线性方程组

具体型方程组

齐次方程组

• 方程组

$$\left\{egin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=0\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=0\ \cdots\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n&=0 \end{aligned}
ight.$$

称为m个方程,n个未知数的齐次方程组

• 向量形式:

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \dots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = 0$$

其中

$$oldsymbol{lpha}_i = egin{bmatrix} a_{1j} \ a_{2j} \ dots \ a_{mj} \end{bmatrix} (j=1,2,\cdots,n)$$

• 矩阵形式

$$A_{m \times n}X = 0$$

$$A = egin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \ dots & dots & \ddots & dots \ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = egin{bmatrix} x_1 \ x_2 \ dots \ x_n \end{bmatrix}$$

- 1. 当 r(A)=n 时, $(oldsymbol{lpha}_1,oldsymbol{lpha}_2,\cdots,oldsymbol{lpha}_n)$ 线性无关, 方程组只有零解
- 2. 当 r(A)=r< n 时, $(mlpha_1,mlpha_2,\cdots,mlpha_n)$ 线性相关,方程组有非零解,且有n-r 个线性无关解

基础解系和通解

基础解系

- 设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 满足:
 - \circ $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是方程组的解
 - 。 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关
 - \circ 方程组 AX=0 任意一个解均可以由 $oldsymbol{\xi}_1,oldsymbol{\xi}_2,\cdots,oldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表出
- $oldsymbol{\xi}_1, oldsymbol{\xi}_2, \cdots, oldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是方程组 AX=0 的基础解系

通解

・ 设 $m \xi_1,m \xi_2,\cdots,m \xi_{n-r}$ 为方程组AX=0的基础解系,则 $k_1m \xi_1+k_2m \xi_2+\cdots+k_{n-r}m \xi_{n-r}$ 是方程组AX=0的通解,其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}\in\mathbb R$

非齐次方程组

• 方程组

$$egin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\ \cdots\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

称为m个方程,n个未知数的非齐次方程组

• 向量形式:

$$x_1oldsymbol{lpha}_1+x_2oldsymbol{lpha}_2+\cdots+x_noldsymbol{lpha}_n=oldsymbol{eta}$$

其中:

$$oldsymbol{lpha}_i = egin{bmatrix} a_{1j} \ a_{2j} \ dots \ a_{mj} \end{bmatrix}, oldsymbol{eta} = egin{bmatrix} b_{1j} \ b_{2j} \ dots \ b_{mj} \end{bmatrix} (j=1,2,\cdots,n)$$

• 矩阵形式:

$$A_{m imes n} X = oldsymbol{eta}$$

$$A = egin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \ dots & dots & \ddots & dots \ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = egin{bmatrix} x_1 \ x_2 \ dots \ x_n \end{bmatrix}$$

$$egin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{1j} \ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{2j} \ dots & dots & \ddots & dots \ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_{mj} \end{bmatrix}$$

记作为矩阵 A 的增广矩阵, 简记为 A $oldsymbol{eta}$

- 1. $r(A)
 eq r([A,oldsymbol{eta}])$,方程组无解
 - 。 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出
- 2. $r(A) = r([A,oldsymbol{eta}]) = n$, 方程组有唯一解
 - \circ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关,
 - \circ β , α_1 , α_2 , \cdots , α_n 线性相关
- 3. $r(A) = r([A,oldsymbol{eta}]) < n$, 方程组有无穷多组解

特解和通解

特解

• η 是非齐次性方程组 $AX = \beta$ 的一个特解

通解

• 设 $k_1m{\xi}_1+k_2m{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}m{\xi}_{n-r}$ 是方程组 AX=0 的通解, 其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}\in\mathbb{R}$,非齐次性方程组的通解: $k_1m{\xi}_1+k_2m{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}m{\xi}_{n-r}+m{\eta}$

两个方程组公共解

- 齐次性线性方程组 $A_{m imes n}X=0$ 和 $B_{m imes n}X=0$ 的公共解是满足方程组 $egin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}X=0$
- 非齐次性性线性方程组 $A_{m imes n}X=lpha$ 和 $B_{m imes n}X=eta$ 的公共解是满足方程组 $egin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}X=egin{bmatrix}m{lpha}\\m{eta}\end{bmatrix}$
- 给出方程组 $A_{m imes n}X=0$ 的通解 $k_1m{\xi}_1+k_2m{\xi}_2+\cdots+k_sm{\xi}_s$,代入第二个方程组 $B_{m imes n}X=0$ 得到 $k_i(i=1,2,\cdots,s)$ 之间的关系,代回方程 $A_{m imes n}X=0$
- 给出方程组 $A_{m \times n}X=0$ 的基础解系 $m{\xi}_1, m{\xi}_2, \cdots, m{\xi}_s$ 和方程组 $B_{m \times n}X=0$ 的基础解系 $m{\eta}_1, m{\eta}_2, \cdots, m{\eta}_t$,公共解为:

$$k_1 \boldsymbol{\xi}_1 + k_2 \boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + k_s \boldsymbol{\xi}_s = l_1 \boldsymbol{\eta}_1 + l_2 \boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + l_t \boldsymbol{\eta}_t$$

同解方程组

- 如果两个方程组 $A_{m imes n} X = 0$ 和 $B_{m imes n} X = 0$ 有完全相同的解,则称它们为同解方程组
 - $\circ \ AX=0$ 的解满足 BX=0 且 BX=0 的解满足 AX=0
 - $\circ \ r(A) = r(B)$ 且 AX = 0 的解满足 BX = 0 (BX = 0 的解满足 AX = 0)
 - $\quad \boldsymbol{r}(A) = \boldsymbol{r}(B) = \boldsymbol{r}(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix})$