LaTeX *Probability Theory*

Sun for morning, moon for night, and you forever.

作者：Lyshmily.Y & 木易

组织：Lyshmily.Y

时间：December 12, 2024

版本：V.2.0

邮箱：yjlpku.outlook.com & 845307723@qq.com

在没有结束前，总要做很多没有意义的事，这样才可以在未来某一天，用这些无意义的事去堵住那些讨厌的缺口

目录

第一部分

概率论

第 1 部分目录

第 1 章 随机事件和概率

定义 1.0.1 (随机试验)

- 试验可以在相同条件下重复进行
- 试验的所有结果是明确可知道的, 并且不止一个
- 每一次试验出现哪一个结果, 事先并不确定

定义 1.0.2 (随机事件)

- 每一次试验中可能出现也可能不出现的结果称为随机事件
- 在试验中一定发生的事件为必然事件, 一定不发生的事件为不可能事件

定义 1.0.3 (样本空间)

- 随机试验的每一个可能的结果称为**样本点**, 记作 ω; 样本点的全体组成的几何称为**样本空间**, 记作 $\Omega \Rightarrow \Omega = \{\omega\}$
- 由一个样本点构成的事件为**基本事件**
- 随机事件 A 是由若干个基本事件组成 $\Rightarrow A \subset \Omega$

1.1 事件的关系和运算

定义 1.1.1 (事件间关系)

- 包含: 事件 A 发生, 事件 B 发生 $\Rightarrow A \subset B$
- 相等: $A \subset B, B \subset A \Rightarrow A = B$
- 相容: $AB \neq \varnothing$
- 互斥: $AB = \varnothing$
- 对立: $A \cup B = \Omega, A \cap B = \varnothing$

定义 1.1.2 (运算法则)

- 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- 分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- **De Morgan's Laws**: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

1.2 概率定义

定义 1.2.1 (概率定义)

(1). 描述性定义

通常将随机事件 A 发生的可能性大小的度量 (非负值) 称为事件 A 发生的概率, 记作 $P(A)$

(2). 统计性定义

在相同条件下做重复实验, 事件 A 出现的次数 k 和总的试验次数 n 的比 $\frac{k}{n}$ 称为事件 A 在这 n 次试验中出现的频率, 当试验次数 n 足够大时, 频率将稳定于某个常数 p, n 越大, 频率偏离 p 的可能性越小, 这个常数 p 称为事件 A 发生的概率

(3). 公理化定义

设随机事件的样本空间为 Ω, 对于每一个事件 A 都有一个确定的实数 $P(A)$, 且事件函数 $P(*)$ 满足

- 非负性: $P(A) \geq 0$
- 规范性: $P(\Omega) = 1$
- 可列可加性: 对于任意两个互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

1.3 古典概率型和几何概率型

定义 1.3.1 (古典概率型)

古典概率型样本空间

- 只有有限个基本事件
- 每个基本事件都是等可能发生

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

定义 1.3.2 (几何概率型)

几何概率型样本空间

- 无限个基本事件
- 每个基本事件都是等可能发生
- 样本空间是一个可以度量的有界区域

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega}$$

1.4 概率论基本公式

定义 1.4.1 (性质和基本公式)

- $0 \leq P(A) \leq 1, P(\varnothing) = 0, P(\Omega) = 1$
- $A \subset B \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A), P(B) \geq P(A)$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

定理 1.4.1 (条件概率公式)

A, B 是两个任意事件, 如果 $P(A) > 0$, 称在 A 发生的条件下 B 发生的概率为条件概率, 记作 $P(B|A)$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

定理 1.4.2 (乘法公式)

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个事件, 且 $P(A_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n), P(A_1A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$

$$P(A_1A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdots P(A_n|A_1A_2 \cdots A_{n-1})$$

特别的, 当 $n = 2$ 时

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

定理 1.4.3 (全概率公式)

完备事件组 $A_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 满足 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = 1, A_iA_j = \varnothing$, 对于任意事件 B

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} A_iB, P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

定理 1.4.4 (贝叶斯公式)

完备事件组 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$, 满足 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = 1, A_iA_j = \varnothing$, 对于任意事件 B

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_jB)}{P(B)} = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}(j=1,2,\cdots,n)$$

1.5 事件独立性和独立重复实验

定义 1.5.1 (独立性)

(1). **事件的独立性**

(i). 描述性定义

事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意一个事件 A_i 发生的概率不受其他 $n-1$ 个事件的影响, 称这 n 个事件相互独立

(ii). 数学定义

A, B 为两个事件, 如果 $P(AB) = P(A)P(B)$, 称事件 A, B 相互独立

(2). **试验的独立性**

如果各个试验的结果是相互独立的, 称这些试验是相互独立的, 试验序列 $\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ 中任意两个试验 E_i, E_j, 在这两个试验中任意两个结果 A_{ip}, A_{iq} 满足 $P(A_{ip}A_{jq}) = P(A_{ip})P(A_{jq})$, 称试验序列相互独立

第 2 章 一维随机变量及其分布

2.1 一维随机变量

定义 2.1.1 (随机变量)

设随机试验 E 的样本空间 $\Omega=\{\omega\}$ 满足: $\forall\omega\in\Omega$ 都有唯一的实数 $X(\omega)$ 与之对应, 且对任意实数 x, 都有 $\{\omega|X(\omega)\le x,\omega\in\Omega\}$ 是随机事件, 称定义在 Ω 上的单值函数 $X(\omega)$ 是随机变量

定义 2.1.2 (分布函数)

设 X 是随机变量, x 是任意实数, 称函数 $F(x)=P(X\le x)$ 为随机变量 X 的分布函数, 或者称 X 服从 $F(x)$ 分布, 记作 $X\sim F(x)$

推论 2.1.1 (分布函数性质)

- $F(x)$ 是单调不减函数, $\forall x_1\le x_2, F(x_1)\le F(x_2)$
- $F(x)$ 是右连续函数, $\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x_0^+)=F(x_0)$
- $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0, F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$
- $P\{X\le a\}=F(a), P\{X<a\}=F(a^-), P\{X=a\}=F(a)-F(a^-)$

2.2 一维离散型随机变量

定义 2.2.1 (一维离散型随机变量)

随机变量 X 只能取有限个值 $x_1, x_2, \cdots$, 称 X 为离散型随机变量

$$P\{X = x_i\} = p_i (i = 1, 2, \cdots)$$

上面的式子称为随机变量 X 的分布列、分布律或者概率分布, 记作 $X \sim p_i$, 概率分布通常用表格或者矩阵形式表示

X	x_1	x_2	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

推论 2.2.1 (离散型随机变量的性质)

- $P(X = x_i) \geq 0, \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$
- $P(X \leq x_i) = \sum_{x_j \leq x_i} P(X = x_j)$
- $P(X \in B) = \sum_{x_i \in B} P(X = x_i)$
- $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$

定义 2.2.2 (常见离散型随机变量分布)

(1). $0-1$分布

$X \sim B(1, p)$

$$P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$$

(2). 二项分布

$X \sim B(n, p)$, 试验次数为 n, 成功概率为 p, 随机变量 X 为成功次数

$$P(X = k) = C_k^n p^k (1 - p)^{n-k} (k = 0, 1, 2, \cdots, n), 0 < p < 1$$

(3). 泊松分布

$X \sim P(\lambda)$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} (k = 0, 1, 2, \cdots), 0 < p < 1$$

(4). 几何分布

$X \sim G(p)$

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p (k = 1, 2, \cdots), 0 < p < 1$$

(5). 超几何分布

$X \sim H(n, N, M)$

$$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}(\max\{0,n-M+N\} \le k \le \min\{M,n\})$$

2.3 一维连续型随机变量

定义 2.3.1 (连续型随机变量分布函数和密度函数)

随机变量 X 的分布函数可以表示为:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt, t \in \mathbb{R}$$

其中 $f(x)$ 是非负可积函数, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$, 称 X 是连续型随机变量, $f(x)$ 是随机变量 X 的**概率密度函数**, 记作 $X \sim f(x)$

推论 2.3.1 (连续型随机变量分布函数性质)

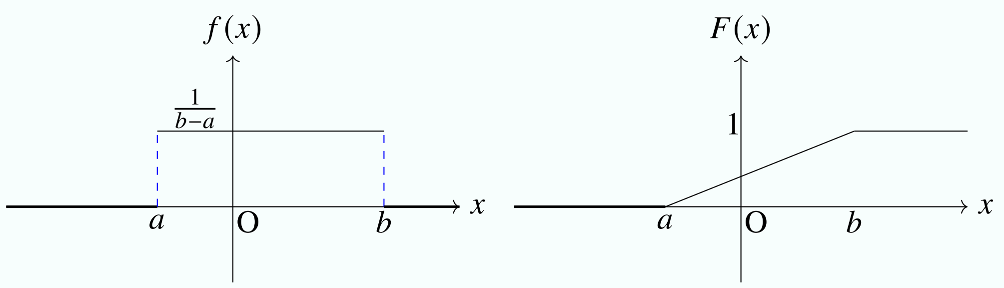
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$
- $P(a<X<b)=P(a \le X<b)=P(a<X \le b)=P(a \le X \le b)=\int_a^b f(x)dx$
- $P(X=c)=0$

定义 2.3.2 (常见连续型随机变量分布)

(1). 均匀分布

$X \sim U(a,b)$, X 的概率密度函数 $f(x)$ 和分布函数 $F(x)$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & x \in (a,b) \\ 0 & x \in (-\infty,a] \cup [b,+\infty)\end{cases} \Rightarrow F(x)=\begin{cases}0 & x \in (-\infty,a) \\ \dfrac{x-a}{b-a} & x \in [a,b) \\ 1 & x \in [b,+\infty)\end{cases}$$



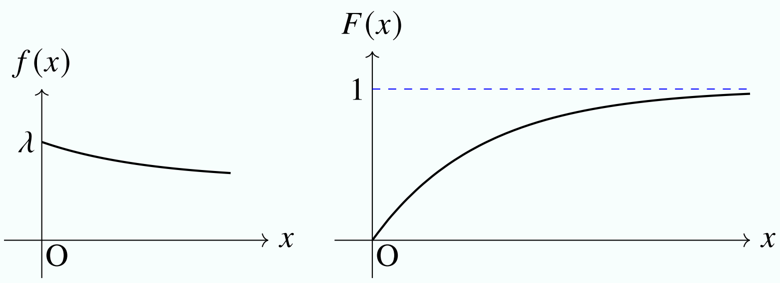
(a) 概率密度 (b) 分布函数

图 2.1: 均匀分布概率密度和分布函数

(2). 指数分布

$X \sim E(\lambda), X$ 的概率密度函数 $f(x)$ 和分布函数 $F(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\in(0,+\infty)\\ 0 & x\in(-\infty,0]\end{cases} \Rightarrow F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\in(0,+\infty)\\ 0 & x\in(-\infty,0]\end{cases}\ (\lambda>0)$$



(a) 概率密度 (b) 分布函数

图 2.2: 指数分布概率密度和分布函数

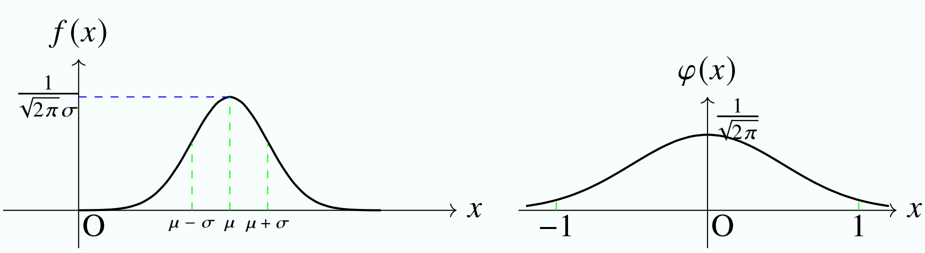
(3). 正态分布

$X \sim N(\mu,\sigma^2), X$ 的概率密度 $f(x)$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}(-\infty<x<+\infty)$$

特别的, 当 $\mu=0,\sigma=1$ 时, $X\sim f(x)$ 是标准正态分布

$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}(x\in\mathbb{R})\\ \Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt\end{cases}$$



(a) 一般正态分布概率密度 (b) 标准正态分布概率密度

图 2.3: 一般正态分布和标准正态分布概率密度函数

推论 2.3.2 (正态分布函数性质)

- $F(x) = P(X \le x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$
- $P(a \le X \le b) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$
- $F(\mu - x) + F(\mu + x) = 1, aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

2.4 一维随机变量函数的分布

定义 2.4.1

设 X 是随机变量, 函数 $y = g(x)$, 以随机变量 X 作为自变量的函数 $Y = g(X)$ 也是随机变量, 称为随机变量函数

- 离散型 $\longrightarrow$ 离散型
- 连续型 $\longrightarrow$ 连续型
- 连续型 $\longrightarrow$ 离散型

第 3 章 多维随机变量及其分布

3.1 n 维随机变量及其分布函数

定义 3.1.1 (n 维随机变量)

如果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是定义在同一个样本空间 Ω 上的 n 个随机变量, 称 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 n 维随机向量

定义 3.1.2 (n 维随机变量分布函数)

对于任意的 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, n 元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

称为 n 维随机向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的**联合分布函数**

特别的, 当 $n = 2$ 时, 记 (X, Y) 为 **二维随机变量**或者 **二维随机向量**, 称 $F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\}$ 为二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数

$$(X, Y) \sim F(x, y) \Leftrightarrow F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\}$$

推论 3.1.1 (二维随机变量联合分布性质)

(1). 单调性 (单调不减)

$$\forall x, y_1 < y_2, F(x, y_1) \le F(x, y_2)$$

$$\forall y, x_1 < x_2, F(x_1, y) \le F(x_1, y)$$

(2). 右连续性

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0^+} F(x,y) = F(x_0+0,y) = F(x_0,y) \\ \lim\limits_{y\to y_0^+} F(x,y) = F(x,y_0+0) = F(x,y_0) \end{cases}$$

(3). 有界性

$$\begin{cases} F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = F(-\infty,-\infty) = 0 \\ F(+\infty,+\infty) = 1 \end{cases}$$

(4). 非负性 $\forall x_1 < x_2, y_1 < y_2$

$$F(x_1 < x \le x_2, y_1 < y \le y_2) = F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - F(x_1,y_2) + F(x_1,y_1) \ge 0$$

定义 3.1.3 (边缘分布函数)

设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数 $F(X,Y)$, 随机变量 X 与 Y 的分布函数 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 分别称为随机变量关于 (X,Y) 关于 X 和 Y 的**边缘分布函数**

$$\begin{cases} F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < +\infty\} = F(x,+\infty) \\ F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X < +\infty, Y \le y\} = F(+\infty,y) \end{cases}$$

3.2 二维离散型随机变量

定义 3.2.1 (概率分布)

二维随机变量 (X,Y) 只能取有限对值或可列无限对值 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n),\cdots$, 称 (X,Y) 为**二维离散型随机变量**, (X,Y) 满足概率分布

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}(i,j = 1,2,\cdots)$$

上面的式子称为 (X,Y) 的联合分布律, 记作 $(X,Y) \sim p_{ij}$, 见 **table** : 3.1所示

$$F(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$$

表 3.1: 离散型二维随机变量概率分布

$X \backslash Y$	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$P\{X=x_i\}$
x_1	p_{11}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	p_{1*}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	p_{i*}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$P\{Y=y_j\}$	p_{*1}	$\cdots$	p_{*j}	$\cdots$	1

定义 3.2.2 (边缘分布)

X 边缘分布

$$p_{i*}=P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}(i=1,2,\cdots)$$

Y 边缘分布

$$p_{*j}=P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}(j=1,2,\cdots)$$

♣

定义 3.2.3 (条件分布)

X 在 $Y=y_j$ 下的条件分布

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{*j}}(i=1,2,\cdots)$$

Y 在 $X=x_i$ 下的条件分布

$$P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i*}}(j=1,2,\cdots)$$

♣

3.3 二维连续型随机变量

定义 3.3.1 (分布函数和概率密度)

二维随机变量 (X,Y) 的分布函数 $F(X,Y)$ 可以表示为:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv,(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

其中 $f(x,y)$ 是非负可积函数, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$, 称 (X,Y) 是**二维连续型随机变量**, $f(x,y)$ 是随机变量 (X,Y) 的**概率密度函数**, 记作 $(X,Y)\sim f(x,y)$

推论 3.3.1 (分布函数和概率密度性质)

- $P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G}f(x,y)dxdy$
- $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续 $\Rightarrow \left.\dfrac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=f(x_0,y_0)$
- $F(x,y)$ 连续且可导, $\dfrac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$

定义 3.3.2 (边缘分布函数和边缘概率密度)

$(X,Y)\sim f(x,y)$, X,Y 的边缘分布函数和边缘概率密度

边缘分布函数

$$\begin{cases}F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dv\right]du\\ F_Y(y)=F(+\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)du\right]dv\end{cases}$$

边缘概率密度

$$\begin{cases}f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy\\ f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx\end{cases}$$

定义 3.3.3 (条件分布函数和条件概率密度)

$(X,Y)\sim f(x,y)$, X 在 $Y=y$ 条件下的**条件概率密度**和 Y 在 $X=x$ 条件下的**条件概率密度**

$$\begin{cases}f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\dfrac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx}\\ f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\dfrac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy}\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases} f_X(x)f_{Y|X}(y|x) \\ f_Y(y)f_{X|Y}(x|y) \end{cases}$$

$(X,Y)\sim f(x,y)$, X 在 $Y=y$ 条件下的**条件分布函数**和 Y 在 $X=x$ 条件下的**条件分布函数**

$$\begin{cases} F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(y|x)dy=\int_{-\infty}^{y}\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}dy \\ F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)dx=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx \end{cases}$$

3.3.1 常见二维连续型随机变量分布

定义 3.3.4 (二维均匀分布)

(X,Y) 在有界区域 D 服从**均匀分布**, (X,Y) 的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{S_D} & (x,y)\in D \\ 0 & (x,y)\notin D \end{cases}$$

定义 3.3.5 (二维正态分布)

(X,Y) 概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$$

其中 $\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R},\sigma_1,\sigma_2>0,-1<\rho<1$, 称 (X,Y) 服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的二维正态分布, 记作 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$

推论 3.3.2 (二维正态分布性质)

- 若 $(X_1,X_2)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)\Rightarrow X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$
- $X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 且 X_1,X_2 相互独立, 则 $(X_1,X_2)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;0)$
- $(X_1,X_2)\sim N\Rightarrow k_1X_1+k_2X_2\sim N$

3.4 独立性

定义 3.4.1 (二维随机变量独立性)

设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布 $F(x,y)$, 边缘分布分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 如果任意实数对 (x,y)

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

称 X 和 Y **相互独立**

定义 3.4.2 (n 维随机变量独立性)

设 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合分布 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 边缘分布分别为 $F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \cdots, F_{X_n}(x_n)$, 如果任意实数对 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$$

称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ **相互独立**

推论 3.4.1 (独立性性质)

- n 个随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立 $\Leftrightarrow \forall x_i \in \mathbb{R}(i = 1, 2, \cdots, n)$, n 个事件 $\{X_1 \le x_1\}, \{X_2 \le x_2\}, \cdots, \{X_n \le x_n\}$ 相互独立
- 离散型二维随机变量 (X,Y) 相互独立 $\Leftrightarrow \forall x_i, y_j (i, j = 1, 2, \cdots), P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}$
- 连续型二维随机变量 (X,Y) 相互独立 $\Leftrightarrow \forall x, y, f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$
- $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 相互独立, 其中任意 $k(2 \le k \le n)$ 个随机变量相互独立
- $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 相互独立, $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_n(x)$ 是一元连续函数, $g_1(X_1), g_2(X_2), \cdots, g_n(X_n)$ 相互独立
- 独立的二维随机变量, 边缘分布和条件分布相等, 边缘概率密度与条件概率密度相等

3.5 多维随机变量函数的分布

定义 3.5.1 (二维随机变量函数)

设 X, Y 为随机变量, $g(x,y)$ 是二元函数, 以随机变量 X, Y 作为自变量的函数 $Z = g(X,Y)$ 也是随机变量, 称为**随机变量函数**

定理 3.5.1 (随机变量函数分布函数和概率密度)

设 X,Y 是随机变量，$f(x,y)$ 是 (X,Y) 的概率密度，$\begin{cases} U = G(X,Y) \\ V = H(X,Y) \end{cases}$，求 $U = g(X,Y)$ 和 $V = h(X,Y)$ 的分布函数和概率密度

$$\begin{cases} U = G(X,Y) \\ V = H(X,Y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = P(U,V) \\ Y = Q(U,V) \end{cases} \Rightarrow |J| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial X}{\partial U} & \frac{\partial X}{\partial V} \\ \frac{\partial Y}{\partial U} & \frac{\partial Y}{\partial V} \end{matrix} \right\|$$

$$F(u,v) = P\{U(X,Y) \le u, V(X,Y) \le v\} = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy$$

$$\begin{aligned} F(u,v) &= \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy \\ &= \iint\limits_{D_{uv}} f(P(u,v),Q(u,v))\big|J\big|dudv \end{aligned}$$

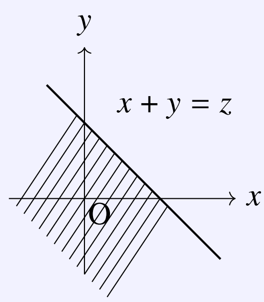
$$f(u,v) = \frac{\partial^2 F(u,v)}{\partial u \partial v} = f(P(u,v),Q(u,v))\big|J\big|$$

$$\begin{cases} f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dv = \int_{-\infty}^{+\infty} f(P(u,v),Q(u,v))\big|J\big|dv \\ f_V(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(P(u,v),Q(u,v))\big|J\big|du \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_U(u_0) = \int_{-\infty}^{u_0} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(P(u,v),Q(u,v))\big|J\big|dv \\ F_V(v_0) = \int_{-\infty}^{v_0} dv \int_{-\infty}^{+\infty} f(P(u,v),Q(u,v))\big|J\big|du \end{cases}$$

命题 3.5.1 (和的分布)

$(X,Y) \sim f(x,y)$, $Z = X + Y$, 求 Z 的分布函数和概率密度



(a) $X+Y$

图 3.1: 和的分布

$$\begin{cases} Z = X + Y \\ W = Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = Z - W \\ Y = W \end{cases} \Rightarrow |J| = 1$$

概率密度

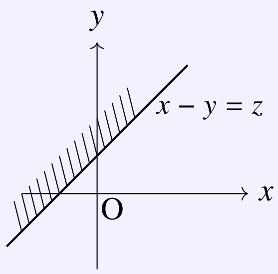
$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-w, w)dw$$

分布函数

$$F_Z(z_0) = \int_{-\infty}^{z_0} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-w, w)dw$$

命题 3.5.2 (差的分布)

$(X, Y) \sim f(x, y)$, $Z = X - Y$, 求 Z 的分布函数和概率密度



(a) $X - Y$

图 3.2: 差的分布

$$\begin{cases} Z = X - Y \\ W = Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = Z + W \\ Y = W \end{cases} \Rightarrow |J| = 1$$

概率密度

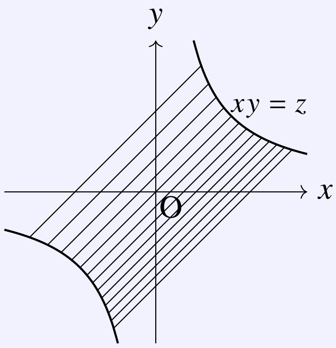
$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z+w, w)dw$$

分布函数

$$F_Z(z_0) = \int_{-\infty}^{z_0} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(z+w, w)dw$$

命题 3.5.3 (积的分布)

$(X, Y) \sim f(x, y)$, $Z = XY$, 求 Z 的分布函数和概率密度



(a) XY

图 3.3: 积的分布

$$\begin{cases} Z = XY \\ W = Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \dfrac{Z}{W} \\ Y = W \end{cases} \Rightarrow |J| = |\frac{1}{w}|$$

概率密度

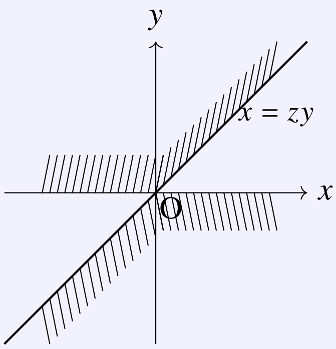
$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\frac{z}{w}, w)|\frac{1}{w}|dw$$

分布函数

$$F_Z(z_0) = \int_{-\infty}^{z_0} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-w, w)|\frac{1}{w}|dw$$

命题 3.5.4 (商的分布)

$(X,Y) \sim f(x,y)$, $Z = \dfrac{X}{Y}$, 求 Z 的分布函数和概率密度



(a) $\frac{X}{Y}$

图 3.4: 商的分布

$$\begin{cases} Z = \dfrac{X}{Y} \\ W = Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = ZW \\ Y = W \end{cases} \Rightarrow |J| = |w|$$

概率密度

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\frac{z}{w}, w)|w|dw$$

分布函数

$$F_Z(z_0) = \int_{-\infty}^{z_0} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-w, w)|w|dw$$

命题 3.5.5 (最大值和最小值的分布)

$(X,Y) \sim f(x,y), Z_1 = \max\{X,Y\}, Z_2 = \min\{X,Y\}$, 求 Z_1, Z_2 的分布函数和概率密度

$\max\{X,Y\}$ **分布函数**

$$F_{Z_1}(z) = P\{Z_1 \le \max\{X,Y\}\} = P\{X \le z, Y \le z\} = F(z,z)$$

$\max\{X,Y\}$ **概率密度**

$$f_{Z_1}(z) = F'_{Z_1}(z)$$

$\min\{X,Y\}$ **分布函数**

$$F_{Z_2}(z) = P\{Z_2 \le \min\{X,Y\}\} = P\{X \le z\} \cup P\{Y \le z\} = F_X(z) + F_Y(z) - F(z,z)$$

$\min\{X,Y\}$ **概率密度**

$$f_{Z_2}(z) = F'_{Z_2}(z)$$

推论 3.5.1 (独立同分布随机变量推论)

随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, $Z_1 = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}, Z_2 = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$, Z_1, Z_2 的分布函数

$$\begin{cases} F_{Z_1}(z) = F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z) \\ F_{Z_2}(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)][1 - F_{X_2}(z)]\cdots[1 - F_{X_n}(z)] \end{cases}$$

假设随机变量 $X_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 独立同分布

- $F_{Z_1}(x) = [F(x)]^n, f_{Z_1}(x) = n[F(x)]^{n-1}f(x)$
- $F_{Z_2}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n, f_{Z_2}(x) = nf(x)[1 - F(x)]^{n-1}$

表 3.2: 常见独立分布可加性

X	Y	$X+Y$
$B(n,p)$	$B(m,p)$	$B(n+m,p)$
$P(\lambda_1)$	$P(\lambda_2)$	$P(\lambda_1+\lambda_2)$
$N(\mu_1,\sigma_1^2)$	$N(\mu_2,\sigma_2^2)$	$N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$
$\chi^2(n)$	$\chi^2(m)$	$\chi^2(n+m)$

第 4 章 随机变量的数字特征

4.1 一维随机变量的数字特征

定义 4.1.1 (数学期望)

离散型随机变量

X 是离散型随机变量, X 的分布列为 $p_i = P\{X = x_i\}(i = 1, 2, \cdots, n)$

如果级数 $\sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i$ **绝对收敛**, 称随机变量 X 的**数学期望**存在, 将其记作 $E(X)$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i$$

连续型随机变量

X 是连续型随机变量, X 的概率密度为 $f(x)$

如果积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$ **绝对收敛**, 称随机变量 X 的**数学期望**存在, 将其记作 $E(X)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$$

♣

推论 4.1.1 (数学期望推论)

- $E(a) = a, E(E(X)) = E(X)$
- $E(aX \pm bY) = aE(X) \pm bE(Y)$
- $E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$
- X 与 Y 相互独立 $\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$

- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立

$$\begin{cases} E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i) \\ E\left[\prod_{i=1}^{n} g_i(X_i)\right] = \prod_{i=1}^{n} E\left[g_i(X_i)\right] \end{cases}$$

定义 4.1.2 (方差和标准差)

设 X 是随机变量, 如果 $E[(X - E(X))^2]$ 存在, 将 $E[(X - E(X))^2]$ 记作 X 的方差 $D(X)$

$$D(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

将 $\sqrt{D(X)}$ 称为随机变量 X 的**标准差**或者**均方差**, 记作 $\sigma(X)$

随机变量 $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ 是 X 的**标准化随机变量**

$$\begin{cases} E(X^*) = 0 \\ D(X^*) = 1 \end{cases}$$

推论 4.1.2 (方差和标准差推论)

- $D(X) \geq 0, D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
- $D(c) = 0, c \in \mathbb{R}$
- $D(aX + b) = a^2 D(X), D(X + b) = D(X)$
- $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2Cov(X, Y)$
- $D\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$
- X 和 Y 相互独立

$$\begin{cases} D(aX + bY) = a^2 D(X) + b^2 D(Y) \\ D(XY) = D(X)D(Y) + D(X)[E(Y)]^2 + D(Y)[E(X)]^2 \geq D(X)D(Y) \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立

$$\begin{cases} D\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D(X_i) \\ D\left(\sum_{i=1}^{n} g_i(X_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} D\left[g_i(X_i)\right] \end{cases}$$

- $\forall c \in \mathbb{R}, D(X) \leq E\left[(X - c)^2\right]$

4.2 二维随机变量的数字特征

定义 4.2.1 (数学期望)

设 X, Y 为随机变量, $g(X, Y)$ 为 X, Y 的函数 (g 是连续函数)

离散型随机变量

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}(i, j = 1, 2, \cdots)$$

级数 $\sum_{i}^{m}\sum_{j}^{n} g(x_i, y_j)p_{ij}$ **绝对收敛**

$$E[g(X, Y)] = \sum_{i}^{m}\sum_{j}^{n} g(x_i, y_j)p_{ij}$$

连续型随机变量

(X, Y) 概率密度为 $f(x, y)$, 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy$ **绝对收敛**

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy$$

♣

定义 4.2.2 (协方差与相关系数)

随机变量 X 与 Y 的方差存在且 $D(X) > 0, D(Y) > 0$, 定义随机变量 X, Y 的协方差 $Cov(X, Y)$

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$\rho_{XY} = \dfrac{Cov(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$ 定义为随机变量 X, Y 的**相关系数**

♣

推论 4.2.1 (协方差和相关系数推论)

- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X), Cov(X, X) = D(X), \rho_{XX} = 1$
- $Cov(aX + b, Y) = aCov(X, Y), Cov(X_1 + X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$
- $\rho_{XY} = 0 \Rightarrow X, Y$ 不相关
- $\rho_{XY} \neq 0 \Rightarrow X, Y$ 相关

♠

4.3 独立性与相关性判定、切比雪夫不等式

推论 4.3.1 (独立性与相关性判定)

随机变量 X,Y 相互独立充要条件

$$\begin{cases} f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \\ P\{X = x_i, Y = y_i\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_i\} \end{cases}$$

随机变量 X,Y 不相关充要条件 $\rho_{XY} = 0$

$$\rho_{XY} = 0 \Leftrightarrow Cov(X,Y) = 0 \Leftrightarrow E(XY) = E(X) \cdot E(Y) \Leftrightarrow D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$

♠

定义 4.3.1 (切比雪夫不等式)

随机变量 X 的期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 都存在

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, P\{|X - E(X)| \le \varepsilon\} \ge 1 - \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2} \\ \forall \varepsilon > 0, P\{|X - E(X)| \ge \varepsilon\} \le \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2} \end{cases}$$

♣

表 4.1: 常用分布表

名称	概率分布	均值	方差	参数范围
两点分布	$P(X=k)=p^k q^{1-k}$ $(k=0,1)$	p	pq	$0<p<1$ $q=1-p$
二项分布 $B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ $(k=0,1,\cdots,n)$	np	npq	$0<p<1$ $q=1-p$ $n\in N$
泊松分布 $P(\lambda)$	$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $(k=0,1,2,\cdots)$	λ	λ	$\lambda>0$
超几何分布 $H(n,N,M)$	$P(X=k)=\frac{C_{N-M}^{n-k}C_M^k}{C_N^n}$ $(k=0,1,\cdots \min\{M,n\})$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{n(N-n)(N-M)M}{N^2(N-1)}$	$n,N,M\in N$ $n\le N, M\le N$
几何分布 $G(p)$	$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$ $(k=1,2,\cdots)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$0<p<1$ $q=1-p$
均匀分布 $U(a,b)$	$f(x)=\frac{1}{b-a}(a\le x\le b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^3}{12}$	
指数分布 $E(\lambda)$	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}(x>0)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\lambda>0$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2	$\sigma>0$
Γ分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$	$f(x)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}(x>0)$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$\alpha>0$ $\beta>0$

第 5 章 大数定理和中心极限定理

5.1 依概率收敛

定义 5.1.1 (依概率收敛)

设随机变量 X 与随机变量序列 $\{X_n\}(n=1,2,3,\cdots,n)$

$$\begin{cases} \forall\varepsilon>0,\ \lim\limits_{n\Rightarrow\infty} P\{|X_n-X|\geq\varepsilon\}=0 \\ \forall\varepsilon>0,\ \lim\limits_{n\Rightarrow\infty} P\{|X_n-X|<\varepsilon\}=1 \end{cases}$$

称随机变量序列 $\{X_n\}$ **依概率收敛于随机变量** X, 记作

$$\lim_{n\Rightarrow\infty} X_n = X(P)\ or\ X_n \xrightarrow{P} X(n\Rightarrow\infty)$$

♣

5.2 大数定理

定理 5.2.1 (切比雪夫大数定理)

假设 $\{X_n\}(n=1,2,\cdots,n)$ 是相互独立的随机变量序列, 如果方差 $D(X_i)$ 存在且一致有上界, $\forall i\geq 1,\ s.t.\ D(X_i)\leq C, C\in\mathbb{R}$, $\{X_n\}$ 服从大数定理

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$$

♡

定理 5.2.2 (伯努利大数定理)

假设 μ_n 是 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数，在每次试验中事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$，$\frac{\mu_n}{n} \xrightarrow{P} p$

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \Rightarrow \infty} P\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\} = 1$$

定理 5.2.3 (辛钦大数定理)

假设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，如果 $E(X_i) = \mu(i = 1,2,\cdots,n)$ 存在，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \mu$

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \Rightarrow \infty} P\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \varepsilon\} = 1$$

5.3 中心极限定理

中心极限定理

正态分布

定理 5.3.1 (列维-林德伯格定理)

假设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列，如果 $E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2 > 0(i = 1,2,\cdots,n)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \Rightarrow \infty} P\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

推论 5.3.1 (中心极限定理推论)

- $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$
- $P\{a < \sum_{i=1}^{n} X_i < b\} \approx \Phi(\frac{b - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}) - \Phi(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n}\sigma})$

定理 5.3.2 (棣莫弗-拉普拉斯定理)

假设随机变量 $Y_n \sim B(n,p)(0<p<1, n \geq 1)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \Rightarrow \infty} P\{\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

第 6 章 数理统计

6.1 总体和样本

定义 6.1.1 (统计概念和统计量)

- **总体**: 研究对象的全体称为总体
- **样本**: n 个相互独立且与总体具有相同概率分布的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 所组成的整体 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 称为来自总体 X, 容量为 n 的一个**简单随机样本**, 一次抽样结果的具体的 n 个数值 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的一个观测值 ♣

定义 6.1.2 (样本分布)

假设总体的分布函数 $F(x)$, 概率密度函数 $f(x)$, 样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数和概率密度

- 离散型 $P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i = x_i\}$
- 连续型

$$\begin{cases} F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i) \\ f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \end{cases}$$

♣

6.2 统计量及其分布

定义 6.2.1

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本, $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 n 元函数, 如果函数 g 中不含任何参数, 称 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一个**统计量** ♣

定义 6.2.2 (样本数字特征)

- 样本均值 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
- 样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$
- 样本标准差 $S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$
- 样本 k 阶原点矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k (k = 1, 2, \cdots)$
- 样本 k 阶中心矩 $B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k (k = 2, 3, \cdots)$

定义 6.2.3 (顺序统计量)

将样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的 n 个观测值**从小到大**顺序排序

$$X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n)} \le$$

随机变量 $X_{(k)}$ 称作第 k 顺序统计量, $X_{(1)}$ 为最小顺序统计量, $X_{(n)}$ 为最大顺序统计量

$$\begin{cases} X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} \\ X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} \end{cases}$$

推论 6.2.1 (统计量 (数字特征) 性质)

假设总体期望 $E(X) = \mu$, 总体方差为 $D(X) = \sigma^2$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体的一个样本, $\overline{X}, S^2$ 分别为样本的均值和方差

- $E(X_i) = \mu$
- $D(X_i) = \sigma^2$
- $E(\overline{X}) = E(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}) = E(X) = \mu$
- $D(\overline{X}) = D(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}) = \frac{1}{n}\sigma^2$
- $E(S^2) = D(X) = \sigma^2$

6.3 三大分布

定义 6.3.1 (χ^2 分布)

随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 且都服从标准正态分布, 随机变量 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 服从自由度为 n 的卡方分布 $\chi^2(n)$, 记作 $X \sim \chi^2(n)$

上 α 分位数: 对于给定的 $\alpha(0 < \alpha < 1)$, 称满足

$$P\{\chi^2 > \chi^2_\alpha(n)\} = \int_{\chi^2_\alpha(n)}^{+\infty} f(x)dx = \alpha$$

的 $\chi^2_\alpha(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 分布的上 α 分位数

- $X_1 \sim \chi^2(n_1), X_2 \sim \chi^2(n_2), X_1, X_2$ 相互独立, $X_1 + X_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$
- $X \sim \chi^2(n) \Rightarrow E(X) = n, D(X) = 2n$

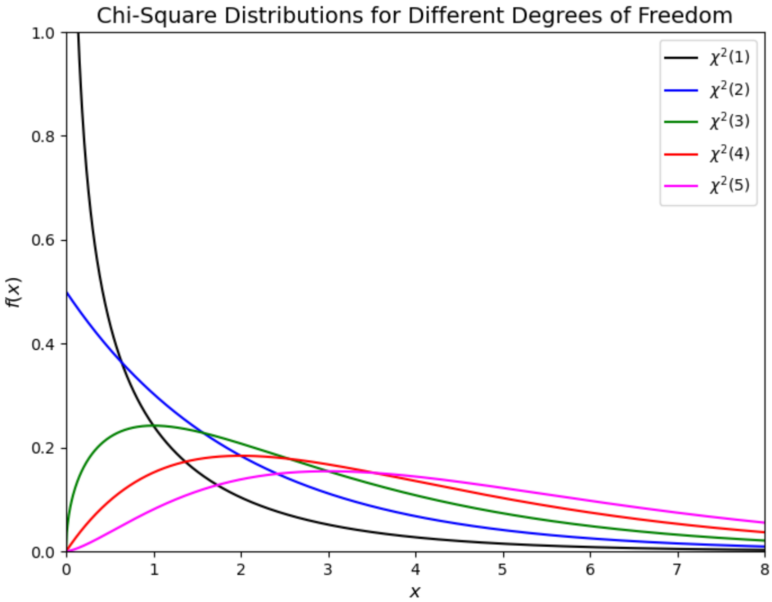


图 6.1: 卡方分布

定义 6.3.2 (t 分布)

随机变量 $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n), X, Y$ 相互独立, 随机变量 $t = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布, 记作 $t \sim t(n)$

上 α 分位数: 对于给定的 $\alpha(0 < \alpha < 1)$, 称满足

$$P\{t > t_\alpha(n)\} = \alpha$$

的 $t_\alpha(n)$ 为 t 分布的上 α 分位数

- t 分布概率密度关于 $x = 0$ 对称 $\Rightarrow E(t) = 0$
- $P\{t > -t_\alpha(n)\} = P\{t > t_{1-\alpha}(n)\} \Rightarrow t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$

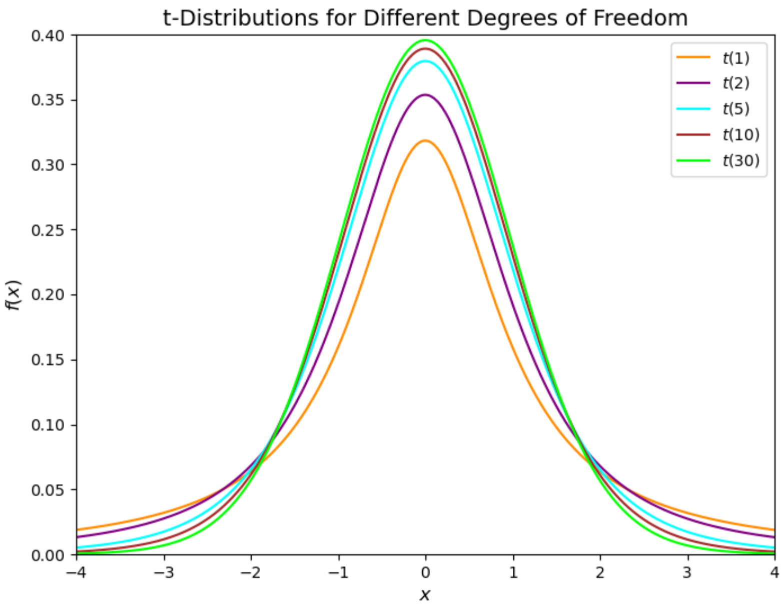


图 6.2: t 分布

定义 6.3.3 (F 分布)

随机变量 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$, 且 X, Y 相互独立, 随机变量 $F = \dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从自由度为 (n_1, n_2) 的 F 分布, 记作 $F \sim F(n_1, n_2)$

- $F \sim F(n_1, n_2) \Rightarrow \dfrac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$
- $F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \dfrac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}$
- $t \sim t(n) \Rightarrow t^2 \sim F(1, n)$

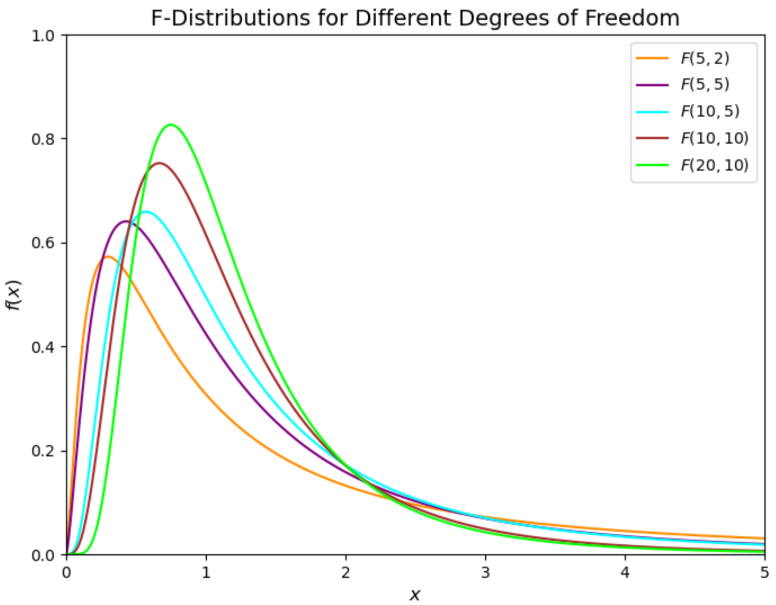


图 6.3: F 分布

推论 6.3.1 (正态总体推论)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本, $\overline{X}, S^2$ 分别是样本的均值和方差

- $\overline{X} \sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}) \Rightarrow \dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$
- $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$
- $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum\limits_{i=1}^{n}(\dfrac{X_i-\overline{X}}{\sigma})^2 \sim \chi^2(n-1)$
- $\overline{X}$ 和 S^2 相互独立 $\Rightarrow \dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S} \sim t(n-1)$
- σ 未知时, $\dfrac{n(\overline{X}-\mu)^2}{S^2} \sim F(1, n-1)$

6.4 参数的点估计

定义 6.4.1 (参数点估计)

设总体 X 的分布函数 $F(x;\theta)$, 其中 θ 是一个未知参数, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体的一个样本, 由样本构造一个适当的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 作为参数 θ 的估计, 称统计量 $\hat{\theta}$ 为参数 θ 的估计量

定义 6.4.2 (矩估计)

设总体分布中有 k 个未知的参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$, 来自总体 X 的一组样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$, 如果 X 的原点矩 $E(X^l)(l=1,2,\cdots,k)$ 存在, 样本原点矩 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^l$ 可作为 $E(X^l)$ 的估计

定义 6.4.3 (最大似然估计)

对未知参数 θ 进行估计, 在该参数可能的取值范围 I 中选取, 使用使样本观测值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 最大的参数 $\hat{\theta}$ 作为参数 θ 的估计值

似然函数

$$\begin{cases} L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta) \\ L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta) \end{cases}$$

$$\exists\hat{\theta}\in I,\ s.t.\ L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\hat{\theta})=\max_{\theta\in I}L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)$$

推论 6.4.1 (估计量评价标准)

- **无偏性**: $E(\hat{\theta})=\theta$
- **有效性**: $D(\hat{\theta})$ 最小
- **一致性**: $\forall\varepsilon>0,\ \lim_{n\Rightarrow\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=1$

6.5 参数的区间估计

定义 6.5.1 (区间估计和置信区间)

设 θ 是总体 X 的一个未知参数, 对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$, 如果由样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 确定的两个统计量 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 满足

$$P\{\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\theta<\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}=1-\alpha$$

则称随机区间 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 是 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的 **置信区间**, $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 分别称为 **置信上限**和**置信下限**, $1-\alpha$ 为置信水平, α 为**显著性水平**

表 6.1: 正态总体的置信区间

待估参数	其他参数	枢轴量分布	置信区间
μ	σ^2已知	$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$
μ	σ^2未知	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left(\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\overline{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$
σ^2	μ已知	$\chi^2=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$	$\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi_{\alpha/2}(n)},\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi_{1-\alpha/2}(n)}\right)$
σ^2	μ未知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right)$

6.6 假设检验

定义 6.6.1 (统计性检验)

- H_0: 虚无假设
- H_1: 备择假设

定义 6.6.2 (两类错误)

- **第一类错误**: 虚无假设 H_0 为真, 但拒绝了 H_0, 误认为备择假设 H_1 为真, 犯第一类错误概率 $\alpha=P\{R(H_0)|T(H_0)\}$
- **第二类错误**: 备择假设 H_1 为真, 但接受了 H_0, 误认为虚无假设 H_0 为真, 犯第二类错误概率 $\beta=P\{A(H_0)|T(H_1)\}$

推论 6.6.1 (正态总体下的六大检查和拒绝域)

- σ^2 已知,μ 未知, $H_0:\ \mu=\mu_0, H_1:\ \mu\neq\mu_0$
$$\mu_r\in(-\infty,\mu_0-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}})\cup(\mu_0+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},+\infty)$$
- σ^2 未知, μ 未知, $H_0:\ \mu=\mu_0, H_1:\ \mu\neq\mu_0$
$$\mu_r\in(-\infty,\mu_0-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))\cup(\mu_0+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),+\infty)$$
- σ^2 已知, μ 未知, $H_0:\ \mu\le\mu_0, H_1:\ \mu>\mu_0$
$$\mu_r\in(\mu_0+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha,+\infty)$$
- σ^2 已知, μ 未知, $H_0:\ \mu\ge\mu_0, H_1:\ \mu<\mu_0$
$$\mu_r\in(-\infty,\mu_0-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha)$$

- σ^2 未知, μ 未知, $H_0:\ \mu \le \mu_0, H_1:\ \mu > \mu_0$

$$\mu_r \in (\mu_0 + \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), +\infty)$$

- σ^2 未知, μ 未知, $H_0:\ \mu \ge \mu_0, H_1:\ \mu < \mu_0$

$$\mu_r \in (-\infty, \mu_0 - \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1))$$