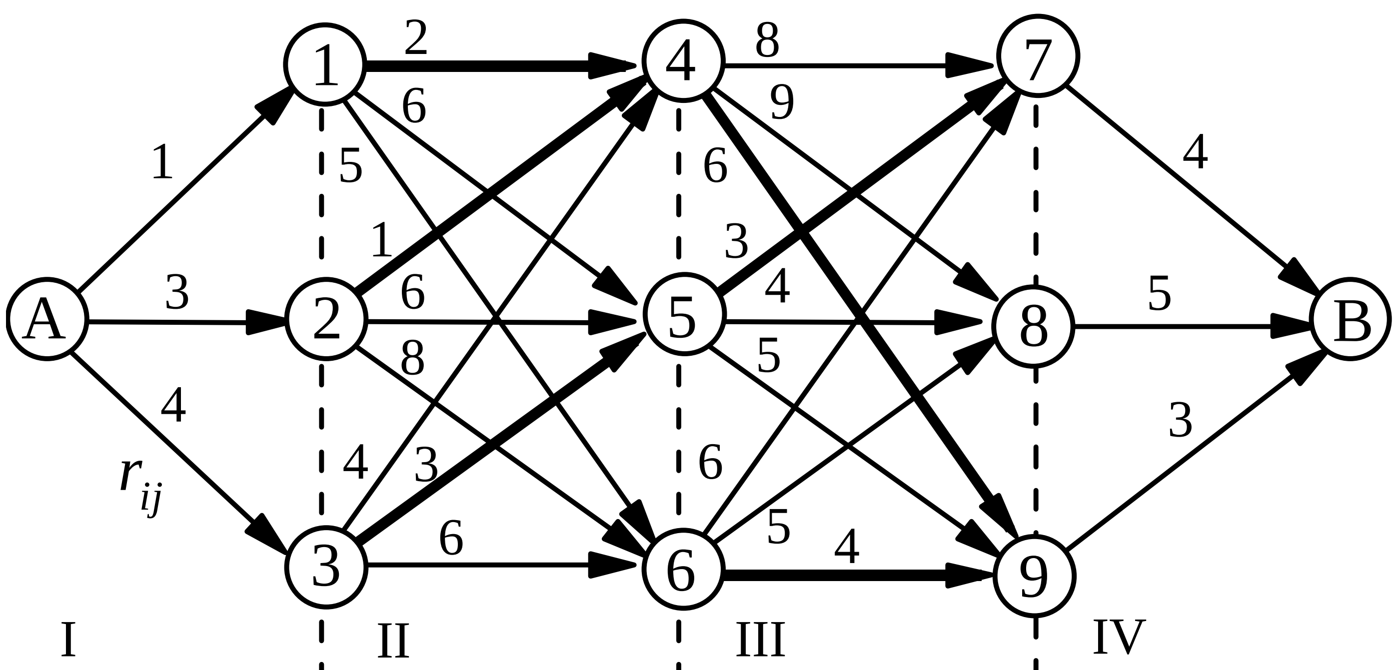
16. Приложение на динамичното програмиране при решаване на комбинаторни задачи. Пример.

1. Теоретични сведения.

- *Динамичното програмиране се прилага* за решаване на *комбинаторни задачи* за определяне на оптимални пътища по определен критерий (разстояние, време, разходи) и намиране на оптимална комбинация при последователност от множество възможни решения.
- Чрез *комбинаторната задача* най-добре се илюстрира прилагането на *принципа на оптималността*.
- Тези задачи могат да се разглеждат като *многостадийни процеси на вземане на решения*, т.е. избор на управление на всеки стадий от определен краен брой възможни решения.

- *Пример*: задачата за най-краткия път между точка А и В. На всяко разклонение (стадий) трябва да се вземе решение (управление) по кой път да се тръгне, така че да се премине от точка А до точка В като се минимизира цената на прехода (време, път, разход). Разходите за преминаване от точка в точка (от разклонение до разклонение) са зададени предварително като r_{ij} .



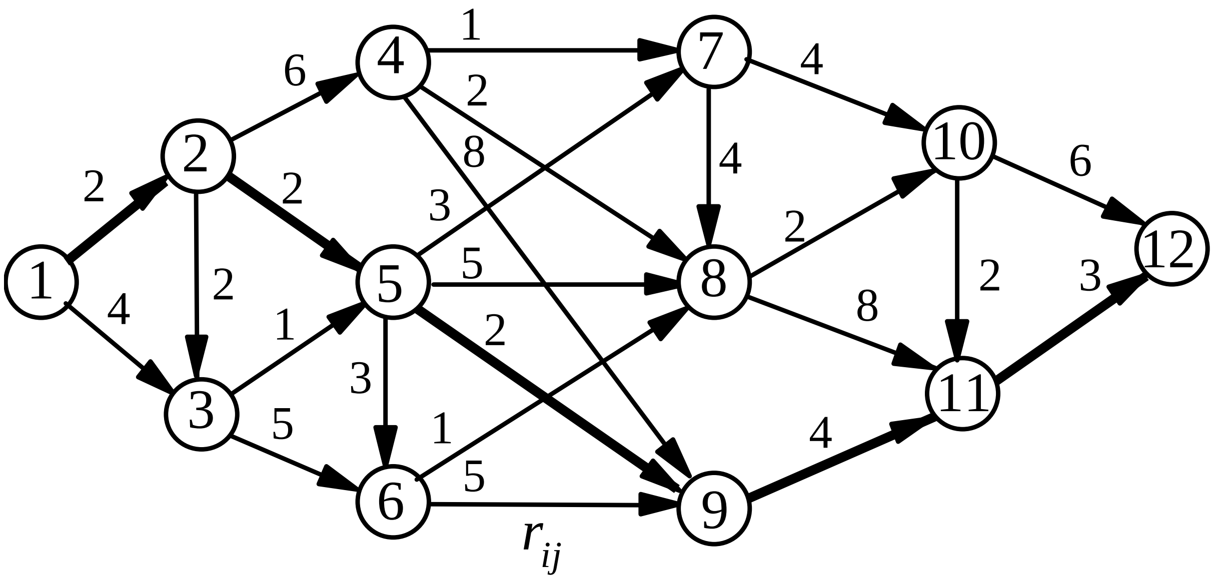
16. Динамичното програмиране при решаване на комбинаторни задачи.

- Класическият начин за решаване на задачата е преглеждане на всички възможни пътища от А до В. Всяко преминаване от стадий в стадий се оценява във време или километри, или изразходвани средства в зависимост от избрания критерий r_{ij}. Оптималният път ще бъде най-икономичен в смисъла на избрания критерий.
- Колкото повече стадии има задачата, толкова по-чувствително намалява броят на изследваните варианти по метода на динамичното програмиране по отношение на класическото пресмятане на вариантите, т.е. ускорява се решението на задачата. Това е основното *предимство* на динамичното програмиране.

2. Пример.

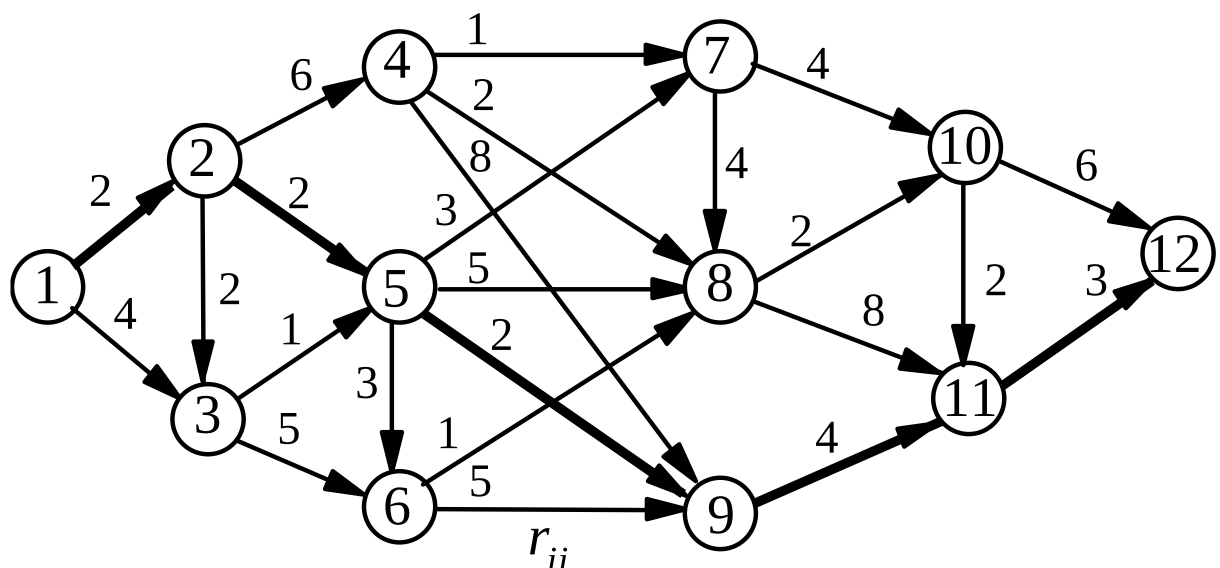
Да се определи последователността на преминаване от началния стадий 1 до крайния 12, така че разходите $R_{1,12}$ да бъдат минимални.

Нека с r_{ij} е означена цената на прехода от точка i към точка j. Възможните управления на всеки стадий са възможните решения за избор на път. Задача може да се реши като се започне от първия стадий и се изследват всички възможни пътища до последния стадий. Комбинацията от преходи с минимална сума $\sum r_{ij}$ ще бъде оптималният път за преминаване от 1 към 12.



Броят на последователните варианти обаче е голям и не са изключени грешки, т.е. пропускане на някой вариант. Тази задача се решава много успешно по метода на динамичното програмиране с приложение на принципа на оптималността.

Нека минималните разходи от i-тия стадий до края са R_i . Решението започва от последния стадий (тъй като след него разходите са нула: $R_{12} = 0$), при което се получават следните стойности за $R_i, i = 1,2,...11$, където оптималните пътища са подчертани:



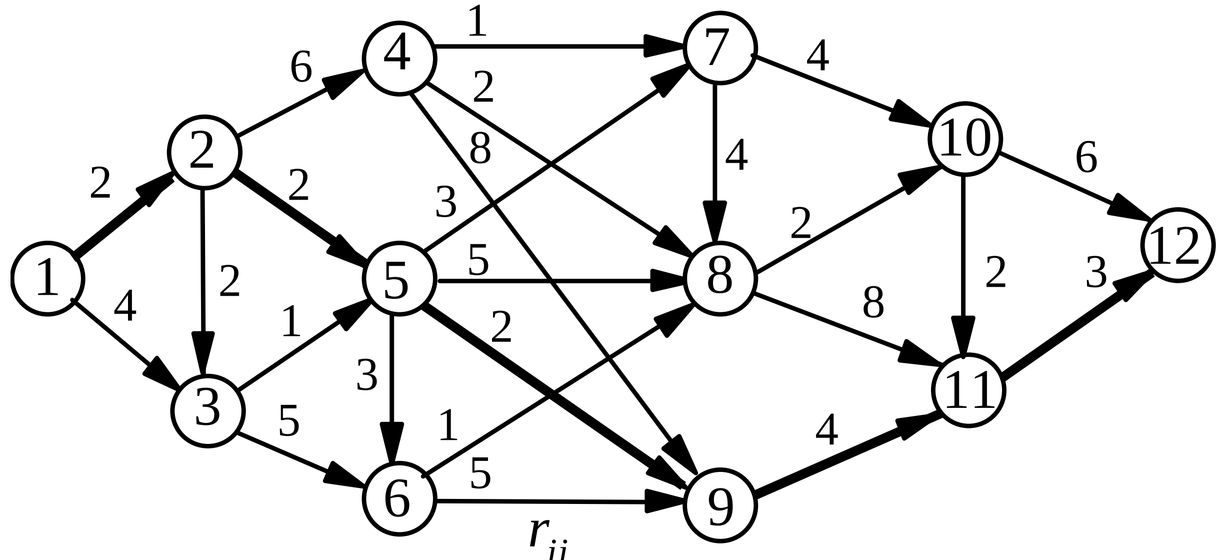
$$R_{11} = \min(r_{11,12} + R_{12}) = 3 + 0 = 3\ ,$$

$$R_{10} = \min\left\{\frac{r_{10,11} + R_{11}}{r_{10,12} + R_{12}}\right\} = \min\left\{\frac{2+3}{6+0}\right\} = 5\ .$$

В стадий 10 оптималното решение е през стадий 11.

$$R_9 = \min(r_{9,11} + R_{11}) = 4 + 3 = 7\ ,$$

$$R_8 = \min\left\{\frac{r_{8,10} + R_{10}}{r_{8,11} + R_{11}}\right\} = \min\left\{\frac{2+5}{8+3}\right\} = 7\ ,$$

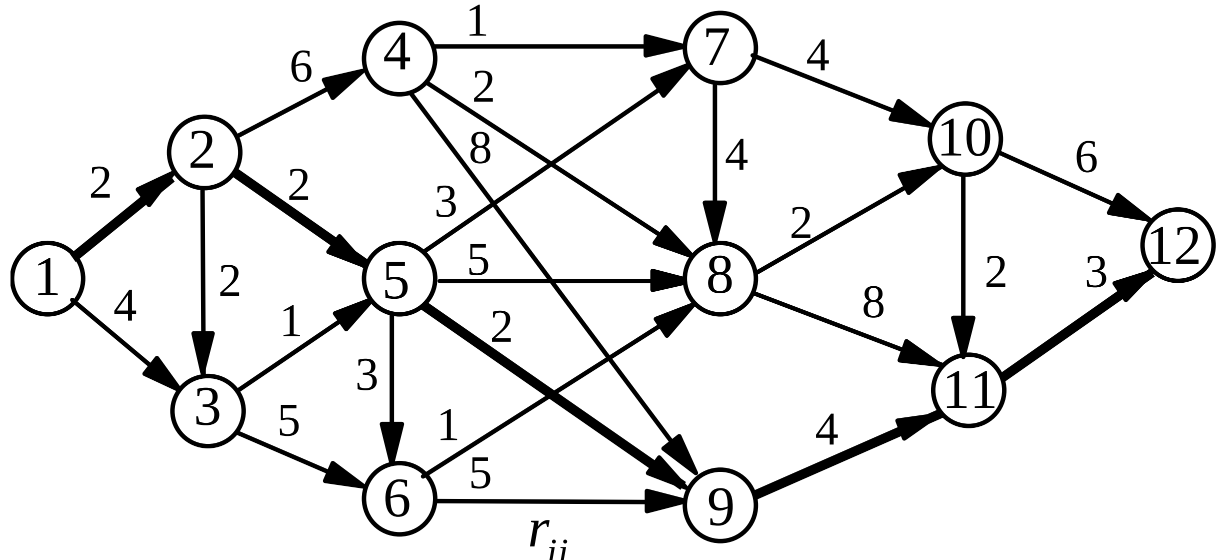


16. Динамичното програмиране при решаване на комбинаторни задачи.

$$R_7 = \min\begin{Bmatrix} r_{7,8}+R_8 \\ \underline{r_{7,10}+R_{10}} \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} 4+7 \\ \underline{4+5} \end{Bmatrix} = 9,$$

$$R_6 = \min\begin{Bmatrix} \underline{r_{6,8}+R_8} \\ r_{6,9}+R_9 \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} \underline{1+7} \\ 5+7 \end{Bmatrix} = 8,$$

$$R_5 = \min\begin{Bmatrix} r_{5,6}+R_6 \\ r_{5,7}+R_7 \\ r_{5,8}+R_8 \\ \underline{r_{5,9}+R_9} \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} 3+8 \\ 3+9 \\ 5+7 \\ \underline{2+7} \end{Bmatrix} = 9,$$

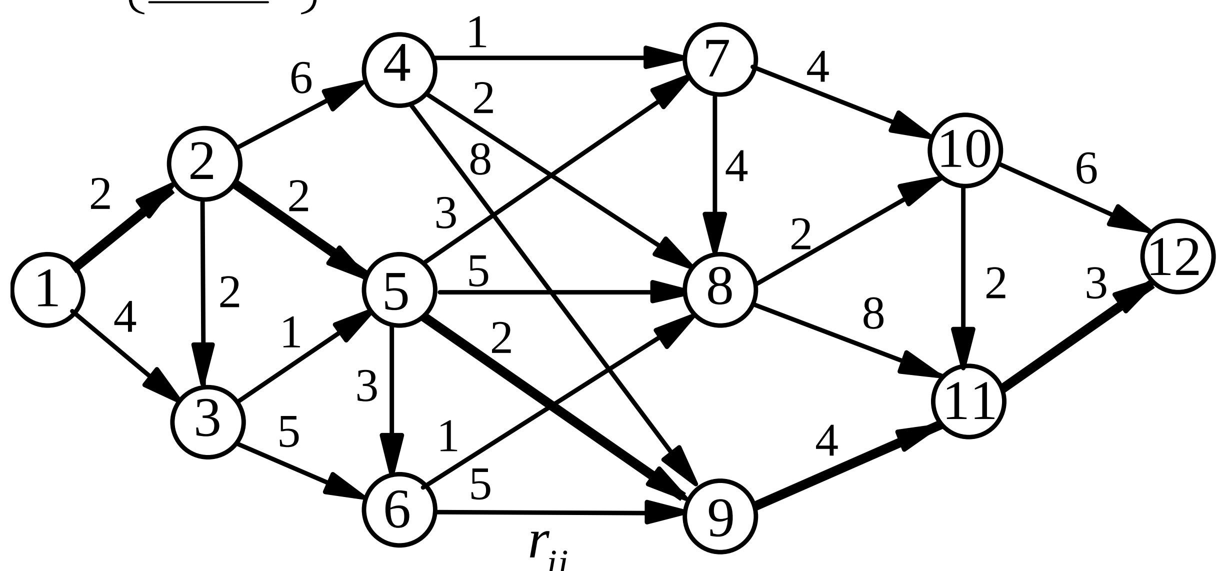


16. Динамичното програмиране при решаване на комбинаторни задачи.

$$R_4 = \min\begin{Bmatrix} r_{4,7} + R_7 \\ \underline{r_{4,8} + R_8} \\ r_{4,9} + R_9 \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} 1+9 \\ \underline{2+7} \\ 8+7 \end{Bmatrix} = 9,$$

$$R_3 = \min\begin{Bmatrix} \underline{r_{3,5} + R_5} \\ r_{3,6} + R_6 \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} \underline{1+9} \\ 5+8 \end{Bmatrix} = 10,$$

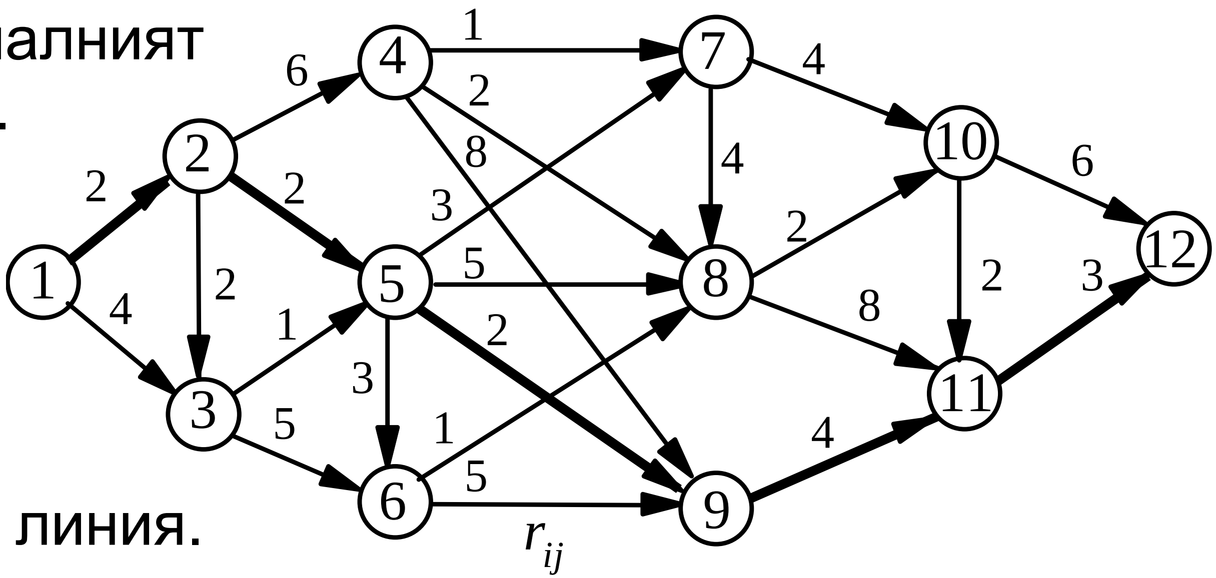
$$R_2 = \min\begin{Bmatrix} r_{2,3} + R_3 \\ r_{2,4} + R_4 \\ \underline{r_{2,5} + R_5} \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} 2+10 \\ 6+9 \\ \underline{2+9} \end{Bmatrix} = 11,$$



$$R_1 = \min\begin{Bmatrix} \underline{r_{1,2} + R_2} \\ r_{1,3} + R_3 \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} \underline{2+11} \\ 4+10 \end{Bmatrix} = 13.$$

Определена е минималната цена (разходите за прехода) от първия до 13-ия стадий - $R_1 = 13$. На втория етап от решението на задачата се намира оптималният път от началото към края. При попадане на определен стадий от решението на задачата на първия етап, вече се знае кой е оптималният път оттук до края. От първия стадий оптималният път е към 2 (подчертаният път). От стадий 2 има три решения, но минималните разходи са през 5. От стадий 5 минималните разходи до края са през 9.

След стадий 9 оптималният път е през 11 към 12.



Оптималният път е показан с удебелена линия.