20. Приложение на принципа на минимума на Понтрягин за синтез на оптимално управление при критерий минимум разход на енергия.

- Постановка на задачата.
- Извеждане на управляващия закон.
- Особености на анализа на решението.
- Моделираща схема на оптимална по разход на енергия система.

20. Синтез на оптимална по минимум разход на енергия система.

1. Постановка на задачата.

Разглежда се линейна система

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t),$$

при ограничение

$$|u_j| \le 1 \ , \ (j = 1,2,\dots,r).$$

Да се намери оптималното управление $\mathbf{U}^*(t)$, привеждащо системата от начално състояние $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ в крайно състояние $\mathbf{X}(T) = \mathbf{X}_\mathrm{T}$, така че да се минимизира следният функционал, характеризиращ разхода на енергия

$$I = \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{j=1}^{r} u_j^2(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^T \mathbf{U}^\mathrm{T}(t)\mathbf{U}(t)dt .$$

В цял клас задачи, квадратът на управляващата променлива е пропорционален на отдаваната мощност, а интегралът от този квадрат по времето е пропорционален на изразходваната енергия. Например, в електрическите вериги такава променлива може да бъде напрежението или електрическият ток.

2. Извеждане на управляващия закон.

Хамилтонианът е от вида

$$H(\mathbf{P},\mathbf{X},\mathbf{U})=\frac{1}{2}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}+\mathbf{P}^{\mathbf{T}}(\mathbf{AX}+\mathbf{BU})=\frac{1}{2}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}+\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}+\mathbf{U}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}\,. \qquad (1)$$

Получената канонична система е същата като при задачите за оптимално по бързодействие и отпимално по минимум разход на гориво управление. Същите са и трудностите свързани с намирането на началното условие $\mathbf{P}_0$ (3) на спомагателния вектор $\mathbf{P}(t)$ в (2), водещо до определяне на оптималното решение $\mathbf{P}^*(t)$

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}}=-\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}(t); \qquad (2)$$

$$\mathbf{P}(t)=\mathbf{P}_0 e^{-\mathbf{A}^{\mathbf{T}}t}\,. \qquad (3)$$

За минимизирането на (1) трябва да се минимизират членовете, съдържащи $\mathbf{U}(t)$:

$$\frac{1}{2}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{U}(t)+\mathbf{U}(t)^{\mathbf{T}}\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}(t)=\mathbf{U}^{\mathrm{T}}(t)[\frac{1}{2}\mathbf{U}(t)+\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}(t)]\xrightarrow[\mathbf{U}]{}\min\,.$$

20. Синтез на оптимална по минимум разход на енергия система.

Необходимото условие за минимум на (1) във векторна форма е:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}}[\mathbf{U}^{\mathrm{T}}(\frac{1}{2}\mathbf{U} + \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{P})]\Big|_{\mathbf{U}=\mathbf{U}^*} = 0, \qquad (4)$$

а в скаларна форма, след полагането $\mathbf{Q}^*(t) = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}^*(t)$, (4) е:

$$\frac{\partial}{\partial u_j}[\frac{1}{2}u_j^2 + u_j q_j]\Big|_{u_j=u_j^*} = u_j^* + q_j^* = 0, \quad j = 1,2,...,r, \qquad (5)$$

където q_j^* е j-тата компонента на $\mathbf{Q}^*(t)$.

Разглеждат се следните два случая:

1. Ако $|q_j| \le 1$, то от (5) следва $u_j^* = -q_j^*$, ;
2. Ако $|q_j| > 1$, то от ограничението на управлението $|u_j| \le 1$, $(j = 1,2,...,r)$, следва невъзможността на (5). В този случай Хамилтонианът получава най-малката си стойност при $u_j^* = -\mathrm{sign}\, q_j^*, \quad j = 1,2,...,r$.

Законът за управление може да се запише във следната форма

$$u_j^*(t) = -\mathrm{sat}\, q_j^*(t), \quad j = 1,2,...,r, \qquad (6)$$

а когато *скаларната функция с насищане* sat, се замени с векторна функция, то (6) добива вида

$$\mathbf{U}^*(t) = -\mathbf{satQ}^*(t).$$

20. Синтез на оптимална по минимум разход на енергия система.

Необходимото условие за минимум на (1) във векторна форма е:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}}[\mathbf{U}^{\mathrm{T}}(\frac{1}{2}\mathbf{U} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P})]\Big|_{\mathbf{U}=\mathbf{U}^*} = 0, \qquad (4)$$

а в скаларна форма, след полагането $\mathbf{Q}^*(t) = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}^*(t)$, (4) е:

$$\frac{\partial}{\partial u_j}[\frac{1}{2}u_j^2 + u_j q_j]\Big|_{u_j=u_j^*} = u_j^* + q_j^* = 0, \quad j = 1,2,...,r, \qquad (5)$$

където q_j^* е j-тата компонента на $\mathbf{Q}^*(t)$.

Разглеждат се следните два случая:

1. Ако $|q_j| \le 1$, то от (5) следва $u_j^* = -q_j^*$, ;
2. Ако $|q_j| > 1$, то от ограничението на управлението $|u_j| \le 1$, $(j = 1,2,...,r)$, следва невъзможността на (5). В този случай Хамилтонианът получава най-малката си стойност при $u_j^* = -\mathrm{sign}\, q_j^*, \quad j = 1,2,...,r$.

Законът за управление може да се запише във следната форма

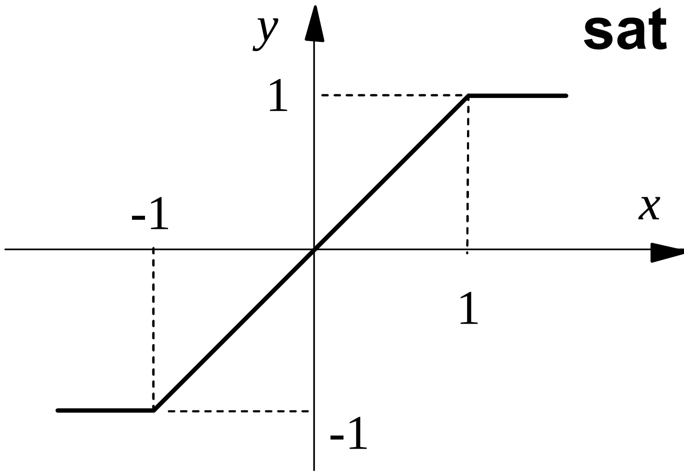
$$u_j^*(t) = -\mathrm{sat}\, q_j^*(t), \quad j = 1,2,...,r, \qquad (6)$$

а когато *скаларната функция с насищане* sat, се замени с векторна функция, то (6) добива вида

$$\mathbf{U}^*(t) = -\mathbf{sat}\mathbf{Q}^*(t).$$

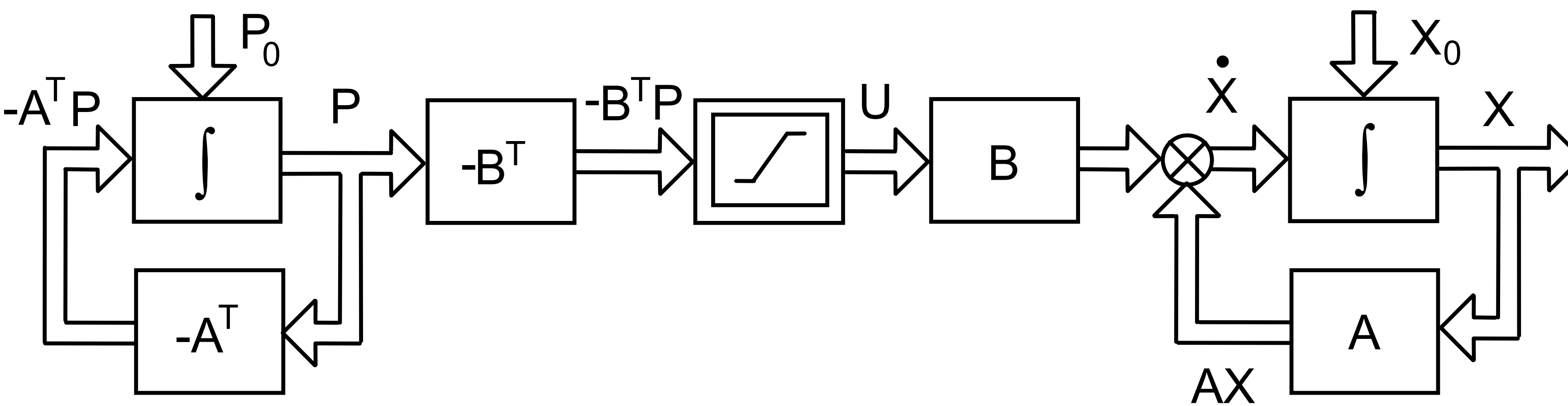
20. Синтез на оптимална по минимум разход на енергия система.

sat функция



$$y = \operatorname{sat} x = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ x, & |x| \le 1 \\ -1, & x < -1 \end{cases}$$

3. Моделираща схема на отворена система оптимална по разход на енергия



Недостатъците на решението на задачата за оптимално по разход на енергия управление са същите като при задачите за оптимално: по бързодействие и по разход на гориво управление.