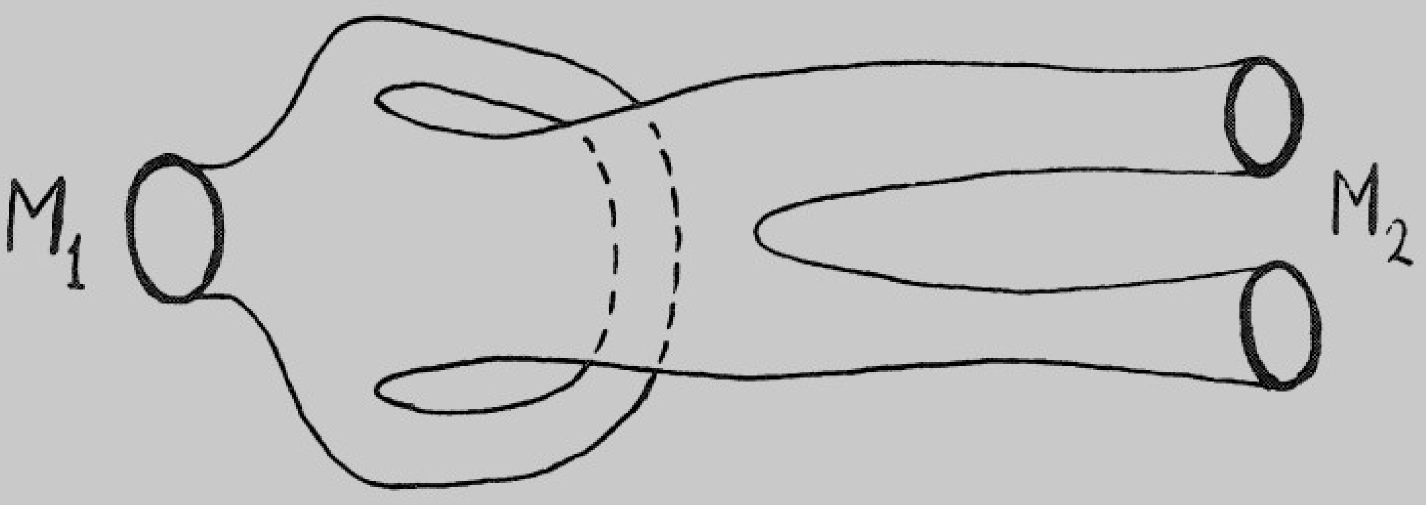


# 示性类理论

**Author:** 吕长乐

**Institute:** 中国科学技术大学

**Date:** 2024 年 6 月

*Characteristic class connects topology and curvature.*

# 前言

示性类理论的研究是从 1935 年由 Stifel 和 Whitney 二人几乎同时开始独立进行的。Stifel 在 Hopf 的指导下研究了一种由流形的切丛决定的同调类，而 Whitney 在处理一般球丛的时候引入了上同调的语言，正式定义了示性上同调类。1942 年 Pontrjagin 在研究 Grassmann 流形的时候定义了 Pontrjagin 类，1946 年陈省身在昆明的高级研究所对复向量丛也定义了陈示性类。再后来吴文俊引入了吴示性类，并导出了 S-W 示性类、陈示性类等由吴示性类的表示公式，将这一理论进行了进一步的发展。

上述示性类的定义都是从拓扑的角度出发的，而从曲率的角度来看，上述的示性类理论也有着非常重要的意义，这些上同调类都可以用曲率张量所表示。Chern-Weil 理论给出了这二者之间的联系，并让示性类理论所能应用的范围大幅变大。

本讲义为 2024 秋季学期开始的示性类理论讨论班而作，第一部分（第一到第四章）为拓扑示性类理论，第二部分（第五到第八章）为微分几何中的示性类理论。学习本讲义有关内容需要一定的代数拓扑、微分流形与黎曼几何基础，重要的前置知识会在正文中进行讲解。本讲义的主要参考书为 Hatcher 的《代数拓扑》、Milnor 的《示性类》、张伟平的《流形上的几何与分析》和 Kobayashi 的《复向量丛的微分几何》。

# 目录

# Chapter 1 拓扑理论的预备知识

## 1.1 向量丛

向量丛是示性类理论中的基本研究对象之一，为此我们先回顾向量丛的有关知识。

### 1.1.1 基本概念

**Definition 1.1**

拓扑空间 $B$ 上的一个<u>实向量丛</u>（或称为 $\mathbb{R}^n$ 丛）$\xi$ 有如下部分:

(i) 一个拓扑空间 $E$，称为 $\xi$ 的<u>全空间</u>

(ii) 一个连续映射 $\pi : E \to B$，称为<u>投影</u>

(iii)$\forall b \in B$，<u>纤维</u> $\pi^{-1}(b)$（也写作 $F_b(\xi)$）上有 $n$ 维实向量空间结构

且还需要满足<u>局部平凡性</u> 的条件，即

$\forall b \in B$，存在 $b$ 的邻域 $U$(如果 $U$ 可以取为整个底空间 $B$，则称 $\xi$ 是平凡的) 和一个同态 $h_U : U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U)$，使得对 $U$ 中任意一个 $c$，有 $x \mapsto h_U(c, x)$ 给出了 $\mathbb{R}^n$ 与纤维 $\pi^{-1}(c)$ 之间的同构。 ♣

下面是几个向量丛的例子。

**Example 1.1** 流形的<u>切丛</u>$\tau_M$。对任意一个流形 $M$，$\tau_M$ 的底空间为 $M$，全空间为 $TM = \{(x, v) : x \in M, v \in T_xM\}$，第一分量的投影即为丛的投影。不难验证纤维上的向量结构以及局部平凡性。如果 $\tau_M$ 是平凡的，则称流形 $M$ 是<u>可平行化的</u>。

**Example 1.2** 流形的<u>法丛</u>$\nu_M$。具体讨论与上例类似。

**Example 1.3** $\mathbb{RP}^n$ 上的典范线丛 $\gamma_n^1$。全空间 $E(\gamma_n^1) = \{(\{\pm x\}, v) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} : v = kx(k \in \mathbb{R})\}$

(这里我们把 $\mathbb{RP}^n$ 视为 $S^n$ 上对径点对构成的集合)，第一分量的投影即为丛的投影。每个纤维可以视为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中穿过向量 $x$ 的直线，故其上自然有 1 维向量结构。它的局部平凡化可以写出：

$$h_U : U \times \mathbb{R} \to \pi^{-1}(U)$$

$$(\{\pm x\}, t) \mapsto (\{\pm x\}, tx)$$

**Definition 1.2**

对向量丛 $\xi$，一个<u>**截面**</u>是一个连续映射 $s : B \to E$，使得 $\pi \circ s = \mathrm{Id}$。♣

利用截面，可以给出一个向量丛是否平凡的判据如下（具体证明在此省略）

**Proposition 1.1**

一个 $n$ 维实向量丛 $\xi$ 是平凡的当且仅当存在 $n$ 个处处线性无关的截面 $s_1, \ldots, s_n$。♠

**Example 1.4** $S^3$ 是可平行化的。定义其切丛的三个截面如下：将 $S^3$ 自然嵌入到 $\mathbb{R}^4$，则对任意 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3$，令 $s_i(x) = (x, t_i(x))(i = 1, 2, 3)$，其中

$$t_1(x) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$$

$$t_2(x) = (-x_3, x_4, x_1, -x_2)$$

$$t_3(x) = (-x_4, -x_3, x_2, x_1)$$

可以验证这给出了三个处处无关的截面，则 $\tau_{S^3}$ 是平凡的。

### 1.1.2 构造新的向量丛

这一小节我们讨论几种从已有向量丛给出新的向量丛的构造方法。

#### 一、拉回丛

对任意向量丛 $\xi(B, E, \pi, h)$ 和拓扑空间 $B_1$，以及一个映射 $f : B_1 \to B$，在 $B_1$ 上定义拉回丛 $f^*\xi$ 如下：

全空间定义为 $E_1 = \{(b, e) \in B_1 \times E : f(b) = \pi(e)\}$，第一分量的投影为丛投影。对 $\xi$ 的一个平凡化邻域 $U$，在 $f^{-1}(U)$ 上定义 $f^*\xi$ 的局部平凡化 $h_1$ 为

$$h_1 : U_1 \times \mathbb{R}^n \to \pi_1^{-1}(U_1)$$

$$(b, x) \mapsto (b, h(f(b), x))$$

二、**笛卡尔积**

对两个向量丛 $\xi_i(B_i, E_i, \pi_i, h_i)(i = 1, 2)$，在 $B_1 \times B_2$ 上可以定义它们的笛卡尔积 $\xi_1 \times \xi_2$，全空间为 $E_1 \times E_2$。从投影为 $\pi_1 \times \pi_2$。

三、**Whitney 和**

已知 $B$ 上有两个向量丛 $\xi_1, xi_2$，$d : B \to B \times B, b \mapsto (b, b)$ 为对角嵌入，则定义 $\xi_1$ 和 $\xi_2$ 的 Whitney 和 $\xi_1 \bigoplus \xi_2$ 为拉回丛 $d^*(\xi_1 \times \xi_2)$。

四、**正交补**

对任意向量丛 $\xi \subset \eta$，定义 $F_b(\xi^\perp)$ 为 $F_b(\xi)$ 在 $F_b(\eta)$ 中的正交补，并令 $E(\xi^\perp)$ 为所有 $F_b(\xi^\perp)$ 的并。对一个邻域 $U$，选取 $\xi|_U$ 的标准正交截面基 $s_1, \ldots, s_m$，并扩张为 $\eta|_U$ 上的标准正交截面基 $s_1, \ldots, s_n$，则定义局部平凡化如下：

$$h : U \times \mathbb{R}^{n-m} \to E(\xi^\perp)$$

$$(b, x) \mapsto x_1 s_{m+1}(b) + \cdots + x_{n-m} s_n(b)$$

可以验证如上条件给出了一个向量丛 $\xi^\perp$，且有 $\eta \simeq \xi \bigoplus \xi^\perp$。

## 1.2 基本同调类

为了方便后续讨论，这里讨论在流形的定向中具有重要作用的基本同调类。

### 1.2.1 概念与基本性质

$M$ 是一个闭连通的 $n$ 维流形，并且是 $R-$ 连通的，则我们熟知 $H_n(M;R) \equiv R$

## 1.3 Grassmann 流形的有关讨论

# Chapter 2　向量丛的上同调

## 2.1 Gysin 序列与 Euler 类

在这一节我们默认读者熟悉代数拓扑中的有关概念，包括 CW 复形、上同调等。如果有需要，可以参考 Allen Hatcher 的代数拓扑教材第二、第三章。

## 2.2 Thom 同构定理与 Thom 类

## 2.3 拓扑障碍理论

# Chapter 3 Stiefel-Whitney 类

## 3.1 公理化定义

## 3.2 S-W 类的一些应用

## 3.3 存在性的证明

## 3.4 吴文俊公式

# Chapter 4 复向量丛的示性类

## 4.1 陈类

## 4.2 Pontrjagin 类

## 4.3 具体的例子与计算

# Chapter 5　微分几何的预备知识

## 5.1　联络与曲率

## 5.2 Kähler 流形

## 5.3 复几何中的一些计算

# Chapter 6 Gauss-Bonnet-Chern 公式

## 6.1 微分几何中的 Thom 类与 Euler 类

## 6.2 超渡公式与 Chern-Weil 理论基本定理

## 6.3 Gauss-Bonnet-Chern 公式的证明

# Chapter 7 微分几何中的陈类

## 7.1 曲率多项式定义

## 7.2 陈类与消灭定理

## 7.3 陈类与 Hermitian-Einstein 向量丛

# Chapter 8 指标定理

## 8.1 其他示性类

## 8.2 Atiyah-Singer 指标定理