19. Устойчивост на дискретни системи.

Понятието за устойчивост на дискретни системи е същото както и при непрекъснатите системи: ***системата е устойчива, ако след кратковременно външно въздействие се стреми да се върне към първоначалното си равновесно състояние.*** Също аналогично, за определяне на устойчивостта може да се изследва само свободното движение (движението при отсъствие на входни въздействия и при ненулеви начални условия). Необходимото и достатъчно условие за устойчивост на системата е свободното движение да се стреми към нула при $k \to \infty$:

(7.31) $$\lim_{k\to\infty} y_{св}(kT_0) = 0\,.$$

Свободното движение може да се получи чрез решаване на хомогенното диференчно уравнение:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + ... + a_n y(k-n) = 0\,.$$

При прости корени z_i, $i = 1,...,n$ на характеристичното уравнение:

$$z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n = 0\,,$$

решението е:

(7.32) $$y_{св}(k) = \sum_{i=1}^{n} c_i z_i^k\,,$$

където c_i са константи, зависещи от началните условия.

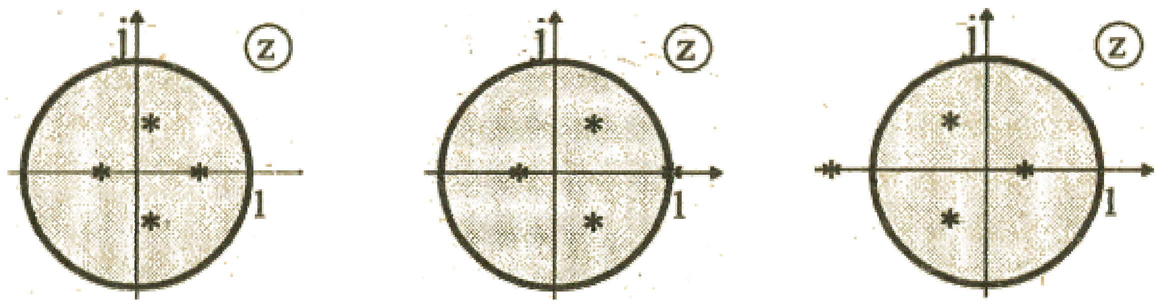
Свободното движение е сума от n компоненти, които съответстват на n-те корена на характеристичното уравнение. На корен $|z_i| < 1$ съответства компонента, която се стреми към нула при $k \to \infty$. На корен $|z_i| = 1$ съответства незатихваща, но и ненарастваща компонента. На корен $|z_i| > 1$ съответства компонента, която нараства до безкрайност при $k \to \infty$. Сумарното свободно движение (7.32) ще се стреми към нула ако и само ако затихват всички негови компоненти. Следователно необходимо и достатъчно условие за устойчивост на дискретни системи се изпълнява когато:

$$|z_i| < 1\,,\ \ i = 1,2,...,n\,,$$

т.е., когато всички корени на характеристичното уравнение са разположени вътре в единичен кръг с център в началото на координатната система.

Ще напомним, че характеристичното уравнение, освен от диференциалното уравнение, може да се получи и чрез приравняване на нула на знаменателя на предавателната функция:

(7.33) $$H(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n = 0\,.$$



(а) устойчива (б) на границата на устойчивост (в) неустойчива

Фиг. 7.20. Полюси на дискретна САУ и устойчивост

На фиг. 7.20, в комплексната равнина z, са показани примерни разположения на корените на характеристично уравнение (полюсите на дискретна предавателна функция) и е отбелязана съответстващата им устойчивост на системата:

Алгебрични критерии

При дискретните системи характеристичният полином трябва да има корени в единичния кръг (а не в лявата полуравнина, както е при непрекъснати ЛСАР) и следователно алгебричните критерии на Раус и на Хурвиц трябва да бъдат съответно модифицирани.

Алгоритъмът за изследване на устойчивост на дискретна система с помощта на критерия на Раус или на Хурвиц е следния:

В характеристичното уравнение (7.33) се извършва субституцията (билинейно преобразуване):

$$z = \frac{q+1}{q-1}.$$

Полученият израз:

$$H(q) = \left(\frac{q+1}{q-1}\right)^n + a_1\left(\frac{q+1}{q-1}\right)^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

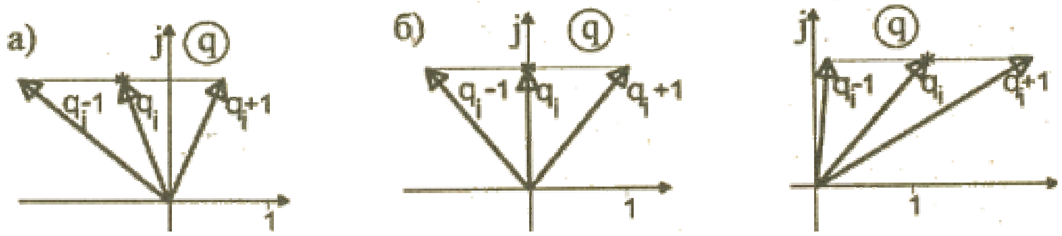
се привежда към общ знаменател, при което се превръща в:

$$H^*(q) = (q+1)^n + a_1(q+1)^{n-1}(q-1) + \ldots + a_n(q-1)^n = 0.$$

След разкриване на скобите се получава модифицираното характеристично уравнение:

(7.34) $$H^*(q) = a_0^* q^n + a_1^* q^{n-1} + \ldots + a_n^* = 0.$$

То се изследва с някой от споменатите алгебрични критерии. Ако условията на този критерий се изпълняват, то корените на началното уравнение (7.33) са разположени вътре в единичния кръг и дискретната система е устойчива.



Фиг. 7.21. Билинейно преобразуване и устойчивост

За да се убедим в истинността на това твърдение ще направим следните разсъждения. На всеки корен q_i на уравнение (7.34), съответства корен $z_i = \dfrac{q_i+1}{q_i-1}$ на уравнение (7.33). Нека коренът q_i е в лявата полуравнина на комплексната равнина на q. Тогава от фиг. 7.21-а се вижда, че $\dfrac{|q_i+1|}{|q_i-1|} = |z_i| < 1$. Ако коренът q_i лежи върху имагинерната ос (фиг. 7.21-б), то $\dfrac{|q_i+1|}{|q_i-1|} = |z_i| = 1$. Ако пък коренът q_i е в дясната полуравнина (фиг. 7.21-в), то $\dfrac{|q_i+1|}{|q_i-1|} = |z_i| > 1$.

Ако условията на алгебричния критерий се изпълняват за трансформираното уравнение (7.34), то всички негови корени са в лявата полуравнина. Тогава и само тогава корените на уравнението (7.33) ще бъдат вътре в единичния кръг и дискретната система ще бъде устойчива.

Да илюстрираме изложения по-горе алгоритъм, като изследваме устойчивостта на дискретна система от втори ред.

Характеристичното уравнение на такава система е:

(7.35) $$H(z) = z^2 + a_1 z + a_2 = 0 \,.$$

Извършваме билинейно преобразуване на уравнение (7.35):

$$H(q) = \left(\frac{q+1}{q-1}\right)^2 + a_1\left(\frac{q+1}{q-1}\right) + a_2 = 0 \,.$$

Привеждаме го към общ знаменател:

$$H^*(q) = (q+1)^2 + a_1(q+1)(q-1) + a_2(q-1)^2 = 0 \,.$$

След разкриване на скобите получаваме модифицираното характеристично уравнение:

(7.36) $$H^*(q) = a_0^* q^2 + a_1^* q + a_2^* = 0 \,,$$

където:

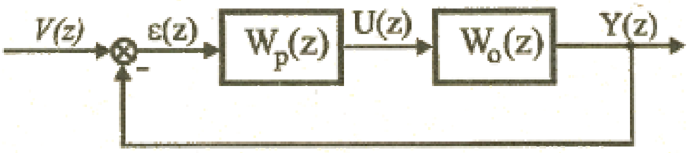
$$a_0^* = 1 + a_1 + a_2 \,;$$
$$a_1^* = 2 - 2a_2 \,;$$
$$a_2^* = 1 - a_1 + a_2 \,.$$

Тъй като уравнение (7.36) е от втори ред, то необходимото условие за разположение на неговите корени в лявата полуравнина: коефициентите му a_0^*, a_1^* и a_2^* да са по-големи от нула, е и достатъчно. Тогава, дискретната система с характеристично уравнение (7.35) е устойчива ако и само ако се изпълняват условията:

(7.37) $$1 + a_1 + a_2 > 0 \,;$$
$$a_2 < 1 \,;$$
$$1 - a_1 + a_2 > 0 \,.$$

Пример 7.12. Устойчивост на цифровата система от Пример 7.11

Дадена е структурната схема на затворена дискретна САУ, която съдържа цифров регулатор $W_P(z)$ и обект на управление, в чиято предавателна функция $W_0(z)$ е отчетен и цифрово-аналоговия преобразувател (фиксатор от нулев ред):



Структурната схема съдържа цифров П-регулатор [$u(k) = k_P \varepsilon(k)$] с предавателна функция

$$W_P(z) = k_P = 10$$

и приведената непрекъсната част с предавателна функция:

$$W_0 = W_\Phi W(z) = \frac{0.1z - 0.07}{(z-1)(z-0.9)} \,.$$

Да се изследва за устойчивост затворената система.

Решение:

Определяме предавателната функция на отворената система:

(7.29) $$W(z) = W_P(z) W_0(z) = \frac{z - 0.7}{(z-1)(z-0.9)} = \frac{z - 0.7}{z^2 - 1.9z + 0.9}$$

и предавателната функция на затворената система:

(7.30) $$W_{зс}(z)=\frac{W(z)}{1+W(z)}=\frac{\dfrac{z-0.7}{z^2-1.9z+0.9}}{1+\dfrac{z-0.7}{z^2-1.9z+0.9}}=\frac{z-0.7}{z^2-0.9z+0.2}$$

От предавателната функция на отворената система (7.29) се вижда, че нейните полюси са $z_1=1$ и $z_2=0.9$. Следователно, отворената система е на границата на устойчивост.

Характеристичното уравнение на затворената система получаваме чрез приравняване на нула на знаменателя на предавателната функция (7.30):

$$H(z)=z^2-0.9z+0.2=0.$$

Коефициентите му са: $a_1=-0.9$ и $a_2=0.2$, т.е. можем да запишем:

(7.35) $$H(z)=z^2+a_1z+a_2=0.$$

Извършваме билинейно преобразуване на уравнение (7.35):

$$H(q)=\left(\frac{q+1}{q-1}\right)^2+a_1\left(\frac{q+1}{q-1}\right)+a_2=0.$$

Привеждаме го към общ знаменател:

$$H^*(q)=(q+1)^2+a_1(q+1)(q-1)+a_2(q-1)^2=0.$$

След разкриване на скобите получаваме модифицираното характеристично уравнение:

(7.36) $$H^*(q)=a_0^*q^2+a_1^*q+a_2^*=0,$$

където:

$$a_0^*=1+a_1+a_2;$$
$$a_1^*=2-2a_2;$$
$$a_2^*=1-a_1+a_2.$$

Тъй като уравнение (7.36) е от втори ред, то необходимото условие за разположение на неговите корени в лявата полуравнина: коефициентите му a_0^*, a_1^* и a_2^* да са по-големи от нула, е и достатъчно. Тогава, дискретната система с характеристично уравнение (7.35) е устойчива ако и само ако се изпълняват условията:

(7.37) $$1+a_1+a_2>0;$$
$$a_2<1;$$
$$1-a_1+a_2>0.$$

Условията (7.37) се удовлетворяват за коефициентите на разглежданата затворена система $a_1=-0.9$ и $a_2=0.2$. Следователно, затворената система е устойчива.

Литература:

Ищев, К., *Теория на автоматичното управление*. София, КИНГ, 2000.