LaTeX Multivariable Calculus

Sun for morning, moon for night, and you forever.

作者：Lyshmily.Y & 木易

组织：Lyshmily.Y

时间：December 11, 2024

版本：V.1.0

邮箱：yjlpku.outlook.com & 845307723@qq.com

在没有结束前，总要做很多没有意义的事，这样才可以在未来某一天，用这些无意义的事去堵住那些讨厌的缺口

目录

第一部分

高数（下）

第 1 部分目录

第 1 章 多元函数微分

内容提要

- ❑ 连续、偏导、可微、全微分
- ❑ 链式法则
- ❑ 隐函数存在定理
- ❑ 多元函数极值和最值
- ❑ 拉格朗日数乘法

1.1 多元函数微分概念

定义 1.1.1 (邻域)

1. δ 邻域: 设 $P_0(x_0, y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点, $U(P_0, \delta)$ 表示以 P_0 为中心, 半径为 δ 的圆盘, 即 $U(P_0, \delta) = \{(x, y) | \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$
2. 去心 δ 邻域: $\mathring{U}(P_0, \delta) = \{(x, y) | 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$

♣

定义 1.1.2 (多元函数极限)

设函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上有定义, $P_0(x_0, y_0) \in D$ 或为区域 D 边界上的一点, 如果对于任意给定的正数 ε, 总存 $\delta > 0$, 使得当点 $P(x, y) \in D$ 且 $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ 时, 对应的函数值 $f(x, y)$ 都满足不等式 $|f(x, y) - A| < \varepsilon$, 那么称函数 $f(x, y)$ 当 $(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时的极限为 A, 记为 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$

♣

定义 1.1.3 (连续)

设函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上有定义, $P_0(x_0, y_0) \in D$ 或为区域 D 边界上的一点, 如果 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, 那么称函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续, 如果函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上每一点都连续, 那么称函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上连续

♣

定义 1.1.4 (偏导数)

设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 邻域内有定义, 若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在, 我们将这记作 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数, 记作:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \qquad z'_x\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

类似地, 可以定义 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数, 记作:

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \qquad z'_y\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

对偏导数进一步求偏导数, 可以得到高阶偏导数: $f''_{xx}(x,y), f''_{yy}(x,y), f''_{xy}(x,y), f''_{yx}(x,y)$

定义 1.1.5 (可微)

函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表示为:

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho) \qquad \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

其中 A,B 只与 x,y 相关, 称 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微,$A\Delta x+B\Delta y$ 是 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的全微分.

$$dz=A\Delta x+B\Delta y=Adx+Bdy$$

1. 可微必要条件: $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微 $\Rightarrow$ $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处偏导数必定存在且 $\begin{cases}A=\dfrac{\partial z}{\partial x}\\ B=\dfrac{\partial z}{\partial y}\end{cases}$
2. 可微充分条件: $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处偏导数连续 $\Rightarrow$ $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微

定义 1.1.6 (偏导数连续性)

$$\begin{cases}f'_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}f'_x(x,y_0)\\ f'_y(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\lim\limits_{y\to y_0}f'_y(x_0,y)\end{cases}$$

如果这两个极限相等, 就称偏导数在此点连续

1.2 链式法则

定义 1.2.1 (链式法则)

$$z=f(u,v),u=\varphi(x,y),v=\phi(x,y)$$

偏导数:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

高阶偏导数:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right]\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right]\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right]\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right]\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right]\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right]\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial u})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right]\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\left[\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial v})}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right]\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$$

综上所述, 我们有:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}(\frac{\partial u}{\partial x})^2+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}(\frac{\partial v}{\partial x})^2+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}(\frac{\partial u}{\partial y})^2+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}(\frac{\partial v}{\partial y})^2+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$$

♣

定义 1.2.2 (全微分形式不变性)

设 $z = f(x, y), x = x(u, v), y = y(u, v)$, 如果 $f(u, v), u(x, y), v(x, y)$ 分别有连续偏导数, 则复合函数 $z = f(u, v)$ 在 (x, y) 处的全微分:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

1.3 隐函数存在定理

定理 1.3.1 (隐函数存在定理 1)

如果函数 $F(x, y)$ 满足一下条件:

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某一个邻域内具有连续偏导数
3. $F'(x_0, y_0) \neq 0$

那么方程 $F(x, y) = 0$ 在点 (x_0, y_0) 的某一个邻域内能够确定唯一的连续且具有连续导数的函数 $y = f(x)$, 满足 $F(x, f(x)) = 0$ 且 $y_0 = y(x_0)$, 且有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

定理 1.3.2 (隐函数存在定理 2)

如果函数 $F(x, y, z)$ 满足一下条件:

1. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
2. $F(x, y, z)$ 在 (x_0, y_0, z_0) 的某一个邻域内具有连续偏导数
3. $F'(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

那么方程 $F(x, y, z) = 0$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 的某一个邻域内能够确定唯一的连续且具有连续导数的函数 $z = f(x, y)$, 满足 $F(x, y, z(x, y)) = 0$ 且 $z_0 = z(x_0, y_0)$, 且有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

1.4 多元函数极值和最值

定义 1.4.1 (多元函数极值和最值)

极值

设函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处有定义

1. 如果存在邻域 $U(P_0, \delta)$, 使得对于任意 $(x, y) \in U(P_0, \delta)$, 都有 $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, 那么称 $f(x_0, y_0)$ 是函数 $f(x, y)$ 的一个极大值

2. 如果存在邻域 $U(P_0, \delta)$, 使得对于任意 $(x, y) \in U(P_0, \delta)$, 都有 $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$, 那么

称 $f(x_0, y_0)$ 是函数 $f(x, y)$ 的一个极小值

最值

1. 如果对于区域 D 上的任意 (x, y)，都有 $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$，那么称 $f(x_0, y_0)$ 是函数 $f(x, y)$ 的一个最大值
2. 如果对于区域 D 上的任意 (x, y)，都有 $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$，那么称 $f(x_0, y_0)$ 是函数 $f(x, y)$ 的一个最小值

无条件极值

定义 1.4.2 (多元函数极值)

二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取极值的必要条件:

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$$

二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取极值的充分条件:

$$\begin{cases} f''_{xx}(x_0, y_0) = A \\ f''_{xy}(x_0, y_0) = B \\ f''_{yy}(x_0, y_0) = C \end{cases} \qquad \Delta = AC - B^2 \Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0, \begin{cases} A > 0, & \text{min} \\ A < 0, & \text{max} \end{cases} \\ \Delta < 0, \text{非极值} \\ \Delta = 0, \text{方法失效} \end{cases}$$

条件极值

定义 1.4.3 (拉格朗日数乘法)

求目标函数 $u = f(x, y, z)$ 在条件 $\begin{cases} g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 下的最值

构造辅助函数: $F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z)$

令

$$\begin{cases} F'_x = f'_x + \lambda g'_x + \mu h'_x = 0 \\ F'_y = f'_y + \lambda g'_y + \mu h'_y = 0 \\ F'_z = f'_z + \lambda g'_z + \mu h'_z = 0 \\ F'_\lambda = g(x, y, z) = 0 \\ F'_\mu = h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

得到所有的备选点 P_i，计算 $f(P_i)$ 得到最大值和最小值.

注

1. 在不封闭曲线上求最值, 可以用拉格朗日数乘法, 但是要注意边界条件
2. 闭区域上多元函数的最值, 分为两部分, 第一部分是在区域内部求最值, 第二部分是在区域边界求最值; 前者利用驻点, 后者利用拉格朗日数乘法, 两者结合求最值

第 2 章 二重积分

内容提要

- 二重积分定义
- 积分次序
- 极坐标和直角坐标下的二重积分
- 变量替换

2.1 二重积分概念和性质

定义 2.1.1 (二重积分)

$f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数, 将有界闭区域 D 任意分割为 n 个小闭区域

$$D=\bigcup_{i=1}^{n} D_i$$

$\Delta\sigma_i$ 是 D_i 的面积, 任取 $(\varepsilon_i,\eta_i)\in D_i$, 作乘积 $f(\varepsilon_i,\eta_i)\sigma_i$, 并求和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i,\eta_i)\sigma_i$, 当 $\lim\limits_{n\to+\infty}\{\lambda|\lambda=\max\{d_i(i=1,2,\cdots,n)\},d_i是D_i区域的直径\}=0$ 时, 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i,\eta_i)\sigma_i$ 存在, 且与 D 的分割方法和 (ε_i,η_i) 的取法无关, 那么称此极限为 $f(x,y)$ 在区域 D 上的二重积分, 记作 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i,\eta_i)\sigma_i$$

其中 $f(x,y)$ 称为被积函数, $f(x,y)ds$ 称为被积表达式, x,y 是积分变量, D 是积分区域

二重积分的几何意义

二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 表示区域 D 上以 $f(x,y)$ 为曲顶的曲顶柱体的体积

推论 2.1.1

(1). $\iint\limits_D 1d\sigma = \iint\limits_D d\sigma = S_D, S_D$ 是 D 的面积

(2). $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上可积, $f(x,y)$ 在 D 上必有界

(3). 积分的线性性质

$$\iint\limits_D [k_1 f(x,y) + k_2 g(x,y)]\, d\sigma = k_1 \iint\limits_D f(x,y)d\sigma + k_2 \iint\limits_D g(x,y)d\sigma$$

(4). 积分的可加性

设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 内可积, 且 $D_1 \cup D_2 = D, D_1 \cap D_2 = \emptyset$

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$$

(5). 积分的保号性设 $f(x,y), g(x,y)$ 在有界闭区域 D 内可积, 且 $f(x,y) \le g(x,y)$

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le \iint\limits_D g(x,y)d\sigma \Rightarrow |\iint\limits_D f(x,y)d\sigma| = \iint\limits_D |f(x,y)|d\sigma$$

(6). 估值定理

设 M, m 分别是 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 内的最大值和最小值

$$mS_D \le \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le MS_D$$

(7). 中值定理

设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 内连续

$$\exists(\xi,\eta) \in D,\ s.t. \iint\limits_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)S_D$$

2.2 二重积分的对称性

定理 2.2.1 (对称性)

1. 普通对称性

(i). 区域 D 关于 $x = a$ 对称, 我们有:

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma & f(2a-x) = f(x) \\ 0 & f(2a-x) = -f(x) \end{cases}$$

特别的，当 $a=0$ 时，我们有：

$$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma & f(-x)=f(x) \\ 0 & f(-x)=-f(x) \end{cases}$$

(ii). 区域 D 关于 $y=b$ 对称，我们有：

$$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma & f(x,2b-y)=f(x,y) \\ 0 & f(x,2b-y)=-f(x,y) \end{cases}$$

特别的，当 $b=0$ 时，我们有：

$$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma & f(x,-y)=f(x,y) \\ 0 & f(x,-y)=-f(x,y) \end{cases}$$

2. 轮换对称性

区域 D 关于 $x=y$ 对称，我们有：

$$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D} f(y,x)d\sigma = \frac{1}{2}\iint\limits_{D} [f(x,y)+f(y,x)]\,d\sigma$$

$$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma & f(x,y)=f(y,x) \\ 0 & f(x,y)=-f(y,x) \end{cases}$$

3. 区域 D 关于原点对称，我们有：

$$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma = \begin{cases} 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma & f(-x,-y)=f(x,y) \\ 0 & f(-x,-y)=-f(x,y) \end{cases}$$

2.3 二重积分计算

定义 2.3.1 (直角坐标系)

$$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma = \begin{cases} \int_a^b dx \int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)dy \\ \int_a^b dy \int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)dx \end{cases}$$

定义 2.3.2 (极坐标系)

$$\iint\limits_{D} f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D'} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)drd\theta$$

定义 2.3.3 (换元法)

令 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$，是 (x,y) 面到 (u,v) 面的一对一映射，且 $x = x(u,v), y = y(u,v)$ 有一阶连续偏导数

$$J = |\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}| = \left\|\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix}\right\|$$

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_{uv}} f\left[x(u,v), y(u,v)\right] \cdot Jdudv$$

♣

变量替换

$$d\sigma_1 = dudv \qquad d\sigma_2 = |l \times m|$$

$$\begin{cases} x(u,v+dv) - x(u,v) = x'_v dv \\ x(u+du,v) - x(u,v) = x'_u du \\ y(u,v+dv) - y(u,v) = x'_v dv \\ y(u+du,v) - y(u,v) = y'_u du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l = (x'_u du, y'_u du) \\ m = (x'_v dv, y'_v dv) \end{cases}$$

$$d\sigma_2 = (x'_u y'_v - x'_v y'_u) dvdu = \left\|\begin{matrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{matrix}\right\| d\sigma_1$$

Example

例题 2.1.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

证明

$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy$

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \\
&= \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr \\
&= \frac{\pi}{4} \\
I &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}
\end{aligned}
$$

例题 2.2.

$$\int_0^a f(x)dx \int_0^a \frac{1}{f(x)} dx \geq a^2$$

证明

$$I = \int_0^a f(x)dx \int_0^a \frac{1}{f(x)}dx = \iint\limits_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le a}} \frac{f(x)}{f(y)}dxdy$$

$$
\begin{aligned}
2I &= \iint\limits_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le a}} \frac{f(x)}{f(y)}dxdy + \iint\limits_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le a}} \frac{f(y)}{f(x)}dxdy \\
&\geq \iint\limits_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le a}} 2dxdy \\
&= 2a^2 \\
I &\geq a^2
\end{aligned}
$$

第 3 章 常微分方程

内容提要

- 微分方程概念、解和通解
- 一阶微分方程
- 伯努利方程
- (非) 齐次二阶常系数线性微分方程
- 欧拉方程
- 高阶线性微分方程

定义 3.0.1 (微分方程及其阶)

表示未知函数及其导数 (或者微分) 与自变量之间关系的方程称为微分方程, 一般写为:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \text{或} y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$$

微分方程中未知函数的最高阶导数的阶数称为**微分方程的阶**.

定义 3.0.2 (常微分方程)

未知函数是一元函数的微分方程称为**常微分方程**.

定义 3.0.3 (线性微分方程)

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

形如上述的微分方程称为 n 阶**线性微分方程**, 其中 $a_k(x)(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 都是自变量 x 的函数, $a_k(x) \neq 0$, 当 $a_k(x)(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 都是常数时, 又称方程为 n 阶**常系数线性微分方程**; 若右端 $f(x) \equiv 0$, 则称方程为 n 阶**齐次线性微分方程**, 否则称其为 n 阶**非齐次线性微分方程**.

定义 3.0.4 (微分方程的解和通解)

- 若将函数代入微分方程, 使方程成为恒等式, 则该函数称为**微分方程的解**, 微分方程解的图形称为积分曲线
- 若微分方程的解中含有的独立常数的个数等于微分方程的阶数, 则该解称为微分方程的**通解**.

定义 3.0.5 (初始条件和特解)

确定通解中常数的条件就是**初始条件**, 如 $y(x_0)=a_0, y'(x_0)=a_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0)=a_{n-1}$, 其中 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 为 n 个给定的数, 确定通解中的常数后, 解就成为**特解**.

3.1 一阶微分方程

3.1.1 可分离变量型微分方程

3.1.1.1 直接可分离

$$\frac{dy}{dx}=F(x,y)=f(x)g(y)\Rightarrow\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$$

3.1.1.2 换元后可分离

$$\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)\Rightarrow\begin{cases}u=ax+by+c\\ \dfrac{du}{dx}=a+b\dfrac{dy}{dx}\\ \dfrac{du}{dx}=a+bf(u)\end{cases}\Rightarrow\int\frac{du}{a+bf(u)}=\int dx$$

注

- 在换元过程中, 可能会因为定义域问题漏掉某些解, 这些解称为奇解.
- 非线性微分方程的所有解等于通解和奇解的并集; 线性微分方程的所有解等于通解, 没有奇解.

3.1.2 齐次型微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(\frac{y}{x})\Rightarrow\begin{cases}u=\frac{y}{x}\\ \frac{dy}{dx}=\frac{d(ux)}{x}=u+x\frac{du}{dx}\\ u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u)\end{cases}\Rightarrow\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}$$

3.1.3 一阶线性微分方程

定义 3.1.1 (一阶线性微分方程)

$$y'+p(x)y=q(x),p(x)和q(x)是已知的连续函数$$

定理 3.1.1 (一阶线性微分方程解)

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+C\right]$$

注

$$\begin{aligned}&e^{\int p(x)dx}y'+p(x)e^{\int p(x)dx}=q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\\&\left[e^{\int p(x)dx}y\right]'=q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\\&e^{\int p(x)dx}y=\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}+C\\&y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}+C\right]\end{aligned}$$

3.1.4 伯努利方程

定义 3.1.2 (伯努利方程)

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n$$

定理 3.1.2

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}=q(x)\Rightarrow\begin{cases}z=y^{1-n}\\ \frac{dz}{dx}=\frac{1}{1-n}y^{-n}\frac{dy}{dx}\end{cases}\Rightarrow(1-n)\frac{dz}{dx}+p(x)z=q(x)$$

我们可以得到:

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x)\Rightarrow z=e^{-\int(1-n)p(x)dx}\left[e^{\int(1-n)p(x)dx}\cdot q(x)+C\right]$$

3.1.5 二阶可降阶微分方程

定义 3.1.3 (二阶可降阶微分方程)

1. $y''=f(y,y')\Leftrightarrow F(y,y',y'')=0$

我们令: $p=y'$, 则

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p'p\Rightarrow p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$$

2. $y''=f(x,y')\Leftrightarrow F(x,y',y'')=0$

我们令: $p(x)=y'$, 则

$$y''=\frac{dp}{dx}\Rightarrow\frac{dp}{dx}=f(x,p)$$

3.2 高阶线性微分方程

3.2.1 二阶常系数线性微分方程

定义 3.2.1 (二阶常系数线性微分方程)

二阶常系数齐次微分方程:

$$y''+py'+py=0$$

二阶常系数非齐次微分方程:

$$y''+py'+py=f(x)$$

定理 3.2.1 (二阶常系数齐次线性微分方程解)

对于二阶常系数齐次 x 线性微分方程:

特征方程: $\lambda^2+p\lambda+q=0$

- 当方程有两个不同的实数根 λ_1,λ_2, 微分方程通解:

$$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$$

- 当方程有两个相同的实根 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, 微分方程通解:

$$y=C_1+C_2xe^{\lambda x}$$

- 当方程有两个不同的虚根 $\lambda_1=\alpha+i\beta,\lambda_2=\alpha-i\beta$, 微分方程通解:

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

定理 3.2.2 (二阶常系数非齐次线性微分方程解)

对于二阶常系数非齐次线性微分方程:

$$y'' + py' + py = f(x)$$

通解为二阶常系数齐次线性微分方程的通解加上特解: $y_0 = y^* + y$

1. 当 $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ 时, 特解 y^*:

$$y^* = e^{\alpha x} x^k Q_n(x)$$

- 当 α 不是特征方程的根,$k = 0$
- 当 α 是特征方程的一个根,$k = 1$
- 当 α 是特征方程的重根,$k = 2$

2. 当 $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + P_m(x)\sin\beta x)$ 时, 特解 y^*:

$$y^* = e^{\alpha x} x^k (Q_l^{(1)}(x)\cos\beta x + Q_l^{(2)}(x)\sin\beta x), \quad l = max\{m, n\}$$

- 当 $\alpha \pm i\beta$ 不是特征方程的根,$k = 0$
- 当 $\alpha \pm i\beta$ 是特征方程的根,$k = 1$

3.2.2 欧拉方程

定义 3.2.2 (欧拉方程)

形如以下形式的微分方程:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + px\frac{dy}{dx} + qy = f(x)$$

1. 当 $x > 0$ 时, 令 $x = e^t, t = \ln x$; $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

原微分方程可化为:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = f(e^t)$$

2. 当 $x < 0$ 时, 令 $x = -e^t, t = \ln(-x)$; $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

原微分方程可化为:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+p\frac{dy}{dt}+qy=f(-e^t)$$

3.2.3 高阶常系数齐次线性微分方程

定义 3.2.3 (高阶常系数齐次线性微分方程)

$n(n\geq 3)$ 阶常系数齐次线性微分方程称为高阶常系数齐次线性微分方程。

命题 3.2.1 (n 阶常系数线性微分方程解)

特征方程:

$$a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n=0$$

1. r 是单实数根, 通解包含 Ce^{rx}
2. r 是 k 重实数根, 通解包含 $(C_1+C_2x+C_3x^2+\cdots+C_kx^{k-1})e^{rx}$
3. r 是单复根, 通解包括 $e^{rx}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$
4. r 是二重复根, 通解包括 $e^{rx}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x+C_3x\cos\beta x+C_4x\sin\beta x)$

第 4 章 无穷级数

内容提要

- 常数项级数
- 敛散性判别
- 收敛域和收敛半径
- 函数项级数
- 幂级数
- 和函数和函数展开式
- 傅里叶级数

4.1 常数项级数

定义 4.1.1 (级数定义)

给定一个无穷数列 $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$, 将其各项相加得到 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

我们将 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 称为无穷级数, 简称为级数, 其中 u_n 是无穷级数的通项, 如果 u_n 是常数项, 则称为常数项级数; 如果 u_n 是函数, 则称为函数项级数

定义 4.1.2 (级数敛散性)

级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 的敛散性研究:

引入 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$, 我们称 S_n 是无穷级数的部分和, 我们定义:

(1). 当 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$ 时, 我们称级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛.

(2). 当 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \infty$ 或者不存在时, 我们称级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散.

推论 4.1.1

(1). 当 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛时, 我们有: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (必要条件)

(2). 当 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛时, 且这两个级数的和分别为 S, T, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\alpha u_n + \beta v_n)$ 收敛, 且级数和为 $\alpha S + \beta T$

(3). 改变级数任意有限项, 不会改变该级数的敛散性

(4). 收敛级数的任意项加括号所得到的新级数仍收敛, 且其和不变

4.2 敛散性判别

4.2.1 正项级数判别

(1). 定义法

定理 4.2.1 (收敛原则)

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow S_n$ 有界

(2). 比较判别法

定理 4.2.2 (比较判别法)

两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$, 若从某一项起满足 $u_n \le v_n$:

若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 发散

若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛

(3). 比较判别法的极限形式

定理 4.2.3 (比较判别法的极限形式)

两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n (v_n \neq 0)$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = A$

(i). $A = 0$, 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛,$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛

(ii). $0 < A < +\infty$,$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 有相同的敛散性

(iii). $A = +\infty$, 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 发散,$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散

(4). 比值判别法 (达朗贝尔判别法)

定理 4.2.4 (比值判别法)

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

(i). $\rho < 1$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛

(ii). $\rho > 1$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散

(iii). $\rho = 1$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 敛散性不确定

(5). 根值判别法 (柯西判别法)

定理 4.2.5 (根值判别法)

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

(i). $\rho < 1$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛

(ii). $\rho > 1$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散

(iii). $\rho = 1$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 敛散性不确定

(6). 积分判别法

定理 4.2.6 (积分判别法)

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$, 若存在在 $[1, +\infty)$ 上单调减少的非负函数 $f(x)$, 使得 $u_n = f(n)$, 则级数

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 敛散性相同

4.2.2 交错级数判别

定理 4.2.7 (莱布尼茨判别法)

u_n 单调不增且 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛

4.2.3 一般项级数判别

定义 4.2.1

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 是原级数的绝对值级数

(i). 如果 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 收敛, 称其**绝对收敛**

(ii). 如果 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 发散, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 称其**条件收敛**

4.2.4 常见级数敛散性推论

推论 4.2.1

设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} w_n$ 是任意项级数

$$\begin{cases} v_n = \dfrac{u_n + |u_n|}{2} \\ w_n = \dfrac{|u_n| - u_n}{2} \end{cases}$$

(1). a, b, c 是非零常数, 且 $au_n + bv_n + cw_n = 0$, 在 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} w_n$ 中只要有两个级数收敛, 另一个级数必收敛

(2). 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 收敛 $\Rightarrow$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛; 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 发散

(3). 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ 收敛 $\Rightarrow$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{u_n}{n}$ 绝对收敛 $\quad \left|\dfrac{u_n}{n}\right| \le \dfrac{1}{2}(u^2 + \dfrac{1}{n^2})$

(4). 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ 收敛性不确定 $\quad u_n = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$

(5). 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ 收敛性不确定 $\quad u_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

(6). 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$ 收敛性不确定 $\quad u_n = (-1)^n \frac{1}{\ln n}$

(7). 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛; 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{2n}$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{2n-1}$ 收敛性不确定

4.3 函数项级数

定义 4.3.1 (函数项级数)

设函数列 $\{u_n(x)\}$ 定义在区间 I 上, 称

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x) + \ldots$$

为定义在区间 I 上的 **函数项级数**, 记作 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$, 当 x 取确定的值 x_0 时, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 成为常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$

定义 4.3.2 (收敛点和发散点)

(1). 若给定 $x_0 \in I$, 有 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$ 收敛, 则称 $x = x_0$ 是函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的**收敛点**

(2). 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x_0)$ 发散, 则称 $x = x_0$ 是函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的**发散点**

定义 4.3.3 (收敛域)

函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的所有收敛点的集合称为函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 的 **收敛域**

4.3.1 幂级数

定义 4.3.4 (幂级数)

若 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ 的一般项 $u_n(x)$ 是 x 的 n 次幂函数, 则称 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ 为**幂级数**

标准形式:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \dots$$

一般形式:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

其中 $a_n(n = 0, 1, 2\cdots)$ 为**幂级数的系数**

4.3.2 幂级数收敛域

定理 4.3.1 (阿贝尔定理)

阿贝尔定理

当幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_1(x_1 \neq 0)$ 处收敛时, $\forall x < |x_1|$, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 都收敛

当幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_2(x_2 \neq 0)$ 处发散时, $\forall x > |x_2|$, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 都发散

定理 4.3.2 (收敛域和收敛半径)

(1). 不缺项幂级数 (**充分条件**):

$$\lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \rho$$

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, \rho \neq 0 \\ 0, \rho = \infty \\ \infty, \rho = 0 \end{cases}$$

区间 $(-R, R)$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛区间; 幂级数的收敛域为 $(-R, R)$ or $[-R, R]$ or $(-R, R]$ or $[-R, R)$

(2). 缺项幂级数或一般项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$, 利用正项级数判别法中的比值判别法 (**充分条件**):

$$\rho(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} |\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}| < 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n(x)} < 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (a, b)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(a)\text{和} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(b)\text{敛散性}$$

(3). 对级数提出或者乘以因式 $(x-x_0)^k$ 或者平移, 收敛半径不变
(4). 对级数逐项求导, 收敛半径不变, 收敛域可能缩小
(5). 对级数逐项积分, 收敛半径不变, 收敛域可能扩大

4.3.3 幂级数求和函数

定义 4.3.5 (幂级数的和函数)

在幂级数收敛域上, 记 $S(x)$ 是幂级数的和函数:

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$$

定理 4.3.3 (运算法则)

幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 R_a 和 R_b, 且 $R_a\neq R_b$

(i).

$$k\sum_{n=0}^{n}a_nx^n=\sum_{n=0}^{n}ka_nx^n,|x|<R_a$$

(ii).

$$\sum_{n=0}^{n}a_nx^n\pm\sum_{n=0}^{n}b_nx^n=\sum_{n=0}^{n}(a_n\pm b_n)x^n,|x|<\min\{R_a,R_b\}$$

(iii).

$$\sum_{n=0}^{n}a_nx^n\sum_{n=0}^{n}b_nx^n=\sum_{n=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}\right)x^n$$

推论 4.3.1

(i). 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上连续

(ii). 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上可积分, 且有逐项积分公式, 收敛半径不变, 收敛域可能变大

$$\int_0^x S(t)dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n\right)dt=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\int_0^x t^ndt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}(x\in I)$$

(iii). 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 $(-R,R)$ 上可导, 且有逐项求导公式, 收

敛半径不变，收敛域可能变小

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{+\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}(|x|<R)$$

4.3.4 重要展开式

定理 4.3.4

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!},-\infty<x<+\infty$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n,-1<x<1$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^n,-1<x<1$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},-1<x\le 1$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},-\infty<x<+\infty$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^nx^{2n}}{2n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},-\infty<x<+\infty$$

$$\tan x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},-1\le x\le 1$$

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots\\ &= \begin{cases} x\in(-1,1), & \alpha\le -1\\ x\in(-1,1], & -1<\alpha<0\\ x\in[-1,1], & \alpha>0\ \&\ \alpha\notin\mathbb{N}_+\\ x\in(-\infty,+\infty), & \alpha\in\mathbb{N}_+\end{cases}\end{aligned}$$

4.3.5 函数展开成幂级数

定义 4.3.6

泰勒级数: $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处存在任意阶导数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

麦克劳林级数: $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处存在任意阶导数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

4.4 傅里叶级数

定义 4.4.1 (傅里叶级数)

考虑到三角函数是周期函数, 任意一个以 2π 为周期的函数 $f(x)$, 能写成一系列三角函数 $\sin(nx)$ 和 $\cos(nx)$ 的线性组合:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$$

$f(x)$ 三角函数分解被称为傅里叶级数或傅里叶展开, 也被称为三角级数

4.4.1 三角函数集 Γ 的归一正交性

定义 4.4.2 (内积、正交和范数)

考虑 $[-\pi, \pi]$ 上的函数 $f(x)$ 构成的无限维空间, 我们希望用正交的向量组来表示一般的向量 (函数), 我们定义函数内积、正交和范数概念

(1). 内积

$$\forall f, g \in V, (f \cdot g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

(2). 正交

$$\forall f, g \in V, (f \cdot g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = 0 \Rightarrow f \perp g$$

(3). 范数

$$\forall f \in V, \| f \| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

定义 4.4.3 (三角函数集 Γ 的归一正交性)

定义在 $[-\pi,\pi]$ 上的函数空间中存在一系列范数为 1 且正交的向量组, 考虑 $[-\pi,\pi]$ 上的三角函数组

$$\Gamma=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\cdots,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\cdots\right\}$$

$$\forall f\in\Gamma,\parallel f\parallel=1,\forall f,g\in\Gamma,f\cdot g=0\Rightarrow f\perp g$$

不妨设

$$\begin{cases}f_1=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin mx\\ f_2=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\end{cases}\qquad\begin{cases}g_1=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos mx\\ g_2=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\end{cases}$$

$$\begin{cases}\parallel f_1\parallel=\left(\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nxdx\right)^{\frac{1}{2}}=1\\ \parallel g_1\parallel=\left(\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mxdx\right)^{\frac{1}{2}}=1\end{cases}\qquad\begin{cases}f_1\cdot g_1=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos mxdx=0\\ f_1\cdot f_2=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nxdx=0(m\neq n)\\ g_1\cdot g_2=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nxdx=0(m\neq n)\end{cases}$$

♣

4.4.2 周期函数的傅里叶级数

定理 4.4.1 (周期为 2π 函数的傅里叶级数)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$$

三角函数分解, a_n,b_n 是傅里叶级数系数:

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}a_n\cos^2 nxdx\\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}b_n\sin^2 nxdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx\\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx\end{cases}$$

记作: 2π **周期函数** $f(x)$ **的傅里叶级数**

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$$

♡

定理 4.4.2 (周期为 2π 奇偶函数的傅里叶级数)

(1). $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 为奇函数, 傅里叶级数为**正弦级数**:

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin nx\Rightarrow b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

(2). $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 为偶函数, 傅里叶级数为**余弦级数**:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx\Rightarrow a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx dx$$

4.4.3 任意对称区间中的傅里叶展开

定义 4.4.4 (任意对称区间中的傅里叶展开)

设 $f(x)$ 定义域为 $[-l,l]$, 令 $y=\dfrac{x\pi}{l}, y\in[-\pi,\pi]$

$$g(y)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos ny+b_n\sin ny)\Rightarrow f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x)$$

傅里叶系数:

$$\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx, & n=0,1,2,\cdots\\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx, & n=1,2,\cdots\end{cases}$$

4.4.4 周期延拓

定义 4.4.5 (周期延拓)

(1). 周期延拓: $[-\pi,\pi]\to(-\infty,+\infty)$

(2). 奇延拓: $[0,\pi]\to[-\pi,\pi]$ 且 $f(x)$ 为奇函数, 正弦级数

(3). 偶延拓: $[0,\pi]\to[-\pi,\pi]$ 且 $f(x)$ 为偶函数, 余弦级数

4.4.5 逐点收敛性理论

定理 4.4.3 (狄利克雷收敛定理)

$f(x)$ 以 $2l$ 为周期的可积函数, 在 $[-l,l]$ 上 $f(x)$ 满足条件:

(1). 连续或者只有有限个第一类间断点

(2). 至多有有限个极值点

$f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-l,l]$ 上处处收敛, 其和函数 $S(x)$ 满足

$$S(x)=\begin{cases}f(x), & x\text{为连续点}\\ \dfrac{f(x_-)+f(x_+)}{2}, & x\text{为间断点}\\ \dfrac{f(-l_+)+f(l_-)}{2}, & x=\pm l\end{cases}$$

定理 4.4.4 (帕塞瓦尔公式)

$f(x)$ 是 2π 周期函数, $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 有界可积, 傅里叶系数满足:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$$

推论 4.4.1 (常见级数和)

(1). $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=e$

(2). $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

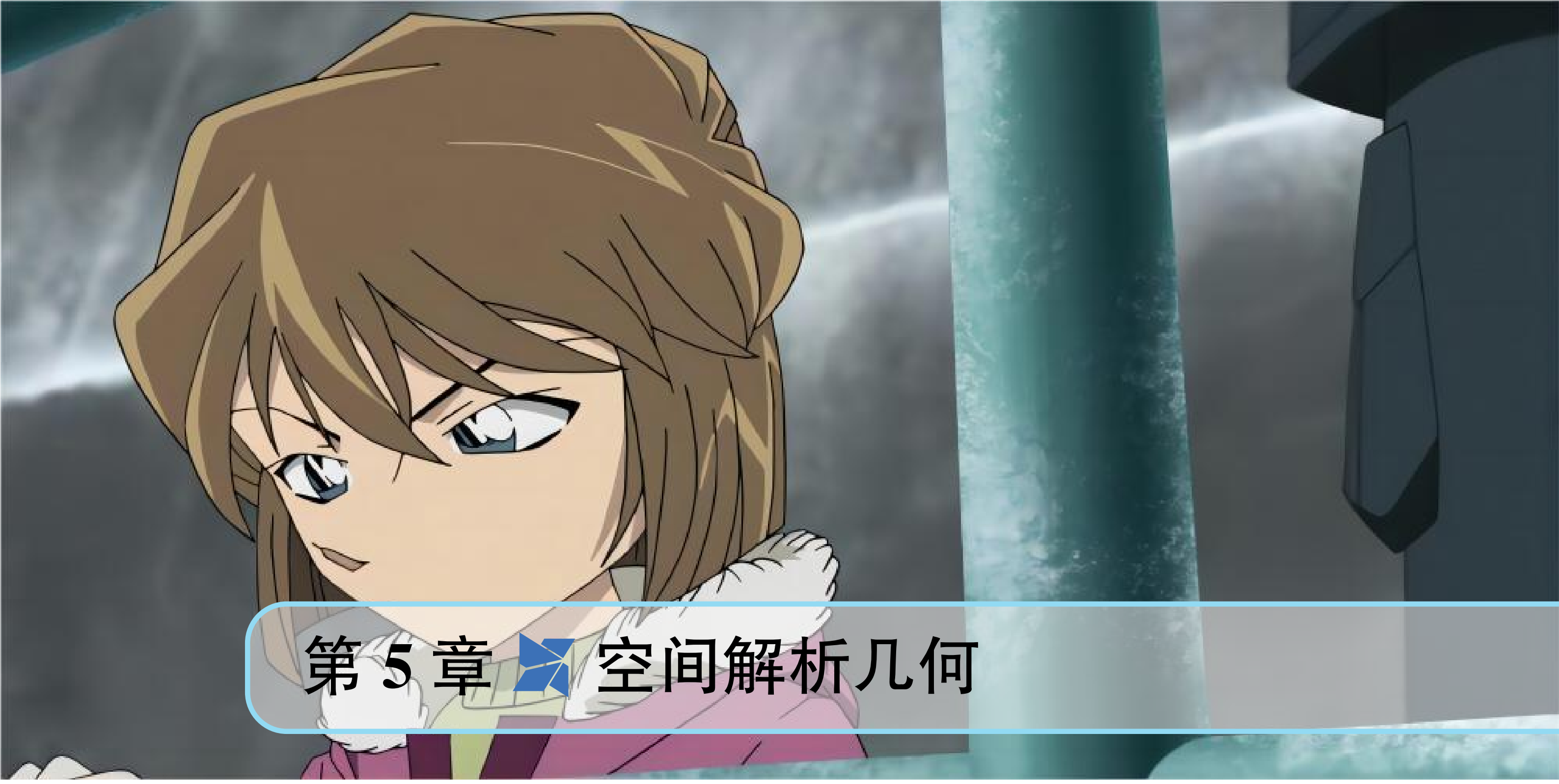
(3). $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}=\ln 2$

(4). $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n}=2$

(5). $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}=\frac{e+e^{-1}}{2}$

(6). $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$

(7). $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n+2}{(2n+1)!}=\sin 1+\cos 1$



第 5 章 空间解析几何

5.1 向量代数

定义 5.1.1 (向量代数)

(1). 方向角: 非零向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 与 x,y,z 轴所成夹角 α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角

(2). 方向余弦: $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦, $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\[2ex]\cos\beta=\dfrac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\[2ex]\cos\gamma=\dfrac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\end{cases}$$

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$

(3). 夹角

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

(4). 投影

$$\mathbf{Prj}_{b}\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

(5). 叉积

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta$$

5.2 空间平面和直线

5.2.1 平面

定义 5.2.1 (平面方程)

假设平面的法向量 $\boldsymbol{n} = (A, B.C)$

(1). 一般式

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

(2). 点法式

$$A(x - x_0) + B(y - y_0 + C(z - z_0) = 0$$

(3). 截距式, 平面过 $(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$ 三点

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

(4). 三点式 $P_i(x_i, y_i, x_i)(i = 1, 2, 3)$ 不共线

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \end{vmatrix} = 0$$

5.2.2 直线

定义 5.2.2 (直线方程)

假设直线的方向向量 $\boldsymbol{\tau} = (l, m, n)$, $P(x_0, y_0, z_0)$ 是直线上的一点

(1). 一般式

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, & \boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, & \boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) \\ \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 \end{cases}$$

(2). 点向式

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

(3). 参数式

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

(4). 两点式

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_2}$$

♣

定理 5.2.1 (位置关系)

(1). 点到直线的距离公式

点 $M(x, y, z)$ 到直线 $L: \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ 的距离

$$d = \frac{|\boldsymbol{\tau} \times \overrightarrow{M_0M}|}{|\boldsymbol{\tau}|} = \frac{\left\| \begin{matrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ l & m & n \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

二维平面:

$$d = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

(2). 点到平面距离公式

点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离, $P(x, y, z)$ 是平面上任意一点

$$d = |\mathbf{Prj}_n\overrightarrow{P_0P}| = \frac{|A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(3). 直线和直线

设 $\boldsymbol{\tau}_1(l_1,m_1,n_1),\boldsymbol{\tau}_2(l_2,m_2,n_2)$ 分别是 L_1,L_2 的方向向量

$$\begin{cases} L_1\perp L_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1\perp\boldsymbol{\tau}_2 \Leftrightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0 \\ L_1\parallel L_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1\parallel\boldsymbol{\tau}_2 \Leftrightarrow \dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2} \end{cases}$$

L_1,L_2 的夹角 $\theta=\arccos\dfrac{|\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2|}{|\boldsymbol{\tau}_1||\boldsymbol{\tau}_2|},\theta\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$

(4). 平面和平面

设 $\boldsymbol{n}_1(A_1,B_1,C_1),\boldsymbol{n}_2(A_2,B_2,C_2)$ 分别是 π_1,π_2 的法向量

$$\begin{cases} \pi_1\perp\pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \\ \pi_1\parallel\pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1\parallel\boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2} \end{cases}$$

π_1,π_2 的夹角 $\theta=\arcsin\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|},\theta\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$

5.3 空间曲面和曲线

定义 5.3.1 (空间曲线)

(1). 一般式

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

(2). 参数方程式

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \\ z=h(t) \end{cases},t\in[\alpha,\beta]$$

(3). 空间曲线在坐标面的投影

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

定义 5.3.2 (空间曲面)

(1). 一般曲面方程

$$F(x, y, z) = 0$$

(2). 二次曲面

(a). 椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

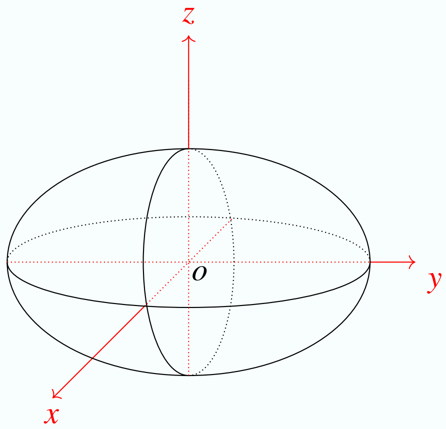


图 5.1: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

(b). 单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

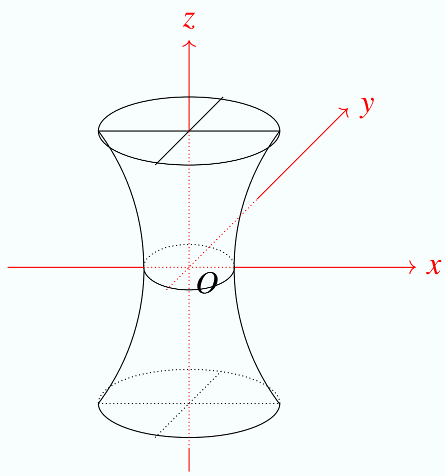


图 5.2: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

(c). 双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

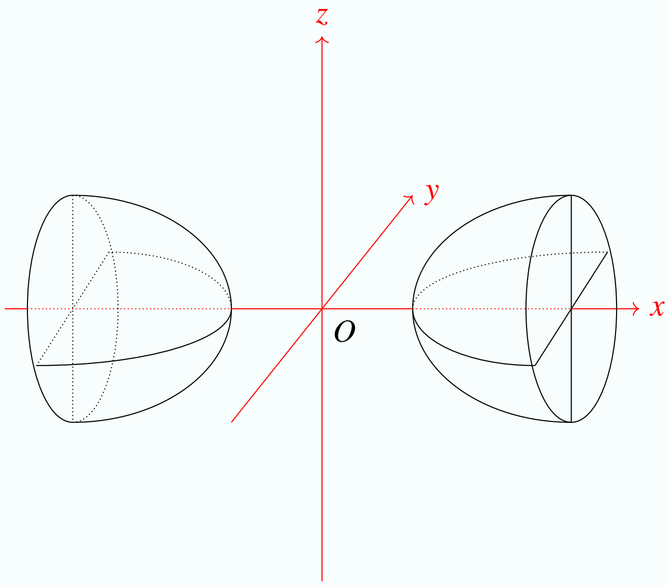


图 5.3: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

(d). 椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z(p,q>0)$

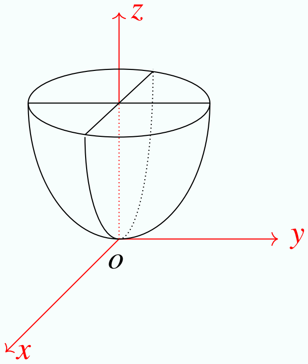


图 5.4: $\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z(p,q>0)$

(f). 椭圆锥面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$

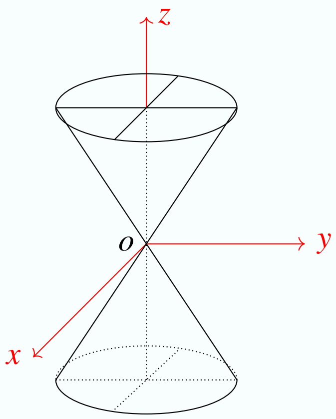


图 5.5: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$

(g). 双曲抛物面 $-\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z(p,q>0)$

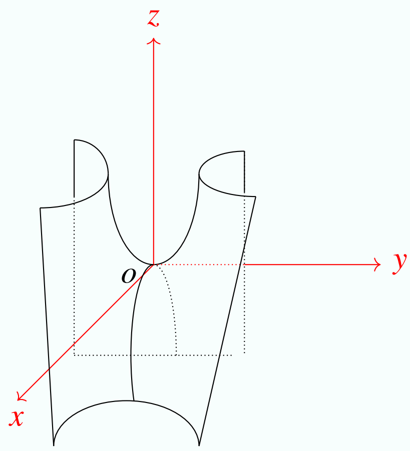


图 5.6: $-\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z(p,q>0)$

(h). 双曲抛物面 $z=xy$

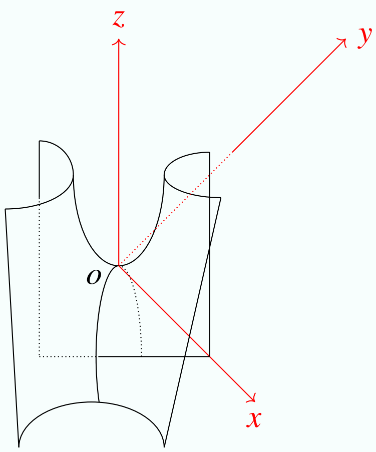


图 5.7: $z=xy$

(i). 椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

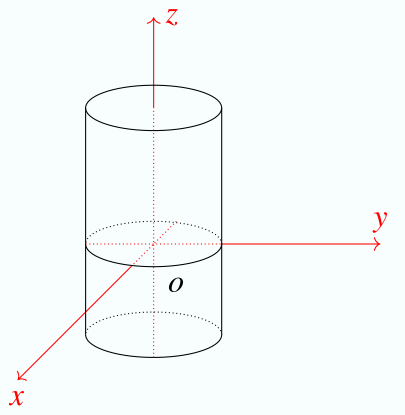


图 5.8: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

(j). 双曲柱面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

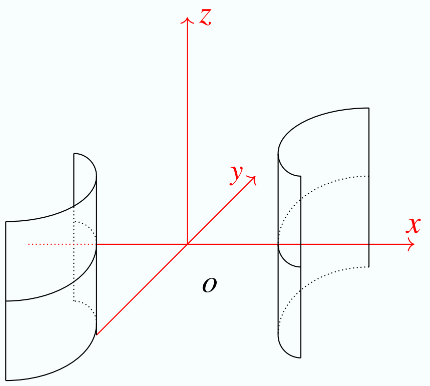


图 5.9: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

(k). 抛物柱面 $y=ax^2$

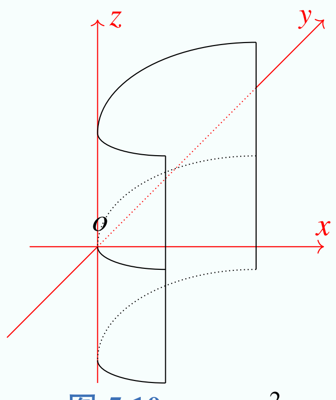


图 5.10: $y=ax^2$

(3). 旋转曲面

曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 绕直线 $L:\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ 旋转一周形成的旋转曲面,

直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{\tau}=(l,m,n)$

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 是曲线 Γ 上任意一点, $P(x,y,z)$ 是 M_1 绕直线 L 旋转一周形成的纬圆上异于 M_1 的一点:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\tau}\perp\overrightarrow{M_1P}\\|\overrightarrow{M_1M_0}|=|\overrightarrow{PM_0}|\\F(x_1,y_1,z_1)=0\\G(x_1,y_1,z_1)=0\end{cases}$$

♣

5.3.1 空间曲线的切线和法平面

定义 5.3.3 (曲线切线和法平面)

(1). 参数方程

$$\begin{cases}x=f(t)\\y=g(t)\\z=h(t)\end{cases},t\in[\alpha,\beta]$$

在 $t=t_0$ 时, 点 $P_0(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$ 处切线的方向向量 $\boldsymbol{n}=(f'(t_0),g'(t_0),h'(t_0))$

切线方程

$$\frac{x-x_0}{f'(t_0)}=\frac{y-y_0}{g'(t_0)}=\frac{z-z_0}{h'(t_0)}$$

法平面方程

$$f'(t_0)(x-x_0)+g'(t_0)(y-y_0)+h'(t_0)(z-z_0)=0$$

(2). 一般式

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$

点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处切线的方向向量

$$\boldsymbol{\tau}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\F'_x&F'_y&F'_z\\G'_x&G'_y&G'_z\end{vmatrix}=(A,B,C)$$

切线方程

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$$

法平面方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

5.3.2 空间曲面的切平面和法线

定义 5.3.4

(1). $F(x,y,z)=0$, 点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处切平面法向量 $\boldsymbol{n}=\{F'_x(x_0,y_0,z_0),F'_y(x_0,y_0,z_0),F'_z(x_0,y_0,z_0)\}$

切平面方程

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$$

(2). $z=f(x,y)$, 点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处切平面法向量 $\boldsymbol{n}=\{f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0),-1\}$

切平面方程

$$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

法线方程

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

5.4 场论初步

5.4.1 方向导数

定义 5.4.1 (方向导数)

设三元函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某空间邻域内 $U\subset R^3$ 有定义,l 是从 P_0 出发的一条射线,$P(x,y,z)$ 为 l 上且在 U 中的任意一点:

$$\begin{cases} x-x_0=\Delta x=t\cos\alpha \\ y-y_0=\Delta y=t\cos\beta \\ z-z_0=\Delta z=t\cos\gamma \end{cases}$$

$t=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$ 表示 $|PP_0|$, 如果下面极限存在:

$$\lim\lim_{t\to 0}\frac{u(P)-u(P_0)}{t}=\lim\lim_{t\to 0}\frac{u(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-u(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

我们将此极限称为 $u=f(x,y,z)$ 在 P_0 处沿着 l 的方向导数, 记作 $\frac{\partial u}{\partial l}|_{P_0}$

定理 5.4.1 (方向导数计算公式)

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}|_{P_0}=u'_x\cos\alpha+u'_y\cos\beta+u'_z\cos\gamma$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦

5.4.2 梯度

定义 5.4.2 (梯度)

设三元函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处具有一阶偏导数, 定义下面为 $u=u(x,y,z)$ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的梯度:

$$\boldsymbol{guad}\ u|_{P_0}=(u'_x(P_0),u'_y(P_0),u'_z(P_0))$$

梯度和方向导数之间的关系:

$$\frac{\partial u}{\partial l}|_{P_0}=\boldsymbol{guad}\ u|_{P_0}\cdot\boldsymbol{l}=\left|\boldsymbol{guad}\ u|_{P_0}\right||l|\cos\theta$$

5.4.3 散度和旋度

定义 5.4.3 (散度和旋度)

设向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$

散度

$$div\ \boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

旋度

$$rot\ \boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

♣

第 6 章 三重积分

6.1 三重积分定义和性质

定义 6.1.1 (三重积分)

设 $f(x,y,z)$ 是空间有界闭区域 Ω 上的有界函数, 将 Ω 任意分为 n 个小闭区域

$$\Delta v_1, \Delta v_2, \cdots, \Delta v_n$$

其中 Δv_i 表示第 i 个小闭区域, 也表示第 i 个小闭区域的体积, 在每一个 Δv_i 中任意取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i), 作乘积 $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i (i = 1,2,\cdots,n)$, 并求和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$, 如果当 $\lim\limits_{n\to+\infty}\{\lambda|\lambda = \max\{\Delta v_i\text{的直径}, i = 1,2,\cdots,n\}\} = 0$ 时, 求和的极限总是存在, 与 Δv_i 的分法以及点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 的选取无关, 称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上的三重积分, 记作 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$$

其中 $f(x,y,z)$ 称为被积函数, Ω 称为积分区域, $f(x,y,z)dv$ 称为被积表达式, dv 称为体积微元, x,y,z 称为积分变量, $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$ 称为积分和

物理意义

设一物体占有 $Oxyz$ 上闭区域 Ω, 在点 (x,y,z) 处的密度为 $\rho(x,y,z)$, 假定 $\rho(x,y,z)$ 在 Ω 上连续, 物体质量 $M = \iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)dv$

推论 6.1.1

(1). 当 $f(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上连续时, 三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$ 一定存在; 当 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上可积, $f(x,y,z)$ 在 Ω 上必有界

(2). $\iint\limits_{\Omega} 1dv = \iiint\limits_{\Omega} dv = V$, V 是 Ω 的体积

(3). 积分线性性质

$$\iiint\limits_{\Omega} [k_1 f(x,y,z) \pm k_2 g(x,y,z)]\,dv = k_1 \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv \pm k_2 \iiint\limits_{\Omega} g(x,y,z)dv$$

(4). 积分的可加性

设 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上可积, 且 $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset, \Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv + \iiint\limits_{\Omega_2} f(x,y,z)dv$$

(5). 积分保号性

设 $f(x,y,z)$ 和 $g(x,y,z)$ 在 Ω 上可积, 且在 Ω 上, $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv \le \iiint\limits_{\Omega} g(x,y,z)dv \Rightarrow \left| \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv \right| \le \iiint\limits_{\Omega} \left| f(x,y,z) \right| dv$$

(6). 估值定理

设 M, m 分别是 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上的最大值和最小值, V 是 Ω 的体积

$$mV \le \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv \le MV$$

(7). 中值定理

设 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上连续, V 是 Ω 的体积

$$\exists(\xi,\eta,\zeta) \in \Omega,\ s.t. \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = f(\xi,\eta,\zeta)V$$

6.2 三重积分对称性

定义 6.2.1 (普通对称性)

(1). Ω 关于平面 xoz 对称

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \begin{cases} 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv & f(x,y,z)=f(x,-y,z) \\ 0 & f(x,y,z)=-f(x,-y,z) \end{cases}$$

(2). Ω 关于平面 yoz 对称

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \begin{cases} 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv & f(x,y,z)=f(-x,y,z) \\ 0 & f(x,y,z)=-f(-x,y,z) \end{cases}$$

(3). Ω 关于平面 xoy 对称

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \begin{cases} 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv & f(x,y,z)=f(x,y,-z) \\ 0 & f(x,y,z)=-f(x,y,-z) \end{cases}$$

♣

定义 6.2.2 (轮换对称性)

若将 x,y,z 任意两个交换位置后, 积分区域 Ω 保持不变

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x)dv = \iiint\limits_{\Omega} f(y)dv = \iiint\limits_{\Omega} f(z)dv$$

♣

6.3 三重积分计算方法

定义 6.3.1 (直角坐标系)

(1). 先一后二

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iint\limits_{D_{xy}} d\sigma \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

一般用于空间区域 Ω 无侧面或者侧面为柱面, 转化为二重积分, 积分区域为空间区域 Ω 在 $xoy(yoz,xoz)$ 平面的投影

(2). 先二后一

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \int_a^b dz \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)d\sigma$$

适用于旋转体, 旋转曲面方程 $z=z(x,y)$

♣

定义 6.3.2 (换元法)

令 $\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$，且 $(x,y,z) \to (u,v,w)$ 是一一映射, $x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$ 有一阶连续偏导数

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \left\|\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{matrix}\right\| \neq 0$$

$$\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_{uvw}} f\left[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right]\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

♣

定义 6.3.3 (柱面坐标系)

令 $\begin{cases} x = r\cos\theta, & \theta \in [0,2\pi] \\ y = r\sin\theta, & \theta \in [0,2\pi] \\ z = z \end{cases}$，且 $(x,y,z) \to (r,\theta,z)$ 是一一映射, $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$ 有一阶连续偏导数

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = \left\|\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| = r$$

$$\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{\Omega_{r\theta z}} drd\theta \int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} rf(r\cos\theta, r\sin\theta, z)dz$$

♣

定义 6.3.4 (球面坐标系)

令 $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, & \theta \in [0,2\pi] \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, & \theta \in [0,2\pi] \\ z = r\cos\varphi, & \varphi \in [0,\pi] \end{cases}$，且 $(x,y,z) \to (r,\theta,\varphi)$ 是一一映射, $x = r\sin\varphi\cos\theta, y = r\sin\varphi\sin\theta, z = r\cos\varphi$ 有一阶连续偏导数

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right| = \left\|\begin{matrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi}\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\sin\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi\cos\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta\\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi\end{matrix}\right\| = r^2\sin\varphi$$

$$\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_{r\varphi\theta}} r^2\sin\varphi f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)drd\theta d\varphi$$

6.4 三重积分应用

定理 6.4.1 (重心公式)

对于空间物体, 体密度 $\rho(x,y,z)$, Ω 是物体所占的空间区域, 重心 $O(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$

$$\begin{cases}\overline{x} = \dfrac{\iiint\limits_{\Omega} x\rho(x,y,z)dv}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)dv}\\ \overline{y} = \dfrac{\iiint\limits_{\Omega} y\rho(x,y,z)dv}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)dv}\\ \overline{z} = \dfrac{\iiint\limits_{\Omega} z\rho(x,y,z)dv}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)dv}\end{cases}$$

当密度函数为 $\rho(x,y,z)$ 为常数, 重心就是形心

$$\begin{cases}\overline{x} = \dfrac{\iiint\limits_{\Omega} xdv}{\iiint\limits_{\Omega} dv}\\ \overline{y} = \dfrac{\iiint\limits_{\Omega} ydv}{\iiint\limits_{\Omega} dv}\\ \overline{z} = \dfrac{\iiint\limits_{\Omega} zdv}{\iiint\limits_{\Omega} dv}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\iiint\limits_{\Omega} xdv = \overline{x}\cdot V\\ \iiint\limits_{\Omega} ydv = \overline{y}\cdot V\\ \iiint\limits_{\Omega} zdv = \overline{z}\cdot V\end{cases}$$

定理 6.4.2 (转动惯量 $I = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i r_i^2$)

对于空间物体, 体密度 $\rho(x,y,z)$, Ω 是物体所占的空间区域

(1). x 轴

$$I_x = \iint\limits_{\Omega} (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dv$$

(2). y 轴

$$I_y = \iint\limits_{\Omega} (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)dv$$

(3). z 轴

$$I_z = \iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dv$$

(4). 原点 O

$$I_O = \iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dv$$

定理 6.4.3 (万有引力 $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$)

对于空间物体, 体密度 $\rho(x, y, z)$, Ω 是物体所占的空间区域, 计算该物体对物体外一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处质量为 m 的质点的引力 $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$

$$\begin{aligned}
F_x &= Gm \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \cos\alpha dv \\
&= Gm \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)(x - x_0)}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\
F_y &= Gm \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{(y - y_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \cos\beta dv \\
&= Gm \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)(y - y_0)}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \\
F_z &= Gm \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{(z - z_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \cos\gamma dv \\
&= Gm \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)(z - z_0)}{\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

第 7 章 第一型曲线和曲面积分

7.1 第一型曲线积分

7.1.1 第一型曲线积分定义和性质

定义 7.1.1 (第一型曲线积分)

设 L 是 xoy 平面内一条光滑曲线弧, 函数 $f(x,y)$ 在 L 上有界, 在 L 上任意插入一系列的点 $M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}$ 将 L 分成 n 小段, 设第 i 段的弧长为 Δs_i, 在第 i 段上任意取一点 (ζ_i, η_i), 作乘积 $f(\zeta_i, \eta_i)\Delta s_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 并求和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\zeta_i, \eta_i)\Delta s_i$, 当 $\lim\limits_{n\to+\infty} \{\lambda|\lambda = \max\{\Delta s_i\}, i = 1, 2, \cdots, n\} = 0$ 时, 求和极限存在, 且与 Δs_i 的分法以及 (ζ_i, η_i) 的取法无关, 称此极限为函数 $f(x,y)$ 在曲线 L 上对弧长的曲线积分或第一型曲线积分, 记作 $\int_L f(x,y)ds$

$$\int_L f(x,y)ds = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i, \eta_i)\Delta s_i$$

其中 $f(x,y)$ 称为被积函数, $f(x,y)ds$ 称为被积表达式, x, y 是积分变量, L 是积分弧

对于函数 $f(x,y,z)$ 在空间曲线 Γ 上的第一型曲线积分

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i$$

物理意义

1. 设一物体在 xoy 平面内一光滑曲线弧 L 上, 物体在 L 上的线密度为 $\rho(x,y)$, 则物体的质量 $m = \int_L \rho(x,y)ds$
2. 设一物体在空间曲线 Γ 上, 物体在 Γ 上的线密度为 $\rho(x,y,z)$, 则物体的质量 $m = \int_\Gamma \rho(x,y,z)ds$

推论 7.1.1

(1). $\int_\Gamma ds = l_\Gamma$, 其中 l_Γ 是 Γ 的长度

(2). 设 $f(x,y,z)$ 在 Γ 上可积, 其在 Γ 上必有界

(3). 积分线性性质

$$\int_\Gamma [k_1 f(x,y,z) + k_2 g(x,y,z)]\, ds = k_1 \int_\Gamma f(x,y,z)ds + k_2 \int_\Gamma g(x,y,z)ds$$

(4). 积分可加性

设 $f(x,y,z)$ 在 Γ 上可积, 且 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset, \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds = \int_{\Gamma_1} f(x,y,z)ds + \int_{\Gamma_2} f(x,y,z)ds$$

(5). 积分保号性

设 $f(x,y,z), g(x,y,z)$ 在 Γ 上可积, 且在 Γ 上 $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds \le \int_\Gamma g(x,y,z)ds \Rightarrow \left|\int_\Gamma f(x,y,z)ds\right| \le \int_\Gamma |f(x,y,z)|ds$$

(6). 估值定理设 M, m 分别是 $f(x,y,z)$ 在 Γ 上的最大值和最小值, l_Γ 的长度

$$ml_\Gamma \le \int_\Gamma f(x,y,z)ds \le Ml_\Gamma$$

(7). 中值定理

设 $f(x,y,z)$ 在 Γ 上连续, l_Γ 是 Γ 的长度

$$\exists(\xi,\eta,\zeta) \in \Gamma,\ s.t.\ \int_\Gamma f(x,y,z)ds = f(\xi,\eta,\zeta)l_\Gamma$$

♠

7.1.2 第一型曲线积分的对称性

定义 7.1.2 (普通对称性)

(1). Γ 关于平面 xoz 对称

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds = \begin{cases} 2\int_{\Gamma_1} f(x,y,z)ds & f(x,y,z) = f(x,-y,z) \\ 0 & f(x,y,z) = -f(x,-y,z) \end{cases}$$

(2). Γ 关于平面 yoz 对称

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds = \begin{cases} 2\int_{\Gamma_1} f(x,y,z)ds & f(x,y,z) = f(-x,y,z) \\ 0 & f(x,y,z) = -f(-x,y,z) \end{cases}$$

(3). Γ 关于平面 xoy 对称

$$\int_{\Gamma} f(x,y,z)ds = \begin{cases} 2\int_{\Gamma_1} f(x,y,z)ds & f(x,y,z)=f(x,y,-z) \\ 0 & f(x,y,z)=-f(x,y,-z) \end{cases}$$

定义 7.1.3 (轮换对称性)

若将 x, y, z 任意两个交换位置后，积分区域 Γ 保持不变

$$\int_{\Gamma} f(x)ds = \int_{\Gamma} f(y)ds = \int_{\Gamma} f(z)ds$$

7.1.3 第一型曲线积分计算

定理 7.1.1 (平面曲线)

(1). $L: y=f(x), x\in[a,b]$

$$\int_L f(x,y)ds = \int_a^b f(x,y)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$$

(2). $L: \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} \quad t\in[\alpha,\beta]$

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f\left[x(t),y(t)\right]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$$

(3). $L: r=r(\theta), \theta\in[\theta_1,\theta_2]$

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}d\theta$$

定理 7.1.2 (空间曲线)

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \quad t\in[\alpha,\beta] \Rightarrow ds=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}dt$$

$$\int_{\Gamma} f(x,y,z)ds = \int_{\alpha}^{\beta} f\left[x(t),y(t),z(t)\right]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}dt$$

7.2 第一型曲面积分

7.2.1 第一型曲面积分定义和性质

定义 7.2.1 (第一型曲面积分)

设曲面 Σ 是光滑的, 函数 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上有界, 将 Σ 任意分为 n 个小块 $\Delta\Sigma_i, \Delta S_i$ 表示曲面 $\Delta\Sigma_i$ 的面积, 在 $\Delta\Sigma_i$ 上任意取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i), 作乘积 $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i(i=1,2,\cdots,n)$, 并求和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)S_i$, 当 $\lim\limits_{n\to+\infty}\{\lambda|\lambda=\max\{S_i\},i=1,2,\cdots,n\}=0$ 时, 极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$ 存在, 且与 $\Delta\Sigma_i$ 的分法和 (ξ_i,η_i,ζ_i) 的取法无关, 称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上对面积的曲面积分或第一型曲面积分, 记作 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS$

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

其中 $f(x,y,z)$ 称为被积函数, $f(x,y,z)dS$ 称为被积表达式, x,y,z 是积分变量, Σ 是积分曲面

物理意义

设一曲面物体 Σ, 曲面密度为 $\rho(x,y,z)$, 则物体的质量 $m=\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)dS$

推论 7.2.1

(1). $\int_{\Sigma} dS=S$, 其中 S 是 Σ 的面积

(2). 设 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上可积, 其在 Σ 上必有界

(3). 积分线性性质

$$\iint\limits_{\Sigma}[k_1 f(x,y,z)+k_2 g(x,y,z)]\,dS=k_1\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS+k_2\iint\limits_{\Sigma} g(x,y,z)dS$$

(4). 积分可加性

设 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上可积, 且 $\Sigma_1\cap\Sigma_2=\emptyset,\Sigma_1\cup\Sigma_2=\Sigma$

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS+\iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)dS$$

(5). 积分保号性

设 $f(x,y,z),g(x,y,z)$ 在 Σ 上可积, 且在 Σ 上 $f(x,y,z)\le g(x,y,z)$

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS\le\iint\limits_{\Sigma} g(x,y,z)dS\Rightarrow\left|\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS\right|\le\iint\limits_{\Sigma}\left|f(x,y,z)\right|dS$$

(6). 估值定理

设 M, m 分别是 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上的最大值和最小值, S_Σ 表示 Σ 的面积

$$mS_\Sigma \le \iint\limits_\Sigma f(x,y,z)dS \le MS_\Sigma$$

(7). 中值定理

设 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续, S_Σ 是 Σ 的面积

$$\exists(\xi,\eta,\zeta)\in\Sigma,\ s.t.\ \iint\limits_\Sigma f(x,y,z)dS = f(\xi,\eta,\zeta)S_\Sigma$$

7.2.2 第一型曲面积分的对称性

定义 7.2.2 (普通对称性)

(1). Σ 关于平面 xoz 对称

$$\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)dS = \begin{cases} 2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS & f(x,y,z)=f(x,-y,z) \\ 0 & f(x,y,z)=-f(x,-y,z) \end{cases}$$

(2). Σ 关于平面 yoz 对称

$$\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)dS = \begin{cases} 2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS & f(x,y,z)=f(-x,y,z) \\ 0 & f(x,y,z)=-f(-x,y,z) \end{cases}$$

(3). Σ 关于平面 xoy 对称

$$\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)dS = \begin{cases} 2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS & f(x,y,z)=f(x,y,-z) \\ 0 & f(x,y,z)=-f(x,y,-z) \end{cases}$$

定义 7.2.3 (轮换对称性)

若将 x,y,z 任意两个交换位置后, 积分区域 Σ 保持不变

$$\iint\limits_\Sigma f(x)dS = \iint\limits_\Sigma f(y)dS = \iint\limits_\Sigma f(z)dS$$

7.2.3 第一型曲面积分计算

定理 7.2.1 (投影法)

1. 曲面投影 xoy 平面

设曲面 Σ 的方程为 $z=z(x,y)$, 则 Σ 的面积元素 $dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{D} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$$

2. 曲面投影 yoz 平面

设曲面 Σ 的方程为 $x=x(y,z)$, 则 Σ 的面积元素 $dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}dydz$

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{D} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}dydz$$

3. 曲面投影 xoz 平面

设曲面 Σ 的方程为 $y=y(x,z)$, 则 Σ 的面积元素 $dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}dxdz$

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{D} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}dxdz$$

7.3 第一型曲线积分和曲面积分应用

1. 曲线长度和曲面面积

定理 7.3.1 (曲线弧长和曲面面积)

$$L_\Gamma=\int_\Gamma ds$$

$$S_\Sigma=\iint\limits_{\Sigma} dS$$

2. 重心

定理 7.3.2 (重心公式)

(1). 光滑曲线, 对于光滑曲线 Γ, 线密度 $\rho(x,y,z)$, 重心 $O(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{\int_\Gamma x\rho(x,y,z)ds}{\int_\Gamma \rho(x,y,z)ds} \\ \overline{y} = \dfrac{\int_\Gamma y\rho(x,y,z)ds}{\int_\Gamma \rho(x,y,z)ds} \\ \overline{z} = \dfrac{\int_\Gamma z\rho(x,y,z)ds}{\int_\Gamma \rho(x,y,z)ds} \end{cases}$$

当密度函数为 $\rho(x,y,z)$ 为常数, 重心就是形心

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{\int_\Gamma xds}{\int_\Gamma ds} \\ \overline{y} = \dfrac{\int_\Gamma yds}{\int_\Gamma ds} \\ \overline{z} = \dfrac{\int_\Gamma zds}{\int_\Gamma ds} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_\Gamma xds = \overline{x}\cdot l_\Gamma \\ \int_\Gamma yds = \overline{y}\cdot l_\Gamma \\ \int_\Gamma zds = \overline{z}\cdot l_\Gamma \end{cases}$$

(2). 光滑曲面, 对于光滑曲面 Σ, 曲面密度 $\rho(x,y,z)$, 重心 $O(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{\int_\Sigma x\rho(x,y,z)dS}{\int_\Sigma \rho(x,y,z)dS} \\ \overline{y} = \dfrac{\int_\Sigma y\rho(x,y,z)dS}{\int_\Sigma \rho(x,y,z)dS} \\ \overline{z} = \dfrac{\int_\Sigma z\rho(x,y,z)dS}{\int_\Sigma \rho(x,y,z)dS} \end{cases}$$

当密度函数为 $\rho(x,y,z)$ 为常数, 重心就是形心

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{\int_\Sigma xdS}{\int_\Sigma dS} \\ \overline{y} = \dfrac{\int_\Sigma ydS}{\int_\Sigma dS} \\ \overline{z} = \dfrac{\int_\Sigma zdS}{\int_\Sigma dS} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_\Sigma xdS = \overline{x}\cdot S_\Sigma \\ \int_\Sigma ydS = \overline{y}\cdot S_\Sigma \\ \int_\Sigma zdS = \overline{z}\cdot S_\Sigma \end{cases}$$

3. 转动惯量

定义 7.3.1 (转动惯量: $I = mr^2$)

(1). 光滑曲线, 对于光滑曲线 Γ, 线密度 $\rho(x,y,z)$

对 x 轴: $I_x = \int\limits_L (y^2+z^2)\rho(x,y,z)ds$

对 y 轴: $I_y = \int\limits_L (x^2+z^2)\rho(x,y,z)ds$

对 z 轴: $I_z = \int\limits_L (x^2+y^2)\rho(x,y,z)ds$

对坐标原点 O: $I_O = \int\limits_L (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)ds$

(2). 光滑曲面, 对于光滑曲线 Σ, 面密度 $\rho(x,y,z)$

对 x 轴: $I_x = \iint\limits_\Sigma (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dS$

对 y 轴: $I_y = \iint\limits_\Sigma (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dS$

对 z 轴: $I_z = \iint\limits_\Sigma (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dS$

对坐标原点 O: $I_O = \iint\limits_\Sigma (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)dS$

4. 万有引力

定义 7.3.2 (引力公式: $F = \dfrac{GMm}{r^2}$)

(1). 光滑曲线, 对于光滑曲线 Γ, 线密度 $\rho(x,y,z)$

$$F_x = Gm\int\limits_\Gamma \frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}ds$$

$$F_y = Gm\int\limits_\Gamma \frac{\rho(x,y,z)(y-y_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}ds$$

$$F_z = Gm\int\limits_\Gamma \frac{\rho(x,y,z)(z-z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}ds$$

(2). 光滑曲面, 对于光滑曲面 Σ, 面密度 $\rho(x,y,z)$

$$F_x = Gm\iint\limits_\Sigma \frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}dS$$

$$F_y = Gm\iint\limits_\Sigma \frac{\rho(x,y,z)(y-y_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}dS$$

$$F_z = Gm\iint\limits_\Sigma \frac{\rho(x,y,z)(z-z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}dS$$

第 8 章 第二型曲线和曲面积分

8.1 第二型曲线积分

8.1.1 第二型曲线积分定义和性质

定义 8.1.1 (第二型曲线积分)

在变力场中, $\boldsymbol{F} = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$ 沿着曲线 L 从 A 点到 B 点的做功

二维平面

$$W = \int_L \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

三维空间

$$W = \int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_\Gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

♣

推论 8.1.1

(1). 线性性质

$$\int_\Gamma (k_1\boldsymbol{F_1} \pm \boldsymbol{F_2})d\boldsymbol{s} = k_1\int_\Gamma \boldsymbol{F_1}d\boldsymbol{s} + k_2\int_\Gamma \boldsymbol{F_2}d\boldsymbol{s}$$

(2). 积分有向性

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{F}d\boldsymbol{s} = -\int_{\overset{\frown}{BA}} \boldsymbol{F}d\boldsymbol{s}$$

(3). 积分可加性

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{F}d\boldsymbol{s} = \int_{\overset{\frown}{AC}} \boldsymbol{F}d\boldsymbol{s} + \int_{\overset{\frown}{CB}} \boldsymbol{F}d\boldsymbol{s}$$

♠

8.1.2 第二型曲线积分计算

8.1.2.1 参数方程转定积分

定理 8.1.1

1. 二维平面

$$L = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$$

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]dt$$

2. 三维空间

$$\Gamma = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$$

$$\begin{aligned} \int_\Gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz &= \int_\alpha^\beta P(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt \\ &+ Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)dt \\ &+ R(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt \end{aligned}$$

8.1.2.2 格林公式

定理 8.1.2 (格林公式)

设平面有界区域 D 由光滑曲线 L 围成, L 取正向 (左手在内侧), $P(x,y), Q(x,y)$ 在 D 上有一阶连续偏导数

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

- L 是非封闭区域, 且在区域 D 内满足 $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, 补线使其成为封闭区域
- L 是封闭区域, 且在区域 D 内有奇点, 且除奇点之外满足 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$$\oint_L Pdx + Qdy = \oint_{L_1} Pdx + Qdy$$

- 平面曲线积分与路径无关 $\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Leftrightarrow u = Pdx + Qdy$

8.1.2.3 斯托克斯公式

定理 8.1.3 (斯托克斯公式)

设 Ω 是某空间区域, Σ 是 Ω 内分片光滑有向曲面, Γ 是 Σ 的边界, 方向和 Σ 法向量成右手系, 函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在 Ω 内有连续的一阶偏导数

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dxdz & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

8.2 第二型曲面积分

8.2.1 第二型曲面积分定义和性质

定义 8.2.1 (第二型曲线积分)

在向量场场中, 存在向量函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ 是向量场中某一有向光滑曲面, $\boldsymbol{n}$ 是 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的单位法向量, $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{\Sigma}$ 上的通量

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dS = \iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dydz$$

推论 8.2.1

(1). 线性性质

$$\iint_{\Sigma} (k_1 \boldsymbol{F_1} \pm \boldsymbol{F_2}) d\boldsymbol{S} = k_1 \iint_{\Sigma} \boldsymbol{F_1} d\boldsymbol{S} + k_2 \iint_{\Sigma} \boldsymbol{F_2} d\boldsymbol{S}$$

(2). 积分有向性

$$\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{S} = -\iint_{\Sigma^-} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{S}$$

(3). 积分可加性

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{S} = \iint_{\Sigma_1} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{S} + \iint_{\Sigma_2} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{S}$$

8.2.2 第二型曲面积分计算

8.2.2.1 投影转二重积分

- $$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dydz$$
- 每一项的符号由 $\boldsymbol{n}$ 的方向决定

$$\begin{cases} cos\alpha > 0 \to dydz \\ cos\beta > 0 \to dxdz \\ cos\gamma > 0 \to dxdy \end{cases}$$

8.2.2.2 高斯公式

定理 8.2.1 (高斯公式) 设空间有界闭区域 Ω 由分片光滑封闭曲面 Σ 围成，Σ 取外侧，函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在 Ω 内有连续的一阶偏导数

$$\iint\limits_{\Omega} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy = \iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv$$