МИНОБРНАУКИ РОССИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)

Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе

по дисциплине «Вычислительная математика»

Тема: Уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле.

Студенты гр. 0382	____________________	Диденко Д.В.
		Кривенцова Л.С.
	____________________	
Преподаватель		Павлов Д.А.

Санкт-Петербург

2021

Цель работы.

Исследовать дифференциальное уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле с помощью программы на языке программирования.

Задание.

Решить систему дифференциальных уравнений аналитическим методом. Написать программу, которая применяет различные методы вычислений и реализовать вывод значений в файл, а также в виде графиков. Сравнить результаты, полученные с помощью вычислений различными способами.

Основные теоретические положения.

Система дифференциальный уравнений.

Системой дифференциальных уравнений называется совокупность уравнений, в каждое из которых входят независимая переменная, искомые функции и их производные. Всегда предполагается, что число уравнений равно числу неизвестных функций.

Движение заряженных частиц в электромагнитных полях.

Движение заряженной частицы в магнитном поле описывается вторым законом Ньютона:

ma = F, (1)

где m - масса частицы, F = e[vB] - сила Лоренца (B - вектор магнитной индукции, e - заряд частицы). Наиболее простой вид имеет движение заряженной частицы в однородном магнитном поле, т. е. в поле, направление и величина которого одинаковы во всех точках пространства. Заряженная частица движется по поверхности воображаемого цилиндра с радиусом, равным ларморовскому радиусу $r_0 = \frac{mv_0}{eB}$. Ось цилиндра направлена вдоль вектора индукции магнитного поля. Частица вращается вокруг оси цилиндра с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = \frac{eB}{m}$, которая называется циклотронной частотой.

Зависимость напряженности магнитного поля от пространственных координат резко усложняет решение уравнений движения.

Движение заряженной частицы в поле прямолинейного тока.

Пусть в магнитном поле бесконечного прямолинейного проводника, по которому течет ток I, движется частица с положительным зарядом e и массой m. Начальная скорость частицы v_o направлена вдоль тока в проводнике. В начальный момент времени частица расположена относительно проводника на расстоянии, равном локальному значению ларморовского радиуса, рассчитанного по величине магнитного поля в точке расположения частицы:

$$r_0 = \frac{mv_0}{eB(r_0)}. \qquad (2)$$

Рассмотрим плоскость, проходящую через проводник и частицу, и

введем декартовы координаты с осью X, проходящей через частицу перпендикулярно проводнику, осью Y с положительным направлением вдоль тока и осью Z, перпендикулярной плоскости. В каждой точке плоскости магнитное поле линейного проводника перпендикулярно этой плоскости и равно $B = B_z = \frac{\mu I}{2\pi x}$, и сила Лоренца не имеет составляющей вдоль оси Z. Поэтому если частица имела в начальный момент времени равную нулю z компоненту скорости, то ее траектория во все последующие моменты времени будет лежать и рассматриваемой плоскости. Уравнения движения в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = v_x, \quad m\frac{dv_x}{dt} = ev_y B_z(x), \\ &\frac{dy}{dt} = v_y, \quad m\frac{dv_y}{dt} = -ev_x B_z(x). \end{aligned} \qquad (3)$$

Начальные условия, определяющие траекторию, имеют вид

$$x(0) = r_0,\ y(0) = 0,\ v_x(0) = 0,\ v_y(0) = v_0. \qquad (4)$$

Математически уравнения движения (3) являются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для четырех функций: x(t), y(t), $v_x(t)$ и $v_y(t)$. Начальные условия (4) определяют задачу Коши для этой системы уравнений.

При выполнении расчетов часто неудобно использовать размерные значения величин. В рассматриваемой задаче характерным временем, за которое происходят типичные изменения траектории, является величина τ_0, обратная циклотронной частоте ω, рассчитанной по величине индукции магнитного поля в какой-либо точке траектории (например, в начальной). Характерным размером траектории частицы является значение ларморовского радиуса r_0, рассчитанного по магнитной индукции и скорости в этой же точке. Характерные размерные величины связаны соотношением $r_0 = v_0 \cdot \tau_0$. Для решения задачи целесообразно ввести следующие безразмерные переменные:

$$t' = \frac{t}{\tau_0}, \quad x' = \frac{x}{r_0}, \quad y' = \frac{y}{r_0}, \quad v'_x = \frac{v_x}{v_0}, \quad v'_y = \frac{v_y}{v_0}. \qquad (5)$$

В новых переменных уравнения движения и начальные значения принимают вид:

$$\frac{dx'}{dt'} = v'_x, \quad \frac{dy'}{dt'} = v'_y, \quad \frac{dv'_x}{dt'} = \frac{v'_y}{x'}, \quad \frac{dv'_y}{dt'} = \frac{v'_x}{x'},$$
$$x'(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad v'_x(0) = 0, \quad v'_y(0) = 1. \qquad (6)$$

Выполнение работы.

Ход решения:

Краткое описание методов, которые мы применяем

Для численного решения имеющийся системы дифференциальных уравнений были реализованы следующие методы:

- Метод Эйлера-Коши(Метод Хьюна).
- Метод Эйлера.
- Аналитический метод.

1. Метод Эйлера-Коши(Метод Хьюна).

Принцип: (формулы, шаги)

Пояснения с кодом: (реализация)

2. Метод Эйлера.

Принцип: (формулы, шаги)

Пояснения с кодом: (реализация)

3. Аналитический метод.

Принцип: (формулы, шаги)

Пояснения с кодом: (реализация)

4. Сравнить показатели.

(Ну что они примерно равны, вычисления верные и блаблабла)

5. Графический интерфейс.

Для графического представления полученных с помощью вышеуказанных методов результатов используется мультимедийная библиотека SFML, а точнее её графический модуль (*SFML/Graphics.hpp*). Вся работа с применением данной библиотеки выделена в отдельный класс *DrawLines*. Этот класс не умеет полей, в нём реализован лишь метод отрисовки графиков - *void prin*t с модификатором доступа *public*.

Этот метод принимает на вход аргументы:

int N; - количество вычисленных точек.

*float **array_x, float **array_y, float **array_z* – двумерные массивы, содержащие координаты заряженной частицы, по которым и будут строиться графики.

В методе мы сначала задаём размер окна. После этого создаём три объекта окна (*windowX*, *windowY*, *windowZ*) как экземпляры класса *RenderWindow*. С помощью класса классом *VertexArray* создаём две линии – они будут служить координатными осями. Эти линии в конце метода будут отрисованы в каждом окне. Пользуясь полями *position* и *color* задаём положение и цвет точек.

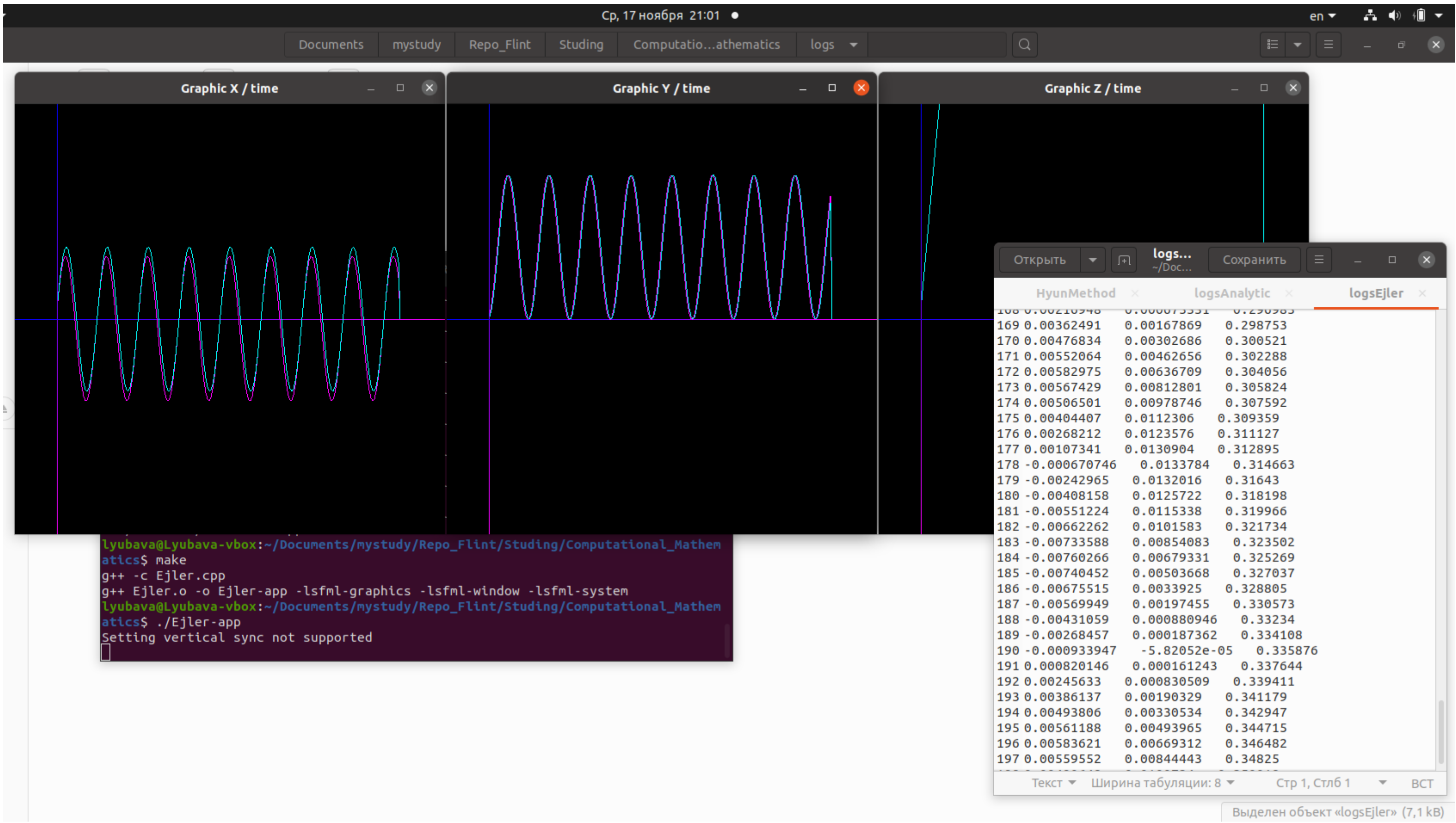
Используя тот же класс, создаём ещё несколько линий: соединённые точки, координаты которых представляют из себя время движения частицы и её нахождение по оси X (полученные тремя разными методами) – сохраняются в три массива (три линии), аналогично для нахождения частицы по оси Y и Z.

Все точки сохраняются в массиве с учётом их печати на экран: значение координаты инвертируется (т.к. начало отсчёта находится вверху графического окна), также к положению точки прибавляются координаты центра системы координат.

Далее создаётся конструктор обработчика событий, в котором отслеживается закрытие окон (*event.type == Event::Closed*) и производятся вызовы метода *draw*, которое рисует в окнах созданные ранее массивы соединённых между собой точек – траектории движения заряженной частицы по осям пространства. Таким образом на экране мы видим три окна, в каждом из которых нарисованы оси координат и графики вычисленных значений.

Результат работы программы:

Рис 1. – демонстрация работы программы в терминале Ubuntu.



Программа открывает три окна с графическим интерфейсом: каждое из них печатает траектории заряженной частицы по определенной координате (значения X, Y или Z, зависимых от времени), полученные в результате реализации методов численного интегрирования. Все эти значения, помимо графиков, программа записывает в текстовые файлы (отдельный файл для каждого метода).

Обозначения графиков:

Горизонтальная ось – прошедшее время с начала движения;

Вертикальная ось – значения координаты заряженной частицы по оси (X, Y или Z).

График первого метода рисуется белым цветом.

График второго метода рисуется фиолетовым цветом.

График третьего метода рисуется голубым цветом.

Нумерация метода – порядок его вызова в программе.

Выводы.

Были изучены и реализованы некоторые методы численного интегрирования, с помощью которых было реализовано вычисление системы дифференциальных уравнений движения заряженной частицы в электромагнитном поле. Для наглядности результатов вычислений был подключен графический интерфейс (рисование графиков).

Кроме того, был проведен сравнительный анализ, который подтвердил результаты, полученные в ходе работы программы.