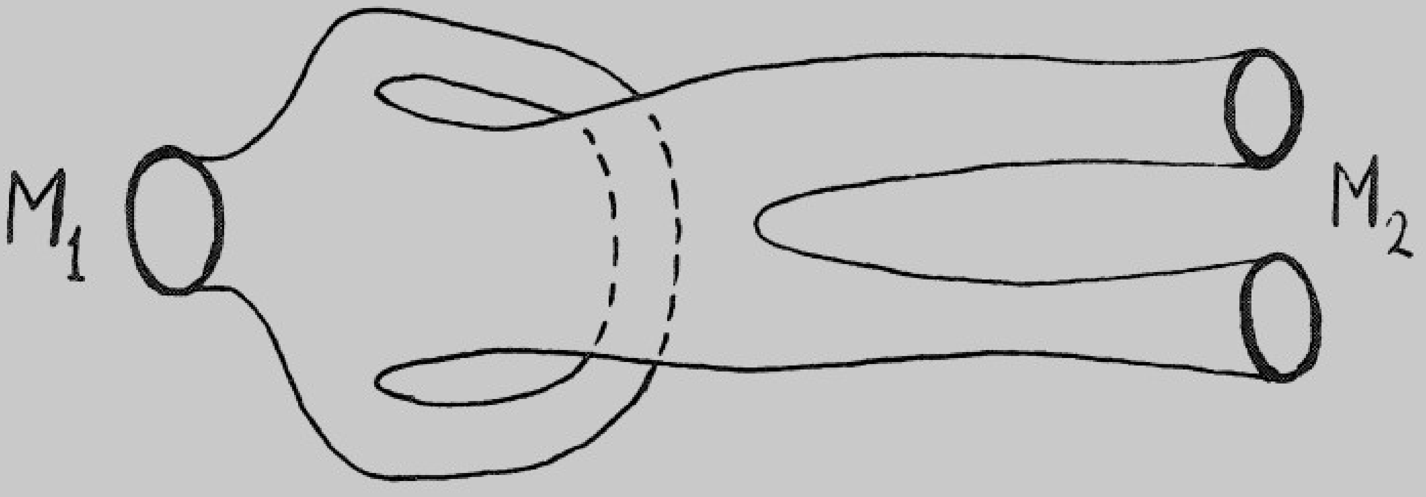

示性类理论

Author: 吕长乐

Institute: 中国科学技术大学

Date: 2024 年 6 月

Characteristic class connects topology and curvature.

前言

示性类理论的研究是从 1935 年由 Stifel 和 Whitney 二人几乎同时开始独立进行的。Stifel 在 Hopf 的指导下研究了一种由流形的切丛决定的同调类，而 Whitney 在处理一般球丛的时候引入了上同调的语言，正式定义了示性上同调类。1942 年 Pontrjagin 在研究 Grassmann 流形的时候定义了 Pontrjagin 类，1946 年陈省身在昆明的高级研究所对复向量丛也定义了陈示性类。再后来吴文俊引入了吴示性类，并导出了 S-W 示性类、陈示性类等由吴示性类的表示公式，将这一理论进行了进一步的发展。

上述示性类的定义都是从拓扑的角度出发的，而从曲率的角度来看，上述的示性类理论也有着非常重要的意义，这些上同调类都可以用曲率张量所表示。Chern-Weil 理论给出了这二者之间的联系，并让示性类理论所能应用的范围大幅变大。

本讲义为 2024 秋季学期开始的示性类理论讨论班而作，第一部分（第一到第五章）为拓扑示性类理论，第二部分（第六到第九章）为微分几何中的示性类理论。学习本讲义有关内容需要一定的代数拓扑、微分流形与黎曼几何基础，重要的前置知识会在正文中进行讲解。本讲义的主要参考书为 Hatcher 的《代数拓扑》、Milnor 的《示性类》、张伟平的《流形上的几何与分析》和 Kobayashi 的《复向量丛的微分几何》。

目录

Chapter 1 拓扑理论的预备知识

1.1 向量丛

向量丛是示性类理论中的基本研究对象之一，为此我们先回顾向量丛的有关知识。

首先给出纤维丛与向量丛的基本概念。

Definition 1.1

一个拓扑空间 B 上的纤维丛 $\xi : F \to E \xrightarrow{\pi} B$ 有如下部分:

（1）一个拓扑空间 E，称为 ξ 的<u>全空间</u>

（2）一个连续映射 $\pi : E \to B$，称为<u>投影</u>

（3）一个拓扑空间 F，称为<u>纤维</u>

且还需要满足<u>局部平凡性</u> 的条件，即

$\forall b \in B$，存在 b 的邻域 U(如果 U 可以取为整个底空间 B，则称 ξ 是平凡的) 和一个同态 $h_U : U \times F \to \pi^{-1}(U)$，使得对 U 中任意一个 c，有 $x \mapsto h_U(c, x)$ 给出了 F 与纤维 $\pi^{-1}(c)$（也被写为 $F_c(\xi)$）之间的同构。

如果纤维 F 为 n 维实向量空间，则称 ξ 为<u>实向量丛</u>（或称为 $\mathbb{R}^n$ 丛）。 ♣

Definition 1.2

同一个底空间上的向量丛 ξ 与 η<u>同构</u>，是指存在 $f : E(\xi) \to E(\eta)$ 把 ξ 的每一个纤维 $F_b(\xi)$ 都同构地映射到对应的纤维 $F_b(\eta)$ 上，此时记作 $\xi \simeq \eta$。

对任意两个向量丛 ξ 和 η，称从 ξ 到 η 的<u>丛映射</u> 是指一个连续映射 $g : E(\xi) \to E(\eta)$，把每一个纤维 $F_b(\xi)$ 都同构地映射到某一个 η 的纤维 $F_{b'}(\eta)$。 ♣

下面是几个向量丛的例子。

Example 1.1 流形的<u>切丛</u>τ_M。对任意一个流形 M，τ_M 的底空间为 M，全空间为 $TM = \{(x, v) : x \in M, v \in T_x M\}$，第一分量的投影即为丛的投影。不难验证纤维上的向量结构以及局部平凡性。如果 τ_M 是平凡的，则称流形 M 是<u>可平行化的</u>。

Example 1.2 流形的<u>法丛</u>ν_M。具体讨论与上例类似。

Example 1.3 $\mathbb{RP}^n$ 上的典范线丛 γ_n^1。全空间 $E(\gamma_n^1) = \{(\{\pm x\}, v) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} : v = kx (k \in \mathbb{R})\}$（这里我们把 $\mathbb{RP}^n$ 视为 S^n 上对径点对构成的集合），第一分量的投影即为丛的投影。每个纤维可以视为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中穿过向量 x 的直线，故其上自然有 1 维向量结构。它的局部平凡化可以写出：

$$h_U : U \times \mathbb{R} \to \pi^{-1}(U)$$

$$(\{\pm x\}, t) \mapsto (\{\pm x\}, tx)$$

Definition 1.3

对向量丛 ξ，一个<u>截面</u>是一个连续映射 $s : B \to E$，使得 $\pi \circ s = \mathrm{Id}$。

利用截面，可以给出一个向量丛是否平凡的判据如下（具体证明在此省略）

Proposition 1.1

一个 n 维实向量丛 ξ 是平凡的当且仅当存在 n 个处处线性无关的截面 $s_1, \dots, s_n$。

Example 1.4 S^3 是可平行化的。定义其切丛的三个截面如下：将 S^3 自然嵌入到 $\mathbb{R}^4$，则对任意 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3$，令 $s_i(x) = (x, t_i(x)) (i = 1, 2, 3)$，其中

$$t_1(x) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$$

$$t_2(x) = (-x_3, x_4, x_1, -x_2)$$

$$t_3(x) = (-x_4, -x_3, x_2, x_1)$$

可以验证这给出了三个处处无关的截面，则 τ_{S^3} 是平凡的。

这里我们再讨论几种从已有向量丛给出新的向量丛的构造方法。

一、拉回丛

对任意向量丛 $\xi(B, E, \pi, h)$ 和拓扑空间 B_1，以及一个映射 $f: B_1 \to B$，在 B_1 上定义拉回丛 $f^*\xi$ 如下：

全空间定义为 $E_1 = \{(b, e) \in B_1 \times E : f(b) = \pi(e)\}$，第一分量的投影为丛投影。对 ξ 的一个平凡化邻域 U，在 $f^{-1}(U)$ 上定义 $f^*\xi$ 的局部平凡化 h_1 为

$$h_1 : U_1 \times \mathbb{R}^n \to \pi_1^{-1}(U_1)$$

$$(b, x) \mapsto (b, h(f(b), x))$$

二、笛卡尔积

对两个向量丛 $\xi_i(B_i, E_i, \pi_i, h_i)(i = 1, 2)$，在 $B_1 \times B_2$ 上可以定义它们的笛卡尔积 $\xi_1 \times \xi_2$，全空间为 $E_1 \times E_2$。从投影为 $\pi_1 \times \pi_2$。

三、Whitney 和

已知 B 上有两个向量丛 ξ_1, ξ_2，$d : B \to B \times B, b \mapsto (b, b)$ 为对角嵌入，则定义 ξ_1 和 ξ_2 的 Whitney 和 $\xi_1 \bigoplus \xi_2$ 为拉回丛 $d^*(\xi_1 \times \xi_2)$。

四、正交补

对任意向量丛 $\xi \subset \eta$，定义 $F_b(\xi^\perp)$ 为 $F_b(\xi)$ 在 $F_b(\eta)$ 中的正交补，并令 $E(\xi^\perp)$ 为所有 $F_b(\xi^\perp)$ 的并。对一个邻域 U，选取 $\xi|_U$ 的标准正交截面基 $s_1, \ldots, s_m$，并扩张为 $\eta|_U$ 上的标准正交截面基 $s_1, \ldots, s_n$，则定义局部平凡化如下：

$$h : U \times \mathbb{R}^{n-m} \to E(\xi^\perp)$$

$$(b, x) \mapsto x_1 s_{m+1}(b) + \cdots + x_{n-m} s_n(b)$$

可以验证如上条件给出了一个向量丛 $\xi^\perp$，且有 $\eta \simeq \xi \bigoplus \xi^\perp$。

1.2 基本同调类

为了方便后续讨论，这里讨论在流形的定向中具有重要作用的基本同调类。

M 是一个闭连通的 n 维流形，并且是 R-可定向的，则我们取 $\{\mu_x|x \in M\}$ 为 M 的一组定向。所谓的基本同调类就是能够处处被自然同态映成定向同调类的类，下面先来严格给出定义并证明其存在性。

Theorem 1.1

对任意的 R-可定向流形 M 和任意紧子集 $K \subset M$，都存在唯一的同调类 $\mu_K \in H_n(M|K;R)$，使得自然同态 $\rho_x : H_n(M|K;R) \to H_n(M|x;R)$ 满足 $\rho_x(\mu_K) = \mu_x(\forall x \in K)$。

特别地，如果 M 还是紧的，则称 μ_M 是 M 的基本同调类。

证明 我们首先需要一个引理，在这里省略它的证明：

Lemma 1.1

同调类 $\alpha \in H_n(M|K;R) = 0$ 当且仅当 $\rho_x(\alpha) = 0 \in H_n(M|x;R)(\forall x \in R)$。

在这个引理的基础上，从局部到整体证明主要定理：

第一步： K 包含在某一点的足够小邻域中，此时由定向的定义立即得到结果。

第二步： 由于 K 是紧的，则只需证明如果对 K_1 和 K_2 结论正确，则对 $K = K_1 \cup K_2$ 结论正确。首先由 Mayer-Vietoris 序列，有正合列

$$\cdots \to 0 \to H_n(M|K;R) \xrightarrow{f} H_n(M|K_1;R) \oplus H_n(M|K_2;R) \xrightarrow{g} H_n(M|K_1 \cap K_2;R) \to \dots$$

其中 $f(\alpha) = \rho_{K_1}(\alpha) \oplus \rho_{K_2}(\alpha), g(\beta \oplus \gamma) = \rho_{K_1 \cap K_2}(\beta) - \rho_{K_1 \cap K_2}(\gamma)$，$\rho_{K_1}$ 表示从 $H_n(M|K;R)$ 到 $H_n(M|K_1;R)$ 的自然同态，ρ_{K_2} 和 $\rho_{K_1 \cap K_2}$ 同理。

则对任意的 $x \in K_1 \cap K_2$，$\rho_x(g(\mu_{K_1} \oplus \mu_{K_2})) = \rho_x \mu_{K_1} - \rho_x \mu_{K_2} = \mu_x - \mu_x = 0$，则由引理，$g(\mu_{K_1} \oplus \mu_{K_2}) = 0$，故存在唯一的 $\alpha \in H_n(M|K;R)$，使得 $f(\alpha) = \mu_{K_1} \oplus \mu_{K_2}$, 则 α 就是我们想要的 μ_K，故得证。 □

对于不可定向流形，取 $R=\mathbb{Z}_2$ 也可以定义所谓的基本同调类。

对于带边流形也可以定义基本同调类：类似地可以证明对任意紧子集 $K\subset M$，存在唯一的同调类 $\mu_K\in H_n(M,(M-K)\cup\partial M;R)$ 使得 $\rho_x(\mu_K)=\mu_x(\forall x\in K\cap(M-\partial M))$，则取 $\mu_M\in H_n(M,\partial M;R)$ 为 M 的基本同调类。

下面的命题在后面证明 Pontrjagin 定理的时候会用到。

Proposition 1.2

对于同调群长正合列中的连接同态 $\partial: H_n(M,\partial M;R)\to H_{n-1}(\partial M;R)$，有 $\partial(\mu_M)=\mu_{\partial M}$。

证明　取 N 为 ∂M 的一个管状邻域，则 N 为 n 维带边流形，边界为 $\partial M\cup(N-\mathring{N})$, 则有交换图表

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(M,\partial M;R) \arrow[r, "i_*"] \arrow[dl, "\partial_*"'] & H_n(M,\partial M\cup(M-\mathring{N});R) \\
H_{n-1}(\partial M;R) \arrow[r, "k_*", "\approx"'] & H_{n-1}(\partial M\cup(N-\mathring{N}),N-\mathring{N};R) & H_n(N,\partial M\cup(N-\mathring{N});R) \arrow[l, "\partial_*"'] \arrow[u, "j_*", "\approx"']
\end{tikzcd}$$

其中左侧的 ∂_* 为 $(M,\partial M)$ 的正合列的连接同态，右下的 ∂_* 为三元组 $(N,\partial M\cup(N-\mathring{N}),N-\mathring{N})$ 的正合列的连接同态，右侧的 j_* 来自于切除。

由基本同调类的定义，不难有

$$j_*^{-1}i_*\mu_M=\mu_N$$

同时又由于 N 的定义，N 同胚于 $\partial M\times I$ 并将 ∂M 和 $N-\mathring{N}$ 分别对应到 $\partial M\times 0$ 和 $\partial M\times 1$，则由相对 Kunneth 公式

$$H_n(N,\partial M\cup(N-\mathring{N});R)\approx H_{n-1}(\partial M;R)\otimes H_1(I,\mathring{I};R)$$

取 w 为 $H_1(I,\mathring{I};R)$ 的生成元，$\{M_j\}$ 为 ∂M 的分支，则 $\mu_N=\sum z_j'\times w$（对某些 $z_j'\in H_{n-1}(M_j;R)$）。又由于 $k_*^{-1}\partial_*\mu_N=\pm\sum z_j'$，故 $\partial\mu_M=\pm\sum z_j'$。

由于 μ_N 为基本同调类，则每个 $z_j' \times w$ 对应了 $M_j \times I$ 的基本同调类，则 z_j' 为 $H_{n-1}(M_j; R)$ 的生成元，也即 M_j 的基本同调类，则 $\pm \sum z_j' = \partial \mu_M$ 为 ∂M 的基本同调类。 $\square$

1.3 Grassmann 流形的有关讨论

为了在后面讨论看待 S-W 类的一种视角，这里需要补充关于 Grassmann 流形的有关知识。

Definition 1.4

***Grassmann* 流形**$G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 是 $\mathbb{R}^{n+k}$ 中经过原点的 n 维平面构成的集合。

首先我们说明 Grassmann 流形确实是一个流形。

Lemma 1.2

Grassmann 流形 $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 是一个 nk 维的紧拓扑流形。

证明 首先证明 $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 是一个 Hausdorff 空间。固定 $w \in \mathbb{R}^{n+k}$，对任意 $X \in G_n(\mathbb{R}^{n+k})$，取 X 的正交基 $x_1, \cdots, x_n$，定义

$$\rho_w : G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \to \mathbb{R}, X \mapsto w \cdot w - \sum_{k=1}^{n} (w \cdot x_k)^2$$

则 ρ_w 为连续函数，且对任意的 $X \neq Y$，取 $w \in X - Y$，有 $\rho_w(X) \neq \rho_w(Y)$，则 X 与 Y 可以用连续函数分离，故得证。

令 $V_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 为 $\mathbb{R}^{n+k}$ 中的 n 维标架（也即 n 个无关向量构成的有序组）构成的集合，$V_n^0(\mathbb{R}^{n+k})$ 为所有正交 n 维标架构成的集合，显然是紧的。又对 $q : V_n^0(\mathbb{R}^{n+k}) \to G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 把标架映为其张成的子空间，则有 $q(V_n^0(\mathbb{R}^{n+k})) = G_n(\mathbb{R}^{n+k})$, 故 $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 为紧集在连续映射下的像，也为紧的。

再证对任意一点 $X_0 \in G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 存在 X_0 的同胚于 $\mathbb{R}^{nk}$ 同胚的邻域。考虑正交投影 $p : X_0 \oplus X_0^{\perp} \to X_0$，记 U 为 $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 中所有对 p 的像集为 X_0 的元素，也即与 $X_0^{\perp}$ 交为 $\{0\}$ 的元素全体，则任意 $Y \in U$，Y 可以视为线性映射

$$T(Y) : X_0 \to X_0^{\perp}$$

的图像，则有一一对应 $T : U \to \mathrm{Hom}(X_0, X_0^{\perp}) \simeq \mathbb{R}^{nk}$。

固定 X_0 的一组基 $x_1, \cdots, x_n$，则对任意 $Y \in U$，存在唯一的 Y 的一组基 $y_1, \cdots, y_n$，使

得 $p(y_i) = x_i$，则 $(y_1, \cdots, y_n)$ 由 $x_1, \cdots, x_n$ 连续决定。注意到等式

$$y_i = x_i + T(Y)(x_i)$$

由于 y_i 连续依赖于 Y, 则 $T(Y)(x_i)$ 连续依赖于 Y, 则 $T(Y)$ 连续依赖于 Y，即 T 连续。同理可证 T^{-1} 也连续，则 T 为同胚。 □

在 $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ 上，可以定义一个典范向量丛 $\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$：

首先取全空间 E 为形如 ($\mathbb{R}^{n+k}$ 中的平面，该平面中的向量) 的所有二元对所构成的集合，E 可以视为 $G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \times \mathbb{R}^{n+k}$ 的子集，向第一元的投影作为丛的投影。这样构造出来的典范丛又被称为“万有丛”，原因来自于如下的一个命题。

Proposition 1.3

任何一个紧的底空间 B 上的 n 维向量丛 ξ，都存在一个丛映射 $\xi \to \gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$($k$ 充分大)。

证明 选取有限个能覆盖 B 的平凡化邻域 $U_1, \ldots, U_r$，由点集拓扑的知识可以知道存在开集 $V_1, \ldots, V_r$ 覆盖 B 且 $\overline{V_i} \subset U_i$，同理选取 $W_1, \ldots, W_r$ 覆盖 B 且 $\overline{W_i} \subset V_i$。定义 $\lambda_i : B \to \mathbb{R}$ 为截断函数，在 $\overline{W_i}$ 上取值为 1，V_i 以外取值为 0。

由于 $\xi|_{U_i}$ 是平凡的，存在映射 $h_i : \pi^{-1}(U_i) \to \mathbb{R}^n$ 将 $\xi|_{U_i}$ 的每个纤维线性地映到 $\mathbb{R}^n$。再定义 $h_i' : E(\xi) \to \mathbb{R}$ 如下：

$$h_i'(e) = 0 \qquad (\pi(e) \notin V_i)$$

$$h_i'(e) = \lambda_i(\pi(e))h_i(e) \qquad (\pi(e) \in U_i)$$

再定义 $\hat{f} : E(\xi) \to \mathbb{R}^{rn} : \hat{f}(e) = (h_1'(e), \ldots, h_r'(e))$，则可以验证 $\hat{f}$ 为一个丛映射。 □

对性质更差的底空间，如仿紧空间，我们则需要考虑“无穷 Grassmann 流形”, 下面严格地给出有关定义。

$\mathbb{R}^\infty$ 是由所有处有限项以外均为 0 的无穷序列 $x = (x_1, x_2, \ldots)$ 所构成的集合，无穷 Grassmann 流形 $G_n = G_n(\mathbb{R}^\infty)$ 则指的是 $\mathbb{R}^\infty$ 的所有 n 维线性子空间所构成的集合。同样在 G_n 上可以定义典范丛 γ^n。

全空间 $E(\gamma^n) \subset G_n \times \mathbb{R}^\infty$ 为所有形如 ($\mathbb{R}^\infty$ 中的 n 维子空间，该子空间的向量) 的二元组所构成的集合，向第一元的投影作为丛投影。类似地，有如下命题：

Proposition 1.4

任何一个仿紧的底空间 B 上的 n 维向量丛 ξ，都存在一个丛映射 $\xi \to \gamma^n$。

证明基本与命题 1.3 一致，只需要利用点集拓扑的知识将仿紧空间进行拓扑处理，在这里省略细节。这个命题说明了我们给出了一个真正“万有”的向量丛 γ^n。这一点在之后证明 S-W 类的存在性中具有重要意义。

为了后续讨论 G_n 的上同调环的性质，这里我们首先给出 Grassmann 流形 $G_n(\mathbb{R}^m)$ 的 CW 复形结构。

首先 $\mathbb{R}^m$ 有递增子空间序列 $\mathbb{R}^0 \subset \mathbb{R}^1 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^m$，其中 $\mathbb{R}^k$ 视为 $\mathbb{R}^m$ 中后 $m-k$ 个分量均为 0 的向量全体构成的子空间。则对任意 n 维子空间 $X \subset \mathbb{R}^m$ 有

$$0 \le \dim(X \cap \mathbb{R}^1) \le \dim(X \cap \mathbb{R}^2) \le \cdots \le \dim(X \cap \mathbb{R}^m) = n$$

同时又注意到对 k-分量投影映射 $f_k : X \cap \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ 有 $X \cap \mathbb{R}^{k-1} \subset \mathrm{Ker} f_k$，则

$$\dim(X \cap \mathbb{R}^k) - \dim(X \cap \mathbb{R}^{k-1}) \le 1$$

对每一组 $\sigma \in \{\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) : \sigma_i \in \mathbb{Z}, 1 \le \sigma_1 < \sigma_2 \cdots < \sigma_n \le m\}$，定义 $e(\sigma)$ 为所有满足 $\dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_i}) = i, \dim(X \cap \mathbb{R}^{\sigma_{i-1}}) = i-1 (\forall i)$ 的 n 维子空间 X 的全体构成的集合。故任意 $X \in G_n(\mathbb{R}^m)$，X 恰好属于所有的 $e(\sigma)$ 中的一个。

定义 $H^k = \{(\xi_1, \cdots, \xi_k, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^k : \xi_i > 0 (1 \le i \le k)\} \subset \mathbb{R}^k$，则 $X \in e(\sigma)$ 当且仅当 X 有一组基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 使得 $x_i \in H^{\sigma_i} (\forall i)$。则令 $e'(\sigma) = V_n^0(\mathbb{R}^m) \cap (H^{\sigma_1} \times \cdots \times H^{\sigma_n})$,$\overline{e}'(\sigma) = V_n^0(\mathbb{R}^m) \cap (\overline{H^{\sigma_1}} \times \cdots \times \overline{H^{\sigma_n}})$。

Lemma 1.3

$\overline{e}'(\sigma)$ 是一个维数为 $d(\sigma)=(\sigma_1-1)+(\sigma_2-2)+\cdots+(\sigma_n-n)$ 的闭细胞，且内部为 $e'(\sigma)$。且 q（定义见前）把 $e'(\sigma)$ 同胚地映成 $e(\sigma)$。进而 $e(\sigma)$ 是一个维数为 $d(\sigma)$ 的开细胞。♡

该引理的证明是平凡的验证，在此省略。利用 $e(\sigma)$ 我们能给出 $G_n(\mathbb{R}^m)$ 的 CW 复形结构。

Theorem 1.2

所有 $e(\sigma)$（共 $\binom{m}{n}$ 个）给出了 $G_n(\mathbb{R}^m)$ 的 *CW* 复形结构。令 $m\to\infty$ 取直极限可以类似得到 $G_n=G_n(\mathbb{R}^\infty)$ 的 *CW* 复形结构。♡

取 $n=1$ 的特殊情况则有：

Corollary 1.1

$\mathbb{RP}^\infty=G_1(\mathbb{R}^\infty)$ 是一个 *CW* 复形，且对每一个 $r\geq 0$，它有一个 r-细胞 $e(r+1)$，且有 $\overline{e}(r+1)$ 同胚于 $\mathbb{RP}^r$。♡

在此基础上我们还需要讨论 $G_n(\mathbb{R}^m)$ 的 r-细胞的个数，显然这与划分数的概念直接相关。

Definition 1.5

对一个整数 $r\geq 0$ 的**划分**是指一个无序正整数序列 $i_1,\cdots,i_s$ 使得它们的和为 r。r 的所有划分数记作 $p(r)$。♣

则对每一个 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$ 且 $d(\sigma)=r,\sigma_n\leq m$，将 $\sigma_1-1,\sigma_2-2.\cdots,\sigma_n-n$ 中的零项去掉，则得到对应的 r 的划分 $i_1,\cdots,i_s$，且 $1\leq i_1\leq i_2\cdots\leq i_s\leq m-n,s\leq n$。则有

Proposition 1.5

$G_n(\mathbb{R}^m)$ 中的 r-细胞数量等于将 r 划分为至多 n 个不大于 $m-n$ 的正整数的方法数。♠

Corollary 1.2

当 $n\geq r$ 且 $m-n\geq r$ 时，$G_n(\mathbb{R}^m)$ 中的 r-细胞数量等于 $p(r)$，特别地 $m=\infty$ 时也成立。♡

Chapter 2 向量丛的上同调

本章我们讨论纤维丛（向量丛）的上同调，并建立 Thom 类和 Euler 类，为后续 S-W 类有关知识的开展奠定基础。这一章需要的代数拓扑知识可以参考 Allen Hatcher 的代数拓扑第三、第四章。

2.1 Thom 同构定理与 Thom 类

首先回忆纤维丛的 Leray-Hirsch 定理。

Theorem 2.1

对一个纤维丛 $F \to E \xrightarrow{\pi} B$，如果满足如下条件:

（1）$H^n(F;R)$ 是一个有限生成的自由 R-模

（2）对任意纤维 F，都存在上同调类 $c_j \in H^{k_j}(E;R)$ 使得 $i^*(c_j)$ 构成了 $H^n(F;R)$ 的

一组基，其中 $i: F \to E$ 是包含映射。

则 $\Phi: H^*(B;R) \otimes_R H^*(F;R) \to H^*(E;R), \sum_{i,j} b_i \otimes i^*(c_j) \mapsto \sum_{i,j} \pi^*(b_i) \cup c_j$ 是一个同构映射。

这里我们希望引入 Leray-Hirsch 定理的相对形式，为此首先要引入纤维丛对的概念。

Definition 2.1

对于一个纤维丛 $F \to E \xrightarrow{\pi} B$，$E' \subset E$ 是一个子空间，使得 $\pi: E' \to B$ 也是一个丛投影，对应的纤维是子空间 $F' \subset F$，并且 E' 上的局部平凡化是 E 上的局部平凡化在 E' 上的限制，则称 $(F, F') \to (E, E') \xrightarrow{\pi}$ 是一个<u>纤维丛对</u>。

下面我们应用绝对形式的 Leray-Hirsch 定理来得到相对形式的 Leray-Hirsch 定理，这对得

到 Thom 类是极其重要的一步。

Theorem 2.2

$(F,F')\to(E,E')\xrightarrow{\pi}$ 是一个纤维丛对，如果满足如下条件:

（1）$H^*(F,F';R)$ 是一个自由 R-模，并且对任意的 n，$H^n(F,F';R)$ 是有限生成的

（2）对任意纤维 (F,F')，都存在上同调类 $c_j\in H^{k_j}(E,E';R)$ 使得它们在 (F,F') 上的限制构成了 $H^n(F,F';R)$ 的一组基。

则 $H^*(E,E';R)$ 是一个自由 $H^*(B;R)$-模，且基为 $\{c_j\}$。

证明　我们熟知如果 B 是 $\hat{E}$ 的收缩核，则有 $H^*(\hat{E};R)\approx H^*(\hat{E},B;R)\oplus H^*(B;R)$，为了使用绝对形式的 Leray-Hirsch 定理，我们找到 $\hat{E}$ 使得 $H^*(\hat{E},B;R)$ 能与 $H^*(E,E';R)$ 建立联系。

取 $\hat{E}$ 为将从投影 $\pi:E'\to B$ 的映射柱 M 粘黏到 E 上得到的空间（把 $E'\subset E$ 和 $E'\subset M$ 等同起来），则从 $\pi:\hat{E}\to B$ 的纤维 $\hat{F}$ 可以视为把锥 CF' 通过 F' 粘黏在 F 上得到的。注意到 E 是 $\hat{E}-B$ 的形变收缩核，E' 是 $M-B$ 的形变收缩核，故由切除定理

$$H^*(\hat{E},M;R)\approx H^*(\hat{E}-B,M-B;R)\approx H^*(E,E';R)$$

则由 B 是 M 的形变收缩核，$H^*(\hat{E},M;R)\approx H^*(\hat{E},B;R)$，故由一开始的思路我们有

$$H^*(\hat{E};R)\approx H^*(E,E';R)\oplus H^*(B;R)$$

这里的同构是指 $H^*(B;R)$-模意义下的同构，则令 $\hat{c}_j\in H^*(\hat{E};R)$ 为 $c_j\in H^*(E,E';R)$ 对应的类，则所有的 $\{\hat{c}_j\}$ 和 1 共同构成了 $H^*(\hat{F};R)$ 的一组基。则绝对形式的 Leray-Hirsch 定理说明 $H^*(\hat{E};R)$ 是一个自由的 $H^*(B;R)$-模，且基为 $\{1,\hat{c}_j\}$，故 $\{c_j\}$ 构成了 $H^*(B;R)$-模 $H^*(E,E';R)$ 的一组基。 □

在这里我们取特殊向量丛的情形，即 $F=\mathbb{R}^n, F'=F-\{0\}\approx S^{n-1}, E'=E-\{0\}$（在后面我们均默认 $E'=E-\{0\}$），为了满足上述的相对 Leray-Hirsch 定理的条件，我们需要一个上同调类 $c\in H^n(E,E';R)$ 使得它在每个纤维 $(\mathbb{R}^n,S^{n-1})$ 上的限制都是 $H^n(\mathbb{R}^n,S^{n-1};R)=R$ 的

生成元。这样的类就被称为纤维丛的**Thom 类**。如果假设 Thom 类存在，则由相对 Leray-Hirsch 定理可以得到如下结果。

Proposition 2.1

如果丛 $(\mathbb{R}^n, S^{n-1}) \to (E, E') \xrightarrow{\pi}$ 有 Thom 类 c，则映射

$$\Phi : H^i(B; R) \to H^{i+n}(E, E'; R), \Phi(b) = \pi^*(b) \cup c$$

对任意的 $i \leq 0$ 是同构。则显然有 $H^i(E, E'; R) = 0 (i < n)$。

下面我们讨论 Thom 类存在的有关命题。可以看出 Thom 类的定义与之前所说的基本同调类的定义有一定的类似之处，我们可以猜测 $R = \mathbb{Z}_2$ 时 Thom 类始终存在，而 $R = \mathbb{Z}$ 时则需要一定的定向性条件。事实上也确实如此。

Theorem 2.3

任何向量丛都存在 $\mathbb{Z}_2$ 系数的 Thom 类。

证明 仍然分步证明该定理。（对于省略的一些细节，可以参考 Milnor 的《示性类》第十节）

第一步 若该向量丛为平凡的，则可以把 E 视为 $B \times \mathbb{R}^n$，此时 $H^n(E, E'; \mathbb{Z}_2) = H^n(B \times \mathbb{R}^n, B \times S^{n-1}; \mathbb{Z}_2)$。

Lemma 2.1

$H^j(B; \mathbb{Z}_2) \approx H^{j+n}(B \times \mathbb{R}^n, B \times S^{n-1}; \mathbb{Z}_2)$

证明 我们知道 $n = 1$ 时，$H^n(\mathbb{R}^n, S^{n-1}; \mathbb{Z}_2) \approx \mathbb{Z}_2$，取其非零元素为 e^1，则利用 Kunneth 公式和考虑三元组 $(B \times \mathbb{R}, B \times \mathbb{R}^*, B \times \mathbb{R}^-)$ 构成的正合列可以证明 $y \mapsto y \times e^1$ 给出了 $H^j(B; \mathbb{Z}_2)$ 到 $H^{j+1}(B \times \mathbb{R}, B \times \mathbb{R}^*; \mathbb{Z}_2)$ 的同构。再利用五引理追图论证和归纳法可以证明 $y \mapsto y \times e^n$ 给出了我们想要的同构，其中 $e^n = e^1 \times e^1 \cdots \times e^1$。

回到原定理，则只需要找到 $H^0(B; \mathbb{Z}_2)$ 中在 B 的处处的限制非零的类即可，自然也就是 1，故 $1 \times e^n$ 给出了我们想要的类。

第二步 如果 $B = B_1 \cup B_2$，其中 B_1 和 B_2 是使得定理结论成立的子集，则显然 $B_1 \cap B_2$ 也

使得结论成立。利用相对的 Mayer-Vietoris 序列:（为了简便，记 $E^{\cap}=E_1\cap E_2, E'^{\cap}=E_1'\cap E_2'$)

$$\cdots\to H^{i-1}(E^{\cap},E'^{\cap};\mathbb{Z}_2)\to H^i(E,E';\mathbb{Z}_2)\to H^i(E_1,E_1';\mathbb{Z}_2)\oplus H^i(E_2,E_2';\mathbb{Z}_2)\to H^i(E^{\cap},E'^{\cap};\mathbb{Z}_2)\to\dots$$

由假设，存在 $u_1\in H^n(E_1,E_1';\mathbb{Z}_2)$ 和 $u_2\in H^n(E_2,E_2';\mathbb{Z}_2)$ 使得它们在每个纤维上的限制为非零的。再一次使用之前讨论过的唯一性论证（见 1.2 节），可以证明 u_1 和 u_2 在 $H^n(E^{\cap},E'^{\cap};\mathbb{Z}_2)$ 中有相同的像，则它们都来自于唯一的 $u\in H^n(E,E';\mathbb{Z}_2)$，再由绝对 Mayer-Vietoris 序列 (其中 $j+n=i$)

$$\cdots\to H^{j-1}(E^{\cap};\mathbb{Z}_2)\to H^j(E;\mathbb{Z}_2)\to H^j(E_1;\mathbb{Z}_2)\oplus H^j(E_2;\mathbb{Z}_2)\to H^j(E^{\cap};\mathbb{Z}_2)\to\dots$$

和五引理追图论证，可以证明 $y\mapsto y\cup u$ 给出了同构 $H^j(E;\mathbb{Z}_2)\approx H^{j+n}(E,E;\mathbb{Z}_2)$。

第三步　如果 B 由有限个使得定理结论成立的子集合覆盖，则由归纳法并反复使用第二步即可。

第四步　对一般的拓扑空间 B，取 B 的紧子集 C，则由第三步 C 使得定理结论成立。再利用标准的直极限论证可以证明一般的情况。细节在此处略去。 □

对于系数取为 $\mathbb{Z}$ 的情况，我们需要定向性条件，这就需要对向量丛的可定向性进行定义。

给定纤维丛 $S^{n-1}\to E\to B$，对 B 上的任何一个道路 $\gamma:I\to B$，存在一个同伦 $g_t:F_{\gamma(0)}\hookrightarrow B$ 使得 $g_t(F_{\gamma(0)})=\gamma(t)$，则包含映射 $F_{\gamma(0)}\to E$ 给出了一个提升 $\hat{g}_0$，又由于纤维丛是具有同伦提升性质的，存在同伦的提升 $\hat{g}_t:F_{\gamma(0)}\to E$ 使得 $\hat{g}_t(F_{\gamma(0)})\subset F_{\gamma(t)}$。特别地，$\hat{g}_1$ 给出了一个映射 $L_\gamma:F_{\gamma(0)}\to F_{\gamma(1)}$，并且可以证明 L_γ 是这两个纤维之间的同伦等价。现在取 γ 为 B 上的一个圈，则 L_γ 为一个纤维到自身的同伦等价。

Definition 2.2

如果对任意 B 上的圈 γ，L_γ 诱导的上同调群 $H^{n-1}(S^{n-1};\mathbb{Z})$ 上的自同态为恒等映射，则称纤维丛 $S^{n-1}\to E\to B$ 是可定向的。对于球丛 $D^n\to E\to B$，称其为 可定向的 是指其边界丛 $S^{n-1}\to E'\to B$ 是可定向的。 ♣

Theorem 2.4

任何可定向的向量丛都有 $\mathbb{Z}$ 系数的 *Thom* 类。

证明 根据 CW 逼近，只需考虑 B 是 CW 复形时的情况，同时由于全过程中考虑的均为有限维的上同调群，不妨设 B 是有限维的 CW 复形。我们后面会证明在此条件下，限制映射 $H^i(E,E';\mathbb{Z}) \to H^i(D_x^n,S_x^{n-1};\mathbb{Z})$ 对每一个纤维 D_x^n 和 $i \le n$ 是同构。

在假设这个命题成立的情况下，取定一个纤维对应的同构 $H^n(E,E';\mathbb{Z}) \approx H^n(D_x^n,S_x^{n-1};\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$。则对任意的 y，取一个 x 到 y 的道路 γ，则包含映射 $(D_x^n,S_x^{n-1}) \hookrightarrow (E,E')$ 与另外一个包含映射 $(D_y^n,S_y^{n-1}) \hookrightarrow (E,E')$ 与 L_γ 的复合是同伦的。则由可定向性条件，我们选取的同构 $H^n(E,E';\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$ 能够限制在每个纤维上都是 $H^n(D_x^n,S_x^{n-1};\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$，则 $H^n(E,E';\mathbb{Z})$ 的生成元就是 Thom 类，故只需要证明前面所论述的这个命题即可。采取归纳的方法。

设对所有 $k-1$ 维 CW 复形有结论成立。设 B 是一个 k 维的 CW 复形，$B_1 \subset B$ 是把 $B3$ 的每个 k-细胞删掉一个内点所得到的子空间，B_2 是所有开 k-细胞的并，则显然 $B = B_1 \cup B_2$。同样有 Mayer-Vietoris 序列

$$H^n(E,E';\mathbb{Z}) \to H^n(E_1,E_1';\mathbb{Z}) \oplus H^n(E_2,E_2';\mathbb{Z}) \xrightarrow{f} H^n(E^\cap,E'^\cap;\mathbb{Z}) \to \dots$$

又 $B_1 \cap B_2$ 可以形变收缩为 $(k-1)$ 维球面的并，故 $E^\cap$ 可以由 E 在这些 $(k-1)$ 维球面上的部分代替。又由正合性 $H^n(E,E';\mathbb{Z}) \approx \mathrm{Ker} f$。

由归纳假设可知 $H^n(E_1,E_1';\mathbb{Z}), H^n(E_2,E_2';\mathbb{Z})$ 和 $H^n(E^\cap,E'^\cap;\mathbb{Z})$ 均为 $\mathbb{Z}$ 的直和，每一个 $\mathbb{Z}$ 对应相应空间的一个分支。

$\mathrm{Ker} f$ 中的元素 $(\alpha,\beta) \in H^n(E_1,E_1';\mathbb{Z}) \oplus H^n(E_2,E_2';\mathbb{Z})$ 在 $H^n(E^\cap,E'^\cap;\mathbb{Z})$ 上的限制相同，也即意味着 α 和 β 在上述直和分解中的 $\mathbb{Z}$ 坐标相同。则 $\mathrm{Ker} f \approx \mathbb{Z}$，故有 $H^n(E,E';\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$。

令一方面，对 $i < n$，同样考虑 Mayer-Vietoris 序列

$$H^{i-1}(E^\cap,E'^\cap;\mathbb{Z}) \to H^i(E,E';\mathbb{Z}) \to H^i(E_1,E_1';\mathbb{Z}) \oplus H^i(E_2,E_2';\mathbb{Z}) \to \dots$$

利用归纳法显然有 $H^i(E, E'; \mathbb{Z})$ 左右两边的群均为 0，则 $H^i(E, E'; \mathbb{Z}) = 0$。

综上 $H^i(E, E'; \mathbb{Z}) \approx H^i(D_x^n, S_x^{n-1}; \mathbb{Z})$，得证。 $\square$

事实上该定理可以强化，即存在 $\mathbb{Z}$ 系数的 Thom 类与可定向性等价，证明在这里不给出。

2.2 Gysin 序列与 Euler 类

在上一节的基础上，我们可以对纤维丛 $S^{n-1} \to E \xrightarrow{\pi} B$ 建立所谓的 Gysin 序列。考虑映射柱 M_π，也有纤维丛 $D^n \to M_\pi \xrightarrow{\pi} B$。假设 Thom 类 $c \in H^n(M_\pi, E; R)$ 存在，则考虑图表 (Φ 为 Thom 同构)

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^i(M_\pi, E; R) \arrow[r, "j^*"] & H^i(M_p; R) \arrow[r] & H^i(E; R) \arrow[r] & H^{i+1}(M_\pi, E; R) \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^{i-n}(B; R) \arrow[r, "\cup e"] \arrow[u, "\Phi", "\approx"'] & H^i(B; R) \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[u, "\approx", "\pi^*"'] & H^i(E; R) \arrow[r] \arrow[u, "="'] & H^{i-n+1}(B; R) \arrow[r] \arrow[u, "\Phi", "\approx"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

图表中出现的 e 定义为 $(\pi^*)^{-1}j^*(c)$，被称为 R 系数的**Euler 类**。第一块正方形是可交换的：对任意的 $b \in H^{i-n}(B; R)$, 有 $j^*\Phi(b) = j^*(\pi^*(b) \cup c) = \pi^*(b) \cup j^*(c) = \pi^*(b) \cup \pi^*(e) = \pi^*(b \cup e)$。在后面的讨论中，如果不加特殊说明，则取 Euler 类为 $\mathbb{Z}$ 系数的并且在此时加上向量丛的可定向性条件，记作 $e(\xi)$。

下面讨论 Euler 类的众多性质。

Proposition 2.2

（1）（自然性）如果 $f : B \to B'$ 来自于一个保定向的丛映射 $\xi \to \xi'$，则 $e(\xi) = f^*(e(\xi'))$

（2）（反定向性）如果 ξ 的定向反转，则 $e(\xi)$ 改变符号。

（3）如果纤维丛的维数 n 为奇数，则 $e(\xi) + e(\xi) = 0$

这几条性质的验证比较简单，在此略过。

Proposition 2.3

$e(\xi_1 \oplus \xi_2) = e(\xi_1) \cup e(\xi_2), e(\xi_1 \times \xi_2) = e(\xi_1) \times e(\xi_2)$

证明　设 ξ_1 和 ξ_2 的维数分别为 m 和 n，则由上同调类的交叉积的性质立即有

$$c(\xi_1 \times \xi_2) = (-1)^{mn} c(\xi_1) \times c(\xi_2)$$

再在等式两边作用限制同态则得到 $e(\xi_1\times\xi_2)=(-1)^{mn}e(\xi_1)\times e(\xi_2)$。但上一个命题说明了当 m 或 n 为奇数时等式两边都为二阶元，符号问题可以忽略。第二个等式可以通过取 $B'=B$ 并在第一个等式两端同时作用上对角嵌入的诱导同态得到。 □

Euler 类可以用于判断向量丛的一些具体性质，如是否存在非零截面、是否存在某种条件的子丛等，也即可以视为一种拓扑障碍。

Proposition 2.4

若 ξ 有一个处处非零的截面，则 $e(\xi)$ 必须为 0。

证明 设 $s:B\to E'$ 为一个处处非零的截面，则复合 $B\xrightarrow{s}E'\hookrightarrow E\xrightarrow{\pi}B$ 是恒等映射。则其诱导同态的复合 $H^n(B;\mathbb{Z})\xrightarrow{\pi^*}H^n(E;\mathbb{Z})\to H^n(E';\mathbb{Z})\xrightarrow{s^*}H^n(B;\mathbb{Z})$ 也为恒等映射。由定义 $\pi^*(e(\xi))=c|_E$, 则前两个诱导同态的复合把 $e(\xi)$ 映成 $(c|_E)|_{E'}$。

又由于复合 $H^n(E,E';\mathbb{Z})\to H^n(E;\mathbb{Z})\to H^n(E';\mathbb{Z})$ 为零映射，故前两个诱导同态把 $e(\xi)$ 映为 0，则 $e(\xi)=s^*(0)=0$。

（如果假设 ξ 被赋予了欧氏度量结构，则令 ε 为截面 s 张成的平凡线丛，则有 $e(\xi)=e(\varepsilon)\cup e(\varepsilon^{\perp})$，由 ε 是平凡的，$e(\varepsilon)=0$，则得证） □

Example 2.1 设 M 为紧光滑流形，切丛记为 τ，如果 $e(\tau)\neq 0$，则 τ 不存在奇数维子向量丛：假设这样的子丛 ξ 存在，若为可定向的，则 $e(\tau)=e(\xi)\cup e(\xi^{\perp})$ 是自由 Abel 群 $H^n(M;\mathbb{Z})$ 中的二阶元，矛盾。若为不可定向的，则可以通过考虑 M 的可定向双叶覆盖流形来约化为第一种情况。

Chapter 3 Stiefel-Whitney 类

本章我们主要讨论 S-W 类，它可以刻画建立处处不相关的截面的拓扑障碍。与前面的 Thom 类和 Euler 类不同，我们先采用公理化定义的方法引入 S-W 类，再具体构造符合公理的类并验证唯一性。这种方法在后续研究陈类的时候会再次用到。

3.1 公理化定义

Definition 3.1

对每一个 n 维向量丛 ξ 都对应着一列上同调类 $w_i(\xi)\in H^i(B(\xi),\mathbb{Z}_2)(i=1,2,\cdots)$，被称为 ξ 的***Stiefel-Whitney* 类**，其中 $w_i(\xi)(i=1,2,\cdots)$ 满足如下公理：

（1）$w_0(\xi)=1\in H^0(B(\xi),\mathbb{Z}_2)$，且 $w_i(\xi)=0(i>n)$

（2）$f:B(\xi)\to B(\eta)$ 来自于丛映射 $\xi\to\eta$，则 $w_i(\xi)=f^*(w_i(\eta))$

（3）若 ξ 和 η 有相同的底空间，则

$$w_k(\xi\oplus\eta)=\sum_{i=0}^{k}w_i(\xi)\cup w_{k-i}(\eta)$$

（4）对 $\mathbb{RP}^1$ 上的典范线丛 γ_1^1，有 $w_1(\gamma_1^1)\neq 0$。 ♣

在接下来我们都先假设满足如上四条公理的类是存在的，则由这四条公理不难得到如下的一些性质。

Proposition 3.1

（1）若 ξ 与 η 同构，则 $w_i(\xi)=w_i(\eta)(\forall i)$。

（2）若 ε 为平凡丛，则 $w_i(\varepsilon)=0(i>0)$。

（3）若 ε 为平凡从，则 $w_i(\varepsilon\oplus\eta)=w_i(\eta)$。

（4）若 ξ 是一个赋予欧氏度量的 n 维向量丛且有 k 个处处线性无关的截面，则 $w_i(\xi)=$

$0(n-k+1\leq i\leq n)$。特别地，若 ξ 存在一个处处非零截面，则 $w_n(\xi)=0$。

当 $\xi\oplus\eta$ 为平凡丛时，显然有 $w_1(\xi)+w_1(\eta)=0, w_2(\xi)+w_1(\xi)w_1(\eta)+w_2(\xi)=0$ 等一系列关系式，则 $w_i(\eta)$ 可以完全由 ξ 的 S-W 类的多项式来表示。为了方便，我们引入总 S-W 类这一记号。

Definition 3.2

$H^{\Pi}(B;\mathbb{Z}_2)$ 是由全体形式无穷序列 $a=a_1+a_2+\cdots$ 组成的环，其中 $a_i\in H^i(B;\mathbb{Z}_2)$，其乘法由 $(a_0+a_1+a_2+\cdots)(b_0+b_1+b_2+\cdots)=(a_0b_0)+(a_1b_0+a_0b_1)+(a_2b_0+a_1b_2+a_0b_2)+\cdots$ 给出。

ξ 的总 ***Stiefel-Whitney* 类** 定义为这个环中的元素 $w(\xi)=1+w_1(\xi)+w_2(\xi)+\cdots$。

不难看出在总 S-W 类的记号下，公理的第三条可以被重新写为 $w(\xi\oplus\eta)=w(\xi)w(\eta)$。总 S-W 类的第一项必然为 1，不难验证所有首项为 1 的元素都在环中存在唯一的逆，为了方便记 $w^{-1}=\overline{w}$。则当 $\xi\oplus\eta$ 为平凡丛时，$w(\xi\oplus\eta)=0$，也即 $w(\eta)=\overline{w(\xi)}$。

Corollary 3.1 (Whitney 对偶定理)

τ_M 为流形 M 的切丛，ν 为法丛，则 $w_i(\nu)=\overline{w}_i(\tau_M)$。

Example 3.1 对流形 M，我们往往用 $w(M)$ 代指 $w(\tau_M)$。对球面 S^n，考虑其标准嵌入 $S^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$，法丛 ν 显然是平凡的，即 $w(\nu)=1$，则由上述推论 $w(S^n)=w(\tau_{S^n})=1$。

接下来我们具体讨论 $\mathbb{RP}^n$ 的 S-W 类。下面的例 3.2 和引理 3.1 能够帮助我们解决这一问题。首先我们熟知 $\mathbb{RP}^n$ 的上同调环 $H^*(\mathbb{RP}^n;\mathbb{Z}_2)$ 由 $\mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^{n+1})$ 给出。

Example 3.2 考虑 $\mathbb{RP}^n$ 上的典范线丛 γ_n^1，标准嵌入 $i:\mathbb{RP}^1\hookrightarrow\mathbb{RP}^n$ 显然可以由丛映射 $\gamma_1^1\to\gamma_n^1$ 得到，则由 S-W 类定义的第二与第四条公理

$$i^*(w_1(\gamma_n^1))=w_1(\gamma_1^1)\neq 0$$

则 $w_1(\gamma_n^1)$ 不为 0，则必然为 α，由 γ_n^1 的维数为 1，故其总 S-W 类为 $1+\alpha$。

γ_n^1 可以自然地被视为 $n+1$ 维平凡丛 ε^{n+1} 的子丛，取其正交补丛为 $\gamma^\perp$，则自然地其全空间为 $(\{\pm x\}, v)$（v 与 x 所在的直线垂直）所构成的集合，为 $\mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ 的子集。

由于 $\gamma_n^1 \oplus \gamma^\perp$ 是平凡丛，则有 $w(\gamma^\perp) = \overline{w}(\gamma_n^1) = (1+\alpha)^{-1} = 1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n$。

Lemma 3.1

$\tau_{\mathbb{RP}^n} \simeq \mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp)$ ♡

证明 L 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中经过原点的一条直线，与 S^n 交于 $\pm x$，并记 $L^\perp$ 为该直线的正交补 n 维平面。考虑典范映射 $S^n \to \mathbb{RP}^n, x \mapsto \{\pm x\}$ 的切映射 $df_x : T_xS^n \to T_{\{\pm x\}}\mathbb{RP}^n$，显然对 $v \in T_xS^n$，有 $df_x(v) = df_{-x}(-v)$，故 $T_{\{\pm x\}}\mathbb{RP}^n$ 与所有的对 $\{(x,v),(-x,-v) : x \perp v\}$ 构成的集合同构。

由每一个这样的对可以与 $\mathrm{Hom}(L, L^\perp)$ 中的元素 $x \mapsto v$ 一一对应，故 $T_{\{\pm x\}}\mathbb{RP}^n \simeq \mathrm{Hom}(L, L^\perp)$，则 $\tau_{\mathbb{RP}^n} \simeq \mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp)$。 □

Proposition 3.2

$\tau_{\mathbb{RP}^n} \oplus \varepsilon^1 \simeq \gamma_n^1 \oplus \gamma_n^1 \oplus \cdots \oplus \gamma_n^1$（$n+1$ 个），进而 $w(\mathbb{RP}^n) = (1+\alpha)^n$。♠

证明 显然 $\mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1)$ 是平凡线丛（它有一个处处非零的截面），故

$$\tau_{\mathbb{RP}^n} \oplus \varepsilon^1 \simeq \mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \gamma^\perp) \oplus \mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1) \simeq \mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \gamma_n^1 \oplus \gamma^\perp) \simeq \mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon^{n+1})$$

又 $\mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon^{n+1}) = \mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon^1) \oplus \mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon^1) \cdots \oplus \mathrm{Hom}(\gamma_n^1, \varepsilon^1)$（共 $n+1$ 个），故得证。

由又命题 3.1，$w(\tau_{\mathbb{RP}^n}) = w(\tau_{\mathbb{RP}^n} \oplus \varepsilon^1) = (w(\gamma_n^1))^n$，由例 3.2 的结果得证。 □

Corollary 3.2

$w(\mathbb{RP}^n) = 1$ 当且仅当 $n = 2^k - 1 (k \in \mathbb{N})$

进而若 $\mathbb{RP}^n$ 是可平行化的，则有 $n = 1, 3, 7, 15, \cdots$。♡

证明 若 $n = 2^k - 1$，则 $w(\mathbb{RP}^n) = (1+\alpha)^{2^k} = 1 + \alpha^{2^k} = 1 + \alpha^{n+1} = 1$

反之若 $n = 2^k m$（m 为大于 1 的奇数），则

$$w(\mathbb{RP}^n) = (1+\alpha^{2^k})^m = 1 + m\alpha^{2^k} + \frac{m(m-1)}{2}\alpha^{2^{k+1}} + \cdots \neq 1$$

矛盾！故原命题得证。 $\square$

Remark 事实上可以证明只有 $\mathbb{RP}^1, \mathbb{RP}^3, \mathbb{RP}^7$ 是可平行化的。

3.2 S-W 类的初步应用

这一节我们利用 S-W 类来解决一些有趣的小问题。

首先我们回忆在微分流形课程中学到的强 Whitney 浸入定理。

Theorem 3.1 (强 Whitney 浸入定理)

任意 $m(m>1)$ 维的光滑流形可以被浸入到 $\mathbb{R}^{2m-1}$ 中。

这里我们说明 $2m-1$ 是最强的结果。

Proposition 3.3

若 $\mathbb{RP}^{2^r}$ 可以浸入到 $\mathbb{RP}^{2^r+k}$ 中，则 $k \geq 2^r-1$。

证明 回忆上一节中我们得到（取 $n=2^r$）

$$w(\mathbb{RP}^n)=(1+\alpha)^{n+1}=1+\alpha+\alpha^n$$

则 $\overline{w}(\mathbb{RP}^n)=(w(\mathbb{RP}^n))^{-1}=1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1}$。

另一方面，若 $\mathbb{RP}^n$ 可以浸入到 $\mathbb{RP}^{n+k}$ 中，则对法丛 ν 维数为 k，自然有 $w_i(\nu)=0(i>k)$。又由 Whintney 对偶定理

$$\overline{w}_i(\mathbb{RP}^n)=w_i(\nu)$$

有 $\overline{w}_i(\mathbb{RP}^n)=0(i>k)$，则 $k \geq n-1=2^r-1$。 □

两个同维数流形的并能否实现为一个更高维流形的边界是**配边理论**中的重要问题。S-W 类在非定向配边理论中也发挥了重要的作用，为此我们需要引入 Stiefel-Whitney 数的概念。

取 M 为一个 n 维的闭流形，则在第一章的预备知识中我们知道可以定义 M 的 $\mathbb{Z}_2$ 系数的基本同调类 $\mu_M \in H_n(M;\mathbb{Z}_2)$，则对任意的 $v \in H^n(M;\mathbb{Z}_2)$，我们得到一个一个指标 $\langle v,\mu_M\rangle \in \mathbb{Z}_2$，被称为 Kronecker 指标，简记为 $v[M]$。

现在我们对 v 取一些具体的值。令 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 为一列满足 $r_1 + 2r_2 + \cdots + nr_n = n$ 的非负整数，则对切丛 τ_M，可以取出 $H^n(M;\mathbb{Z}_2)$ 中的元素

$$w_1^{r_1}(\tau_M)w_2^{r_2}(\tau_M)\cdots w_n^{r_n}(\tau_M)$$

取它为上述的 v，得到的对应 Kronecker 指标具有非常重要的意义。

Definition 3.3

模 2 的指标

$$\langle w_1^{r_1}(\tau_M)w_2^{r_2}(\tau_M)\cdots w_n^{r_n}(\tau_M), \mu_M\rangle = w_1^{r_1}w_2^{r_2}\cdots w_n^{r_n}[M]$$

被称为流形 M 相关于单项式 $w_1^{r_1}w_2^{r_2}\cdots w_n^{r_n}$ 的***Stiefel-Whitney* 数**。

对两个流形 M, M', 称他们有**相同**的 *Stiefel-Whitney* 数，是指对任意的如上 $r_1, r_2, \cdots$，均有

$$w_1^{r_1}w_2^{r_2}\cdots w_n^{r_n}[M] = w_1^{r_1}w_2^{r_2}\cdots w_n^{r_n}[M']$$

♣

Example 3.3 本例中我们来计算 $M = \mathbb{RP}^n$ 的 S-W 数。

如果 n 为偶数，则 $w_n(M) = (n+1)\alpha^n \neq 0$，则取 $r_1 = \cdots = r_{n-1} = 0, r_n = 1$，对应的 S-W 数为 $< w_n(M), \mu_M > \neq 0$。故 $\mathbb{RP}^n$ 有非零的 S-W 数。

若 $n = 2k-1$ 为奇数，则 $w(M) = (1+\alpha)^{2k} = (1+\alpha^2)^k$，则 $w_j(M) = 0(j$ 为奇数)。但又由于

$$r_1 + 2r_2 + \cdots + nr_n = n$$

右边为奇数，则必须存在 j 为奇数使得 $r_j \neq 0$，则 $w_1^{r_1}w_2^{r_2}\cdots w_n^{r_n}[M] = 0$。故 $\mathbb{RP}^n$ 的所有 S-W 类均为 0。

如下的两个定理表明了 S-W 数的重要性。

Theorem 3.2 (Pontrjagin 定理)

若 n 维流形 M 为某一个 $n+1$ 维流形 B 的边界，则 M 的所有 S-W 数均为 0。 ♡

证明 取带边流形 B 的基本同调类 $\mu_B \in H_{n+1}(B, M;\mathbb{Z}_2)$，由命题 1.2，同调群的长正合列连

接同态 $\partial: H_{n+1}(B,M;\mathbb{Z}_2) \to H_n(M;\mathbb{Z}_2)$ 把 μ_B 映为 μ_M。再记上同调群的长正合列中的连接同态为 $\delta: H^n(M;\mathbb{Z}_2) \to H^{n+1}(B,M;\mathbb{Z}_2)$，则对任意的 $v \in H^n(M;\mathbb{Z}_2)$，有

$$\langle v, \mu_M \rangle = \langle v, \partial\mu_B \rangle = \langle \delta v, \mu_B \rangle$$

对切丛 τ_B 在 M 的限制，取其 M 的外法向量丛，则其显然有一个处处非零的截面，故为平凡线丛。且又由于该丛的正交补为切丛 τ_M，我们有

$$\tau_B|_M \simeq \tau_M \oplus \varepsilon^1$$

故 $w(\tau_B)|_M = w(\tau_M)$，则

$$w_1^{r_1} w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}[M] = \langle \delta(w_1^{r_1} w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}), \mu_B \rangle = \langle \delta i^*(w_1^{r_1} w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}), \mu_B \rangle$$

又由于有正合列

$$H^n(B;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i^*} H^n(M;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(B,M;\mathbb{Z}_2)$$

也即 $\delta i^* = 0$，则 $w_1^{r_1} w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}[M] = 0$，故得证。 □

事实上，该定理的逆命题也正确，但这是一个强的多的结果，在此并不给出证明。

Theorem 3.3 (Thom)

如果流形 M 的所有 Stiefel-Whitney 数为 0，则 M 可以实现为某一个紧光滑流形的边界。 ♡

Example 3.4 我们在上面已经计算过了 $\mathbb{RP}^{2k-1}$ 的所有 Stiefel-Whitney 数均为 0，故由 Thom 定理，$\mathbb{RP}_{2k-1}$ 可以实现为流形的边界。

下面我们讨论两个流形的无交并能否被实现为流形的边界这一问题。

Definition 3.4

对两个 n 维光滑流形 M_1, M_2，称它们属于同一个不定向配边类，如果它们的无交并 $M_1 \coprod M_2$ 是一个 $(n+1)$ 维紧光滑流形的边界，此时简记为 $M_1 \sim M_2$。 ♣

Proposition 3.4

$\sim$ 给出了所有 n 维光滑流形集合中的一个等价关系。

证明 首先，对同一个流形 M 的两份复制，它们的并是流形 $M \times [0,1]$ 的边界，故 $M \simeq M$。

对称性是显然的。

若 $L \simeq M, M \simeq N$，则设 $L \coprod M$ 是 V 的边界，$M \coprod N$ 是 W 的边界。则可以把 V 和 W 沿边界上 M 的部分粘连起来（由管状邻域定理可以保证该过程的实现）形成新的流形 X，则 $L \coprod N$ 是 X 的边界，则 $L \sim N$。 □

为了研究更平凡的配边关系，我们不难想到刚才所讨论的 Pontrjagin 定理和 Thom 定理。为了运用它们，首先需要讨论无交并流形的 Stiefel-Whitney 数。

Lemma 3.2

对两个 n 维光滑流形 M 和 N 和满足 $r_1 + 2r_2 + \cdots nr_n = n$ 的非负整数序列 $r_1, r_2, \cdots r_n$，有

$$w_1^{r_1} w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}[M \coprod N] = w_1^{r_1} w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}[M] + w_1^{r_1} w_2^{r_2} \cdots w_n^{r_n}[N]$$

证明 首先我们熟知

$$H^n(M \coprod N; \mathbb{Z}_2) \simeq H^n(M; \mathbb{Z}_2) \oplus H^n(N; \mathbb{Z}_2), H_n(M \coprod N; \mathbb{Z}_2) \simeq H_n(M; \mathbb{Z}_2) \oplus H_n(N; \mathbb{Z}_2)$$

同调群的关系给出了基本同调类之间的关系 $\mu_{M \coprod N} = (\mu_M, \mu_N)$。

上同调群的关系给出了 S-W 类的关系（这里使用到了 S-W 类公理化定义中的自然性）$w(M \coprod N) = (w(M), w(N))$，则结论显然成立。 □

则结合该引理和上述的 Pontrjagin 定理、Thom 定理，我们得到了属于同一不定向配边类的等价判据。

Corollary 3.3

两个流形 M 和 N 属于同一个不定向配边类当且仅当它们有相同的 *Stiefel-Whitney* 数。

3.3 存在性的证明

在上面的讨论中我们都假设了 S-W 类的存在性，在这一节中我们会通过具体构造的方法给出 S-W 类的存在性的证明。

为了后续需要，这里我们引入代数拓扑中 Steenrod 平方的概念。

Definition 3.5

满足如下一系列条件的同态 $Sq^i : H^n(X;\mathbb{Z}_2) \to H^{n+i}(X;\mathbb{Z}_2)$ 称为***Steenrod* 平方**。

（1）可加性：$Sq^i(a+b) = Sq^i(a) + Sq^i(b)$

（2）自然性：对 $f : X \to Y$，$Sq^i(f^*(\alpha)) = f^*(Sq^i(\alpha))$

（3）边界条件：若 $a \in H^n(X;\mathbb{Z}_2)$，则 $Sq^0(a) = a, Sq^n(a) = a \cup a, Sq^i(a) = 0(i > n)$。

（4）*Cartan* 公式：$Sq^k(a \cup b) = \sum_{i=0}^{k} Sq^i(a) \cup Sq^{k-i}(b)$。

对相对情形 (X, Y) 也可以定义 *Steenrod* 平方，所满足的条件与上述一致，此处不再重复。♣

在这里我们默认满足如上条件的同态确实成立（具体构造非常复杂，详见 Hatcher 的代数拓扑第四章附录 L，此处省略）。

回忆我们在 2.1 节建立的 Thom 同构: $\Phi : H^i(B;\mathbb{Z}_2) \to H^{i+n}(E, E';\mathbb{Z}_2), b \mapsto \pi^*(b) \cup c$，其中 c 为 Thom 类。则我们断言

Theorem 3.4

$w_i(\xi) = \Phi^{-1} Sq^i \Phi(1)$ 符合 *Stiefel-Whitney* 类定义中的几条公理。（下面的所有 *Steenrod* 平方默认是在相对情形下定义的）♡

证明 为了简洁性，对 $a \in H^n(X, Y;\mathbb{Z}_2)$，定义其总 Steenrod 平方为

$$Sq(a) = a + a + Sq^1(a) + Sq^2(a) + \cdots + Sq^n(a)$$

则令 $w(\xi) = \Phi^{-1} Sq(\Phi(1)) = \Phi^{-1} Sq(c)$，下面我们逐条验证 w 满足四条公理。

第一条　由 Steenrod 平方的定义（3），显然

$$w_0(\xi) = \Phi^{-1}Sq^0(c) = \Phi^{-1}(c) = 1$$

且对 $i > n$

$$w_i(\xi) = \Phi^{-1}Sq^i(c) = \Phi^{-1}(0) = 0$$

第二条　对任意从映射 $f: \xi_1 \to \xi_2$，有诱导映射 $g: (E_1, E_1') \to (E_2, E_2')$。令 c_i 为 ξ_i 的 Thom 类，Φ_i 为 ξ_i 的 Thom 同构，则由 Thom 类的定义不难有 $g^*(c_2) = c_1$，则

$$g^*(\Phi_2(a)) = g^*(\pi_2^*(a) \cup c_2) = g^*(\pi_2^*(a)) \cup c_1 = \pi_1^*(f^*(a)) \cup c_1 = \Phi_1(f^*(a))$$

由 Steenrod 平方的定义（2），有

$$f^*(w_i(\xi_2)) = f^*(\Phi_2^{-1}Sq^i(c_2)) = \Phi_1^{-1}(g^*(Sq^i(c_2))) = \Phi_1^{-1}(Sq^i(g^*(c_2))) = \Phi_1^{-1}Sq^i(c_1) = w_i(\xi_1)$$

第三条　考虑笛卡尔积 $\xi = \xi_1 \times \xi_2$，ξ_i 的 Thom 类为 $c_i \in H^{n_i}(E_i, E_i'; \mathbb{Z}_2)$，则可以定义交叉积 $c_1 \times c_2 \in H^{n_1+n_2}(E_1 \times E_2, E_1 \times E_2' \cup E_1' \times E_2; \mathbb{Z}_2) = H^{n_1+n_2}(E_1 \times E_2, (E_1 \times E_2)'; \mathbb{Z}_2)$。但 $c_1 \times c_2|_{F_1 \times F_2, (F_1 \times F_2)'} = c_1|_{(F_1, F_1')} \times c_2|_{(F_2, F_2')}$，故由定义可知 $c_1 \times c_2$ 为笛卡尔积 $\xi_1 \times \xi_2$ 的 Thom 类。令 Φ 为 $\xi_1 \times \xi_2$ 的 Thom 同构，则

$$\Phi(a \times b) = (\pi_1 \times \pi_2)^*(a \times b) \cup (c_1 \times c_2) = (\pi_1^*(a) \cup c_1) \times (\pi_2^*(b) \cup c_2) = \Phi_1(a) \times \Phi_2(b)$$

可以计算

$$w(\xi) = \Phi^{-1}(Sq(c)) = \Phi^{-1}(Sq(c_1) \times Sq(c_2)) = \Phi^{-1}(\Phi_1(w(\xi_1) \times \Phi_2(w(\xi_2))) = w(\xi_1) \times w(\xi_2)$$

现在设 ξ_1 和 ξ_2 有相同的底空间 B，则将上式的两边同时利用对角线嵌入拉回到 B 上，则有

$$w(\xi_1 \oplus \xi_2) = w(\xi_1) \cup w(\xi_2)$$

第四步　γ_1^1 为 $\mathbb{RP}^1$ 上的典范线丛，取全空间 $E(\gamma_1^1)$ 中长度小于等于 1 的向量构成的集合，不

难看出它是一个 Mobius 带 M，边界圆为 B。由于 M 和 B 分别为 E 和 E' 的形变收缩核，有

$$H^*(M,B;\mathbb{Z}_2)\approx H^*(E,E';\mathbb{Z}_2)$$

同时将 $\mathbb{RP}^2$ 赋予典范 CW 复形结构，则有一个 2-细胞 D^2，且 $\mathbb{RP}^2-D^2$ 同胚于 M，则由切除定理

$$H*(M,B;\mathbb{Z}_2)\approx H^*(\mathbb{RP}^2,D^2;\mathbb{Z}_2)$$

故可以自然地把 $H^1(E,E';\mathbb{Z}_2)$ 嵌入到 $H^1(\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z}_2)$ 中，则基本同调类 $H^1(E,E';\mathbb{Z}_2)$ 对应的像只能与 $H^1(\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z}_2)$ 的生成元 α 对应，则 $Sq^1(u)=u\cup u$ 与 $Sq^1(\alpha)=\alpha\cup\alpha\neq 0$ 对应，则

$$w_1(\gamma_1^1)=\Phi^{-1}Sq^1(u)\neq 0$$

故得证。 □

3.4 唯一性的证明

上一节中我们利用 Thom 同构和 Steenrod 平方构造了一个满足四条公理的 Stiefel-Whitney 类，本节中我们证明这是唯一的满足定义的类，主要思路是利用我们之前的讨论，把所有的向量丛推到无穷 Grassmann 流形 G_n 上，这首先需要我们对 G_n 的上同调环进行研究。

Theorem 3.5

G_n 的上同调环 $H^*(G_n;\mathbb{Z}_2)$ 是由 $w_1(\gamma^n),\cdots,w_n(\gamma^n)$ 在 $\mathbb{Z}_2$ 上生成的多项式代数。♡

证明 显然上式的右边包含于左边，则只需要对任意的 r 证明等式两边的 r 维群的秩相等即可。

令 C^r 为所有的 r-上链，Z^r 为所有的上边界，则

$$\operatorname{rank}(H^r(G_n;\mathbb{Z}_2)) \leq \operatorname{rank}(Z^r) \leq \operatorname{rank}(C^r)$$

上式的最右侧即为 G_n 的 CW 复形结构中所有 r-细胞的个数，故 $\operatorname{rank}(H^r(G_n;\mathbb{Z}_2))$ 至多等于 r-细胞数，回顾命题 1.5，即为将 r 分割为至多 n 个正整数的和的方法。

另一方面，原命题的右边的 r 维群中，对不同的非负整数序列 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 使得 $r_1+2r_2+\cdots+nr_n=r$，有**不同**（这需要接下来证明的引理！）的单项式 $w_1^{r_1}(\gamma^n)\cdots w_n^{r_n}(\gamma^n)$。对每组这样的 $r_1,\cdots,r_n$，取 $r_n,r_n+r_{n-1},\cdots,r_n+r_{n-1}+\cdots+r_1$ 中的非零项，我们得到一个将 r 分割为至多 n 个正整数的和的方案，并不难验证满足条件的 $r_1,\cdots,r_n$ 与这样的分割是一一对应的。故所有不同的 r 次单项式个数恰好等于对应的分割数。

同样由下面将要证的引理，所有的这样的单项式是线性无关的，则原命题右边的 r 维群的秩至少为这样的分割数。

由右边包含于左边，上述的不等式必须为等式，故 $H*(G_n;\mathbb{Z}_2)$ 的 r 维群的秩与右边的多项式代数的 r 维群的秩相等，均为将 r 分割为至多 n 个正整数的方案数，故得证。 □

证明中我们承认了如下的引理，在此补充叙述与证明。

Lemma 3.3

$w_1(\gamma^n), w_2(\gamma^n), \cdots, w_n(\gamma^n)$ 之间没有多项式关系。

证明 若 $p(w_1(\gamma^n), \cdots, w_n(\gamma^n)) = 0$，其中 p 为模 2 系数的 n 元多项式，则由命题 1.4，任意仿紧空间上的 n 维向量丛 ξ，存在丛映射 $g : \xi \to \gamma^n$，则由自然性

$$w_i(\xi) = g^*(w_i(\gamma^n))$$

则有

$$p(w_1(\xi), w_2(\xi), \cdots, w_n(\xi)) = g^*(p(w_1(\gamma^n), \cdots, w_n(\gamma^n))) = 0$$

即对所有的 n 维丛 ξ，$w_i(\xi)$ 之间也有多项式关系。

但考虑 $\mathbb{RP}^\infty$ 上的典范线丛 γ^1，我们知道 $H^*(\mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}_2)$ 是由 α 生成的多项式代数，且 $w(\gamma^1) = 1 + \alpha$。

则考虑 n 次的笛卡尔积 $X = \mathbb{RP}^\infty \times \cdots \times \mathbb{RP}^\infty$，其上同调环 $H^*(X; \mathbb{Z}_2)$ 为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 生成的多项式代数（上述生成元均为 1 维的）。对丛的 n 次笛卡尔积 $\xi = \gamma^1 \times \cdots \times \gamma^1$，则 ξ 是 X 上的 n 维丛。则有

$$w(\xi) = (w(\gamma^1))^n = (1 + \alpha)^n = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdots (1 + \alpha_n)$$

则 $w_i(\xi)$ 是 i 元基本对称多项式，显然所有的 $w_i(\xi)$ 之间没有多项式关系，矛盾！故 $w_i(\gamma^n)$ 之间没有多项式关系。 □

借助上面的结果我们证明 Stiefel-Whitney 类是唯一的。

Theorem 3.6

存在唯一的对应 $\xi \mapsto w(\xi)$ 将任意仿紧空间上的向量丛 ξ 对应于一列满足 *Stiefel-Whitney* 类定义的四条公理的上同调类。

证明 我们已经证明了存在性。下证唯一性。假设存在两个这样的对应 $\xi \mapsto w(\xi)$ 和 $\xi \mapsto \overline{w}(\xi)$，

则对 $\mathbb{RP}^1$ 上的典范线丛 γ_1^1，有

$$w(\gamma_1^1) = \overline{w}(\gamma_1^1) = 1 + \alpha$$

将 γ_1^1 嵌入到 $\mathbb{RP}^\infty$ 上的典范线丛 γ^1 中，由自然性可知

$$w(\gamma^1) = \overline{w}(\gamma^1) = 1 + \alpha$$

再考虑 n 次笛卡尔积 $\xi = \gamma^1 \times \gamma^1 \cdots \times \gamma^1$，有

$$w(\xi) = \overline{w}(\xi) = (1 + \alpha_1) \cdots (1 + \alpha_n)$$

则由命题 1.4，存在从映射 $\xi \to \gamma^n$，再由定理 3.5，$H^*(G_n; \mathbb{Z}_2)$ 可以单嵌入到 $H^*(\mathbb{RP}^\infty \times \cdots \times \mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}_2)$ 中，则由自然性 $w(\gamma_n) = \overline{w}(\gamma_n)$。

对任意仿紧空间上的 n 维向量丛 η, 再次使用命题 1.4，存在从映射 $f : \eta \to \gamma^n$，则再次由自然性:

$$w(\eta) = f^*(w(\gamma^n)) = f^*(\overline{w}(\gamma^n)) = \overline{w}(\eta)$$

则 $w = \overline{w}$，唯一性得证。 □

Chapter 4　实向量丛示性类理论的进一步应用

4.1　关于流形的法丛

M 是一个一个 n 维光滑流形，且作为闭子集嵌入在 $n+k$ 维黎曼流形 A 中，接下来我们讨论 M 在 A 中的法丛的示性类。首先陈述如下的管状邻域定理（我们在微分流形课程中学习过其特殊情况）：

Theorem 4.1 (管状邻域定理)

存在 M 在 A 中的开邻域 U，使得 U 由映射 f 微分同胚于法丛的全空间，其中 f 将 M 中的每个点 x 映为 x 处的非零法向量。这样的邻域 U 称为 M 在 A 中的管状邻域。

证明　这里我们只证明 M 是紧流形时的情形。记法丛的全空间为 E，则对任意的 $\varepsilon > 0$，定义 E 的开子集 $E(\varepsilon) = \{(x,v) \in E : |v| < \varepsilon\}$。取 ε 使得在 $E(\varepsilon)$ 上可以定义指数映射 $Exp: E(\varepsilon) \to A$，则我们先证明对足够小的 ε，$E(\varepsilon)$ 被指数映射微分同胚地映为 A 中包含 M 的一个开集 N_ε。

我们熟知指数映射 Exp 是局部微分同胚，故只需要证对足够小的 $\varepsilon > 0$，Exp 在 $E(\varepsilon)$ 上是单射即可。

若结论不成立，则对任意的 i，存在 $E(\frac{1}{i})$ 中的 $(x_i,v_i) \neq (x_i',v_i')$ 使得 $Exp(x_i,v_i) = Exp(x_i',v_i')$。

则我们得到了一列点列 $\{(x_i,v_i)\}$，又由 M 是紧的，可以找到同时收敛的子列（为了简便不妨仍然以 i 为下表）$\lim_{i\to\infty}(x_i,v_i) = (x,0)$ 和 $\lim_{i\to\infty}(x_i',v_i') = (x',0)$，则

$$x = Exp(x,0) = \lim_{i\to\infty} Exp(x_i,v_i) = \lim_{i\to\infty} Exp(x_i',v_i') = Exp(x',0) = x'$$

即 $x = x'$，但这与 Exp 在 $(x,0)$ 的一个足够小邻域内为微分同胚矛盾！

则为了补全证明，只需要证 $E(\varepsilon)$ 与 E 也是微分同胚的。这是显然的，想要的同胚可以如

下具体构造出来：

$$(x, v) \mapsto (x, \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{|v|^2}{\varepsilon^2}}})$$

则原命题得证。 □

在下面的讨论中我们均默认 M 被嵌入为 A 的闭子集，当 M 为紧流形时该条件自然成立。

Proposition 4.1

对 M 在 A 中的法丛 ν（全空间为 E），有上同调环之间的同构 $H^*(E, E'; R) \approx H^*(A, A - M; R)$

证明 取 N_ε 同上。首先由切除定理

$$H^*(A, A - M; R) \approx H^*(N_\varepsilon, N_\varepsilon - M; R)$$

则微分同胚 $Exp : (E(\varepsilon), E'(\varepsilon)) \to (N_\varepsilon, N_\varepsilon - M) \subset (A, A - M)$ 给出

$$H^*(E(\varepsilon), E'(\varepsilon); R) \approx H^*(A, A - M; R)$$

再次由切除定理

$$H^*(E(\varepsilon), E'(\varepsilon); R) \approx H^*(E, E'; R)$$

则结合上式得证。 □

Remark 可以说明上述命题中的同构与 A 的黎曼度量结构选取是无关的。

则现在取 E 的 $\mathbb{Z}_2$ 系数 Thom 类，则由上述命题，它对应于一个上同调类 $u' \in H^k(A, A - M; \mathbb{Z}_2)$。如果法丛 ν 是可定向的，则将系数取为 $\mathbb{Z}$。

Definition 4.1

上述的 $u' \in H^k(A, A - M; R)$ 在自然同态下 $H^k(A; R)$ 中的像被称为 k 余维子流形 M 的 R-系数**对偶上同调类**。

对偶上调类与法丛的最高维 Stiefel-Whitney 类、Euler 类（如果可定向）之间有着如下的关系。

Theorem 4.2

$\mathbb{Z}_2$ 系数的对偶上同调类 u' 在限制同态 $H^k(A;\mathbb{Z}_2) \to H^k(M;\mathbb{Z}_2)$ 中的像为法丛 ν 的 k 维 *Stiefel-Whitney* 类 $w_k(\nu)$。

若 ν 是可定向的，则 $\mathbb{Z}$ 系数的对偶上同调类 u' 在限制同态 $H^k(A;\mathbb{Z}) \to H^k(M;\mathbb{Z})$ 中的像为法丛 ν 的 *Euler* 类 $e(\nu)$。 ♡

证明 定义 $s: M \to E$ 是法丛 ν 的非零截面，诱导映射 $s^*: H^*(E;\mathbb{Z}_2) \to H^*(M;\mathbb{Z}_2)$，则取 $\mathbb{Z}_2$ 系数的 Thom 类 u，$s^*(u|E) \in H^k(M;\mathbb{Z}_2)$。事实上它等于 $w_k(\nu)$：记 Φ 为 Thom 同构：$H^k(M;\mathbb{Z}_2) \to H^{2k}(E,E';\mathbb{Z}_2)$，则

$$s^*(u|E) = \Phi^{-1}(\pi^*(s^*(u|E)) \cup u) = \Phi^{-1}((u|_E) \cup u) = \Phi^{-1}(u \cup u) = \Phi^{-1}Sq^k(u) = w_k(\nu)$$

再用 $(N_\varepsilon, N_\varepsilon - M)$ 代替 (E,E')，则自然同态 $H^k(N_\varepsilon, N_\varepsilon - M;\mathbb{Z}_2) \to H^k(M;\mathbb{Z}_2)$ 将 u 对应的类映成 $w_k(\nu)$，则得证。

$\mathbb{Z}$ 系数的情形需要如下引理。

Lemma 4.1

自然同态 $f: H^k(M;\mathbb{Z}) \to H^k(M;\mathbb{Z}_2)$ 将 $e(\nu)$ 映为 $w_k(\nu)$。 ♡

证明 取 $\overline{u}$ 为 $\mathbb{Z}$ 系数 Thom 类，则同上

$$e(\nu) = \Phi^{-1}(\pi^*(e(\nu)) \cup \overline{u}) = \Phi^{-1}((\overline{u}|_E) \cup \overline{u}) = \Phi^{-1}(\overline{u} \cup \overline{u})$$

则

$$f(e(\nu)) = \Phi^{-1}(f(\overline{u} \cup \overline{u})) = \Phi^{-1}(u \cup u) = w_k(\nu)$$

最后一步来自于 $\mathbb{Z}_2$ 情形下的证明。

在承认上述引理的情况下，$\mathbb{Z}$ 系数的情形与 $\mathbb{Z}_2$ 系数的情形完全一致，只需要在证明过程中留意 f 的作用即可，细节在此省略。 $\square$

在 3.2 节中我们处理了流形浸入到欧氏空间的问题，这里上述定理向我们为流形的嵌入问题提供了判据：

Corollary 4.1

若 n 维流形 M 能够光滑嵌入为 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的闭子集，则对其法丛 ν，有 $w_k(\nu)=0$。在可定向的情况下 $e(\nu)=0$。 ♡

Remark 由 Whitney 对偶定理，$w_k(\nu_k)=\overline{w}_k(\tau_M)$，则上述推论可以叙述为：若 $\overline{w}_k(\tau_M)\neq 0$，则 M 不可以光滑嵌入为 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的闭子集。

Example 4.1 再次考察 $\mathbb{RP}^n$ 的例子，由上可知它不可以光滑嵌入到 $\mathbb{R}^{2n-1}$ 中，则这告诉我们 Whitney 强嵌入定理中的维数是最佳的。

4.2 关于流形的切丛

4.3 吴文俊公式

4.4 障碍理论

Chapter 5　复向量丛的示性类

5.1　复向量丛

5.2 陈类

5.3 Pontrjagin 类

5.4 具体的例子与计算

Chapter 6 微分几何的预备知识

6.1 联络与曲率

6.2 Kähler 流形

6.3 复几何中的一些计算

Chapter 7　Gauss-Bonnet-Chern 公式

7.1　微分几何中的 Thom 类与 Euler 类

7.2 超渡公式与 Chern-Weil 理论基本定理

7.3 Gauss-Bonnet-Chern 公式的证明

Chapter 8 微分几何中的陈类

8.1 曲率多项式定义

8.2 陈类与消灭定理

8.3 陈类与 Hermitian-Einstein 向量丛

Chapter 9　指标定理

9.1　其他示性类

9.2 Atiyah-Singer 指标定理