14. Устойчивост на нелинейни САУ. Видове устойчивост.

- Определение за устойчивост на нелинейна САУ;
- Понятие за устойчивост по траектория (орбитална устойчивост).
- Определение за устойчивост в смисъл на Ляпунов (при малки отклонения) (за общия случай);
  - Асимптотична устойчивост.
  - Асимптотическа устойчивост при големи отклонения;
  - Асимптотическа устойчивост в цялост;
  - Геометрично представяне на устойчивост по Ляпунов;
  - Формулировка на устойчивост чрез r^2;
  - Равномерна устойчивост по отношение на началния момент t_0.

1. Устойчивост на нелинейна САР.

- В дадена *нелинейна система* могат да съществуват както устойчиви, така и *неустойчиви движения*, в частност *състояния на равновесие*. Система не се характеризира със свойството устойчивост; такова свойство притежава определено *движение* или *състояние* на системата.
- Когато смущаващото въздействие е с мигновено (изчезващо) действие, влиянието му се отчита посредством вземане под внимание на определени отклонения (начални условия).
- За описване на движението се използва система диференциални уравнения

$$\frac{dy_k}{dt} = Y_k(y_1, y_2, ..., y_n, t), \qquad k = 1,2,...,n,$$

където: y_k са обобщени координати на системата;

Y_k -непрекъснати функции на аргументите си, имат непрекъснати частни производни.

Началните условия са начални стойности на y_k,

$k = 1,2,...,n \quad \rightarrow \quad (y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})$.

Ако Y_k зависят явно от времето – неавтономна система;
Ако Y_k не зависят явно от времето – автономна система.

- **Несмутено движение:**
  - За различни начални условия (смущения) се определят различни движения на системата. От това множество движения може да бъде избрано едно, което е предвидено като *проектирано* (*разчетно*) *движение* на системата при определени външни въздействия и зададени начални условия.
  - В реалната система разчетното движение ще бъде отклонявано под действието на неконтролируемите смущаващи въздействия, които не са отчетени при проектирането.
  - Онова, желано в определен аспект движение (разчетно), което се изследва за устойчивост се възприема като ***несмутено***. То се изразява посредством определено частно решение на $\dot{y}_k = Y_k(y_1, y_2, ..., y_n, t)$, $k = 1,2,...,n$, т.е. за определено начално условие – ***несмутено решение*** $y_1^* = y_1(t),\ y_2^* = y_2(t),\ ...,\ y_n^* = y_n(t)$.

14. Устойчивост на нелинейни САУ. Видове устойчивост.

- В ***автономната система*** като ***несмутено движение*** може да се възприеме ***положението на равновесие*** или ***автоколебателното движение***.
- В ***неавтономната система*** като ***несмутено движение*** обикновено се приема ***принудителното движение***.

➤ **Смутено движение:** Движенията, получени като решение на $\dot{y}_k = Y_k(y_1, y_2, ..., y_n, t)$, $k = 1,2,...,n$, за *други начални* условия се наричат ***смутени***.

➤ **Добавъчно движение:** Разликите между координатите $y_k(t)$ на смутеното движение и съответните координати $y_k^*(t)$ на несмутеното движение определят $x_k(t)$ $\rightarrow$ ***отклонения*** или ***добавъчно движение***.

$$x_k(t) = y_k(t) - y_k^*(t), \qquad k = 1,2,...,n,$$

$$y_k(t) = y_k^*(t) + x_k(t), \qquad k = 1,2,...,n.$$

$$\frac{dy_k^*}{dt} + \frac{dx_k}{dt} = Y_k(y_1^* + x_1, y_2^* + x_2, ..., y_n^* + x_n, t), \qquad k = 1,2,...,n.$$

- Същата система описва и ***несмутеното движение***:

$$\frac{dy_k^*}{dt} = Y_k(y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*, t), \qquad k = 1,2,...,n.$$

- Уравнението на ***добавъчното движение*** на неавтономната система е:

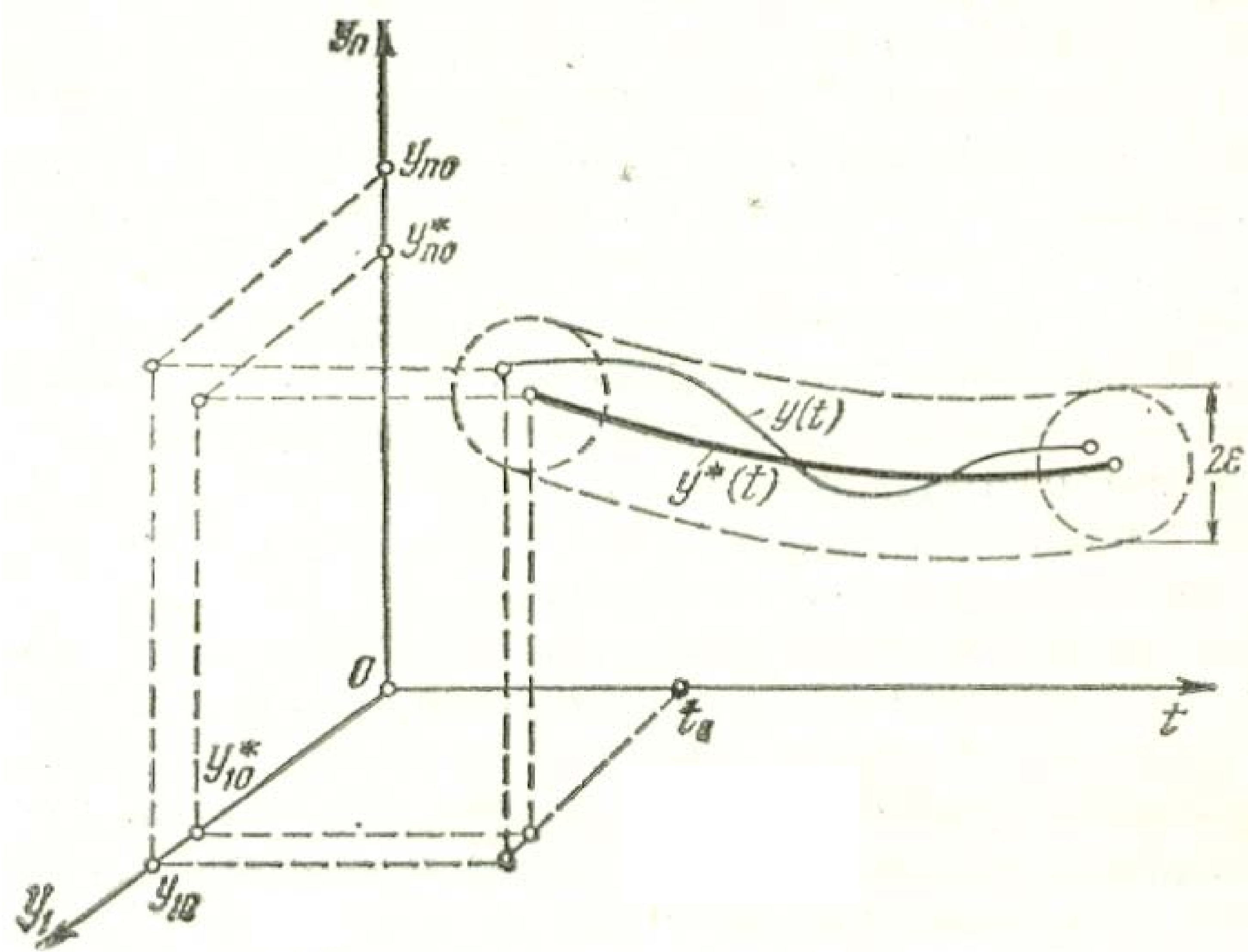
$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, x_2, ..., x_n, t), \qquad k = 1,2,...,n.$$

където:

$$X_k(x_1, x_2, ..., x_n, t) =$$
$$= Y_k(y_1^* + x_1, y_2^* + x_2, ..., y_n^* + x_n, t) - Y_k(y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*, t)$$

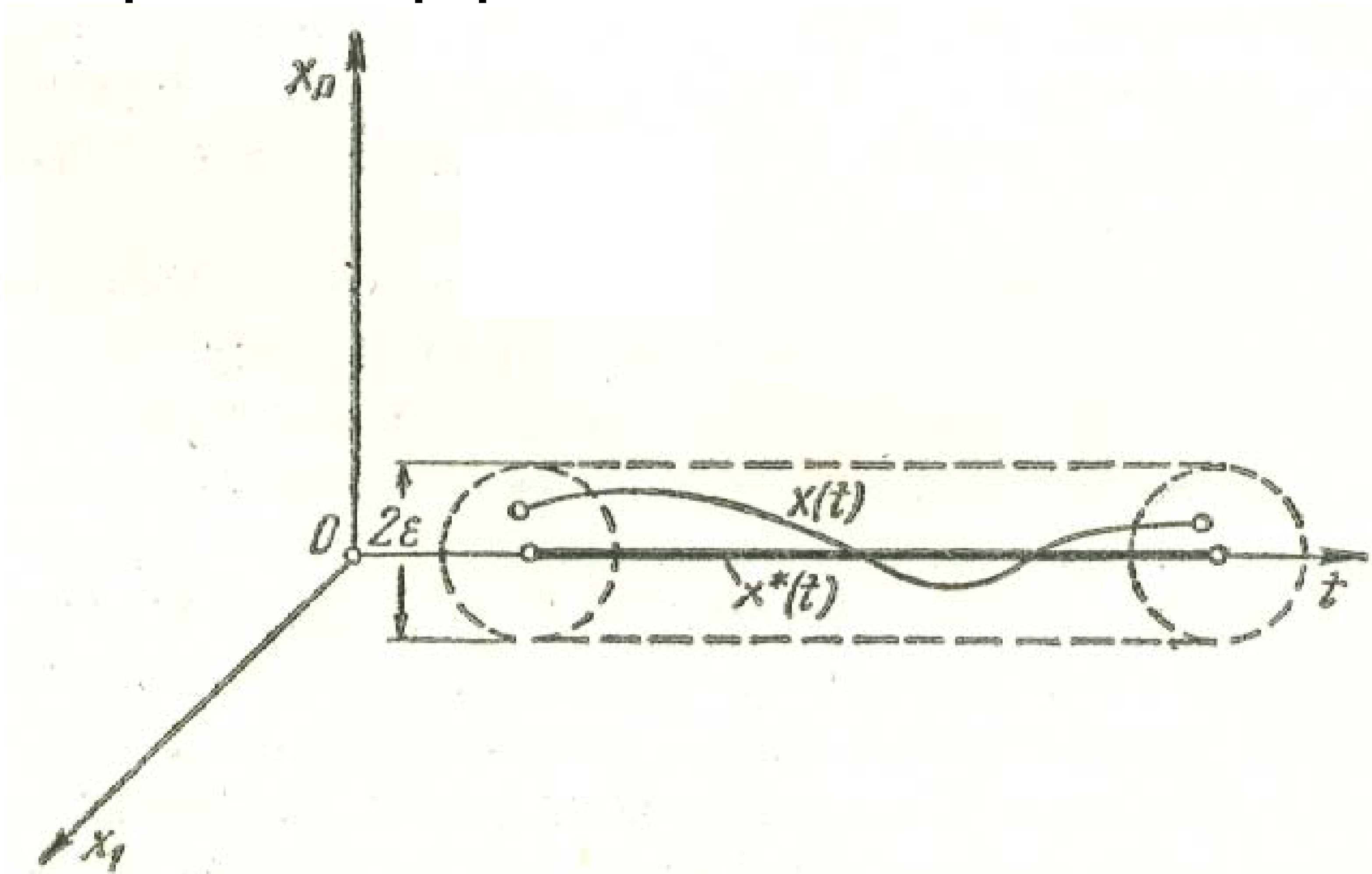
- Ако всички отклонения x_k са нула, тогава ***смутеното*** движение $y_k(t)$ ще съвпада с ***несмутеното*** движение $y_k^*(t)$. Следователно, на несмутеното движение отговаря нулево решение на системата $\dot{x}_k = X_k(x_1, x_2, ..., x_n, t)$, $k = 1,2,...,n$.

- **Геометрична интерпретация.**



ε - радиус на криволинеен цилиндър с ос несмутеното движение $y^*(t)$.

Геометрична интерпретация.



На всяка интегрална крива $y(t)$ съответства крива $x(t)$.

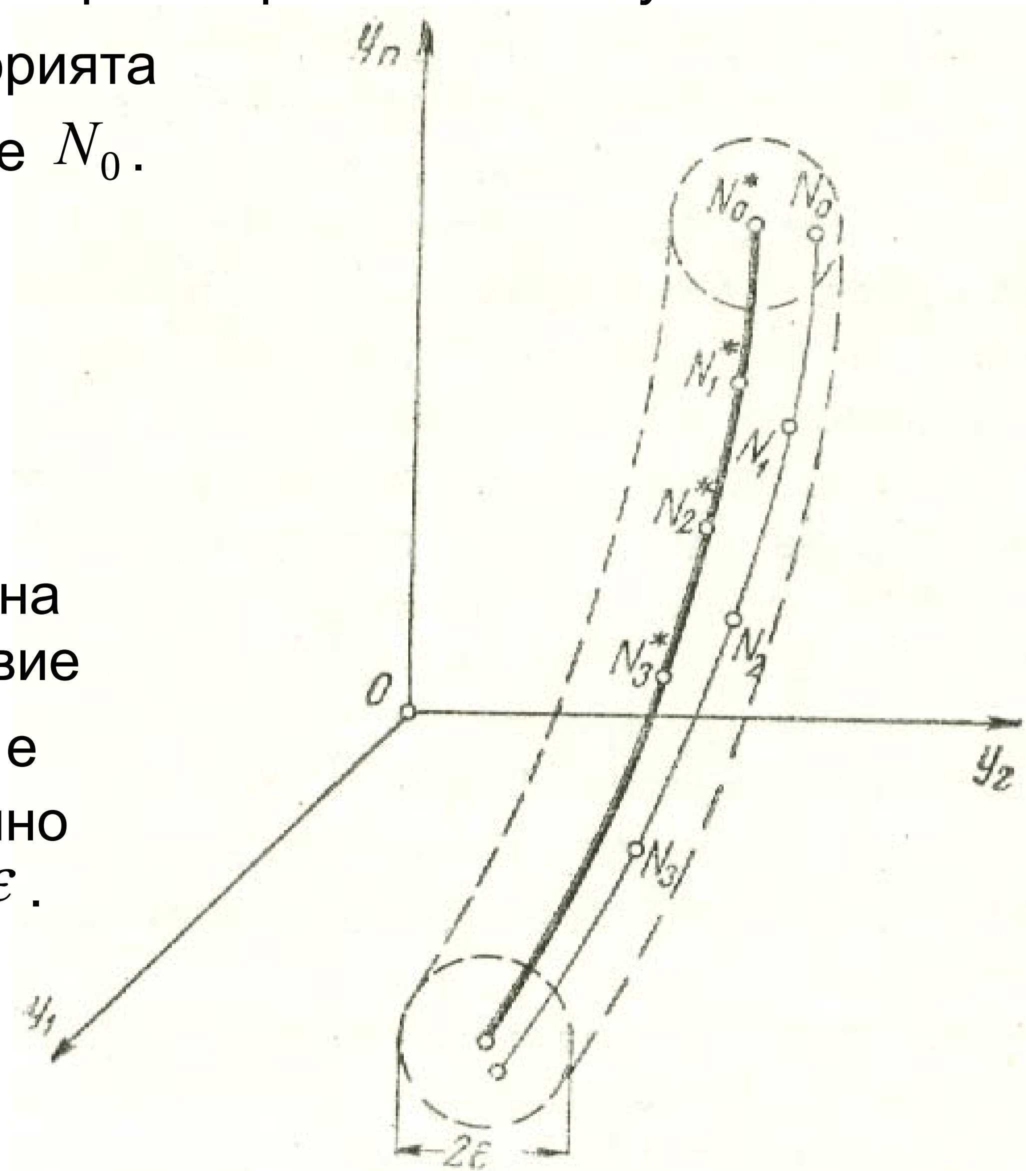
2. Понятие за устойчивост по траектория.

***Определение 1*:**

Дадени са траекториите на *смутеното* и *несмутеното* движение. *Несмутеното* д-ние е с плътна линия. Около нея е разположена околност, оградена от един криволинеен цилиндър, чиято ос е самото *несмутено движение*, а радиусът на този цилиндър е произволно малко положително число ε , което трябва да гарантира малки отклонения по траектория.

14. Устойчивост на нелинейни САУ. Видове устойчивост.

В началния момен $t = t_0$ се прилага смущение; изобразяващата точка N_0^* се премества от траекторията на *несмутеното* движение върху траекторията на *смутеното* движение N_0.



Ако е изпълнено

$$\left| y_{k0} - y_{k0}^* \right| \leq \eta ,$$

положителното число η ограничава големината на смущаващото въздействие в момента t_0, като $\eta(\varepsilon)$ е свързано с предварително избраната стойност на ε.

14. Устойчивост на нелинейни САУ. Видове устойчивост.

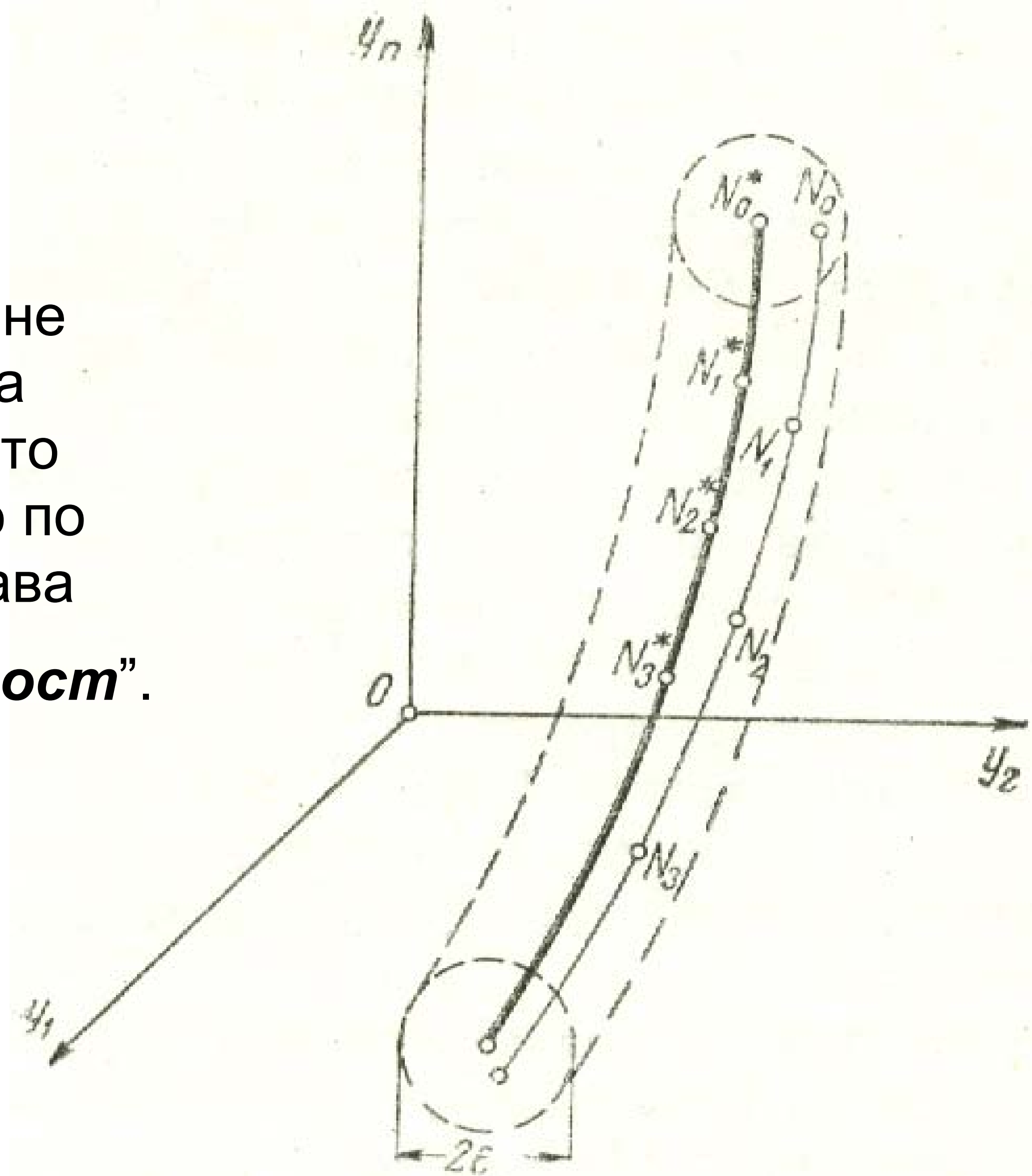
Ако при каквото и да е предварително зададено малко число $\varepsilon > 0$ (определящо ε-околност на несмутеното движение),

може да бъде избрано

$$\eta(\varepsilon) > 0,$$

така че траекторията на смутеното движение да не напуска ε-околността на несмутеното движение, то движението е устойчиво по траектория, т.е. притежава

"***орбитална устойчивост***".



14. Устойчивост на нелинейни САУ. Видове устойчивост.

Близостта между траекториите на смутеното и несмутеното движение може да съществува и да са изпълнени условията за орбитална устойчивост, но може да се получи изместване на съответната изобразяваща точка N^* и N по продължението на самите траектории, така че да нарастнат недопустимо откло-ненията между съответните координати на двете движения за даден момент от времето. Налага се внасяне на ново съдържание в понятието "*малки отклонения*"; резултатът е определението за устойчивост в *смисъл на Ляпунов*.

3. Понятие за устойчивост по траектория.

***Определение 2*:**

- Ако за всяко, каквото и да е, зададено $\varepsilon > 0$, колкото и малко да е то, може да се избере друго $\eta > 0$, така че за всички смущаващи въздействия, удовлетворяващи в началния момент $t = t_0$ ограниченията на началните условия

$$\left| y_k(t_0) - y_k^*(t_0) \right| = \left| x_k(t_0) \right| \le \eta(\varepsilon), \quad k = 1,2,\dots,n,$$

и като следствие за всеки момент $t > t_0$ се изпълняват неравенствата на отклоненията на смутеното от несмутеното движение:

$$\left| y_k(t) - y_k^*(t) \right| = \left| x_k(t) \right| \le \varepsilon, \quad k = 1,2,\dots,n,$$

тогава несмутеното движение е *устойчиво* по отношение на величините $y_1, y_2, ,\dots, y_n$; в противен случай несмутеното движение е *неустойчиво*.

14. Устойчивост на нелинейни САУ. Видове устойчивост.

- Несмутеното движение е ***асимптотически устойчиво***, ако е устойчиво и може да се избере такова достатъчно малко $\eta(\varepsilon) > 0$, че да са изпълнени за всички смущаващи въздействия условията на началните отклонения $\left| y_k(t_0) - y_k^*(t_0) \right| \le \eta$ и като следствие

$$\lim_{t\to\infty}\left[y_k(t) - y_k^*(t) \right] = \lim_{t\to\infty} x_k(t) = 0 , \quad k = 1,2,\ldots,n .$$

- Понятието за ***асимптотична устойчивост*** съответства на възприетото понятие за ***устойчивост на линейни системи***:

$$\lim_{t\to\infty} y_{св}(t) = 0 ,$$

където $y_{св}$ е свободното движение, общото решение на хомогенното линейно диференциално уравнение (ЛДУ). В разгънат вид:

$$\lim_{t\to\infty}\left[y(t) - y_{пр}(t) \right] = \lim_{t\to\infty}\left[y(t) - y^*(t) \right] = 0 ,$$

където $y_{пр}$ е принудително движение, частно решение на нехомогенното ЛДУ; $y_{пр}(t) = y^*(t)$.

14. Устойчивост на нелинейни САУ. Видове устойчивост.

➢ **Асимптотическа устойчивост при големи отклонения:**

Несмутеното движение се нарича асимптотически устойчиво при големи отклонения, ако е устойчиво и ограниченията на началните условия са изпълнени за всяко

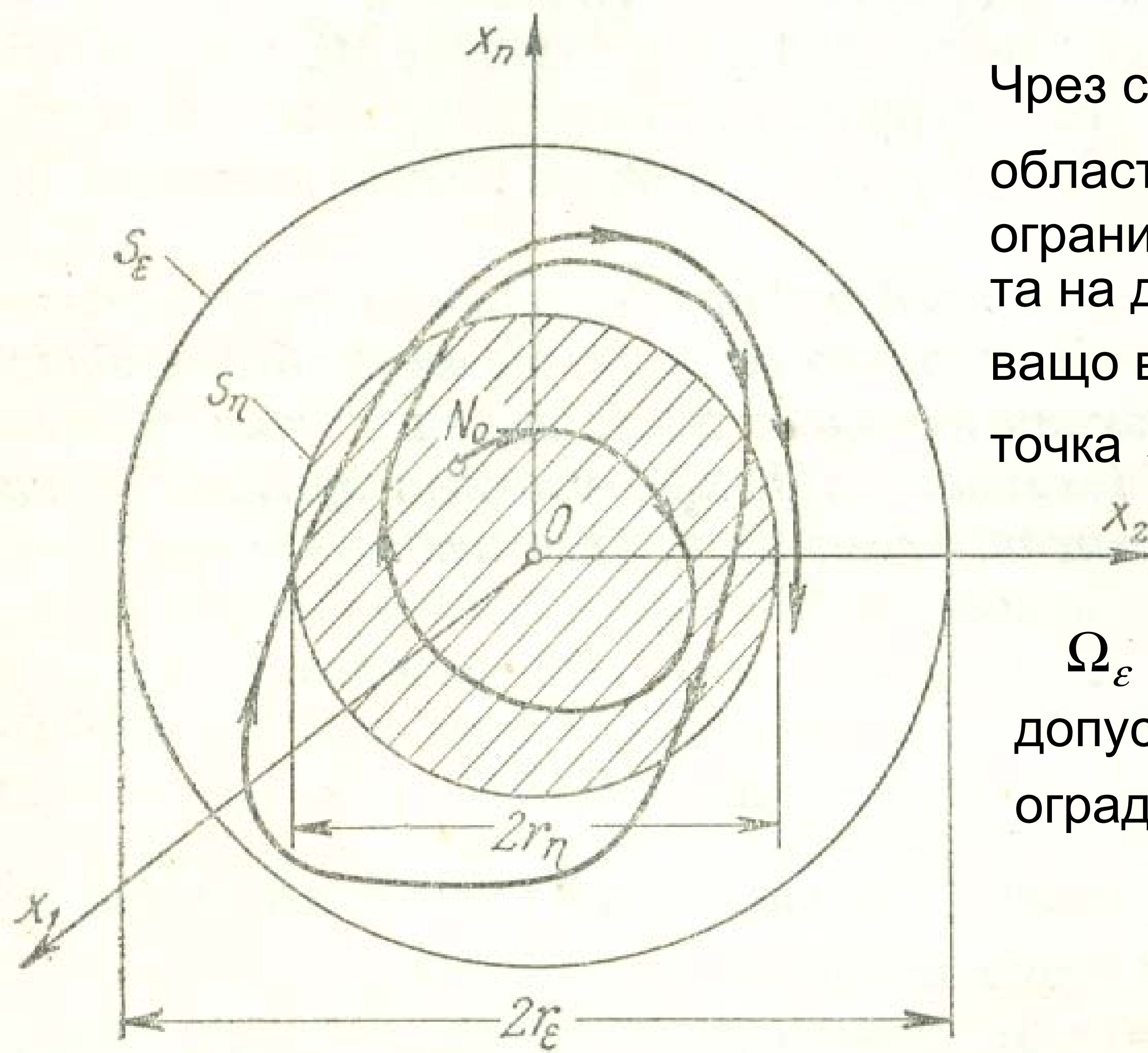
$$\eta \leq M$$

(M - голяма, но ограничена стойност), като при това се изпълняват асимптотическите условия:

$$\lim_{t \to \infty} x_k(t) = 0, \quad k = 1,2,\dots,n.$$

➢ **Асимптотическа устойчивост в цялост:** при $\eta \leq \infty$

- **Геометрично представяне на устойчивост по Ляпунов:**



Чрез сфера S_η е оградена област Ω_η на началните ограничения. Траекторията на движението, започващо в момент $t = t_0$ е от точка N_0 вътре в Ω_η.

Ω_ε - област на допустимите отклонения, оградена с S_ε.

При устойчиво несмутено движение траекторията на изобразяващата точка не напуска S_ε.

- **Формулировка на устойчивост чрез** r^2 - квадрат на разстоянието на изобразяващата точка до началото на координатната система.

Ако за всяко предварително зададено $\varepsilon > 0$, колкото и малко да е то, може да бъде избрано такова $\eta(\varepsilon) > 0$, че при всички начални отклонения (“смущения”) x_{k0} , удовлетворяващи в началния момент $t = t_0$ условието

$$r_0^2 = \sum_{k=1}^{n} x_{k0}^2 \leq \eta(\varepsilon)$$

и за всяко $t > t_0$ като следствие е изпълнено

$$r^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq \varepsilon ,$$

то несмутеното движение по отношение на координатите x_k е *устойчиво*. В противен случай е *неустойчиво*.

- **Равномерна устойчивост по отношение на началния момент** t_0:

- Когато големината на η, ограничаващо стойностите на началните условия не зависи от избора на началния момент t_0, а зависи само от предварително избраната ε -околност на допустимите отклонения, устойчивостта е *равномерна по отношение на началния момент* t_0.

15. Първи и втори метод на Ляпунов.

- **Първи (непряк) метод**
  - *Теорема 1:* Всички корени на характеристичното уравнение на линеаризираната система ДУ имат отрицателни реални части;
  - *Теорема 2:* Поне един от корените на характеристичното уравнение на линеаризираната система ДУ има положителна реална част;
  - *Теорема 3:* Характеристичното уравнение няма корени с положителна реална част.
- **Втори (пряк) метод на Ляпунов**
  - Функция на Ляпунов;
  - Теорема на Ляпунов за устойчивост на движението при автономна система;
  - Теорема за асимптотическа устойчивост;
  - Теорема на Ляпунов за неустойчиво движение.

<u>*15. Първи и втори метод на Ляпунов.*</u>

1. Първи (непряк) метод.

- Не съществува обща теория за решаване на нелинейни диференциални уравнения (НДУ). Точни аналитични решения съществуват само за някои класове НДУ. В останалите случаи се използват приближени методи, в които участват линеаризираните уравнения. **Може ли при малки отклонения да се съди за устойчивостта на НСАР по линеаризираните уравнения?**
- При разлагане в ред на нелинейни функции по степените на $x_1, x_2, ..., x_n$ изходната НСАР се представя като:

$$\frac{dx_k}{dt} = c_{k1}x_1 + ... + c_{kn}x_n + \Phi_k(x_1, ..., x_n), \quad k = 1,2,...,n,$$

където $\Phi_k(x_1, x_2, ..., x_n)$ съдържа членове не по-ниски от II ред.

- $\Phi_k(x_1, x_2, ..., x_n)$ се пренебрегва и се решава системата:

$$\frac{dx_k}{dt} = c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + ... + c_{kn}x_n, \quad k = 1,2,...,n.$$

15. Първи и втори метод на Ляпунов.

- ***Теорема 1***: Ако всички корени на характеристичното уравнение на линеаризираната система ДУ имат отрицателни реални части несмутеното движение е устойчиво, така че всяко смутено движение се приближава асимптотически към несмутеното движение за достатъчно малки смущения, каквито и да са членовете от по-висок ред в ДУ. (некритичен случай)
- ***Теорема 2***: Ако поне един от корените на характеристичното уравнение на линеаризираната система ДУ има положителна реална част, несмутеното движение е неустойчиво. (некритичен случай)
- ***Теорема 3***: Ако характеристичното уравнение няма корени с положителлна реална част, но има корени с реална част равна на нула, то членовете от по-висок ред в ДУ на НСАР определят дали системата е устойчива или не. (критичен случай)
- Този метод се прилага за нелинейни системи, линеаризирани и при малки смущения (отклонения). *Предимство*: могат да се прилагат критериите за устойчивост при линейни САР.

2. Втори (пряк) метод на Ляпунов.

- Нарича се пряк, защото с помощта на редица теореми, служещи като критерии за устойчивост може по пряк начин (без интегриране) да се използват уравненията на движението, за да се установи устойчивостта му.

- Функцията $V(\mathbf{X})$ е ***знакоопределена***, ако има един и същи знак във всяка точка на някаква отворена област Ω_h около координатното начало и става нула само ако $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$.

  - Ако $V(\mathbf{X}) > 0$, то $V(\mathbf{X})$ е ***положително определена***;
  - Ако $V(\mathbf{X}) < 0$, то $V(\mathbf{X})$ е ***отрицателно определена***.
  - Пример: $V(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 > 0$.

15. Първи и втори метод на Ляпунов.

- Функцията $V(\mathbf{X})$ е ***знакопостоянна***, ако запазва постоянен знака си в околност около координатното начало и се нулира не само в началото на координатната система, но и за други стойности на $x_1, x_2, ..., x_n$.

  - Пример: $V(\mathbf{X}) = x_1^2 x_2^2 \geq 0$.

  - Ако $V(\mathbf{X}) \geq 0$, то $V(\mathbf{X})$ е *положително полуопределена* (положително знакопостоянна);

  - Ако $V(\mathbf{X}) \leq 0$, то $V(\mathbf{X})$ е *отрицателно полуопределена* (отрицателно знакопостоянна).

- Функцията $V(\mathbf{X})$ е ***знакопроменлива***, ако има положителни и отрицателни знаци в област около координатното начало.

15. Първи и втори метод на Ляпунов.

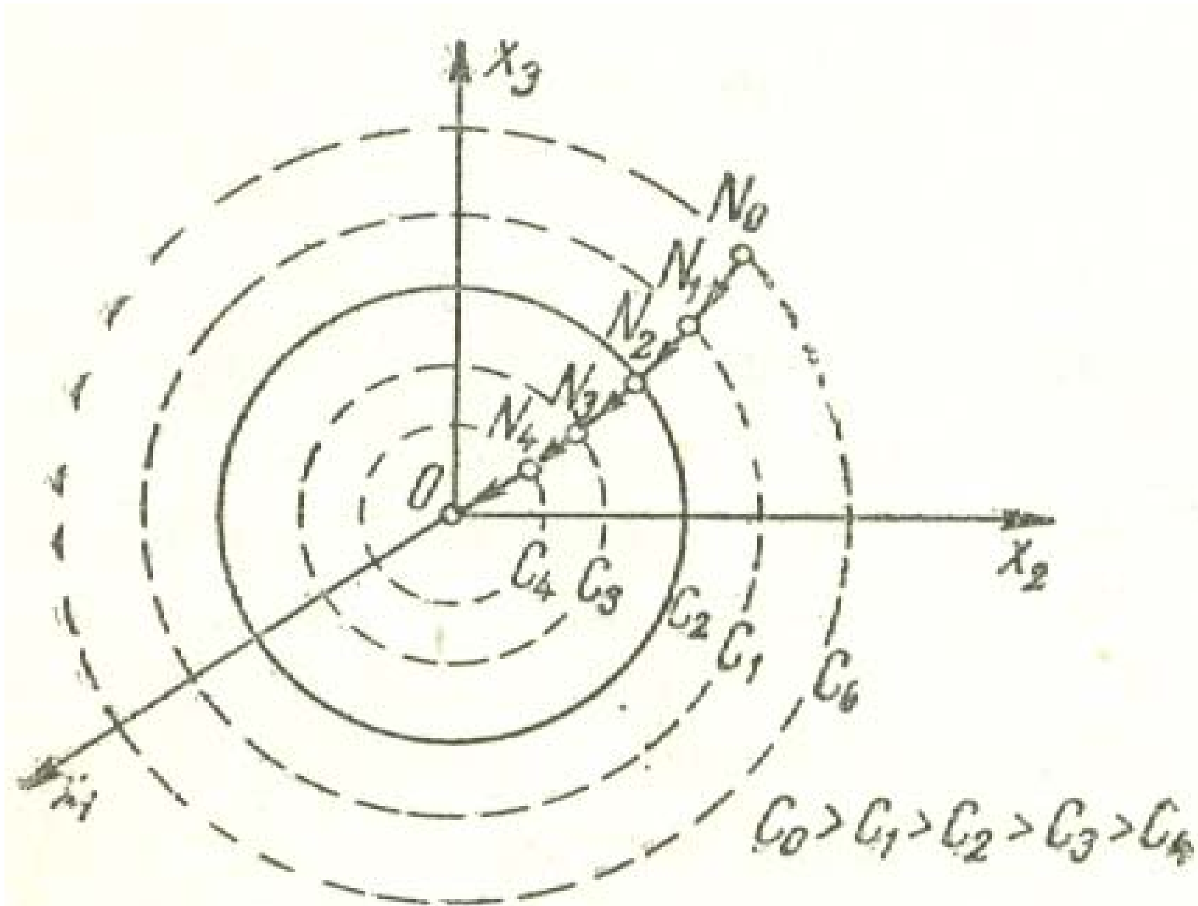
- Функцията $V(\mathbf{X})$ се нарича ***функция на Ляпунов*** тогава, когато е ***знакоопределена*** в някаква отворена област Ω_h около координатното начало и нейната пълна производна по времето $\dot{V}(\mathbf{X})$, определена в съответствие с уравнението на добавъчното движение на системата в същата област е *знакопостоянна* (или *знакоопределена*) със *знак обратен на знака* на $V(\mathbf{X})$.

- Функцията на Ляпунов е инспирирана от потенциалната функция, съгласно теоремата на Лагранж-Дирихле.

- ***Теорема на Лагранж-Дирихле***: Ако в положението на изолирано равновесие на една консервативна система потенциалната енергия има минимум, то в това положение състоянието на равновесие е устойчиво.

(а) Функция на Ляпунов - $V(x_1, x_2, ..., x_n) = C$:

Ако изобразяващата точка се движи по траекторията през намаляващи C_i навътре – това е достатъчно условие за устойчивост. Такъв характер на движение се определя, ако $\frac{dV}{dt} < 0$.



(б) Теорема на Ляпунов за устойчивост на движението при автономна система.

Теорема 4: Ако ДУ на смутеното движение са такива, че може да се намери знакоопределена функция V, чиято производна $\frac{dV}{dt}$ е знакопостоянна и има знак обратен на знака на функцията на Ляпунов V или е тъждествено равна на нула, то несмутеното движение е устойчиво.

- *Ограничение на приложението*:

1) При даден вид на ДУ могат да се подберат различни знакоопределени функции (функции на Ляпунов);
2) Тези различни варианти дават различни варианти на условията за устойчивост (този метод дава само достатъчно условие за устойчивост)
3) При знакоопределена функция , производната и може да не е знакоопределена.

(в) Теорема за асимптотическа устойчивост.

При ***автономни системи*** – ако за ДУ на смутеното движение може да се намери знакоопределена функция $V(x_1, x_2, ..., x_n)$, чиято производна

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} X_2 + ... + \frac{\partial V}{\partial x_n} X_n ,$$

където $X_k : \ \dfrac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, x_2, ..., x_n)$,

е също ***знакоопределена*** с ***противоположен знак***, т.е.

$$\operatorname{sign} \frac{dV(x_1, x_2, ..., x_n)}{dt} = -\operatorname{sign} V(x_1, x_2, ..., x_n) ,$$

тогава несмутеното движение е ***асимптотически устойчиво***.

(г) Теорема на Ляпунов за неустойчиво движение.

За ***автономна система*** – ако диференциалните уравнения на смутеното движение са такива, че може да се намери ***знакоопределена*** функция $V(x_1, x_2, ..., x_n)$, за която $\frac{dV}{dt}$ е ***знакоопределена*** функция, а самата V в околност на точката на нулеви отклонения на координатите $x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0$ би могла да приема ***еднакъв знак с производната си***, то несмутеното движение е ***неустойчиво***.