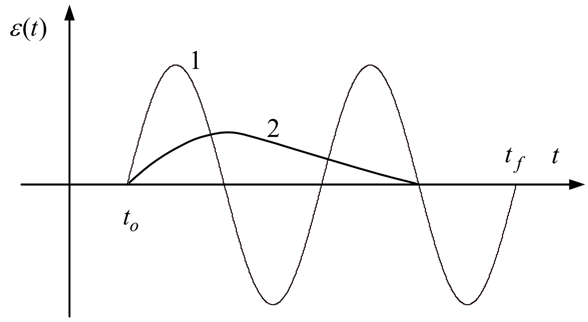
1. Квадратични критерии за качество

За оценяване на динамиката на системата може да се използува интеграл от някаква функция на грешката $\varepsilon(t)$

$$I_\varphi = \int_{t_0}^{t_f} \varphi(\varepsilon)dt\,, \tag{1.1}$$

където t_0 и t_f са съответно началото и краят на интервала от времето, за който се извършва оценяването. По стойността на I_φ се прави оценяване на различни варианти на закона на управление, като увеличаването на тази стойност се възприема като влошаване на качеството на системата. Най-простият случай, когато $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon(t)$ не се използува, тъй като промяната на знака на $\varepsilon(t)$ в хода на преходния процес може да доведе до грешни оценки. Това се илюстрира от Фиг.1.1, от която се вижда, че системата имаща за реакция крива 1, ще бъде оценена като по-добра от системата с реакция – крива 2, поради това, че $I_\varphi = 0$. За да се избегне този недостатък, обикновено се използуват интегрални оценки от вида

$$I_l = \int_{t_0}^{t_f} |\varepsilon(t)|^l dt\,. \tag{1.2}$$



Фиг.1.1.

За $l = 1$ се получава най-простият вид на I_l, но определянето на стойността на I_1 и синтезът по този показател на качеството са свързани с редица аналитични затруднения. Аналогично е положението и за $l > 2$. Поради това най-широко разпространение е получил показателят на качеството

$$I_2 = \int_{t_0}^{t_f} \varepsilon^2(t)dt\,. \tag{1.3}$$

Целта на синтеза на системата на базата на този показател на качеството е да се избере алгоритъмът на управление по такъв начин, че I_2 да има минимална стойност. Намаляването на стойността на I_2 означава намаляване на амплитудата на $\varepsilon(t)$ и/или намаляване на времетраенето на преходните процеси. Критерият на качеството може да се запише в следния вид:

$$I_2 = \int_{t_0}^{t_f} \varepsilon^2(t)dt = \min\,. \tag{1.4}$$

Стремежът за получаване на малки стойности на $\varepsilon(t)$ и бързи преходни процеси довежда до синтез на такива алгоритми за управление, при които се предвижда подаване към обекта на значителни по стойност управляващи въздействия. Обикновено съществува ограничение на управляващите въздействия, обусловено от свойствата на изпълнителните органи, така че получените от синтеза по (1.4) алгоритми на практика не могат да се реализират. Поради това е желателно в критерия за качество да се въведе по определен начин и ограничаване на управляващите въздействия. Въвеждане на ограничение от вида

$$|u(t)| < \alpha\,. \tag{1.5}$$

води до синтез на сложни нелинейни закони на управление и съществени затруднения в процедурата на синтеза за системи с по-висок от втори ред. Поради това се предпочита оценяването на управляващите въздействия с показател

$$I_u = \int_{t_0}^{t_f} u^2(t)dt\,. \tag{1.6}$$

Колкото стойността на I_u е по-малка, толкова повече може да се очаква, че в процеса на работата на системата няма да се достига до ограниченията в управлението. При използването на (1.6) може да се формира показател на качеството на системата от вида

$$J' = qI_2 + rI_u\,. \tag{1.7}$$

където q и r са положителни тегловни коефициенти. Тъй като е желателно намаляването както на I_2, така и на I_u, то критерий за качество може да бъде

$$J' = qI_2 + rI_u = \min\,. \tag{1.8}$$

Синтезът на системата по този критерий за качество по същество представлява намирането на рационален компромис между изискванията за качество на преходните процеси, отразени с I_2, и ограниченията на управляващите въздействия, отразени с I_u. Съгласно (1.8) неприемливи са както алгоритми, осигуряващи много бързи преходни процеси, за които I_2 има много малка стойност, но I_u съществено нараства, така и алгоритми, свързани с малки стойности на управлението, при които I_u е много малък, но I_2 има значителна стойност.

Очевидно намереното по (1.8) решение съществено ще зависи от съотношението на тегловните коефициенти q и r. Ако се придаде относително по-голямо тегло на I_2, може да се очаква, че синтезираната система ще има бързи преходни процеси и съответно големи управляващи въздействия. Обратно, при придаване на по-голямо относително тегло на I_u реакцията на системата става по-бавна за сметка на намалените управляващи въздействия. Поради това, че предварителният избор на q и r от гледна точка на преходните процеси и ограниченията трудно се формализира, обикновено след синтеза по (1.8) се извършва моделиране на системата и при необходимост се провежда неколкократно процедурата на синтез при последователно уточнявани q и r.

Квадратичните критерии се използват при решаването на няколко различни задачи на теорията на управлението. В случай че интервалът на работа на системата (t_0, t_f) е краен, обикновено се говори за *задача за синтез на терминалното управление*. Тъй като в тези случаи за оценяване на качеството на системата е от значение и грешката в края на работата на системата, рационално е да се използва показател на качеството от вида

$$J = s\varepsilon^2(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [q\varepsilon^2(t) + ru^2(t)]dt\,. \tag{1.9}$$

където s е положителен тегловен коефициент. В случай че се разглежда безкраен интервал на работа на системата, се говори за *задача за синтез на регулатор*. Интегралите I_2 и I_u при този случай имат смисъл само ако $\varepsilon(t)$ и $u(t)$ клонят към нула при $t \to \infty$. Показателят на качеството, който се използва при синтез на регулатор, има вида

$$J = \int_{t_0}^{\infty} [q\varepsilon^2(t) + ru^2(t)]dt\,. \tag{1.10}$$

Разгледаните дотук критерии за качество се отнасят за едномерни системи (системи с един вход и един изход). При многомерните системи $\varepsilon(t)$ и $u(t)$ са вектори и показателите за качество имат вида:

- за задачата за синтез на терминално управление

$$J = \boldsymbol{\varepsilon}^T(t_f)\mathbf{S}_f\boldsymbol{\varepsilon}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [\boldsymbol{\varepsilon}^T(t)\mathbf{Q}_\varepsilon\boldsymbol{\varepsilon}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)]dt\,. \tag{1.11}$$

- за задачата за синтез на регулатор

$$J = \int_{t_0}^{\infty} [\boldsymbol{\varepsilon}^T(t)\mathbf{Q}_\varepsilon\boldsymbol{\varepsilon}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)]dt\,. \tag{1.12}$$

като $\mathbf{S}_f$, $\mathbf{Q}_\varepsilon$ и $\mathbf{R}$ са положително определени матрици (обикновено диагонални) със съответни размерности.

Ако обектът за управление е описан в пространството на състоянията и се приема за общност нестационарния случай, то при

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) \tag{1.12a}$$

където $\mathbf{x}(t)$ е векторът на състоянието на системата, може да се приеме

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{C}^T(t)\mathbf{Q}_\varepsilon(t)\mathbf{C}(t)$$

и квадратичният показател на качеството може да се запише в най-общ вид по следния начин:

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{S}_f\mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)]dt\ . \qquad (1.13)$$

Множителят 1/2 е поставен за удобство при записа на изразите в следващото изложение и не влияе върху получаваното решение на задачата на синтеза.

2. Оптимално терминално управление – непрекъснати системи

Задачата за синтез на система за оптимално терминално управление може да се формулира по следния начин: *по зададено описание на обекта на управление в пространството на състоянието и зададен показател на качеството* J *с (1.13) да се намери законът на изменение на* $\mathbf{u}(t)$, *при който* $J = \min$. Приема се описанието на обекта на управление във вида

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0\ . \qquad (1.14)$$

От гледна точка на вариационното смятане формулираната задача за синтез се свежда до минимизация на функционала (1.13) по $\mathbf{u}(t)$ при ограничение от типа равенство (1.14). Решение на тази задача може да се получи чрез въвеждане на вектор на *неопределените множители на Лагранж* $\mu(t)$ и модификация на показателя на качеството

$$J_M = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{S}_f\mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\{\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t) + 2\boldsymbol{\mu}^T(t)[\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) - \dot{\mathbf{x}}(t)]\}dt\ . \qquad (1.15)$$

Чрез интегриране по части се получава

$$\int_{t_0}^{t_f}\boldsymbol{\mu}^T(t)\dot{\mathbf{x}}(t)dt = \boldsymbol{\mu}^T(t_f)\mathbf{x}(t_f) - \boldsymbol{\mu}^T(t_0)\mathbf{x}(t_0) - \int_{t_0}^{t_f}\dot{\boldsymbol{\mu}}^T(t)\mathbf{x}(t)dt\ . \qquad (1.16)$$

Като се използува (1.16) и се приеме означението (Хамилтониан)

$$H(t) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \frac{1}{2}\mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{\mu}^T(t)[\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)]\ . \qquad (1.17)$$

от (1.15) се получава

$$J_M = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{S}_f\mathbf{x}(t_f) - \boldsymbol{\mu}^T(t_f)\mathbf{x}(t_f) + \boldsymbol{\mu}^T(t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_f}[H(t) + \dot{\boldsymbol{\mu}}^T(t)\mathbf{x}(t)]dt\ . \qquad (1.18)$$

За намиране минимума на J_M от (1.18) е необходимо да се определят условията, при които първата вариация на J_M е нула при произволна вариация $\delta\,\mathbf{u}(t)$ на управляващото въздействие. Тъй като вариацията на $\mathbf{u}(t)$ води до вариация на $\mathbf{x}(t)$, то за всеки от компонентите на (1.18) се определя вариацията по следния израз

$$\delta\, f(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right)^T\delta\,\mathbf{x} + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\right)^T\delta\,\mathbf{u}$$

Като се използват правилата за диференциране на скаларни функции на векторен аргумент, се получава

$$\delta\, J_M = [\mathbf{x}^T(t)\mathbf{S}_f - \boldsymbol{\mu}^T(t)]\delta\,\mathbf{x}\,|_{t=t_f} + \boldsymbol{\mu}^T(t)\delta\,\mathbf{x}\,|_{t=t_0} + \int_{t_0}^{t_f}\left\{\left[\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}\right)^T + \dot{\boldsymbol{\mu}}^T\right]\delta\,\mathbf{x}(t) + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}\right)^T\delta\,\mathbf{u}(t)\right\}dt\ . \qquad (1.19)$$

Тъй като началните условия за $\mathbf{x}(t)$ са фиксирани с (1.14), то $\delta\,\mathbf{x}(t)|_{t=t_0} = 0$. Освен това, за да може интегралният компонент в (1.19) да бъде нула при произволни вариации $\delta\,\mathbf{u}(t)$ и $\delta\,\mathbf{x}(t)$, е необходимо подинтегралната функция да е нула. От тези съображения се получават следните условия за нулирането на $\delta\, J_M$:

$$\mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{S}_f - \boldsymbol{\mu}^T(t_f) = 0\ ,$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}\right)^T + \dot{\boldsymbol{\mu}}^T(t) = 0\ ,$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}\right)^T = 0\ .$$

Транспонирането на тези равенства, заместването на частните производни на $H(t)$, получени чрез диференциране на (1.17), и добавянето на (1.14) дават следната система уравнения за намиране на оптималното управление:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \tag{1.20}$$

$$\dot{\boldsymbol{\mu}}(t) = -\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^T(t)\boldsymbol{\mu}(t), \tag{1.21}$$

$$\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t) = -\mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\mu}(t), \tag{1.22}$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{1.23}$$

$$\boldsymbol{\mu}(t_f) = \mathbf{S}_f\mathbf{x}(t_f), \tag{1.24}$$

При получаването на тези уравнения е прието, че матриците $\mathbf{Q}(t)$, $\mathbf{R}(t)$ и $\mathbf{S}_f$ са симетрични. Ако матрицата $\mathbf{R}(t)$ е неособена, то от (1.22) може да се напише

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\mu}(t), \tag{1.25}$$

Заместването на (1.25) в (1.20) дава възможност да се запише системата диференциални уравнения в следния вид:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T(t)\boldsymbol{\mu}(t), \tag{1.26}$$

$$\dot{\boldsymbol{\mu}}(t) = -\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^T(t)\boldsymbol{\mu}(t), \tag{1.27}$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{1.28}$$

$$\boldsymbol{\mu}(t_f) = \mathbf{S}_f\mathbf{x}(t_f), \tag{1.29}$$

Ако тази система диференциални уравнения бъде решена, то заместването на $\boldsymbol{\mu}(t)$ в (1.25) дава оптималното управление $\mathbf{u}(t)$, като функция на времето, т.е. получава се "програмно" управление. Намирането на $\boldsymbol{\mu}(t)$ обаче е сложна задача не само поради това, че системата е нестационарна, но главно поради факта, че не са зададени началните условия за всички променливи при $t = t_0$. Равенството (1.29) дава зависимост между стойностите на $\mathbf{x}(t)$ и $\boldsymbol{\mu}(t)$ в крайната точка на интервала от време. Поради това се получава така наречената в математиката двуточкова гранична задача, водеща до сложни изчислителни проблеми.

Един възможен начин за преодоляване на възникващите затруднения, който се оказва особено полезен за изграждане на структурата на системата с помощта на обратната връзка, е да се приеме

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{x}(t), \tag{1.30}$$

при което

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{S}(t)\mathbf{x}(t), \tag{1.31}$$

или

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t), \tag{1.32}$$

При този случай остава да се търси само $\mathbf{S}(t)$, за да се формира матрицата на обратната връзка $\mathbf{K}(t)$. Заместването на (1.30) в (1.27) дава

$$\dot{\mathbf{S}}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{S}(t)\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{S}(t)\mathbf{x}(t), \tag{1.33}$$

Замества се (1.26) в (1.33) и с отчитането на (1.30) и съкращаване на общия множител $\mathbf{x}(t)$, който не е тъждествено равен на нула, се получава следното уравнение за определяне на $\mathbf{S}(t)$:

$$(\ \dot{\mathbf{S}}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{S}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{S}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}(t)\mathbf{x}(t) = -\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^T(t)\mathbf{S}(t)\mathbf{x}(t)\ )$$

$$-\dot{\mathbf{S}}(t) = \mathbf{A}^T(t)\mathbf{S}(t) + \mathbf{S}(t)\mathbf{A}(t) + \mathbf{Q}(t) - \mathbf{S}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{S}(t), \tag{1.34}$$

От (1.29) и (1.30) се получава

$$\mathbf{S}(t_f) = \mathbf{S}_f, \tag{1.35}$$

Полученото матрично диференциално уравнение (1.34) се нарича матрично уравнение на Рикати и играе важна роля в синтеза на оптималните линейни системи. Тъй като с (1.35) се задава матрицата $\mathbf{S}(t)$ в крайния момент $t = t_f$, то е възможно числено решаване на (1.34) в "обратно време". Разработени са редица методи за решаване на това уравнение и са изследвани свойствата на решението (съществуване, единственост и асимптотични свойства).

Полученият в общ вид резултат за нестационарни обекти се използва сравнително рядко на практика, поради факта, че се изисква точно познаване на функциите $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ и $\mathbf{C}(t)$. Значително по-голям интерес представлява случаят на стационарен обект, при който (1.34) добива вида

$$-\dot{\mathbf{S}}(t) = \mathbf{A}^T\mathbf{S}(t) + \mathbf{S}(t)\mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{S}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}(t), \quad \mathbf{S}(t_f) = \mathbf{S}_f, \tag{1.36}$$

Управляващото въздействие се дава с израза

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}(t)\mathbf{x}(t)\,, \tag{1.37}$$

Този израз показва, че независимо от това, че обектът е стационарен, системата е нестационарна поради промяната на матрицата на обратната връзка във времето. Това е характерна особеност на задачата на оптималното терминално управление и води до редица затруднения при реализацията на такива системи.

3. Оптимален регулатор – непрекъснати системи

Един от най-често използваните резултати от теорията на оптималните линейни системи е решението на задачата за оптималния регулатор. *Постановката на задачата е следната*:

а) Зададено е описание на обекта във вида

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0\,, \tag{1.38}$$

б) Зададен е показател на качеството

$$J = \int_0^\infty [\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)]dt\ . \tag{1.39}$$

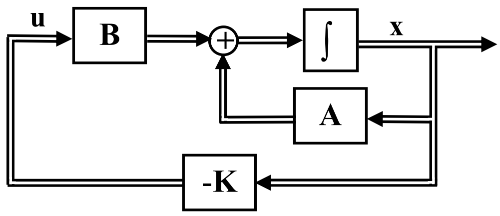
където $\mathbf{Q}$ е положително полуопределена, а $\mathbf{R}$ – положително определена матрица.

в) Да се намери матрицата на обратната връзка $\mathbf{K} = \mathbf{K}^*$, при която управлението

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)\,, \tag{1.40}$$

дава минимум на (1.39) за произволни начални условия $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Структурата на оптималната система има вида, показан на Фиг.1.2.



Фиг.1.2.

Решението на тази задача може да стане чрез използване на получените в т.2 резултати. Ако се приеме, че при $t_f \to \infty$ съществува установен режим, при който $\mathbf{S}(t) = \mathbf{S} = \text{const}$, то от (1.36) се получава така нареченото *матрично алгебрично уравнение на Рикати*

$$\mathbf{A}^T\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S} = 0\,, \tag{1.41}$$

а от (1.37) се получава

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}\mathbf{x}(t)\,, \tag{1.42}$$

Следователно търсената *оптимална матрица на обратната връзка* е

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}\,, \tag{1.43}$$