Домашна работа № 2

по „Диференциални уравнения и приложения“

Специалност „Софтуерно инженерство“, летен семестър на 2019/2020 уч. година

Име: Любка Ангелинина

Факултетен номер: 62342 Група:5 Дата: 03.05.2020

Условие :

Задача СИ20-ДР2-223.

а) Намерете фундаментална система от решения (ФСР) на уравнението

$$y'' + 3y' + 4y = 0.$$

б) Пресметнете детерминантата на Вронски за функциите от ФСР и напишете общото решение на уравнението.

в) Напишете Matlab код, който решава символно задачата на Коши за това уравнение с начални условия $y(-1) = 4$, $y'(-1) = 2$ и начертайте графика та на полученото решение в подходящ интервал.

Разработка :

а) Аналитично решение:

223

а) Намерете ФСР на ур-нието:

$$y'' + 3y' + 4y = 0$$

Реш: търсим реш. във вида $y = e^{kx}$, тогава:

$$k^2 \cdot e^{kx} + 3k e^{kx} + 4 e^{kx} = 0 \ \Big| : e^{kx} (\neq 0)$$

$k^2 + 3k + 4 = 0 \rightarrow$ (характеристично ур-ние)

$$D = 9 - 16 = -7 = 7i^2 \quad (i^2 = -1)$$

$$k_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{7} i}{2} \quad (\Rightarrow k \in \mathbb{C}, \ k = \alpha \pm i\beta)$$

$$ФСР: \{e^{\alpha x} \cos(\beta x), e^{\alpha x} \sin(\beta x)\} =$$

$$= \left\{e^{-\frac{3}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right), e^{-\frac{3}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right\}$$

$$\Rightarrow y = c_1 \cdot e^{-\frac{3}{2}x} \cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + c_2 \cdot e^{-\frac{3}{2}x} \cdot \sin\frac{\sqrt{7}}{2}x$$

б) Пресметнете детерминантата на Вронски за ф-ите от ФСР и напишете общото решение на уравнението

общо решение на ур-нието е: $y = c_1 \cdot e^{-\frac{3}{2}x} \cdot \cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + c_2 \cdot e^{-\frac{3}{2}x} \cdot \sin\frac{\sqrt{7}}{2}x$

дет. на Вронски:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0, \text{ където } \begin{cases} y_1(x) = e^{-\frac{3}{2}x} \cos\frac{\sqrt{7}}{2}x \\ y_2(x) = e^{-\frac{3}{2}x} \sin\frac{\sqrt{7}}{2}x \end{cases}$$

$$W(x) = [y_1(x) \cdot y_2'(x)] - [y_2(x) \cdot y_1'(x)]$$

$$y_1'(x) = \frac{-e^{-\frac{3}{2}x}\left(\sqrt{7}\sin\frac{\sqrt{7}x}{2} + 3\cos\frac{\sqrt{7}x}{2}\right)}{2}$$

$$y_2'(x) = \frac{-e^{-\frac{3}{2}x}\left(3\sin\frac{\sqrt{7}x}{2} - \sqrt{7}\cos\frac{\sqrt{7}x}{2}\right)}{2}$$

нека положим $\frac{\sqrt{7}x}{2} = \mu$, тогава:

$$w(x) = \frac{e^{-\frac{3}{2}x}\cdot\cos\mu\cdot(-e^{-\frac{3}{2}x})(3\sin\mu - \sqrt{7}\cos\mu) - (e^{-\frac{3}{2}x}\sin\mu\cdot(-e^{-\frac{3}{2}x})(\sqrt{7}\sin\mu + 3\cos\mu))}{2}$$

$$w(x) = \frac{-e^{-3x}\cos\mu\cdot 3\sin\mu + e^{-3x}\cos\mu\sqrt{7}\cos\mu - (-e^{-3x}\sin\mu\sqrt{7}\sin\mu - e^{-3x}\sin\mu\, 3\cos\mu)}{2} =$$

$$= \frac{\cancel{-3e^{-3x}\sin\mu\cdot\cos\mu} + \sqrt{7}e^{-3x}\cos^2\mu + \sqrt{7}e^{-3x}\sin^2\mu + \cancel{3e^{-3x}\sin\mu\cos\mu}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{2}\cdot e^{-3x}(\sin^2\mu + \cos^2\mu) = \frac{\sqrt{7}}{2}\cdot e^{-3x} \neq 0$$

$\Rightarrow$ общото решение има вида:

$$y = C_1\cdot e^{-\frac{3}{2}x}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + C_2\cdot e^{-\frac{3}{2}x}\cdot\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x$$

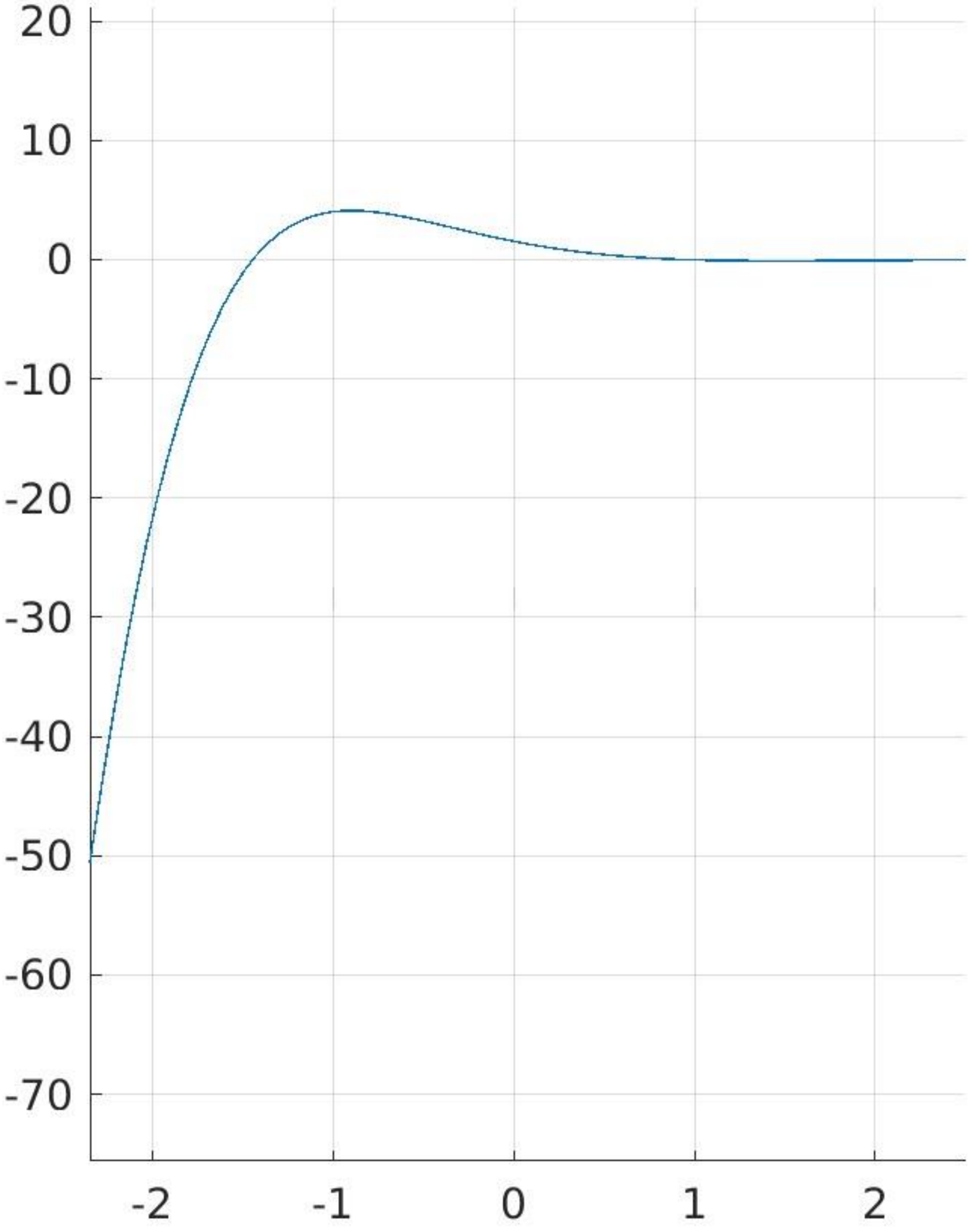
б) Matlab код:

Untitled4*

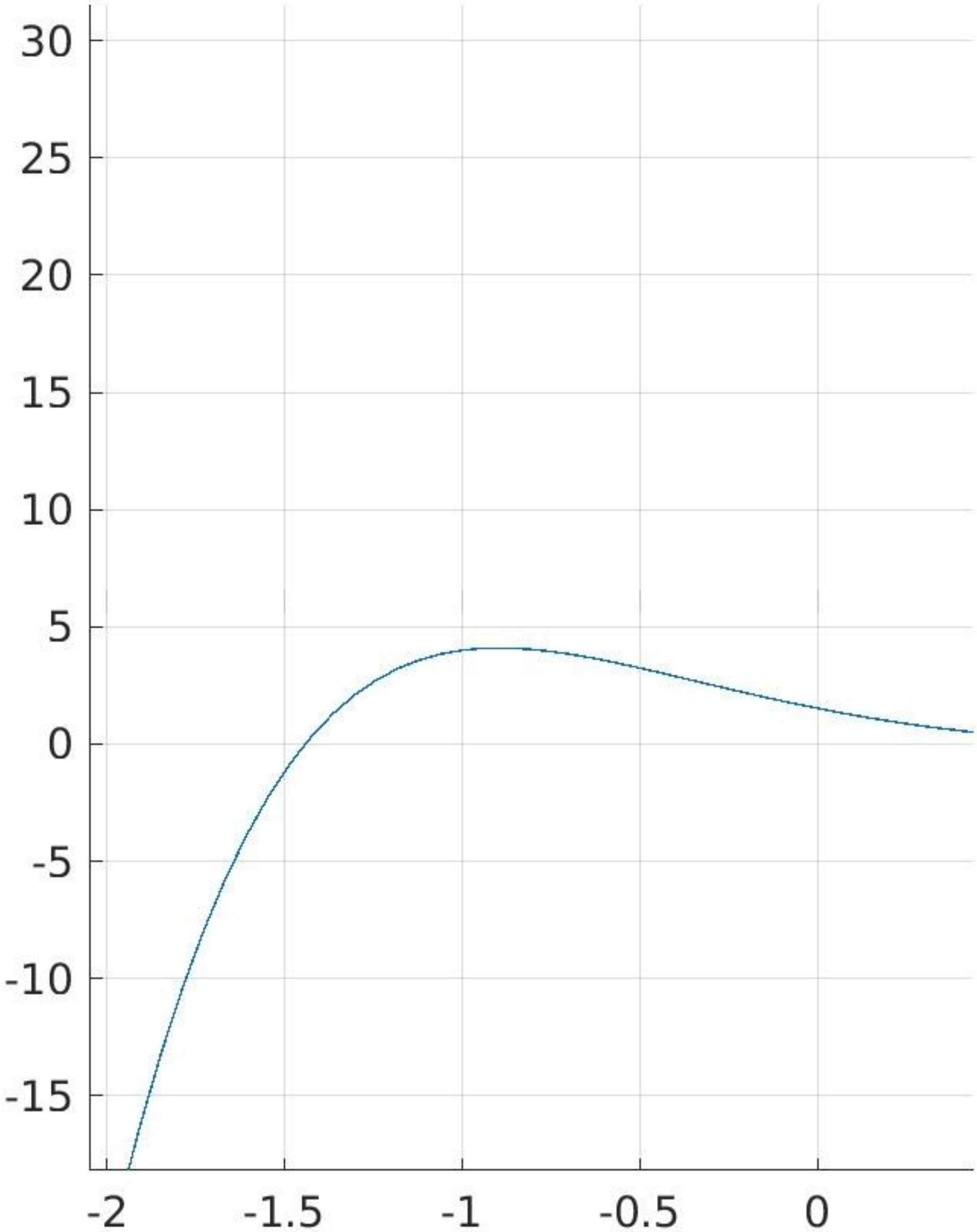
```
function homework2_62342
grid on
hold on

y=dsolve('D2y +3*Dy+4*y=0','y(-1)=4','Dy(-1)=2','x');
x= linspace (-3,3);
plot(x,eval(y))
end
```

в) Резултат от изпълнението на кода:



И още една по-приближена снимка:



30
25
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-2
-1.5
-1
-0.5
0