (4). 若 $\{x_{3n}\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 必收敛

解

November 11

1. 设 $f(x)$ 有连续一阶导数, 且 $0<f'(x)\leq\dfrac{\ln(2+x^2)}{2(1+x^2)}$, 数列 $x_0=a,x_n=f(x_{n-1}),n=1,2,\cdots$.

证明:

(1). 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n$ 存在且是方程 $f(x)=x$ 的唯一实根

(2). 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(x_n)-x_n]$ 收敛

(3). 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[x_n-A]$ 绝对收敛, 其中 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=A$

解

November 12

1. 设 $f(x)=x+a\ln(1+x)+\dfrac{bx\sin x}{1+x^2},g(x)=cx^3$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小, 则:

- A. $a=1,b=-\dfrac{1}{2},c=\dfrac{1}{3}$
- B. $a=1,b=-\dfrac{1}{2},c=-\dfrac{1}{3}$
- C. $a=-1,b=\dfrac{1}{2},c=-\dfrac{1}{3}$
- D. $a=-1,b=-\dfrac{1}{2},c=\dfrac{-}{1}3$

解

November 13

1. 设 $f(x)$ 为连续函数,$\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\ln(1+x)}{x^2}=2$,$F(x)=\int_0^x tf(x-t)dt$, 当 $x\to 0$ 时,$F(x)-\frac{1}{2}x^2$ 与 bx^k 为等价无穷小, 其中常数 $b\neq 0$,k 为正整数, 求 $k,b,f(0),f'(0)$

解

November 14

1. 设 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2e^{(n+1)x}+1}{e^{nx}+x^n+1}$, 则 $f(x)$

- A. 仅有一个可去间断点
- B. 仅有一个跳跃间断点
- C. 有两个可去间断点
- D. 有两个跳跃间断点

解

37.3 Week III

November 15

1. 下列命题成立的是:

- A. 若 $\lim_{x\to 0}\varphi(x)=0$, 且 $\lim_{x\to 0}\frac{f[\varphi(x)]-f(0)}{\varphi(x)}$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导
- B. 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $\lim_{x\to 0}\varphi(x)=0$, 则 $\lim_{x\to 0}\frac{f[\varphi(x)]-f(0)}{\varphi(x)}=f'(0)$
- C. 若 $\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-f(0)}{\sqrt{x^2}}$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导
- D. 若 $\lim_{x\to 0}\frac{f(\sqrt[3]{x})-f(0)}{\sqrt{x^2}}$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

解

November 16

1. 设 $f(x)$ 在 x_0 点可导,α_n,β_n 为趋于零的正项数列, 求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}$

解

November 17

1. 设函数 $\varphi(x)=\int_0^{\sin x}f(tx^2)dt$, 其中 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(0)=2$

(1). 求 $\varphi'(x)$

(2). 讨论 $\varphi'(x)$ 的连续性

解

November 18

1. 设 $x=\int_0^1 e^{tu^2}du, y=y(t)$ 由方程 $t-\int_1^{y+t}e^{-u^2}du=0$ 所确定, 求:

(1). $\frac{dy}{dt}|_{t=0}, \frac{d^2y}{dt^2}|_{t=0}, \frac{dx}{dt}|_{t=0}, \frac{d^2x}{dt^2}|_{t=0}$

(2). $\frac{dy}{dx}|_{t=0}, \frac{d^2y}{dx^2}|_{t=0}$

解

November 19

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sin x}{x^3}, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$ 处处连续, 求 $f''(0)$

- A. 0
- B. 不存在
- C. $\frac{1}{60}$
- D. $-\frac{a}{10}$

解

November 20

1. 设方程 $a^x=bx(a>1)$ 有两个不同的实根, 求常数 a,b 应满足的关系式

解

November 21

1. 设 $y(x)$ 满足 $y''+2ay'+b^2y=0(a>b>0), y(0)=1, y'(0)=1$, 求 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$

解

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty]$ 上二阶可导, 且 $f(0)=0, f''(x)<0$, 则当 $0<a<x<b$ 时, 下面那个选项正确:

- A. $af(x)>xf(a)$
- B. $bf(x)>xf(b)$

- C. $xf(x) < bf(b)$
- D. $xf(x) > af(a)$

解

37.4 Week IV

November 22

1. 设 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f(1)=6, f'(1)=0$, 且当 $x \geq 1$,$x^2f''(x)-3xf'(x)-5f(x) \geq 0$, 证明: 当 $x \geq 1$ 时,$f(x) \geq x^5+\dfrac{5}{x}$

解

November 23

1. 设 $f(x)=\int_0^x t|x-t|dt-\dfrac{x^2}{6}$, 求:
(1). 函数 $f(x)$ 的极值和曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间和拐点
(2). 曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴围成的区域的面积及绕 y 轴旋转所得旋转体的体积

解

November 24

1. 曲线 $y=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+x^2}$ 的渐近线有多少条?

解

November 25

1. 设 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上二阶可导, 且 $|f(x)| \leq 1$, 又 $[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$, 证明在 $(-2,2)$ 内至少存在一点 ξ, 使得 $f''(\xi)+f(\xi)=0$

解

November 26

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 $n+1$ 阶导数, 且 $f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0, k=0,1,2,\cdots,n$, 证明: 存在 $\xi \in (a,b), s.t.\ f^{(n+1)}(\xi)=f(\xi)$

解

November 27

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$, 试证明:

(1). 在 $(0,1)$ 内存在 ξ,η, 使得 $[1+\eta f(\eta)]f'(\xi)=f'(\eta)+f^2(\eta)$

(2). 存在 ξ 和 η, 满足 $0<\xi<\eta<1$, 使得 $f'(xi)+f'(\eta)=2$

解

November 28

1. 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $f(1)>g(1),f(0)>g(0),\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 g(x)dx$, 试证明: 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f''(\xi)>g''(\xi)$

解

November 29

1. 设 α 为正整数, 且反常积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$ 收敛, 求 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$

解

November 30

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续且单调,$f(x+2)-f(x)=4(x+2), f(0)=1,\int_1^9 f^{-1}(x)dx=\dfrac{28}{3}$, 其中 $f^{-1}(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数, 求 $\int_1^3 f(x)dx$

解

第 38 章 December

38.1 Week I

December 1

1. 求曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 与直线 $y=x$ 及 $y=2$ 所围区域绕 $y=2$ 旋转所得旋转体的体积

解

December 2

1. 设曲线 $y=\sin x(0\le x\le n\pi, n=1,2,\cdots)$ 和 x 轴围成的区域为 A, 区域 A 绕 y 轴旋转所得旋转体体积为 S_n

(1). 求 S_n

(2). 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{S_1}{n^3+1^3}+\dfrac{S_2}{n^3+2^3}+\cdots+\dfrac{S_n}{n^3+n^3}]$

解

December 3

1. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $\int_0^1 f(x)dx=3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx$, 试证明: 存在两个不同的点 $\xi,\eta\in(0,1)$, $s.t.\ f'(\xi)=g'(\xi)[f(\eta)-f(\xi)]$

解

December 4

1. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有连续导数, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right] = \frac{b-a}{2}[f(a)-f(b)]$$

解

December 5

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续

(1). 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^\pi f(x)|\sin nx|dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(x)dx$

(2). 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^\pi |\sin nx|\ln(1+x)dx$

解

December 6

1. 设函数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y)\neq(0,0) \\ 0, (x,y)=(0,0) \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处

- A. 不连续
- B. 两个偏导数都不存在
- C. 两个偏导数存在但不可微
- D. 可微

解

December 7

1. $\lim\limits_{x\to0y\to0} \dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ 是函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微的:

- A. 充分必要条件
- B. 必要条件但非充分条件
- C. 充分条件但非必要条件
- D. 既非充分也非必要条件

解

38.2 Week II

December 8

1. 设 $f_x(x_0,y_0)$ 存在,$f_y(x_0,y_0)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续, 尝试证明:$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微

解

December 9

1. 设 $u=u(\sqrt{x^2+y^2})$ 具有连续的二阶偏导数, 且满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+u=x^2+y^2$, 试求函数 u 的表达式

解

December 10

1. 设 $f(x,y)$ 有二阶连续导数,$g(x,y)=f(e^{xy},x^2+y^2)$ 且 $\lim\limits_{x\to 1 y\to 0}\dfrac{f(x,y)+x+y-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0$, 证明: $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点取得极值, 判断此极值是极大值还是极小值, 并求出此极值

解

December 11

1. 设区域 D 由 $x^2+y^2\leq 2x+2y$ 所确定, 求 $\iint\limits_D [x(1-y^3)+y(1+x^3)]d\sigma$

解

December 12

1. 设 $D=\{(x,y)|0\leq x\leq 2,0\leq y\leq 2\}$

(1). 计算 $b=\iint\limits_D |xy-1|d\sigma$

(2). 设 $f(x,y)$ 在 D 上连续, 且 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=0$, $\iint\limits_D xyf(x,y)d\sigma=1$, 证明: 存在 $(\xi,\eta)\in D$, 使得 $|f(\xi,\eta)|\geq\dfrac{1}{b}$

解

December 13

1. 设 $f(x)$ 有一阶连续导数,$(xy-yf(x))dx+(f(x)+y^2)dy=du(x,y)$,其中 $f(0)=-1$, $u(0,0)=0$, 则函数 $u(x,y)$ 在条件 $xy=1,x>0$ 下最值情况:

- A. 最大值为 $\frac{5}{3}$
- B. 最大值为 5
- C. 最小值为 -3
- D. 最小值为 $\frac{1}{3}$

解

December 14

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, 区域 D 由不等式 $x^2+y^2 \le t^2(t \ge 0), x \ge 0, y \ge 0$ 所确定, 且 $f(t)=2\iint\limits_D[(x-1)^2+(y+1)^2]f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy+\frac{t^4}{4}+t^2$, 求 $f(x)$

解

38.3 Week III

December 15

1. 设函数 $f(x)$ 满足 $xf'(x)-3f(x)+6x^2=0$, 且由曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=1$ 与 x 轴围成的平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积最小, 求 D 的面积

解

December 16

1. 下列级数中条件收敛的是:

- A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$
- B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})$
- C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n[(-1)^n+\ln n]}{n}$
- D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$

解

December 17

1. 下列结论正确的是:

- A. 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n, \sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别是 R_1, R_2, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$ 的收敛半径为 $R =$

$\min\{R_1, R_2\}$

- B. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R=2$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} |\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| = \dfrac{1}{2}$
- C. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n}$ 的收敛半径为 $\sqrt{R}$
- D. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛半径为 $\sqrt{R}$

解

December 18

1. 设 $a_0 = 0.a_1 = 1.a_{n+1} = 3a_n + 4a_{n-1} (n = 1, 2, 3, \cdots)$

(1). 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

(2). 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n!} x^n$ 的收敛域以及和函数

解

December 19

1. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $\int_0^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛, 令 $a_n = \int_0^1 f(nx)dx$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n^2}{n^\alpha} (\alpha > 0)$ 收敛

解

December 20

1. 已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 处的梯度 $\mathbf{grad} f(1, 1) = 2i - j$, 求函数 $f(x, y)$ 在该点沿曲线 $e^{x-1} + xy = 2$ 在该点处切线方向 (与 y 轴正向夹角小于 $\dfrac{\pi}{2}$) 的方向导数

解

December 21

1. 设 $f(x, y)$ 连续, 且 $f(x, y) = x^2 - y^2 + \int\limits_L \dfrac{yf(x, y)dx + xf(x, y)dy}{x^2 + y^2}$, 其中 L 是从点 $A(-1, 0)$ 到 $B(1, 0)$ 的上半圆周 $y = \sqrt{1 - x^2}$, 求 $f(x, y)$

解

38.4 Week IV

December 22

1. 求 $I=\oint\limits_{L}(y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$, 其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=2bx$ 与柱面 $x^2+y^2=2ax(b>a>0)$ 的交线 $(z\geq 0)$,L 的方向规定为沿 L 的方向运动时, 从 z 轴正往下看, 曲线 L 所围球面部分总在左边

解

December 23

1. 设 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧, 求 $\oiint\limits_{\Sigma}\frac{dydz}{x}+\frac{dzdx}{y}+\frac{dxdy}{z}$

解

第七部分

Summary

第 7 部分目录

第 39 章 Summary

39.1 双曲函数

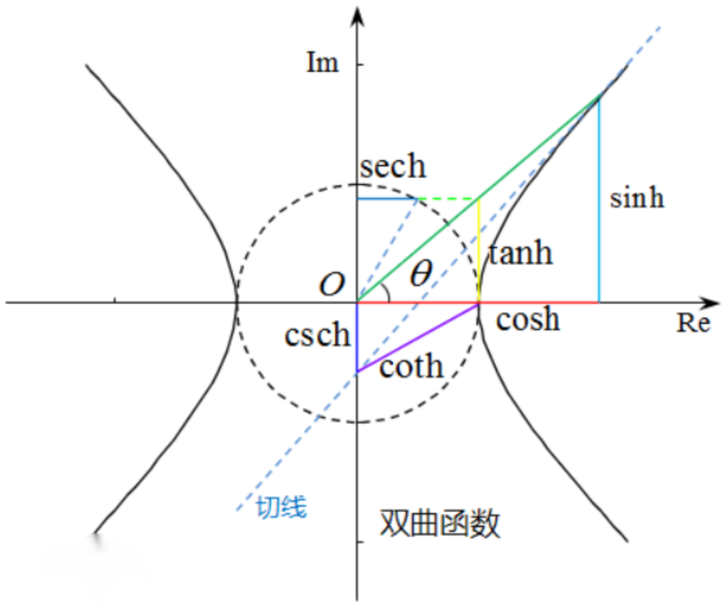


图 39.1: 双曲函数示意图

定义 39.1.1

双曲函数是一种类似于三角函数的一类函数，基本的函数有双曲正弦函数和双曲余弦函数，借由指数函数定义.

1. 双曲正弦函数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

2. 双曲余弦函数

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \to [1, +\infty]$$

3. 双曲正切函数

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \to (-1, 1)$$

恒等式:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 = 1$$

$$\sinh x = -i \sin ix, \quad \cosh x = \cos ix$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

定义 39.1.2

反双曲函数:

1. 反双曲正弦函数

$$\operatorname{arsinh} x = ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad (arsinhx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

2. 反双曲余弦函数

$$\operatorname{arcosh} x = ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad (arcoshx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

3. 反双曲正切函数

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} ln(\frac{1+x}{1-x}), \quad (artanhx)' = \frac{1}{1 - x^2}$$

39.2 特殊曲线

定义 39.2.1

几类特殊曲线的面积、弧长、旋转体体积

1. 心形线 $r = a(1 + \cos\theta)$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2 \sin^2\theta d\theta} = 8a$$

$$S = \int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta = 3\pi a^2$$

2. 摆线 $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta d\theta} = 8a$$

$$S = \int_0^{2a\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos\theta)^2 d\theta = 3\pi a^2$$

3. 星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}$

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sin\theta\cos\theta d\theta = 6a$$

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sin^4\theta\cos^2\theta = \frac{3\pi}{8}a^2$$

4. 三叶玫瑰线 $\rho = a\cos 3\theta \quad \rho = a\sin 3\theta$

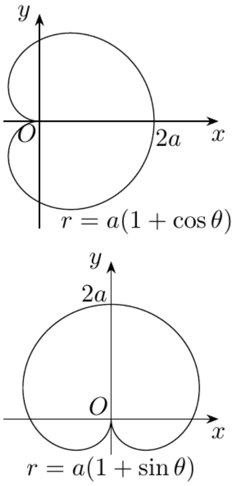
$$L = 6\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{a^2\cos^2 3\theta + 9a^2\sin^2 3\theta d\theta} = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 8\sin^2 t dt}$$

$$S = 3\int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2\cos^2 3\theta d\theta = \frac{\pi a^2}{4}$$

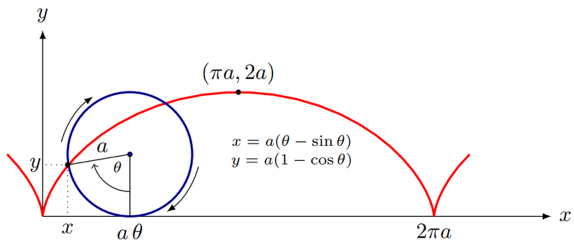
5. 伯努利双扭线 $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\frac{\sin^2 2\theta}{\cos 2\theta} + \cos^2 2\theta d\theta} = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-\cos^2\theta+\cos^3\theta}{\cos\theta}} d\theta$$

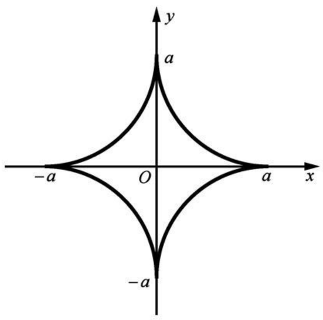
$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta d\theta = a^2$$



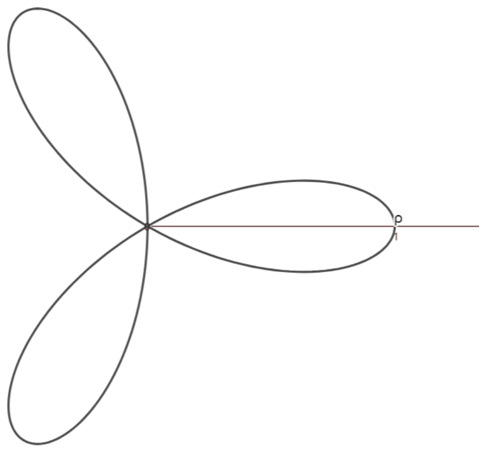
(a) 心形线



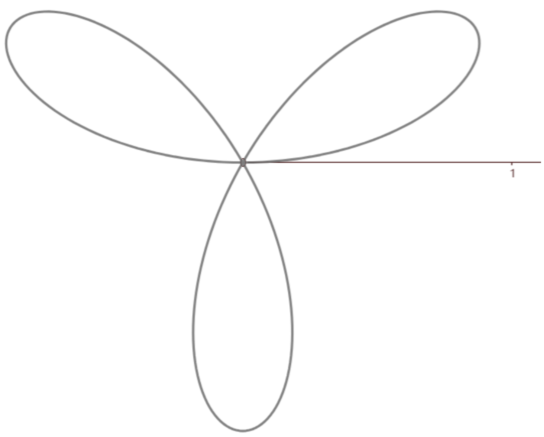
(b) 摆线



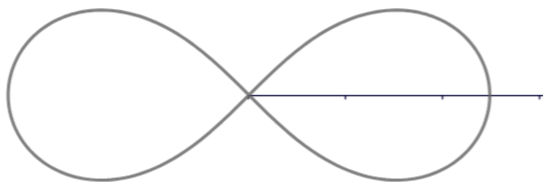
(c) 星形线



(d) 三叶玫瑰线 $\rho = a\cos 3\theta$



(e) 三叶玫瑰线 $\rho = a\sin 3\theta$



(f) 伯努利双扭线 $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$

图 39.2: 曲线图形

39.3 两类欧拉积分

定义 39.3.1 (*Gamma* 函数和 *Beta* 函数)

1. *Gamma* 函数 (欧拉第一类积分)

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = B(q,p)$$

我们有:

$$B(a,b) = (\frac{x^a(1-x)^b}{a})|_0^1 + \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-2}dx$$

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a}\int_0^1 (x-1+1)x^{a-1}(1-x)^{b-2}$$

$$\boxed{B(a,b) = \frac{b-1}{a}[B(a,b-1)-B(a,b)]}$$

$$\boxed{B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1)}$$

特别的, 我们有:

$$\boxed{B(m,n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}}$$

2.*Beta* 函数 (第二类欧拉积分)

$$\Gamma(\alpha)\begin{cases}\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \\ 2\int_0^{+\infty} x^{2\alpha-1}e^{-x^2}dx\end{cases}$$

我们有:

$$\Gamma(\alpha) = (-x^{\alpha-1}e^{-x})|_0^{+\infty} + (\alpha-1)\int_0^{+\infty} x^{\alpha-2}e^{-x}dx$$

$$\boxed{\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)}, \alpha > 1$$

有两个特别的 α, 分别是 $\alpha = \frac{1}{2}$ 和 $\alpha = 1$:

$$\begin{cases}\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1, & \alpha = 1 \\ \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}, & \alpha = \frac{1}{2}\end{cases}$$

特别的, 我们有:

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!}$$

3. 两类积分之间的关系

转换公式:

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

39.4 谱分解定理

定义 39.4.1 (代数重复度)

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 是矩阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的相异特征值, 其重数分别为 $r_1,r_2,\cdots,r_k$, 称 r_i 为矩阵 A 的特征值 λ_i 的代数重复度.

定义 39.4.2 (几何重复度)

齐次方程组 $Ax=\lambda_i x$ $(i=1,2,\cdots,k)$ 的解空间 V_{λ_i} 称为 A 的对应于特征值 λ_i 的特征空间, 则 V_{λ_i} 的维数称为 A 的特征值 λ_i 的几何重复度.

定义 39.4.3 (单纯矩阵)

若矩阵 A 的每一个特征值的代数重复度与几何重复度相等, 则称矩阵 A 为单纯矩阵.

定义 39.4.4 (幂等矩阵)

若 A 为方阵, 且 $A^2=A$, 则称 A 为幂等矩阵.

性质 1. 幂等矩阵 A 性质

- (1). A 是单纯矩阵, 且其 $Jordan$ 标准型为 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (2). A 的特征值只能为 0 或者 1
- (3). $rank(A)=tr(A)$
- (4). $Ax=x \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}(A)$
- (5). A 一定可以相似对角化

定理 39.4.1 (谱分解定理)

设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是单纯矩阵, 矩阵 A 有 k 个相异特征值 λ_i $(i=1,2,\cdots,k)$,$\exists A_i\in\mathbb{C}^{n\times n}$ $(i=1,2,\cdots,k)$, 使得

$$A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i G_i$$

此式称为矩阵 A 的谱分解,$G_1,G_2,\cdots,G_k$ 称为 A 的族谱, 且满足一下性质:

性质 1. 谱分解谱族 G_i 性质

- (1). 幂等性: $G_i^2=G_i$
- (2). 分离性: $G_iG_j=0$ $(i\neq j)$
- (3). 可加性: $\sum_{i=1}^{k}G_i=E_n$

推论 39.4.1 (谱族 G_i 推论)

- $AG_i = G_iA = \lambda_i G_i$
- $rank(G_i) = m_i$
- G_i 是唯一的,G 的族谱是唯一的.

命题 39.4.1

矩阵 A 是单纯矩阵等价为存在 k 个矩阵 G_i, $(i = 1, 2, \cdots, k)$ 满足:

- (1). $G_iG_j = \begin{cases} G_i, \ i = j \\ 0, \ i \neq j \end{cases}$
- (2). $\sum\limits_{i=1}^{k} G_i = E_n$
- (3). $A = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i G_i$
- (4). $f(A)$ 为任意多项式, 则

$$f(A) = \sum_{i=1}^{k} f(\lambda_i) G_i$$

- (5). $A^m = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i^m G_i$

证明

1. 必要性

(1). 当 $k = n$ 时:

我们由 A 是单纯矩阵可以得到矩阵 A 可以相似对角化

$$A = P\Lambda P^{-1}, \text{其中}\Lambda = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$$

我们不妨设 $P=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$,$P^{-1}=\begin{pmatrix}\omega_1^T\\ \omega_2^T\\ \vdots\\ \omega_n^T\end{pmatrix}$, 我们可以得到:

$$A=(v_1,v_2,\cdots,v_n)\begin{bmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\ 0&\lambda_2&\cdots&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ 0&0&\cdots&\lambda_n\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1^T\\ \omega_2^T\\ \vdots\\ \omega_n^T\end{pmatrix}\Rightarrow A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i\omega_i^T=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i G_i,\ \text{其中}G_i=v_i\omega_i^T$$

我们由 $\begin{cases}P^{-1}P=E_n\\ PP^{-1}=E_n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega_i^T v_j=\begin{cases}1,\ i=j\\ 0,\ i\neq j\end{cases}\\ \sum\limits_{i=1}^{n}v_i\omega_i^T=\sum\limits_{i=1}^{n}G_i=E_n\end{cases}$

对于任意 $i,j\in(1,n)$, $G_iG_j=v_i(\omega_i^Tv_j)\omega_j^T$, 我们可以得到:

$$G_iG_j=\begin{cases}v_i\omega_i^T=G_i,\ i=j\\ 0,\ i\neq j\end{cases}\Rightarrow A_i\text{是幂等矩阵}$$

(2). 当 $k<n$ 时:

我们由矩阵 A 是单纯矩阵, 可以得到: $A=P\Lambda P^{-1}$

$$\begin{cases}P=(v_{11},v_{12},\cdots,v_{1r_1},v_{21},v_{22},\cdots,v_{2r_2},\cdots,v_{k1},v_{k2},\cdots,v_{kr_k})\\ P^{-1}=(\omega_{11}^T,\omega_{12}^T,\cdots,\omega_{1r_1}^T,\omega_{21}^T,\omega_{22}^T,\cdots,\omega_{2r_2}^T,\cdots,\omega_{k1}^T,\omega_{k2}^T,\cdots,\omega_{kr_k}^T)^T\end{cases}$$

$$A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\sum_{j=1}^{r_i}B_{ij}\xrightarrow{G_i=\sum_{j=1}^{r_i}B_{ij}}A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_iG_i$$

$$P^{-1}P=E_n\Rightarrow\omega_{ij}^Tv_{lk}=\begin{cases}1,\ i=l,j=k\\ 0,\ i\neq l\text{或}j\neq k\end{cases}$$

$$B_{ij}B_{lk}=v_{ij}(\omega_{ij}^Tv_{lk})\omega_{lk}^T=\begin{cases}B_{ij},\ i=l,j=k\\ 0,\ i\neq l\text{或}j\neq k\end{cases}\Rightarrow G_iG_j=\sum_{p=1}^{r_i}B_{ip}\sum_{q=1}^{r_j}B_{jq}=\begin{cases}G_i,\ i=j\\ 0,\ i\neq j\end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{k} G_i = \sum_{i=1}^{n} B_i = E_n$$

(2). 充分性

我们首先可以得到矩阵 G_i 均为幂等矩阵, 我们不妨设 $dim\mathbb{R}(G_i) = n_i$, 我们可以得到:

$$n_i = tr(G_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} n_i = \sum_{i=1}^{k} tr(G_i) = tr(\sum_{i=1}^{k} G_i) = tr(E_n) = n$$

我们取 X_i 为 $\mathbb{R}(G_i)$ 的基列构成的阵, 则 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_k)$ 是 $n \times n$ 矩阵, 且 G_i 的列向量都可以由 X_i 线性表出, 我们可以得到:

$$G_i = (X_i\beta_1, X_i\beta_2, \cdots, X_i\beta_n) = X_iY_i$$

$$XY = (X_1, X_2, \cdots, X_n)\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} X_iY_i = E_n \Rightarrow \text{矩阵}X\text{可逆}$$

$$YX = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}(X_1, X_2, \cdots, X_k) = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \cdots \\ Y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1X_1 & Y_1X_2 & \cdots & Y_1X_k \\ Y_2X_1 & Y_2X_2 & \cdots & Y_2X_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_kX_1 & Y_kX_2 & \cdots & Y_kX_k \end{bmatrix} = E_n = \begin{bmatrix} E_{r_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E_{r_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E_{r_k} \end{bmatrix}$$

我们可以得到:

$$Y_iX_j = \begin{cases} E_{r_i}, \ i = j \\ 0, \ i \neq j \end{cases} \Rightarrow G_iX_j = x_iY_iX_j = \begin{cases} X_i, \ i = j \\ 0, \ i \neq j \end{cases}$$

我们利用幂等矩阵的性质

$$
\begin{aligned}
AX &= (\sum_{i=1}^{k}\lambda_i G_i)(X_1, X_2, \cdots, X_k) \\
&= ((\sum_{i=1}^{k}\lambda_i G_i)X_1, (\sum_{i=1}^{k}\lambda_i G_i)X_2, \cdots, (\sum_{i=1}^{k}\lambda_i G_i)X_k) \\
&= (\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \cdots, \lambda_k X_k) \\
&= (X_1, X_2, \cdots, X_k)\begin{bmatrix} E_{r_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E_{r_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E_{r_k} \end{bmatrix} \\
&= X\Lambda \Rightarrow A = X\Lambda X^{-1}
\end{aligned}
$$

(3). 谱分解唯一性

我们不妨假设 $F_1, F_2, \cdots, F_k$ 满足:

$$
\begin{cases}
F_iF_j = 0,\ i \neq j \\
F_i^2 = F_i \\
A = \sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i F_i \\
\sum\limits_{i=1}^{k} F_i = E_n
\end{cases}
$$

我们由族谱 G_i 性质推论可以得到:

$$
\begin{cases}
AG_i = G_iA = \lambda_i G_i \\
AF_i = F_iA = \lambda_i F_i
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
AG_iF_j = \lambda_i G_iF_j \\
\lambda_i G_iF_j = G_iAF_j \\
G_iAF_j = \lambda_j G_iF_j
\end{cases}
\Rightarrow G_iF_j = 0,\ i \neq j
$$

我们得到:

$$
G_i = G_iE_n = G_i(\sum_{j=1}^{k} F_j) = G_iF_i = (\sum_{j=1}^{k} G_j)F_i = F_i
$$

综上所述, 矩阵 A 的谱分解是唯一的.

39.5 多项式函数极值点和拐点

定理 39.5.1 (代数基本定理) 任何一个一元 n 次复系数多项式, 都恰好有 n 个复根, 且可以表示为 n 个一次因式的乘积.

推论 39.5.1 (曲线的极值点和拐点) 曲线上的可导点不可能同时是极值点和拐点, 不可导点可能同时是极值点和拐点.

命题 39.5.1 (多项式函数极值点和拐点个数: 命题一) 多项式函数 $f(x)=(x-a)^n,(n>1)$, 当 n 为奇数时, $(a,0)$ 是 $f(x)$ 的拐点, 当 n 为偶数时, $x=a$ 是 $f(x)$ 的极值点.

证明

$$f'(x)=n(x-a)^{n-1},\quad f''(x)=n(n-1)(x-a)^{n-2}$$

当 n 为偶数时, 我们有: $f'(a)=0$ 且

$$\exists x\in \mathring{U}(a,\delta), f(x)=(x-a)^n>0=f(a)$$

或者

$$\exists\delta>0, x\in(a-\delta,a), f'(x)<0; x\in(a,a+\delta), f'(x)>0$$

我们有: 当 n 为偶数时, $x=a$ 是 $f(x)$ 的极值点.
当 n 为奇数时, 我们有: $f''(a)=0$ 且

$$\exists\delta>0, x\in(a-\delta,a), f''(x)<0; x\in(a,a+\delta), f''(x)>0$$

我们有: 当 n 为奇数时, $(a,0)$ 是 $f(x)$ 的拐点.

命题 39.5.2 (多项式函数极值点和拐点个数: 命题二) 多项式函数 $f(x)=(x-a)^n g(x),(n>1), g(a)\neq 0$, 当 n 为奇数时, $(a,0)$ 是 $f(x)$ 的拐点, 当 n 为偶数时, $x=a$ 是 $f(x)$ 的极值点.

证明

$$\begin{cases} f'(x)=ng(x)(x-a)^{n-1}+g'(x)(x-a)^n=(x-a)^{n-1}[ng(x)+(x-a)g'(x)] \\ f''(x)=(x-a)^{n-2}[n(n-1)g(x)+2n(x-a)g'(x)+(x-a)^2g''(x)] \end{cases}$$

当 n 为偶数时, 我们不妨假设 $g(a) > 0$, 根据极限的保号性, 我们有:

$$\exists\delta_1 > 0, s.t.\ x \in U(a, \delta_1), g(a) > 0$$

当 $x \in U(a, \delta_1), f(x) = (x-a)^n g(x) \geq f(a) = 0, x = a$ 是 $f(x)$ 的一个极值点.
当 n 为奇数时, $x \to a, (x-a), (x-a)^2$ 都是无穷小量, $g'(a), g''(a)$ 都是定值, 因此

$$\exists\delta_2 > 0, s.t.\ x \in U(a, \delta_2), 2n(x-a)g'(x) + (x-a)^2 g''(x) \leq |n(n-1)g(x)|$$

我们有: $x \in U(a, \delta_2), [n(n-1)g(x) + 2n(x-a)g'(x) + (x-a)^2 g''(x)] > 0$, 即: $f''(x)$ 与 $(x-a)^{n-2}$ 符号相同
当 $x \in (a-\delta_2, a), f''(x) < 0; x \in (a, a+\delta_2), f''(x) > 0, (a, 0)$ 是 $f(x)$ 的一个拐点.

命题 39.5.3 (多项式函数极值点和拐点个数: 命题三)

讨论多项式函数: $P_n(x) = \prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{p_i}$ 极值点和拐点个数, 其中满足:

$$a_i \in \mathbb{R}, a_1 < a_2 < \cdots < a_k, p_i \in \mathbb{Z}^+$$

证明

我们首先有: $P_n(x)$ 是多项式函数, 在 $\mathbb{R}$ 上 n 阶可导, $P_n(x)$ 的极值点一定满足: $P_n'(x) = 0$, 拐点满足: $P_n''(x) = 0$

$P(x)$ 有 k 个实数根, 这 k 个实数根的重数分别为: $p_1, p_2, \cdots, p_k$, 且 $\sum_{i=1}^{k} p_i = n$
我们利用多个函数连乘的求导公式:

$$P_n'(x) = \prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{p_i-1}\left[\sum_{i=1}^{k} p_i\left(\prod_{j=1 j\neq i}^{k}(x-a_j)\right)\right]$$

当 $p_i \geq 2 (i = 1, 2, \cdots, k)$ 时, $x = a_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ 是 $P_n'(x)$ 的一个零点, 此类的驻点一共有 k 个, $P_n'(x)$ 有 $p_i - 1 (i = 1, 2, \cdots, k)$ 重根 $a_i (i = 1, 2, \cdots, k)$

$P_n'(x)$ 此类的零点个数为: $n_1 = \sum_{i=1}^{k}(p_i - 1) = n - k$

在 $(a_i, a_{i+1}), (i = 1, 2, \cdots, k-1)$ 中, 我们由罗尔定理得到: $\exists\xi_i \in (a_i, a_{i+1}), (i = 1, 2, \cdots, k-1), s.t.\ P'(\xi_i) = 0$, 此类零点的个数为 $k-1$ 个

$P_n'(x)$ 是 $n-1$ 次多项式函数, 至多有 $n-1$ 个复根, 我们得到 $P_n'(x)$ 有 $n-k+k-1=n-1$ 个实数根, 其中前面 $n-k$ 个根中存在重根情况.

推论 39.5.2 (多项式函数零点)

$P_n(x)$ 有 n 个实数根 (含重根), 那么 $P_n'(x), P_n''(x), \cdots, P_n^{(n-1)}(x)$ 的根全部是实数.

我们继续看 $P_n'(x)$ 的两类零点, 其中一类是 $x=a_i(i=1,2,\cdots,k),(p_i>1)$, 另一类是 $x=\xi_i(i=1,2,\cdots,k-1)$

第一类零点: 我们由 **pro** : 39.5.2得到: 当 p_i 为偶数的时候, a_i 是 $P_n(x)$ 的极值点, 当 p_i 为奇数的时候, a_i 是 $P_n(x)$ 的拐点

第二类零点: $P_n'(x)=\sum_{i=1}^{n-1}(x-\eta_i), \eta_i\in\mathbb{R}$, 当 $x\in U(\xi_i,\delta)$ 时, 只有 $(x-\xi_i)$ 这一项符号改变, 因此 $x=\xi_i$ 是 $P_n(x)$ 极值点

我们不妨假设 $p_i>1\ \&\ p_i$为奇数 的个数为 k_1, $p_i>1\ \&\ p_i$为偶数 的个数为 k_2

$P_n(x)$ 的极值点个数为 $k-1+k_2$

关于拐点的个数, 我们可以类比极值点个数的方法, 将 $P_n'(x)$ 当做原函数, 求 $P_n'(x)$ 的极值点个数, 我们将 $P_n'(x)$ 改写为:

$$P_n'(x)=\sum_{i=1}^{k}p_i\left[(x-a_1)^{p_1-1}(x-\xi_1)(x-a_2)^{p_2-1}\cdots(x-\xi_{k-1})(x-a_k)^{p_k-1}\right]$$

我们得到:

1. $P_n'(x)$ 有零点 $a_1,\xi_1,a_2,\cdots,a_{k-1},\xi_{k-1},a_k$, 其中 a_i 是重根, ξ_i 是非重根

2. 根据罗尔定理, 我们得到: 在 $P_n'(x)$ 每两个零点之间存在 η_j, 使得 $P_n''(x)=0$, 且是 $P_n''(x)$ 的极值点, 也是 $P_n(x)$ 的拐点, 个数为: k_1+k_2+k-2

3. $a_i(i=1,2,\cdots,k)$ 中, 满足 $p_i>1$ 且 p_i-1 为偶数, 也就是 p_i 为奇数时, $x=a_i$ 是 $P_n''(x)$ 的极值点, 也是 $P_n(x)$ 的拐点, 个数为: k_1

4. $P_n(x)$ 的拐点个数: $k+2k_1+k_2-2$

综上所述, 我们有以下的结论:

推论 39.5.3 (极值点和拐点个数)

假设 $P_n(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^{p_i}$, 其中 k_1 个 p_i 为奇数 (大于 1), k_2 个 p_i 为偶数, k_0 个 $p_i=1$, 满足 $k_0+k_1+k_2=k$, 我们有:

- $P_n(x)$ 的极值点个数: $k-1+k_2=k_0+k_1+2k_2-1$
- $P_n(x)$ 的拐点个数: $k+2k_1+k_2-2=k_0+3k_1+2k_2-2$

39.6 柯西收敛准则

定理 39.6.1 (柯西收敛准则)

柯西极限存在准则, 又称柯西收敛准则, 给出某个式子 (数列、数项级数、函数等) 收敛的一个充分必要条件, 主要应用在数列、数项级数、函数、反常积分、函数列和函数项级数等的收敛性判断中.

命题 39.6.1 (柯西收敛准则: 数列)

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是: 对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $n,m>N$ 时, $|a_n-a_m|<\varepsilon$, 我们将满足条件的 $\{a_n\}$ 称为柯西序列, 上述定理也可表述为: 数列 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当 $\{a_n\}$ 是柯西序列

证明

(1). 必要性:

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\eta$, 对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N_0\in\mathbb{N}$, 当 $n>N_0$ 时, $|a_n-\eta|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 我们有:

$$\begin{cases}\forall n>N_0,s.t.\ |a_n-\eta|<\dfrac{\varepsilon}{2}\\ \forall m>N_0,s.t.\ |a_m-\eta|<\dfrac{\varepsilon}{2}\end{cases}\Rightarrow |xn-x_m|=|(x_n-\eta)-(x_m-\eta)|\le|x_n-\eta|+|x_m-\eta|\le\varepsilon$$

(2). 充分性:

命题 39.6.2 (柯西收敛准则: 数项级数)

证明

(1). 必要性:

不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \eta$, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_0 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_0$ 时, $|a_n - \eta| < \frac{\varepsilon}{2}$, 我们有:

$$\begin{cases} \forall n > N_0, s.t.\ |a_n - \eta| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall m > N_0, s.t.\ |a_m - \eta| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow |x_n - x_m| = |(x_n - \eta) - (x_m - \eta)| \le |x_n - \eta| + |x_m - \eta| \le \varepsilon$$

(2). 充分性:

命题 39.6.3 (柯西收敛准则: 函数)

♠

39.7 阿达玛不等式

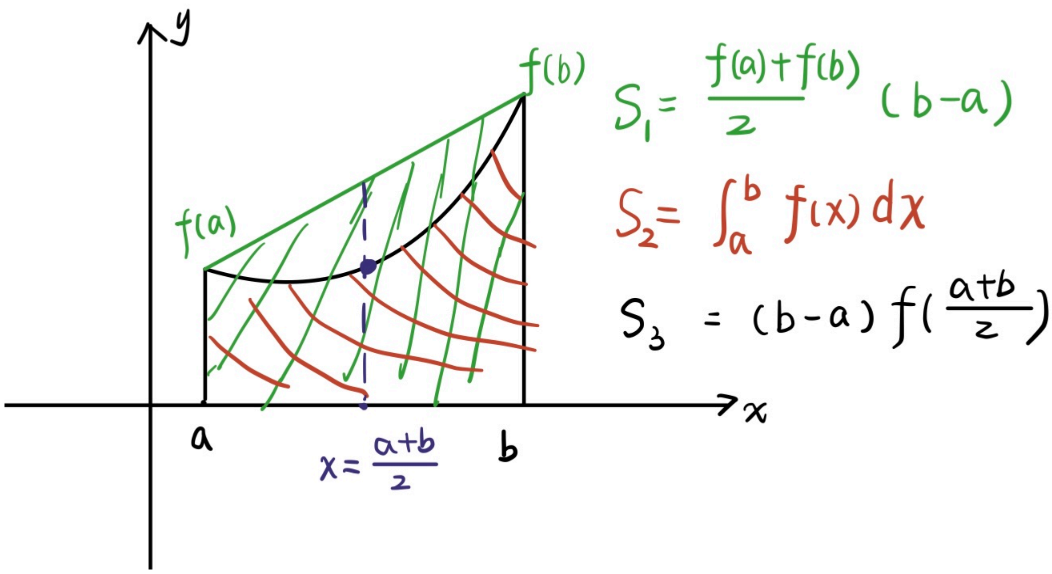


图 39.3: *Hadamard* 不等式

定理 39.7.1 (Hadamard 不等式)

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x) \ge 0$, 下面不等式成立:

$$f(\frac{a+b}{2}) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \le \frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$$

证明

原不等式可以化为:

$$(b-a)f(\frac{a+b}{2}) \le \int_a^b f(t)dt \le \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

我们由图39.3可以发现:

不等式左边表示的过 $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$ 的切线与 $x=a, x=b, y=0$ 围成的图形的面积 S_3;
不等式中间表示的是 $f(x)$ 与 $x=a, x=b, y=0$ 围成的曲边梯形的面积 S_2;
不等式右边表示的是直线 $x=a, x=b, y=0$ 与直线 $y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$ 围成的梯形的面积 S_1.
我们可以由图形上直观的看出三个面积的大小关系: $S_3 \le S_2 \le S_1$
对于左边的不等式, 我们将 $f(x)$ 在 $x=\frac{a+b}{2}$ 处展开得到:

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2$$

我们由 $f''(x)>0$, 我们可以得到:

$$f(x)>f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})$$

两边同时在 $[a,b]$ 内取定积分得到:

$$\int_a^b f(x)dx > \int_a^b [f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})] = (b-a)f(\frac{a+b}{2})$$

对于右边的不等式, 我们构造辅助函数:

$$F(x)=\frac{x-a}{2}[f(x)+f(a)]-\int_a^x f(t)dt,\ F(a)=0$$

$$\begin{cases} F'(x)=\frac{x-a}{2}f'(x)-\frac{f(x)-f(a)}{2} \\ F''(x)=\frac{x-a}{2}f''(x) \end{cases} \quad F'(0)=0, F''(x)\ge 0 \Rightarrow F'(x)\ge 0$$

我们得到 $F'(x)\ge 0 \Rightarrow F(x)$单调递增,$F(x)\ge F(a)=0$