5. Математично описание на СУ. Линеаризация. Предавателна функция.

1. Математично моделиране

- Математично описание (математичен модел (ММ)) на САУ е описанието с езика на математиката на процесите в тях.
- Видове модели:
- ***аналитични*** – описват се чрез уравнения (алгебрични, диференциални, интегрални, диференчни);
- ***графични*** – чрез графики, структурни схеми и графи;
- ***цифрови*** – чрез таблици, алгоритми и програми за компютри.
- В зависимост от целите на управлението една и съща система може да има няколко модела

- Декомпозиция на непрекъснатата система на компоненти, които се описват с диференциални уравнения до втори ред:

(а) Уравнение на динамиката:

$$F(y, \dot{y}, \ddot{y}, u, \dot{u}, \ddot{u}) = 0$$

(б) Уравнение на статиката:

При $u = u^*$ и $t \to \infty$, $y = y^*$

$$F(y^*, 0, 0, u^*, 0, 0) = 0$$

2. Линеаризация – Процесът на преобразуване на нелинейните уравнения в линейни се нарича *линеаризация*.

- извършва се чрез разлагане на нелинейните функции в уравнението в ред на Тейлър, в околността на зададения установен режим

(а) Линеаризация на статични характеристики.

Нека работната точка (u^*, y^*) е разположена в нелинеен участък от статичната характеристика $y = f(u)$ на звеното.

Нека,

$$u(t) = u^* + \Delta u(t)$$

$$y(t) = y^* + \Delta y(t)$$

където отклоненията Δu и Δy са много малки.

5. Математично описание на СУ. Линеаризация. ПФ.

Разлага се $f(u)$ в ред на Тейлър около точката u^*

$$y = f(u^*) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{u=u^*} \Delta u + \frac{1}{2!} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right|_{u=u^*} \Delta u^2 + \frac{1}{3!} \left.\frac{\partial^3 f}{\partial u^3}\right|_{u=u^*} \Delta u^3 + \ldots$$

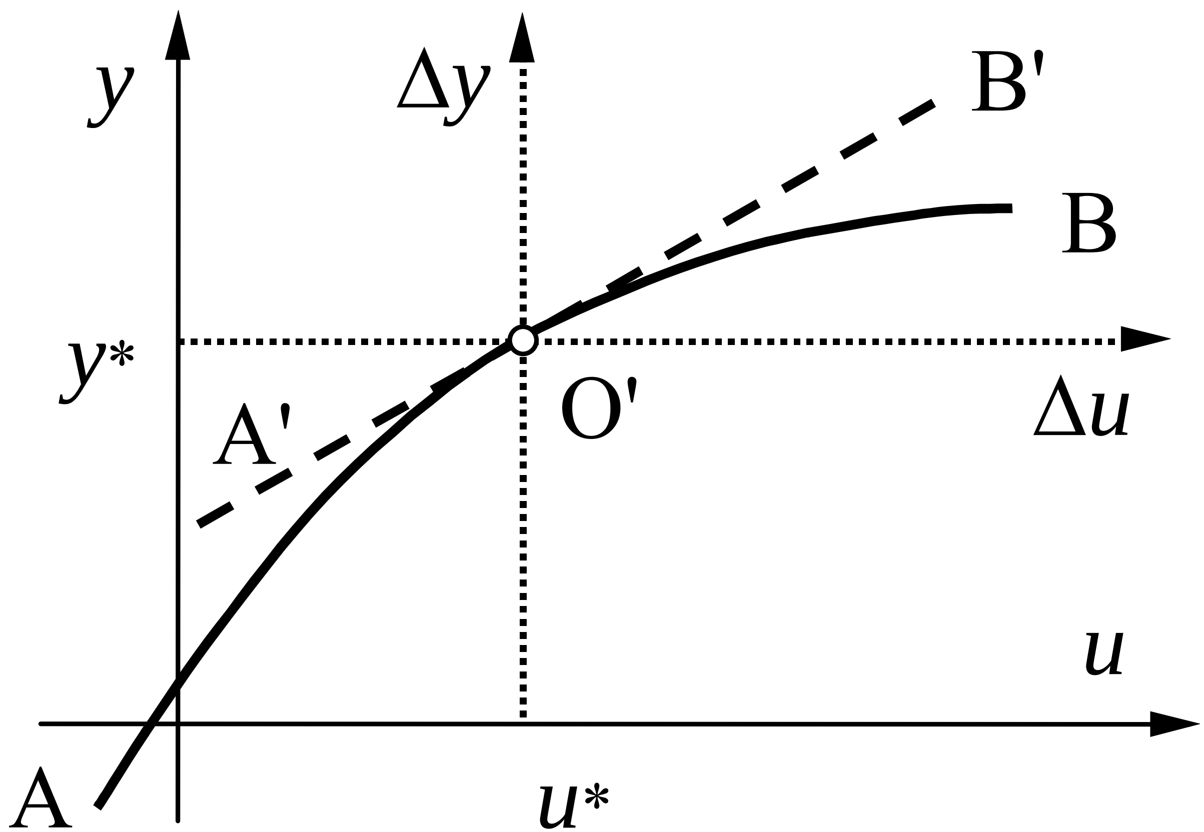
Членовете Δu^2 , Δu^3 и т.н. могат да се пренебрегнат.

Тъй като $f(u^*) = y^*$, следователно $\Delta y = k\Delta u$,

$$y - y^* = \Delta y$$

където k е производната на $f(u)$ в точката u^*.

Геометрична интерпретация на линеаризацията



(б) Линеаризация на диференциални уравнения

Да се линеаризира нелинейното диференциално уравнение

$$F(y, \dot{y}, \ddot{y}, u, \dot{u}, \ddot{u}) = 0$$

в околността на установения режим на работа

$$y = y^*, \quad \dot{y} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad u = u^*, \quad \dot{u} = 0, \quad \ddot{u} = 0 .$$

Разлага се в ред на Тейлър, в околността на установения режим:

$$F(y,\dot{y},\ddot{y},u,\dot{u},\ddot{u}) = F(y^*,0,0,u^*,0,0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_* \Delta y + \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right|_* \Delta \dot{y} + \left.\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right|_* \Delta \ddot{y} +$$

$$+ \left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_* \Delta u + \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}\right|_* \Delta \dot{u} + \left.\frac{\partial F}{\partial \ddot{u}}\right|_* \Delta \ddot{u} + O$$

O - всички членове от втори и по-висок ред;

* - стойностите на аргументите в установен режим.

Въвеждаме:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right|_* = a_0 \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right|_* = a_1 \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_* = a_2$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \ddot{u}}\right|_* = -b_0 \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}\right|_* = -b_1 \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_* = -b_2$$

Линеаризираното диференциално уравнение е:

$$a_0\Delta\ddot{y}+a_1\Delta\dot{y}+a_2\Delta y-b_0\Delta\ddot{u}-b_1\Delta\dot{u}-b_2\Delta u=0$$

$$a_0\frac{d^2y}{dt^2}+a_1\frac{dy}{dt}+a_2y=b_0\frac{d^2u}{dt^2}+b_1\frac{du}{dt}+b_2u$$

За система от n-ти ред:

$$a_0\frac{d^ny}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+...+a_ny=b_0\frac{d^mu}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}}+...+b_mu$$

където $m\le n$ (условие за физическа реализуемост).

В стандартна форма:

$$a'_0\frac{d^ny}{dt^n}+a'_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+...+a'_{n-1}\frac{dy}{dt}+y=k\ (b'_0\frac{d^mu}{dt^m}+...+b'_{m-1}\frac{du}{dt}+u)$$

$a'_i=a_i/a_n$, ($i=0,1,...,n-1$); $b'_j=b_j/b_m$, ($j=0,1,...,m-1$);

$k=b_m/a_n$ - в установен режим: $y=k\,u$

3. Предавателна функция

Предавателна функция се нарича отношението на образа по Лаплас на изходната величина към образа по Лаплас на входната величина при нулеви начални условия:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n)Y(p) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + ... + b_m)U(p)$$

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + ... + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n}$$

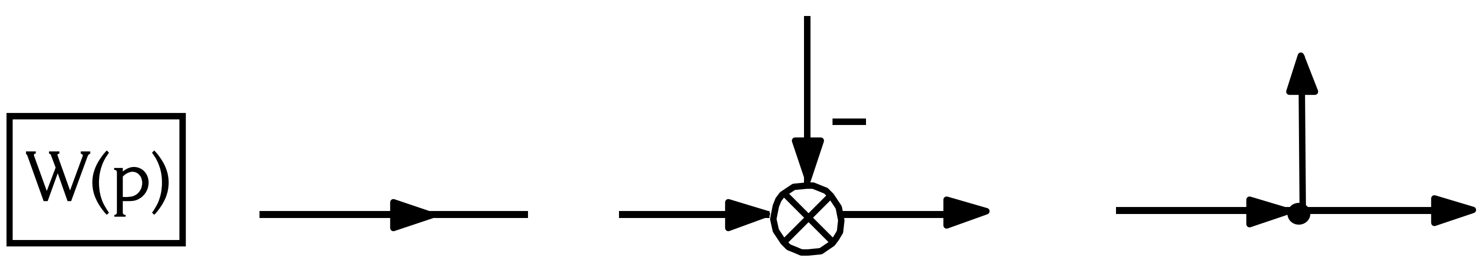
<u>6. Структурни преобразования</u>

1. Определения

Структурната схема на една система за управление е графично изображение, показващо от какви динамични звена се състои системата и как те са свързани помежду си.

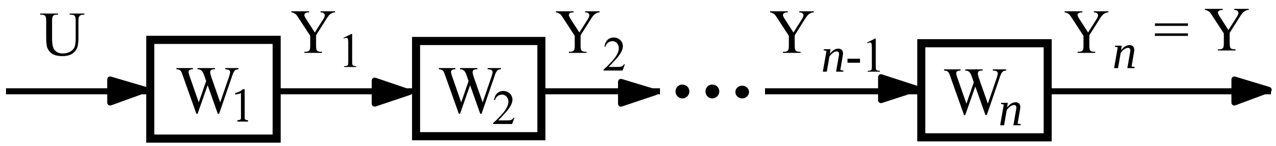
Основните елементи на структурните схеми:

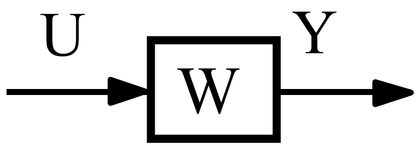
- Динамични звена;
- Линии за свързване на отделните звена (със стрелка);
- Суматори;
- Възли за разклонение.



2. Типови съединения на динамични звена.

(а) Последователно свързване





$$Y_1(p) = W_1(p)U(p)$$

$$Y_2(p) = W_2(p)Y_1(p)$$

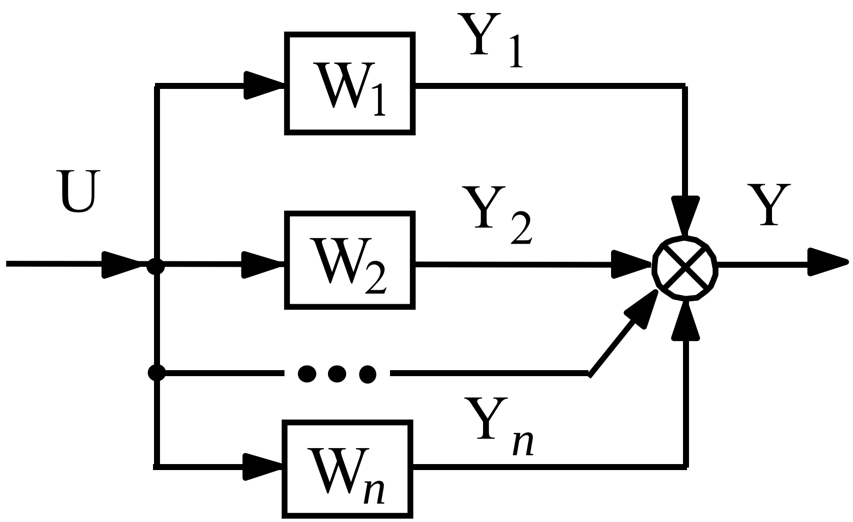
...

$$Y_n(p) = W_n(p)Y_{n-1}(p)$$

$$Y(p) = Y_n(p) = W_n(p)...W_2(p)W_1(p)U(p)$$

$$W(p) = \prod_{i=1}^{n} W_i(p)$$

(б) Паралелно свързване



$$Y_1(p) = W_1(p)U(p)$$

$$Y_2(p) = W_2(p)U(p)$$

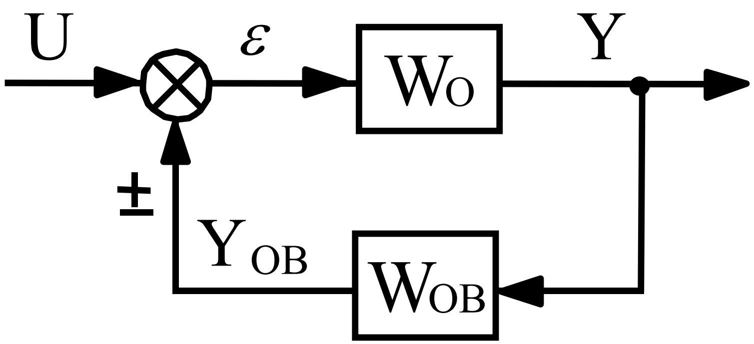
...

$$Y_n(p) = W_n(p)U(p)$$

$$Y(p) = \sum_{i=1}^{n} Y_i(p)$$

$$W(p) = \sum_{i=1}^{n} W_i(p)$$

(в) Свързване с обратна връзка



$$Y(p) = W_O(p)\varepsilon(p)$$

$$Y_{OB}(p) = W_{OB}(p)Y(p)$$

$$\varepsilon(p) = U(p) \pm Y_{OB}(p)$$

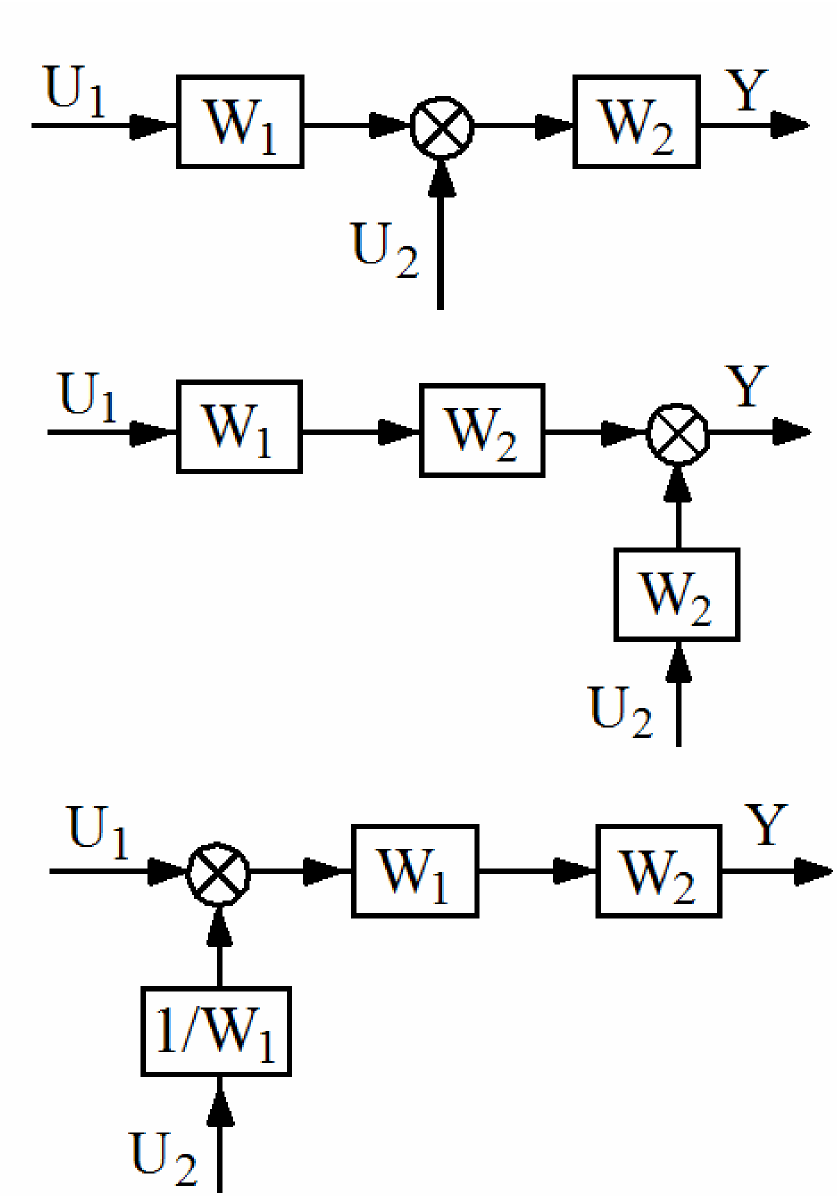
$$Y(p) = W_O(p)[U(p) \pm W_{OB}(p)Y(p)]$$

$$[1 \mp W_O(p)W_{OB}(p)]Y(p) = W_O(p)U(p)$$

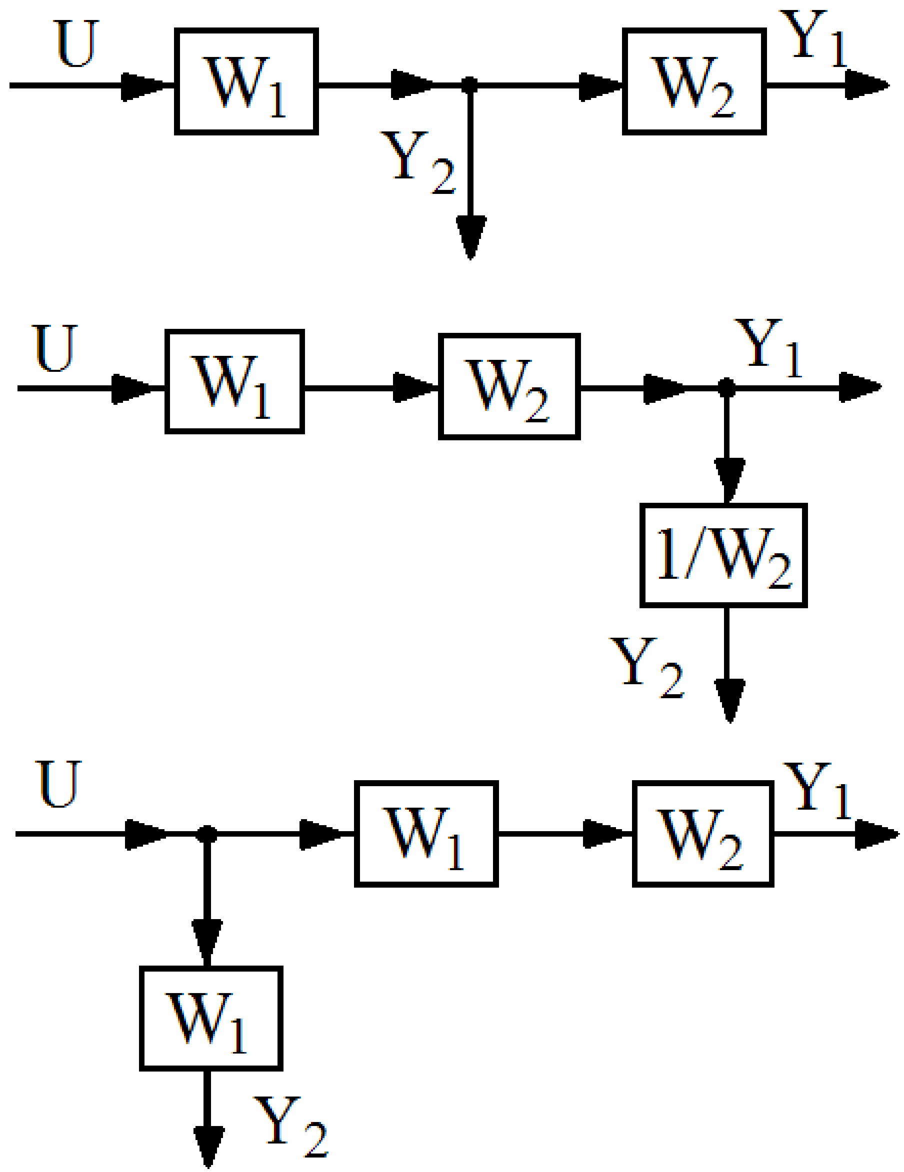
$$W(p) = \frac{W_O(p)}{1 \mp W_O(p)W_{OB}(p)}$$

3. Правила за еквивалентни преобразования.

(а) Пренасяне на суматор през линейно динамично звено



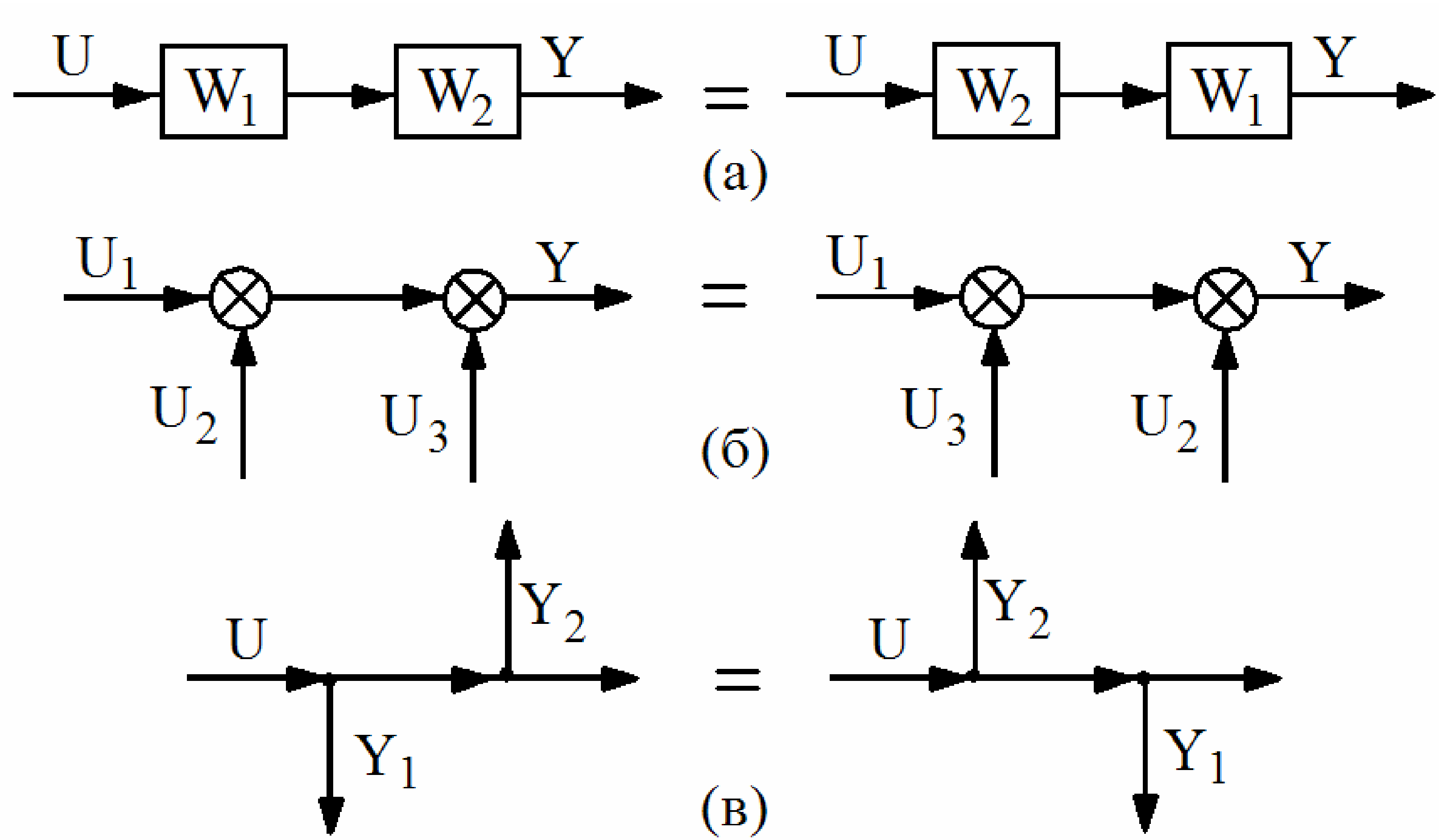
$$Y = (W_1 U_1 + U_2) W_2 =$$
$$= W_1 W_2 U_1 + W_2 U_2$$



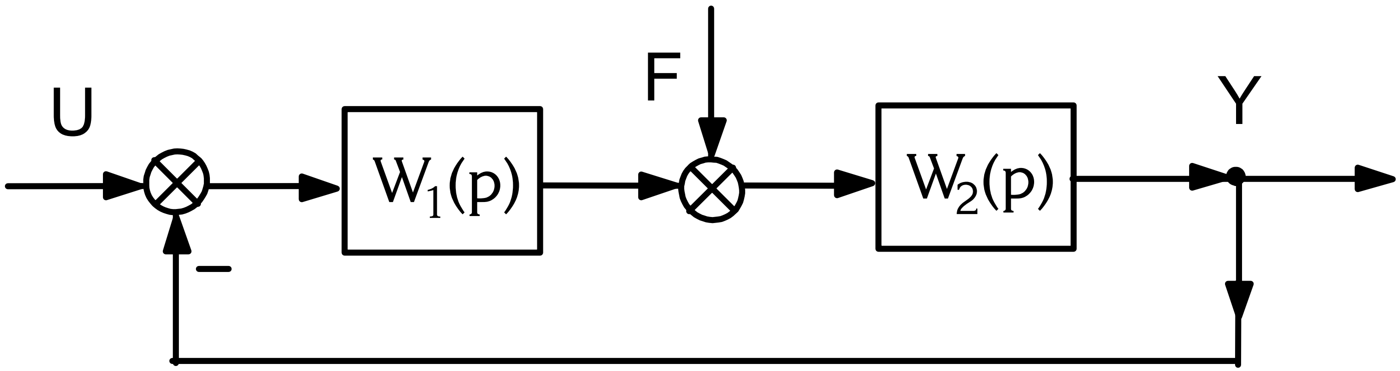
(б) Пренасяне на възел през линейно динамично звено

$$Y_2 = W_1 U$$

(в) Еднородни пренасяния



4. Системи със смущаващи въздействия.

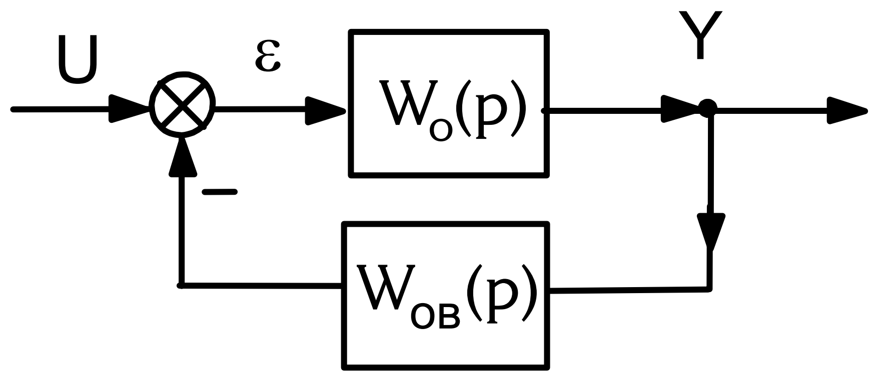


$$W_{YF}(p)=\frac{Y(p)}{F(p)}=\frac{W_2}{1+W_1W_2}$$

$$W_{YU}(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{W_1W_2}{1+W_1W_2}$$

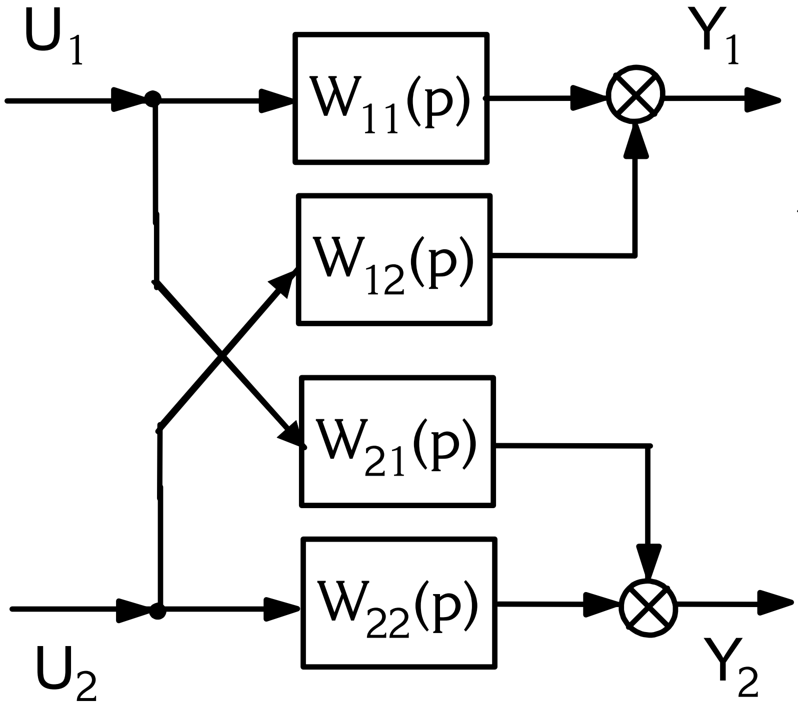
$$Y(p)=W_{YU}(p)U(p)+W_{YF}(p)F(p)$$

4. Предавателна функция по отношение на грешката.



$$W_{\varepsilon U}(p) = \frac{\varepsilon(p)}{U(p)} = \frac{1}{1 + W_{\mathrm{O}} W_{\mathrm{OB}}}$$

4. Предавателна функция на многомерна система



$$Y_1(p) = W_{11}(p)U_1(p) + W_{12}(p)U_2(p)$$

$$Y_2(p) = W_{21}(p)U_1(p) + W_{22}(p)U_2(p)$$

$$Y(p) = W(p)U(p)$$

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \ldots \\ U_R \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \ldots \\ Y_L \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & \ldots & W_{1R} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ W_{L1} & \ldots & W_{LR} \end{bmatrix}$$

$$W_{ij}(p), \quad i = 1,\ldots,L; \quad j = 1,\ldots,R.$$