18. Приложение на принципа на минимума на Понтрягин за синтез на оптимални по бързодействие управления на линейни системи.

- Постановка на задачата за оптимално бързодействие.
- Формулировка на принципа на минимума за оптимално бързодействие.
- Алгоритъм за работа.
- Особености на анализа на решението.
- Теорема за n-те интервала.
- Моделираща схема на оптимална по бързодействие система.

1. Постановка на задачата за оптимално бързодействие.

Търси се такова управляващо въздействие $\mathbf{U}(t)$, отговарящо на условието

$$|u_j| \leq 1, \qquad (j = 1,2,...,r), \tag{1}$$

което да приведе системата

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{AX}(t) + \mathbf{BU}(t) \tag{2}$$

от начално състояние $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ в крайно състояние $\mathbf{X}(T) = \mathbf{X}_\mathrm{T}$ за минимално време, т.е. минимизирайки критерия за оптималност

$$I = \int_0^T f_0(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t))dt = \int_0^T 1dt = T \to \min.$$

2. Формулировка на принципа на минимума за оптимално бързодействие.

За оптималността на управлението $\mathbf{U}(t)=\mathbf{U}^*(t)$ и на траекторията $\mathbf{X}(t)=\mathbf{X}^*(t)$ е необходимо да съществува такава ненулева и непрекъсната вектор-функция $\mathbf{P}(t)$, която заедно с $\mathbf{U}(t)$ и $\mathbf{X}(t)$ да удовлетворява каноничната система

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt}=-\frac{\partial H(\mathbf{X},\mathbf{U},\mathbf{P})}{\partial \mathbf{X}}=-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}, \qquad (3а)$$

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt}=\frac{\partial H(\mathbf{X},\mathbf{U},\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}}=\mathbf{A}\mathbf{X}+\mathbf{B}\mathbf{U}, \qquad (3б)$$

и за всяко $t\in[0;T]$ Хамилтонианът

$$H(\mathbf{P},\mathbf{X},\mathbf{U})=f_0(\mathbf{X},\mathbf{U})+\mathbf{P}^{\mathbf{T}}[\mathbf{A}\mathbf{X}+\mathbf{B}\mathbf{U}]=1+\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}+\mathbf{U}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{P} \qquad (4)$$

да е минимален (по $\mathbf{U}$) при съблюдаване на ограниченията $|u_j|\le 1,\ (j=1,2,...,r)$, за $\mathbf{U}(t)$.

3. Синтез на оптимално управление. Алгоритъм за работа.

1. Обектът се представя в пространството на състоянията във форма (2).

2. Съставя се Хамилтонианът (4).

3. Търсят се частните производни на Хамилтониана по управлението $\mathbf{U}$, нулират се и от условията на това нулиране се определят управленията, претендиращи за оптимални:

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} = 0 \ , \quad (j = 1,2,\ldots,r).$$

4. След заместване на получените от т.3 управления в каноничната система, тя се решава и чрез търсене измежду многото варианти на начални условия за спомагателния вектор $\mathbf{P}(t)$ се уточняват $\mathbf{P}^*(t)$, $\mathbf{X}^*(t)$ и $\mathbf{U}^*(t)$ водещи до абсолютен минимум на H.

18. Синтез на оптимални по бързодействие управления.

За разглежданата задача, съгласно т.3

$$\frac{\partial H(\mathbf{X},\mathbf{U},\mathbf{P})}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} = 0\,.$$

Необходимото условие за минимум на Хамилтониана води до практически безполезен резултат, тъй като не дава информация за търсеното управление. Минимумът на Хамилтониана (4) се представя във вида

$$H(\mathbf{P}(t),\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t)) = 1 + \mathbf{P}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{P}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{B}\mathbf{U}(t) \underset{\mathbf{U}}{\rightarrow} \min\,. \tag{5}$$

Хамилтонианът в принципа на минимума е неотрицателно число и най-малката стойност, която може да приеме е нула. За минимизирането на (5) последният член трябва да е отрицателен с максималната възможна абсолютна стойност:

1. Последният член е отрицателен, когато $\mathbf{U}(t)$ е с обратен знак на $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}(t)$;
2. Максимално допустимата абсолютна стойност на $\mathbf{U}(t)$, съгласно ограничението (1) е $|u_j| = 1,\ (j = 1,2,\ldots,r)$.

Избира се релейно управление

$$\mathbf{U}(t) = -\mathrm{sign}(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}(t))\,. \tag{6}$$

4. Особености на решението

1. Решението (6) на задачата за оптимално управление не е завършено, тъй като не се знае началната стойност $\mathbf{P}_0$ на $\mathbf{P}(t)$ и той не може да се получи от решението на (3а):

$$\mathbf{P}(t)=\mathbf{P}_0 e^{-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}t}.$$

$\mathbf{P}_0^*$ се получава чрез итеративна процедура, като за нулево приближение $\mathbf{P}_0^0$ се взема някаква произволна стойност, за която се изчисляват съответните $\mathbf{U}^0(t)$ и $\mathbf{X}^0(t)$. Малко вероятно е $\mathbf{X}(t)$ да попадне в началото на координатната система. (Целта на управлението е най-бързият преход от произволна точка във фазовото пространство в началото на координатната система.) Като мярка за близост на получената траектория до търсената оптимална се приема разстоянието r^0 от началото на координатната система до получената траектория. Следващите приближения на $\mathbf{P}_0^i$ се избират така, че разстоянието r^i да намалява от итерация към итерация. На търсеното $\mathbf{P}_0^*$ съответствува $r=0$.

2. $\mathbf{U}^*(t)$ се намира като функция на времето, а не на фазовите координати. Следователно системата е отворена, което е нежелателно. Получените резултати могат да се използват за решаване на задачата до затворена форма.

3. Оптималното по бързодействие управление е отсечково-постоянна функция, която приема гранична стойност и има определен брой интервали на постоянство. Превключванията на релето (6) зависят от нулите на $\mathbf{P}(t)$. Броят на интервалите на постоянство е равен на реда на системата, ако тя е линейна и неколебателна.

5. Теорема за *n*-те интервала (на А. А. Фелдбаум)

За линейна система от *n*-ти ред, на която всички корени на характеристичното уравнение са реални и на управлението са наложени ограничения от вида неравенство $|u_j| \le 1$, оптималното управление $\mathbf{U}^*(t)$, водещо до екстремума на линеен функционал е отсечково-постоянна функция, която приема гранични стойности ± 1 и има не повече от n интервала на постоянство, т.е. $n-1$ превключвания.

6. Моделираща схема на отворена система, оптимална по бързодействие