行列式

定义和性质

定义

- 行列式是一个在方阵上按照一定法则计算得到的标量，记作 $det(A)$ 或者 $|A|$
$$det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
- 几何定义：n 阶行列式 $det(A_n)$ 的几何意义是 n 维空间中由 n 阶行列式中的 n 个向量围成的n 维空间体的 "体积"
$$det(A_2)=|A_2|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=S_D$$

$$det(A_3)=|A_3|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=V_\Omega$$

- 逆序数法定义

$$det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 是 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数

性质

- 1. 行列式中行列等价，行列互换，行列式的值不变，$|A|=|A^T|$
- 2. 行列式中某行或者某列元素全为 0，行列式的值 $det(A)=0$
- 3. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$
- 4. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$
- 5. 行列式两行或者两列互换，行列式的值相反

- 6. 行列式中两行或者两列成比例，行列式的值为 0
- 7. 行列式中某一行加上另一行的 k 倍，行列式的值不变

行列式展开定理

余子式

- 行列式 $det(A)$ 去掉任意一项 a_{ij} 所在行和列去掉后的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式 M_{ij}

代数余子式

- 行列式中任意一项 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

行列式展开定理

- 行列式 $det(A)$ 按照第 i 行或者第 j 列展开

$$det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \end{cases}$$

特殊行列式

上下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

副三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{i=1}^{n} a_{i,n-i+1}$$

拉普拉斯展开式

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix}=|A||B|$$

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|$$

其中 A 是 m 阶矩阵，B 是 n 阶矩阵

范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)$$

行列式计算

爪型行列式

$$det(A) = \begin{vmatrix} x_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_n \\ y_2 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ y_3 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \prod_{i=2}^{n} x_i \left(x_1 - \sum_{j=2}^{n} \frac{z_j y_j}{x_j} \right)$$

X 型行列式

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & & & & & b_1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_k & b_k & & \\ & & b_{k+1} & a_{k+1} & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b_n & & & & & a_n \end{vmatrix}$$

两三角形行列式

$$det(A) = \begin{vmatrix} x_1 & b & b & \cdots & b \\ c & x_2 & b & \cdots & b \\ c & c & x_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \frac{b\prod_{i=1}^{n}(x_i - c) - c\prod_{j=1}^{n}(x_j - b)}{b - c}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}$$

三对角型行列式

$$det(A)=\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a \end{vmatrix}=\frac{x_1^{n+1}-x_2^{n+1}}{x_1-x_2}$$

Cramer Rule

对于 n 个方程 n 个未知数的非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

若行列式

$$det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$

方程组有唯一解 $x_i=\dfrac{det(A_i)}{det(A)}$, 其中 A_i 是讲 $det(A)$ 的第 i 列换成 $b_1,b_2,\cdots,b_n$

对于 n 个方程 n 个未知数的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

$det(A)\neq 0,$ 方程组有唯一解 $x_i=0, det(A)=0,$ 方程组有无穷多非零解