多维随机变量及其分布

1. n 维随机变量及其分布函数

1.1 n维随机变量

如果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是定义在同一个样本空间 Ω 上的 n 个随机变量, 称 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 n 维随机向量

1.2 n维随机变量分布函数

对于任意的 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n, n$ 元函数
$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$

称为 n 维随机向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的**联合分布函数**

特别的,当 $n = 2$ 时, 记 (X, Y) 为 **二维随机变量** 或者 **二维随机向量**, 称 $F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\}$ 为二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数

$(X, Y) \sim F(x, y) \Leftrightarrow F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\}$

1.3 二维随机变量联合分布性质

- **单调性 (单调不减)**
  $\forall x, y_1 < y_2, F(x, y_1) \le F(x, y_2)$
  $\forall y, x_1 < x_2, F(x_1, y) \le F(x_1, y)$
- **右连续性**
  $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^+} F(x, y) = F(x_0 + 0, y) = F(x_0, y) \\ \lim\limits_{y \to y_0^+} F(x, y) = F(x, y_0 + 0) = F(x, y_0) \end{cases}$
- **有界性**
  $\begin{cases} F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0 \\ F(+\infty, +\infty) = 1 \end{cases}$
- **非负性**
  $\forall x_1 < x_2, y_1 < y_2$
  $F(x_1 < x \le x_2, y_1 < y \le y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \ge 0$

1.4 边缘分布函数

设二维随机变量 (X, Y) 的分布函数 $F(X, Y)$, 随机变量 X 与 Y 的分布函数 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 分别称为随机变量关于 (X, Y) 关于 X 和 Y 的**边缘分布函数**
$\begin{cases} F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < +\infty\} = F(x, +\infty) \\ F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X < +\infty, Y \le y\} = F(+\infty, y) \end{cases}$

2. 二维离散型随机变量

2.1 概率分布

二维随机变量 (X, Y) 只能取有限对值或可列无限对值 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n), \cdots$, 称 (X, Y) 为**二维离散型随机变量**, (X, Y)满足概率分布

$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}(i, j = 1, 2, \cdots)$

上面的式子称为 (X,Y) 的联合分布律，记作 $(X,Y)\sim p_{ij}$

$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}$

2.2 边缘分布

$$p_{i*}=P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}(i=1,2,\cdots)$$

$$p_{*j}=P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}(j=1,2,\cdots)$$

2.3 条件分布

- X 在 $Y=y_j$ 下的条件分布

$$P\{X=x_i\big|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{*j}}(i=1,2,\cdots)$$

- Y 在 $X=x_i$ 下的条件分布

$$P\{Y=y_j\big|X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i*}}(j=1,2,\cdots)$$

3. 二维连续型随机变量

3.1 分布函数和概率密度

二维随机变量 (X,Y) 的分布函数 $F(X,Y)$ 可以表示为:
$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv,(x,y)\in\mathbb{R}^2$
其中 $f(x,y)$ 是非负可积函数，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$，称 (X,Y) 是**二维连续型随机变量**，$f(x,y)$ 是随机变量 (X,Y) 的**概率密度函数**，记作 $(X,Y)\sim f(x,y)$

3.2 分布函数和概率密度性质

- $P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G}f(x,y)dxdy$
- $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续 $\Rightarrow \dfrac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}=f(x_0,y_0)$
- $F(x,y)$ 连续且可导，$\dfrac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$

3.3 边缘分布函数和边缘概率密度

$(X,Y)\sim f(x,y),X,Y$的边缘分布函数和边缘概率密度

边缘分布函数

$$\begin{cases}F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dv\right]du\\F_Y(y)=F(+\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)du\right]dv\end{cases}$$

边缘概率密度

$$\begin{cases} f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \\ f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \end{cases}$$

3.4 条件分布函数和条件概率密度

$(X,Y) \sim f(x,y), X$ 在 $Y=y$ 条件下的**条件概率密度**和 Y 在 $X=x$ 条件下的**条件概率密度**

$$\begin{cases} f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \dfrac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx} \\ f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)} = \dfrac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy} \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} f_X(x)f_{Y|X}(y|x) \\ f_Y(y)f_{X|Y}(x|y) \end{cases}$$

$(X,Y) \sim f(x,y), X$ 在 $Y=y$ 条件下的**条件分布函数**和 Y 在 $X=x$ 条件下的**条件分布函数**

$$\begin{cases} F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(y|x)dy = \int_{-\infty}^{y} \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}dy \\ F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)dx = \int_{-\infty}^{x} \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx \end{cases}$$

3.5 常见二维连续型随机变量分布

3.5.1 二维均匀分布

(X,Y) 在有界区域 D 服从**均匀分布**, (X,Y) 的概率密度

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{S_D} & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$$

3.5.2 二维正态分布

(X,Y) 概率密度

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right.$$

其中 $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1$, 称 (X,Y) 服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ 的二维正态分布, 记作 $(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$

二维正态分布性质

- 若 $(X_1, X_2) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho) \Rightarrow X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
- $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 且 X_1, X_2 相互独立, 则 $(X_1, X_2) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; 0)$
- $(X_1, X_2) \sim N \Rightarrow k_1X_1 + k_2X_2 \sim N$

4. 独立性

设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布 $F(x,y)$, 边缘分布分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 如果任意实数对 (x,y)

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

称 X 和 Y **相互独立**

- 随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立$\Leftrightarrow F(x_1,x_1,\cdots,x_n)=F(x_1)\ldots F(x_2)\cdots F(x_n)$
- $X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立,则其中任意$k(2\le k\le n)$个随机变量也相互独立
- 两个多维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$与$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)$相互独立
  $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)=F_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ldots F_2(y_1,y_2,\cdots,y_m)$
- (X,Y)为独立的二维随机变量,边缘分布和条件分布相等,边缘概率密度与条件概率密度相等.
  $(P\{Y=y_j\}>0,\ P\{X=x_i\}>0)$
  $P\{X=x_i|Y=y_j\}=P\{X=x_i\},\ P\{Y=y_j|X=x_i\}=P\{Y=y_j\}$
  $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=f_X(x)(f_Y(y)>0),\ f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=f_Y(y)(f_X(x)>0)$

5. 多维随机变量函数的分布

5.1 随机变量函数

设 X,Y 为随机变量, $g(x,y)$ 是二元函数, 以随机变量 X,Y 作为自变量的函数 $Z=g(X,Y)$ 也是随机变量, 称为**随机变量函数**

5.2 随机变量函数分布函数和概率密度

设 X,Y 是随机变量, $f(x,y)$ 是 (X,Y) 的概率密度,
$\begin{cases}U=G(X,Y)\\V=H(X,Y)\end{cases}$, 求 $U=g(X,Y)$ 和 $V=h(X,Y)$ 的分布函数和概率密度

$$\begin{cases}U=G(X,Y)\\V=H(X,Y)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X=P(U,V)\\Y=Q(U,V)\end{cases}\Rightarrow|J|=\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial X}{\partial U}&\dfrac{\partial X}{\partial V}\\\dfrac{\partial Y}{\partial U}&\dfrac{\partial Y}{\partial V}\end{matrix}\right\|$$

$$F(u,v)=P\{U(X,Y)\le u,V(X,Y)\le v\}=\iint\limits_{D_{xy}}f(x,y)dxdy$$

$$\begin{aligned}F(u,v)&=\iint\limits_{D_{xy}}f(x,y)dxdy\\&=\iint\limits_{D_{uv}}f(P(u,v),Q(u,v))|J|dudv\end{aligned}$$

$$f(u,v)=\frac{\partial^2F(u,v)}{\partial u\partial v}=f(P(u,v),Q(u,v))|J|$$

$$\begin{cases}f_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dv=\int_{-\infty}^{+\infty}f(P(u,v),Q(u,v))|J|dv\\f_V(v)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)du=\int_{-\infty}^{+\infty}f(P(u,v),Q(u,v))|J|du\end{cases}$$

$$\begin{cases}F_U(u_0)=\int_{-\infty}^{u_0}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(P(u,v),Q(u,v))|J|dv\\F_V(v_0)=\int_{-\infty}^{v_0}dv\int_{-\infty}^{+\infty}f(P(u,v),Q(u,v))|J|du\end{cases}$$

5.2.1 和的分布

$(X,Y)\sim f(x,y),Z=X+Y$, 求 Z 的分布函数和概率密度

$$\begin{cases}Z=X+Y\\W=Y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X=Z-W\\Y=W\end{cases}\Rightarrow|J|=1$$

概率密度
$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-w,w)dw$
分布函数

$F_Z(z_0)=\int_{-\infty}^{z_0}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-w,w)dw$

5.2.2 差的分布

$(X,Y)\sim f(x,y),Z=X-Y$, 求 Z 的分布函数和概率密度

$$\begin{cases}Z=X-Y\\W=Y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X=Z+W\\Y=W\end{cases}\Rightarrow|J|=1$$

概率密度

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z+w,w)dw$

分布函数

$F_Z(z_0)=\int_{-\infty}^{z_0}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(z+w,w)dw$

5.2.3 积的分布

$(X,Y)\sim f(x,y),Z=XY$, 求 Z 的分布函数和概率密度

$$\begin{cases}Z=XY\\W=Y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X=\dfrac{Z}{W}\\Y=W\end{cases}\Rightarrow|J|=|\frac{1}{w}|$$

概率密度

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\frac{z}{w},w)|\dfrac{1}{w}|dw$

分布函数

$F_Z(z_0)=\int_{-\infty}^{z_0}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-w,w)|\dfrac{1}{w}|dw$

5.2.4 商的分布

$(X,Y)\sim f(x,y),Z=\dfrac{X}{Y}$, 求 Z 的分布函数和概率密度

$$\begin{cases}Z=\dfrac{X}{Y}\\W=Y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X=ZW\\Y=W\end{cases}\Rightarrow|J|=|w|$$

概率密度

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\frac{z}{w},w)|w|dw$

分布函数

$F_Z(z_0)=\int_{-\infty}^{z_0}dz\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-w,w)|w|dw$

5.2.5 最大值和最小值的分布

$(X,Y)\sim f(x,y),Z_1=\max\{X,Y\},Z_2=\min\{X,Y\}$, 求 Z_1,Z_2 的分布函数和概率密度

$\max\{X,Y\}$ **分布函数**

$F_{Z_1}(z)=P\{Z_1\le\max\{X,Y\}\}=P\{X\le z,Y\le z\}=F(z,z)$

$\max\{X,Y\}$ **概率密度**

$f_{Z_1}(z)=F'_{Z_1}(z)$

$\min\{X,Y\}$ **分布函数**

$F_{Z_2}(z)=P\{Z_2\le\min\{X,Y\}\}=P\{X\le z\}\cup P\{Y\le z\}=F_X(z)+F_Y(z)-F(z,z)$

$\min\{X,Y\}$ **概率密度**

$f_{Z_2}(z)=F'_{Z_2}(z)$

5.3 独立同分布随机变量推论

随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, $Z_1 = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}, Z_2 = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$, Z_1, Z_2 的分布函数

$$\begin{cases} F_{Z_1}(z) = F_{X_1}(z) F_{X_2}(z) \cdots F_{X_n}(z) \\ F_{Z_2}(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)][1 - F_{X_2}(z)] \cdots [1 - F_{X_n}(z)] \end{cases}$$

假设随机变量 $X_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 独立同分布

- $F_{Z_1}(x) = [F(x)]^n, f_{Z_1}(x) = n[F(x)]^{n-1} f(x)$
- $F_{Z_2}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n, f_{Z_2}(x) = n f(x)[1 - F(x)]^{n-1}$

5.3.1 独立分布可加性

X	Y	$X+Y$
$B(n.p)$	$B(m,p)$	$B(m+n,p)$
$P(\lambda_1)$	$P(\lambda_2)$	$P(\lambda_1+\lambda_2)$
$N(\mu_1, \sigma_1^2)$	$N(\mu_2, \sigma_2^2)$	$N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$
$\chi^2(n)$	$\chi^2(m)$	$\chi^2(n+m)$