

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

Практическая работа
по дисциплине «Компьютерная математика»
Тема: Обработка данных лазерной локацией Луны.

Студент гр. 0382

Кривенцова Л.С.

Преподаватель

Коптелов Я.Ю.

Санкт-Петербург

2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

1. Основные теоретические положения.	..4
2. Постановка задачи.	..4
3. Методы, необходимые для решения задачи.	..4
3.1. Общие положения метода наименьших квадратов.	..4
3.2. Аппроксимирующая функция.	..5
3.3 LU - разложение.	..11
3.4. Регрессия.	..12
3.4.1. Линейная регрессия.	..12
3.4.2. Полиномиальная регрессия.	..13
3.4.3. Сравнение точности линейной и полиномиальной регрессии.	..13
4. Решение обратной задачи.	..18

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы: написать программу, решающую обратную задачу по получению нормальных точек (Примечание: под точкой подразумевается время и разность в сантиметрах между наблюдаемой и модельной величинами времени хода оптического сигнала, рассчитанная при немного сдвинутых положениях обсерватории и отражателя на Луне).

Задачи:

1. Определить подходящую степень полинома и реализовать полиномиальную регрессию.
2. Реализовать вычисление rms точек.
3. Выполнить выброс определенных точек.
4. Определить сессии наблюдений.
5. Сформировать нормальные точки.
6. Нарисовать графическое представление точек и значений полинома в этих точках.

1. Основные теоретические положения.

Обратная задача - тип задач, часто возникающий во многих разделах науки, когда значения параметров модели должны быть получены из наблюдаемых данных.

Примеры обратных задач можно найти в следующих областях: геофизика, астрономия, медицинская визуализация, компьютерная томография, дистанционное зондирование Земли, спектральный анализ, теория рассеяния и задачи по неразрушающему контролю.

В данной работе рассмотрен метод наименьших квадратов (далее МНК).

2. Постановка задачи.

Исходные данные: текстовый файл с тремя колонками.

Колонка 1 -- дата в календарном формате с точностью 1 с (для сведения)

Колонка 2 -- дата в формате MJD (для реального использования)

Колонка 3 -- разность в сантиметрах между наблюдаемой и модельной величинами времени хода оптического сигнала, рассчитанная при немного сдвинутых положениях обсерватории и отражателя на Луне.

Необходимо написать программу, которая сформирует такой же файл, но содержащий нормальные точки вместо сырых наблюдений. Новый файл должен быть на одну колонку шире. В последней колонке должен быть rms нормальной точки. Один сеанс должен давать одну нормальную точку. Промежутки между сеансами составляют от 5 минут и больше. (При этом сеанс может быть любой длительности, хоть 1 минуту, хоть 15).

См. Приложение А.

3. Методы, необходимые для решения задачи.

3.1. Общие положения метода наименьших квадратов.

Пусть имеются данные в виде набора влияющих и зависимых величин, полученные из опытов.

x	x_1	...	y_n
y	y_1	...	y_n

На плоскости xOy данной таблице соответствует n точек $M_i(x_i, y_i)$, где $i = 1, 2, \dots, n$, точки M_i называют экспериментальными точками (Рисунок 1).

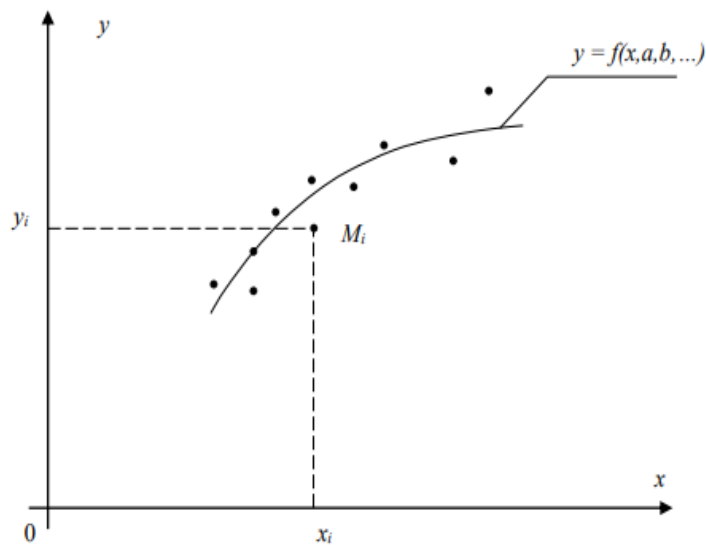


Рисунок 1 - Экспериментальные точки

Требуется установить функциональную зависимость $y = f(x)$ между переменными x и y по результатам экспериментальных исследований, приведенных в таблице.

Применение интерполяции в данном случае нецелесообразно, так как значения y_i в узлах x_i получены экспериментально и поэтому являются сомнительными (в ходе эксперимента возникает неустранимая погрешность, обусловленная неточностью измерений). Кроме того, совпадение значений в узлах не означает совпадения характеров поведения исходной и интерполирующей функций. Поэтому необходимо найти такой метод подбора эмпирической формулы, который не только позволяет найти саму формулу, но и оценить погрешность подгонки.

В общем случае искомая функция $y = f(x)$ будет зависеть не только от x , но и от некоторого количества параметров: $y = f(x, a, b, \dots)$

3.2. Аппроксимирующая функция.

Найти аппроксимирующую функцию

$$y = f(x, a, b, \dots) \quad (1)$$

такую, чтобы в точках $x = x_i$ она принимала значения по возможности близкие к табличным, то есть график искомой функции должен проходить как можно ближе к экспериментальным точкам. Вид функции (1) может быть известен из теоретических соображений или определяться характером расположения экспериментальных точек M_i на плоскости xOy .

Для отыскания коэффициентов $a, b \dots$ в функции (1) применяется метод наименьших квадратов. Между искомой функцией и табличными значениями в точках x_i наблюдаются отклонения. Обозначим их $\Delta y_i = f(x_i, a, b \dots) - y_i$, где $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Выбираем значения коэффициентов $a, b \dots$ так, чтобы сумма квадратов отклонений принимала минимальное значение:

$$S(a, b, \dots) = \sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2 = \sum_{i=1}^n [f(x_i, a, b, \dots) - y_i]^2 \rightarrow \min \quad (2)$$

Сумма $S(a, b, \dots)$ является функцией нескольких переменных. Необходимый признак экстремума функции нескольких переменных состоит в том, что обращаются в нуль частные производные:

$$S'_a = 0, S'_b = 0, \dots \quad (3)$$

Рассмотрим функции.

Линейная функция.

$$y = ax + b \quad (4)$$

Составим функцию двух переменных и найдем, при каких значениях a, b эта функция принимает минимальное значение:

$$S(a, b) = \sum (ax_i + b - y_i)^2 \rightarrow \min. \quad (5)$$

По необходимому признаку экстремума частные производные функции (5) должны быть равны нулю:

$$\begin{cases} S'_a(a, b) = \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) \cdot x_i = 0, \\ S'_b(a, b) = \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) \cdot 1 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Преобразуем уравнения системы (6) следующим образом:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot a + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot b = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot a + n \cdot b = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (7)$$

Таким образом, получается система линейных уравнений с двумя неизвестными a и b . Коэффициенты при неизвестных a и b (соответствующие суммы) находятся из исходной табличной зависимости и являются постоянными для данной выборки.

Получаем матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix}$$

И вектор – столбец решений линейного уравнения:

$$b = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i) \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{pmatrix}$$

Чтобы решить СЛАУ, будем использовать метод LU – разложения.

Решения даст нам следующий результат:

Данные:

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	1.0	1.5	3.0	4.5	7.0	8.5

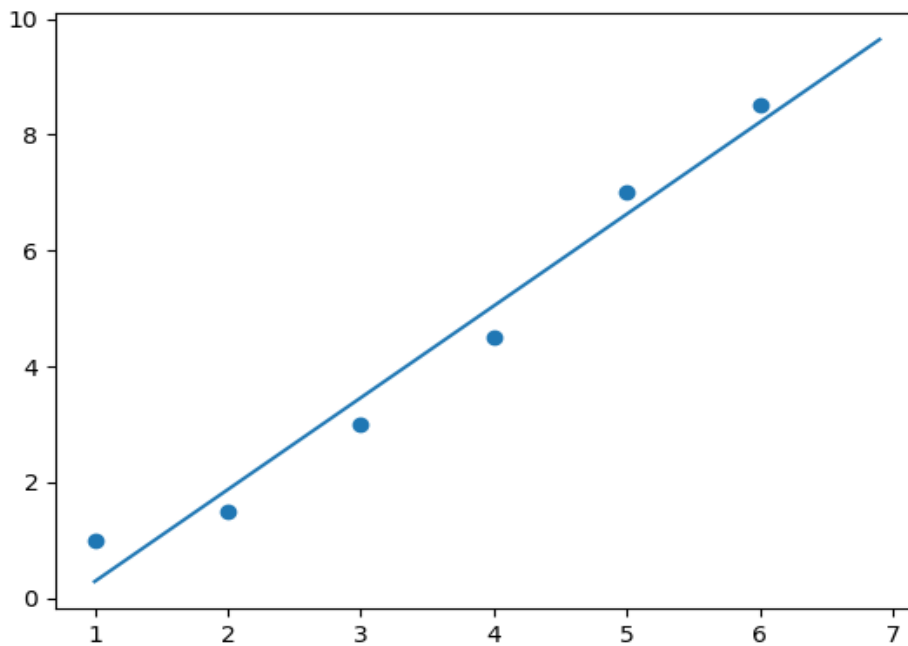


Рисунок 2. Прямая аппроксимации.

Сумма квадратов разности:

```

Столбец значений:
1.0
1.5
3.0
4.5
7.0
8.5
Вектор квадратов разности : [0.51020408 0.13795918 0.20897959 0.29469388 0.13795918 0.08163265]
Сумма квадратов разности : 1.3714285714285717

```

Приближение хорошее, но можно ли его сделать лучше? Да. Если использовать полином в качестве функции аппроксимации.

Полиномиальная функция.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_n x^n$$

Как и для линейной функции для нахождения оптимального результата должно выполняться условие, что сумма квадратов отклонений принимает минимальное значение. Это выполняется когда производная функции S по каждому β равна 0:

$$S'_{\beta_m} = \sum_{i=0}^n 2(\beta_m x_i^m + \beta_{m-1} x_i^{m-1} + \dots + \beta_0 - y_i) * x_i^m = 0$$

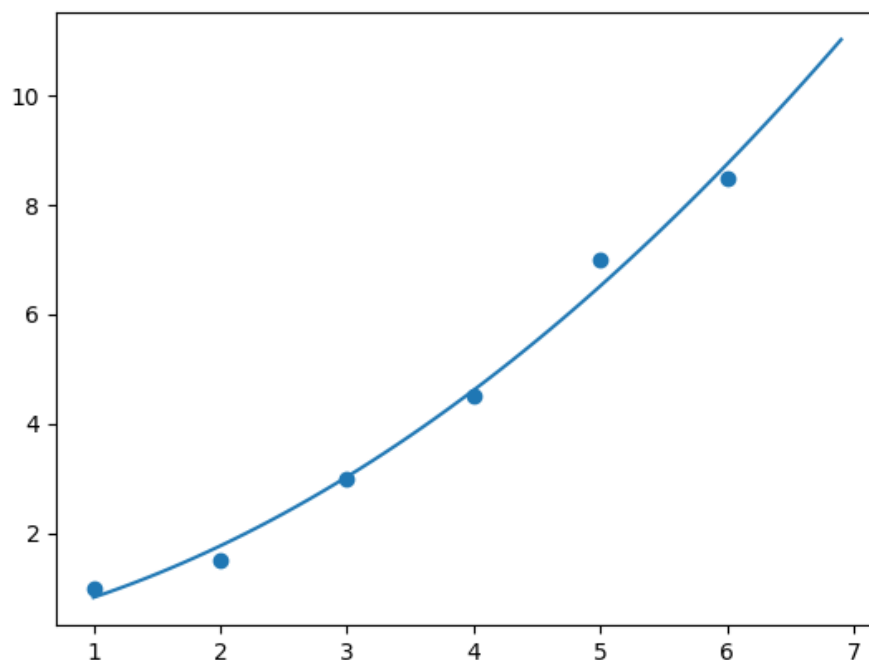
Это даст следующую СЛАУ:

$$A = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n x_i^{2m} & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^m \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=0}^n x_i^m & \dots & m \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n (x_i^m * y_i) \\ \dots \\ \sum_{i=0}^n y_i \end{pmatrix}$$

Примеры полиномов разных степеней и их суммы квадратов отклонений:

- Вторая степень.



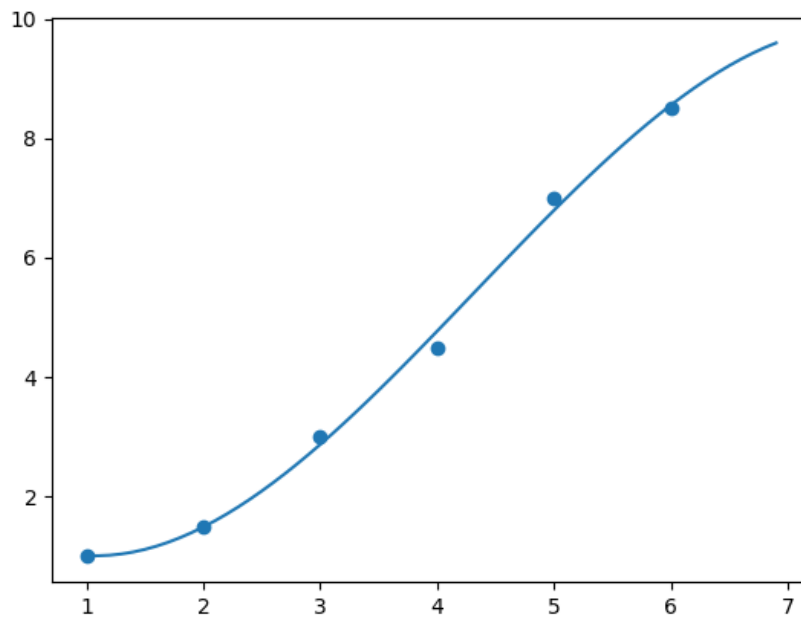
Столбец значений:

1.0
1.5
3.0
4.5
7.0
8.5

Вектор квадратов разности : [0.03188776 0.06984694 0.00081633 0.01306122 0.22903061 0.0625]

Сумма квадратов разности : 0.40714285714285775

- Третья степень.



```

Столбец значений:
1.0
1.5
3.0
4.5
7.0
8.5
Вектор квадратов разности : [2.51952633e-04 6.29881582e-05 1.61249685e-02 7.28143109e-02
4.25799950e-02 3.08641975e-03]
Сумма квадратов разности : 0.13492063492063422

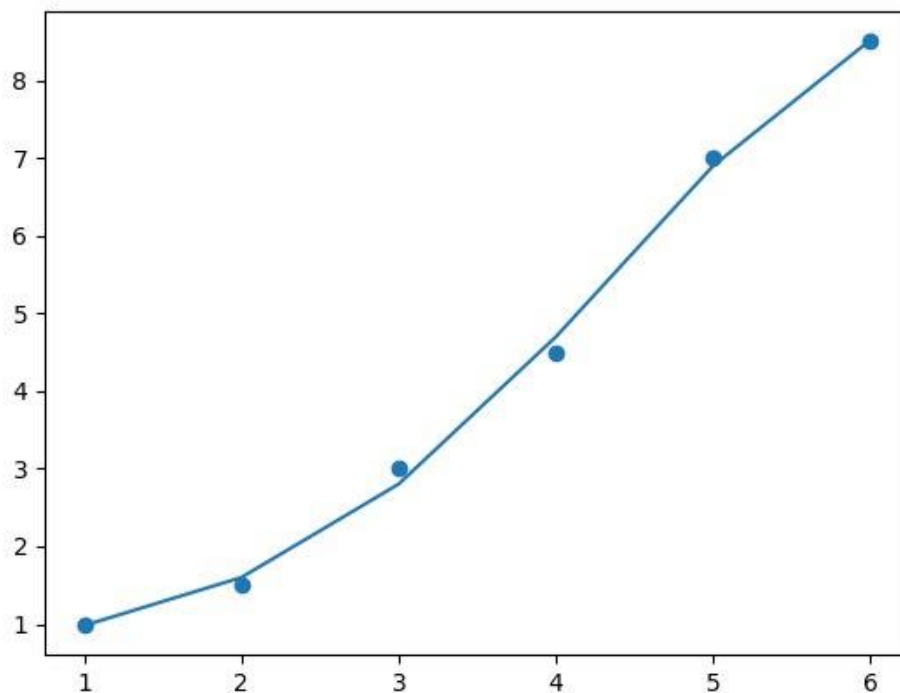
```

- Четвертая степень.

```

Столбец значений:
1.0
1.5
3.0
4.5
7.0
8.5
Вектор квадратов разности : [0.00039368 0.0098419 0.0393676 0.0393676 0.0098419 0.00039368]
Сумма квадратов разности : 0.09920634920634999

```



Очевидно, что с повышением степени полинома повышается и точность. Вычисленные значения становятся ближе к экспериментальным.

Данный способ действителен для функции одной переменной, но для 2 и более он не подходит. Для количества влияющих переменных больше 1 используется регрессия.

3.3. LU - разложение.

Пусть имеется уравнение $Ax = b$. Суть метода заключается в разложении матрицы A на матрицу L (нижнетреугольную) и матрицу U (верхнетреугольную). Тогда начальное уравнение примет вид: $LUx = b$. Остается решить два уравнения: $Ly = b$ и $Ux = y$.

Алгоритм разложения матрицы A на L , U в одной матрице.

Имеем: LU – нуль - матрица размерности, как A .

$k = 0$

Первый шаг:

$$LU_{k,j} = A_{k,j} - \sum_{m=0}^k LU_{k,m} * LU_{m,k},$$

$$j = k, \dots, n$$

Второй шаг:

$$LU_{i,k} = ((A_{i,k} - \sum_{m=0}^k (LU_{k,m} * LU_{m,k})) / LU_{k,k})$$

$$i = k + 1, \dots, n$$

Увеличиваем k :

$$k = k + 1$$

Повторяем цикл.

$$k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Данный алгоритм – алгоритм Краута.

В полученной матрице значения выше главной диагонали включительно составляют матрицу U , ниже – матрицу L .

3.4. Регрессия.

3.4.1. Линейная регрессия.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_k x_{ik} \quad (8)$$

i – количество наблюдений.

k – количество влияющих переменных.

Введем матрицу наблюдений:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{i1} & \dots & x_{ik} \end{pmatrix}$$

Тогда формулу (8) можно записать в виде:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \beta_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} + \dots + \beta_k \begin{pmatrix} x_{1k} \\ \dots \\ x_{nk} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_n \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \dots \\ \beta_k \end{pmatrix}$$

$$Y = X * b + \bar{r} \quad (9)$$

Где \bar{r} – столбец отклонений, тогда:

$$\sum_{i=0}^n r_i^2 = (Y - X * b)^T (Y - X * b)$$

Находим минимум функции:

$$\frac{d}{db} \sum_{i=0}^n r_i^2 = -2X^T Y + 2X^T X b = 0$$

Откуда:

$$X^T X b = X^T Y$$

Данную СЛАУ решаем с помощью LU-разложения $Ab = a$, где $A = X^T X$, $a = X^T Y$.

Можно получить более приближенные результаты вычислений с помощью полиномиальной регрессии.

3.4.2. Полиномиальная регрессия.

Отличие полиномиальной регрессии от линейной в том, что аппроксимирующая функция полиномиальной представляется в виде полинома. Столбцы матрицы наблюдений дополняются соответствующими произведениями влияющих величин. В работе был рассмотрен полином

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_n x_{in} + \beta_{n+1} x_{i1} x_{i2} \quad (10)$$

Соответствующая матрица наблюдений:

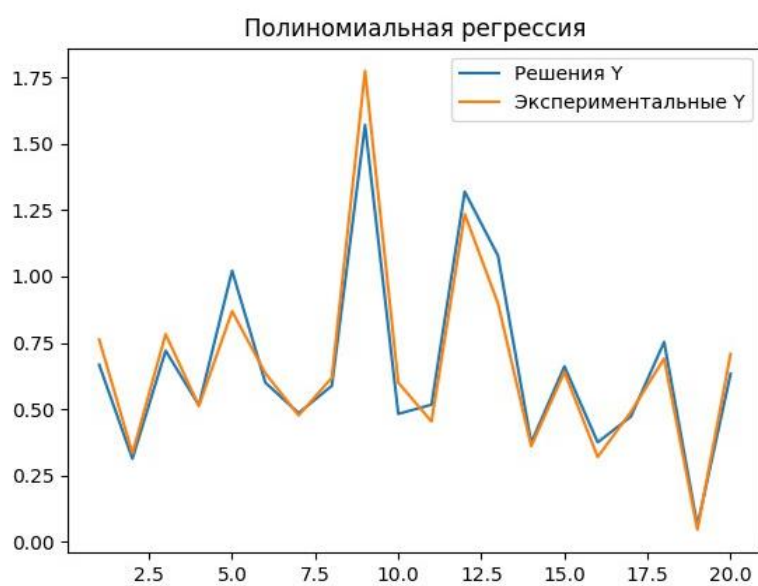
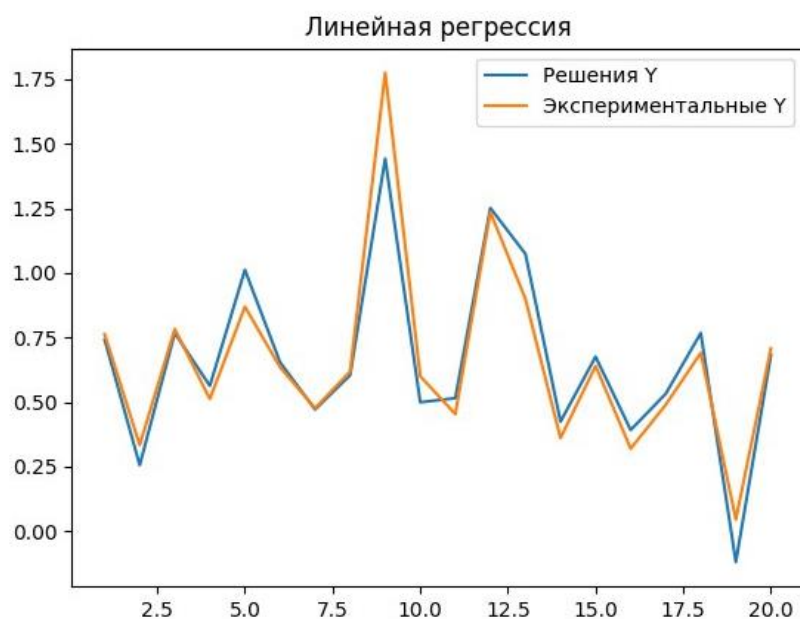
$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{11}x_{12} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{i1}x_{i2} \end{pmatrix}$$

3.4.3. Сравнение точности линейной и полиномиальной регрессии.

Рассмотрены примеры с количеством влияющих переменных: 2, 3, 4. Для каждого количества зависимая величина вычисляется по собственной формуле. Влияющие величины получены случайным образом. Результаты отражены на графике – по оси абсцисс – номер опыта, по оси ординат – экспериментальный и вычисленные результаты. Дополнительная численная информация предоставлена в файлах.

Тест 1. 2 влияющие величины. Формула вычисления зависимой величины:

$$y = x_1^3 + \sin x_2.$$



Линейная регрессия

Вектор квадратов разности :

[4.17959255e-04 6.01740784e-03 2.35165669e-04 2.59932822e-03
2.03734537e-02 3.71648600e-04 2.64633949e-05 1.91797991e-04
1.10665386e-01 1.01345829e-02 3.78151270e-03 2.47339660e-04
3.04500134e-02 4.05357113e-03 1.28448528e-03 5.22208885e-03
1.80445839e-03 5.89616869e-03 2.70902953e-02 6.49437861e-04]

Сумма квадратов разности : 0.23151256520386662

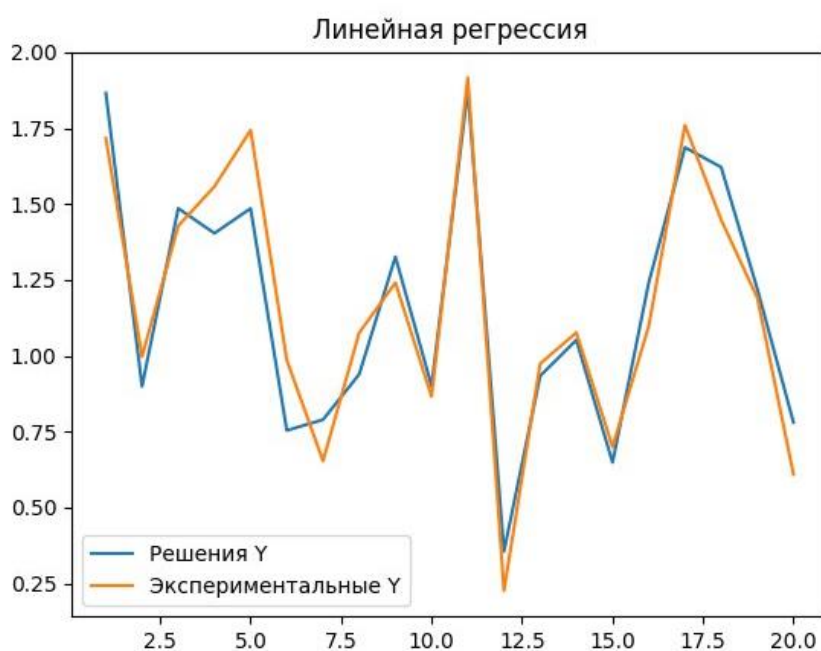
Полиномиальная регрессия

Вектор квадратов разности :

[9.03990089e-03 4.15585808e-04 3.91181760e-03 8.73980075e-06
2.33485387e-02 1.24750923e-03 7.57882171e-05 9.07141349e-04
4.15675804e-02 1.39101442e-02 4.00047061e-03 7.13386051e-03
3.21338731e-02 1.53686417e-04 4.58585223e-04 3.04791668e-03
3.04379370e-04 3.88924297e-03 2.20445681e-04 5.61734670e-03]

Сумма квадратов разности : 0.15139255351510986

Тест 2. 3 влияющие величины. Формула вычисления зависимой величины: $y = x_1 + x_2^2 + x_3^3$.





Линейная регрессия

Вектор квадратов разности :

[0.02204359 0.00955325 0.0033304 0.02366636 0.06651224 0.05378469
0.01860503 0.01873641 0.007254 0.00121377 0.0017388 0.01678511
0.0016234 0.0006052 0.00257051 0.0205489 0.00537576 0.03001494
0.00083996 0.02929547]

Сумма квадратов разности : 0.3340977826237564

Полиномиальная регрессия

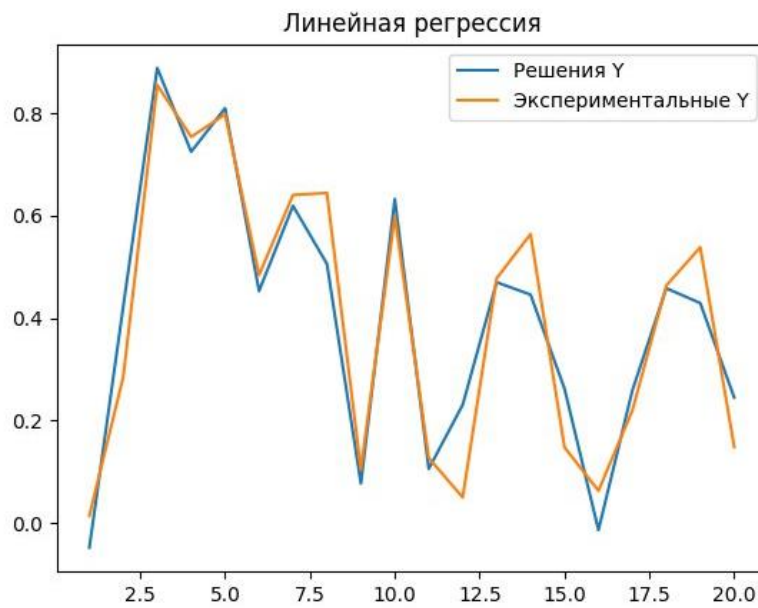
Вектор квадратов разности :

[1.28067381e-02 3.46457155e-02 4.67784473e-03 2.30756194e-02
2.23183738e-02 1.64131036e-02 1.10110636e-02 2.54386302e-02
1.65014516e-02 4.49083758e-03 5.65098104e-03 3.54900031e-04
1.57423699e-04 1.54854558e-05 4.10767880e-04 1.86762365e-02
2.44943446e-02 2.49035461e-02 5.34523651e-03 1.19806720e-02]

Сумма квадратов разности : 0.26336897203283205

Тест 3. 4 влияющие величины. Формула вычисления зависимой вели-

чины: $y = (\sin x_1 * x_2)^{x_3} * x_4$.



Линейная регрессия

Вектор квадратов разности :

[3.84073042e-03 1.88801390e-02 1.11050285e-03 8.40225426e-04
 1.41572726e-04 9.69854347e-04 4.43901750e-04 1.91195089e-02
 7.54680929e-04 1.09339361e-03 4.52920572e-04 3.26736687e-02
 5.72092415e-05 1.39647321e-02 1.30902360e-02 5.84937960e-03
 1.53637932e-03 2.77827874e-05 1.18588926e-02 9.31674634e-03]

Сумма квадратов разности : 0.13602245717664674

Полиномиальная регрессия

Вектор квадратов разности :

```
[4.09521438e-03 1.66071208e-02 3.96103173e-03 9.89625405e-05  
6.82064187e-05 3.63099112e-03 1.58309957e-03 5.09528820e-03  
6.52947830e-03 2.60732143e-03 6.48382656e-04 9.48090277e-03  
1.87194404e-05 7.83386375e-03 5.59595070e-03 2.31583182e-03  
3.00320610e-03 3.02303197e-04 2.01292012e-02 2.09483895e-03]
```

Сумма квадратов разности : 0.09569991504128036

Во всех тестах теория подтверждается на практике, полином имеет большее приближение, чем линейная функция.

4. Решение обратной задачи.

1) Выбор полинома.

Чтобы подогнать под точки полином, был выбран полином 4 степени из следующих соображений.

Точность модели можно рассчитать с помощью R-квадрата (R^2). Значение R-квадрата (R^2) находится между 0 и 1. Результат, близкий к 1, показывает, что точность модели высока.

Коэффициент детерминации (R-квадрат) — это доля дисперсии зависимой переменной, объясняемая рассматриваемой моделью зависимости, то есть объясняющими переменными. Более точно — это единица минус доля необъяснённой дисперсии (дисперсии случайной ошибки модели, или условной по факторам дисперсии зависимой переменной) в дисперсии зависимой переменной. Его рассматривают как универсальную меру зависимости одной случайной величины от множества других.

Так как программа (реализация полиномиальной регрессии) написана на языке программирования Python3, то для оценки модели была использована библиотека `sklearn.metrics`.

Для решения подобных задач на практике хватает 3 степени. Таким образом, значение коэффициента детерминации при выборе 3-ей степени полинома

равняется 0.28892971516979327. При выборе 4-й степени коэффициент принимает значение 0.9651424781687735, что в данном случае означает резкий рост точности в моделях, различающихся лишь на одну степень.

Кроме того, при выборе 3-ей степени разница между значением функции (разность в сантиметрах между наблюдаемой и модельной величинами времени хода оптического сигнала) и значением полинома так высока, что точек выбросов не будет обнаружено (т.к. значение rms будет достаточно велико, и все наблюдения по модулю не будут превышать $3 \cdot \text{rms}$).

2) Составление матрицы наблюдений.

Так как в данном эксперименте лишь одна влияющая переменная, и выбрана модель полинома 4-й степени, для полиномиальной регрессии была выбрана следующая матрица наблюдений:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_i & x_i^2 & x_i^3 & x_i^4 \end{pmatrix}$$

3) Для полиномиальной регрессии было реализовано решение СЛАУ методом LU – разложения (метод был описан выше).

4) Для фильтрации сырых наблюдений поочередно и циклично выполнялись следующие шаги:

- Подогнать полином 4-й степени под точки;
- Вычесть полином из точек;
- Посчитать rms точек;
- Откинуть точки-выбросы (т. е. те, значения которых по модулю больше $3 \cdot \text{rms}$).

Шаги выполнялись до тех пор, пока точек-выбросов не оставалось.

Rms вычислялось как среднеквадратичное отклонение точек от значения полинома по формуле:

$$\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Где x_i – значение точки, а $-x$ – значение полинома в этой точке.

5) Наблюдения были разделены на сеансы (участки времени, перерывы между которыми составили больше 5 минут):

Номер сеанса	1	2	3
Диапазон времени	20120628.203003- 20120809.012314	20120809.024105- 20120809.025246	20170914.033614- 20171013.035303

6) На каждом сеансе была сформирована нормальная точка:

На временном интервале был выбран момент, ближайший к середине (в данном эксперименте не оказалось ни одного наблюдения, время которого было бы кратно секунде). Сформированы данные о каждой нормальной точке (момент времени, значение полинома в нём и rms). Результат:

Нормальная точка 1 интервала:

Время: 20120728.192945 Значение полинома:-76.313232421875
Rms:4.247806328084554

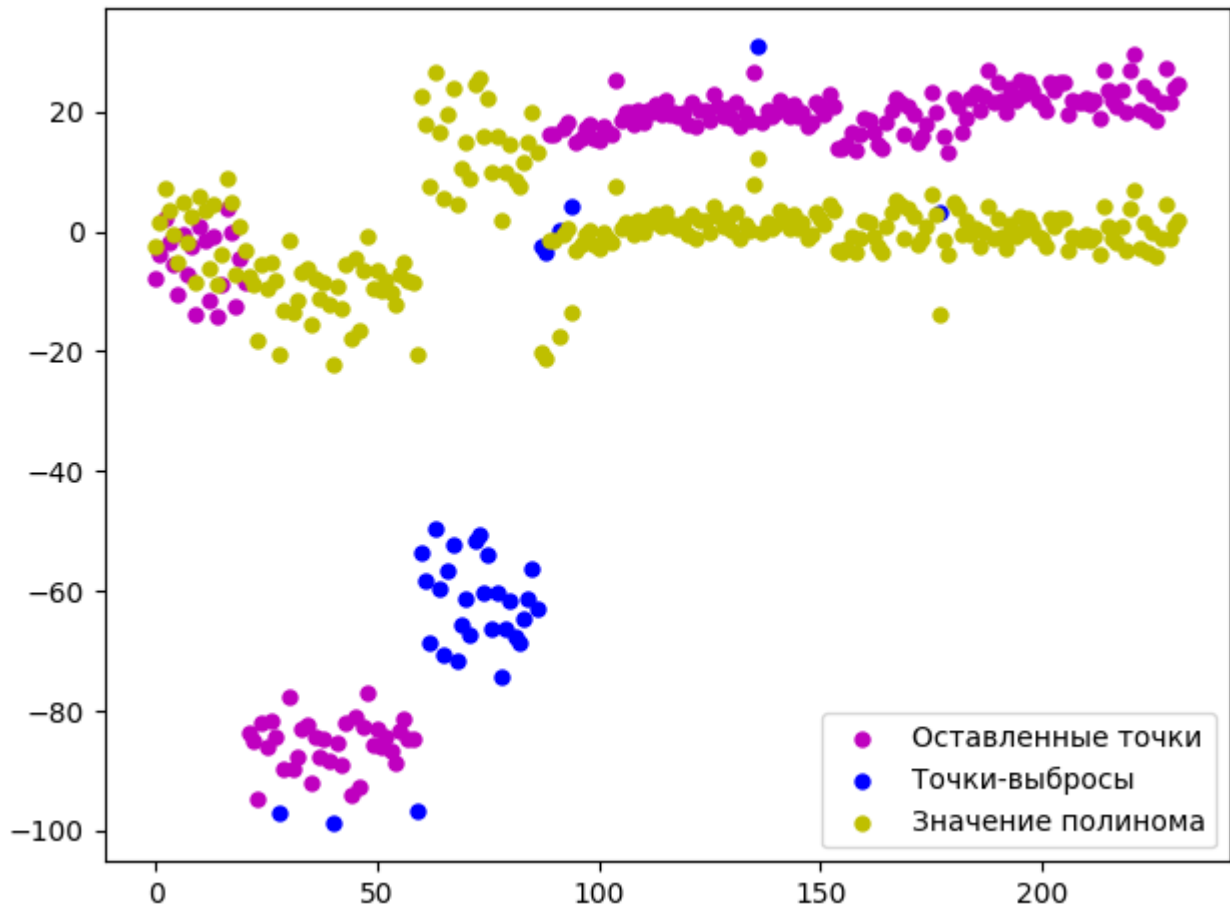
Нормальная точка 2 интервала:

Время: 20120809.024652 Значение полинома:18.5032958984375
Rms:1.7596716997792785

Нормальная точка 3 интервала:

Время: 20170914.035517 Значение полинома:17.1434326171875
Rms:2.6404784432223196

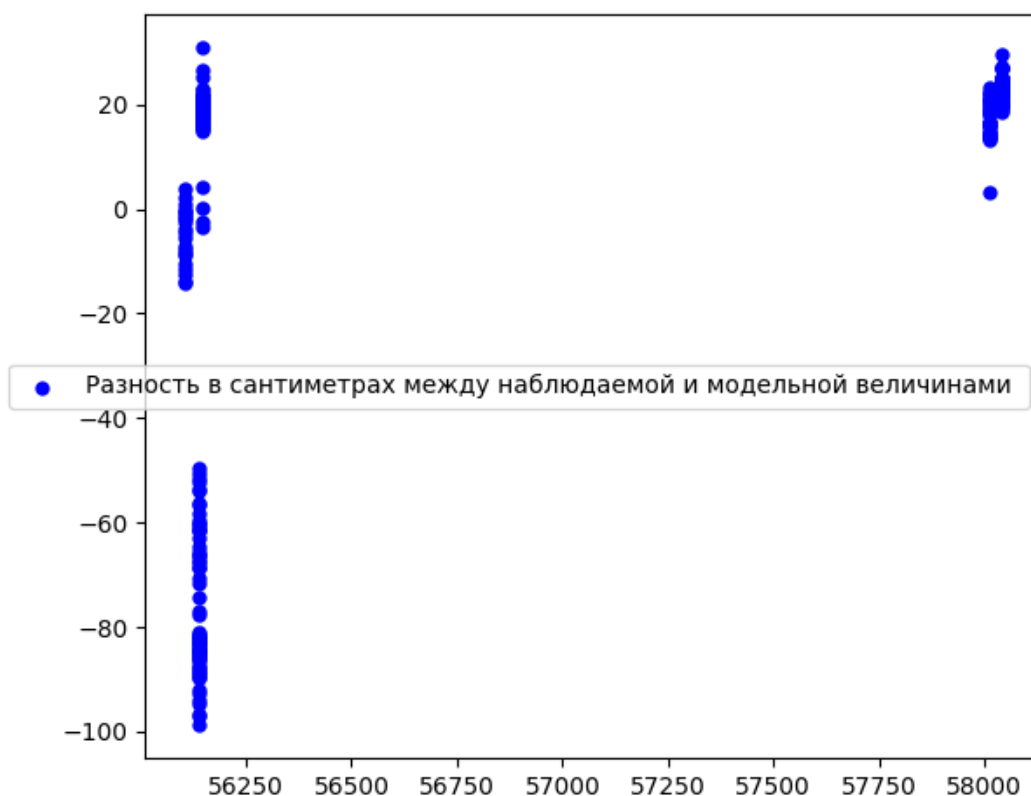
7) Построен график с полиномом, отброшенными точками и оставшимися точками.



Координате Y соответствует разности в сантиметрах между наблюдаемой и модельной величинами времени хода оптического сигнала, рассчитанной при немного сдвинутых положениях обсерватории и отражателя на Луне, а оси X соответствует номер наблюдения.

Для оси X не было выбрано время, так как в таком случае график не несёт смысловой нагрузки, даже при рассмотрении временных сессий по отдельности.

Пример:



8) Результат.

Выходной результат представляет собой файл, содержащий нормальные точки вместо сырых наблюдений:

Колонка 1 -- дата в календарном формате с точностью 1 с (для сведения)

Колонка 2 -- дата в формате MJD (для реального использования)

Колонка 3 -- разность в сантиметрах между наблюдаемой и модельной величинами времени хода оптического сигнала, рассчитанная при немного сдвинутых положениях обсерватории и отражателя на Луне.

Колонка 4 – rms нормальной точки сессии наблюдений.

В итоге выбросов, из 232 наблюдений осталось 196 точек.

См. Приложение Б.

Вывод.

В ходе практической работы была написана программа, выполняющая LU-разложение для полиномиальной регрессии, вычисляющая rms точек и формирующая текстовый файл с нормальными точками вместо сырых наблюдений.

ПРИЛОЖЕНИЕ А.
ИСХОДНЫЙ ФАЙЛ С ДАННЫМИ.

20120628.203003	56106.8542060648	-7.749
20120628.203037	56106.8545984259	-3.840
20120628.203111	56106.8549850000	2.102
20120628.203113	56106.8550104630	-1.680
20120628.203126	56106.8551562963	-5.665
20120628.203130	56106.8552025926	-10.494
20120628.203229	56106.8558877778	-0.341
20120628.203301	56106.8562569907	-7.171
20120628.203337	56106.8566759722	-2.659
20120628.203340	56106.8567095370	-13.734
20120628.203415	56106.8571134722	0.675
20120628.203436	56106.8573646296	-1.658
20120628.203443	56106.8574398611	-11.435
20120628.203444	56106.8574514352	-0.687
20120628.203548	56106.8581956482	-14.228
20120628.203550	56106.8582211111	-8.995
20120628.203610	56106.8584491204	3.770
20120628.203640	56106.8588009722	-0.313
20120628.203653	56106.8589514352	-12.462
20120628.203819	56106.8599444907	-4.414
20120628.203846	56106.8602500463	-8.391
20120728.192945	56136.8123310648	-83.774
20120728.193021	56136.8127384722	-85.036
20120728.193025	56136.8127928704	-94.577
20120728.193028	56136.8128194907	-81.846
20120728.193109	56136.8132975000	-85.848
20120728.193125	56136.8134826852	-81.618
20120728.193133	56136.8135729630	-84.452

20120728.193159 56136.8138715741 -96.994
20120728.193204 56136.8139340741 -89.589
20120728.193259 56136.8145718056 -77.809
20120728.193306 56136.8146516667 -89.834
20120728.193307 56136.8146620833 -87.697
20120728.193408 56136.8153681019 -82.974
20120728.193419 56136.8154977315 -82.335
20120728.193452 56136.8158773611 -91.900
20120728.193510 56136.8160926389 -84.215
20120728.193515 56136.8161447222 -87.510
20120728.193523 56136.8162338426 -84.663
20120728.193523 56136.8162407870 -88.352
20120728.193527 56136.8162893981 -98.657
20120728.193549 56136.8165428704 -85.368
20120728.193608 56136.8167569907 -89.152
20120728.193620 56136.8168993518 -81.865
20120728.193636 56136.8170799074 -94.046
20120728.193653 56136.8172801389 -80.958
20120728.193707 56136.8174375463 -92.771
20120728.193744 56136.8178646296 -82.668
20120728.193802 56136.8180741204 -77.140
20120728.193808 56136.8181424074 -85.773
20120728.193812 56136.8181921759 -82.834
20120728.193846 56136.8185845370 -86.161
20120728.193900 56136.8187465741 -84.460
20120728.193919 56136.8189745833 -86.545
20120728.193921 56136.8189942593 -88.552
20120728.194033 56136.8198252778 -83.427
20120728.194041 56136.8199236574 -81.428
20120728.194044 56136.8199537500 -84.514

20120728.194051 56136.8200347685 -84.684
20120728.194051 56136.8200393981 -96.808
20120728.200351 56136.8360058333 -53.550
20120728.200408 56136.8362072222 -58.253
20120728.200429 56136.8364514352 -68.496
20120728.200453 56136.8367199537 -49.605
20120728.200512 56136.8369468056 -59.501
20120728.200647 56136.8380486574 -70.662
20120728.200732 56136.8385625463 -56.697
20120728.200805 56136.8389421759 -52.400
20120728.200828 56136.8392176389 -71.504
20120728.200909 56136.8396910185 -65.480
20120728.201109 56136.8410706481 -61.259
20120728.201116 56136.8411620833 -67.236
20120728.201130 56136.8413148611 -51.694
20120728.201144 56136.8414768981 -50.552
20120728.201212 56136.8418056018 -60.123
20120728.201230 56136.8420093056 -54.080
20120728.201357 56136.8430220370 -66.384
20120728.201358 56136.8430370833 -60.441
20120728.201538 56136.8441910185 -74.180
20120728.201630 56136.8447870833 -66.280
20120728.201825 56136.8461215741 -61.723
20120728.201842 56136.8463194907 -67.505
20120728.201843 56136.8463252778 -68.665
20120728.201907 56136.8466111574 -64.662
20120728.201912 56136.8466690278 -61.238
20120728.201917 56136.8467234259 -56.387
20120728.201939 56136.8469780556 -62.800
20120809.011349 56148.0512581481 -2.379

20120809.011638	56148.0532153241	-3.531
20120809.011733	56148.0538588426	16.203
20120809.011758	56148.0541481944	16.190
20120809.011759	56148.0541551389	0.225
20120809.011816	56148.0543461111	17.237
20120809.011831	56148.0545255093	18.177
20120809.011854	56148.0547917130	4.288
20120809.011911	56148.0549907870	14.806
20120809.011938	56148.0552963426	15.596
20120809.011952	56148.0554583796	17.213
20120809.012020	56148.0557836111	17.932
20120809.012050	56148.0561285185	15.571
20120809.012109	56148.0563576852	15.133
20120809.012146	56148.0567778241	17.635
20120809.012152	56148.0568553704	16.577
20120809.012220	56148.0571782870	16.103
20120809.012237	56148.0573738889	25.370
20120809.012314	56148.0578044444	18.390
20120809.024105	56148.1118611574	19.910
20120809.024113	56148.1119560648	19.723
20120809.024129	56148.1121424074	17.979
20120809.024131	56148.1121690278	20.156
20120809.024153	56148.1124143982	18.165
20120809.024210	56148.1126111574	20.200
20120809.024247	56148.1130486574	19.965
20120809.024250	56148.1130752778	21.296
20120809.024250	56148.1130775926	19.377
20120809.024259	56148.1131829167	21.766
20120809.024330	56148.1135428704	19.562
20120809.024337	56148.1136181019	19.779

20120809.024341	56148.1136667130	19.096
20120809.024355	56148.1138287500	19.960
20120809.024436	56148.1143032870	18.002
20120809.024453	56148.1144988889	21.483
20120809.024505	56148.1146377778	17.399
20120809.024518	56148.1147928704	20.312
20120809.024649	56148.1158484259	20.374
20120809.024652	56148.1158785185	18.409
20120809.024720	56148.1162014352	22.743
20120809.024726	56148.1162685648	21.024
20120809.024741	56148.1164444907	19.263
20120809.024749	56148.1165428704	20.636
20120809.024752	56148.1165718056	18.838
20120809.024806	56148.1167326852	21.575
20120809.024807	56148.1167465741	17.440
20120809.024808	56148.1167581481	19.795
20120809.024820	56148.1168947222	18.549
20120809.024829	56148.1169988889	26.511
20120809.024843	56148.1171655556	30.771
20120809.024844	56148.1171748148	18.243
20120809.024858	56148.1173380093	20.145
20120809.024923	56148.1176308333	19.143
20120809.024940	56148.1178287500	19.808
20120809.024948	56148.1179190278	21.966
20120809.025027	56148.1183715741	21.035
20120809.025046	56148.1185891667	19.185
20120809.025059	56148.1187338426	21.292
20120809.025105	56148.1188125463	19.104
20120809.025122	56148.1190069907	20.038
20120809.025153	56148.1193681018	17.420

20120809.025218	56148.1196528241	18.085
20120809.025224	56148.1197176389	21.592
20120809.025242	56148.1199294444	20.720
20120809.025243	56148.1199398611	19.688
20120809.025246	56148.1199780556	22.999
20170914.033614	58010.1501586111	20.869
20170914.033620	58010.1502326852	14.010
20170914.033722	58010.1509537500	13.753
20170914.033954	58010.1527118518	14.513
20170914.034009	58010.1528808333	16.411
20170914.034217	58010.1543623148	13.589
20170914.034251	58010.1547523611	16.206
20170914.034441	58010.1560278241	18.899
20170914.034451	58010.1561424074	18.608
20170914.034456	58010.1562002778	16.446
20170914.034525	58010.1565417130	14.531
20170914.034538	58010.1566887037	13.700
20170914.034545	58010.1567743519	18.040
20170914.034608	58010.1570382407	20.232
20170914.034659	58010.1576319907	22.339
20170914.034733	58010.1580231944	21.611
20170914.034735	58010.1580463426	16.090
20170914.034742	58010.1581204167	20.871
20170914.034801	58010.1583461111	19.622
20170914.034813	58010.1584792130	14.969
20170914.034828	58010.1586539815	15.922
20170914.034839	58010.1587812963	17.928
20170914.034903	58010.1590648611	23.201
20170914.034920	58010.1592627778	19.995
20170914.034939	58010.1594734259	3.321

20170914.035000	58010.1597268981	15.743
20170914.035116	58010.1606065278	13.171
20170914.035133	58010.1607940278	22.058
20170914.035140	58010.1608773611	20.907
20170914.035152	58010.1610197222	16.515
20170914.035517	58010.1633935648	18.836
20171013.033940	58039.1525451852	22.159
20171013.033944	58039.1525891667	23.358
20171013.033947	58039.1526296759	20.117
20171013.033952	58039.1526794444	22.623
20171013.033957	58039.1527373148	26.855
20171013.034056	58039.1534225000	21.558
20171013.034111	58039.1536007407	24.927
20171013.034112	58039.1536134722	22.006
20171013.034113	58039.1536227315	19.930
20171013.034134	58039.1538657870	23.980
20171013.034146	58039.1540093056	21.766
20171013.034255	58039.1547975000	25.219
20171013.034259	58039.1548461111	22.838
20171013.034320	58039.1550891667	24.795
20171013.034320	58039.1550949537	23.573
20171013.034326	58039.1551643982	21.975
20171013.034331	58039.1552211111	21.576
20171013.034407	58039.1556377778	20.131
20171013.034436	58039.1559722685	24.928
20171013.034528	58039.1565694907	23.678
20171013.034537	58039.1566725000	24.946
20171013.034554	58039.1568796759	24.953
20171013.034603	58039.1569838426	19.592
20171013.034633	58039.1573310648	21.901

20171013.034635	58039.1573542130	21.481
20171013.034702	58039.1576609259	21.436
20171013.034714	58039.1578044444	22.169
20171013.034737	58039.1580706481	21.216
20171013.034742	58039.1581227315	21.965
20171013.034811	58039.1584606944	18.966
20171013.034906	58039.1590949537	26.971
20171013.034919	58039.1592431019	23.652
20171013.034928	58039.1593507407	21.763
20171013.034939	58039.1594792130	21.021
20171013.034947	58039.1595741204	23.494
20171013.035017	58039.1599132407	19.719
20171013.035030	58039.1600637037	26.748
20171013.035046	58039.1602546759	29.528
20171013.035101	58039.1604225000	20.083
20171013.035128	58039.1607396296	24.360
20171013.035219	58039.1613322222	19.413
20171013.035229	58039.1614410185	22.758
20171013.035231	58039.1614641667	18.587
20171013.035233	58039.1614896296	21.604
20171013.035254	58039.1617315278	27.373
20171013.035256	58039.1617593056	21.590
20171013.035303	58039.1618380093	23.798
20171013.035306	58039.1618692593	24.670

ПРИЛОЖЕНИЕ Б.

РЕЗУЛЬТИРУЮЩИЙ ФАЙЛ С ВЫХОДНЫМИ ДАННЫМИ.

20120628.203003	56106.8542060648	-7.749	4.247806328084554
20120628.203037	56106.8545984259	-3.84	4.247806328084554
20120628.203111	56106.854985	2.102	4.247806328084554
20120628.203113	56106.855010463	-1.68	4.247806328084554
20120628.203126	56106.8551562963	-5.665	4.247806328084554
20120628.20313	56106.8552025926	-10.494	4.247806328084554
20120628.203229	56106.8558877778	-0.341	4.247806328084554
20120628.203301	56106.8562569907	-7.171	4.247806328084554
20120628.203337	56106.8566759722	-2.659	4.247806328084554
20120628.20334	56106.856709537	-13.734	4.247806328084554
20120628.203415	56106.8571134722	0.675	4.247806328084554
20120628.203436	56106.8573646296	-1.658	4.247806328084554
20120628.203443	56106.8574398611	-11.435	4.247806328084554
20120628.203444	56106.8574514352	-0.687	4.247806328084554
20120628.203548	56106.8581956482	-14.228	4.247806328084554
20120628.20355	56106.8582211111	-8.995	4.247806328084554
20120628.20361	56106.8584491204	3.77	4.247806328084554
20120628.20364	56106.8588009722	-0.313	4.247806328084554
20120628.203653	56106.8589514352	-12.462	4.247806328084554
20120628.203819	56106.8599444907	-4.414	4.247806328084554
20120628.203846	56106.8602500463	-8.391	4.247806328084554
20120728.192945	56136.8123310648	-83.774	4.247806328084554
20120728.193021	56136.8127384722	-85.036	4.247806328084554
20120728.193025	56136.8127928704	-94.577	4.247806328084554
20120728.193028	56136.8128194907	-81.846	4.247806328084554
20120728.193109	56136.8132975	-85.848	4.247806328084554
20120728.193125	56136.8134826852	-81.618	4.247806328084554
20120728.193133	56136.813572963	-84.452	4.247806328084554

20120728.193204	56136.8139340741	-89.589	4.247806328084554
20120728.193259	56136.8145718056	-77.809	4.247806328084554
20120728.193306	56136.8146516667	-89.834	4.247806328084554
20120728.193307	56136.8146620833	-87.697	4.247806328084554
20120728.193408	56136.8153681019	-82.974	4.247806328084554
20120728.193419	56136.8154977315	-82.335	4.247806328084554
20120728.193452	56136.8158773611	-91.9	4.247806328084554
20120728.19351	56136.8160926389	-84.215	4.247806328084554
20120728.193515	56136.8161447222	-87.51	4.247806328084554
20120728.193523	56136.8162338426	-84.663	4.247806328084554
20120728.193523	56136.816240787	-88.352	4.247806328084554
20120728.193549	56136.8165428704	-85.368	4.247806328084554
20120728.193608	56136.8167569907	-89.152	4.247806328084554
20120728.19362	56136.8168993518	-81.865	4.247806328084554
20120728.193636	56136.8170799074	-94.046	4.247806328084554
20120728.193653	56136.8172801389	-80.958	4.247806328084554
20120728.193707	56136.8174375463	-92.771	4.247806328084554
20120728.193744	56136.8178646296	-82.668	4.247806328084554
20120728.193802	56136.8180741204	-77.14	4.247806328084554
20120728.193808	56136.8181424074	-85.773	4.247806328084554
20120728.193812	56136.8181921759	-82.834	4.247806328084554
20120728.193846	56136.818584537	-86.161	4.247806328084554
20120728.1939	56136.8187465741	-84.46	4.247806328084554
20120728.193919	56136.8189745833	-86.545	4.247806328084554
20120728.193921	56136.8189942593	-88.552	4.247806328084554
20120728.194033	56136.8198252778	-83.427	4.247806328084554
20120728.194041	56136.8199236574	-81.428	4.247806328084554
20120728.194044	56136.81995375	-84.514	4.247806328084554
20120728.194051	56136.8200347685	-84.684	4.247806328084554
20120809.011733	56148.0538588426	16.203	4.247806328084554

20120809.011758	56148.0541481944	16.19	4.247806328084554
20120809.011816	56148.0543461111	17.237	4.247806328084554
20120809.011831	56148.0545255093	18.177	4.247806328084554
20120809.011911	56148.054990787	14.806	4.247806328084554
20120809.011938	56148.0552963426	15.596	4.247806328084554
20120809.011952	56148.0554583796	17.213	4.247806328084554
20120809.01202	56148.0557836111	17.932	4.247806328084554
20120809.01205	56148.0561285185	15.571	4.247806328084554
20120809.012109	56148.0563576852	15.133	4.247806328084554
20120809.012146	56148.0567778241	17.635	4.247806328084554
20120809.012152	56148.0568553704	16.577	4.247806328084554
20120809.01222	56148.057178287	16.103	4.247806328084554
20120809.012237	56148.0573738889	25.37	4.247806328084554
20120809.012314	56148.0578044444	18.39	4.247806328084554
20120809.024105	56148.1118611574	19.91	1.7596716997792785
20120809.024113	56148.1119560648	19.723	1.7596716997792785
20120809.024129	56148.1121424074	17.979	1.7596716997792785
20120809.024131	56148.1121690278	20.156	1.7596716997792785
20120809.024153	56148.1124143982	18.165	1.7596716997792785
20120809.02421	56148.1126111574	20.2	1.7596716997792785
20120809.024247	56148.1130486574	19.965	1.7596716997792785
20120809.02425	56148.1130752778	21.296	1.7596716997792785
20120809.02425	56148.1130775926	19.377	1.7596716997792785
20120809.024259	56148.1131829167	21.766	1.7596716997792785
20120809.02433	56148.1135428704	19.562	1.7596716997792785
20120809.024337	56148.1136181019	19.779	1.7596716997792785
20120809.024341	56148.113666713	19.096	1.7596716997792785
20120809.024355	56148.11382875	19.96	1.7596716997792785
20120809.024436	56148.114303287	18.002	1.7596716997792785
20120809.024453	56148.1144988889	21.483	1.7596716997792785

20120809.024505	56148.1146377778	17.399	1.7596716997792785
20120809.024518	56148.1147928704	20.312	1.7596716997792785
20120809.024649	56148.1158484259	20.374	1.7596716997792785
20120809.024652	56148.1158785185	18.409	1.7596716997792785
20120809.02472	56148.1162014352	22.743	1.7596716997792785
20120809.024726	56148.1162685648	21.024	1.7596716997792785
20120809.024741	56148.1164444907	19.263	1.7596716997792785
20120809.024749	56148.1165428704	20.636	1.7596716997792785
20120809.024752	56148.1165718056	18.838	1.7596716997792785
20120809.024806	56148.1167326852	21.575	1.7596716997792785
20120809.024807	56148.1167465741	17.44	1.7596716997792785
20120809.024808	56148.1167581481	19.795	1.7596716997792785
20120809.02482	56148.1168947222	18.549	1.7596716997792785
20120809.024829	56148.1169988889	26.511	1.7596716997792785
20120809.024844	56148.1171748148	18.243	1.7596716997792785
20120809.024858	56148.1173380093	20.145	1.7596716997792785
20120809.024923	56148.1176308333	19.143	1.7596716997792785
20120809.02494	56148.11782875	19.808	1.7596716997792785
20120809.024948	56148.1179190278	21.966	1.7596716997792785
20120809.025027	56148.1183715741	21.035	1.7596716997792785
20120809.025046	56148.1185891667	19.185	1.7596716997792785
20120809.025059	56148.1187338426	21.292	1.7596716997792785
20120809.025105	56148.1188125463	19.104	1.7596716997792785
20120809.025122	56148.1190069907	20.038	1.7596716997792785
20120809.025153	56148.1193681018	17.42	1.7596716997792785
20120809.025218	56148.1196528241	18.085	1.7596716997792785
20120809.025224	56148.1197176389	21.592	1.7596716997792785
20120809.025242	56148.1199294444	20.72	1.7596716997792785
20120809.025243	56148.1199398611	19.688	1.7596716997792785
20120809.025246	56148.1199780556	22.999	1.7596716997792785

20170914.033614	58010.1501586111	20.869	2.6404784432223196
20170914.03362	58010.1502326852	14.01	2.6404784432223196
20170914.033722	58010.15095375	13.753	2.6404784432223196
20170914.033954	58010.1527118518	14.513	2.6404784432223196
20170914.034009	58010.1528808333	16.411	2.6404784432223196
20170914.034217	58010.1543623148	13.589	2.6404784432223196
20170914.034251	58010.1547523611	16.206	2.6404784432223196
20170914.034441	58010.1560278241	18.899	2.6404784432223196
20170914.034451	58010.1561424074	18.608	2.6404784432223196
20170914.034456	58010.1562002778	16.446	2.6404784432223196
20170914.034525	58010.156541713	14.531	2.6404784432223196
20170914.034538	58010.1566887037	13.7	2.6404784432223196
20170914.034545	58010.1567743519	18.04	2.6404784432223196
20170914.034608	58010.1570382407	20.232	2.6404784432223196
20170914.034659	58010.1576319907	22.339	2.6404784432223196
20170914.034733	58010.1580231944	21.611	2.6404784432223196
20170914.034735	58010.1580463426	16.09	2.6404784432223196
20170914.034742	58010.1581204167	20.871	2.6404784432223196
20170914.034801	58010.1583461111	19.622	2.6404784432223196
20170914.034813	58010.158479213	14.969	2.6404784432223196
20170914.034828	58010.1586539815	15.922	2.6404784432223196
20170914.034839	58010.1587812963	17.928	2.6404784432223196
20170914.034903	58010.1590648611	23.201	2.6404784432223196
20170914.03492	58010.1592627778	19.995	2.6404784432223196
20170914.035	58010.1597268981	15.743	2.6404784432223196
20170914.035116	58010.1606065278	13.171	2.6404784432223196
20170914.035133	58010.1607940278	22.058	2.6404784432223196
20170914.03514	58010.1608773611	20.907	2.6404784432223196
20170914.035152	58010.1610197222	16.515	2.6404784432223196
20170914.035517	58010.1633935648	18.836	2.6404784432223196

20171013.03394	58039.1525451852	22.159	2.6404784432223196
20171013.033944	58039.1525891667	23.358	2.6404784432223196
20171013.033947	58039.1526296759	20.117	2.6404784432223196
20171013.033952	58039.1526794444	22.623	2.6404784432223196
20171013.033957	58039.1527373148	26.855	2.6404784432223196
20171013.034056	58039.1534225	21.558	2.6404784432223196
20171013.034111	58039.1536007407	24.927	2.6404784432223196
20171013.034112	58039.1536134722	22.006	2.6404784432223196
20171013.034113	58039.1536227315	19.93	2.6404784432223196
20171013.034134	58039.153865787	23.98	2.6404784432223196
20171013.034146	58039.1540093056	21.766	2.6404784432223196
20171013.034255	58039.1547975	25.219	2.6404784432223196
20171013.034259	58039.1548461111	22.838	2.6404784432223196
20171013.03432	58039.1550891667	24.795	2.6404784432223196
20171013.03432	58039.1550949537	23.573	2.6404784432223196
20171013.034326	58039.1551643982	21.975	2.6404784432223196
20171013.034331	58039.1552211111	21.576	2.6404784432223196
20171013.034407	58039.1556377778	20.131	2.6404784432223196
20171013.034436	58039.1559722685	24.928	2.6404784432223196
20171013.034528	58039.1565694907	23.678	2.6404784432223196
20171013.034537	58039.1566725	24.946	2.6404784432223196
20171013.034554	58039.1568796759	24.953	2.6404784432223196
20171013.034603	58039.1569838426	19.592	2.6404784432223196
20171013.034633	58039.1573310648	21.901	2.6404784432223196
20171013.034635	58039.157354213	21.481	2.6404784432223196
20171013.034702	58039.1576609259	21.436	2.6404784432223196
20171013.034714	58039.1578044444	22.169	2.6404784432223196
20171013.034737	58039.1580706481	21.216	2.6404784432223196
20171013.034742	58039.1581227315	21.965	2.6404784432223196
20171013.034811	58039.1584606944	18.966	2.6404784432223196

20171013.034906	58039.1590949537	26.971	2.6404784432223196
20171013.034919	58039.1592431019	23.652	2.6404784432223196
20171013.034928	58039.1593507407	21.763	2.6404784432223196
20171013.034939	58039.159479213	21.021	2.6404784432223196
20171013.034947	58039.1595741204	23.494	2.6404784432223196
20171013.035017	58039.1599132407	19.719	2.6404784432223196
20171013.03503	58039.1600637037	26.748	2.6404784432223196
20171013.035046	58039.1602546759	29.528	2.6404784432223196
20171013.035101	58039.1604225	20.083	2.6404784432223196
20171013.035128	58039.1607396296	24.36	2.6404784432223196
20171013.035219	58039.1613322222	19.413	2.6404784432223196
20171013.035229	58039.1614410185	22.758	2.6404784432223196
20171013.035231	58039.1614641667	18.587	2.6404784432223196
20171013.035233	58039.1614896296	21.604	2.6404784432223196
20171013.035254	58039.1617315278	27.373	2.6404784432223196
20171013.035256	58039.1617593056	21.59	2.6404784432223196
20171013.035303	58039.1618380093	23.798	2.6404784432223196