Софийски университет "Св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

УЧЕБЕН ПРОЕКТ

по

Диференциални уравнения и приложения

спец. Софтуерно инженерство, 2 курс, летен семестър,

учебна година 2019/20

Тема № СИ20-П-112

26.06.2020 Изготвил: Любка Димитрова Ангелинина

София Ф. No. 62342

Група 5

Оценка :……………………………..

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

1. Тема (задание) на проекта

Учебен проект по ДУПрил
спец. СИ, 2 курс, летен семесътр, уч. год. 2019/20

Име...,
Ф.No..........., група ....

Тема СИ20-П-112. Трептенето на струна се моделира със следната задача

$$\left| \begin{array}{l} u_{tt} = \frac{6}{5} u_{xx}, \quad t > 0, \ 0 < x < 7, \\ \\ u|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x \le 7, \\ \\ u_t|_{t=0} = \begin{cases} 6(\ln(x^2 - 10x + 25) - 1)^3, & x \in [4, 6] \\ 0, & x \in [0, 4) \cup (6, 7], \end{cases} \\ \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=7} = 0, \quad t \ge 0. \end{array} \right.$$

1. Разделете променливите в задачата, като търсите решение от вида $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t)$. За функциите $X_k(x)$ получете задача на Щурм-Лиувил и напишете нейните собствени стойности и собствени функции. Напишете кои са функциите $T_k(t)$ и кои са коефициентите в получения ред за $u(x,t)$.

2. Използвайте 55-та частична сума на реда за $u(x,t)$ за да направете на MatLab анимация на трептенето на струната за $t \in [0, 10]$. Начертайте в един прозорец една под друга графиките от направената анимация в началния, крайния и един междинен момент, като означите коя графика за кое t се отнася.

2. Решение на Задачата

2.1. Теоретична част

$$\begin{cases} u_{tt} = \frac{6}{5} u_{xx} \quad (1), \quad t > 0, \quad 0 < x < 7 \\ u|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x \le 7 \\ u_t|_{t=0} = \begin{cases} 6\,[\ln(x^2-10x+25) - 1]^3, & x \in [4;6] \\ 0, & x \in [0;4) \cup (6;7] \end{cases} \\ u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=7} = 0 \quad, t \ge 0 \end{cases}$$

Решение:

Търсим решение от вида:

$$u(x,t) = X(x).T(t)$$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} = \frac{6}{5}.u_{xx} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{6}{5}} \quad ; L = 7$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x) = 0 \quad , 0 \le x \le 7$$

$$\left.\begin{array}{l} u_t|_{t=0} = \psi(x) = \begin{cases} 6\,[\ln(x^2-10x+25)-1]^3, & x \in [4;6] \\ 0, & x \in [0;4) \cup (6;7] \end{cases} \end{array}\right\} \text{начални условия}$$

$\varphi(x)$ и $\psi(x)$ са непрекъснати в интервала $[0;7]$

$$\left.\begin{array}{l} u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=7} = 0 \end{array}\right\} \text{гранични условия}$$

с помощта на метода на Фурие (метод на разделянето на променливите) ще намерим реш.

$$u_{xx}(x,t) = X''(x).T(t)$$
$$u_{tt}(x,t) = X(x).T''(t)$$
и заместваме в ур-ние (1)

$$X(x).T''(t) = \frac{6}{5}.X''(x).T(t)$$

$$\frac{T''(t)}{\frac{6}{5}.T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$, където λ е произволна const

$\Rightarrow$ получаваме уравненията

1) $X''(x) = -\lambda . X(x)$ и 2) $T''(t) = -\frac{6}{5}\lambda . T(t)$

$X''(x) + \lambda . X(x) = 0$

$T''(t) + \frac{6}{5} . \lambda . T(t) = 0$

Да разгледаме $X''(x) + \lambda . X(x) = 0$

използване граничните условия

$X(0) = 0$

$X(L=7) = 0$, така достигане до следната задача на Щурм-Лиувил:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < 7 \\ X(0) = 0 \\ X(7) = 0 \end{cases}$$

Очевидно $X(x) \equiv 0$ е решение. Ще търсим нетривиално решение на уравнението $X''(x) + \lambda . X(x) = 0$.

Характеристичният му полином е:

$P(\alpha) = \alpha^2 + \lambda = 0$

корените са $\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$

Разглеждаме 3 случая:

I сл. $\lambda = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

$\Rightarrow ФСР = \{1, x\}$

$X(x) = c_1 + c_2 . x$

$X(0) = c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow X(x) = c_2 . x$

$X(7) = 7 . c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$ и задачата има само 1 тривиално реш. $X(x) \equiv 0$

II сл. $\lambda < 0 \quad (-\lambda > 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda} \in \mathbb{R})$

$$\Phi CP = \{ e^{-\sqrt{-\lambda}x}, e^{\sqrt{-\lambda}x} \}$$

$$X(x) = c_1 . e^{-\sqrt{-\lambda}x} + c_2 . e^{\sqrt{-\lambda}x}$$

$$X(0) = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$$

$$X(7) = -c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}7} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}7} = c_2 \underbrace{\left(e^{7\sqrt{-\lambda}} - e^{-7\sqrt{-\lambda}}\right)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0$$

III сл. $\lambda > 0 \quad (-\lambda < 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda} \in \mathbb{C})$

$$\sqrt{-\lambda} = i\sqrt{\lambda}, \quad \Phi CP = \{ \cos(\sqrt{\lambda}x), \sin(\sqrt{\lambda}x) \}$$

$$X(x) = c_1 . \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 . \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$$X(0) = c_1 . \underbrace{\cos 0}_{=1} + c_2 . \underbrace{\sin 0}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow X(x) = c_2 . \sin(\sqrt{\lambda}.x)$$

$X(7) = c_2 . \sin(7\sqrt{\lambda}) = 0$, имаме 2 варианта

$c_2 = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0$ или $\sin 7\sqrt{\lambda} = 0$, $\lambda > 0$

$$7\sqrt{\lambda} = k\pi$$

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{7}\right)^2, \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

Тогава задачата на Щурм-Лиувил има решение $c_2 . X(x)$, където c_2 - const (произволна), а:

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{7} . x\right), \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

собствени стойности: $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{7}\right)^2$, $k = 1, 2, 3 \dots$

собствени функции: $X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{7} . x\right)$, $k = 1, 2, 3 \dots$

при $\lambda = \lambda_k$ има безкрайно много решения:

$$X(x) = c_2 . X_k(x)$$, където c_2-const(произволна) и $k = 1, 2, 3 \ldots$;

при всички други стойности за λ, имаме само тривиално решение $X(x) \equiv 0$

Да разгледаме $T''(t) + \frac{6}{5} . \lambda . T(t) = 0$ при $\lambda = \lambda_k$

Характеристичният полином е:

$$Q(\alpha) = \alpha^2 + \frac{6}{5}\lambda_k = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{6}{5} . \lambda_k} = \pm i\sqrt{\frac{6}{5} . \left(\frac{k\pi}{7}\right)^2} = \pm i . \frac{k\pi}{7} . \sqrt{\frac{6}{5}}$$

$$\Phi C P = \left\{\cos\left(\sqrt{\frac{6}{5}} . \frac{k\pi}{7} . t\right), \sin\left(\sqrt{\frac{6}{5}} . \frac{k\pi}{7} . t\right)\right\}$$

$$T_k(t) = A_k . \cos\left(\sqrt{\frac{6}{5}} . \frac{k\pi}{7} . t\right) + B_k . \sin\left(\sqrt{\frac{6}{5}} . \frac{k\pi}{7} . t\right)$$, A_k и B_k-const (произволни)

Намерихме функции: $u_k(x,t) = X_k(x) . T_k(t)$, които са решения и удовлетворяват граничните условия.

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) . T_k(t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{7} . x\right) . \left[A_k . \cos\left(\sqrt{\frac{6}{5}} . \frac{k\pi}{7} . t\right) + B_k . \sin\left(\sqrt{\frac{6}{5}} . \frac{k\pi}{7} . t\right)\right]$$

$$u_k|_{t=0} = A_k . X_k(x) = \varphi(x)$$

$$u|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k . X_k(x) = \varphi(x)$$

Нека промениm индекса, по който сумираме и k е фиксирано

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j . X_j(x) . X_k(x) = \varphi(x) . X_k(x)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j \int_0^L X_j(x) . X_k(x) dx = \int_0^L \varphi(x) . X_k(x) dx$$

Тъй като $\int_0^L X_k(x) \cdot X_j(x)\, dx = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ \frac{L}{2}, & k = j \end{cases}$

$$\Rightarrow A_k \frac{L}{2} = \int_0^L \varphi(x) \cdot X_k(x)\, dx$$

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \cdot X_k(x)\, dx$$

$$A_k = \frac{2}{7} \cdot \int_0^7 \varphi(x) \cdot X_k(x)\, dx \quad , \text{където } \varphi(x) = u|_{t=0}$$

За да удовлетворим 2-рото начално условие:

$$u_t(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\tfrac{6}{5}} \cdot \frac{k\pi}{7} \left[-A_k \cdot \sin\left(\sqrt{\tfrac{6}{5}} \cdot \frac{k\pi}{7} \cdot t\right) + B_k \cdot \cos\left(\sqrt{\tfrac{6}{5}} \cdot \frac{k\pi}{7} \cdot t\right)\right] \cdot X_k(x)$$

$$\Rightarrow u_t(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\tfrac{6}{5}} \cdot \frac{k\pi}{7} \cdot B_k \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{7} x\right) = \psi(x)$$

Аналогично с A_k за B_k получаваме:

$$B_k = \frac{2}{ak\pi} \int_0^L \psi(x) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) dx = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}\, k\pi} \int_0^7 \psi(x) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{7} x\right) dx \,,$$

където $\psi(x) = u_t|_{t=0}$

2.2. MatLab код и получени в командния прозорец резултати при изпълнението му

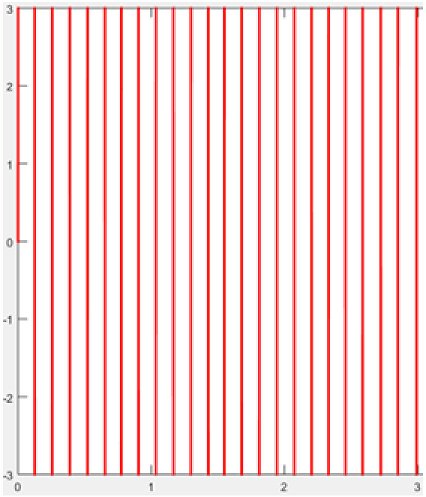
```
function project
clc
%необходимите ни параметри
a=sqrt(6/5);
L=7;
tmax=10;
x=linspace(0,L);
t=linspace(0,tmax);
%дефинираме функцията фи
function y=phi(x)
for i=1:length(x)
y(i)=0;
end
end
%дефинираме функцията пси
function y=psi(x)
for i=1:length(x)
if x(i)>=4 && x(i)<=6
y(i)=6*((log((x(i)^2)-10*x(i)+25)-1)^3);
else
y(i)=0;
end
end
end
%дефинираме функцията u(x,t)
function y=u(x,t)
y=0;
%55-та частична сума на реда за u(x,t)
for k=0:54
Xk=sin(k*pi*x/L);
Ak=2*trapz(x,phi(x).*Xk)/L;
Bk=2*trapz(x,psi(x).*Xk)/L*(a*pi*k/L);
Tk=Ak*cos((k*a*pi*t)/L)+Bk*sin((k*a*pi*t)/L);
y=y+Tk*Xk;
end
end
%графики на анимацията
for n=1:length(t)
%2D plot
plot(x,u(x,t(n)),'r', 'LineWidth', 2);
axis([0,L,-3,3])
%създава анимация от текущите оси на екрана
getframe;
end
%разделя на 3x1 решетки и създава оси в позиция 1
subplot(3,1,1)
plot(x,u(x,0),'r','LineWidth',2)
title('При t=0')
grid on
hold off
subplot(3,1,2)
plot(x,u(x,5),'r','LineWidth',2)
title('При t=5')
grid on
hold off
subplot(3,1,3)
```

```
plot(x,u(x,tmax),'r','LineWidth',2)
title('При t=10')
grid on
hold off
end
```

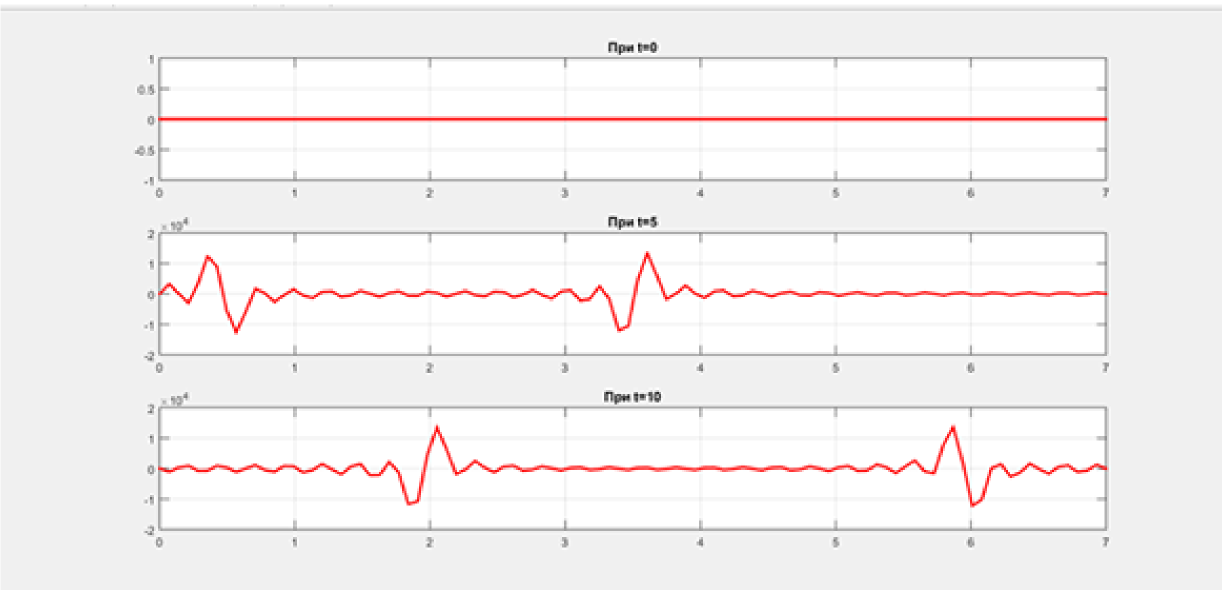
В задачата се изисква анимация на решението на даденото уравнение за трептене на струна и няма резултати в командния прозорец.

2.3. Графики (включително от анимация)

Графики от анимация:



Графики в моментите t1=0, t2=5, t3=50=tmax



2.4. Коментари към получените с MatLab резултати

На графиката в различните моменти t е изобразено състоянието на трептящата струна в началния, междинния и крайния момент. Положението на струната в началния момент съвпада с абсцисната ос.