7. Характеристики на типови динамични звена и САУ

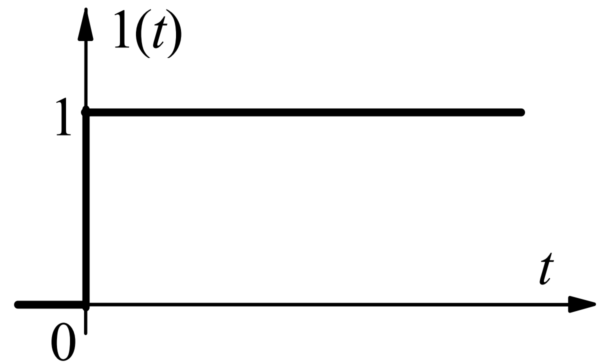
1. Времеви характеристики

Промяната на изходния сигнал на едно звено или система при подаване на типов входен сигнал се нарича ***характеристика*** на САУ.

1.1. *Типови входни въздействия*

(а) *Единична стъпална функция*

$$1(t)=\begin{cases}0, & \text{при } t<0\\ 1, & \text{при } t\geq 0\end{cases}$$

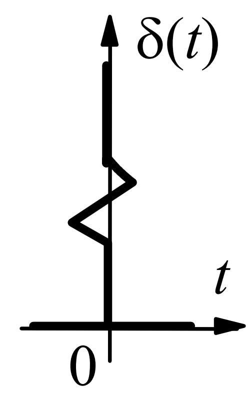


(б) "*Делта функция*"

(единична импулсна функция)

$$\delta(t)=\begin{cases}0, & \text{при } t\neq 0\\ \infty, & \text{при } t=0\end{cases}$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(t)dt=1, \quad \text{при } \varepsilon>0$$



1.2. *Преходна функция (характеристика)*.

Реакцията на системата при входен сигнал - единично стъпално въздействие и при нулеви начални условия се нарича ***преходна функция*** $h(t)$.

Изчислява се чрез:

(а) решаване на диференциалното уравнение на системата при $u = 1(t)$ и нулеви начални условия;

(б) обратното преобразование на Лаплас:

$$Y(p) = W(p)U(p); \qquad U(p) = \frac{1}{p} \qquad (1(t) \risingdotseq \frac{1}{p})$$

$$h(t) = L^{-1}\left\{W(p)\frac{1}{p}\right\}$$

1.3. *Тегловна функция (характеристика)*.

Реакцията на системата при входен сигнал “делта функция” и при нулеви начални условия се нарича ***тегловна функция*** (*импулсна преходна функция*) $w(t)$.

Изчислява се чрез обратното преобразование на Лаплас:

$$Y(p) = W(p)U(p); \quad U(p) = 1 \quad (\delta(t) \doteqdot 1)$$

$$w(t) = L^{-1}\{W(p)\}$$

Връзка между *h(t)* и *w(t)*:

$$h(t) = \int_0^t w(\tau)d\tau; \qquad w(t) = \frac{dh(t)}{dt}$$

Връзка между *y(t)* и *u(t)* – чрез интеграла на Дюамел:

$$y(t) = \int_0^t w(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

2. Честотни характеристики – Реакцията на изхода на системата при типово входно въздействие – синусоидален сигнал:

$$u(t) = u_M \sin \omega t$$

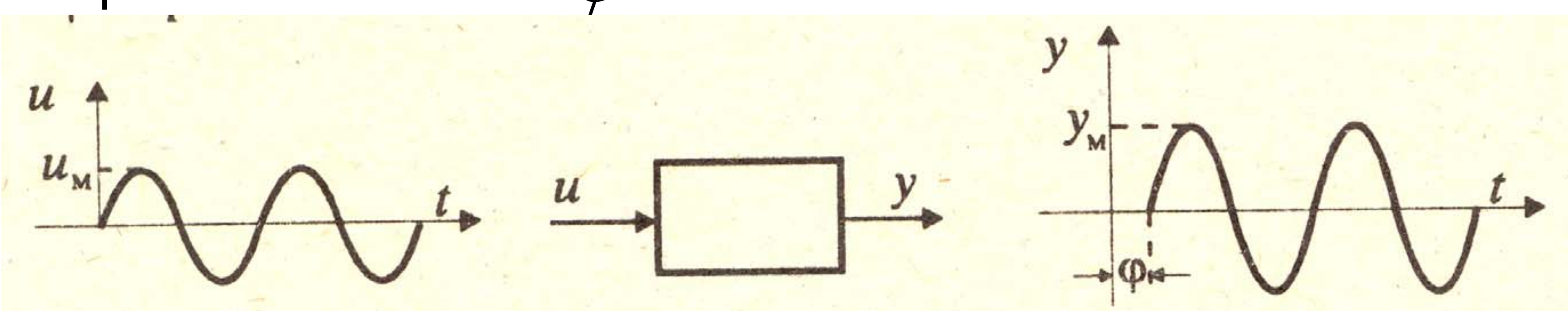
За линейни системи, описвани с уравнение

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n y = b_0 \frac{d^m u}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \ldots + b_m u$$

Изходният сигнал е:

$$y(t) = y_M \sin(\omega t + \varphi)$$

т.е., със същата честота ω, но с друга амплитуда y_M и с фазово изместване φ .



2.1. Амплитудно-честотна, фазово-честотна и амплитудно-фазово-честотна характеристики

Амплитудно-честотна характеристика (*АЧХ*, $A(\omega)$) - отношението на амплитудата на изходния сигнал към амплитудата на входния:

$$A(\omega)=\frac{y_M}{x_M}$$

Фазово-честотна характеристика (*ФЧХ*, $\varphi(\omega)$) – фазовото изместване на изходния сигнал по отношение на входния.

Комплексна форма на запис на входния и изходния сигнал:

$$u=u_M e^{j\omega t};\qquad y=y_M e^{j(\omega t+\varphi)}$$

Отношението на тези два сигнала се нарича ***амплитудно-фазово-честотна характеристика*** (**АФЧХ**):

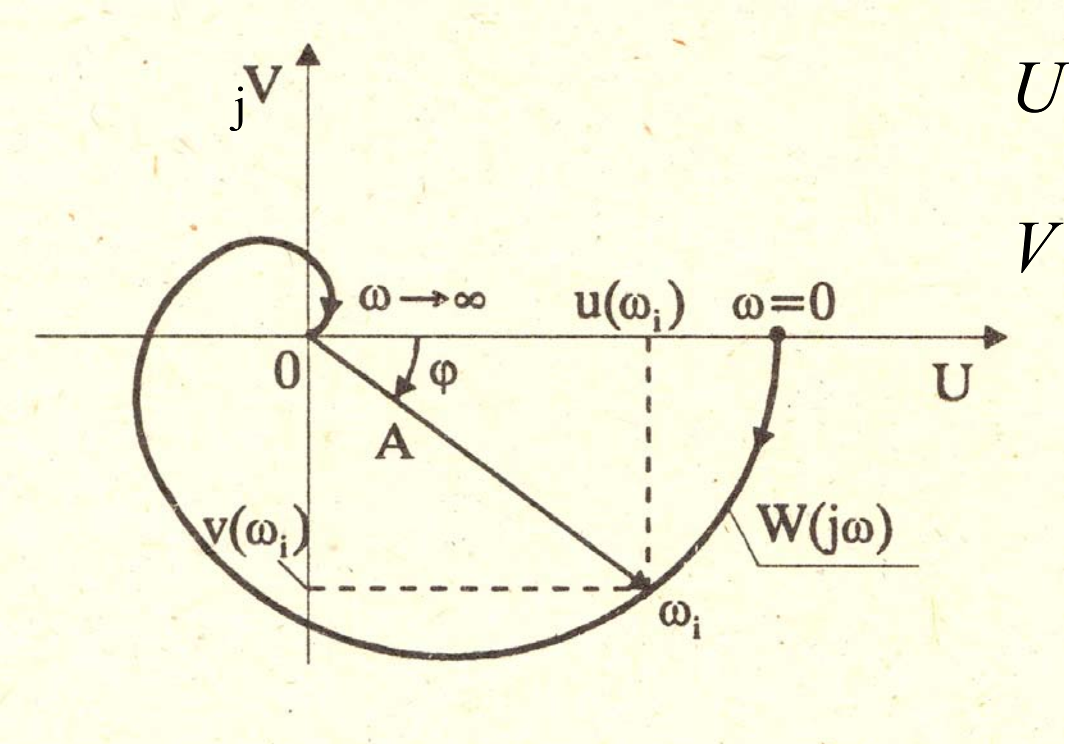
$$W(j\omega)=\frac{y_M e^{j(\omega t+\varphi)}}{u_M e^{j\omega t}}=\frac{y_M}{u_M}e^{j\varphi}=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

Получаване на АФЧХ от предавателната функция на системата: чрез формална замяна на p с $j\omega$.

$$W(j\omega) = \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_n}$$

2.2. Реална и имагинерна честотна характеристики

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega)$$



$U(\omega)$ - реална честотна характеристики (РЧХ)

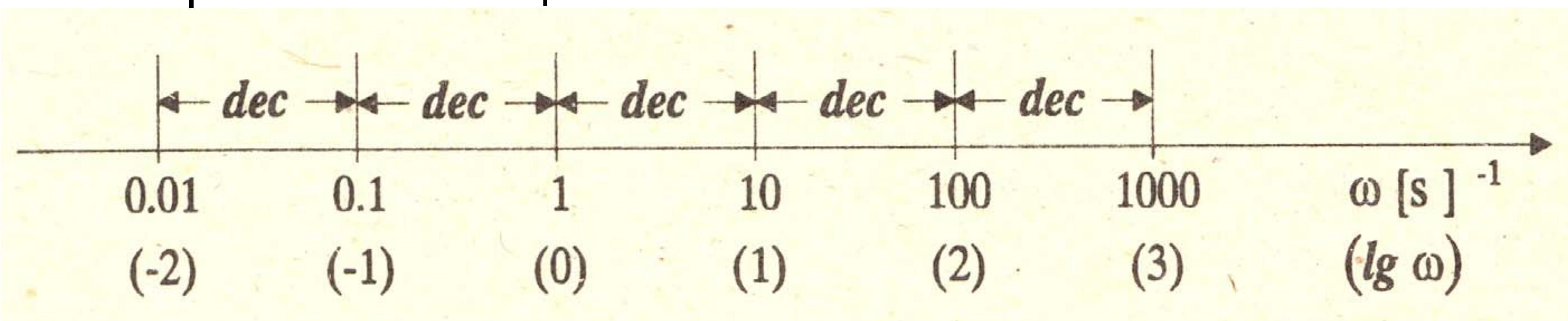
$V(\omega)$ - имагинерна честотна характеристики (ИЧХ)

$$U(\omega) = A(\omega)\cos\varphi(\omega)$$

$$V(\omega) = A(\omega)\sin\varphi(\omega)$$

$$A(\omega)=\sqrt{U^2(\omega)+V^2(\omega)}\ ;\quad \varphi(\omega)=arctg\,\frac{V(\omega)}{U(\omega)}\,.$$

2.3. Логаритмични честотни характеристики – строят се в логаритмичен мащаб по оста ω.



Логаритмична амплитудно честотна *характеристика* (ЛАЧХ):

$$L(\omega)=20\lg A(\omega),\quad \mathrm{dB}$$

Логаритмична фазово честотна *характеристика* (ЛФЧХ):

$\varphi(\omega)$, построена в логаритмичен мащаб по оста ω

Мерната единица “Бел” – [B], наречена в чест на откривателя на телефона Bell, е въведена първоначално като десетичен логаритъм от отношението на мощностите *M* на двата сигнала *y* и *u*:

$$\lg\frac{M_y}{M_u}.$$

“Децибел” е $\frac{1}{10}$ от неговата стойност, т.е. мерната единица на

$$10\lg\frac{M_y}{M_u} \text{ е [dB] .}$$

За голяма част от приложенията мощността е пропорционална на квадрата на амплитудата, т.е.

$$\frac{M_y}{M_u} = A^2.$$

Оттук се получава, че $L = 10\lg A^2 = 20\lg A$ се измерва в децибели.

8. Типови динамични звена. Апериодично и пропорционално звено

1. Апериодично звено

ДУ: $$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=ku(t),$$

k - предавателен коефициент,

$T\,[s]$ - времеконстанта.

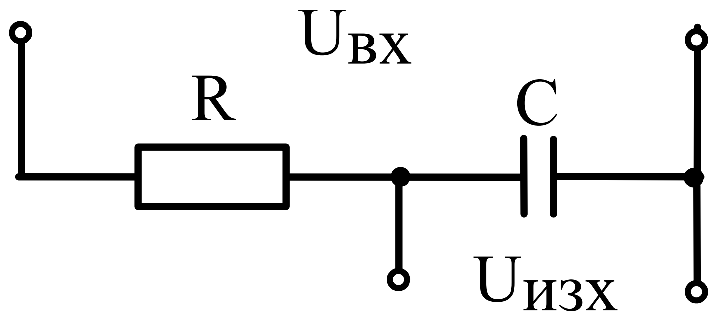
ПФ: $$TpY(p)+Y(p)=kU(p)$$

$$(Tp+1)Y(p)=kU(p)$$

$$W(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{k}{Tp+1}$$

8. Апериодично и пропорционално звено

Пример:



$$W(p)=\frac{U_{\text{изх}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)}=\frac{\frac{1}{pC}}{R+\frac{1}{pC}}=\frac{1}{RCp+1}=\frac{1}{Tp+1}$$

ПХ: Получава се от (1) ДУ при $u(t)=1(t)$ и нулеви начални условия или чрез (2) обратното преобразование на Лаплас:

$$h(t)=L^{-1}\left\{W(p)\frac{1}{p}\right\}$$

8. Апериодично и пропорционално звено

$$\frac{W(p)}{p} = \frac{k}{(Tp+1)p} = \frac{k}{T(p+\frac{1}{T})p} = \frac{\frac{k}{T}}{(p+\frac{1}{T})p} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+\frac{1}{T}} =$$

$$= \frac{Ap + A\frac{1}{T} + Bp}{p(p+\frac{1}{T})} = \frac{p(A+B) + A\frac{1}{T}}{p(p+\frac{1}{T})}$$

p: $A + B = 0 \qquad \rightarrow B = -A$

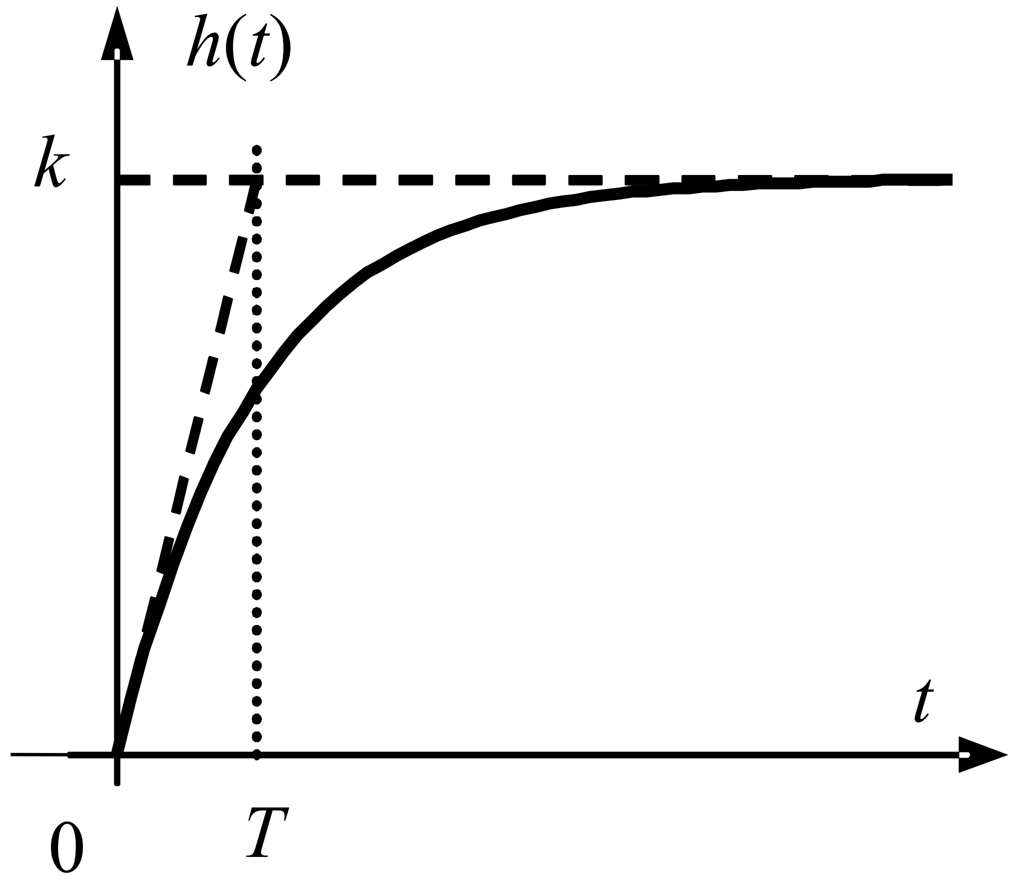
const: $A\frac{1}{T} = \frac{k}{T} \qquad \rightarrow A = k \qquad B = -k$

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{k}{p} - \frac{k}{p+\frac{1}{T}}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{k}{p}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{k}{p+\frac{1}{T}}\right\} =$$

$$= k1(t) - ke^{-\frac{1}{T}t} = k(1-e^{-\frac{1}{T}t})$$

8. Апериодично и пропорционално звено

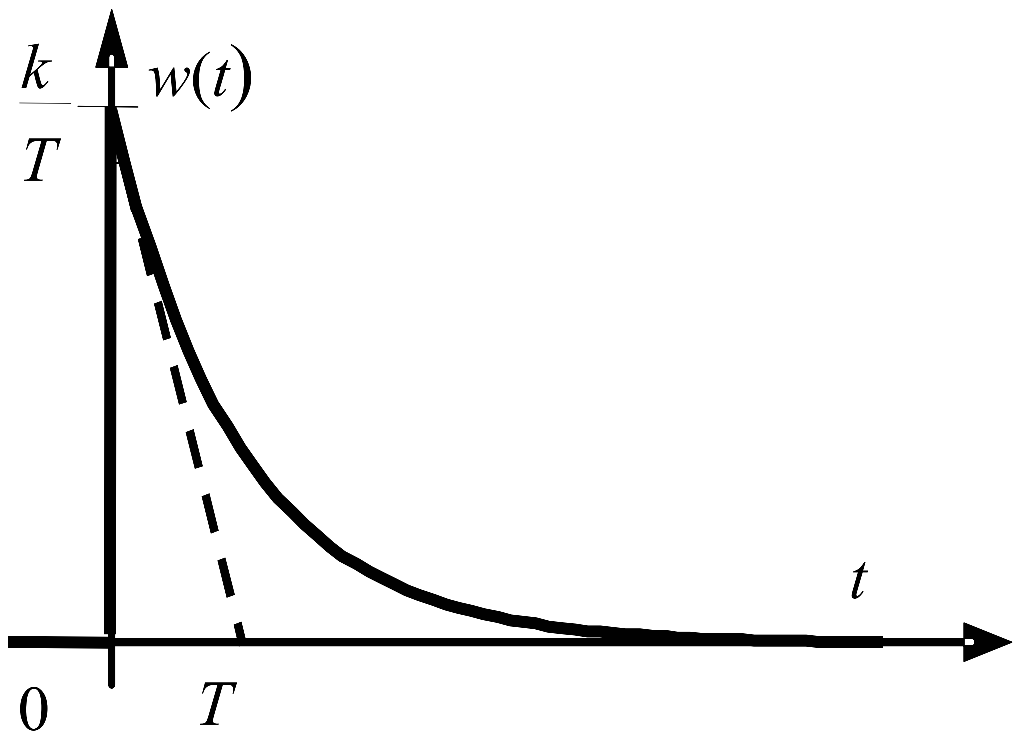
ПХ: $$h(t) = k(1 - e^{-\frac{1}{T}t})$$



8. Апериодично и пропорционално звено

ТХ: $u(t) = \delta(t)$

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{k(1 - e^{-\frac{1}{T}t})\right\} = \frac{k}{T}e^{-\frac{1}{T}t}$$



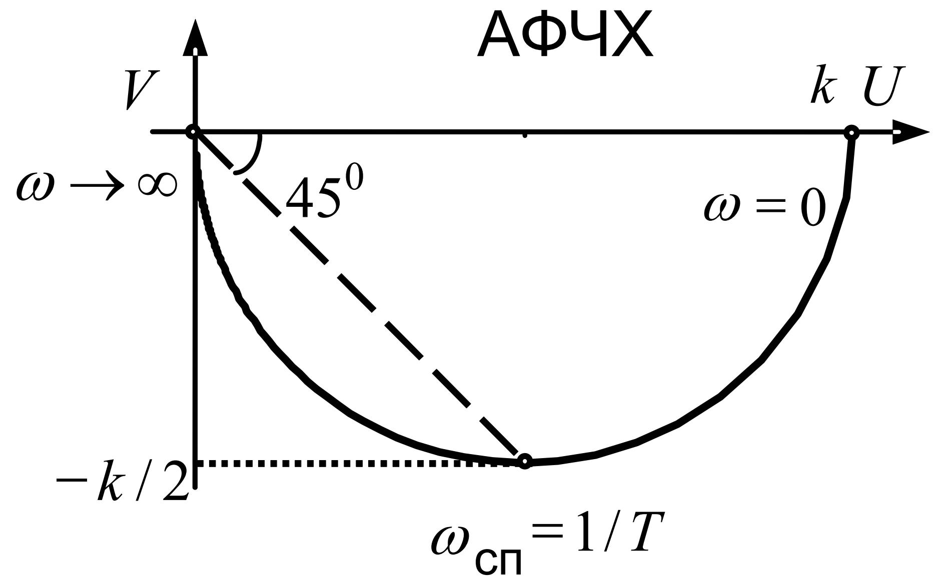
8. Апериодично и пропорционално звено

ЧПФ: $$W(j\omega)=\frac{k}{1+j\omega T}\cdot\frac{1-j\omega T}{1-j\omega T}=\frac{k}{1+\omega^2T^2}-j\frac{k\omega T}{1+\omega^2T^2}$$

РЧФ: $$U(\omega)=\operatorname{Re}W(j\omega)=\frac{k}{1+\omega^2T^2}$$

ИЧФ: $$V(\omega)=\operatorname{Im}W(j\omega)=-\frac{k\omega T}{1+\omega^2T^2}$$

ω	0	1/T	∞
U	k	k/2	0
V	0	-k/2	0

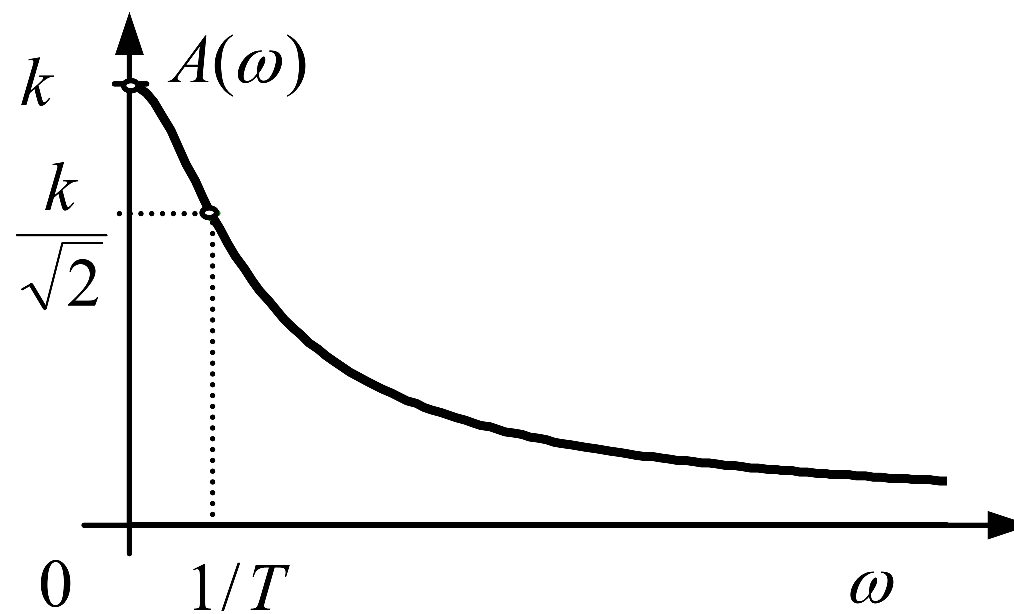


8. Апериодично и пропорционално звено

АЧХ: $$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \sqrt{\frac{k^2}{(1+\omega^2T^2)^2} + \frac{(-k\omega T)^2}{(1+\omega^2T^2)^2}} =$$

$$= \frac{k}{1+\omega^2T^2}\sqrt{1+\omega^2T^2} = \frac{k}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}$$

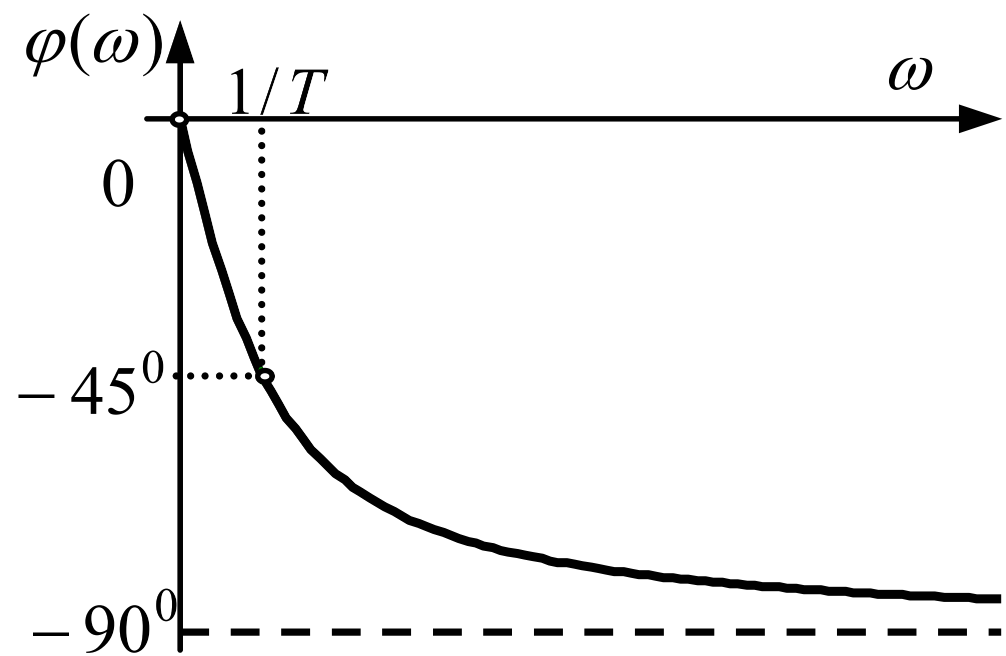
ω	0	1/T	∞
A	k	$k/\sqrt{2}$	0



8. Апериодично и пропорционално звено

ФЧХ: $$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \operatorname{arctg}\frac{\dfrac{-k\omega T}{1+\omega^2T^2}}{\dfrac{k}{1+\omega^2T^2}} = -\operatorname{arctg}\omega T$$

ω	0	1/T	∞
φ	0	–π/4	–π/2



8. Апериодично и пропорционално звено

ЛАЧХ: $L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg \dfrac{k}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} = 20\lg k - 20\lg \sqrt{1+\omega^2 T^2}$

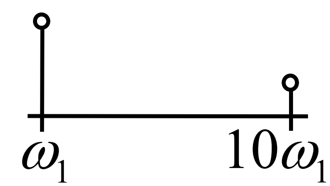
НЧ: $\omega << \dfrac{1}{T};\ \omega T << 1,$ пренебрегва се $\omega^2 T^2$:

$$L_{НЧ}(\omega) = 20\lg k$$

ВЧ: $\omega >> \dfrac{1}{T};\ \omega T >> 1,$ пренебрегва се 1:

$$L_{ВЧ}(\omega) = 20\lg k - 20\lg \omega T = 20\lg \frac{k}{T} - 20\lg \omega$$

$\dfrac{\Delta L_{ВЧ}}{\Delta \omega} = ?$ Нека $\Delta\omega = 1\,\mathrm{dec}$



$$L_{ВЧ}(\omega_1) = 20\lg \frac{k}{T} - 20\lg \omega_1$$

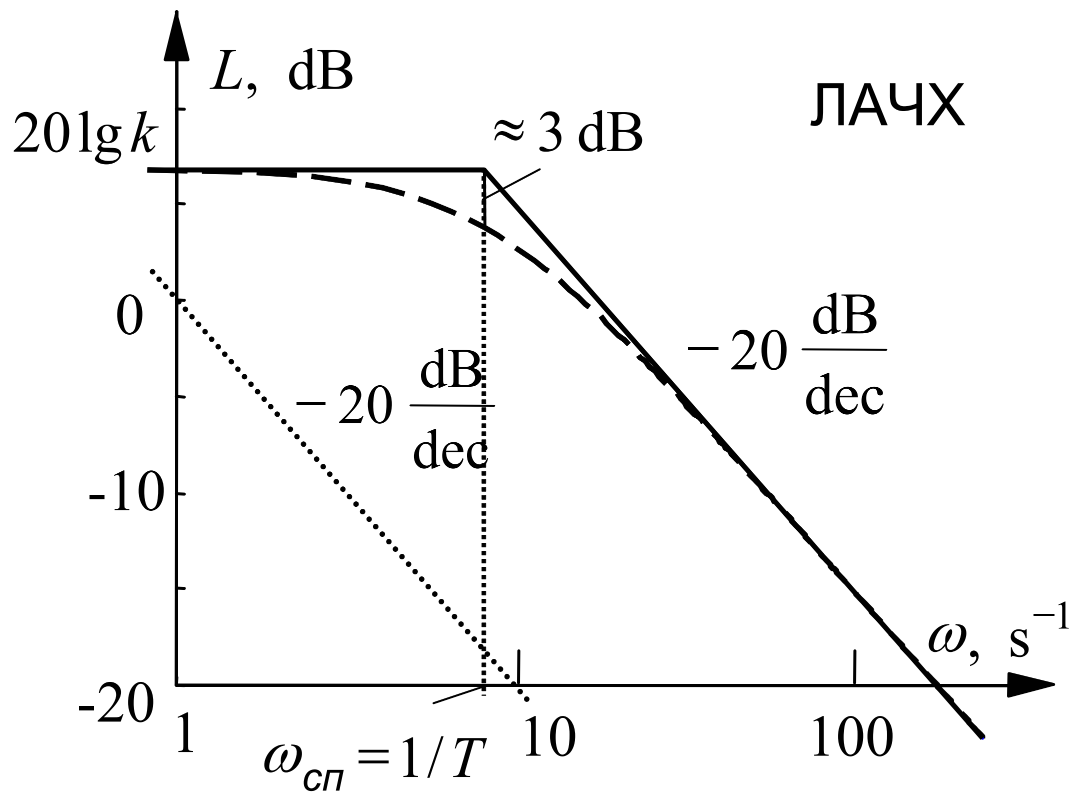
$$L_{ВЧ}(10\omega_1) = 20\lg \frac{k}{T} - 20\lg 10\omega_1$$

$$\Delta L_{ВЧ} = L_{ВЧ}(10\omega_1) - L_{ВЧ}(\omega_1) =$$

$$= 20\lg \frac{k}{T} - 20\lg 10\omega_1 - 20\lg \frac{k}{T} + 20\lg \omega_1 = -20\lg 10 = -20\,\mathrm{dB}$$

8. Апериодично и пропорционално звено

$$\frac{\Delta L_{BЧ}}{\Delta\omega} = -20\,\frac{\text{dB}}{\text{dec}}; \qquad \omega_{\text{сп}} = 1/T, \quad L_{BЧ}(1/T) = 20\lg k.$$



$$\Delta L_{\max} = \Delta L(\omega_{cn}) = L_a(\omega_{cn}) - L(\omega_{cn}) = 20\lg k - 20\lg\frac{k}{\sqrt{1+\omega_{cn}{}^2 T^2}} =$$

$$= 20\lg k - 20\lg k + 20\lg\sqrt{1+(1/T)^2 T^2} = 20\lg\sqrt{2} \approx 3$$

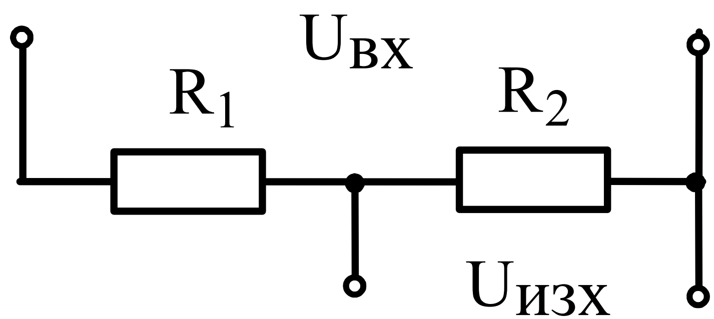
2. Пропорционално звено

ДУ: $y(t) = ku(t),$ k - предавателен коефициент.

ПФ: $Y(p) = kU(p)$

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = k$$

Пример:

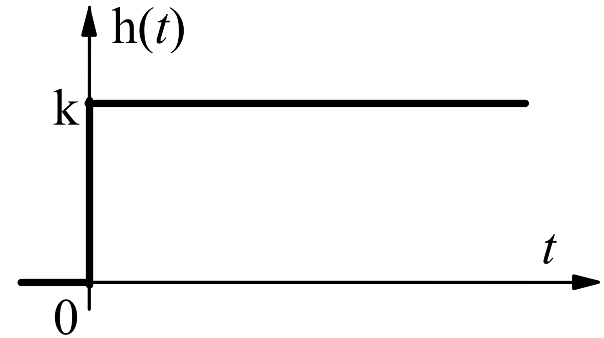


$$W(p) = \frac{U_{\text{изх}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = k$$

8. Апериодично и пропорционално звено

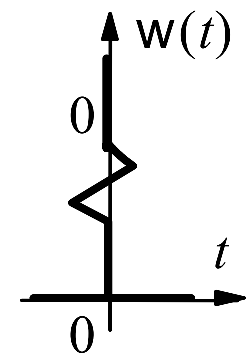
ПХ: $u(t) = 1(t)$

$h(t) = k1(t)$



ТХ: $u(t) = \delta(t)$

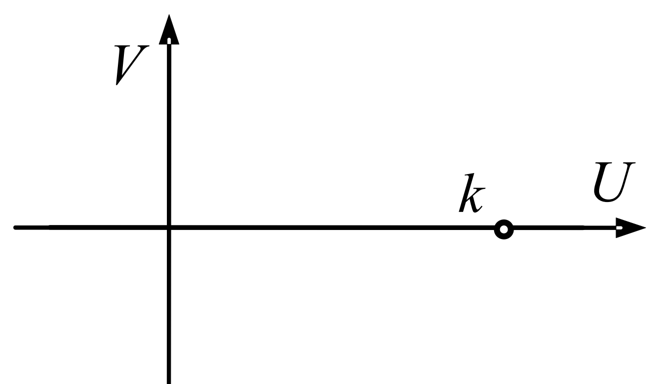
$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = k\delta(t)$$



ЧПФ: (АФЧХ) $W(j\omega) = k$

РЧФ: $U(\omega) = k$

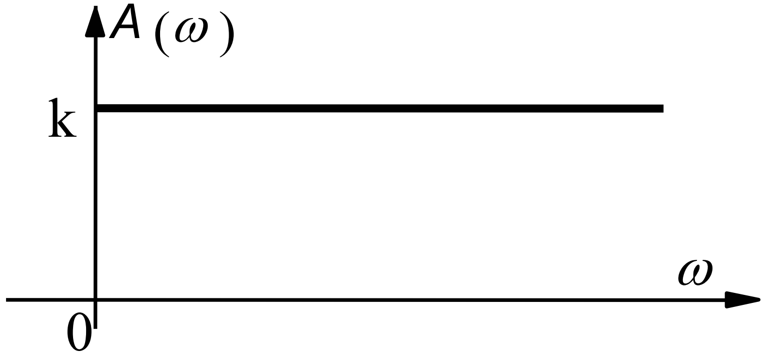
ИЧФ: $V(\omega) = 0$



8. Апериодично и пропорционално звено

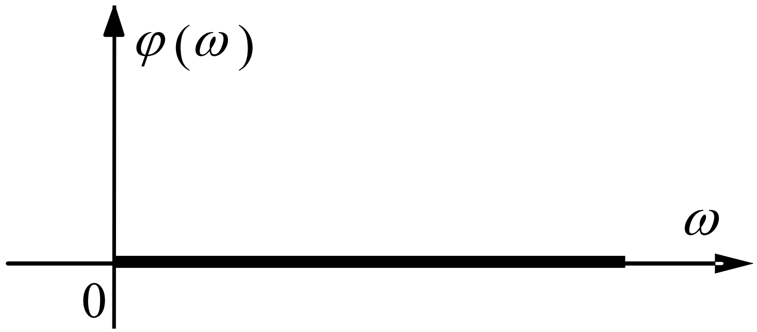
АЧХ:

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = k$$



ФЧХ:

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \mathrm{arctg}\frac{0}{k} = 0$$



ЛАЧХ:

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg k$$