2.2 高阶常系数非齐次线性方程

在上一节齐次方程的求解基础上, 本节讨论高阶非齐次线性方程

$$x^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+\cdots+a_1x'+a_0x=f(t),\ a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}\in\mathbb{C} \tag{2.2.1}$$

的求解. 如何将齐次方程与非齐次方程的求解联系起来呢? 这需要如下所述的**叠加原理**.

定理 2.2.1 设 $\mathscr{L}$ 为线性常微分算子, 则非齐次线性方程 $\mathscr{L}u=f$ 的通解等于齐次方程 $\mathscr{L}u=0$ 的通解加上非齐次方程的一个特解.

证明 设 u_0 是非齐次方程 $\mathscr{L}u=f$ 的一个特解. 设 u 是非齐次方程的任一解, 则有

$$\mathscr{L}(u-u_0)=\mathscr{L}u-\mathscr{L}u_0=f-f=0,$$

即 $u-u_0$ 是齐次方程的解, 由 $u=(u-u_0)+u_0$ 可得非齐次方程的任意解必然可以表示为某一齐次方程的解与特解 u_0 的和.

反之, 任取齐次方程的一个解 v, 则 $\mathscr{L}(v+u_0)=\mathscr{L}v+\mathscr{L}u_0=f$, 这说明齐次方程的任一解与特解 u_0 的和必然是非齐次方程的解, 即证. □

根据叠加原理, 在求解非齐次方程时, 我们只需要求出该方程的一个特解, 它与对应齐次方程的通解之和就是非齐次方程的通解.

2.2.1 二阶非齐次线性方程的求解

首先, 我们来用常数变易法求出二阶方程

$$x''+p(t)x'+q(t)x=f(t) \tag{2.2.2}$$

的通解表示.

定理 2.2.2 设 $\varphi_1(t),\varphi_2(t)$ 是齐次方程 $x''+p(t)x'+q(t)x=0$ 的两个线性无关解, 则非齐次方程 (2.2.2) 的通解为

$$x(t)=C_1\varphi_1(t)+C_2\varphi_2(t)+\int_{t_0}^{t}\frac{\varphi_1(s)\varphi_2(t)-\varphi_1(t)\varphi_2(s)}{\varphi_1(s)\varphi_2'(s)-\varphi_1'(s)\varphi_2(s)}f(s)\,\mathrm{d}s.$$

证明 根据叠加原理, 只需求出非齐次方程的一个特解. 设 $x(t)=C_1(t)\varphi_1(t)+C_2\varphi_2(t)$ 是非齐次方程 (2.2.2) 的一个特解, 其中 $C_1(t),C_2(t)$ 为待定的可微函数. 计算可得

$$x'(t)=C_1(t)\varphi_1'(t)+C_2(t)\varphi_2'(t)+C_1'(t)\varphi_1(t)+C_2'(t)\varphi_2(t).$$

不妨设函数 $C_1(t), C_2(t)$ 满足 $C_1'(t)\varphi_1(t)+C_2'(t)\varphi_2(t)=0$, 此时有 $x'(t)=C_1(t)\varphi_1'(t)+C_2(t)\varphi_2'(t)$. 再次求导可得

$$x''(t)=C_1'(t)\varphi_1'(t)+C_2'(t)\varphi_2'(t)+C_1(t)\varphi_1''(t)+C_2\varphi_2''(t).$$

将 $x'(t), x''(t)$ 的表达式代入方程 (2.2.2), 整理可得

$$C_1'(t)\varphi_1'(t)+C_2'(t)\varphi_2'(t)=f(t).$$

综上, 我们得到了 $C_1'(t), C_2'(t)$ 所满足的线性方程组:

$$\begin{cases} C_1'(t)\varphi_1(t)+C_2'(t)\varphi_2(t)=0, \\ C_1'(t)\varphi_1'(t)+C_2'(t)\varphi_2'(t)=f(t). \end{cases}$$

由此求解可得

$$C_1'(t)=-\frac{\varphi_2(t)f(t)}{W(t)},\ C_2'(t)=\frac{\varphi_1(t)f(t)}{W(t)},$$

其中 $W(t)\triangleq\begin{vmatrix}\varphi_1(t) & \varphi_2(t)\\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t)\end{vmatrix}=\varphi_1(t)\varphi_2'(t)-\varphi_1'(t)\varphi_2(t)$ 为线性无关解 $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ 的 **Wronsky 行列式**. 上式积分即得结论. □

有了上述定理, 我们可以着手给出二阶常系数非齐次线性方程的显式解了.

例 2.2.3 求解方程 $x''+a_1x'+a_2x=f(t)$, 其中 $a_1, a_2\in\mathbb{R}$(或者 $\mathbb{C}$) 为常数.

解 设对应的齐次方程的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2\in\mathbb{C}$, 我们讨论两种情况.

(1) $\lambda_1\neq\lambda_2$ 为相异复根, 此时齐次方程的两个线性无关解为 $\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$, 计算可得 Wronsky 行列式为

$$W(t)=\begin{vmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_1 t} & \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\\ \lambda_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} & \lambda_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\end{vmatrix}=(\lambda_2-\lambda_1)\mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2)t}.$$

此时非齐次方程的通解为

$$x(t)=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}+\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{e}^{\lambda_2(t-s)}-\mathrm{e}^{\lambda_1(t-s)}}{\lambda_2-\lambda_1}f(s)\,\mathrm{d}s.$$

(2) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ 为重根, 此时齐次方程的两个线性无关解为 $\mathrm{e}^{\lambda t}, t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$, 计算可得 Wronsky 行列式为

$$W(t)=\begin{vmatrix}\mathrm{e}^{\lambda t} & t\,\mathrm{e}^{\lambda t}\\ \lambda\mathrm{e}^{\lambda t} & (\lambda t+1)\mathrm{e}^{\lambda t}\end{vmatrix}=\mathrm{e}^{2\lambda t}.$$

此时非齐次方程的通解为

$$x(t)=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{\lambda t}+\int_{t_0}^{t}(t-s)\mathrm{e}^{\lambda(t-s)}f(s)\,\mathrm{d}s.$$

尽管我们用常数变易法讨论清楚了一般情况下二阶非齐次线性方程的求解, 但这种方法很难推广到更高阶数的线性方程中, 此时需要另辟蹊径. 为此, 我们来介绍两类常用的求解高阶常系数非齐次线性方程的方法, 分别是待定系数法和运算子法.

2.2.2 待定系数法

待定系数法可以用于求解特定形式的常系数线性非齐次方程的特解. 我们用一个定理来概括该方法的使用原理.

定理 2.2.4 考虑高阶常系数非齐次线性方程 (2.2.1).

(1) 设 $f(t)=P_d(t)\mathrm{e}^{\mu t}$, 其中 $P_d(t)$ 为 d 次多项式, μ 为实常数. 若 μ 不是对应齐次方程的特征值, 则方程 (2.2.1) 具有形如 $x(t)=Q_d(t)\mathrm{e}^{\mu t}$ 的特解, 其中 $Q_d(t)$ 为 d 次多项式; 若 μ 是对应齐次方程的 k 重特征值, 则方程 (2.2.1) 具有形如 $x(t)=t^kQ_d(t)\mathrm{e}^{\mu t}$ 的特解.

(2) 设 $f(t)=(P_d(t)\cos\lambda t+Q_m(t)\sin\lambda t)\mathrm{e}^{\mu t}$, 其中 $P_d(t),Q_m(t)$ 分别为 d 阶、m 阶多项式, λ,μ 为实常数. 记 $s=\max\{d,m\}$. 若 $\mu+\mathrm{i}\lambda$ 不是对应齐次方程的特征值, 则方程 (2.2.1) 具有形如 $(A_s(t)\cos\lambda t+B_s(t)\sin\lambda t)\mathrm{e}^{\mu t}$ 的特解, 其中 $A_s(t),B_s(t)$ 是 s 阶多项式; 若 $\mu+\mathrm{i}\lambda$ 是对应齐次方程的特征值, 则方程 (2.2.1) 具有形如 $x(t)=t^k(A_s(t)\cos\lambda t+B_s(t)\sin\lambda t)\mathrm{e}^{\mu t}$ 的特解.

上述定理是根据经验归纳得到的, 可以通过初等但繁琐的计算验证, 所以我们略去具体的证明, 而是以若干例子来体现待定系数法的应用.

例 2.2.5 求解方程 $x''+4x'+4x=\sin 2t$.

解 对应齐次方程的两个特征值均为 -2, 故我们设 $A\cos 2t+B\sin 2t$ 是方程的特解. 计算可得

$$x'(t)=2B\cos 2t-2A\sin 2t,\ x''(t)=-4A\cos 2t-4B\sin 2t.$$

代入方程求解可得 $A=-\dfrac{1}{8}, B=0$. 所以非齐次方程的一个特解为 $-\dfrac{1}{8}\cos 2t$, 进而通解为

$$x(t)=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{-2t}-\frac{1}{8}\cos 2t.$$

例 2.2.6 求解方程 $x'''+3x''+3x'+x=\mathrm{e}^{-t}(t+5)+\mathrm{e}^t+\sin t+1$.

解 在处理这种形如 $\mathscr{L}x=f_1+\cdots+f_n$ 的高阶方程时, 我们可以分别求出 $\mathscr{L}x=f_k(k=1,\cdots,n)$ 的通解 x_k, 然后累和即可得原方程的通解 $x=x_1+\cdots+x_n$. 首先对应齐次方程的三个特征值均为 -1.

(1) $f_1(t)=\mathrm{e}^{-t}(t+5)$, 此时可设特解为 $x_1(t)=t^3(A_1t+B_1)\mathrm{e}^{-t}$, 代入方程计算可得

$$(6A_1+24B_1t)\mathrm{e}^{-t}=\mathrm{e}^{-t}(t+5).$$

由此求得 $A_1=-\frac{5}{6}, B_1=\frac{1}{24}$, 所以 $x_1(t)=\frac{t^3(1-20t)}{24}\mathrm{e}^{-t}$.

(2) $f_2(t)=\mathrm{e}^t$, 此时可设特解为 $x_2(t)=A_2\mathrm{e}^t$. 代入方程可得 $8A_2\mathrm{e}^t=\mathrm{e}^t$, 所以 $A_2=\frac{1}{8}$, 特解为 $x_2(t)=\frac{1}{8}\mathrm{e}^t$.

(3) $f_3(t)=\sin t$, 此时可设特解为 $x_3(t)=A_3\cos t+B_3\sin t$, 代入方程计算可得

$$2(B_3-A_3)\cos t-2(A_3+B_3)\sin t=\sin t.$$

由此求得 $A_3=B_3=-\frac{1}{4}$, 所以特解为 $x_3(t)=-\frac{1}{4}(\cos t+\sin t)$.

(4) $f_4(t)=1$, 不难看出此时的一个特解为 $x_4(t)=1$.

综上所述, 原方程的通解为

$$x(t)=(C_1+C_2t+C_3t^2)\mathrm{e}^{-t}+\frac{t^3(1-20t)}{24}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{8}\mathrm{e}^t-\frac{1}{4}(\cos t+\sin t)+1.$$

2.2.3 运算子法

本小节我们介绍求解非齐次方程的另一种方法: 运算子法. 该方法最早由英国物理学家 O. Heaviside 发明. 如果我们按照如下方式定义**运算子**:

$$\mathscr{D}\triangleq\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t},\ \mathscr{D}^0=1,\ \mathscr{D}^k=\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(k=1,\cdots,n),$$

那么可以定义 n 次**算子多项式**:

$$P(\mathscr{D})\triangleq\mathscr{D}^n+a_{n-1}\mathscr{D}^{n-1}+\cdots+a_1\mathscr{D}+a_0=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+a_0.$$

这样, 方程 (2.2.1) 就可以写成 $P(\mathscr{D})x=f(t)$ 的形式, 此时方程特解可以记为 $x(t)=\frac{1}{P(\mathscr{D})}f(t)$, 其中 $\frac{1}{P(\mathscr{D})}$ 称为 $P(\mathscr{D})$ 的**逆算子**[1]. 求非齐次方程的特解的关键就是求出算子多项式的逆算子. 当 $P(\mathscr{D})=\mathscr{D}^n$, 它的逆算子就是对 $f(t)$ 进行 n 次积分. 对于一般的算子多项式, 我们可以针对一些特殊的函数 $f(t)$ 给出对应的求解方法.

(一) $f(t)$ 是多项式. 此时 $f(t)$ 可以在有限次求导后化为零, 因此可以考虑使用**长除法**或者 **Taylor 展开法**求解逆算子. 比如下面两个例子.

例 2.2.7 求方程 $2x''+2x'+1=t^2+2t-1$ 的一个特解.

[1]需要注意, 由于 $P(\mathscr{D})$ 并不是 n 阶可微函数空间上的可逆变换, 故这里并不是严格意义下的逆算子. 事实上, 要找到方程的一个特解, 只需找到 $f(t)$ 在算子 $P(\mathscr{D})$ 下的一个原像.

解 此时算子多项式为 $P(\mathscr{D})=2\mathscr{D}^2+2\mathscr{D}+1$. 下式演示了长除法求解逆算子的过程:

$$
\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & 1 & - & 2\mathscr{D} & + & 2\mathscr{D}^2 & & \\
\cline{2-8}
1+2\mathscr{D}+2\mathscr{D}^2 & 1 & + & 0\mathscr{D} & + & 0\mathscr{D}^2 & & \\
 & 1 & + & 2\mathscr{D} & + & 2\mathscr{D}^2 & & \\
\cline{2-8}
 & & - & 2\mathscr{D} & - & 2\mathscr{D}^2 & & \\
 & & - & 2\mathscr{D} & - & 4\mathscr{D}^2 & - & 4\mathscr{D}^3 \\
\cline{3-8}
 & & & & & 2\mathscr{D}^2 & - & 4\mathscr{D}^3
\end{array}
$$

其中, 由于 $f(t)=t^2+2t-1$ 在求三次导后恒为零, 所以逆算子只需求到 $\mathscr{D}^2$ 一项. 因此方程的一个特解为

$$x(t)=\frac{1}{1+2\mathscr{D}+2\mathscr{D}^2}(t^2+2t-1)=(1-2\mathscr{D}+2\mathscr{D}^2)(t^2+2t-1)=t^2-2t-1.$$

例 2.2.8 求方程 $x''-x=t^4-1$ 的一个特解.

解 此时算子多项式为 $\mathscr{D}^2-1$. 对 $\dfrac{1}{\mathscr{D}^2-1}$ 进行 Taylor 展开可得

$$\frac{1}{\mathscr{D}^2-1}=-1-\mathscr{D}^2-\mathscr{D}^4-\cdots.$$

所以方程的一个特解为

$$x(t)=\frac{1}{\mathscr{D}^2-1}(t^4-1)=(-1-\mathscr{D}^2-\mathscr{D}^4)(t^4-1)=-t^4-12t^2-25.$$

(二) $f(t)=Q(t)\mathrm{e}^{\alpha t}$, 其中 $Q(t)$ 为多项式, α 为复常数. 此时求解 $\dfrac{1}{P(\mathscr{D})}f(t)$ 的方法是借助算子多项式的一些性质, 将求解逆算子转化为求解累次积分. 为此, 我们先介绍几个常用的性质.

性质 2.2.9 下面设 α 为复常数, ω 为实常数.

(1) $P(\mathscr{D})\mathrm{e}^{\alpha t}=P(\alpha)\mathrm{e}^{\alpha t}$.

(2) $P(\mathscr{D})(\mathrm{e}^{\alpha t}x(t))=\mathrm{e}^{\alpha t}P(\mathscr{D}+\alpha)x(t)$.

(3) $P(\mathscr{D}^2)\cos\omega t=P(-\omega^2)\cos\omega t$, $P(\mathscr{D}^2)\sin\omega t=P(-\omega^2)\sin\omega t$.

证明 我们设 $P(\mathscr{D})=a_n\mathscr{D}^n+\cdots+a_1\mathscr{D}+a_0$. 则分别计算可得

$$P(\mathscr{D})\mathrm{e}^{\alpha t}=\sum_{k=0}^{n}a_k\mathscr{D}^k\mathrm{e}^{\alpha t}=\sum_{k=0}^{n}a_k\alpha^k\mathrm{e}^{\alpha t}=P(\alpha)\mathrm{e}^{\alpha t}.$$

$$
\begin{aligned}
P(\mathscr{D})(\mathrm{e}^{\alpha t}x(t)) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \mathscr{D}^k(\mathrm{e}^{\alpha t}x(t)) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \alpha^i \mathrm{e}^{\alpha t} x^{(k-i)}(t) \\
&= \mathrm{e}^{\alpha t} \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \alpha^i \mathscr{D}^{k-i} \right) x(t) \\
&= \mathrm{e}^{\alpha t} P(\mathscr{D}+\alpha) x(t).
\end{aligned}
$$

□

$$
P(\mathscr{D}^2)\cos\omega t = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathscr{D}^{2k}\cos\omega t = \sum_{k=0}^{n} a_k(-\omega^2)^k \cos\omega t = P(-\omega^2)\cos\omega t.
$$

$$
P(\mathscr{D}^2)\sin\omega t = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathscr{D}^{2k}\sin\omega t = \sum_{k=0}^{n} a_k(-\omega^2)^k \sin\omega t = P(-\omega^2)\sin\omega t.
$$

下面我们通过一些实例来展现具体的计算过程.

例 2.2.10 求方程 $x'' - 2x' + x = t\,\mathrm{e}^t$ 的一个特解.

解 此时算子多项式为 $P(\mathscr{D}) = (\mathscr{D}-1)^2$. 根据性质2.2.9(2) 可得

$$
\frac{1}{P(\mathscr{D})}(\mathrm{e}^{\alpha t}x(t)) = \mathrm{e}^{\alpha t}\frac{1}{P(\mathscr{D}+\alpha)}x(t).
$$

由此可求得一个特解

$$
x(t) = \frac{1}{(\mathscr{D}-1)^2}(t\,\mathrm{e}^t) = \mathrm{e}^t \frac{1}{\mathscr{D}^2} t = \mathrm{e}^t \int \left(\int t\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}t = \frac{t^3\mathrm{e}^t}{6}.
$$

例 2.2.11 求方程 $x'' - 6x' + 13x = \mathrm{e}^{3t}\sin 2t$ 的一个特解.

解 处理这种含三角项的方程时,我们可以借助 Euler 公式将其复数化,转化为 $f(t) = Q(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ 的形式. 此时算子多项式为 $P(\mathscr{D}) = \mathscr{D}^2 - 6\mathscr{D} + 13$, 因此一个特解为

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{\mathscr{D}^2 - 6\mathscr{D} + 13}(\mathrm{e}^{3t}\sin 2t) = \frac{1}{\mathscr{D}^2 - 6\mathscr{D} + 13}\operatorname{Im}\mathrm{e}^{(3+2\mathrm{i})t} \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{(\mathscr{D}-(3+2\mathrm{i}))(\mathscr{D}-(3-2\mathrm{i}))}\mathrm{e}^{(3+2\mathrm{i})t} \right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{(3+2\mathrm{i})t}\frac{1}{\mathscr{D}(\mathscr{D}+4\mathrm{i})}1 \right) = \operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{(3+2\mathrm{i})t}\frac{1}{4\mathrm{i}\mathscr{D}}\left(1 - \frac{\mathscr{D}}{4\mathrm{i}} + \cdots\right)1 \right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{(3+2\mathrm{i})t}}{4\mathrm{i}} \cdot \frac{1}{\mathscr{D}}1 \right) = \operatorname{Im}\frac{t\,\mathrm{e}^{(3+2\mathrm{i})t}}{4\mathrm{i}} = -\frac{t}{4}\mathrm{e}^{3t}\cos 2t.
\end{aligned}
$$

□