二次型

二次型的定义

- n 元变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式
$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ + a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ + \cdots \\ + a_{nn}x_n^2$$
- 称为 n 元二次型, 简称二次型
- 令 $a_{ij} = a_{ji}$

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{aligned} a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2m}x_2x_n \\ \cdots \\ a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_1 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- 二次型可表示: $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, A 为二次型 $f(\mathbf{x})$ 的矩阵

线性变换

- 对于 n 元二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

令

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

记

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{bmatrix},\mathbf{y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}$$

- $x\to y$ 线性变化:

$$\mathbf{x}=C\mathbf{y}$$

- 这种变换称为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的 **线性变换**, 如果线性变换矩阵 $C(|C|\neq 0)$ 可逆, 则称为 **可逆线性变换**

$$\begin{cases}f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^TA\mathbf{x}\\\mathbf{x}=C\mathbf{y}\end{cases}\Rightarrow f(\mathbf{x})=(C\mathbf{y})^TA(C\mathbf{y})=\mathbf{y}^T(C^TAC)\mathbf{y}$$

记 $B=C^TAC$

$$f(\mathbf{x})=y^TBy=g(\mathbf{y})$$

- 二次型 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ 通过线性变换 $\mathbf{x}=C\mathbf{y}$ 得到了一个新二次型 $g(\mathbf{y})=y^TBy$

合同

- 设 A,B 为 n 阶矩阵, C 是可逆矩阵 $\exists C\in\mathbb{R}^{n\times n},\ s.t.\ B=C^TAC$ 称 A,B 合同, 记作 $A\simeq B$, 其对应的二次型 $f(\mathbf{x})$ 与 $g(\mathbf{y})$ 为合同二次型
- 反身性: $A\simeq A$
- 对称性: $A\simeq B\Rightarrow B\simeq A$
- 传递性: $A\simeq B,B\simeq C\Rightarrow A\simeq C$

二次型的标准型和规范型

标准型

- 二次型中只有平方项, 而没有交叉项 (所有交叉项系数全为 0), 形如: $d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$ 的二次型为 **标准二次型**

规范型

- 在标准二次型中，如果二次型的系数 $d_i \in \{0,1,-1\}$，这样的二次型称为**规范型二次型**

合同标准型

- 二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ 合同于标准型 $d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$，则称 $d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$ 为二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ 的合同标准型

合同规范型

- 二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ 合同于规范型 $x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+q}^2$，则称 $x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+q}^2$ 为二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ 的合同规范型

惯性定理

- $f(\mathbf{x})$ 是二次型，A 是二次型 $f(\mathbf{x})$ 对应的矩阵，对于任意可逆线性变换 C，$C^TAC = \Lambda$，标准型或者规范型中正项个数 p，负项个数 q 都是不变的，p 是**正惯性指数**，q 是**负惯性指数**

正定二次型

- n 元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$

$\forall \mathbf{x} = [x_1,x_2,\cdots,x_n]^T \neq 0, \mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$

- f 为正定二次型，二次型对应的矩阵 A 为**正定矩阵**

二次型正定充要条件

- f 正定 $\Leftrightarrow$ f 正惯性指数 $p = n$
- f 正定 $\Leftrightarrow \exists D,\ s.t.\ A = D^TD, D$ 是可逆矩阵
- f 正定 $\Leftrightarrow A \simeq E$
- f 正定 $\Leftrightarrow A$ 的所有特征值 $\lambda_i > 0$
- f 正定 $\Leftrightarrow A$ 的全部顺序主子式大于 0

二次型正定必要条件

- f 正定 $\Rightarrow a_{ii} > 0$
- f 正定 $\Rightarrow |A| > 0$