



示性类理论

Author: 吕长乐
Institute: 中国科学技术大学
Date: 2024 年 6 月

Characteristic class connects topology and curvature.

前言

示性类理论的研究是从 1935 年由 Stiefel 和 Whitney 二人几乎同时开始独立进行的。Stiefel 在 Hopf 的指导下研究了一种由流形的切丛决定的同调类，而 Whitney 在处理一般球丛的时候引入了上同调的语言，正式定义了示性上同调类。1942 年 Pontrjagin 在研究 Grassmann 流形的时候定义了 Pontrjagin 类，1946 年陈省身在昆明的高级研究所对复向量丛也定义了陈示性类。再后来吴文俊引入了吴示性类，并导出了 S-W 示性类、陈示性类等由吴示性类的表示公式，将这一理论进行了进一步的发展。

上述示性类的定义都是从拓扑的角度出发的，而从曲率的角度来看，上述的示性类理论也有着非常重要的意义，这些上同调类都可以用曲率张量所表示。Chern-Weil 理论给出了这二者之间的联系，并让示性类理论所能应用的范围大幅变大。

本讲义为 2024 秋季学期开始的示性类理论讨论班而作，第一部分（第一到第四章）为拓扑示性类理论，第二部分（第五到第八章）为微分几何中的示性类理论。学习本讲义有关内容需要一定的代数拓扑、微分流形与黎曼几何基础，重要的前置知识会在正文中进行讲解。本讲义的主要参考书为 Hatcher 的《代数拓扑》、Milnor 的《示性类》、张伟平的《流形上的几何与分析》和 Kobayashi 的《复向量丛的微分几何》。

目录

前言	i
Chapter 1 拓扑理论的预备知识	1
1.1 向量丛	1
1.2 基本同调类	4
1.3 Grassmann 流形的有关讨论	7
Chapter 2 向量丛的上同调	11
2.1 Thom 同构定理与 Thom 类	11
2.2 Gysin 序列与 Euler 类	17
Chapter 3 Stiefel-Whitney 类	19
3.1 公理化定义	19
3.2 S-W 类的初步应用	23
3.3 存在性的证明	27
3.4 唯一性的证明	30
Chapter 4 实向量丛示性类理论的进一步应用	33
4.1 关于流形的法丛	33
4.2 关于流形的切丛	37
4.3 吴文俊公式	38
4.4 障碍理论	39

Chapter 5 复向量丛的示性类	40
5.1 复向量丛	40
5.2 陈类	41
5.3 Pontrjagin 类	42
5.4 具体的例子与计算	43
Chapter 6 微分几何的预备知识	44
6.1 联络与曲率	44
6.2 Kähler 流形	45
6.3 复几何中的一些计算	46
Chapter 7 Gauss-Bonnet-Chern 公式	47
7.1 微分几何中的 Thom 类与 Euler 类	47
7.2 超渡公式与 Chern-Weil 理论基本定理	48
7.3 Gauss-Bonnet-Chern 公式的证明	49
Chapter 8 微分几何中的陈类	50
8.1 曲率多项式定义	50
8.2 陈类与消灭定理	51
8.3 陈类与 Hermitian-Einstein 向量丛	52
Chapter 9 指标定理	53
9.1 其他示性类	53
9.2 Atiyah-Singer 指标定理	54

Chapter 1 拓扑理论的预备知识

1.1 向量丛

向量丛是示性类理论中的基本研究对象之一，为此我们先回顾向量丛的有关知识。

首先给出纤维丛与向量丛的基本概念。

Definition 1.1

一个拓扑空间 B 上的纤维丛 $\xi: F \rightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ 有如下部分:

- (1) 一个拓扑空间 E , 称为 ξ 的全空间
- (2) 一个连续映射 $\pi: E \rightarrow B$, 称为投影
- (3) 一个拓扑空间 F , 称为纤维

且还需要满足局部平凡性的条件, 即

$\forall b \in B$, 存在 b 的邻域 U (如果 U 可以取为整个底空间 B , 则称 ξ 是平凡的) 和一个同态 $h_U: U \times F \rightarrow \pi^{-1}(U)$, 使得对 U 中任意一个 c , 有 $x \mapsto h_U(c, x)$ 给出了 F 与纤维 $\pi^{-1}(c)$ (也被写为 $F_c(\xi)$) 之间的同构。

如果纤维 F 为 n 维实向量空间, 则称 ξ 为实向量丛 (或称为 \mathbb{R}^n 丛)。



Definition 1.2

同一个底空间上的向量丛 ξ 与 η 同构, 是指存在 $f: E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ 把 ξ 的每一个纤维 $F_b(\xi)$ 都同构地映射到对应的纤维 $F_b(\eta)$ 上, 此时记作 $\xi \simeq \eta$ 。

对任意两个向量丛 ξ 和 η , 称从 ξ 到 η 的丛映射 是指一个连续映射 $g: E(\xi) \rightarrow E(\eta)$, 把每一个纤维 $F_b(\xi)$ 都同构地映射到某一个 η 的纤维 $F_{b'}(\eta)$ 。



下面是几个向量丛的例子。

Example 1.1 流形的切丛 τ_M 。对任意一个流形 M , τ_M 的底空间为 M , 全空间为 $TM = \{(x, v) : x \in M, v \in T_x M\}$, 第一分量的投影即为丛的投影。不难验证纤维上的向量结构以及局部平凡性。如果 τ_M 是平凡的, 则称流形 M 是可平行化的。

Example 1.2 流形的法丛 ν_M 。具体讨论与上例类似。

Example 1.3 \mathbb{RP}^n 上的典范线丛 γ_n^1 。全空间 $E(\gamma_n^1) = \{(\{\pm x\}, v) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} : v = kx (k \in \mathbb{R})\}$ (这里我们把 \mathbb{RP}^n 视为 S^n 上对径点对构成的集合), 第一分量的投影即为丛的投影。每个纤维可以视为 \mathbb{R}^{n+1} 中穿过向量 x 的直线, 故其上自然有 1 维向量结构。它的局部平凡化可以写出:

$$h_U : U \times \mathbb{R} \rightarrow \pi^{-1}(U)$$

$$(\{\pm x\}, t) \mapsto (\{\pm x\}, tx)$$

Definition 1.3

对向量丛 ξ , 一个截面 是一个连续映射 $s : B \rightarrow E$, 使得 $\pi \circ s = \text{Id}$ 。



利用截面, 可以给出一个向量丛是否平凡的判据如下 (具体证明在此省略)

Proposition 1.1

一个 n 维实向量丛 ξ 是平凡的当且仅当存在 n 个处处线性无关的截面 s_1, \dots, s_n 。



Example 1.4 S^3 是可平行化的。定义其切丛的三个截面如下: 将 S^3 自然嵌入到 \mathbb{R}^4 , 则对任意 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3$, 令 $s_i(x) = (x, t_i(x)) (i = 1, 2, 3)$, 其中

$$t_1(x) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$$

$$t_2(x) = (-x_3, x_4, x_1, -x_2)$$

$$t_3(x) = (-x_4, -x_3, x_2, x_1)$$

可以验证这给出了三个处处无关的截面, 则 τ_{S^3} 是平凡的。

这里我们再讨论几种从已有向量丛给出新的向量丛的构造方法。

一、拉回丛

对任意向量丛 $\xi(B, E, \pi, h)$ 和拓扑空间 B_1 ，以及一个映射 $f : B_1 \rightarrow B$ ，在 B_1 上定义拉回丛 $f^*\xi$ 如下：

全空间定义为 $E_1 = \{(b, e) \in B_1 \times E : f(b) = \pi(e)\}$ ，第一分量的投影为丛投影。对 ξ 的一个平凡化邻域 U ，在 $f^{-1}(U)$ 上定义 $f^*\xi$ 的局部平凡化 h_1 为

$$h_1 : U_1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi_1^{-1}(U_1)$$

$$(b, x) \mapsto (b, h(f(b), x))$$

二、笛卡尔积

对两个向量丛 $\xi_i(B_i, E_i, \pi_i, h_i) (i = 1, 2)$ ，在 $B_1 \times B_2$ 上可以定义它们的笛卡尔积 $\xi_1 \times \xi_2$ ，全空间为 $E_1 \times E_2$ 。丛投影为 $\pi_1 \times \pi_2$ 。

三、Whitney 和

已知 B 上有两个向量丛 ξ_1, ξ_2 ， $d : B \rightarrow B \times B, b \mapsto (b, b)$ 为对角嵌入，则定义 ξ_1 和 ξ_2 的 Whitney 和 $\xi_1 \oplus \xi_2$ 为拉回丛 $d^*(\xi_1 \times \xi_2)$ 。

四、正交补

对任意向量丛 $\xi \subset \eta$ ，定义 $F_b(\xi^\perp)$ 为 $F_b(\xi)$ 在 $F_b(\eta)$ 中的正交补，并令 $E(\xi^\perp)$ 为所有 $F_b(\xi^\perp)$ 的并。对一个邻域 U ，选取 $\xi|_U$ 的标准正交截面基 s_1, \dots, s_m ，并扩张为 $\eta|_U$ 上的标准正交截面基 s_1, \dots, s_n ，则定义局部平凡化如下：

$$h : U \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow E(\xi^\perp)$$

$$(b, x) \mapsto x_1 s_{m+1}(b) + \dots + x_{n-m} s_n(b)$$

可以验证如上条件给出了一个向量丛 ξ^\perp ，且有 $\eta \simeq \xi \oplus \xi^\perp$ 。

1.2 基本同调类

为了方便后续讨论，这里讨论在流形的定向中具有重要作用的基本同调类。

M 是一个闭连通的 n 维流形，并且是 R -可定向的，则我们取 $\{\mu_x | x \in M\}$ 为 M 的一组定向。所谓的基本同调类就是能够处处被自然同态映成定向同调类的类，下面先来严格给出定义并证明其存在性。

Theorem 1.1

对任意的 R -可定向流形 M 和任意紧子集 $K \subset M$ ，都存在唯一的同调类 $\mu_K \in H_n(M|K; R)$ ，使得自然同态 $\rho_x : H_n(M|K; R) \rightarrow H_n(M|x; R)$ 满足 $\rho_x(\mu_K) = \mu_x (\forall x \in K)$ 。

特别地，如果 M 还是紧的，则称 μ_M 是 M 的基本同调类。



证明 我们首先需要有一个引理，在这里省略它的证明：

Lemma 1.1

同调类 $\alpha \in H_n(M|K; R) = 0$ 当且仅当 $\rho_x(\alpha) = 0 \in H_n(M|x; R) (\forall x \in R)$ 。



在这个引理的基础上，从局部到整体证明主要定理：

第一步： K 包含在某一点的足够小邻域中，此时由定向的定义立即得到结果。

第二步： 由于 K 是紧的，则只需证明如果对 K_1 和 K_2 结论正确，则对 $K = K_1 \cup K_2$ 结论正确。首先由 Mayer-Vietoris 序列，有正合列

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow H_n(M|K; R) \xrightarrow{f} H_n(M|K_1; R) \oplus H_n(M|K_2; R) \xrightarrow{g} H_n(M|K_1 \cap K_2; R) \rightarrow \cdots$$

其中 $f(\alpha) = \rho_{K_1}(\alpha) \oplus \rho_{K_2}(\alpha)$, $g(\beta \oplus \gamma) = \rho_{K_1 \cap K_2}(\beta) - \rho_{K_1 \cap K_2}(\gamma)$, ρ_{K_1} 表示从 $H_n(M|K; R)$ 到 $H_n(M|K_1; R)$ 的自然同态， ρ_{K_2} 和 $\rho_{K_1 \cap K_2}$ 同理。

则对任意的 $x \in K_1 \cap K_2$, $\rho_x(g(\mu_{K_1} \oplus \mu_{K_2})) = \rho_x \mu_{K_1} - \rho_x \mu_{K_2} = \mu_x - \mu_x = 0$ ，则由引理， $g(\mu_{K_1} \oplus \mu_{K_2}) = 0$ ，故存在唯一的 $\alpha \in H_n(M|K; R)$ ，使得 $f(\alpha) = \mu_{K_1} \oplus \mu_{K_2}$ ，则 α 就是我们想要的 μ_K ，故得证。 □

对于不可定向流形, 取 $R = \mathbb{Z}_2$ 也可以定义所谓的基本同调类。

对于带边流形也可以定义基本同调类: 类似地可以证明对任意紧子集 $K \subset M$, 存在唯一的同调类 $\mu_K \in H_n(M, (M - K) \cup \partial M; R)$ 使得 $\rho_x(\mu_K) = \mu_x (\forall x \in K \cap (M - \partial M))$, 则取 $\mu_M \in H_n(M, \partial M; R)$ 为 M 的基本同调类。

下面的命题在后面证明 Pontrjagin 定理的时候会用到。

Proposition 1.2

对于同调群长正合列中的连接同态 $\partial : H_n(M, \partial M; R) \rightarrow H_{n-1}(\partial M; R)$, 有 $\partial(\mu_M) = \mu_{\partial M}$ 。



证明 取 N 为 ∂M 的一个管状邻域, 则 N 为 n 维带边流形, 边界为 $\partial M \cup (N - \mathring{N})$, 则有交换图表

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_n(M, \partial M; R) & \xrightarrow{i_*} & H_n(M, \partial M \cup (M - \mathring{N}); R) \\
 & \swarrow \partial_* & & & \uparrow j_* \approx \\
 H_{n-1}(\partial M; R) & \xleftarrow[k_*]{\approx} & H_{n-1}(\partial M \cup (N - \mathring{N}), N - \mathring{N}; R) & \xleftarrow{\partial_*} & H_n(N, \partial M \cup (N - \mathring{N}); R)
 \end{array}$$

其中左侧的 ∂_* 为 $(M, \partial M)$ 的正合列的连接同态, 右下的 ∂_* 为三元组 $(N, \partial M \cup (N - \mathring{N}), N - \mathring{N})$ 的正合列的连接同态, 右侧的 j_* 来自于切除。

由基本同调类的定义, 不难有

$$j_*^{-1} i_* \mu_M = \mu_N$$

同时又由于 N 的定义, N 同胚于 $\partial M \times I$ 并将 ∂M 和 $N - \mathring{N}$ 分别对应到 $\partial M \times 0$ 和 $\partial M \times 1$, 则由相对 Kunneth 公式

$$H_n(N, \partial M \cup (N - \mathring{N}); R) \approx H_{n-1}(\partial M; R) \otimes H_1(I, \mathring{I}; R)$$

取 w 为 $H_1(I, \mathring{I}; R)$ 的生成元, $\{M_j\}$ 为 ∂M 的分支, 则 $\mu_N = \sum z'_j \times w$ (对某些 $z'_j \in H_{n-1}(M_j; R)$)。又由于 $k_*^{-1} \partial_* \mu_N = \pm \sum z'_j$, 故 $\partial \mu_M = \pm \sum z'_j$ 。

由于 μ_N 为基本同调类, 则每个 $z'_j \times w$ 对应了 $M_j \times I$ 的基本同调类, 则 z'_j 为 $H_{n-1}(M_j; R)$ 的生成元, 也即 M_j 的基本同调类, 则 $\pm \sum z'_j = \partial \mu_M$ 为 ∂M 的基本同调类。 \square

1.3 Grassmann 流形的有关讨论

为了在后面讨论看待 S-W 类的一种视角, 这里需要补充关于 Grassmann 流形的有关知识。

Definition 1.4

Grassmann 流形 $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 是 \mathbb{R}^{n+k} 中经过原点的 n 维平面构成的集合。



首先我们说明 Grassmann 流形确实是一个流形。

Lemma 1.2

Grassmann 流形 $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 是一个 nk 维的紧拓扑流形。



证明 首先证明 $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 是一个 Hausdorff 空间。固定 $w \in \mathbb{R}^{n+k}$, 对任意 $X \in G_n(\mathbb{R}^{n+k})$, 取 X 的正交基 x_1, \dots, x_n , 定义

$$\rho_w : G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \rightarrow \mathbb{R}, X \mapsto w \cdot w - \sum_{k=1}^n (w \cdot x_k)^2$$

则 ρ_w 为连续函数, 且对任意的 $X \neq Y$, 取 $w \in X - Y$, 有 $\rho_w(X) \neq \rho_w(Y)$, 则 X 与 Y 可以用连续函数分离, 故得证。

令 $V_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 为 \mathbb{R}^{n+k} 中的 n 维标架 (也即 n 个无关向量构成的有序组) 构成的集合, $V_n^0(\mathbb{R}^{n+k})$ 为所有正交 n 维标架构成的集合, 显然是紧的。又对 $q : V_n^0(\mathbb{R}^{n+k}) \rightarrow G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 把标架映为其张成的子空间, 则有 $q(V_n^0(\mathbb{R}^{n+k})) = G_n(\mathbb{R}^{n+k})$, 故 $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 为紧集在连续映射下的像, 也为紧的。

再证对任意一点 $X_0 \in G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 存在 X_0 的同胚于 \mathbb{R}^{nk} 同胚的邻域。考虑正交投影 $p : X_0 \oplus X_0^\perp \rightarrow X_0$, 记 U 为 $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 中所有对 p 的像集为 X_0 的元素, 也即与 X_0^\perp 交为 $\{0\}$ 的元素全体, 则任意 $Y \in U$, Y 可以视为线性映射

$$T(Y) : X_0 \rightarrow X_0^\perp$$

的图像, 则有一一对应 $T : U \rightarrow \text{Hom}(X_0, X_0^\perp) \simeq \mathbb{R}^{nk}$ 。

固定 X_0 的一组基 x_1, \dots, x_n , 则对任意 $Y \in U$, 存在唯一的 Y 的一组基 y_1, \dots, y_n , 使

得 $p(y_i) = x_i$, 则 (y_1, \dots, y_n) 由 x_1, \dots, x_n 连续决定。注意到等式

$$y_i = x_i + T(Y)(x_i)$$

由于 y_i 连续依赖于 Y , 则 $T(Y)(x_i)$ 连续依赖于 Y , 则 $T(Y)$ 连续依赖于 Y , 即 T 连续。同理可证 T^{-1} 也连续, 则 T 为同胚。□

在 $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 上, 可以定义一个典范向量丛 $\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$:

首先取全空间 E 为形如 $(\mathbb{R}^{n+k}$ 中的平面, 该平面中的向量) 的所有二元对所构成的集合, E 可以视为 $G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \times \mathbb{R}^{n+k}$ 的子集, 向第一元的投影作为丛的投影。这样构造出来的典范丛又被称为“万有丛”, 原因来自于如下的一个命题。

Proposition 1.3

任何一个紧的底空间 B 上的 n 维向量丛 ξ , 都存在一个丛映射 $\xi \rightarrow \gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$ (k 充分大)。♠

证明 选取有限个能覆盖 B 的平凡化邻域 U_1, \dots, U_r , 由点集拓扑的知识可以知道存在开集 V_1, \dots, V_r 覆盖 B 且 $\overline{V_i} \subset U_i$, 同理选取 W_1, \dots, W_r 覆盖 B 且 $\overline{W_i} \subset V_i$ 。定义 $\lambda_i: B \rightarrow \mathbb{R}$ 为截断函数, 在 $\overline{W_i}$ 上取值为 1, V_i 以外取值为 0。

由于 $\xi|_{U_i}$ 是平凡的, 存在映射 $h_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 将 $\xi|_{U_i}$ 的每个纤维线性地映到 \mathbb{R}^n 。再定义 $h'_i: E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}$ 如下:

$$h'_i(e) = 0 \quad (\pi(e) \notin V_i)$$

$$h'_i(e) = \lambda_i(\pi(e))h_i(e) \quad (\pi(e) \in U_i)$$

再定义 $\hat{f}: E(\xi) \rightarrow \mathbb{R}^{rn}: \hat{f}(e) = (h'_1(e), \dots, h'_r(e))$, 则可以验证 \hat{f} 为一个丛映射。□

对性质更差的底空间, 如仿紧空间, 我们则需要考虑“无穷 Grassmann 流形”, 下面严格地给出有关定义。

\mathbb{R}^∞ 是由所有处有限项以外均为 0 的无穷序列 $x = (x_1, x_2, \dots)$ 所构成的集合, 无穷 Grass-

Grassmann 流形 $G_n = G_n(\mathbb{R}^\infty)$ 则指的是 \mathbb{R}^∞ 的所有 n 维线性子空间所构成的集合。同样在 G_n 上可以定义典范丛 γ^n 。

全空间 $E(\gamma^n) \subset G_n \times \mathbb{R}^\infty$ 为所有形如 $(\mathbb{R}^\infty$ 中的 n 维子空间, 该子空间的向量) 的二元组所构成的集合, 向第一元的投影作为丛投影。类似地, 有如下命题:

Proposition 1.4

任何一个仿紧的底空间 B 上的 n 维向量丛 ξ , 都存在一个丛映射 $\xi \rightarrow \gamma^n$ 。



证明基本与命题 1.3 一致, 只需要利用点集拓扑的知识将仿紧空间进行拓扑处理, 在这里省略细节。这个命题说明了我们给出了一个真正“万有”的向量丛 γ^n 。这一点在之后证明 S-W 类的存在性中具有重要意义。

为了后续讨论 G_n 的上同调环的性质, 这里我们首先给出 Grassmann 流形 $G_n(\mathbb{R}^m)$ 的 CW 复形结构。

首先 \mathbb{R}^m 有递增子空间序列 $\mathbb{R}^0 \subset \mathbb{R}^1 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^m$, 其中 \mathbb{R}^k 视为 \mathbb{R}^m 中后 $m-k$ 个分量均为 0 的向量全体构成的子空间。则对任意 n 维子空间 $X \subset \mathbb{R}^m$ 有

$$0 \leq \dim(X \cap \mathbb{R}^1) \leq \dim(X \cap \mathbb{R}^2) \leq \cdots \leq \dim(X \cap \mathbb{R}^m) = n$$

同时又注意到对 k -分量投影映射 $f_k : X \cap \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ 有 $X \cap \mathbb{R}^{k-1} \subset \text{Ker } f_k$, 则

$$\dim(X \cap \mathbb{R}^k) - \dim(X \cap \mathbb{R}^{k-1}) \leq 1$$

对每一组 $\sigma \in \{\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) : \sigma_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_n \leq m\}$, 定义 $e(\sigma)$ 为所有满足 $\dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_i}) = i, \dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_{i-1}}) = i-1 (\forall i)$ 的 n 维子空间 X 的全体构成的集合。故任意 $X \in G_n(\mathbb{R}^m)$, X 恰好属于所有的 $e(\sigma)$ 中的一个。

定义 $H^k = \{(\xi_1, \cdots, \xi_k, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^k : \xi_i > 0 (1 \leq i \leq k)\} \subset \mathbb{R}^k$, 则 $X \in e(\sigma)$ 当且仅当 X 有一组基 x_1, x_2, \cdots, x_n 使得 $x_i \in H^{\sigma_i} (\forall i)$ 。则令 $e'(\sigma) = V_n^0(\mathbb{R}^m) \cap (H^{\sigma_1} \times \cdots \times H^{\sigma_n}), \bar{e}'(\sigma) = V_n^0(\mathbb{R}^m) \cap (\overline{H^{\sigma_1}} \times \cdots \times \overline{H^{\sigma_n}})$ 。

Lemma 1.3

$\bar{e}'(\sigma)$ 是一个维数为 $d(\sigma) = (\sigma_1 - 1) + (\sigma_2 - 2) + \cdots + (\sigma_n - n)$ 的闭细胞, 且内部为 $e'(\sigma)$ 。
且 q (定义见前) 把 $e'(\sigma)$ 同胚地映成 $e(\sigma)$ 。进而 $e(\sigma)$ 是一个维数为 $d(\sigma)$ 的开细胞。



该引理的证明是平凡的验证, 在此省略。利用 $e(\sigma)$ 我们能给出 $G_n(\mathbb{R}^m)$ 的 CW 复形结构。

Theorem 1.2

所有 $e(\sigma)$ (共 $\binom{m}{n}$ 个) 给出了 $G_n(\mathbb{R}^m)$ 的 CW 复形结构。令 $m \rightarrow \infty$ 取直极限可以类似得到 $G_n = G_n(\mathbb{R}^\infty)$ 的 CW 复形结构。



取 $n = 1$ 的特殊情况则有:

Corollary 1.1

$\mathbb{RP}^\infty = G_1(\mathbb{R}^\infty)$ 是一个 CW 复形, 且对每一个 $r \geq 0$, 它有一个 r -细胞 $e(r+1)$, 且有 $\bar{e}(r+1)$ 同胚于 \mathbb{RP}^r 。



在此基础上我们还需要讨论 $G_n(\mathbb{R}^m)$ 的 r -细胞的个数, 显然这与划分数概念直接相关。

Definition 1.5

对一个整数 $r \geq 0$ 的划分是指一个无序正整数序列 i_1, \dots, i_s 使得它们的和为 r 。 r 的所有划分数记作 $p(r)$ 。



则对每一个 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ 且 $d(\sigma) = r, \sigma_n \leq m$, 将 $\sigma_1 - 1, \sigma_2 - 2, \dots, \sigma_n - n$ 中的零项去掉, 则得到对应的 r 的划分 i_1, \dots, i_s , 且 $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_s \leq m - n, s \leq n$ 。则有

Proposition 1.5

$G_n(\mathbb{R}^m)$ 中的 r -细胞数量等于将 r 划分为至多 n 个不大于 $m - n$ 的正整数的方法数。

**Corollary 1.2**

当 $n \geq r$ 且 $m - n \geq r$ 时, $G_n(\mathbb{R}^m)$ 中的 r -细胞数量等于 $p(r)$, 特别地 $m = \infty$ 时也成立。



Chapter 2 向量丛的上同调

本章我们讨论纤维丛（向量丛）的上同调，并建立 Thom 类和 Euler 类，为后续 S-W 类有关知识的开展奠定基础。这一章需要的代数拓扑知识可以参考 Allen Hatcher 的代数拓扑第三、第四章。

2.1 Thom 同构定理与 Thom 类

首先回忆纤维丛的 Leray-Hirsch 定理。

Theorem 2.1

对于一个纤维丛 $F \rightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ ，如果满足如下条件：

(1) $H^n(F; R)$ 是一个有限生成的自由 R -模

(2) 对任意纤维 F ，都存在上同调类 $c_j \in H^{kj}(E; R)$ 使得 $i^*(c_j)$ 构成了 $H^n(F; R)$

的

一组基，其中 $i: F \rightarrow E$ 是包含映射。

则 $\Phi: H^*(B; R) \otimes_R H^*(F; R) \rightarrow H^*(E; R)$, $\sum_{i,j} b_i \otimes i^*(c_j) \mapsto \sum_{i,j} \pi^*(b_i) \cup c_j$ 是一个同构映射。



这里我们希望引入 Leray-Hirsch 定理的相对形式，为此首先要引入纤维丛对的概念。

Definition 2.1

对于一个纤维丛 $F \rightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ ， $E' \subset E$ 是一个子空间，使得 $\pi: E' \rightarrow B$ 也是一个丛投影，对应的纤维是子空间 $F' \subset F$ ，并且 E' 上的局部平凡化是 E 上的局部平凡化在 E' 上的限制，则称 $(F, F') \rightarrow (E, E') \xrightarrow{\pi}$ 是一个纤维丛对。



下面我们应用绝对形式的 Leray-Hirsch 定理来得到相对形式的 Leray-Hirsch 定理，这对得

到 Thom 类是极其重要的一步。

Theorem 2.2

$(F, F') \rightarrow (E, E') \xrightarrow{\pi}$ 是一个纤维丛对, 如果满足如下条件:

- (1) $H^*(F, F'; R)$ 是一个自由 R -模, 并且对任意的 n , $H^n(F, F'; R)$ 是有限生成的
- (2) 对任意纤维 (F, F') , 都存在上同调类 $c_j \in H^{k_j}(E, E'; R)$ 使得它们在 (F, F') 上的限制构成了 $H^n(F, F'; R)$ 的一组基。

则 $H^*(E, E'; R)$ 是一个自由 $H^*(B; R)$ -模, 且基为 $\{c_j\}$ 。



证明 我们熟知如果 B 是 \hat{E} 的收缩核, 则有 $H^*(\hat{E}; R) \approx H^*(\hat{E}, B; R) \oplus H^*(B; R)$, 为了使用绝对形式的 Leray-Hirsch 定理, 我们找到 \hat{E} 使得 $H^*(\hat{E}, B; R)$ 能与 $H^*(E, E'; R)$ 建立联系。

取 \hat{E} 为将丛投影 $\pi: E' \rightarrow B$ 的映射柱 M 粘黏到 E 上得到的空间 (把 $E' \subset E$ 和 $E' \subset M$ 等同起来), 则丛 $\pi: \hat{E} \rightarrow B$ 的纤维 \hat{F} 可以视为把锥 CF' 通过 F' 粘黏在 F 上得到的。注意到 E 是 $\hat{E} - B$ 的形变收缩核, E' 是 $M - B$ 的形变收缩核, 故由切除定理

$$H^*(\hat{E}, M; R) \approx H^*(\hat{E} - B, M - B; R) \approx H^*(E, E'; R)$$

则由 B 是 M 的形变收缩核, $H^*(\hat{E}, M; R) \approx H^*(\hat{E}, B; R)$, 故由一开始的思路我们有

$$H^*(\hat{E}; R) \approx H^*(E, E'; R) \oplus H^*(B; R)$$

这里的同构是指 $H^*(B; R)$ -模意义下的同构, 则令 $\hat{c}_j \in H^*(\hat{E}; R)$ 为 $c_j \in H^*(E, E'; R)$ 对应的类, 则所有的 $\{\hat{c}_j\}$ 和 1 共同构成了 $H^*(\hat{E}; R)$ 的一组基。则绝对形式的 Leray-Hirsch 定理说明 $H^*(\hat{E}; R)$ 是一个自由的 $H^*(B; R)$ -模, 且基为 $\{1, \hat{c}_j\}$, 故 $\{c_j\}$ 构成了 $H^*(B; R)$ -模 $H^*(E, E'; R)$ 的一组基。□

在这里我们取特殊向量丛的情形, 即 $F = \mathbb{R}^n, F' = F - \{0\} \approx S^{n-1}, E' = E - \{0\}$ (在后面我们均默认 $E' = E - \{0\}$), 为了满足上述的相对 Leray-Hirsch 定理的条件, 我们需要一个上同调类 $c \in H^n(E, E'; R)$ 使得它在每个纤维 (\mathbb{R}^n, S^{n-1}) 上的限制都是 $H^n(\mathbb{R}^n, S^{n-1}; R) = R$ 的

生成元。这样的类就被称为纤维丛的 **Thom 类**。如果假设 Thom 类存在, 则由相对 Leray-Hirsch 定理可以得到如下结果。

Proposition 2.1

如果丛 $(\mathbb{R}^n, S^{n-1}) \rightarrow (E, E') \xrightarrow{\pi}$ 有 Thom 类 c , 则映射

$$\Phi : H^i(B; R) \rightarrow H^{i+n}(E, E'; R), \Phi(b) = \pi^*(b) \cup c$$

对任意的 $i \leq 0$ 是同构。则显然有 $H^i(E, E'; R) = 0 (i < n)$ 。



下面我们讨论 Thom 类存在的有关命题。可以看出 Thom 类的定义与之前所说的基本同调类的定义有一定的类似之处, 我们可以猜测 $R = \mathbb{Z}_2$ 时 Thom 类始终存在, 而 $R = \mathbb{Z}$ 时则需要一定的定向性条件。事实上也确实如此。

Theorem 2.3

任何向量丛都存在 \mathbb{Z}_2 系数的 Thom 类。



证明 仍然分步证明该定理。(对于省略的一些细节, 可以参考 Milnor 的《示性类》第十节)

第一步 若该向量丛为平凡的, 则可以把 E 视为 $B \times \mathbb{R}^n$, 此时 $H^n(E, E'; \mathbb{Z}_2) = H^n(B \times \mathbb{R}^n, B \times S^{n-1}; \mathbb{Z}_2)$ 。

Lemma 2.1

$$H^j(B; \mathbb{Z}_2) \approx H^{j+n}(B \times \mathbb{R}^n, B \times S^{n-1}; \mathbb{Z}_2)$$



证明 我们知道 $n = 1$ 时, $H^n(\mathbb{R}^n, S^{n-1}; \mathbb{Z}_2) \approx \mathbb{Z}_2$, 取其非零元素为 e^1 , 则利用 Kunneth 公式和考虑三元组 $(B \times \mathbb{R}, B \times \mathbb{R}^*, B \times \mathbb{R}^-)$ 构成的正合列可以证明 $y \mapsto y \times e^1$ 给出了 $H^j(B; \mathbb{Z}_2)$ 到 $H^{j+1}(B \times \mathbb{R}, B \times \mathbb{R}^*; \mathbb{Z}_2)$ 的同构。再利用五引理追图论证和归纳法可以证明 $y \mapsto y \times e^n$ 给出了我们想要的同构, 其中 $e^n = e^1 \times e^1 \cdots \times e^1$ 。

回到原定理, 则只需要找到 $H^0(B; \mathbb{Z}_2)$ 中在 B 的处处的限制非零的类即可, 自然也就是 1, 故 $1 \times e^n$ 给出了我们想要的类。

第二步 如果 $B = B_1 \cup B_2$, 其中 B_1 和 B_2 是使得定理结论成立的子集, 则显然 $B_1 \cap B_2$ 也

使得结论成立。利用相对的 Mayer-Vietoris 序列: (为了简便, 记 $E^\cap = E_1 \cap E_2, E'^\cap = E'_1 \cap E'_2$)

$$\cdots \rightarrow H^{i-1}(E^\cap, E'^\cap; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^i(E, E'; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^i(E_1, E'_1; \mathbb{Z}_2) \oplus H^i(E_2, E'_2; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^i(E^\cap, E'^\cap; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \cdots$$

由假设, 存在 $u_1 \in H^n(E_1, E'_1; \mathbb{Z}_2)$ 和 $u_2 \in H^n(E_2, E'_2; \mathbb{Z}_2)$ 使得它们在每个纤维上的限制为非零的。再一次使用之前讨论过的唯一性论证 (见 1.2 节), 可以证明 u_1 和 u_2 在 $H^n(E^\cap, E'^\cap; \mathbb{Z}_2)$ 中有相同的像, 则它们都来自于唯一的 $u \in H^n(E, E'; \mathbb{Z}_2)$, 再由绝对 Mayer-Vietoris 序列 (其中 $j + n = i$)

$$\cdots \rightarrow H^{j-1}(E^\cap; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^j(E; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^j(E_1; \mathbb{Z}_2) \oplus H^j(E_2; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^j(E^\cap; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \cdots$$

和五引理追图论证, 可以证明 $y \mapsto y \cup u$ 给出了同构 $H^j(E; \mathbb{Z}_2) \approx H^{j+n}(E, E; \mathbb{Z}_2)$ 。

第三步 如果 B 由有限个使得定理结论成立的子集合覆盖, 则由归纳法并反复使用第二步即可。

第四步 对一般的拓扑空间 B , 取 B 的紧子集 C , 则由第三步 C 使得定理结论成立。再利用标准的直极限论证可以证明一般的情况。细节在此处略去。 \square

对于系数取为 \mathbb{Z} 的情况, 我们需要定向性条件, 这就需要对向量丛的可定向性进行定义。

给定纤维丛 $S^{n-1} \rightarrow E \rightarrow B$, 对 B 上的任何一个道路 $\gamma : I \rightarrow B$, 存在一个同伦 $g_t : F_{\gamma(0)} \hookrightarrow B$ 使得 $g_t(F_{\gamma(0)}) = \gamma(t)$, 则包含映射 $F_{\gamma(0)} \rightarrow E$ 给出了一个提升 \hat{g}_0 , 又由于纤维丛是具有同伦提升性质的, 存在同伦的提升 $\hat{g}_t : F_{\gamma(0)} \rightarrow E$ 使得 $\hat{g}_t(F_{\gamma(0)}) \subset F_{\gamma(t)}$ 。特别地, \hat{g}_1 给出了一个映射 $L_\gamma : F_{\gamma(0)} \rightarrow F_{\gamma(1)}$, 并且可以证明 L_γ 是这两个纤维之间的同伦等价。现在取 γ 为 B 上的一个圈, 则 L_γ 为一个纤维到自身的同伦等价。

Definition 2.2

如果对任意 B 上的圈 γ , L_γ 诱导的上同调群 $H^{n-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z})$ 上的自同态为恒等映射, 则称纤维丛 $S^{n-1} \rightarrow E \rightarrow B$ 是可定向的。对于球丛 $D^n \rightarrow E \rightarrow B$, 称其为可定向的是指其边界丛 $S^{n-1} \rightarrow E' \rightarrow B$ 是可定向的。



Theorem 2.4

任何可定向的向量丛都有 \mathbb{Z} 系数的 *Thom* 类。



证明 根据 CW 逼近, 只需考虑 B 是 CW 复形时的情况, 同时由于全过程中考虑的均为有限维的上同调群, 不妨设 B 是有限维的 CW 复形。我们后面会证明在此条件下, 限制映射 $H^i(E, E'; \mathbb{Z}) \rightarrow H^i(D_x^n, S_x^{n-1}; \mathbb{Z})$ 对每一个纤维 D_x^n 和 $i \leq n$ 是同构。

在假设这个命题成立的情况下, 取定一个纤维对应的同构 $H^n(E, E'; \mathbb{Z}) \approx H^n(D_x^n, S_x^{n-1}; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$ 。则对任意的 y , 取一个 x 到 y 的道路 γ , 则包含映射 $(D_x^n, S_x^{n-1}) \hookrightarrow (E, E')$ 与另外一个包含映射 $(D_y^n, S_y^{n-1}) \hookrightarrow (E, E')$ 与 L_γ 的复合是同伦的。则由可定向性条件, 我们选取的同构 $H^n(E, E'; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$ 能够限制在每个纤维上都是 $H^n(D_x^n, S_x^{n-1}; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$, 则 $H^n(E, E'; \mathbb{Z})$ 的生成元就是 *Thom* 类, 故只需要证明前面所论述的这个命题即可。采取归纳的方法。

设对所有 $k-1$ 维 CW 复形有结论成立。设 B 是一个 k 维的 CW 复形, $B_1 \subset B$ 是把 B 的每个 k -细胞删掉一个内点所得到的子空间, B_2 是所有开 k -细胞的并, 则显然 $B = B_1 \cup B_2$ 。同样有 Mayer-Vietoris 序列

$$H^n(E, E'; \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(E_1, E'_1; \mathbb{Z}) \oplus H^n(E_2, E'_2; \mathbb{Z}) \xrightarrow{f} H^n(E^\cap, E'^\cap; \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

又 $B_1 \cap B_2$ 可以形变收缩为 $(k-1)$ 维球面的并, 故 E^\cap 可以由 E 在这些 $(k-1)$ 维球面上的部分代替。又由正合性 $H^n(E, E'; \mathbb{Z}) \approx \text{Ker } f$ 。

由归纳假设可知 $H^n(E_1, E'_1; \mathbb{Z})$, $H^n(E_2, E'_2; \mathbb{Z})$ 和 $H^n(E^\cap, E'^\cap; \mathbb{Z})$ 均为 \mathbb{Z} 的直和, 每一个 \mathbb{Z} 对应相应空间的一个分支。

$\text{Ker } f$ 中的元素 $(\alpha, \beta) \in H^n(E_1, E'_1; \mathbb{Z}) \oplus H^n(E_2, E'_2; \mathbb{Z})$ 在 $H^n(E^\cap, E'^\cap; \mathbb{Z})$ 上的限制相同, 也即意味着 α 和 β 在上述直和分解中的 \mathbb{Z} 坐标相同。则 $\text{Ker } f \approx \mathbb{Z}$, 故有 $H^n(E, E'; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$ 。

令一方面, 对 $i < n$, 同样考虑 Mayer-Vietoris 序列

$$H^{i-1}(E^\cap, E'^\cap; \mathbb{Z}) \rightarrow H^i(E, E'; \mathbb{Z}) \rightarrow H^i(E_1, E'_1; \mathbb{Z}) \oplus H^i(E_2, E'_2; \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

利用归纳法显然有 $H^i(E, E'; \mathbb{Z})$ 左右两边的群均为 0，则 $H^i(E, E'; \mathbb{Z}) = 0$ 。

综上 $H^i(E, E'; \mathbb{Z}) \approx H^i(D_x^n, S_x^{n-1}; \mathbb{Z})$ ，得证。 \square

事实上该定理可以强化，即存在 \mathbb{Z} 系数的 Thom 类与可定向性等价，证明在这里不给出。

2.2 Gysin 序列与 Euler 类

在上一节的基础上，我们可以对纤维丛 $S^{n-1} \rightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ 建立所谓的 Gysin 序列。考虑映射柱 M_π ，也有纤维丛 $D^n \rightarrow M_\pi \xrightarrow{\pi} B$ 。假设 Thom 类 $c \in H^n(M_\pi, E; R)$ 存在，则考虑图表 (Φ 为 Thom 同构)

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & H^i(M_\pi, E; R) & \xrightarrow{j^*} & H^i(M_p; R) & \longrightarrow & H^i(E; R) \longrightarrow H^{i+1}(M_\pi, E; R) \longrightarrow \cdots \\
 & & \uparrow \Phi \approx & & \approx \uparrow \pi^* & & \uparrow = & & \uparrow \Phi \approx \\
 \cdots & \longrightarrow & H^{i-n}(B; R) & \xrightarrow{\cup e} & H^i(B; R) & \xrightarrow{\pi^*} & H^i(E; R) \longrightarrow H^{i-n+1}(B; R) \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

图表中出现的 e 定义为 $(\pi^*)^{-1}j^*(c)$ ，被称为 R 系数的 **Euler 类**。第一块正方形是可交换的：对任意的 $b \in H^{i-n}(B; R)$ ，有 $j^*\Phi(b) = j^*(\pi^*(b) \cup c) = \pi^*(b) \cup j^*(c) = \pi^*(b) \cup \pi^*(e) = \pi^*(b \cup e)$ 。在后面的讨论中，如果不加特殊说明，则取 Euler 类为 \mathbb{Z} 系数的并且在此时加上向量丛的可定向性条件，记作 $e(\xi)$ 。

下面讨论 Euler 类的众多性质。

Proposition 2.2

- (1) (自然性) 如果 $f: B \rightarrow B'$ 来自于一个保定向的丛映射 $\xi \rightarrow \xi'$ ，则 $e(\xi) = f^*(e(\xi'))$
- (2) (反定向性) 如果 ξ 的定向反转，则 $e(\xi)$ 改变符号。
- (3) 如果纤维丛的维数 n 为奇数，则 $e(\xi) + e(\xi) = 0$



这几条性质的验证比较简单，在此略过。

Proposition 2.3

$$e(\xi_1 \oplus \xi_2) = e(\xi_1) \cup e(\xi_2), e(\xi_1 \times \xi_2) = e(\xi_1) \times e(\xi_2)$$



证明 设 ξ_1 和 ξ_2 的维数分别为 m 和 n ，则由上同调类的交叉积的性质立即有

$$c(\xi_1 \times \xi_2) = (-1)^{mn} c(\xi_1) \times c(\xi_2)$$

再在等式两边作用限制同态则得到 $e(\xi_1 \times \xi_2) = (-1)^{mn} e(\xi_1) \times e(\xi_2)$ 。但上一个命题说明了当 m 或 n 为奇数时等式两边都为二阶元，符号问题可以忽略。第二个等式可以通过取 $B' = B$ 并在第一个等式两端同时作用上对角嵌入的诱导同态得到。 \square

Euler 类可以用于判断向量丛的一些具体性质，如是否存在非零截面、是否存在某种条件的子丛等，也即可以视为一种拓扑障碍。

Proposition 2.4

若 ξ 有一个处处非零的截面，则 $e(\xi)$ 必须为 0。



证明 设 $s : B \rightarrow E'$ 为一个处处非零的截面，则复合 $B \xrightarrow{s} E' \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ 是恒等映射。则其诱导同态的复合 $H^n(B; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi^*} H^n(E; \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(E'; \mathbb{Z}) \xrightarrow{s^*} H^n(B; \mathbb{Z})$ 也为恒等映射。由定义 $\pi^*(e(\xi)) = c|_E$ ，则前两个诱导同态的复合把 $e(\xi)$ 映成 $(c|_E)|_{E'}$ 。

又由于复合 $H^n(E, E'; \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(E; \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(E'; \mathbb{Z})$ 为零映射，故前两个诱导同态把 $e(\xi)$ 映为 0，则 $e(\xi) = s^*(0) = 0$ 。

(如果假设 ξ 被赋予了欧氏度量结构，则令 ε 为截面 s 张成的平凡线丛，则有 $e(\xi) = e(\varepsilon) \cup e(\varepsilon^\perp)$ ，由 ε 是平凡的， $e(\varepsilon) = 0$ ，则得证) \square

Example 2.1 设 M 为紧光滑流形，切丛记为 τ ，如果 $e(\tau) \neq 0$ ，则 τ 不存在奇数维子向量丛：假设这样的子丛 ξ 存在，若为可定向的，则 $e(\tau) = e(\xi) \cup e(\xi^\perp)$ 是自由 Abel 群 $H^n(M; \mathbb{Z})$ 中的二阶元，矛盾。若为不可定向的，则可以通过考虑 M 的可定向双叶覆叠流形来约化为第一种情况。

Chapter 3 Stiefel-Whitney 类

本章我们主要讨论 S-W 类，它可以刻画建立处处不相关的截面的拓扑障碍。与前面的 Thom 类和 Euler 类不同，我们先采用公理化定义的方法引入 S-W 类，再具体构造符合公理的种类并验证唯一性。这种方法在后续研究陈类的时候会再次用到。

3.1 公理化定义

Definition 3.1

对每一个 n 维向量丛 ξ 都对应着一列上同调类 $w_i(\xi) \in H^i(B(\xi), \mathbb{Z}_2) (i = 1, 2, \dots)$ ，被称为 ξ 的 Stiefel-Whitney 类，其中 $w_i(\xi) (i = 1, 2, \dots)$ 满足如下公理：

- (1) $w_0(\xi) = 1 \in H^0(B(\xi), \mathbb{Z}_2)$ ，且 $w_i(\xi) = 0 (i > n)$
- (2) $f: B(\xi) \rightarrow B(\eta)$ 来自于丛映射 $\xi \rightarrow \eta$ ，则 $w_i(\xi) = f^*(w_i(\eta))$
- (3) 若 ξ 和 η 有相同的底空间，则

$$w_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i=0}^k w_i(\xi) \cup w_{k-i}(\eta)$$

- (4) 对 \mathbb{RP}^1 上的典范线丛 γ_1^1 ，有 $w_1(\gamma_1^1) \neq 0$ 。



在接下来我们都先假设满足如上四条公理的种类是存在的，则由这四条公理不难得到如下的一些性质。

Proposition 3.1

- (1) 若 ξ 与 η 同构，则 $w_i(\xi) = w_i(\eta) (\forall i)$ 。
- (2) 若 ε 为平凡丛，则 $w_i(\varepsilon) = 0 (i > 0)$ 。
- (3) 若 ε 为平凡丛，则 $w_i(\varepsilon \oplus \eta) = w_i(\eta)$ 。
- (4) 若 ξ 是一个赋予欧氏度量的 n 维向量丛且有 k 个处处线性无关的截面，则 $w_i(\xi) =$

$0(n-k+1 \leq i \leq n)$ 。特别地，若 ξ 存在一个处处非零截面，则 $w_n(\xi) = 0$ 。

当 $\xi \oplus \eta$ 为平凡丛时，显然有 $w_1(\xi) + w_1(\eta) = 0, w_2(\xi) + w_1(\xi)w_1(\eta) + w_2(\eta) = 0$ 等一系列关系式，则 $w_i(\eta)$ 可以完全由 ξ 的 S-W 类的多项式来表示。为了方便，我们引入总 S-W 类这一记号。

Definition 3.2

$H^\Pi(B; \mathbb{Z}_2)$ 是由全体形式无穷序列 $a = a_1 + a_2 + \cdots$ 组成的环，其中 $a_i \in H^i(B; \mathbb{Z}_2)$ ，其乘法由 $(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots)(b_0 + b_1 + b_2 + \cdots) = (a_0b_0) + (a_1b_0 + a_0b_1) + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2) + \cdots$ 给出。

ξ 的总 Stiefel-Whitney 类 定义为这个环中的元素 $w(\xi) = 1 + w_1(\xi) + w_2(\xi) + \cdots$ 。

不难看出在总 S-W 类的记号下，公理的第三条可以被重新写为 $w(\xi \oplus \eta) = w(\xi)w(\eta)$ 。总 S-W 类的第一项必然为 1，不难验证所有首项为 1 的元素都在环中存在唯一的逆，为了方便记 $w^{-1} = \overline{w}$ 。则当 $\xi \oplus \eta$ 为平凡丛时， $w(\xi \oplus \eta) = 0$ ，也即 $w(\eta) = \overline{w(\xi)}$ 。

Corollary 3.1 (Whitney 对偶定理)

τ_M 为流形 M 的切丛， ν 为法丛，则 $w_i(\nu) = \overline{w_i(\tau_M)}$ 。

Example 3.1 对流形 M ，我们往往用 $w(M)$ 代指 $w(\tau_M)$ 。对球面 S^n ，考虑其标准嵌入 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ，法丛 ν 显然是平凡的，即 $w(\nu) = 1$ ，则由上述推论 $w(S^n) = w(\tau_{S^n}) = 1$ 。

接下来我们具体讨论 \mathbb{RP}^n 的 S-W 类。下面的例 3.2 和引理 3.1 能够帮助我们解决这一问题。首先我们熟知 \mathbb{RP}^n 的上同调环 $H^*(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}_2)$ 由 $\mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^{n+1})$ 给出。

Example 3.2 考虑 \mathbb{RP}^n 上的典范线丛 γ_n^1 ，标准嵌入 $i: \mathbb{RP}^1 \hookrightarrow \mathbb{RP}^n$ 显然可以由丛映射 $\gamma_1^1 \rightarrow \gamma_n^1$ 得到，则由 S-W 类定义的第二与第四条公理

$$i^*(w_1(\gamma_n^1)) = w_1(\gamma_1^1) \neq 0$$

则 $w_1(\gamma_n^1)$ 不为 0, 则必然为 α , 由 γ_n^1 的维数为 1, 故其总 S-W 类为 $1 + \alpha$ 。

γ_n^1 可以自然地被视为 $n+1$ 维平凡丛 ε^{n+1} 的子丛, 取其正交补丛为 γ^\perp , 则自然地其全空间为 $(\{\pm x\}, v)$ (v 与 x 所在的直线垂直) 所构成的集合, 为 $\mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ 的子集。

由于 $\gamma_n^1 \oplus \gamma^\perp$ 是平凡丛, 则有 $w(\gamma^\perp) = \overline{w}(\gamma_n^1) = (1 + \alpha)^{-1} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n$ 。

Lemma 3.1

$$\tau_{\mathbb{RP}^n} \simeq \text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp)$$



证明 L 为 \mathbb{R}^{n+1} 中经过原点的一条直线, 与 S^n 交于 $\pm x$, 并记 L^\perp 为该直线的正交补 n 维平面。考虑典范映射 $S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n, x \mapsto \{\pm x\}$ 的切映射 $df_x : T_x S^n \rightarrow T_{\{\pm x\}} \mathbb{RP}^n$, 显然对 $v \in T_x S^n$, 有 $df_x(v) = df_{-x}(-v)$, 故 $T_{\{\pm x\}} \mathbb{RP}^n$ 与所有的对 $\{(x, v), (-x, -v) : x \perp v\}$ 构成的集合同构。

由每一个这样的对可以与 $\text{Hom}(L, L^\perp)$ 中的元素 $x \mapsto v$ 一一对应, 故 $T_{\{\pm x\}} \mathbb{RP}^n \simeq \text{Hom}(L, L^\perp)$, 则 $\tau_{\mathbb{RP}^n} \simeq \text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp)$ 。 □

Proposition 3.2

$$\tau_{\mathbb{RP}^n} \oplus \varepsilon^1 \simeq \gamma_n^1 \oplus \gamma_n^1 \oplus \cdots \oplus \gamma_n^1 \text{ (} n+1 \text{ 个)}, \text{ 进而 } w(\mathbb{RP}^n) = (1 + \alpha)^n.$$



证明 显然 $\text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1)$ 是平凡线丛 (它有一个处处非零的截面), 故

$$\tau_{\mathbb{RP}^n} \oplus \varepsilon^1 \simeq \text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp) \oplus \text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1) \simeq \text{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1 \oplus \gamma^\perp) \simeq \text{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon^{n+1})$$

又 $\text{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon^{n+1}) = \text{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon^1) \oplus \text{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon^1) \cdots \oplus \text{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon^1)$ (共 $n+1$ 个), 故得证。

由又命题 3.1, $w(\tau_{\mathbb{RP}^n}) = w(\tau_{\mathbb{RP}^n} \oplus \varepsilon^1) = (w(\gamma_n^1))^n$, 由例 3.2 的结果得证。 □

Corollary 3.2

$$w(\mathbb{RP}^n) = 1 \text{ 当且仅当 } n = 2^k - 1 (k \in \mathbb{N})$$

进而若 \mathbb{RP}^n 是可平行化的, 则有 $n = 1, 3, 7, 15, \dots$ 。



证明 若 $n = 2^k - 1$, 则 $w(\mathbb{RP}^n) = (1 + \alpha)^{2^k - 1} = 1 + \alpha^{2^k} = 1 + \alpha^{n+1} = 1$

反之若 $n = 2^k m$ (m 为大于 1 的奇数), 则

$$w(\mathbb{RP}^n) = (1 + \alpha^{2^k})^m = 1 + m\alpha^{2^k} + \frac{m(m-1)}{2}\alpha^{2^{k+1}} + \cdots \neq 1$$

矛盾! 故原命题得证。

□

Remark 事实上可以证明只有 $\mathbb{RP}^1, \mathbb{RP}^3, \mathbb{RP}^7$ 是可平行化的。

3.2 S-W 类的初步应用

这一节我们利用 S-W 类来解决一些有趣的小问题。

首先我们回忆在微分流形课程中学到的强 Whitney 浸入定理。

Theorem 3.1 (强 Whitney 浸入定理)

任意 $m(m > 1)$ 维的光滑流形可以被浸入到 \mathbb{R}^{2m-1} 中。



这里我们说明 $2m - 1$ 是最强的结果。

Proposition 3.3

若 \mathbb{RP}^{2^r} 可以浸入到 \mathbb{RP}^{2^r+k} 中, 则 $k \geq 2^r - 1$ 。



证明 回忆上一节中我们得到 (取 $n = 2^r$)

$$w(\mathbb{RP}^n) = (1 + \alpha)^{n+1} = 1 + \alpha + \alpha^n$$

则 $\bar{w}(\mathbb{RP}^n) = (w(\mathbb{RP}^n))^{-1} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-1}$ 。

另一方面, 若 \mathbb{RP}^n 可以浸入到 \mathbb{RP}^{n+k} 中, 则对法丛 ν 维数为 k , 自然有 $w_i(\nu) = 0 (i > k)$ 。

又由 Whitney 对偶定理

$$\bar{w}_i(\mathbb{RP}^n) = w_i(\nu)$$

有 $\bar{w}_i(\mathbb{RP}^n) = 0 (i > k)$, 则 $k \geq n - 1 = 2^r - 1$ 。

□

两个同维数流形的并能否实现为一个更高维流形的边界是配边理论中的重要问题。S-W 类在非定向配边理论中也发挥了重要的作用, 为此我们需要引入 Stiefel-Whitney 数的概念。

取 M 为一个 n 维的闭流形, 则在第一章的预备知识中我们知道可以定义 M 的 \mathbb{Z}_2 系数的基本同调类 $\mu_M \in H_n(M; \mathbb{Z}_2)$, 则对任意的 $v \in H^n(M; \mathbb{Z}_2)$, 我们得到一个指标 $\langle v, \mu_M \rangle \in \mathbb{Z}_2$, 被称为 Kronecker 指标, 简记为 $v[M]$ 。

现在我们对 v 取一些具体的值。令 r_1, r_2, \dots, r_n 为一列满足 $r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = n$ 的非负整数，则对切丛 τ_M ，可以取出 $H^n(M; \mathbb{Z}_2)$ 中的元素

$$w_1^{r_1}(\tau_M)w_2^{r_2}(\tau_M) \cdots w_n^{r_n}(\tau_M)$$

取它为上述的 v ，得到的对应 Kronecker 指标具有非常重要的意义。

Definition 3.3

模 2 的指标

$$\langle w_1^{r_1}(\tau_M)w_2^{r_2}(\tau_M) \cdots w_n^{r_n}(\tau_M), \mu_M \rangle = w_1^{r_1}w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}[M]$$

被称为流形 M 相关于单项式 $w_1^{r_1}w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}$ 的 Stiefel-Whitney 数。

对两个流形 M, M' ，称他们有相同的 Stiefel-Whitney 数，是指对任意的如上 r_1, r_2, \dots ，均有

$$w_1^{r_1}w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}[M] = w_1^{r_1}w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}[M']$$



Example 3.3 本例中我们来计算 $M = \mathbb{RP}^n$ 的 S-W 数。

如果 n 为偶数，则 $w_n(M) = (n+1)\alpha^n \neq 0$ ，则取 $r_1 = \dots = r_{n-1} = 0, r_n = 1$ ，对应的 S-W 数为 $\langle w_n(M), \mu_M \rangle \neq 0$ 。故 \mathbb{RP}^n 有非零的 S-W 数。

若 $n = 2k - 1$ 为奇数，则 $w(M) = (1 + \alpha)^{2k} = (1 + \alpha^2)^k$ ，则 $w_j(M) = 0$ (j 为奇数)。但又由于

$$r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = n$$

右边为奇数，则必须存在 j 为奇数使得 $r_j \neq 0$ ，则 $w_1^{r_1}w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}[M] = 0$ 。故 \mathbb{RP}^n 的所有 S-W 类均为 0。

如下的两个定理表明了 S-W 数的重要性。

Theorem 3.2 (Pontrjagin 定理)

若 n 维流形 M 为某一个 $n+1$ 维流形 B 的边界，则 M 的所有 S-W 数均为 0。



证明 取带边流形 B 的基本同调类 $\mu_B \in H_{n+1}(B, M; \mathbb{Z}_2)$ ，由命题 1.2，同调群的长正合列连

接同态 $\partial : H_{n+1}(B, M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_n(M; \mathbb{Z}_2)$ 把 μ_B 映为 μ_M 。再记上同调群的长正合列中的连接同态为 $\delta : H^n(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{n+1}(B, M; \mathbb{Z}_2)$ ，则对任意的 $v \in H^n(M; \mathbb{Z}_2)$ ，有

$$\langle v, \mu_M \rangle = \langle v, \partial \mu_B \rangle = \langle \delta v, \mu_B \rangle$$

对切丛 τ_B 在 M 的限制，取其 M 的外法向量丛，则其显然有一个处处非零的截面，故为平凡线丛。且又由于该丛的正交补为切丛 τ_M ，我们有

$$\tau_B|_M \simeq \tau_M \oplus \varepsilon^1$$

故 $w(\tau_B)|_M = w(\tau_M)$ ，则

$$w_1^{r_1} w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n} [M] = \langle \delta(w_1^{r_1} w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}), \mu_B \rangle = \langle \delta i^*(w_1^{r_1} w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}), \mu_B \rangle$$

又由于有正合列

$$H^n(B; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i^*} H^n(M; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(B, M; \mathbb{Z}_2)$$

也即 $\delta i^* = 0$ ，则 $w_1^{r_1} w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n} [M] = 0$ ，故得证。 \square

事实上，该定理的逆命题也正确，但这是一个强的多的结果，在此并不给出证明。

Theorem 3.3 (Thom)

如果流形 M 的所有 Stiefel-Whitney 数为 0，则 M 可以实现为某一个紧光滑流形的边界。♡

Example 3.4 我们在上面已经计算过了 \mathbb{RP}^{2k-1} 的所有 Stiefel-Whitney 数均为 0，故由 Thom 定理， \mathbb{RP}_{2k-1} 可以实现为流形的边界。

下面我们讨论两个流形的无交并能否被实现为流形的边界这一问题。

Definition 3.4

对两个 n 维光滑流形 M_1, M_2 ，称它们属于同一个不定向配边类，如果它们的无交并 $M_1 \amalg M_2$ 是一个 $(n+1)$ 维紧光滑流形的边界，此时简记为 $M_1 \sim M_2$ 。



Proposition 3.4

\sim 给出了所有 n 维光滑流形集合中的一个等价关系。



证明 首先，对同一个流形 M 的两份复制，它们的并是流形 $M \times [0, 1]$ 的边界，故 $M \simeq M$ 。

对称性是显然的。

若 $L \simeq M, M \simeq N$ ，则设 $L \amalg M$ 是 V 的边界， $M \amalg N$ 是 W 的边界。则可以把 V 和 W 沿边界上 M 的部分粘连起来（由管状邻域定理可以保证该过程的实现）形成新的流形 X ，则 $L \amalg N$ 是 X 的边界，则 $L \sim N$ 。 \square

为了研究更平凡的配边关系，我们不难想到刚才所讨论的 Pontrjagin 定理和 Thom 定理。为了运用它们，首先需要讨论无交并流形的 Stiefel-Whitney 数。

Lemma 3.2

对两个 n 维光滑流形 M 和 N 和满足 $r_1 + 2r_2 + \cdots + nr_n = n$ 的非负整数序列 r_1, r_2, \cdots, r_n ，有

$$w_1^{r_1} w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n} [M \amalg N] = w_1^{r_1} w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n} [M] + w_1^{r_1} w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n} [N]$$



证明 首先我们熟知

$$H^n(M \amalg N; \mathbb{Z}_2) \simeq H^n(M; \mathbb{Z}_2) \oplus H^n(N; \mathbb{Z}_2), H_n(M \amalg N; \mathbb{Z}_2) \simeq H_n(M; \mathbb{Z}_2) \oplus H_n(N; \mathbb{Z}_2)$$

同调群的关系给出了基本同调类之间的关系 $\mu_{M \amalg N} = (\mu_M, \mu_N)$ 。

上同调群的关系给出了 S-W 类的关系（这里使用到了 S-W 类公理化定义中的自然性）

$w(M \amalg N) = (w(M), w(N))$ ，则结论显然成立。 \square

则结合该引理和上述的 Pontrjagin 定理、Thom 定理，我们得到了属于同一不定向配边类的等价判据。

Corollary 3.3

两个流形 M 和 N 属于同一个不定向配边类当且仅当它们有相同的 Stiefel-Whitney 数。



3.3 存在性的证明

在上面的讨论中我们都假设了 **S-W** 类的存在性，在这一节中我们会通过具体构造的方法给出 **S-W** 类的存在性的证明。

为了后续需要，这里我们引入代数拓扑中 **Steenrod** 平方的概念。

Definition 3.5

满足如下一系列条件的同态 $Sq^i : H^n(X; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{n+i}(X; \mathbb{Z}_2)$ 称为 **Steenrod 平方**。

- (1) 可加性: $Sq^i(a + b) = Sq^i(a) + Sq^i(b)$
- (2) 自然性: 对 $f : X \rightarrow Y$, $Sq^i(f^*(\alpha)) = f^*(Sq^i(\alpha))$
- (3) 边界条件: 若 $a \in H^n(X; \mathbb{Z}_2)$, 则 $Sq^0(a) = a, Sq^n(a) = a \cup a, Sq^i(a) = 0 (i > n)$ 。
- (4) *Cartan* 公式: $Sq^k(a \cup b) = \sum_{i=0}^k Sq^i(a) \cup Sq^{k-i}(b)$ 。

对相对情形 (X, Y) 也可以定义 **Steenrod** 平方，所满足的条件与上述一致，此处不再重复。



在这里我们默认满足如上条件的同态确实成立（具体构造非常复杂，详见 **Hatcher** 的代数拓扑第四章附录 L，此处省略）。

回忆我们在 2.1 节建立的 **Thom** 同构: $\Phi : H^i(B; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{i+n}(E, E'; \mathbb{Z}_2), b \mapsto \pi^*(b) \cup c$, 其中 c 为 **Thom** 类。则我们断言

Theorem 3.4

$w_i(\xi) = \Phi^{-1} Sq^i \Phi(1)$ 符合 *Stiefel-Whitney* 类定义中的几条公理。（下面的所有 **Steenrod** 平方默认是在相对情形下定义的）



证明 为了简洁性，对 $a \in H^n(X, Y; \mathbb{Z}_2)$, 定义其总 **Steenrod** 平方为

$$Sq(a) = a + a + Sq^1(a) + Sq^2(a) + \cdots + Sq^n(a)$$

则令 $w(\xi) = \Phi^{-1} Sq(\Phi(1)) = \Phi^{-1} Sq(c)$, 下面我们逐条验证 w 满足四条公理。

第一条 由 Steenrod 平方的定义 (3), 显然

$$w_0(\xi) = \Phi^{-1}Sq^0(c) = \Phi^{-1}(c) = 1$$

且对 $i > n$

$$w_i(\xi) = \Phi^{-1}Sq^i(c) = \Phi^{-1}(0) = 0$$

第二条 对任意丛映射 $f: \xi_1 \rightarrow \xi_2$, 有诱导映射 $g: (E_1, E'_1) \rightarrow (E_2, E'_2)$ 。令 c_i 为 ξ_i 的 Thom 类, Φ_i 为 ξ_i 的 Thom 同构, 则由 Thom 类的定义不难有 $g^*(c_2) = c_1$, 则

$$g^*(\Phi_2(a)) = g^*(\pi_2^*(a) \cup c_2) = g^*(\pi_2^*(a)) \cup c_1 = \pi_1^*(f^*(a)) \cup c_1 = \Phi_1(f^*(a))$$

由 Steenrod 平方的定义 (2), 有

$$f^*(w_i(\xi_2)) = f^*(\Phi_2^{-1}Sq^i(c_2)) = \Phi_1^{-1}(g^*(Sq^i(c_2))) = \Phi_1^{-1}(Sq^i(g^*(c_2))) = \Phi_1^{-1}Sq^i(c_1) = w_i(\xi_1)$$

第三条 考虑笛卡尔积 $\xi = \xi_1 \times \xi_2$, ξ_i 的 Thom 类为 $c_i \in H^{n_i}(E_i, E'_i; \mathbb{Z}_2)$, 则可以定义交叉积 $c_1 \times c_2 \in H^{n_1+n_2}(E_1 \times E_2, E_1 \times E'_2 \cup E'_1 \times E_2; \mathbb{Z}_2) = H^{n_1+n_2}(E_1 \times E_2, (E_1 \times E_2)'; \mathbb{Z}_2)$ 。但 $c_1 \times c_2|_{F_1 \times F_2, (F_1 \times F_2)'} = c_1|_{(F_1, F'_1)} \times c_2|_{(F_2, F'_2)}$, 故由定义可知 $c_1 \times c_2$ 为笛卡尔积 $\xi_1 \times \xi_2$ 的 Thom 类。令 Φ 为 $\xi_1 \times \xi_2$ 的 Thom 同构, 则

$$\Phi(a \times b) = (\pi_1 \times \pi_2)^*(a \times b) \cup (c_1 \times c_2) = (\pi_1^*(a) \cup c_1) \times (\pi_2^*(b) \cup c_2) = \Phi_1(a) \times \Phi_2(b)$$

可以计算

$$w(\xi) = \Phi^{-1}(Sq(c)) = \Phi^{-1}(Sq(c_1) \times Sq(c_2)) = \Phi^{-1}(\Phi_1(w(\xi_1)) \times \Phi_2(w(\xi_2))) = w(\xi_1) \times w(\xi_2)$$

现在设 ξ_1 和 ξ_2 有相同的底空间 B , 则将上式的两边同时利用对角线嵌入拉回到 B 上, 则有

$$w(\xi_1 \oplus \xi_2) = w(\xi_1) \cup w(\xi_2)$$

第四步 γ_1^1 为 \mathbb{RP}^1 上的典范线丛, 取全空间 $E(\gamma_1^1)$ 中长度小于等于 1 的向量构成的集合, 不

难看出它是一个 Mobius 带 M ，边界圆为 B 。由于 M 和 B 分别为 E 和 E' 的形变收缩核，有

$$H^*(M, B; \mathbb{Z}_2) \approx H^*(E, E'; \mathbb{Z}_2)$$

同时将 \mathbb{RP}^2 赋予典范 CW 复形结构，则有一个 2-细胞 D^2 ，且 $\mathbb{RP}^2 - D^2$ 同胚于 M ，则由切除定理

$$H^*(M, B; \mathbb{Z}_2) \approx H^*(\mathbb{RP}^2, D^2; \mathbb{Z}_2)$$

故可以自然地把 $H^1(E, E'; \mathbb{Z}_2)$ 嵌入到 $H^1(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}_2)$ 中，则基本同调类 $H^1(E, E'; \mathbb{Z}_2)$ 对应的像只能与 $H^1(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}_2)$ 的生成元 α 对应，则 $Sq^1(u) = u \cup u$ 与 $Sq^1(\alpha) = \alpha \cup \alpha \neq 0$ 对应，则

$$w_1(\gamma_1^1) = \Phi^{-1}Sq^1(u) \neq 0$$

故得证。

□

3.4 唯一性的证明

上一节中我们利用 Thom 同构和 Steenrod 平方构造了一个满足四条公理的 Stiefel-Whitney 类，本节中我们证明这是唯一的满足定义的类，主要思路是利用我们之前的讨论，把所有的向量丛推到无穷 Grassmann 流形 G_n 上，这首先需要我们对 G_n 的上同调环进行研究。

Theorem 3.5

G_n 的上同调环 $H^*(G_n; \mathbb{Z}_2)$ 是由 $w_1(\gamma^n), \dots, w_n(\gamma^n)$ 在 \mathbb{Z}_2 上生成的多项式代数。



证明 显然上式的右边包含于左边，则只需要对任意的 r 证明等式两边的 r 维群的秩相等即可。

令 C^r 为所有的 r -上链， Z^r 为所有的上边界，则

$$\text{rank}(H^r(G_n; \mathbb{Z}_2)) \leq \text{rank}(Z^r) \leq \text{rank}(C^r)$$

上式的最右侧即为 G_n 的 CW 复形结构中所有 r -细胞的个数，故 $\text{rank}(H^r(G_n; \mathbb{Z}_2))$ 至多等于 r -细胞数，回顾命题 1.5，即为将 r 分割为至多 n 个正整数的和的方法。

另一方面，原命题的右边的 r 维群中，对不同的非负整数序列 r_1, r_2, \dots, r_n 使得 $r_1 + 2r_2 + \dots + nr_n = r$ ，有不同（这需要接下来证明的引理！）的单项式 $w_1^{r_1}(\gamma^n) \cdots w_n^{r_n}(\gamma^n)$ 。对每组这样的 r_1, \dots, r_n ，取 $r_n, r_n + r_{n-1}, \dots, r_n + r_{n-1} + \dots + r_1$ 中的非零项，我们得到一个将 r 分割为至多 n 个正整数的和的方案，并不难验证满足条件的 r_1, \dots, r_n 与这样的分割是一一对应的。故所有不同的 r 次单项式个数恰好等于对应的分割数。

同样由下面将要证的引理，所有的这样的单项式是线性无关的，则原命题右边的 r 维群的秩至少为这样的分割数。

由右边包含于左边，上述的不等式必须为等式，故 $H^*(G_n; \mathbb{Z}_2)$ 的 r 维群的秩与右边的多项式代数的 r 维群的秩相等，均为将 r 分割为至多 n 个正整数的方案数，故得证。 \square

证明中我们承认了如下的引理，在此补充叙述与证明。

Lemma 3.3

$w_1(\gamma^n), w_2(\gamma^n), \dots, w_n(\gamma^n)$ 之间没有多项式关系。



证明 若 $p(w_1(\gamma^n), \dots, w_n(\gamma^n)) = 0$, 其中 p 为模 2 系数的 n 元多项式, 则由命题 1.4, 任意仿紧空间上的 n 维向量丛 ξ , 存在丛映射 $g: \xi \rightarrow \gamma^n$, 则由自然性

$$w_i(\xi) = g^*(w_i(\gamma^n))$$

则有

$$p(w_1(\xi), w_2(\xi), \dots, w_n(\xi)) = g^*(p(w_1(\gamma^n), \dots, w_n(\gamma^n))) = 0$$

即对所有的 n 维丛 ξ , $w_i(\xi)$ 之间也有多项式关系。

但考虑 \mathbb{RP}^∞ 上的典范线丛 γ^1 , 我们知道 $H^*(\mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}_2)$ 是由 α 生成的多项式代数, 且 $w(\gamma^1) = 1 + \alpha$ 。

则考虑 n 次的笛卡尔积 $X = \mathbb{RP}^\infty \times \dots \times \mathbb{RP}^\infty$, 其上同调环 $H^*(X; \mathbb{Z}_2)$ 为 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 生成的多项式代数 (上述生成元均为 1 维的)。对丛的 n 次笛卡尔积 $\xi = \gamma^1 \times \dots \times \gamma^1$, 则 ξ 是 X 上的 n 维丛。则有

$$w(\xi) = (w(\gamma^1))^n = (1 + \alpha)^n = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdots (1 + \alpha_n)$$

则 $w_i(\xi)$ 是 i 元基本对称多项式, 显然所有的 $w_i(\xi)$ 之间没有多项式关系, 矛盾! 故 $w_i(\gamma^n)$ 之间没有多项式关系。 □

借助上面的结果我们证明 Stiefel-Whitney 类是唯一的。

Theorem 3.6

存在唯一的对应 $\xi \mapsto w(\xi)$ 将任意仿紧空间上的向量丛 ξ 对应于一列满足 Stiefel-Whitney 类定义的四条公理的上同调类。



证明 我们已经证明了存在性。下证唯一性。假设存在两个这样的对应 $\xi \mapsto w(\xi)$ 和 $\xi \mapsto \bar{w}(\xi)$,

则对 \mathbb{RP}^1 上的典范线丛 γ_1^1 , 有

$$w(\gamma_1^1) = \overline{w}(\gamma_1^1) = 1 + \alpha$$

将 γ_1^1 嵌入到 \mathbb{RP}^∞ 上的典范线丛 γ^1 中, 由自然性可知

$$w(\gamma^1) = \overline{w}(\gamma^1) = 1 + \alpha$$

再考虑 n 次笛卡尔积 $\xi = \gamma^1 \times \gamma^1 \cdots \times \gamma^1$, 有

$$w(\xi) = \overline{w}(\xi) = (1 + \alpha_1) \cdots (1 + \alpha_n)$$

则由命题 1.4, 存在丛映射 $\xi \rightarrow \gamma^n$, 再由定理 3.5, $H^*(G_n; \mathbb{Z}_2)$ 可以单嵌入到 $H^*(\mathbb{RP}^\infty \times \cdots \times \mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}_2)$ 中, 则由自然性 $w(\gamma_n) = \overline{w}(\gamma_n)$ 。

对任意仿紧空间上的 n 维向量丛 η , 再次使用命题 1.4, 存在丛映射 $f: \eta \rightarrow \gamma^n$, 则再次由自然性:

$$w(\eta) = f^*(w(\gamma^n)) = f^*(\overline{w}(\gamma^n)) = \overline{w}(\eta)$$

则 $w = \overline{w}$, 唯一性得证。 □

Chapter 4 实向量丛示性类理论的进一步应用

4.1 关于流形的法丛

M 是一个一个 n 维光滑流形，且作为闭子集嵌入在 $n+k$ 维黎曼流形 A 中，接下来我们讨论 M 在 A 中的法丛的示性类。首先陈述如下的管状邻域定理（我们在微分流形课程中学习过其特殊情况）：

Theorem 4.1 (管状邻域定理)

存在 M 在 A 中的开邻域 U ，使得 U 由映射 f 微分同胚于法丛的全空间，其中 f 将 M 中的每个点 x 映为 x 处的非零法向量。这样的邻域 U 称为 M 在 A 中的管状邻域。



证明 这里我们只证明 M 是紧流形时的情形。记法丛的全空间为 E ，则对任意的 $\varepsilon > 0$ ，定义 E 的开子集 $E(\varepsilon) = \{(x, v) \in E : |v| < \varepsilon\}$ 。取 ε 使得在 $E(\varepsilon)$ 上可以定义指数映射 $Exp: E(\varepsilon) \rightarrow A$ ，则我们先证明对足够小的 ε ， $E(\varepsilon)$ 被指数映射微分同胚地映为 A 中包含 M 的一个开集 N_ε 。

我们熟知指数映射 Exp 是局部微分同胚，故只需要证对足够小的 $\varepsilon > 0$ ， Exp 在 $E(\varepsilon)$ 上是单射即可。

若结论不成立，则对任意的 i ，存在 $E(\frac{1}{i})$ 中的 $(x_i, v_i) \neq (x'_i, v'_i)$ 使得 $Exp(x_i, v_i) = Exp(x'_i, v'_i)$ 。

则我们得到了一列点列 $\{(x_i, v_i)\}$ ，又由 M 是紧的，可以找到同时收敛的子列（为了简便不妨仍然以 i 为下表） $\lim_{i \rightarrow \infty} (x_i, v_i) = (x, 0)$ 和 $\lim_{i \rightarrow \infty} (x'_i, v'_i) = (x', 0)$ ，则

$$x = Exp(x, 0) = \lim_{i \rightarrow \infty} Exp(x_i, v_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} Exp(x'_i, v'_i) = Exp(x', 0) = x'$$

即 $x = x'$ ，但这与 Exp 在 $(x, 0)$ 的一个足够小邻域内为微分同胚矛盾！

则为了补全证明，只需要证 $E(\varepsilon)$ 与 E 也是微分同胚的。这是显然的，想要的同胚可以如

下具体构造出来:

$$(x, v) \mapsto \left(x, \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{|v|^2}{\varepsilon^2}}}\right)$$

则原命题得证。 □

在下面的讨论中我们均默认 M 被嵌入为 A 的闭子集, 当 M 为紧流形时该条件自然成立。

Proposition 4.1

对 M 在 A 中的法丛 ν (全空间为 E), 有上同调环之间的同构 $H^*(E, E'; R) \approx H^*(A, A - M; R)$



证明 取 N_ε 同上。首先由切除定理

$$H^*(A, A - M; R) \approx H^*(N_\varepsilon, N_\varepsilon - M; R)$$

则微分同胚 $Exp: (E(\varepsilon), E'(\varepsilon)) \rightarrow (N_\varepsilon, N_\varepsilon - M) \subset (A, A - M)$ 给出

$$H^*(E(\varepsilon), E'(\varepsilon); R) \approx H^*(A, A - M; R)$$

再次由切除定理

$$H^*(E(\varepsilon), E'(\varepsilon); R) \approx H^*(E, E'; R)$$

则结合上式得证。 □

Remark 可以说明上述命题中的同构与 A 的黎曼度量结构选取是无关的。

则现在取 E 的 \mathbb{Z}_2 系数 Thom 类, 则由上述命题, 它对应于一个上同调类 $u' \in H^k(A, A - M; \mathbb{Z}_2)$ 。如果法丛 ν 是可定向的, 则将系数取为 \mathbb{Z} 。

Definition 4.1

上述的 $u' \in H^k(A, A - M; R)$ 在自然同态下 $H^k(A; R)$ 中的像被称为 k 余维子流形 M 的 R -系数对偶上同调类。



对偶上调类与法丛的最高维 Stiefel-Whitney 类、Euler 类（如果可定向）之间有着如下的关系。

Theorem 4.2

\mathbb{Z}_2 系数的对偶上调类 u' 在限制同态 $H^k(A; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^k(M; \mathbb{Z}_2)$ 中的像为法丛 ν 的 k 维 Stiefel-Whitney 类 $w_k(\nu)$ 。

若 ν 是可定向的，则 \mathbb{Z} 系数的对偶上调类 u' 在限制同态 $H^k(A; \mathbb{Z}) \rightarrow H^k(M; \mathbb{Z})$ 中的像为法丛 ν 的 Euler 类 $e(\nu)$ 。



证明 定义 $s : M \rightarrow E$ 是法丛 ν 的非零截面，诱导映射 $s^* : H^*(E; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(M; \mathbb{Z}_2)$ ，则取 \mathbb{Z}_2 系数的 Thom 类 u ， $s^*(u|E) \in H^k(M; \mathbb{Z}_2)$ 。事实上它等于 $w_k(\nu)$ ：记 Φ 为 Thom 同构： $H^k(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{2k}(E, E'; \mathbb{Z}_2)$ ，则

$$s^*(u|E) = \Phi^{-1}(\pi^*(s^*(u|E)) \cup u) = \Phi^{-1}((u|_E) \cup u) = \Phi^{-1}(u \cup u) = \Phi^{-1}Sq^k(u) = w_k(\nu)$$

再用 $(N_\varepsilon, N_\varepsilon - M)$ 代替 (E, E') ，则自然同态 $H^k(N_\varepsilon, N_\varepsilon - M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^k(M; \mathbb{Z}_2)$ 将 u 对应的类映成 $w_k(\nu)$ ，则得证。

\mathbb{Z} 系数的情形需要如下引理。

Lemma 4.1

自然同态 $f : H^k(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H^k(M; \mathbb{Z}_2)$ 将 $e(\nu)$ 映为 $w_k(\nu)$ 。



证明 取 \bar{u} 为 \mathbb{Z} 系数 Thom 类，则同上

$$e(\nu) = \Phi^{-1}(\pi^*(e(\nu)) \cup \bar{u}) = \Phi^{-1}((\bar{u}|_E) \cup \bar{u}) = \Phi^{-1}(\bar{u} \cup \bar{u})$$

则

$$f(e(\nu)) = \Phi^{-1}(f(\bar{u} \cup \bar{u})) = \Phi^{-1}(u \cup u) = w_k(\nu)$$

最后一步来自于 \mathbb{Z}_2 情形下的证明。

在承认上述引理的情况下， \mathbb{Z} 系数的情形与 \mathbb{Z}_2 系数的情形完全一致，只需要在证明过程中留意 f 的作用即可，细节在此省略。 \square

在 3.2 节中我们处理了流形浸入到欧氏空间的问题，这里上述定理向我们为流形的嵌入问题提供了判据：

Corollary 4.1

若 n 维流形 M 能够光滑嵌入为 \mathbb{R}^{n+k} 的闭子集，则对其法丛 ν ，有 $w_k(\nu) = 0$ 。在可定向的情况下 $e(\nu) = 0$ 。



Remark 由 Whitney 对偶定理， $w_k(\nu_k) = \bar{w}_k(\tau_M)$ ，则上述推论可以叙述为：若 $\bar{w}_k(\tau_M) \neq 0$ ，则 M 不可以光滑嵌入为 \mathbb{R}^{n+k} 的闭子集。

Example 4.1 再次考察 \mathbb{RP}^n 的例子，由上可知它不可以光滑嵌入到 \mathbb{R}^{2n-1} 中，则这告诉我们 Whitney 强嵌入定理中的维数是最佳的。

4.2 关于流形的切丛

4.3 吴文俊公式

4.4 障碍理论

Chapter 5 复向量丛的示性类

5.1 复向量丛

5.2 陈类

5.3 Pontrjagin 类

5.4 具体的例子与计算

Chapter 6 微分几何的预备知识

6.1 联络与曲率

6.2 Kähler 流形

6.3 复几何中的一些计算

Chapter 7 Gauss-Bonnet-Chern 公式

7.1 微分几何中的 Thom 类与 Euler 类

7.2 超渡公式与 Chern-Weil 理论基本定理

7.3 Gauss-Bonnet-Chern 公式的证明

Chapter 8 微分几何中的陈类

8.1 曲率多项式定义

8.2 陈类与消灭定理

8.3 陈类与 Hermitian-Einstein 向量丛

Chapter 9 指标定理

9.1 其他示性类

9.2 Atiyah-Singer 指标定理