ДИАНА ЦАНКОВА

СЪВРЕМЕННА ТЕОРИЯ НА УПРАВЛЕНИЕТО

Част 2

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ЧРЕЗ ОБРАТНА ВРЪЗКА

Теория и решени задачи

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ
ФИЛИАЛ ПЛОВДИВ

2003

Учебното помагало съдържа теоретични сведения и решени задачи и е съобразено с учебната програма на дисциплината "Съвременна теория на управлението", включена в магистърския план на специалността "Автоматика, информационна и управляваща техника" в Технически университет София, филиал Пловдив. То е предназначено за използуване от студентите при лабораторните упражнения, а също и за целите на дипломното проектиране, при теми използуващи подхода на линеаризацията с обратна връзка за синтез на нелинейно управление.

Ръководството може да се използува и от студенти от други висши учебни заведения, както и от специалисти, проявяващи интерес в дадената област.

ISBN: 954-8779-49-8 (ч.2)

Отпечатано в Печатната база при ТУ – София, Филиал Пловдив

СЪДЪРЖАНИЕ

П Р Е Д Г О В О Р

Настоящето учебно помагало е част от учебния материал по дисциплината "Съвременна теория на управлението", включена в магистърския план на специалността "Автоматика, информационна и управляваща техника" в Технически университет, филиал Пловдив.

В учебното помагало е разгледана линеаризацията чрез обратна връзка, като съвременен подход за синтез на нелинейно управление. Темите са представени с теоретични сведения и решени примери. Линеаризацията е приложена към SISO и MIMO системи, започнато е с интуитивен подход към проблема, а след това е разгледана унифицирана методика, използваща средства от диференциалната геометрия. Една от темите е посветена на този специфичен математичен апарат. Теоретичният материал е поднесен така, че учебното помагало да има относителна самостоятелност, което се налага поради липсата на подходяща литература на български език по проблема. Използваните литературни източници са на английски език и са популярни учебници в университети и институти в чужбина.

Авторът е благодарен на рецензентите доц. д-р Ч. Дамянов и доц. д-р В. Петров за направените препоръки. Като всяко първо издание и това, вероятно, не е лишено от пропуски, поради което ще бъдат приети с благодарност всички отправени забележки за подобряване на съдържанието и оформлението му.

Май, 2003 г. От автора

Упражнение № 1

Интуитивен подход към линеаризацията чрез обратна връзка. Линеаризация "вход-състояние"

Целта на упражнението е запознаване най-общо с идеите на точната линеаризация чрез обратна връзка, с един интуитивен подход към линеаризацията "вход-състояние", без да се използва унифициран математичен алгоритъм за решаването на проблема.

1. Теоретични сведения

Въведение. Линеаризацията чрез обратна връзка (feedback linearization) е подход за синтезиране на нелинейно управление. Основната идея е алгебрично да се преобразува динамиката на една нелинейна система в линейна (пълно или частично), така че да могат да се използват техники от управлението на линейни системи.

Линеаризацията чрез обратна връзка се прилага към клас нелинейни системи, които могат да се представят в следната *съпровождаща* форма или *управляема канонична* форма

$$x^{(n)} = f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u, \tag{1.1}$$

където u е скаларен управляващ вход, x е скаларен изход, $\mathbf{x} = [x, \dot{x}, ..., x^{(n-1)}]^{\mathrm{T}}$ е вектор на състоянието, а $f(\mathbf{x})$ е нелинейна функция на състоянията. В тази форма няма производни на входния сигнал u. Уравнение (1.1) може да се представи по следния начин

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dots \\ x_n \\ f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

Ако управлението се избере във вида

$$u = \frac{1}{b}(v - f), \tag{1.3}$$

където $b \neq 0$, а v е вход на линеаризираната система, нелинейностите се отстраняват и се получава следната зависимост

$$x^{(n)} = v. \tag{1.4}$$

Управляващият закон v може да се избере като

$$v = -k_1 x - k_2 \dot{x} - \ldots - k_n x^{(n-1)} \tag{1.5}$$

с коефициенти k_i, $i = 1,2,...,n$ такива, че затворената система

$$x^{(n)} + k_n x^{(n-1)} + \ldots + k_1 x = 0 \tag{1.6}$$

да бъде устойчива и да притежава определени показатели на качеството. В задачите за следене на зададен желан изход $x_d(t)$ управляващият закон е

$$v = x_d^{(n)} - k_1 e - k_2 \dot{e} - \ldots - k_n e^{(n-1)}, \tag{1.7}$$

където $e = x(t) - x_d(t)$ е грешката в следенето, която води до експоненциално сходящо следене при подходящо избрани k_i, $i = 1,2,...,n$. Подобни резултати могат да се получат и ако скаларът x се замести с вектор, а скаларът b - с инвертируема квадратна матрица.

В уравнение (1.1) се предполага, че динамиката на системата е линейна по отношение на управляващия вход u. Ако това условие не е изпълнено, подходът може лесно да бъде разширен до случая, когато u се замества с обратима функция $g(u)$. Например в системи, включващи управление на поток чрез вентил, динамиката може да зависи от u^4, вместо от u (u в случая е диаметър на отваряне на вентила). Тогава чрез полагане $w = u^4$, модифицираният вход w може да се синтезира на базата на разгледаната вече процедура, а след това да се изчисли входът u чрез обратната трансформация $u = w^{1/4}$.

Идеята за линеаризация чрез обратна връзка е демонстрирана със следния пример.

Пример 1.1. *[3] Разглежда се управлението на нивото h на течност в резервоар, което трябва да се поддържа на определено желано ниво h_d. Управляващият вход u е потокът на течността към резервоара, а началното ниво е h_o.*

Моделът на динамиката на резервоара е

$$\frac{d}{dt}[\int_0^h A(h)dh] = u(t) - a\sqrt{2gh}\,, \qquad (1.8)$$

където $A(h)$ и a са съответно напречното сечение на резервоара и на изходната тръба. Ако началното ниво h_o се различава твърде много от желаното h_d, управлението на h трябва да отчита нелинейностите на системата.

Динамиката (1.8) може да бъде записана така

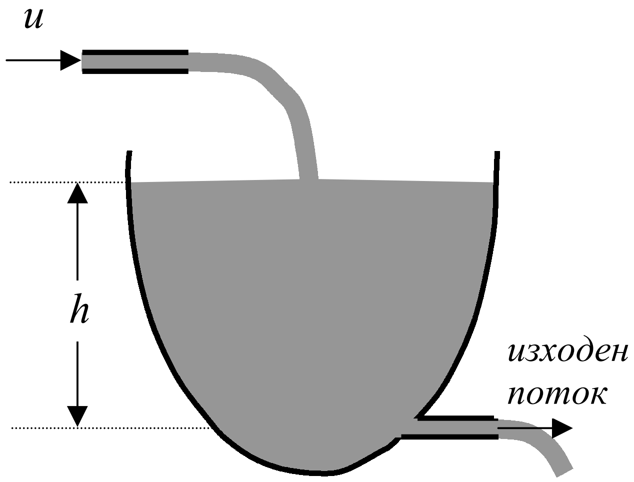
$$A(h)\dot{h} = u - a\sqrt{2gh}\,. \qquad (1.9)$$

Управляващият вход $u(t)$ е избран по следния начин

$$u(t) = a\sqrt{2gh} + Av, \qquad (1.10)$$

където v е "еквивалентен вход", който трябва да се определи. В резултат се получава линейна динамика

$$\dot{h} = v\,. \qquad (1.11)$$



Фиг.1.1. Управление на нивото на течност в резервоар

Ако v се избере така, че

$$v = -\alpha\tilde{h}\;, \qquad (1.12)$$

където $\tilde{h} = h(t) - h_d$ е грешка на нивото, α е положителна константа, се получава следната затворена система

$$\dot{h} + \alpha\tilde{h} = 0\,. \qquad (1.13)$$

Това означава че $\tilde{h}(t) \to 0$ при $t \to \infty$. На базата на (1.10) и (1.12) реалният входен поток се определя чрез нелинейния управляващ закон

$$u(t) = a\sqrt{2gh} - A\alpha\tilde{h} \,. \tag{1.14}$$

В управляващия закон (1.14) първата част от дясната страна се използува да осигури изходния поток $a\sqrt{2gh}$, докато втората част служи за повишаване на нивото на течността според желаната линейна динамика (1.13).

Ако желаното ниво е една предварително известна функция на времето $h_d(t)$, еквивалентният вход v може да бъде избран като

$$v = \dot{h}_d(t) - \alpha\tilde{h} \,, \tag{1.15}$$

така че $\tilde{h}(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Линеаризация "вход-състояние". Разглежда се синтезът на управление u за нелинейна система с един вход

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \,. \tag{1.16}$$

Линеаризацията от типа "вход-състояние" (input-state linearization) решава този проблем на два етапа. Първо се намира преобразуване на състоянието $\mathbf{z} = \mathbf{w}(\mathbf{x})$ и преобразуване на входа $u = g(\mathbf{x}, v)$, така че динамиката на нелинейната система да се трансформира в еквивалентна динамика на линейна система, в познатата форма $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}v$. След това се използуват стандартни линейни техники (например синтез по желани полюси) за синтезиране на v.

За илюстриране на подхода ще бъде използуван следният пример.

Пример 1.2. Разглежда се системата

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + ax_2 + \sin x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \cos x_1 + u \cos 2x_1 \end{aligned} \,. \tag{1.17}$$

Следвайки начина на линеаризация, демонстриран в *Пример 1.1* се стига до непреодолима трудност: нелинейността в първото уравнение не може директно да бъде отстранена чрез управляващия вход u. Поради това се разглежда нов набор от координати на състоянието, така че чрез промяната на базиса в пространството на състоянията да се линеаризира първото уравнение. Новите координати на състоянието са

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= a x_2 + \sin x_1 \end{aligned}. \tag{1.18}$$

При прехода към новия базис в пространството на състоянията, равновесното състояние – точката (0,0) не се променя. Обратният преход към първоначалните координати на състоянието също е възможен. За тази цел от (1.18) се изразяват x_1 и x_2

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 \\ x_2 &= (z_2 - \sin z_1)/a \end{aligned} \tag{1.19}$$

и заместването им в (1.17). Първото уравнение на (1.17) добива вида

$$\dot{z}_1 = -2z_1 + z_2. \tag{1.20}$$

По-нататък двете страни на второто уравнение на (1.17) се преработват както следва: За лявата страна се получава

$$\dot{x}_2 \Leftarrow \frac{d}{dt}((z_2 - \sin z_1)/a) = \frac{1}{a}(\dot{z}_2 - \dot{z}_1 \cos z_1) = \frac{1}{a}[\dot{z}_2 - (-2z_1 + z_2)\cos z_1]. \tag{1.21}$$

Аналогично се преобразува и дясната страна

$$-x_2 \cos x_1 + u \cos 2x_1 \Leftarrow -\frac{1}{a}(z_2 - \sin z_1)\cos z_1 + u \cos 2z_1. \tag{1.22}$$

Приравняват се десните страни на (1.21) и (1.22) и се изразява $\dot{z}_2$:

$$\frac{1}{a}[\dot{z}_2 - (-2z_1 + z_2)\cos z_1] = -\frac{1}{a}(z_2 - \sin z_1)\cos z_1 + u \cos 2z_1$$

$$\dot{z}_2 = -2z_1 \cos z_1 + \sin z_1 \cos z_1 + au \cos 2z_1 \tag{1.23}$$

Системата (1.17) в новия базис е

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -2z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= -2z_1 \cos z_1 + \cos z_1 \sin z_1 + au \cos(2z_1) \end{aligned}. \tag{1.24}$$

Първото уравнение на (1.24) вече е линейно, а нелинейността на второто може да се отстрани чрез управляващ закон от вида

$$u = \frac{1}{a\cos(2z_1)}(v - \cos z_1 \sin z_1 + 2z_1 \cos z_1). \tag{1.25}$$

След заместване на (1.25) в (1.24) се получава линейна зависимост между входа и състоянието на системата

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -2z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= v \end{aligned} \; . \tag{1.26}$$

Така чрез преобразуване на променливите на състоянието (1.18) и преобразуването на входа (1.25), изходната задача за стабилизиране на нелинейната система (1.17) използуваща първоначалния управляващ вход u се трансформира в задача за стабилизиране на новата динамика – системата (1.26), използуваща новия вход v.

Тъй като новата динамична система е линейна и управляема, добре известно е, че управляващият закон - линейната обратна връзка по състояние

$$v = -k_1 z_1 - k_2 z_2, \tag{1.27}$$

може да разположи полюсите на системата навсякъде в комплексната равнина чрез подходящ избор на коефициентите (k_1, k_2) на обратната връзка. Например, избира се

$$v = -2z_2, \tag{1.28}$$

водещо до устойчива затворена система

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -2z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= -2z_2 \end{aligned} \; , \tag{1.29}$$

чиито полюси са и двата разположени в точката -2 на реалната ос. Това лесно може да се провери. Решението на второто уравнение на (1.29) е

$$z_2(t) = C_2 e^{-2t} \; ,$$

където C_2 е интеграционна константа. След заместване на $z_2(t)$ в първото уравнение на (1.29) се получава:

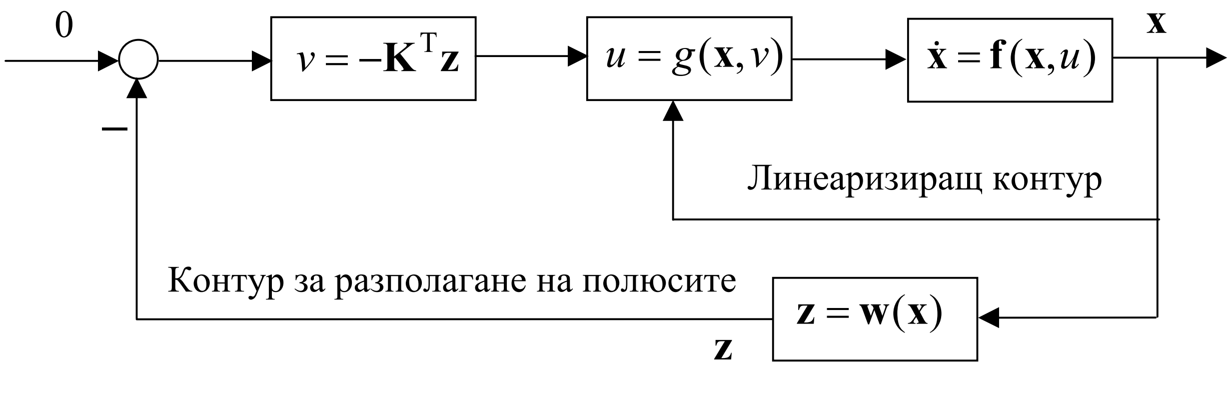
$$\dot{z}_1 + 2z_1 = C_2 e^{-2t};$$
$$\dot{z}_1 + 2z_1 = 0; \;\; \lambda + 2 = 0, \; \lambda = -2.$$

Следователно затворената система притежава двукратен реален полюс равен на -2.

Така синтезираният управляващ закон (1.28) за линеаризираната система се замества в линеаризиращата обратна връзка (1.25). При отчитане на (1.18), по отношение на първоначалните координати на състоянието x_1 и x_2 първоначалният управляващ вход u се представя във вида

$$u = \frac{1}{\cos 2x_1}(-2ax_2 - 2\sin x_1 - \cos x_1 \sin x_1 + 2x_1 \cos x_1). \qquad (1.30)$$

Затворената система с горния управляващ закон е представена с блок-диаграмата на Фиг.1.2. Тази система за управление съдържа два затворени контура: 1) вътрешна обратна връзка постигаща линеаризация на зависимостта "вход-състояние" и 2) външна обратна връзка постигаща стабилизация на затворената динамична система. Това е в съответствие с (1.25), където управляващият вход u се вижда, че е композиран от част премахваща нелинейността и линейна компенсираща част.



Фиг.1.2. Линеаризация "вход-състояние"

Могат да се направят следните забележки по отношение на горния закон за управление:

- Полученият резултат, въпреки че е валиден за широка област от пространството на състоянията, не е глобален. Управляващият закон не е добре дефиниран когато $x_1 = (\pi / 4 \pm k\pi / 2)$, $k = 1,2,\ldots$ Очевидно, когато началното състояние е в такива особени точки, управляващото устройство няма да приведе системата до равновесната точка.

- Линеаризацията "вход-състояние" се постига чрез комбинация от преобразуване на координатите на състоянието и преобразуване на входа, чрез обратна връзка по състояние използувана и в двете трансформации. Тази линеаризация с обратна връзка е фундаментално различна от линеаризацията чрез разлагане в ред на Тейлър за работа в малък диапазон (околност, около точката на линеаризация), върху която линеаризация се базира линейното управление.

- За да се изпълни управляващият закон са неоходими нови координати на състоянието (z_1, z_2). Ако те нямат физичен смисъл или не могат да бъдат директно измерени, първоначалният вектор на състоянието $\mathbf{x}$ трябва да бъде измерен и използуван за изчисляването им от (1.18).

- На модела на системата се разчита както за синтеза на управлението, така и за изчисляването на $\mathbf{z}$. Ако в модела има неизвестности, например неточно определен параметър a, това би причинило грешка в изчисляването както на новия вектор на състоянието $\mathbf{z}$, така и на управляващия вход u, което се вижда от (1.18) и (1.25).

- Може да се синтезира и следящо управление. Желаното движение трябва да бъде изразено по отношение на пълния нов вектор на състоянието. Могат да се наложат сложни изчисления за преобразуване на желаното движение по отношение на новите координати на състоянието.

Обобщаването на идеята за линеаризацията "вход-състояние" към нелинейни системи изисква да се отговори на два въпроса:

- Какви класове от нелинейните системи могат да бъдат преобразувани в линейни системи?

- Как да се намерят подходящите преобразувания за тези системи, които могат да се преобразуват?

2. Примери

Пример 1.3. Да се линеаризира чрез обратна връзка нелинеен обект, описван с уравнението на Дюфинг

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_1^3 + u \end{aligned} \tag{1.31}$$

и да се синтезира управление, осигуряващо критично-апериодичен преходен процес с двоен полюс $\lambda = -1$.

Нелинейността се намира във второто уравнение и може директно да бъде отстранена чрез избор на управление от вида

$$u = v + x_1 + x_1^3, \tag{1.32}$$

при което системата (1.31) се модифицира до двойно интегрална форма

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= v \end{aligned}. \tag{1.33}$$

Ако управлението на линеаризираната система v се избере като

$$v = -k_1 x_1 - k_2 x_2 = -x_1 - 2x_2, \tag{1.34}$$

затворената система

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - 2x_2 \end{aligned} \tag{1.35}$$

ще има двукратен ролюс $\lambda = -1$. Наистина, ако x_2 от първото уравнение на (1.35) се замести във второто се получава

$$\ddot{x}_1 + 2\dot{x}_1 + x_1 = 0, \tag{1.36}$$

чието характеристично уравнение има двукратен корен $\lambda = -1$.

Пример 1.4. Да се извърши линеаризация "вход-състояние" и да се синтезира управление по координатите на състоянието, осигуряващо критично-апериодичен преходен процес с двоен полюс $\lambda = -1$ за следната система:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_1{}^2 x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned} \quad . \tag{1.37}$$

Вижда се, че чрез управляващия вход u не може директно да се отстрани нелинейността в първото уравнение на (1.37). Това може да стане чрез преобразуване на координатите на състоянието. Нека

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= x_1{}^2 x_2 \end{aligned} , \tag{1.38}$$

а обратното преобразуване при $z_1 \neq 0$ е

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 \\ x_2 &= z_2 / z_1{}^2 \end{aligned} \quad . \tag{1.39}$$

Чрез заместване на (1.39) в (1.37), първото уравнение се линеаризира и е

$$\dot{z}_1 = -z_1 + z_2 , \tag{1.40}$$

а второто се преработва по следния начин

$$\begin{aligned} &\dot{x}_2 \Leftarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{z_2}{z_1{}^2}\right) = \frac{\dot{z}_2 z_1{}^2 - z_2 2 z_1 \dot{z}_1}{z_1{}^4} = u \\ &\dot{z}_2 = \frac{1}{z_1{}^2}(z_1{}^4 u + 2 z_1 z_2 \dot{z}_1) = z_1{}^2 u + 2\frac{z_2}{z_1}(-z_1 + z_2) . \end{aligned} \tag{1.41}$$

Системата в новите координати

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= -2\frac{z_2}{z_1}(z_1 - z_2) + z_1{}^2 u \end{aligned}$$

се линеаризира с управление от вида

$$u = \frac{1}{z_1{}^2}[v + 2\frac{z_2}{z_1}(z_1 - z_2)] . \tag{1.42}$$

Това управление не е добре дефинирано при $z_1 = 0$. Линеаризираната система е

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= v \end{aligned} . \qquad (1.43)$$

Управлението на линеаризираната система се търси във вида

$$v = -k_1 z_1 - k_2 z_2 . \qquad (1.44)$$

Коефициентите, осигуряващи критично-апериодичен преходен процес с двукратен корен $\lambda = -1$, са $k_1 = 0$ и $k_2 = 1$, а управлението е

$$v = -z_2 . \qquad (1.45)$$

Затворената система е

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= -z_2 \end{aligned} . \qquad (1.46)$$

Управляващият закон (1.42) с отчитане на (1.45) и след връщане към първоначалните координати чрез (1.38) е

$$u = x_2 (1 - 2 x_1 x_2) . \qquad (1.47)$$

Пример 1.5. Да се линеаризира чрез обратна връзка от типа "вход-състояние" следната система

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + 2{x_1}^2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 + u \\ \dot{x}_3 &= x_1 - x_3 \end{aligned} . \qquad (1.48)$$

Базисът в пространството на състоянията се сменя по следния начин

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= x_2 + 2{x_1}^2 \\ z_3 &= x_3 \end{aligned} . \qquad (1.49)$$

Формулите за обратното преобразуване на координатите са

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 \\ x_2 &= z_2 - 2{z_1}^2 \quad . \\ x_3 &= z_3 \end{aligned} \tag{1.50}$$

Чрез заместване на (1.50) в (1.48), първото и третото уравнение приемат вида

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \,, \\ \dot{z}_3 &= z_1 - z_3 \,, \end{aligned}$$

а второто се преработва по следния начин

$$\begin{aligned} &\dot{x}_2 \Leftarrow \frac{d}{dt}(z_2 - 2{z_1}^2) = \dot{z}_2 - 4z_1\dot{z}_1 = z_3 + u \\ &\dot{z}_2 = 4z_1 z_2 + z_3 + u \,. \end{aligned}$$

Системата в новите координати

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= 4z_1 z_2 + z_3 + u \\ \dot{z}_3 &= z_1 - z_3 \end{aligned} \tag{1.51}$$

се линеаризира с управление

$$u = v - 4z_1 z_2 - z_3 \,. \tag{1.52}$$

до следния вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= v \qquad , \\ \dot{z}_3 &= z_1 - z_3 \end{aligned} \tag{1.53}$$

където v обикновено се избира като

$$v = -k_1 z_1 - k_2 z_2 - k_3 z_3 \,. \tag{1.54}$$

Пример 1.6. [4] Да се линеаризира чрез обратна връзка от типа "вход-състояние" следната система

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{i_3 - i_2}{i_1} x_2 x_3 + \frac{1}{i_1} u_1 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{i_1 - i_3}{i_2} x_3 x_1 + \frac{1}{i_2} u_2 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{i_2 - i_1}{i_3} x_1 x_2 + \frac{1}{i_3} u_3\end{aligned} \tag{1.55}$$

където $\mathbf{x} = [x_1 \;\; x_2 \;\; x_3]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{u} = [u_1 \;\; u_2 \;\; u_3]^{\mathrm{T}}$, а $\mathbf{i} = [i_1 \;\; i_2 \;\; i_3]^{\mathrm{T}}$ е константен вектор.

Управленията, линеаризиращи трите уравнения на (1.55) са

$$\begin{aligned}u_1 &= i_1 v_1 + (i_3 - i_2) x_2 x_3 \\ u_2 &= i_2 v_2 + (i_1 - i_3) x_3 x_1 , \\ u_3 &= i_3 v_3 + (i_2 - i_1) x_1 x_2\end{aligned} \tag{1.56}$$

а линеаризираната система е

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= v_1 \\ \dot{x}_2 &= v_2 \; . \\ \dot{x}_3 &= v_3\end{aligned} \tag{1.57}$$

3. Задачи за изпълнение и анализ на резултатите

При зададени от преподавателя модели на обекти се прилага интуитивният подход за линеаризация с обратна връзка от типа "вход-състояние".

Дискутира се неудобството да се разчита на "интуиция" при линеаризацията и необходимостта от унифицирана методика за нея. Обсъждат се въпроси като: Винаги ли е възможна тази линеаризация и робастна ли е по отношение на промяната на параметрите на обекта? Линеаризираната система валидна ли е за цялото пространство на състоянията или само в някаква дефиниционна област? Защо се нарича точна линеаризация и по какво се различава от традиционната линеаризация чрез разлагане в ред на Тейлър?

Упражнение № 2

Интуитивен подход към линеаризацията "вход-изход"

Целта на упражнението е най-общо запознаване с идеите на линеаризацията чрез обратна връзка от типа "вход-изход" и с понятията вътрешната динамика и нулева динамика.

1. Теоретични сведения

Въведение в линеаризацията "вход-изход". Разглежда се системата

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \\ y &= h(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad . \tag{2.1}$$

Целта е да се синтезира управление u, чрез което изходът y да следи зададена желана траектория y_d. Изходният сигнал y и неговите производни да бъдат ограничени в дефиниционната област, в която y_d и неговите производни до висок ред се предполага че са известни и ограничени.

Използването на модела (2.1) се затруднява от факта, че изходът y е свързан с входа u само индиректно чрез променливата на състоянието $\mathbf{x}$ и нелинейното уравнение на състоянието (2.1). Следователно, не е очевидно как може да се синтезира входа u, така че да управлява следящия режим на изхода y. Синтезът на следящо управление може да се улесни, ако *се намери една директна и проста зависимост между изхода на системата* y *и управляващия вход* u. Това е идеята на интуитивния подход към линеаризацията "вход-изход" (input-output linearization) при синтеза на нелинейно управление.

Този подход е илюстриран със следния пример.

Пример 2.1 [3]. Разглежда се система от трети ред

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sin x_2 + (x_2 + 1)x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1^5 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1^2 + u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad . \tag{2.2}$$

За получаване на директна зависимост между изхода y и входа u, изходът y се диференцира

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = \sin x_2 + (x_2 + 1)x_3 .$$

Тъй като $\dot{y}$ все още не зависи пряко от входа u, то се извършва повторно диференциране. Получава се

$$\ddot{y} = (x_2 + 1)u + f_1(\mathbf{x}), \tag{2.3}$$

където $f_1(\mathbf{x})$ е функция на състоянието дефинирана като

$$f_1(\mathbf{x}) = (x_1^5 + x_3)(x_3 + \cos x_2) + (x_2 + 1)x_1^2 . \tag{2.4}$$

Уравнението (2.3) изразява явно зависимостта между y и u. Ако $x_2 \neq -1$ и управляващият вход се избере във вида

$$u = \frac{1}{x_2 + 1}(v - f_1), \tag{2.5}$$

където v е нов вход, чийто управляващ закон трябва да бъде синтезиран, нелинейността в (2.3) се отстранява и се получава проста линейна зависимост от вида "два интегратора" между изхода и новия вход v

$$\ddot{y} = v .$$

Синтезът на следящо управление за този обект "два интегратора" е лесен поради съществуващите техники за управление на линейни системи. Например, нека грешката в следенето е $e = y(t) - y_d(t)$, а новият изход -

$$v = \ddot{y}_d - k_1 e - k_2 \dot{e} \tag{2.6}$$

където k_1 и k_2 са положителни константи. Тогава грешката в следенето на затворената система се дава чрез

$$\ddot{e} + k_2 \dot{e} + k_1 e = 0 , \tag{2.7}$$

което уравнение описва устойчива система. Следователно, ако първоначално $e(0) = \dot{e}(0) = 0$, тогава $e(t) \equiv 0$, $\forall t \geq 0$, т.е. получава се идеално следене; в противен случай $e(t)$ клони към нула асимптотично.

Особености на решението:

- Управляващият закон е дефиниран навсякъде, освен в особените точки, такива като $x_2 = -1$.
- Необходимо е да може да се измерва цялото пространство на състоянията за реализирането на управляващия закон, защото изчисляването както на производната $\dot{y}$ така и на трансформацията на входа (2.5) изисква стойността на $\mathbf{x}$.

Горната стратегия за синтез на управление първо генерираща една линейна вход-изходна зависимост и след това формулираща управление на базата на линейната теория на управлението се означава като подход *"вход-изходна" линеаризация* и може да се приложи както към едномерни, така и към многомерни системи. Казва се, че системата има *относителна степен* r, ако е необходимо да се диференцира изходът на системата r пъти, за да се генерира явна зависимост между изхода y и входа u. Следователно системата в *Пример 2.1* има относителна степен 2. За всяка управляема система от ред n са необходими най-много n диференцирания за всеки изход за да се появи управляващия вход, т.е. $r \leq n$. Интуитивно се разбира, че: (1) ако са необходими повече от n диференцирания, системата е от ред по-висок от n; (2) ако управляващият вход никога не се появи, системата не е управляема.

Вътрешна динамика. Въпреки че задачата за синтез на следящо управление, поставена в началото изглежда решена с намирането на управляващия закон (2.5) и (2.6), трябва да се има предвид че (2.7) е само част от динамиката на затворената система, защото линеаризираната система е от втори, докато динамиката на цялата система е от трети ред (същият като този на обекта, защото управляващото устройство (2.5) не въвежда допълнителна динамика). Следователно част от динамиката на системата (описана с една променлива на състоянието) се оказва "неуправляема" в линеаризацията "вход-изход". Тази част от динамиката е наречена *вътрешна динамика*, защото тя не може да бъде видяна от външната вход-изходна зависимост (2.3). В *Примера 2.1* x_3 може се избере за вътрешно състояние (защото x_3, y, $\dot{y}$ образуват нов базис в пространството на състоянията), а вътрешната динамика се представя чрез уравнението

$$\dot{x}_3 = x_1^2 + \frac{1}{x_2 + 1}(\ddot{y}_d(t) - k_1 e - k_2 \dot{e} - f_1). \qquad (2.8)$$

Ако вътрешната динамика е устойчива (което означава, че променливите на състоянието остават ограничени по време на следенето, т.е. устойчивост в смисъл BIBO (Bounded Input - Bounded Output)) задачата за синтез на следящо управление е решена. В противен случай, горното следящо управляващо устройство практически е безсмислено, тъй като неустойчивостта на вътрешната динамика ще доведе до нежелан феномен (като силни вибрации на механичните части и др.). Следователно, *ефективността на синтеза на управление, базиран на модел от редуциран ред, зависи от устойчивостта на вътрешната динамика.*

Чрез няколко примери ще бъде показано, че вътрешните динамики са устойчиви за едни системи (горният подход за синтез е приложим) и неустойчиви за други (необходим е друг подход към синтеза на управление).

Пример 2.2 [3]. Разглежда се нелинейна система

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2^3 + u \\ \dot{x}_2 &= u \\ y &= x_1 \end{aligned} \qquad (2.9)$$

Предполага се, че целта на управлението е да се следи $y_d(t)$. Диференцирането на y води до първото уравнение на състоянието

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2^3 + u.$$

Така, избирането на управляващия закон

$$u = -x_2^3 - e(t) + \dot{y}_d(t) \qquad (2.10)$$

води до експоненциална сходимост на e към нула

$$\dot{e} + e = 0. \qquad (2.11)$$

Същият управляващ вход е приложен и към второто динамично уравнение, водещо до вътрешната динамика

$$\dot{x}_2 + x_2^3 = \dot{y}_d - e, \tag{2.12}$$

което е неавтономно и нелинейно. Но тъй като e е ограничено чрез (2.11), а $\dot{y}_d(t)$ се подразбира че е ограничено по задание, то

$$\left|\dot{y}_d(t) - e\right| \le D$$

където D е положителна константа. Така може да се заключи от (2.12) че $x_2 \le D^{1/3}$, тъй като $\dot{x}_2 < 0$ когато $x_2 > D^{1/3}$, и $\dot{x}_2 > 0$ когато $x_2 \le -D^{1/3}$.

Следователно (2.10) е работоспособен закон за следящо управление на системата (2.9) за дадена желана траектория $y_d(t)$, чиято производна $\dot{y}_d(t)$ е ограничена.

Обратно, може лесно да се покаже, че ако второто уравнение на състоянието в (2.9) се замества с $\dot{x}_2 = -u$, тогава вътрешната динамика е неустойчива.

Въпреки че "вход-изходната" линеаризация е мотивирана в контекста на следенето на изхода, тя може също да бъде приложена към задачите за стабилизация. Например, ако $y_d(t) \equiv 0$ е желаната траектория за горната система, двете променливи на състоянието y и $\dot{y}$ на затворената система ще бъдат приведени в нулата чрез управляващия закон (2.10) подразбирайки устойчивост на цялата система при условие че вътрешната динамика е устойчива.

Особености на "вход-изходната" линеаризация в задачите за стабилизация: Първо, в задачите за стабилизация няма причина да се ограничава изборът на изход $y = h(\mathbf{x})$ да бъде физически смислено количество (докато в задачите за следене изборът на изхода е определен от физическата задача). Всяка функция на $\mathbf{x}$ може да се използва да служи като изкуствен изход (желан изход) за да генерира линейна вход-изходна зависимост за целта на устойчивия синтез. Второ, различните избори на изходна функция водят до различни вътрешни динамики. Възможно е за един избор на изхода да се постигне устойчива вътрешна динамика (или никаква вътрешна динамика), докато друг избор на изхода би довел до неустойчива вътрешна динамика.

Специален е случаят когато относителната степен на една система е същата като нейният ред, т.е. когато изходът y трябва да бъде диференциран n пъти (където n е редът на системата) за да се получи линейна вход-изходна зависимост. В този случай $y, \dot{y}, ..., y^{(n-1)}$ могат да се използуват като нов набор от променливи на състоянието за системата и *няма вътрешна динамика* асоциирана с тази "вход-изходна" линеаризация. Така, в този случай линеаризацията "вход-изход" води до линеаризация "вход-състояние" и както регулирането на състоянието, така и следенето на изхода (за конкретния изход) могат да бъдат получени лесно.

Нулева динамика. *Когато изходът на системата се държи в нула посредством входа, вътрешната динамика на системата се определя като нулева динамика.* Например, за системата от *Пример 2.2* нулевата динамика е (от (2.12))

$$\dot{x}_2 + x_2{}^3 = 0\,. \tag{2.13}$$

Поддържането на изхода на системата в нула определя уникално желания вход (а именно, тук, u трябва да е равно на $-x_2{}^3$ за да задържи x_1 винаги равно на нула ($y = x_1 = 0$)). Нулевата динамика (2.13) лесно може да се докаже, че е асимптотически устойчива. За тази цел се използува следната функция на Ляпунов $V = x_2{}^2$, а (2.13) се записва във вида

$$\dot{x}_2 = -x_2{}^3\,. \tag{2.14}$$

Пълната производна на функцията на Ляпунов по времето с отчитане на уравнението на състоянието (2.14) е

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} = 2x_2(-x_2{}^3) = -2x_2{}^4\,. \tag{2.15}$$

За всяко $x_2 \neq 0$, $V(x_2) > 0$ и $\dfrac{dV(x_2)}{dt} < 0$, а за $x_2 = 0$ - $V(0) = 0$ и $\dfrac{dV(0)}{dt} = 0$. Следователно, изследваната нулева динамика е асимптотически устойчива.

Нулевата динамика се дефинира и изучава за да се намери по-прост начин за определяне на устойчивостта на вътрешната динамика. *Резултатът е:*

- За следящи системи, локалната експоненциална устойчивост на нулевата динамика гарантира устойчивостта на вътрешната динамика, ако желаната траектория $y_d(t)$ е такава, че $y_d, \ldots, y_d^{(r-1)}$ имат малки стойности;
- За стабилизация (с $y_d(t) \equiv 0$), локалната асимптотическа устойчивост на нулевата динамика е достатъчна да гарантира локалната асимптотическа устойчивост на вътрешната динамика.
- Само локална устойчивост е гарантирана за вътрешната динамика, дори ако нулевата динамика е глобално експоненциално устойчива.
- Ако нулевата динамика е неустойчива, трябва да се търсят други управляващи стратегии, само опростени от факта, че трансформираната динамика е частично линеаризирана.

Особености на нулевата динамика на нелинейни системи:

- Нулевата динамика е вътрешно присъща характеристика на една нелинейна система и не зависи от избора на управляващ закон или на желана траектория.
- Изследването на устойчивостта на нулевата динамика е много по-лесно отколкото изследването на устойчивостта на вътрешната динамика, защото нулевата динамика включва само вътрешните състояния (докато вътрешната динамика е свързана към външната динамика и желаните траектории, както се вижда от (2.8).

Синтезът на управление базиран на вход-изходна линеаризация се обобщава в следните три стъпки:

- Диференциране на изхода y докато се появи входа u;
- u се избира така, че да отстрани нелинейностите и да гарантира сходимост на следенето;
- Изследване на устойчивостта на вътрешната динамика.

2. Примери.

Пример 2.3. Да се извърши "вход-изходна" линеаризация на нелинеен обект, описван с уравнението на Дюфинг и да се синтезира следящо управление на изхода $y_d(t)$. Да се определи относителната степен и устойчивостта на вътрешната динамика.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_1^3 + u\end{aligned}, \tag{2.16}$$

$$y = x_1 . \tag{2.17}$$

Уравнението на изхода (2.17) се диференцира:

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2 .$$

След първото диференциране все още няма пряка връзка между u и y. Затова диференцирането се повтаря:

$$\ddot{y} = \ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = -x_1 - x_1^3 + u . \tag{2.18}$$

След второто диференциране вече има пряка зависимост между u и y. Относителната степен е $r = 2$ и съвпада с реда на системата $n = 2$. Няма вътрешна динамика. Линеаризиращата обратна връзка е

$$u = v + x_1 + x_1^3 , \tag{2.19}$$

а линеаризираната "вход-изходна" зависимост е

$$\ddot{y} = v . \tag{2.20}$$

Новият вход се синтезира като

$$v = \ddot{y}_d - k_1 e - k_2 \dot{e} . \tag{2.21}$$

Уравнението на затворената система е

$$\ddot{y} - \ddot{y}_d + k_1 e + k_2 \dot{e} = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{e} + k_2 \dot{e} + k_1 e = 0 . \tag{2.22}$$

При положителни стойности на коефиццентите k_1 и k_2 грешката e асимптотично се схожда към нула, т.е., $e(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Например, ако $k_1 = 1$ и $k_2 = 2$ се получава критично-апериодичен преходен процес с двукратен полюс $\lambda = -1$.

Пример 2.4. Да се извърши "вход-изходна" линеаризация на нелинеен обект, описан с (2.23) и (2.24) и да се синтезира следящо управление на изхода $y_d(t)$. Да се определи относителната степен и устойчивостта на вътрешната динамика.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + 2x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 + u \\ \dot{x}_3 &= x_1 - x_3 \end{aligned} \quad . \tag{2.23}$$

$$y = x_1. \tag{2.24}$$

Уравнението на изхода (2.24) се диференцира:

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2 + 2x_1^2. \tag{2.25}$$

След първото диференциране все още няма пряка връзка между u и y. Затова диференцирането се повтаря:

$$\begin{aligned} \ddot{y} = \ddot{x}_1 = \dot{x}_2 + 4x_1\dot{x}_1 = x_3 + u + 4x_1(x_2 + 2x_1^2) = \\ = u + x_3 + 4x_1x_2 + 8x_1^3. \end{aligned} \tag{2.26}$$

След второто диференциране вече има пряка зависимост между u и y. Относителната степен е $r = 2$, а редът на системата е $n = 3$. Системата има вътрешна динамика, определена от едно скрито състояние. Чрез следната обратна връзка

$$u = v - x_3 - 4x_1x_2 - 8x_1^3 \tag{2.27}$$

(2.23) и (2.24) се линеаризира до

$$\ddot{y} = v. \tag{2.28}$$

Новият вход v, синтезиран като

$$v = \ddot{y}_d - k_1e - k_2\dot{e}, \tag{2.29}$$

води до асимптотически устойчива затворена система ($t \to \infty$, $e(t) \to 0$) при положителни коефициенти k_1 и k_2

$$\ddot{e} + k_2 \dot{e} + k_1 e = 0 . \tag{2.30}$$

За вътрешно състояние може да се избере x_3, защото x_3, y, $\dot{y}$ образуват нов базис в пространството на състоянията, а вътрешната динамика се представя чрез уравнението (третото от (2.23))

$$\dot{x}_3 + x_3 = x_1 = y . \tag{2.31}$$

Нулевата динамика се получава при задържане на изхода y в нулата,

$$\dot{x}_3 + x_3 = 0, \tag{2.33}$$

и е експоненциално устойчива, тъй като $x_3(t) = Ce^{-t} \to 0$ при $t \to \infty$. Следователно синтезираният управляващ закон (2.27) и (2.29) е работоспособен.

3. Задачи за изпълнение и анализ на резултатите

При зададени от преподавателя модели на обекти се прилага интуитивният подход за линеаризация с обратна връзка от типа "вход-изход" и се извършват подходящи изследвания за устойчивост.

Дискутира се получаването на линеаризирана динамика от понижен ред и предимствата от използването на нулева динамика в изследването за устойчивост на вътрешната динамика.

Упражнение № 3

Математични основи на линеаризацията чрез обратна връзка

Целта на упражнението е запознаване с някои математични средства от диференциалната геометрия чрез които се формализират и обобщават предишните интуитивни концепции на линеаризацията с обратна връзка за широк клас нелинейни системи.

1. Теоретични сведения

Всички функции, които ще бъдат разгледани в следващите определения се подразбира че са гладки по отношение на аргументите си, т.е., те имат непрекъснати частни производни от всякакъв ред.

Понятия от диференциалната геометрия [1,2,3]**.**

Векторно поле. Преобразуванието $\mathbf{f}:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ се нарича векторно поле в $\mathbf{R}^n$. Векторното поле е n-мерен *вектор-стълб*.

Градиент. Нека $h:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Градиентът на h е n-мерен *вектор-ред*, определен като

$$\nabla h = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial h}{\partial x_1},\ \dots,\ \frac{\partial h}{\partial x_n}\right].$$

Якобиан. За дадено векторно поле $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, Якобианът на $\mathbf{f}$ е

$$\nabla \mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Производна на Ли. Нека $h:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ и $\mathbf{f}:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Производната на Ли (Lie) на h по отношение на $\mathbf{f}$ се оределя чрез

$$L_{\mathbf{f}} h = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} = \nabla h \, \mathbf{f} .$$

Повтарящите се производни на Ли по отношение на същото векторно поле $\mathbf{f}$ или на ново векторно поле $\mathbf{g}$ се определят рекурсивно:

$$\begin{aligned}
& L_{\mathbf{f}}^0 h = h , \\
& L_{\mathbf{f}}^2 h = L_{\mathbf{f}} (L_{\mathbf{f}} h) = \nabla (L_{\mathbf{f}} h) \, \mathbf{f} \\
& L_{\mathbf{f}}^i h = L_{\mathbf{f}} (L_{\mathbf{f}}^{i-1} h) = \nabla (L_{\mathbf{f}}^{i-1} h) \, \mathbf{f} , \ \text{за} \quad i = 1,2,..... \\
& L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h = \nabla (L_{\mathbf{f}} h) \, \mathbf{g} .
\end{aligned}$$

Чрез производните на Ли могат да се получат по-компактни и удобни записи в теорията на системите за управление. Например, производните на изхода на следната система с един изход

$$\begin{aligned}
& \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\
& y = h(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

са

$$\begin{aligned}
& \dot{y} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = L_{\mathbf{f}} h \\
& \ddot{y} = \frac{\partial (L_{\mathbf{f}} h)}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = L_{\mathbf{f}}^2 h
\end{aligned}$$

и т.н. Аналогично, ако V е кандидат-функция на Ляпунов за системата, нейната производна $\dot{V}$ може да се запише като $L_{\mathbf{f}} V$.

Скоба на Ли. Нека $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ са две векторни полета в $\mathbf{R}^n$. Скобата на Ли (Lie bracket) на $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$, означена с $[\mathbf{f},\mathbf{g}]$, е трето векторно поле определено чрез

$$[\mathbf{f},\mathbf{g}] = \nabla \mathbf{g} \, \mathbf{f} - \nabla \mathbf{f} \, \mathbf{g} ,$$

където $\nabla \mathbf{g}$ и $\nabla \mathbf{f}$ са Якобиан матрици. Повтарящите се скоби на Ли могат да се определят рекурсивно чрез

$$ad_{\mathbf{f}}^o \mathbf{g} = \mathbf{g} ,$$

$$ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g} = [\mathbf{f}, \mathbf{g}],$$
$$ad_{\mathbf{f}}^{i}\mathbf{g} = [\mathbf{f}, ad_{\mathbf{f}}^{i-1}\mathbf{g}], \text{ за } \quad i = 1,2,.....$$

Свойства на скобите на Ли:

- Билинейност:

$$[\alpha_1\mathbf{f}_1 + \alpha_2\mathbf{f}_2, \mathbf{g}] = \alpha_1[\mathbf{f}_1, \mathbf{g}] + \alpha_2[\mathbf{f}_2, \mathbf{g}],$$
$$[\mathbf{f}, \alpha_1\mathbf{g}_1 + \alpha_2\mathbf{g}_2] = \alpha_1[\mathbf{f}, \mathbf{g}_1] + \alpha_2[\mathbf{f}, \mathbf{g}_2],$$

  където $\mathbf{f}$, $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$ са гладки векторни полета, а α_1 и α_2 са скаларни константи.

- Комутативност

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = -[\mathbf{g}, \mathbf{f}].$$

- Идентичност по Якоби

$$L_{ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}}h = L_{\mathbf{f}}L_{\mathbf{g}}h - L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h$$

Дифеоморфизъм. Преобразуванието $\mathbf{T}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, дефинирано в областта Ω, е дифеоморфизъм ако е обратимо, т.е., ако съществува вектор-функция $\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{x})$, такава че $\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{T}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ за всяко $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ и двете $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{x})$ са непрекъснато диференцируеми.

Ако областта Ω е цялото пространство $\mathbf{R}^n$, тогава $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ се нарича *глобален* дифеоморфизъм. Глобалните дифеоморфизми са рядкост и следователно трябва да се търсят *локални* дифеоморфизми, т.е. за трансформации дефинирани само в една крайна околност на дадена точка.

Локален дифеоморфизъм. Ако Якобиан-матрицата $\nabla\mathbf{T}(\mathbf{x})$ е неособена в точка $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, то има околност N на $\mathbf{x}_0$, такава че $\mathbf{T}$ е *локален* дифеоморфизъм в N.

Трансформации на състоянието. Дифеоморфизмът се използва за трансформиране на една нелинейна система в друга нелинейна система посредством смяна на базиса в пространството на състоянията (нов набор от координати на състоянието). Дадена е следната система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}$$

Нека новият базис в пространството на състоянията се дефинира с

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x}).$$

Като се диференцира $\mathbf{z}$ и в съответствие с уравненията на динамиката се получава

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u})$$

Новото представяне в пространството на състоянията е

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{z}) + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{z})\mathbf{u}\\ \mathbf{y} &= \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{z}),\end{aligned}$$

където $\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})$, а функциите $\bar{\mathbf{f}}$, $\bar{\mathbf{g}}$, $\bar{\mathbf{h}}$ се определят по очевиден начин.

Пълна интегрируемост. Едно линейно независимо множество от векторни полета $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_m\}$ в $\mathbf{R}^n$ е *напълно интегрируемо* тогава и само тогава, когато съществуват $n-m$ скаларни функции $h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), ..., h_{n-m}(\mathbf{x})$ удовлетворяващи системата от диференциални уравнения с частни производни

$$\nabla h_i \, \mathbf{f}_j = 0 \qquad (3)$$

където $1 \le i \le n-m$, $1 \le j \le m$ и градиентите ∇h_i са линейно независими.

Ако броят на векторите е m, размерността на асоциираното пространство е n, броят на неизвестните скаларни функции h_i е $n-m$, то броят на диференциалните уравнения с частни производни е $m(n-m)$.

Инволютивност. Едно линейно независимо множество от векторни полета $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_m\}$ е *инволютивно* тогава и само тогава, когато съществуват скаларни функции $\alpha_{ijk} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, такива че

$$[\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j](\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ijk}(\mathbf{x}) \mathbf{f}_k(\mathbf{x}), \qquad \forall i, j.$$

Инволютивността означава че ако се формира скобата на Ли от всяка двойка от векторни полета от множеството $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_m\}$, тогава полученото векторно поле може да се изрази като линейна комбинация на първоначалното множество от векторни полета. Като следствие:

- Проверяването дали едно множество от векторни полета $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_m\}$ е инволютивно е еквивалентно на проверяването дали

$$\operatorname{rank}(\mathbf{f}_1 \;\; \mathbf{f}_2 \;\; ... \; \mathbf{f}_m) = \operatorname{rank}(\mathbf{f}_1 \;\; \mathbf{f}_2 \;\; ... \; \mathbf{f}_m \;\; [\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j])$$

  за всички $\mathbf{x}$ и всички i, j.

- Константните векторни полета винаги са инволютивни. Скобата на Ли на два константни вектора е нулевият вектор, който тривиално може да се изрази като линейна комбинация на векторните полета.

- Множество, композирано от само един вектор $\{\mathbf{f}\}$ е инволютивно:

$$[\mathbf{f}, \mathbf{f}] = (\nabla \mathbf{f})\mathbf{f} - (\nabla \mathbf{f})\mathbf{f} = 0.$$

Теорема на Фробениус. Множеството от линейно независими векторни полета $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_m$ е *напълно интегрируемо* тогава и само тогава, когато е *инволютивно*.

Теоремата на Фробениус дава необходимото и достатъчно условие за решаване на един клас диференциални уравнения с частни производни. Разглежда се следната система от диференциални уравнения с частни производни

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial h}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial h}{\partial x_3} f_3 = 0, \\
&\frac{\partial h}{\partial x_1} g_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} g_2 + \frac{\partial h}{\partial x_3} g_3 = 0,
\end{aligned}$$

където $f_i(x_1, x_2, x_3)$ и $g_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1,2,3$ са известни скаларни функции на x_1, x_2, x_3, а $h(x_1, x_2, x_3)$ е неизвестна функция. Тази система от диференциални уравнения с частни производни е единствено определена чрез двата вектора $\mathbf{f} = (f_1 \;\; f_2 \;\; f_3)^{\mathbf{T}}$ и

$\mathbf{g} = (g_1 \quad g_2 \quad g_3)^{\mathbf{T}}$. Решението $h(x_1, x_2, x_3)$ на горната система съществува, ако множеството от векторни полета $\{\mathbf{f}, \mathbf{g}\}$ е *напълно интегрируемо*. Според Теоремата на Фробениус то е напълно интегрируемо тогава и само тогава, когато е *инволютивно*. Инволютивното условие може относително лесно да бъде проверено, а оттам и съществуването на решение на изходната система от диференциални уравнения с частни производни.

2. Примери

Пример 3.1 [2]. Дадени са скаларната функция $h(\mathbf{x}) = x_1^{\ 2} + x_2$ и векторните полета $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - x_2 \end{bmatrix}$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Да се изчислят следните производни на Ли: $L_{\mathbf{f}}^0 h$, $L_{\mathbf{f}} h$, $L_{\mathbf{f}}^2 h$, $L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h$, $L_{\mathbf{g}} h$, $L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{g}} h$.

Решение:

$$L_{\mathbf{f}}^0 h = h = x_1^{\ 2} + x_2;$$

$$L_{\mathbf{f}} h = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - x_2 \end{bmatrix} = 2x_1 x_2 - \sin x_1 - x_2;$$

$$L_{\mathbf{f}}^2 h = L_{\mathbf{f}}(L_{\mathbf{f}} h) = \frac{\partial (L_{\mathbf{f}} h)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_2 - \cos x_1 & 2x_1 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - x_2 \end{bmatrix} =$$
$$= (2x_2 - \cos x_1) x_2 + (2x_1 - 1)(-\sin x_1 - x_2);$$

$$L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h = L_{\mathbf{g}}(L_{\mathbf{f}} h) = \frac{\partial (L_{\mathbf{f}} h)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_2 - \cos x_1 & 2x_1 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2x_1 - 1;$$

$$L_{\mathbf{g}} h = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1;$$

$$L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{g}} h = L_{\mathbf{f}}(L_{\mathbf{g}} h) = \frac{\partial (L_{\mathbf{g}} h)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - x_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Пример 3.2 [2]. Зададени са векторните полета $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - x_2 \end{bmatrix}$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix}$. Да се изчислят следните скоби на Ли: $[\mathbf{f},\mathbf{g}](\mathbf{x})$ и $ad_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g}$.

Решение:

$$[\mathbf{f},\mathbf{g}](\mathbf{x}) = \nabla\mathbf{g}\,\mathbf{f} - \nabla\mathbf{f}\,\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}.$$

$$ad_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g} = [\mathbf{f}, ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}] = \nabla(ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g})\,\mathbf{f} - \nabla\mathbf{f}\; ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 - x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -x_2 \\ -\sin x_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1\cos x_1 - (x_1 + x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 - 2x_2 \\ -\sin x_1 - x_1\cos x_1 + x_1 + x_2 \end{bmatrix}.$$

Пример 3.3. За системата

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + ax_2 + \sin x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2\cos x_1 + u\cos 2x_1 \end{aligned}$$

да се определят векторите $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$, съответстващи на съпровождащата форма

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}.$$

Да се изчисли скобата на Ли $[\mathbf{f},\mathbf{g}]$.

Решение:

Двете векторни полета $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ се определят като

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -2x_1 + ax_2 + \sin x_1 \\ -x_2\cos x_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos 2x_1 \end{bmatrix}.$$

За тях скобата на Ли се изчислява като

$$[\mathbf{f},\mathbf{g}]=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -2\sin(2x_1) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2x_1+ax_2+\sin x_1\\ -x_2\cos x_1\end{bmatrix}-$$

$$-\begin{bmatrix}-2+\cos x_1 & a\\ x_2\sin x_1 & -\cos x_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \cos 2x_1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}a\cos 2x_1\\ \cos x_1\cos 2x_1-2(-2x_1+ax_2+\sin x_1)\sin 2x_1\end{bmatrix}.$$

Пример 3.4. Да се изследва за дифеоморфизъм следната вектор-функция

$$\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}=\mathbf{T}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}2x_1+x_2^2\\ \sin x_2\end{bmatrix} \quad .$$

Решение:

Вектор-функцията $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ е добре дефинирана за всяко x_1 и x_2. Нейната Якобиан матрица е

$$\nabla\mathbf{T}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}2 & 2x_2\\ 0 & \cos x_2\end{bmatrix}$$

и има ранг 2 в точката $\mathbf{x}=(0,0)$. Следователно, $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ определя локален дифеоморфизъм в област около координатното начало. Фактически, дифеоморфизмът е валиден в областта

$$\Omega=\{(x_1,x_2),\ |x_2|<\pi/2\},$$

тъй като обратната функция съществува и е гладка за $\mathbf{x}$ в тази област. Обаче, извън тази област, $\mathbf{T}$ не определя дифеоморфизъм, защото обратната функция не съществува като единствена.

Пример 3.5. Да се изследва за дифеоморфизъм следната вектор-функция

$$\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}=\Phi(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\ \sin x_2\end{bmatrix}.$$

Решение:

Вектор-функцията $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ е добре дефинирана за всяко x_1 и x_2. Нейната Якобиан матрица е

$$\nabla\mathbf{T}(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & \cos x_2\end{bmatrix}.$$

Детерминантата на $\nabla\mathbf{T}(\mathbf{x})$ е

$$\det\nabla\mathbf{T}=\cos x_2\neq 0,\ \forall x_2\neq\pm\pi/2+2k\pi\text{ , за }k=0,1,2,...,$$

а рангът

$$\operatorname{rank}\nabla\mathbf{T}=2\quad\text{в точката}\quad\mathbf{x}(0)=(0,0).$$

Следователно, $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ определя локален дифеоморфизъм в област около координатното начало. Дифеоморфизмът е валиден в областта

$$\Omega=\{(x_1,x_2):|x_2|<\pi/2\}.$$

Пример 3.6. Нека $\mathbf{f}_1=\begin{bmatrix}2x_2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$ и $\mathbf{f}_2=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ x_2\end{bmatrix}$ са векторни полета. Да се провери дали разпределението на множеството от векторни полета $\{\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2\}$ е инволютивно.

Решение:

$$[\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2]=\nabla\mathbf{f}_2\,\mathbf{f}_1-\nabla\mathbf{f}_1\,\mathbf{f}_2=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2x_2\\1\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},$$

$$r_1=\operatorname{rank}(\mathbf{f}_1\ \ \mathbf{f}_2)=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}2x_2 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & x_2\end{bmatrix}=2,$$

$$r_2=\operatorname{rank}(\mathbf{f}_1\ \ \mathbf{f}_2\ \ [\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2])=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}2x_2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & x_2 & 1\end{bmatrix}=3.$$

Тъй като скобата на Ли на $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ разширява размерността на $\{\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2\}$ от 2 на 3, т.е. $r_1\neq r_2$, то множеството $\{\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2\}$ не е инволютивно.

Пример 3.7 [2]. Нека $\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 2x_3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -2x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ и $\Omega = \left\{ \mathbf{x} \in R^3 \mid {x_1}^2 + {x_3}^2 \neq 0 \right\}$. Да се провери дали множеството $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ е инволютивно.

Решение:

Лесно се проверява, че $\operatorname{rank}(\mathbf{f}_1 \ \ \mathbf{f}_2) = 2$ за всяко $\mathbf{x} \in \Omega$. Скобата на Ли е

$$[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 \\ -2x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2x_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x_3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

а рангът е

$$\operatorname{rank}\,(\mathbf{f}_1 \ \ \mathbf{f}_2 \ \ [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2]) = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 2x_3 & -x_1 & -4x_3 \\ -1 & -2x_2 & 2 \\ 0 & x_3 & 0 \end{bmatrix} = 2, \ \ \forall\, \mathbf{x} \in \Omega,$$

тъй като

$$\det \begin{bmatrix} 2x_3 & -x_1 & -4x_3 \\ -1 & -2x_2 & 2 \\ 0 & x_3 & 0 \end{bmatrix} = 4{x_3}^2 - 4{x_3}^2 = 0.$$

Тъй като двата ранга са равни, то $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ е инволютивно.

Пример 3.8. Да се провери дали следната система от диференциални уравнения с частни производни има решение

$$2x_3 \frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{\partial h}{\partial x_2} = 0,$$

$$-x_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} - 2x_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial h}{\partial x_3} = 0.$$

Решение:

Асоциираните векторни полета са $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ с компоненти:

$$\mathbf{f}_1 = (2x_3 \ \ -1 \ \ 0)^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{f}_2 = (-x_1 \ \ -2x_2 \ \ x_3)^{\mathrm{T}}.$$

За да се определи дали системата от частни диференциални уравнения е решима (или дали $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ е изцяло интегрируемо) трябва да се провери инволютивността на разпределението на множеството от векторни полета $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$. Лесно се намира

$$[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2] = (-4\, x_3 \quad 2 \quad 0)^{\mathrm{T}} .$$

Тъй като $[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2] = -2\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2$, това множество от векторни полета е инволютивно. Следователно двете диференциални уравнения с частни производни са решими.

Пример 3.9 [2]. Нека $\mathbf{f_1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f_2}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -e^{x_2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ и $\Omega = R^4$. Да се докаже че $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ е инволютивно.

Пример 3.10 [2]. Да се изследва съществуването на $\lambda(x)$ удовлетворяващо системата от частни диференциални уравнения:

$$\text{(а)} \quad \begin{aligned} &\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} = 0 \\ &(x_1 + x_2)\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} + (2x_1 + x_3)\frac{\partial \lambda}{\partial x_2} - (x_1 + x_2)\frac{\partial \lambda}{\partial x_3} = 0\,; \end{aligned}$$

$$\text{(б)} \quad \begin{aligned} &\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} = 0 \\ &(x_1 + x_2 + {x_3}^2)\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} + (2x_1 + x_3)\frac{\partial \lambda}{\partial x_2} - (x_1 + x_2)\frac{\partial \lambda}{\partial x_3} = 0\,. \end{aligned}$$

3. Задачи за изпълнение и анализ на резултатите

Решават се задачи, зададени от преподавателя, по материала изложен дотук. Целта е да се овладеят съответните математични техники, чрез които интуитивните подходи ще бъдат формализирани в стандартни алгоритми.

Упражнение № 4

Линеаризация "вход-състояние" на SISO система

Целта на упражнението е запознаване с една унифицирана методика за линеаризация с обратна връзка от типа "вход-състояние" на SISO (single-input-single-output (с един вход и един изход)) система. Използува се математичен апарат от диференциалната геометрия.

1. Теоретични сведения

Разглежда се линеаризация "вход-състояние" за нелинейни системи с един вход представени чрез уравнението на състоянието

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u, \tag{4.1}$$

където $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ са гладки векторни полета. Ще бъде показано кога такива системи могат да бъдат линеаризирани чрез трансформации на входа и състоянието, как да се намерят такива трансформации и как да се синтезират управляващи устройства, базирани на линеаризации чрез обратна връзка.

Дефиниране на линеаризацията "вход-състояние". Нелинейна система с един вход, представена във форма (4.1) с $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ - гладки векторни полета в $\mathbf{R}^n$ се казва че е *линеаризуема по "вход-състояние"*, ако съществува област Ω в $\mathbf{R}^n$, дифеоморфизъм $T : \Omega \to \mathbf{R}^n$ и нелинеен управляващ закон, реализиран като обратна връзка

$$u = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})v, \tag{4.2}$$

такъв че новите променливи на състоянието $\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$ и новият вход v удовлетворяват следната линейна инвариантна на времето зависимост

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}v, \tag{4.3}$$

където $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Новото състояние $\mathbf{z}$ се нарича линеаризиращо състояние, а управляващият закон (4.2) - линеаризиращ управляващ закон. Трансформираната линейна динамика е с матрица $\mathbf{A}$ и вектор $\mathbf{b}$ в специална форма, съответстваща на съпровождащата форма. Не се загубва общност ограничавайки се към тази специална линейна еквивалентна форма.

Лесно може да се види от каноничната форма (4.3) че линеаризацията с обратна връзка е специален случай на вход-изходна линеаризация с относителна степен n. Това означава, че ако една система е вход-изходно линеаризуема с относителна степен n, тя трябва да бъде линеаризуема по вход-състояние. От друга страна, ако една система е линеаризуема по вход-състояние с първото ново състояние z_1 представящо изхода, системата е вход-изходно линеаризуема с относителна степен n.

Лема 4.1: *Една система от n-ти ред е линеаризуема по вход-състояние тогава и само тогава, когато съществува функция $\lambda(\mathbf{x})$, такава че входно-изходната линеаризация с $\lambda(\mathbf{x})$ за изходна функция има относителна степен n.*

Условия за линеаризацията вход-състояние. Могат ли всички нелинейни уравнения на състоянието във формата (4.1) да бъдат линеаризуеми по "вход-състояние"? Ако не, кога такива линеаризации съществуват? Следващата теорема дава отговор на този въпрос.

Теорема 4.1: *Нелинейната система (4.1) с $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ гладки векторни полета е линеаризуема по вход-състояние, тогава и само тогава, когато съществува област Ω, такава че са изпълнени следните условия:*

- *векторните полета $\{\mathbf{g}, ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}, ..., ad_{\mathbf{f}}^{n-1}\mathbf{g}\}$ са линейно независими в Ω;*
- *множеството $\{\mathbf{g}, ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}, ..., ad_{\mathbf{f}}^{n-2}\mathbf{g}\}$ е инволютивно в Ω.*

Първото условие може да се интерпретира като условие за управляемост на нелинейната система (4.1). Инволютивното условие тривиално се удовлетворява за линейни системи (които имат константни векторни полета), но не се удовлетворява (най-общо) в нелинейния случай.

Как да се извърши линеаризация "вход-състояние"? На базата на предишните разсъждения, линеаризацията по вход-състояние може да се изпълни чрез следните стъпки:

- Конструират се векторните полета $\mathbf{g}, ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}, ..., ad_{\mathbf{f}}^{n-1}\mathbf{g}$ за дадената система;
- Проверява се дали условията за управляемост и инволютивност са удовлетворени;
- Ако и двете са удовлетворени, намира се първото състояние T_1 (изходната функция водеща към вход-изходна линеаризация с относителна степен n) от уравненията

$$L_g T_1 = L_{ad_{\mathbf{f}} g} T_1 = ... = L_{ad_{\mathbf{f}}^{n-2} g} T_1 = 0,$$

т.е.

$$\nabla T_1 \, ad_{\mathbf{f}}^i \mathbf{g} = 0, \quad i = 0, ..., n-2,$$
$$\nabla T_1 \, ad_{\mathbf{f}}^{n-1} \mathbf{g} \neq 0; \tag{4.4}$$

- Изчислява се трансформацията на състоянието

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) = (T_1 \quad L_{\mathbf{f}} T_1 \quad ... \quad L_{\mathbf{f}}^{n-1} T_1)^{\mathrm{T}} \tag{4.5}$$

и трансформацията на входа (4.2), с

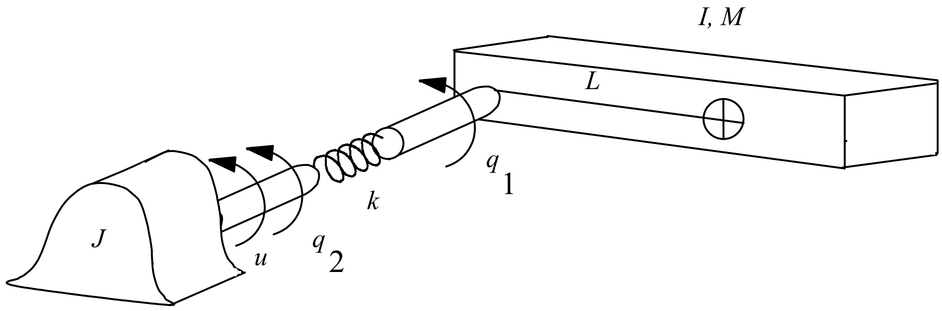
$$\alpha(\mathbf{x}) = -\frac{L_{\mathbf{f}}^n T_1}{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{n-1} T_1},$$
$$\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{n-1} T_1}. \tag{4.6}$$

Синтез на управляващо устройство на базата на линеаризация "вход-изход". С уравнението на състоянието, трансформирано в линейната форма (4.3), лесно могат да се синтезират управляващи устройства за стабилизация или за следене. Пример за стабилизация беше даден при разглеждането на интуитивния подход в линеаризацията с обратна връзка, където v е синтезирано така, че да разположи полюсите на еквивалентната линейна динамика на желани места, а физическият вход u е изчислен след това в съответствие с входните трансформации. Могат също да бъдат синтезирани следящи управляващи устройства на базата на еквивалентната линейна система, при условие че желаната траектория може да бъде изразена посредством първата линеаризираща компонента на състоянието z_1.

2. Примери

Пример 4.1 [3]**.** Да се разгледа управлението на механизма, даден на Фиг.4.1, представляващ звено, задвижвано от двигател чрез еластична пружина . Уравненията на движението са

$$\begin{aligned} &I\ddot{q}_1 + MgL\sin q_1 + k(q_1 - q_2) = 0 \\ &J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = u \end{aligned} . \tag{4.7}$$



Фиг.4.1 Гъвкаво съединен механизъм

Тъй като нелинейността се появява в първото уравнение, докато управляващият вход u е във второто, няма очевиден начин за синтезирането на линеаризиращ управляващ закон. Затова трябва да се провери дали линеаризацията "вход-състояние" е възможна.

Първо, динамиката на системата се представя в пространството на състоянията. С вектор на състоянието

$$\mathbf{x} = [q_1 \quad \dot{q}_1 \quad q_2 \quad \dot{q}_2]^{\mathrm{T}} \tag{4.8}$$

се получава

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2 \\ &\dot{x}_2 = -\frac{MgL}{I}\sin x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \\ &\dot{x}_3 = x_4 \\ &\dot{x}_4 = \frac{k}{J}(x_1 - x_3) + \frac{1}{J}u \quad . \end{aligned} \tag{4.9}$$

Така,

$$\mathbf{f} = \left[x_2 \quad -\frac{MgL}{I}\sin x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \quad x_4 \quad \frac{k}{J}(x_1 - x_3) \right]^{\mathbf{T}},$$

$$\mathbf{g} = \left[0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1/J \right]^{\mathbf{T}}.$$

Второ, проверяват се условията за управляемост и инволютивност. Матрицата на управляемостта се получава

$$[\mathbf{g},\, ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g},\, ad_{\mathbf{f}}^{2}\mathbf{g},\, ad_{\mathbf{f}}^{3}\mathbf{g}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -k/(IJ) \\ 0 & 0 & k/(IJ) & 0 \\ 0 & -1/J & 0 & k/J^2 \\ 1/J & 0 & -k/J^2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.10}$$

Тя има ранг 4 за $k > 0$, $IJ < \infty$. Следователно, векторните полета в (4.10) са линейно независими. По-нататък, тъй като векторните полета $[\mathbf{g},\, ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g},\, ad_{\mathbf{f}}^{2}\mathbf{g}]$ са константни, те формират инволютивно множество. Следователно, системата (4.7) е линеаризуема по вход-състояние.

Трето, търси се трансформация на състоянието $\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$ и трансформация на входа $u = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})v$, така че да се постигне линеаризация "вход-състояние". В съответствие с (4.4) уравненията за определяне на първата компонента T_1 на новия вектор на състоянието $\mathbf{z}$ са

$$\nabla T_1\, ad_{\mathbf{f}}^{0}\mathbf{g} = \frac{\partial T_1}{\partial x_1}0 + \frac{\partial T_1}{\partial x_2}0 + \frac{\partial T_1}{\partial x_3}0 + \frac{\partial T_1}{\partial x_4}\frac{1}{J} = 0\,, \tag{4.11}$$

$$\nabla T_1\, ad_{\mathbf{f}}\,\mathbf{g} = \frac{\partial T_1}{\partial x_1}0 + \frac{\partial T_1}{\partial x_2}0 + \frac{\partial T_1}{\partial x_3}(-\frac{1}{J}) + \frac{\partial T_1}{\partial x_4}0 = 0\,, \tag{4.12}$$

$$\nabla T_1\, ad_{\mathbf{f}}^{2}\mathbf{g} = \frac{\partial T_1}{\partial x_1}0 + \frac{\partial T_1}{\partial x_2}\frac{k}{IJ} + \frac{\partial T_1}{\partial x_3}0 + \frac{\partial T_1}{\partial x_4}(-\frac{k}{J^2}) = 0\,, \tag{4.13}$$

$$\nabla T_1\, ad_{\mathbf{f}}^{3}\mathbf{g} = \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(-\frac{k}{IJ}) + \frac{\partial T_1}{\partial x_2}0 + \frac{\partial T_1}{\partial x_3}\frac{k}{J^2} + \frac{\partial T_1}{\partial x_4}0 \neq 0\,. \tag{4.14}$$

От (4.11)-(4.14) се получава

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_4} = 0, \qquad \frac{\partial T_1}{\partial x_3} = 0, \qquad \frac{\partial T_1}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \neq 0.$$

Вижда се че T_1 не зависи от x_2, x_3, x_4 и трябва да се търси като функция само на x_1. Най-простото решение на горните уравнения е

$$z_1 = T_1 = x_1\,. \tag{4.15a}$$

Другите състояния могат да бъдат намерени от T_1 в съответствие с (4.5)

$$\begin{aligned} z_2 &= T_2 = \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f} = x_2 \\ z_3 &= T_3 = \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f} = -\frac{MgL}{I}\sin x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \\ z_4 &= T_4 = \frac{\partial T_3}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f} = -\frac{MgL}{I}x_2\cos x_1 - \frac{k}{I}(x_2 - x_4) \end{aligned} \tag{4.15б}$$

Съответно, трансформацията на входа е от вида

$$u = \left(\frac{\partial T_4}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{g}\right)^{-1}(v - \nabla \mathbf{f})$$

и може да се запише като

$$u = \frac{IJ}{k}(v - \alpha(\mathbf{x})), \tag{4.16}$$

където

$$\alpha(\mathbf{x}) = \frac{MgL}{I}\sin x_1 (x_2^2 + \frac{MgL}{I}\cos x_1 + \frac{k}{I}) + \frac{k}{I}(x_1 - x_3)(\frac{k}{I} + \frac{k}{J} + \frac{MgL}{I}\cos x_1).$$

Като резултат от горните трансформации на състоянието и на входа се получава следната система от линейни уравнения

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= v \end{aligned} \tag{4.17}$$

Извършената линеаризация "вход-състояние" е глобална, тъй като дифеоморфизмът $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ (4.15) и трансформацията на входа (4.6) са добре дефинирани навсякъде. Обратната зависимост на трансформацията на състоянието (4.15) е

$$
\begin{aligned}
x_1 &= z_1 \\
x_2 &= z_2 \\
x_3 &= z_1 + \frac{I}{k}(z_3 + \frac{MgL}{I}\sin z_1) \\
x_4 &= z_2 + \frac{I}{k}(z_4 + \frac{MgL}{I} z_2 \cos z_1)
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

Тази обратна трансформация е добре дефинирана и диференцируема навсякъде. Трансформацията на входа (4.16) също е добре дефинирана навсякъде.

За синтеза на следящо управление се изхожда от линеаризираната система

$$z_1^{(4)} = v$$

Приема се, че е желателно позицията на звеното z_1 да следи предварително определена траектория $z_{d1}(t)$. Следното управление

$$v = z_{d1}^{(4)} - \beta_3 \tilde{z}_1^{(3)} - \beta_2 \ddot{\tilde{z}}_1 - \beta_1 \dot{\tilde{z}}_1 - \beta_0 \tilde{z}_1 ,$$

води до следната затворена система по отношение на грешката в следенето

$$\tilde{z}_1^{(4)} + \beta_3 \tilde{z}_1^{(3)} + \beta_2 \ddot{\tilde{z}}_1 + \beta_1 \dot{\tilde{z}}_1 + \beta_0 \tilde{z}_1 = 0 .$$

При подходящ избор на положителните константи β_i, $i = 0, 1, 2, 3$ горната система може да се синтезира така, че да е асимптотически устойчива. За да се намери физическият вход u, трябва да се използва (4.16).

Пример 4.2. Да се линеаризира по вход-състояние следната нелинейна система

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1 + x_1^2 x_2 \\
\dot{x}_2 &= u \quad .
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

Проверката за линеаризуемост (*Теорема 4.1*) за конкретната система с ред $n = 2$ включва проверяване дали:

(1) векторите $\{\mathbf{g}, ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}\}$ са линейно независими, т.е., дали е изпълнено условието

$$\text{rank}\,(\mathbf{g} \quad ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}) = 2\,; \tag{4.20}$$

(2) дали е инволютивно $\{\mathbf{g}\}$.

В съответствие с (4.1) гладките векторни полета $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ са

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_1{}^2 x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Проверка за управляемост:

$$\{\mathbf{g}, ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}\} = \begin{Bmatrix} 0 & -x_1{}^2 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}, \text{ където } \quad ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g} = \nabla\mathbf{g}\,\mathbf{f} - \nabla\mathbf{f}\,\mathbf{g} = \begin{bmatrix} -x_1{}^2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{rank}\,(\mathbf{g} \quad ad_{\mathbf{f}}\mathbf{g}) = \text{rank}\begin{bmatrix} 0 & -x_1{}^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2\,,$$

$$\text{тъй като } \det\begin{bmatrix} 0 & -x_1{}^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = x_1{}^2 \neq 0 \ \text{ за } x_1 \neq 0\,.$$

Следователно условието за управляемост (4.20) (линейна независимост на векторните полета) е изпълнено.

Проверка за инволютивност:

За система от втори ред условието за инволютивност винаги е изпълнено, тъй като множеството композирано от едно единствено векторно поле $\{\mathbf{g}\}$ е инволютивно.

Тъй като условията на *Теорема 4.1* за управляемост и инволютивност са изпълнени то системата (4.19) е линеаризуема по вход-състояние.

За смяната на базиса в пространството на състоянията е необходимо, първо, да се определи първата координата $z_1 = T_1(\mathbf{x})$ на дифеоморфизма $\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$ от (4.4)

$$\nabla T_1\, ad_{\mathbf{f}}^0\mathbf{g} = 0: \quad \frac{\partial T_1}{\partial x_1}0 + \frac{\partial T_1}{\partial x_2}1 = 0\,, \tag{4.21}$$

$$\nabla T_1\, ad_{\mathbf{f}}\,\mathbf{g} \neq 0: \quad \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(-x_1{}^2) + \frac{\partial T_1}{\partial x_2}0 \neq 0\,. \tag{4.22}$$

От (4.21) и (4.22) следва $\dfrac{\partial T_1}{\partial x_2} = 0$, $\dfrac{\partial T_1}{\partial x_1} \neq 0$.

Следователно T_1 не зависи от x_2 и трябва да се търси като функция на x_1. Най-простото решение е $T_1 = x_1$. Другата компонента (T_2) на дифеоморфизма може да се намери от T_1 в съответствие с (4.5)

$$T_2 = L_{\mathbf{f}} T_1 = -x_1 + x_1{}^2 x_2 .$$

Координатите в новия базис са

$$\begin{aligned} z_1 &= T_1 = x_1 \\ z_2 &= T_2 = -x_1 + x_1{}^2 x_2 \end{aligned}, \tag{4.23}$$

а обратното преобразувание при $z_1 \neq 0$ е

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 \\ x_2 &= (z_1 + z_2)/z_1{}^2 \end{aligned} . \tag{4.24}$$

За определяне на трансформацията на входа (4.2) от (4.6) се изчисляват функциите

$$\alpha(\mathbf{x}) = -\frac{L_{\mathbf{f}}^2 T_1}{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} T_1} = -\frac{(-1 + 2x_1 x_2)(-x_1 + x_1{}^2 x_2)}{x_1{}^2}, \tag{4.25}$$

$$\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} T_1} = \frac{1}{x_1^2}, \tag{4.26}$$

където:

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{f}}^2 T_1 &= L_{\mathbf{f}}(L_{\mathbf{f}} T_1) = L_{\mathbf{f}}(-x_1 + x_1{}^2 x_2) = (-1 + 2x_1 x_2)(-x_1 + x_1{}^2 x_2), \\ L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} T_1 &= L_{\mathbf{g}}(-x_1 + x_1{}^2 x_2) = x_1{}^2 . \end{aligned}$$

Линеаризиращата обратна връзка (4.2) приема вида

$$u = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) v = \frac{1}{x_1{}^2}[v - (-1 + 2x_1 x_2)(-x_1 + x_1{}^2 x_2)]. \tag{4.27}$$

Системата (4.19) се линеаризира до

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= v \end{aligned} . \tag{4.28}$$

Пример 4.3 [2]**.** За всяка от следващите системи да се покаже, че е линеаризуема по вход-състояние, да се линеаризира и да се определи дефиниционната област.

$$\text{(а)}\quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= e^{x_2} u \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2^{\,2} + e^{x_2} u \\ \dot{x}_3 &= x_1 - x_2\ , \end{aligned} \qquad\qquad \text{(б)}\quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 (1 + x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + (1 + x_2) u \\ \dot{x}_3 &= x_2 (1 + x_1) - x_3 u\ . \end{aligned}$$

Забележка: В (а) да се опита с преобразувание от вида $T_1 = T_1(x_3)$, а в (б) - с $T_1 = T_1(x_1)$.

Пример 4.4 [2]**.** Робот от типа кола с полуремарке се моделира чрез уравнението

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \operatorname{tg} x_3 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\operatorname{tg} x_2}{a \cos x_3} + \frac{1}{b \cos x_2 \cos x_3} \operatorname{tg} u \\ \dot{x}_3 &= \frac{\operatorname{tg} x_2}{a \cos x_3}\quad . \end{aligned}$$

където a и b са положителни константи. Да се докаже, че системата е линеаризуема по "вход-състояние". Да се намери областта на валидност на линеаризирания модел.

Пример 4.5 [2]**.** Линеаризуема ли е по вход-състояние следната система и ако е така, да се линеаризира:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_3 - x_2 + u \\ \dot{x}_3 &= -x_1 + u\quad . \end{aligned}$$

3. Задачи за изпълнение и анализ на резултатите

При зададени от преподавателя модели на обекти се прилага линеаризация с обратна връзка от типа "вход-състояние", използваща унифицирана методика със средства от диференциалната геометрия. Предварително се проверяват условията за линеаризуемост. Дискутират се предимствата на подхода, при който не се разчита на интуиция, а се използва добре известен унифициран алгоритъм базиран на математичен апарат от диференциалната геометрия.

Упражнение № 5

Линеаризация "вход-изход" на SISO система

Целта на упражнението е запознаване с една унифицирана методика за линеаризация с обратна връзка от типа "вход-изход" на SISO система и с възникващите въпроси за устойчивостта на вътрешната динамика. Използува се математичен апарат от диференциалната геометрия.

1. Теоретични сведения

Разглежда се линеаризацията "вход-изход" на нелинейни системи с един вход и един изход, описани в пространството на състоянията с уравненията

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \\ y &= h(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{5.1}$$

където y е изходът. Под вход-изходна линеаризация се има предвид генерирането на *линейна* диференциална зависимост между изхода и новия вход v (v е подобен на еквивалентния вход при линеаризацията "вход-състояние"). По-долу са разгледани следните въпроси:

- Как се генерира линейна вход-изходна зависимост за една нелинейна система?
- Какво представляват вътрешната динамика и нулевата динамика, асоциирани с вход-изходната линеаризация?
- Как се синтезират устойчиво работещи управляващи устройства на базата на вход-изходната линеаризация?

Генериране на линейна вход-изходна зависимост. Основният подход за получаване на една вход-изходна зависимост е повтарящото се диференциране на изходната функция y, така че в тази зависимост да се появи входът. Започва се с

$$\dot{y} = \nabla h(\mathbf{f} + \mathbf{g}u) = L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})u\,.$$

Ако $L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x}) \neq 0$ за всички $\mathbf{x}$ в една област Ω, тогава входната трансформация

$$u = \frac{1}{L_{\mathbf{g}} h}(-L_{\mathbf{f}} h + v)$$

дава като резултат линейна диференциална зависимост между y и v:

$$\dot{y} = v\,.$$

Ако $L_{\mathbf{g}} h(\mathbf{x}) = 0$ за всички $\mathbf{x}$ в областта, може да се диференцира $\dot{y}$ за да се получи

$$\ddot{y} = L_{\mathbf{f}}{}^2 h(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}) u\,.$$

Ако $L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x})$ отново е нула, диференцирането продължава отново и отново, докато се получи

$$L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}{}^{r-1} h(\mathbf{x}) \neq 0\,.$$

Тогава управляващият закон

$$u = \frac{1}{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}{}^{r-1} h}(-L_{\mathbf{f}}{}^{r} h + v)$$

води до линейна мулти-интеграторна зависимост

$$y^{(r)} = v\,.$$

Броят на диференциранията на y, необходим за да се появи входът u се нарича относителна степен на системата. Формално тя може да се дефинира така:

Определение 5.1*: SISO системата има относителна степен* r *в област* Ω*, ако* $\forall \mathbf{x} \in \Omega$

$$\begin{aligned} &L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}{}^{i} h(\mathbf{x}) = 0\,, \quad \forall i, 0 \leq i < r-1\,, \\ &L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}{}^{r-1} h(\mathbf{x}) \neq 0\,. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Относно тази дефиниция:

- Ако относителната степен r на една система е равна на n, броят на състоянията, тогава вход-изходната линеаризация води до линеаризация "вход-състояние". Освен това, r не може да бъде по-голямо от n. Следователно, ще бъде разгледан само случая $r < n$.

- Дефиницията е съвместима с интуитивното определение, разгледано преди (Упражнение 2).
- Ако в една точка $\mathbf{x}_0$,

$$L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{\ r-1} h(\mathbf{x}_0) \neq 0,$$

  тогава поради гладкостта на $h(\mathbf{x})$ се предполага съществуването на една крайна околност на $\mathbf{x}_0$ в която се поддържа същото това условие. Замествайки това условие в неравенството в (5.2) се показва, че системата има относителна степен r в точката $\mathbf{x}_0$.
- Относителната степен на една нелинейна система не винаги е добре определена, например когато $L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{\ i} h = 0$ в точката $\mathbf{x}_0$, но не е нула за някои точки произволно близо до $\mathbf{x}_0$.

Нормална форма. Когато $r < n$ нелинейната система (5.1) може да бъде трансформирана, използвайки $h, L_{\mathbf{f}} h, \ldots, L_{\mathbf{f}}^{\ r-1} h$ като част от новите координати на състоянието, в така наречената "нормална форма". Нормалната форма на системата е

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \ldots \\ \dot{\xi}_{r-1} \\ \dot{\xi}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \ldots \\ \xi_r \\ a(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + b(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) u \end{bmatrix},$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = w(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}), \tag{5.3}$$

$$y = \xi_1,$$

където

$$\boldsymbol{\xi} = [h \quad L_{\mathbf{f}} h \quad \ldots \quad L_{\mathbf{f}}^{\ r-1} h]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\eta} = [\eta_1 \quad \eta_2 \quad \ldots \quad \eta_{n-r}]^{\mathrm{T}}.$$

Първите r уравнения на нормалната форма имат вид на съпровождаща канонична форма, докато последните $n-r$ уравнения не се отнасят директно към входа u на системата. За да бъде трансформирана нелинейната система в нормална форма, трябва компонентите на ξ да са независими (подходящи да служат като подмножество на вектора на състоянието) и $n-r$ други променливи η_i да бъдат намерени за окомплектоване на новия вектор на състоянието.

Лема 5.1: *Ако относителната степен на системата (5.1) е r в областта Ω, тогава градиентите $\nabla\xi_1, \nabla\xi_2, ..., \nabla\xi_r$ са линейно независими в Ω.*

За да се завърши трансформацията на координатите, се търсят още $n-r$ функции η_j, такива че множеството от функции ξ_i, η_j $(i=1,...,r;\ j=1,...,n-r)$ да са независими една от друга в Ω. Тъй като векторното поле на един единствен вектор $\mathbf{g}$ е инволютивно, теоремата на Фробениус гарантира съществуването на $n-1$ независими функции λ_k $(k=1, \dots, n-1)$, такива че

$$L_{\mathbf{g}}\lambda_k(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \tag{5.4}$$

Тъй като функциите ξ_i $(i=1,...,r-1)$ са независими и удовлетворяват (5.4) те могат да бъдат използувани като $r-1$ от функциите λ_k. Нека останалите $n-r$ независими функции, които удовлетворяват (5.4) да бъдат означени с η_j $(j=1,...,n-r)$. Тогава функциите ξ_i $(i=1,...,r-1)$ и η_j $(j=1,...,n-r)$ могат да основоположат $n-1$ нови състояния. От друга страна, като се вземе под внимание че ξ_r удовлетворява $L_{\mathbf{g}}\xi_r \neq 0$, а ξ_i $(i=1,...,r-1)$ и η_j $(j=1,...,n-r)$ удовлетворяват (5.4), лесно може да се покаже, че $n\times n$ размерният Якобиан на трансформацията на състоянието има пълен ранг в Ω

$$\mathrm{rank}\left[\left[\frac{\partial\xi_1}{\partial\mathbf{x}}\right]^{\mathrm{T}} \ \dots \ \left[\frac{\partial\xi_r}{\partial\mathbf{x}}\right]^{\mathrm{T}} \ \left[\frac{\partial\eta_1}{\partial\mathbf{x}}\right]^{\mathrm{T}} \ \dots \ \left[\frac{\partial\eta_{n-r}}{\partial\mathbf{x}}\right]^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} = n.$$

Това показва, че трансформацията на състоянието

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = [\xi_1, \dots, \xi_r, \eta_1, \dots, \eta_{n-r}]^{\mathrm{T}}$$

е дифеоморфизъм. С тази трансформация на състоянието нелинейната система се трансформира в нормалната форма (5.3) с

$$a(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = L_{\mathbf{f}}{}^{r} h(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}}{}^{r} h(\mathbf{T}^{-1}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})),$$
$$b(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}{}^{r-1} h(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}{}^{r-1} h(\mathbf{T}^{-1}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})).$$

Отсъствието на u в уравненията на η се дължи на факта, че $n-r$ координатите η_j $(j=1,...,n-r)$ са избрани да удовлетворяват (5.4).

Пример 5.1 [3]. Да се трансформира в нормална форма системата

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \tag{5.5}$$
$$y = h(\mathbf{x}) = x_3$$

Тъй като

$$\dot{y} = x_2$$
$$\ddot{y} = \dot{x}_2 = x_1 x_2 + u$$

според интуитивния подход системата има относителна степен $r=2$. Същият резултат се получава и от (5.2):

$i=0$: $\quad L_{\mathbf{g}} h(\mathbf{x}) = 0$

$i=1$: $\quad L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}) = x_2$, $\quad L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}) = 1 \neq 0$, $\quad$ следователно $r=2$.

За да се намери нормалната форма се приема

$$\xi_1 = h(\mathbf{x}) = x_3,$$
$$\xi_2 = L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}) = x_2.$$

Третата функция $\eta(\mathbf{x})$, необходима да завърши трансформацията, трябва да удовлетворява условието

$$L_{\mathbf{g}}\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x_1} e^{x_2} + \frac{\partial \eta}{\partial x_2} = 0.$$

Едно решение на това уравнение е

$$\eta(\mathbf{x}) = 1 + x_1 - e^{x_2}.$$

Якобиан матрицата на трансформацията на състоянието $\mathbf{z} = (\xi_1, \xi_2, \eta)^{\mathrm{T}}$ е

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -e^{x_2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Тя е неособена за всяко $\mathbf{x}$. Обратната трансформация е

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 + \eta + e^{\xi_2} \\ x_2 &= \xi_2 \\ x_3 &= \xi_1 . \end{aligned}$$

Дифеоморфизмът е глобален. С горния набор от нови координати на състоянието, динамиката на системата се представя в нормалната форма

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= (-1 + \eta + e^{\xi_2})\xi_2 + u \\ \dot{\eta} &= (1 - \eta - e^{\xi_2})(1 + \xi_2 e^{\xi_2}) . \end{aligned}$$

Нулева динамика. Посредством вход-изходна линеаризация динамиката на една нелинейна система се декомпозира във външна (вход-изход) част и вътрешна (ненаблюдаема) част. Тъй като външната част се състои от линейна зависимост между y и v, лесно е да се синтезира вход v, така че изходът y да бъде желания. Тогава въпросът е дали вътрешната динамика също ще се държи добре, т.е. дали вътрешните състояния ще останат ограничени. Тъй като синтезът на управление трябва да държи сметка за цялата динамика (и следователно няма да толерира неустойчивост на вътрешната динамика), вътрешното поведение трябва внимателно да се разгледа.

Вътрешната динамика асоциирана с вход-изходната линеаризация съответствува на последните $n-r$ уравнения $\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ на нормалната форма. Основно тази динамика зависи от изходните състояния $\boldsymbol{\xi}$. Специален е случаят на вътрешната динамика, когато управляващият вход е такъв, че изходът y е идентичен на нула. Този случай е съществен за нелинейната система, тъй като чрез изучаването му могат да се направят изводи за устойчивостта на вътрешната динамика.

Определение 5.2. *Нулевата динамика на нелинейната система (5.1) е динамиката на системата, подчинена на ограничението изходът да бъде идентично равен на нула.*

Ограничението изходът да бъде идентично равен на нула означава че той и всичките негови времеви производни са равни на нула. Така нулевата динамика на една система е нейната динамика, когато движението и е ограничено върху $r-$димeнсионна гладка повърхност (многообразие (manifold)) M^* в $\mathbf{R}^n$ дефинирана чрез

$$M^* = \left\{ \mathbf{x} \mid h(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}) = \ldots = L_{\mathbf{f}}{}^{r-1} h(\mathbf{x}) = 0 \right\}.$$

За да работи системата в нулева динамика, т.е. състоянието $\mathbf{x}$ да стои на повърхнината M^*, началното състояние на системата $\mathbf{x}(0)$ трябва да бъде на тази повърхнина и еквивалентният вход v трябва да бъде 0, така че $y^{(r)}(t) = 0$, т.е. y да стои в нулата. Това означава, че първоначалният вход u трябва да бъде даден чрез обратна връзка по състоянието

$$u^*(t) = -\frac{L_{\mathbf{f}}{}^{r} h(\mathbf{x})}{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}{}^{r-1} h(\mathbf{x})}.$$

Следователно, съответствуващото на нулевата динамика състояние $\mathbf{x}$ на системата се развива според

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) u^*(\mathbf{x}).$$

Със системата (5.1) изразена в нормалната форма (5.3), нулевата динамика е от вида

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\xi}} &= 0 \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{w}(0, \boldsymbol{\eta}) \end{aligned},$$

която следва от дефиницията за нулева динамика и дефиницията на координатите $\boldsymbol{\xi}$. В $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ координатите, управляващият вход u, необходим да поддържа $\boldsymbol{\xi}$ в нула, е

$$u^*(t) = -\frac{a(0, \boldsymbol{\eta}(t))}{b(0, \boldsymbol{\eta}(t))}$$

и зависи само от вътрешните състояния $\boldsymbol{\eta}(t)$. Следователно развитието на вътрешните състояния $\boldsymbol{\eta}(t)$ и на управляващия вход u^*, необходим да гарантира нулев изход, зависи от началните стойности $\boldsymbol{\eta}(0)$ (тъй като $\boldsymbol{\xi}(0) = 0$).

Пример 5.2*:* Разглежда се нелинейната система (5.5). Нейната вътрешна динамика се представя чрез уравнението

$$\dot{\eta} = (1 - \eta - e^{\xi_2})(1 + \xi_2 e^{\xi_2}).$$

Нулевата динамика се получава чрез заместване $\xi_1 = 0$ и $\xi_2 = 0$

$$\dot{\eta} = -\eta .$$

Входът, който винаги нулира изхода е

$$u = -(-1 + \eta + e^{\xi_2})\xi_2 .$$

Синтез на глобално управление. Както бе показано по-рано устойчивостта на *нулевата динамика* гарантира само *локална устойчивост* на една система за управление базирана на вход-изходна линеаризация (освен ако относителната степен се равнява на реда на системата, в който случай няма вътрешна динамика). Устойчивостта на *вътрешната динамика* сама по себе си е неподатлива, трудна за определяне (с изключение на някои прости случаи). Могат ли идеите за вход-изходна линеаризация да бъдат полезни в задачите за глобална устойчивост и как да се постигне устойчивост на системата, използвайки дадена вход-изходна линеаризация в случай, че нулевата динамика е неустойчива?

Един подход към синтеза на глобално управление, базиран на частична линеаризация с обратна връзка е да се разгледа задачата на управлението като стандартна задача за синтез на управляващо устройство по Ляпунов, обаче опростена от факта че поставянето на системата в нормална форма прави част от динамиката линейна. Както в повечето синтези по Ляпунов, подходът действува на принципа "опит-грешка", но може действително да доведе до задоволителни решения. Той ще бъде демонстриран чрез пример, в който управляващият закон базиран на частична линеаризация, се модифицира за да гарантира глобалната устойчивост на цялата система.

Основната идея след поставянето на системата в нормална форма е да се гледа на $\boldsymbol{\xi}$ като "вход" към вътрешната динамика, а на $\boldsymbol{\eta}$ - като "изход". Тогава първата стъпка е да се намерят "управляващ закон" $\boldsymbol{\xi}_0 = \boldsymbol{\xi}_0(\boldsymbol{\eta})$, който да стабилизира вътрешната динамика и функция на Ляпунов V_0, демонстрираща тези стабилизиращи свойства. Това е по-лесно отколкото намирането на стабилизиращ управляващ закон за първоначалната система, тъй като вътрешната динамика е от по-нисък ред. Втората стъпка е връщане назад към първоначалната задача за глобална устойчивост, за да се определи подходяща кандидат функция на Ляпунов V, *като модифицирана версия на* V_0, и да се избере управляващият вход v, така че V да бъде функция на Ляпунов за цялата затворена динамика.

Пример 5.3*:* Да се разгледа задачата за стабилизация на една нелинейна система, чиято нормална форма е

$$\dot{y} = v, \tag{5.6}$$

$$\ddot{z} + \dot{z}^3 + yz = 0, \tag{5.7}$$

където v е управляващият вход, а $\boldsymbol{\eta} = [z \quad \dot{z}]^{\mathrm{T}}$. Полага се $\xi = y$, $\eta_1 = z$, $\eta_2 = \dot{z}$, в резултат на което се стига до

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= v \\ \dot{\eta}_1 &= \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= -\xi\eta_1 - \eta_2^{\,3} \,. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Нека V_0 е функция на Ляпунов:

$$V_0 = \frac{1}{4}\eta_1^{\,4} + \frac{1}{2}\eta_2^{\,2}.$$

След диференциране на V_0 и като се използват уравненията на динамика (5.8) се получава

$$\dot{V}_0 = \frac{\partial V_0}{\partial \eta_1}\dot{\eta}_1 + \frac{\partial V_0}{\partial \eta_2}\dot{\eta}_2 = \eta_1^{\,3}\eta_2 + \eta_2(-\eta_2^{\,3} - \xi\eta_1) = -\eta_2^{\,4} - \eta_1\eta_2\,(\xi - \eta_1^{\,2})\,.$$

Следавателно V_0 е функция на Ляпунов, индицираща устойчивостта на (5.7), *когато* ξ *формално се замести с* $\xi_0 = \eta_1^{\,2}$. При такъв избор на ξ вътрешната динамика е асимптотически устойчива.

Да се разгледа следната кандидат функция на Ляпунов

$$V = V_0 + \frac{1}{2}(\xi - \eta_1^{\,2})^2,$$

получена чрез добавяне към V_0 на един квадратичен член "грешка" $(\xi - \xi_0)$. Получава се

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \xi}\dot{\xi}_1 + \frac{\partial V}{\partial \eta_1}\dot{\eta}_1 + \frac{\partial V}{\partial \eta_2}\dot{\eta}_2 = -\eta_2^{\,4} + (\xi - \eta_1^{\,2})(v - 3\eta_1\eta_2).$$

Това предполага избора на управляващ закон

$$v = -\xi + 3\eta_1\eta_2 + \eta_1^{\,2},$$

който води до

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \xi}\dot{\xi}_1 + \frac{\partial V}{\partial \eta_1}\dot{\eta}_1 + \frac{\partial V}{\partial \eta_2}\dot{\eta}_2 = -\eta_2^{\,4} - (\xi - \eta_1^{\,2})^2.$$

Този избор на v привежда състоянието на цялата система към нула.

2.Примери

Пример 5.4. Разглежда се следната нелинейна система

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + 2x_1^{\,2} \\ \dot{x}_2 &= x_3 + u \\ \dot{x}_3 &= x_1 - x_3 \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{5.9}$$

В съответствие с (5.1) $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} x_2 + 2x_1^{\,2} \\ x_3 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $h = x_1$.

Прилага се (5.2)

$$i = 0: \qquad L_{\mathbf{g}} h(\mathbf{x}) = 0\,,$$
$$i = 1: \qquad L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}) = 2x_1^{\;2} + x_2, \qquad L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}) = 1 \neq 0\,.$$

Следователно относителната степен на системата е $r = 2$. Тъй като редът на системата е $n = 3$, то линеаризираната система ще има вътрешна динамика с едно скрито състояние. За да се намери нормалната форма се полага

$$\xi_1 = h(\mathbf{x}) = x_1\,,$$
$$\xi_2 = L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}) = 2x_1^{\;2} + x_2\,.$$

За определяне на нормалната форма

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2$$
$$\dot{\xi}_2 = a(\boldsymbol{\xi}, \eta) + b(\boldsymbol{\xi}, \eta)u$$
$$\dot{\eta} = w(\boldsymbol{\xi}, \eta)$$

се изчисляват функциите

$$a(\boldsymbol{\xi}, \eta) = L_{\mathbf{f}}^{\;2} h = 4x_1(2x_1^{\;2} + x_2) + x_3\,,$$
$$b(\boldsymbol{\xi}, \eta) = L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h = 1\,.$$

Третата функция $\eta(\mathbf{x})$ необходима да завърши трансформацията трябва да удовлетворява условието

$$L_{\mathbf{g}}\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x_1}.0 + \frac{\partial \eta}{\partial x_2}.1 + \frac{\partial \eta}{\partial x_3}.0 = 0\,.$$

От $\dfrac{\partial \eta}{\partial x_2} = 0$ следва че η не зависи от x_2 и трябва да се търси като функция на x_1 и x_3. Едно решение на това уравнение е

$$\eta = x_1 + x_3\,.$$

Якобиан матрицата на трансформацията на състоянието $\mathbf{z} = (\xi_1, \xi_2, \eta)^{\mathrm{T}}$ е

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4x_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и е неособена за всяко $\mathbf{x}$. Обратната трансформация е

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 \\ x_2 &= \xi_2 - 2\xi_1{}^2 \\ x_3 &= \eta - \xi_1 \,. \end{aligned}$$

Дифеоморфизмът е глобален. С така определения набор от нови координати на състоянието, динамиката на системата се представя в нормалната форма

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= 4\xi_1\xi_2 - \xi_1 + \eta + u \\ \dot{\eta} &= 2\xi_1 + \xi_2 - \eta \,. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Линеаризиращата обратна връзка е

$$u = v - 4\xi_1\xi_2 + \xi_1 - \eta \,,$$

а линеаризираната система -

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= v \\ \dot{\eta} &= 2\xi_1 + \xi_2 - \eta \,. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Вътрешната динамика се описва с третото уравнение на (5.11)

$$\dot{\eta} = 2\xi_1 + \xi_2 - \eta \,, \tag{5.12}$$

а нулевата динамика се получава като в (5.12) се замести $\xi_1 = \xi_2 = 0$

$$\dot{\eta} = -\eta \,. \tag{5.13}$$

От (5.13) се вижда, че нулевата динамика е експоненциално устойчива ($\eta(t) = \eta(0)e^{-t}$).

Пример 5.5. Да се линеаризира моделът на обект, описван с уравнението на Дюфинг

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_1^3 + u\\ y &= x_1.\end{aligned} \tag{5.14}$$

В съответствие с (5.1) $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 - x_1^3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $h = x_1$.

Прилага се (5.2)

$$\begin{aligned}&i = 0: \qquad L_{\mathbf{g}} h(\mathbf{x}) = 0\\ &i = 1: \qquad L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}) = x_2, \qquad L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}) = 1 \neq 0.\end{aligned}$$

Следователно относителната степен на системата е $r = 2$. Тъй като редът на системата е също $n = 2$, то линеаризираната система няма вътрешна динамика. За да се намери нормалната форма се полага

$$\begin{aligned}\xi_1 &= h(\mathbf{x}) = x_1,\\ \xi_2 &= L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}) = x_2.\end{aligned}$$

За определяне на нормалната форма

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2\\ \dot{\xi}_2 &= a(\boldsymbol{\xi}) + b(\boldsymbol{\xi})u\end{aligned}$$

се изчисляват функциите

$$\begin{aligned}a(\boldsymbol{\xi}) &= L_{\mathbf{f}}^2 h = -x_1 - x_1^3 = -\xi_1 - \xi_1^3,\\ b(\boldsymbol{\xi}) &= L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h = 1.\end{aligned}$$

Обратната трансформация е

$$\begin{aligned}x_1 &= \xi_1\\ x_2 &= \xi_2\end{aligned}.$$

Динамиката на системата се представя в нормалната форма

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2\\ \dot{\xi}_2 &= -\xi_1 - \xi_1^3 + u.\end{aligned} \tag{5.15}$$

Линеаризиращата обратна връзка е

$$u = v + \xi_1 + \xi_1^{\,3},$$

а линеаризираната система -

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= v\,. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Получените крайни резултати са същите като в *Пример 1.3*, при който се използва интуитивният подход.

Пример 5.6 [2]**.** Разглежда се системата

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + 2x_1^{\,2} \\ \dot{x}_2 &= x_3 + u \\ \dot{x}_3 &= x_1 - x_3 \\ y &= x_1\,. \end{aligned}$$

Да се синтезира управляващ закон на базата на линеаризация от типа "вход-изход", такъв че изходът y асимптотично да следи зададения сигнал $y_d(t) = \sin t$.

3. Задачи за изпълнение и анализ на резултатите

При зададени от преподавателя модели на обекти се прилага линеаризация с обратна връзка от типа "вход-изход", използваща унифицирана методика със средства от диференциалната геометрия. Изследва се за устойчивост нулевата динамика. Синтезира се управление гарантиращо устойчивост по Ляпунов – за вътрешната динамика и за цялата система. Дискутират се предимствата на поетапното определяне на функцията на Ляпунов и на изследването на нулевата динамика при определяне устойчивостта на вътрешната динамика.

Упражнение № 6

Линеаризация чрез обратна връзка на MIMO системи

Целта на упражнението е запознаване с алгоритъма за линеаризация чрез обратна връзка на многомерни системи (с много входове и изходи). Използува се математичен апарат от диференциалната геометрия.

1. Теоретични сведения

За случая MIMO (multi-input-multi-output) се разглеждат системи с един и същи брой входове и изходи, представени в следния вид

$$
\begin{aligned}
&\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})u_1 + \ldots + \mathbf{g}_m(\mathbf{x})u_m \\
&y_1 = h_1(\mathbf{x}) \\
&\ldots. \\
&y_m = h_m(\mathbf{x}),
\end{aligned}
$$

където: [illegible] е векторът на състоянието; $\mathbf{u} = -\mathbf{E}^{-1}\begin{bmatrix} L_{\mathbf{f}}^{r_1} h_1(\mathbf{x}) \\ \ldots \\ \ldots \\ L_{\mathbf{f}}^{r_m} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \mathbf{E}^{-1}\begin{bmatrix} v_1 \\ \ldots \\ \ldots \\ v_m \end{bmatrix}$ са управляващите входове; $\mathbf{x}$ 0 - изходите; Ω и $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ са гладки векторни полета; [illegible] са гладки скаларни функции. Ако се съберат управляващите входове $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ в един вектор $\mathbf{u}$, съответствуващите вектори $\mathbf{g}_i$ в една матрица $\mathbf{G}$, а изходите y_j във вектор $\mathbf{y}$, уравненията на системата могат да бъдат записани в следната компактна форма:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\,\mathbf{u} \\
&y = \mathbf{h}(\mathbf{x}).
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

Подходът за извършване на линеаризацията "вход-изход" отново се състои в диференцирането на изходите y_j на системата докато в зависимостта се появят входовете, подобно на SISO системите. Първото диференциране води до

$$\dot{y}_j = L_{\mathbf{f}} h_j + \sum_{i=1}^{m} (L_{g_i} h_j) u_i \,.$$

Ако $L_{g_i} h_j(\mathbf{x}) = 0$ за всяко i, тогава входовете не се появяват в зависимостта и трябва да се диференцира отново. Допуска се, че r_j е най-малкото цяло число, такова че поне един от входовете се появява в $y_j^{(r_j)}$, тогава

$$y_j^{(r_j)} = L_{\mathbf{f}}^{r_j} h_j + \sum_{i=1}^{m} L_{g_i} L_{\mathbf{f}}^{r_j - 1} h_j u_i$$

с $L_{g_i} L_{\mathbf{f}}^{r_j - 1} h_j(\mathbf{x}) \neq 0$ за поне едно i, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$. Ако горната процедура се изпълни за всеки изход y_j, могат да се получат общо m уравнения в горната форма, които се записват компактно като

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \ldots \\ \ldots \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{\mathbf{f}}^{r_1} h_1(\mathbf{x}) \\ \ldots \\ \ldots \\ L_{\mathbf{f}}^{r_m} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \mathbf{E}(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} u_1 \\ \ldots \\ \ldots \\ u_m \end{bmatrix}, \qquad (6.2)$$

където $m \times m$ матрицата $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ се определя като

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_1 - 1} h_1 & \ldots\ldots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_1 - 1} h_1 \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_m - 1} h_m & \ldots\ldots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_m - 1} h_m \end{bmatrix}.$$

Матрицата $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ се нарича *декуплираща* (развързваща) за MIMO системата. Ако тя е неособена в област Ω около една точка $\mathbf{x}_0$, тогава трансформацията на входа

$$\mathbf{u} = -\mathbf{E}^{-1} \begin{bmatrix} L_{\mathbf{f}}^{r_1} h_1(\mathbf{x}) \\ \ldots \\ \ldots \\ L_{\mathbf{f}}^{r_m} h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \mathbf{E}^{-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ \ldots \\ \ldots \\ v_m \end{bmatrix} \qquad (6.3)$$

води до линейна диференциална зависимост между изхода $\mathbf{y}$ и новия вход $\mathbf{v}$

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \dots \\ \dots \\ y_m^{(r_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \dots \\ \dots \\ v_m \end{bmatrix}. \tag{6.4}$$

Горната вход-изходна зависимост е декуплирана (развързана), освен че е линейна. Тъй като v_i въздейства само върху съответстващия изход y_i, и не върху останалите, управляващият закон (6.3) се нарича *декуплиращ управляващ закон*. Като резултат от декуплирането може да се използува SISO синтез по всеки канал $y-v$ в (6.4) за синтезиране на управляващи устройства за следене или стабилизация.

Концепцията за *относителна степен* може да бъде формализирана за MIMO системи. Относителната степен на MIMO системата се определя от m цели числа, тъй като има относителна степен асоциирана към всеки изход.

Определение 6.1: *Системата (6.1) има относителна степен* $(r_1,\dots,r_m)$ *в* $\mathbf{x}_0$ *ако съществува околност* Ω *на* $\mathbf{x}_0$ *такава че* $\forall \mathbf{x} \in \Omega$,

- $L_{g_i} L_{\mathbf{f}}^k h_j(\mathbf{x}) = 0$, $0 \le k \le r_i - 1$, $1 \le i, j \le m$,
- $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ *е неособена.*

Общата относителна степен на системата се определя чрез

$$r = r_1 + \dots + r_m .$$

Нека относителната степен да е по-малка от реда на системата ($r < n$). За разглежданата система може да се получи нормална форма по начин подобен на SISO случая. Първо, като координати се избират

$$\begin{array}{llll} \xi_1^1 = h_1(\mathbf{x}) & \xi_2^1 = L_{\mathbf{f}} h_1(\mathbf{x}) & \dots & \xi_{r_1}^1 = L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ \quad \dots & & & \\ \xi_1^m = h_m(\mathbf{x}) & \xi_2^m = L_{\mathbf{f}} h_m(\mathbf{x}) & \dots & \xi_{r_m}^m = L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_1(\mathbf{x}) \end{array}$$

Това са m-те изхода y_j и техните производни до ред r_j.

Подобно на SISO случая, r-те координати ξ_i^j, $j = 1,...,m$, $i = 1,...,r_j$ са независими и могат да се използват като частичен набор от координати за нов вектор на състоянието. Това следва от линейната независимост на градиентните вектори

$$L_{\mathbf{f}}^i h_j(\mathbf{x}), \quad 0 \le i \le r_j - 1, \qquad 1 \le j \le m,$$

което може да се покаже по начин аналогичен на SISO случая, използувайки неособеността на декуплиращата матрица $\mathbf{E}$. Сега, нека се довърши изборът на новия вектор на състоянието чрез избиране на още $n-r$ функции $\eta_1,...,\eta_{n-r}$, които са независими една спрямо друга и по отношение на преди това избраните r координати. Това винаги може да бъде направено въз основа на теоремата на Фробениус. Обаче за разлика от SISO случая, вече не е възможно да се гарантира, че

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad L_{g_i} \eta_k(\mathbf{x}) = 0, \quad 1 \le i \le m, \quad 1 \le k \le n-r,$$

освен ако векторните полета $\mathbf{g}_1,...,\mathbf{g}_m$ са инволютивни в Ω. Като резултат, в уравненията на състоянието за тези $n-r$ координати ще се появи входният вектор $\mathbf{u}$.

С $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ като координати, уравненията на системата могат да бъдат представени в нормална форма. Външната динамика се описва с

$$\begin{aligned} \xi_1^j &= \xi_2^j \\ &\dots \\ \xi_{r_j}^j &= a_j(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + \sum_{i=1}^{m} b_j^i(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) u_i \end{aligned}$$

където $j = 1,2,...,m$, а

$$\begin{aligned} a_j(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) &= L_{\mathbf{f}}^{r_j} h_j(\mathbf{x}) \\ b_j^i(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) &= L_{\mathbf{g}_i} L_{\mathbf{f}}^{r_j - 1} h_j(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Вътрешната динамика е

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})\mathbf{u} \\ w_k(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) &= L_{\mathbf{f}} \eta_k(\mathbf{x}) \\ P_{ki}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) &= L_{\mathbf{g}_i} \eta_k(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

където: $k = 1,2,...,n-r$; $i = 1,2,...,m$; $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{(n-r)\times m}$; ; $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^{n-r}$. Както и в SISO случая управляващият закон (6.3) превръща $n-r$ състояния $\boldsymbol{\eta}$ в ненаблюдаеми.

Интересен е случаят на горната вход-изходна линеаризация, когато общата относителна степен r е равна на n, т.е.

$$\sum_{j=1}^{m} r_j = n\,.$$

В този случай няма вътрешна динамика. С управляващия закон (6.3) се линеаризира първоначалната нелинейна система. С еквивалентните входове v_i, синтезирани както в SISO случая, може да се постигне и стабилизация и следене за системата без притеснения за устойчивостта на вътрешната динамика. Необходимите и достатъчни условия за линеаризацията "вход-състояние" на MIMO нелинейните системи са подобни и по-сложни на тези за SISO системите.

2. Примери

Пример 6.1. Да се линеаризира чрез обратна връзка следният модел на непрекъснат ферментационен процес

$$\begin{aligned}
\dot{X}(t) &= \frac{\mu_m S(t)}{K_S + S(t)} X(t) - D(t)\,X(t) \\
\dot{S}(t) &= -\frac{1}{Y}\frac{\mu_m S(t)}{K_S + S(t)} X(t) + D(t)\,(S_0(t) - S(t))\,,
\end{aligned} \tag{6.5}$$

където: $X(t)$ е концентрацията на биомаса; $S(t)$ - концентрацията на лимитиращ субстрат; $D(t)$ - скоростта на разреждане; $S_0(t)$ - концентрацията на лимитиращ субстрат във входния поток; μ_m - максимална специфичната скорост на растеж на биомасата; K_S - коефициент на насищане; Y - икономически коефициент.

Въвеждат се следните променливи на състоянието $x_1(t) = X(t)$ и $x_2(t) = S(t)$. Управляващите входове се означават като $w_1(t) = D(t)$ и $w_2(t) = S_0(t)$. За осигуряване на линейност по отношение на входните сигнали се полага $u_1(t)=w_1(t)$ и $u_2(t)=w_1(t)w_2(t)$. Уравнението на състоянието на ферментационния процес добива вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \frac{\mu_m x_2(t)}{K_S + x_2(t)} x_1(t) - x_1(t)u_1(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{1}{Y}\frac{\mu_m x_2(t)}{K_S + x_2(t)} x_1(t) - x_2(t)u_1(t) + u_2(t)\,,\end{aligned} \tag{6.6}$$

а уравнението на изхода се представя като

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x_1(t)\\ y_2(t) &= x_2(t)\end{aligned}\,. \tag{6.7}$$

В съответствие с (6.1)

$$f_1 = \frac{\mu_m x_2(t)}{K_S + x_2(t)} x_1, \quad f_2 = -\frac{1}{Y}\frac{\mu_m x_2(t)}{K_S + x_2(t)} x_1, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h_1 = x_1, \quad h_2 = x_2.$$

Още след първото диференциране на изходите се получава

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \frac{\mu_m x_2}{K_S + x_2} x_1 - x_1 u_1\\ \dot{y}_2 &= -\frac{1}{Y}\frac{\mu_m x_2}{K_S + x_2} x_1 - x_2 u_1 + u_2\,.\end{aligned} \tag{6.8}$$

Относителните степени по двата изхода са $r_1 = 1$ и $r_2 = 1$. Декуплиращата матрица

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{\mathbf{g}_1} h_1 & L_{\mathbf{g}_2} h_1 \\ L_{\mathbf{g}_1} h_2 & L_{\mathbf{g}_1} h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 & 0 \\ -x_2 & 1 \end{bmatrix},$$

е неособена при $x_1 \neq 0$, а обратната матрица е

$$\mathbf{E}^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1/x_1 & 0 \\ -x_2/x_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Управленията u_1 и u_2 линеаризиращи системата в съответствие с (6.3) са

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\mu_m x_2}{K_S + x_2} - \frac{1}{x_1} v_1 \\ u_2 &= \frac{\mu_m x_2}{K_S + x_2}(x_2 + \frac{x_1}{Y}) - \frac{x_2}{x_1} v_1 + v_2 \end{aligned}, \tag{6.9}$$

при $L_{\mathbf{f}} h_1 = \frac{\mu_m x_2}{K_S + x_2} x_1$, $L_{\mathbf{f}} h_2 = -\frac{1}{Y} \frac{\mu_m x_2}{K_S + x_2} x_1$. След заместване на (6.9) в (6.8) се получава линеаризираната система

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= v_1 \\ \dot{y}_2 &= v_2 \end{aligned}. \tag{6.10}$$

Пример 6.2 [4]. Да се линеаризира чрез обратна връзка уравнението, описващо въртеливото движение на идеално твърдо тяло в тримерното пространство, т.е., следната многомерна система

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{i_3 - i_2}{i_1} x_2 x_3 + \frac{1}{i_1} u_1 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{i_1 - i_3}{i_2} x_3 x_1 + \frac{1}{i_2} u_2 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{i_2 - i_1}{i_3} x_1 x_2 + \frac{1}{i_3} u_3 \end{aligned} \tag{6.11}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 , \\ y_3 &= x_3 \end{aligned} \tag{6.12}$$

където $\mathbf{x} = [x_1 \ \ x_2 \ \ x_3]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{u} = [u_1 \ \ u_2 \ \ u_3]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{y} = [y_1 \ \ y_2 \ \ y_3]^{\mathrm{T}}$, а $\mathbf{i} = [i_1 \ \ i_2 \ \ i_3]^{\mathrm{T}}$ е константен вектор.

В съответствие с (6.1):

$$f_1 = \frac{i_2 - i_3}{i_1} x_2 x_3, \qquad f_2 = \frac{i_3 - i_1}{i_2} x_3 x_1, \qquad f_3 = \frac{i_1 - i_2}{i_3} x_2 x_1,$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} 1/i_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/i_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/i_3 \end{bmatrix},$$

$$h_1 = x_1, \quad h_2 = x_2, \quad \text{и} \quad h_3 = x_3.$$

Относителните степени, съответстващи на изходните функции h_1, h_2, h_3 са съответно, $r_1 = 1$, $r_2 = 1$, и $r_3 = 1$. Тъй като декуплиращата матрица $\mathbf{E}(\mathbf{x})$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{\mathbf{g}_1} h_1 & L_{\mathbf{g}_2} h_1 & L_{\mathbf{g}_3} h_1 \\ L_{\mathbf{g}_1} h_2 & L_{\mathbf{g}_1} h_2 & L_{\mathbf{g}_1} h_2 \\ L_{\mathbf{g}_1} h_3 & L_{\mathbf{g}_2} h_3 & L_{\mathbf{g}_3} h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/i_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/i_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/i_3 \end{bmatrix}, \tag{6.13}$$

е неособена, управляващите изходи, линеаризиращи системата (6.11)-(6.12) в съответствие с (6.3) са

$$\begin{aligned} u_1 &= -(i_2 - i_3) x_2 x_3 + i_1 v_1 \\ u_2 &= -(i_3 - i_1) x_3 x_1 + i_2 v_2 \,, \\ u_3 &= -(i_1 - i_2) x_1 x_2 + i_3 v_3 \end{aligned} \tag{6.14}$$

при $\quad L_{\mathbf{f}} h_1 = \dfrac{i_2 - i_3}{i_1} x_2 x_3, \quad L_{\mathbf{f}} h_2 = \dfrac{i_3 - i_1}{i_2} x_3 x_1, \quad L_{\mathbf{f}} h_3 = \dfrac{i_1 - i_2}{i_3} x_2 x_1.$

Линеаризираната система е

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= v_1 \\ \dot{y}_2 &= v_2 \,. \\ \dot{y}_3 &= v_3 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Получените резултати са същите, както при интуитивния подход (виж *Пример 1.6*).

3. Задачи за изпълнение и анализ на резултатите

При зададени от преподавателя модели на многомерни обекти се прилага линеаризация с обратна връзка, използуваща математичен апарат от диференциалната геометрия. Дискутират се предимствата на използването на унифицирана методика за линеаризацията на многомерни системи пред интуитивния подход.

ЛИТЕРАТУРА

1. Isidori, A., *Nonlinear Control Systems: An Introduction*. 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1989
2. Khalil, H. K., *Nonlinear Systems*. 2nd Edition, Prentice Hall, New Jersey, 1996
3. Slotine, J.-J., and W. Lie, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall International, Inc., 1991
4. Vidyasagar, M., *Nonlinear Systems Analysis*, 2nd Edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993

съвременна теория на Управлението

II

Д. ЦАНКОВА

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ чрез ОБРАТНА ВРЪЗКА

Теория

и

решени задачи

Пловдив 2003