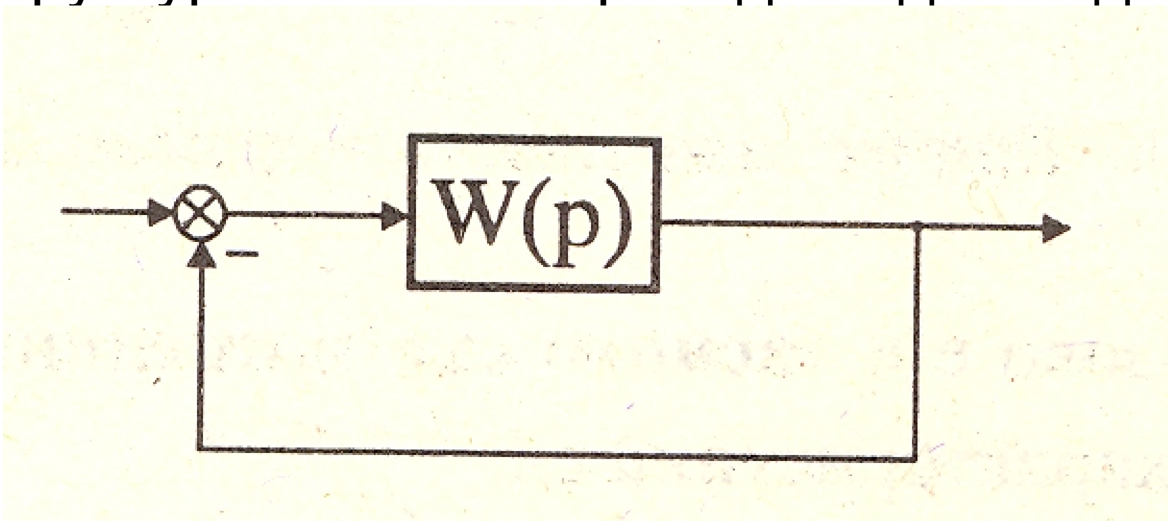
16. Честотни критерии. Принцип на аргумента

Честотните критерии (Найквист, Боде) се отнасят за САУ, чиято структурна схема е приведена до следния вид:



За устойчивостта на затворената система се съди по честотните характеристики на отворената система.

Доказателството на честотните критерии се базира на известната от теорията на функциите на комплексни променливи **теорема на Коши** за **принципа на аргумента**.

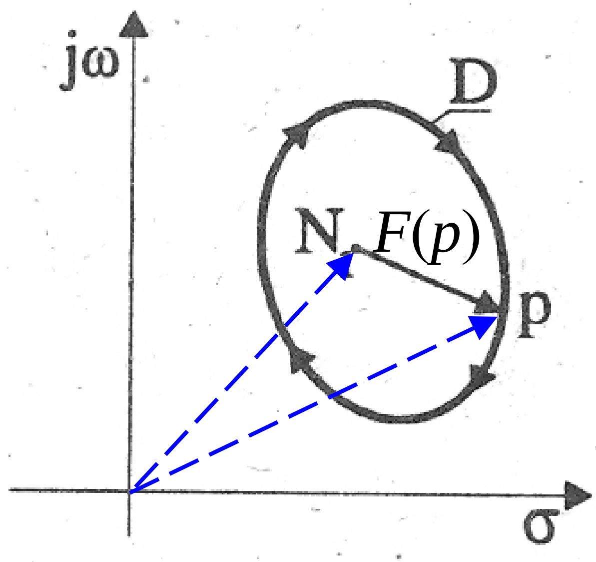
1. Принцип на аргумента

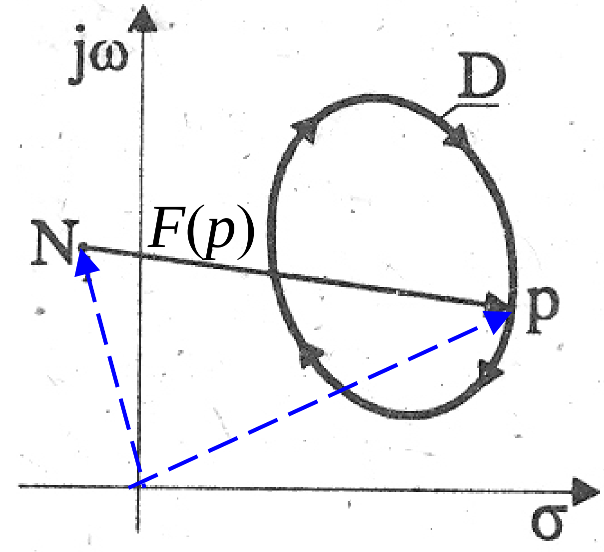
Теорема на Коши за принципа на аргумента:

(1) $F(p) = p - N_1$

$p = \sigma + j\omega$

p се "движи" по затворен контур D в "-" посока





$N_1 : \quad -360^0 \qquad 0^0$

(2) $F(p) = \dfrac{1}{p - P_1}$

$P_1 : \quad +360^0 \qquad 0^0$

16. Принцип на аргумента

(3) $$F(p) = \frac{(p - N_1)(p - N_2)...(p - N_m)}{(p - P_1)(p - P_2)...(p - P_n)}$$

Всеки полюс, разположен вътре в D увеличава сумарния ъгъл на завъртане на $F(p)$ с 360^0, а всяка нула, разположена вътре в контура, ще намали ъгъла с 360^0.

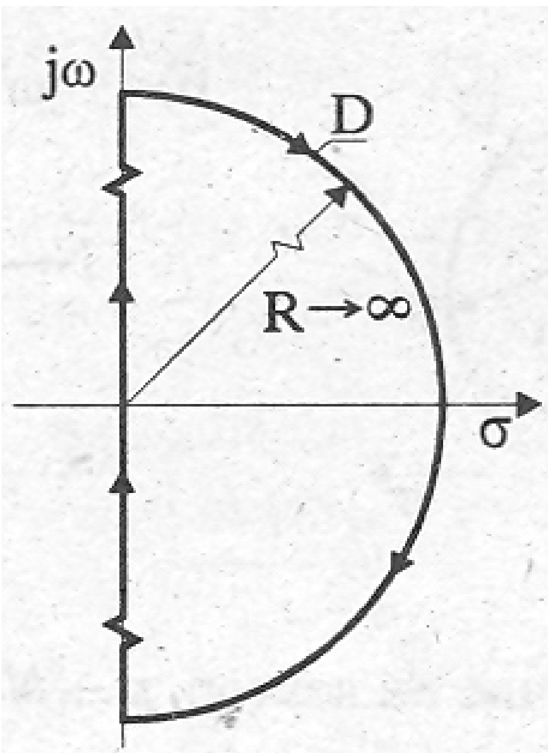
Нулите и полюсите, които са разположени извън затворения контур, няма да окажат влияние върху сумарния ъгъл на завъртане на $F(p)$.

Следователно, ***сумарният брой завъртания на*** $F(p)$ ***в положителна посока*** (*обратна на часовниковата стрелка*) ***е равен на разликата между броя на полюсите и нулите, разположени вътре в контура.***

16. Принцип на аргумента

За обосновка на честотните критерии се избира контур на Найквист.

$$F(p) = 1 + W(p) = 1 + \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{A(p) + B(p)}{A(p)} = \frac{H_3(p)}{H_O(p)} \qquad (4)$$

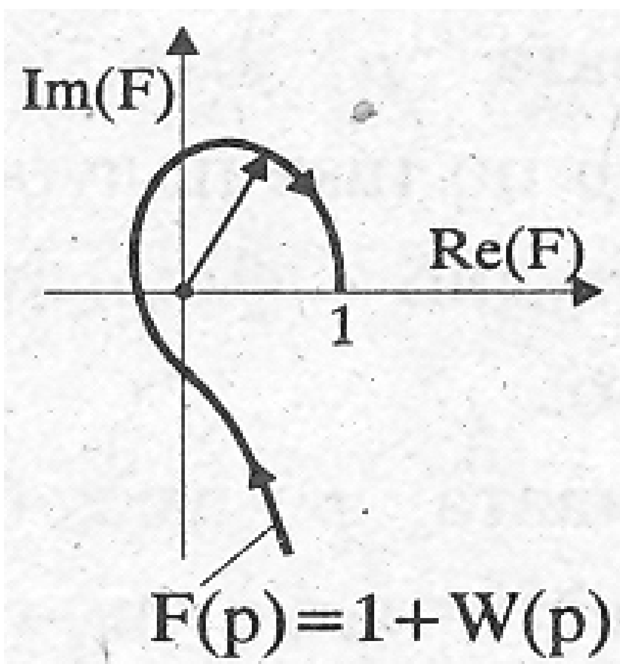


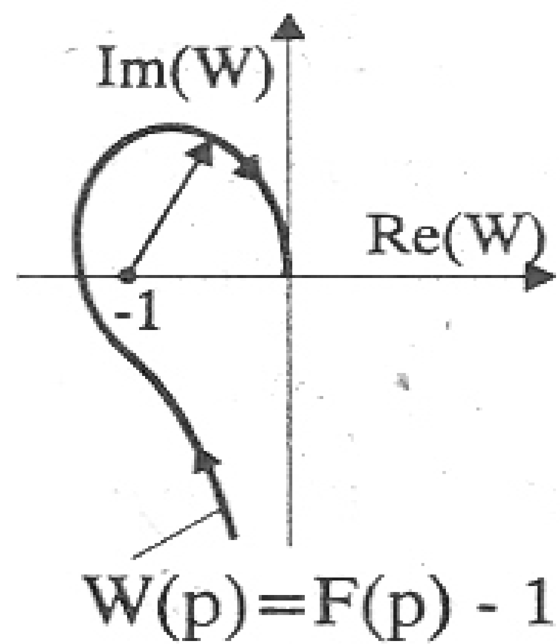
Като се отчете, че контурът на Найквист обхваща цялата дясна полуравнина, Принципът на аргумента добива вида:

При промяна на p *по контура на Найквист, броят на завъртанията на комплексната функция* $1 + W(p)$ *около координатното начало е равен на броя на положителните полюси на отворената система минус броя на положителните полюси на затворената система.*

2. Приложение на Принципа на аргумента за формулиране на критерия на Найквист

От НДУ за устойчивост следва, ***затворената система да няма положителни полюси***. Завъртането на $F(p)=1+W(p)$ около координатното начало е еквивалентно на завъртане на комплексната функция $W(p)$ около точката с координати $(-1;\, j0)$, разположена на отрицателната реална ос.





16. Принцип на аргумента

НДУ за устойчивост на затворената система е:

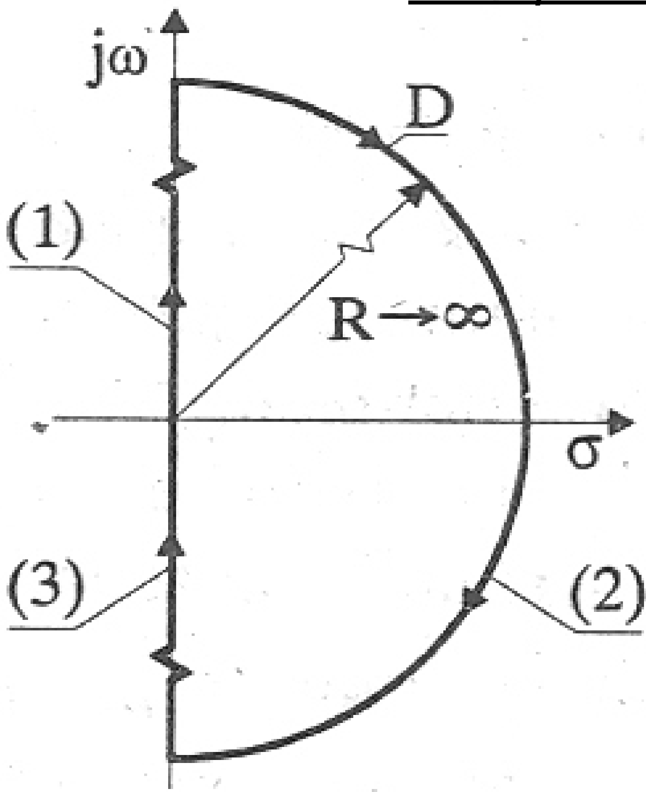
При промяна на p по контура на Найквист комплексната функция $W(p)$ трябва да се завърти около точката $(-1; j0)$ в положителна посока (обратна на часовниковата стрелка) толкова пъти, колкото е броят на положителните полюси на отворената система.

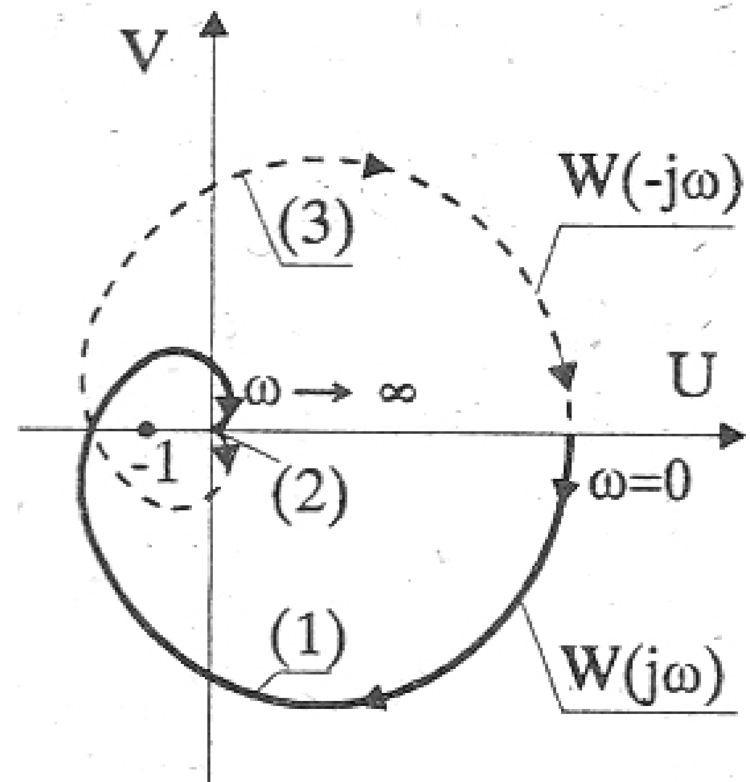
Точката $(-1; j0)$ се нарича точка на Найквист.

Контурът на Найквист се разделя на 3 части:

1. Положителната част от имагинерната ос;
2. Полуокръжност с безкраен радиус R в дясната полуравнина;
3. Отрицателната част от имагинерната ос.

16. Принцип на аргумента





1. $p = j\omega,\ \omega \in [0;\infty]:\ W(p)$ се движи по АФЧХ $W(j\omega)$ на отворената система;
2. $p \to \infty:\ \lim\limits_{p\to\infty} W(p) \to 0$, т.е. $W(p)$ не се променя, най-често е нула (лежи в координатното начало), тъй като при физически реализуемите системи $m < n$;
3. $p = -j\omega:\ W(-j\omega)$ е комплексно спрегната на $W(j\omega)$, нейната графика е симетрична на $W(j\omega)$ спрямо абсцисната ос.

16. Принцип на аргумента

При промяна на p по контура на Найквист, $W(p)$ се движи по АФЧХ последователно в диапазоните на ω: от 0 до ∞ и от $-\infty$ до 0. В отрицателния диапазон тя се завърта около т. $(-1; j0)$ на същия ъгъл, както и в положителния. Достатъчно е да се анализира $W(j\omega)$ само в единия диапазон ($\omega \in [0; \infty]$), като сумарното завъртане около т. $(-1; j0)$ е два пъти по-малко.

НДУ за устойчивост на на затворената система е АФЧХ $W(j\omega)$ на отворената система да обхваща в положителна посока точката на Найквист $q/2$ пъти (т.е. на ъгъл $q\pi$), където q е броят на положителните полюси на отворената система.