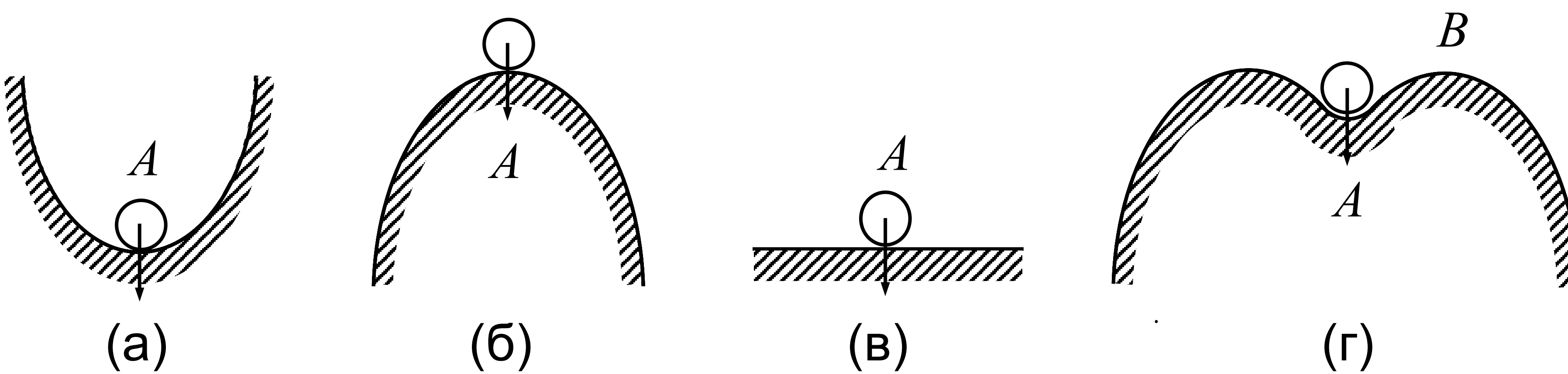
14. Условия за устойчивост на линейни системи

1. **Понятия за устойчивост** – под устойчивост се разбира способността на една система да възстановява изходното си равновесно състояние след изчезване на външните сили, които са я извели от това състояние.

   Пример за онагледяване на устойчивостта:



Равновесни състояния на системата сфера-повърхност:

(а) устойчиво; (б) неустойчиво; (в) неутрално; (г) устойчиво при малки смущения и неустойчиво при големи.

14. Условия за устойчивост на линейни системи

Една линейна система за управление е:

- *устойчива*, ако след извеждането и от равновесно състояние и отстраняване на външните въздействия, които са я извели от равновесие, тя се стреми да се върне към изходното равновесно състояние;
- *неустойчива*, ако не може да възстанови равновесното си състояние и стойността на отклонение от него се увеличава с времето (или извършва около него недопустимо големи колебания);
- *неутрална* (*на границата на устойчивост*), ако се стреми към неизменно по стойност отклонение от равновесното състояние.

14. Условия за устойчивост на линейни системи

Устойчивостта на една *линейна система* не зависи от големината на смущенията – ако е устойчива при малки смущения, ще бъде устойчива и при големи.

Нелинейната система може да бъде устойчива при малки смущения и неустойчива при големи, поради което трябва да се изследва и за двата случая.

При малки смущения, за устойчивостта на нелинейните системи може да се съди по техните *линеаризирани уравнения*. *При големи отклонения,* за определяне на устойчивостта е необходимо да се използуват изходните *нелинейни уравнения* на динамиката.

Само устойчивата система е работоспособна. Затова една от основните задачи на ТАУ е изследване на устойчивостта на САУ.

2. Свободно и принудено движение.

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^m u}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \ldots + b_m u$$

$$y(t) = y_{\mathrm{C}}(t) + y_{\Pi}(t)$$

където $y_{\mathrm{C}}(t)$ е свободна (преходна) съставяща, а

$y_{\Pi}(t)$ - принудена съставяща.

Принудената съставяща е частното решение на НХЛДУ (нехомогенното линейно диференциално уравнение). Тя характеризира принудителния процес в системата, който се установява при прилагане на входно въздействие (в установения режим на системата).

Свободната съставяща е общото решение на ХЛДУ (хомогенното линейно диференциално уравнение) и описва свободното движение, което извършва системата след премахване на външните въздействия (преходния режим).

14. Условия за устойчивост на линейни системи

Свободната съставяща по същество е грешката на системата в преходния режим (отклонение от равновесното състояние) и затова е нежелателна съставяща на управляемата величина.

Следователно, системата ще бъде устойчива, ако свободната съставяща в нея с течение на времето затихва.

$$\lim_{t\to\infty} y_C(t) = 0$$ - устойчива система

$$\lim_{t\to\infty} y_C(t) \to \infty$$ - неустойчива система

$$\lim_{t\to\infty} y_C(t) = const$$ - неутрална (на границата на устойчивост)

3. Корени на характеристичното уравнение и устойчивост

Устойчивостта се определя само от характера на свободната съставяща $y_C(t)$, т.е. изследва се хомогенното уравнение:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = 0$$

Свободната съставяща в случая на некратни корени може да се представи като:

$$y_C(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \ldots + C_n e^{p_n t} = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{p_i t}$$

където C_i е интеграционна константа (определя се от началните условия), а p_i е i–тият корен на характеристичното уравнение:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n = 0$$

14. Условия за устойчивост на линейни системи

За да бъде системата устойчива трябва:

$$\lim_{t\to\infty} y_{\mathrm{C}}(t) = \lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{n} C_i e^{p_i t} = 0$$

Устойчивостта на системата, зависи от стойностите на корените $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Нека сред тях има s реални корени и $n-s$ комплексно спрегнати. Следователно:

$$y_{\mathrm{C}}(t) = \sum_{i=1}^{s} C_{\mathrm{p},i} e^{p_i t} + \sum_{j=1}^{(n-s)/2} C_{\mathrm{к},j} e^{\alpha_j t} \sin(\omega_j t + \varphi_j)$$

Оттук следва, че всички реални корени и реалните части на комплексните корени трябва да са отрицателни, за да е устойчива системата.

14. Условия за устойчивост на линейни системи

$$\lim_{t\to\infty} y_{\mathrm{C}}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad p_i < 0; \alpha_i < 0 \quad \Rightarrow$$ устойчива система

$$\lim_{t\to\infty} y_{\mathrm{C}}(t) \to \infty \Rightarrow$$ поне един корен

$p_i > 0$ или $\alpha_i > 0 \Rightarrow$ неустойчива система

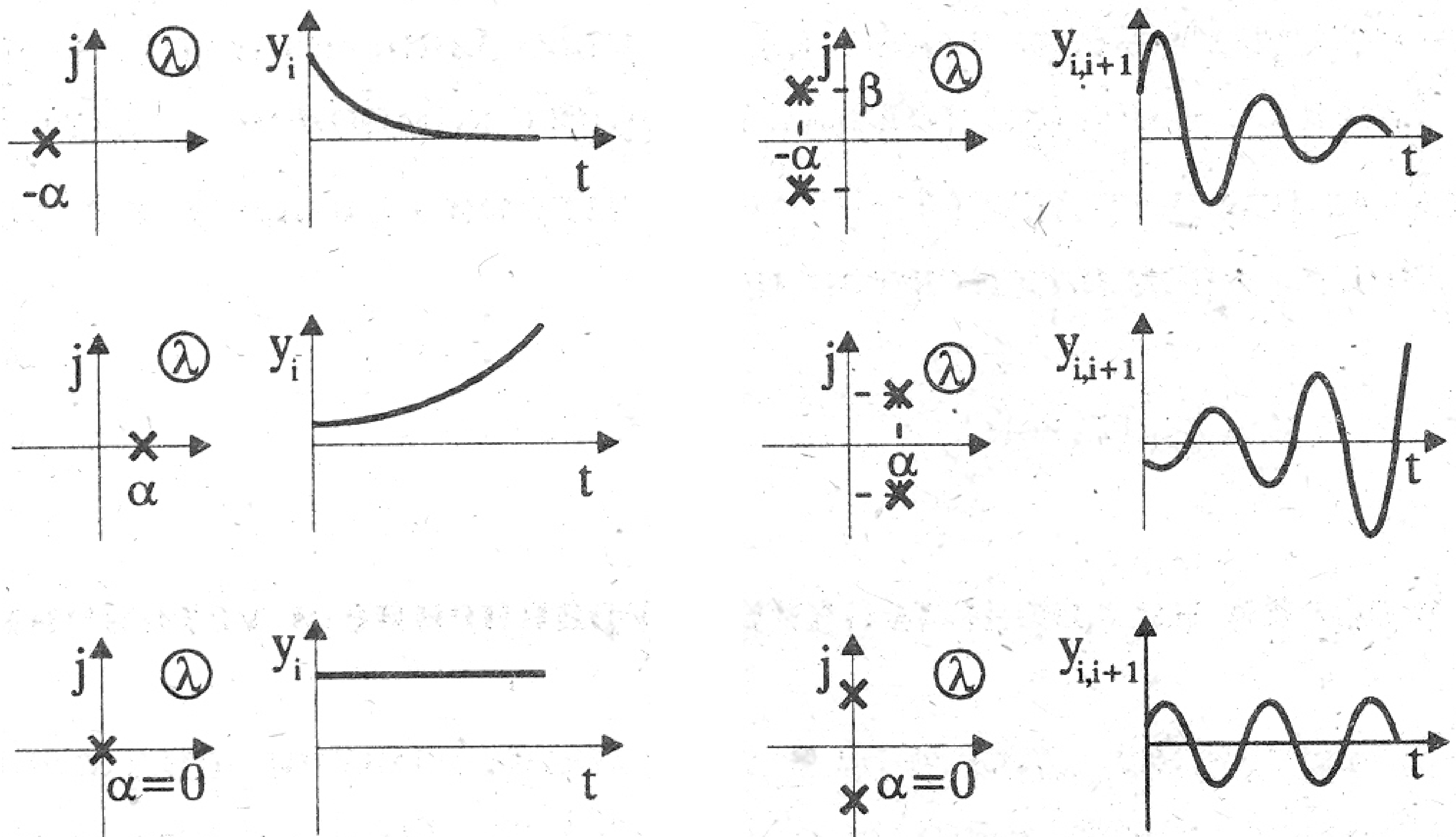
$$\lim_{t\to\infty} y_{\mathrm{C}}(t) = const \Rightarrow$$ поне един корен

$p_i = 0$ или $\alpha_i = 0$

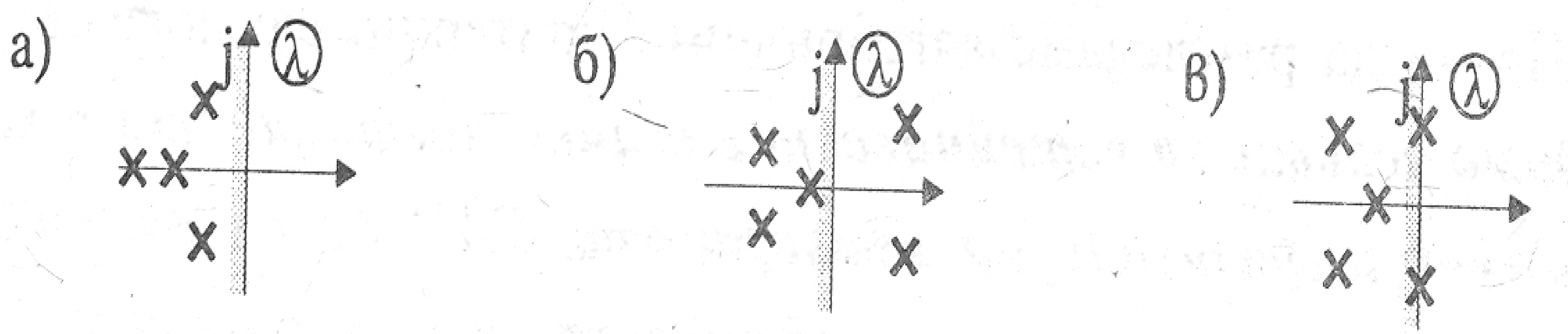
(а останалите са $p_i < 0; \alpha_i < 0$) $\Rightarrow$ неутрална система

Следователно, *необходимото и достатъчно условие за устойчивост на една линейна система е реалните части на всички корени на характеристичното уравнение да са отрицателни* (т.е., да са разположени в лявата комплексна полуравнина).

14. Условия за устойчивост на линейни системи



Пример:



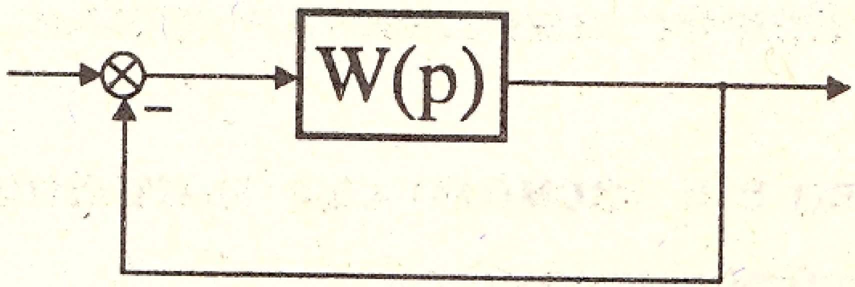
а) устойчива

б) неустойчива

в) на границата на устойчивост

4. Граничен предавателен коефициент

Граничният предавателен коефициент $k_г$ е онази стойност на предавателния коефициент на отворената система, при която затворената система е на границата на устойчивост .



$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$$

$$W_3(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{B(p)/A(p)}{1 + B(p)/A(p)} = \frac{B(p)}{A(p) + B(p)}$$

$$H_O(p) = A(p) = 0$$

$$H_3(p) = A(p) + B(p) = 0$$

$$(W(p) = kW_1(p))$$

15. Алгебрични критерии за устойчивост

Критериите за устойчивост са косвени методи, по които може да се съди за знака на реалната част на корените на характеристичното уравнение, без то да се решава.

Видове критерии:

(1) алгебрични (Хурвиц, Раус);
(2) честотни (Найквист, Боде).

Необходимото условие за устойчивост на система от произволен ред *е положителността на всички коефициенти на характеристичното уравнение:*

$$a_0 > 0, a_1 > 0, \ldots, a_n > 0.$$

1. Условия за устойчивост на системи от I и II ред

(1) $n = 1: \quad a_0 p + a_1 = 0$

Необходимото условие за устойчивост е и достатъчно, т.е.,

$$a_0 > 0, a_1 > 0.$$

(2) $n = 2: \quad a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0$

Необходимото условие за устойчивост е и достатъчно, т.е.,

$$a_0 > 0, \; a_1 > 0, \; a_2 > 0.$$

2. Критерий на Вишнеградски (за системи от III ред)

$$n = 3: \qquad a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$$

Необходимо условие:

$$a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_3 > 0.$$

Достатъчно условие:

$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ - устойчива система

$a_1 a_2 - a_0 a_3 < 0$ - неустойчива система

$a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0$ - неутрална (на границата на устойчивост)

3. Критерий на Хурвиц (за системи от *n*-ти ред)

$$n: \qquad a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n = 0$$

Съставя се главната детерминанта на Хурвиц по следното правило: по главния диагонал на детерминантата отляво надясно се вписват всички коефициенти на характеристичното уравнение от a_1 до a_n , подредени по нарастващ индекс. Стълбовете над главния диагонал се попълват с коефициентите с последователно нарастващи индекси, а под диагонала – с коефициенти с намаляващи индекси.

На мястото на коефициентите с индекси по-големи от n и по-малки от нула се поставят нули.

15. Алгебрични критерии за устойчивост

Детерминантите на Хурвиц от по-нисък ред се получават чрез ограждане на диагоналните минори, както е показано:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & & \end{array} \\
\Delta_n = & \begin{vmatrix}
a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\
a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\
0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & a_n
\end{vmatrix}
\end{array}
$$

15. Алгебрични критерии за устойчивост

$$\Delta_1 = a_1; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_k \end{vmatrix}.$$

Формулировка на критерия на Хурвиц:

За да бъде една система устойчива е необходимо и достатъчно да са изпълнени условията:

$$a_0 > 0,\ \ \Delta_i > 0,\ \ i = 1,2,...,n.$$

Ако поне една от детерминантите е нулева, а останалите са положителни, системата е *на границата на устойчивост*.

Ако поне една детерминанта е отрицателна, системата е *неустойчива*.