17. Принцип на максимума (минимума) на Понтрягин.

- Постановка на задачата.
- Формулировка на принципа на максимума.
- Формулировка на принципа на минимума.
- Връзка между принцина на максимума и динамичното програмиране
- Особености на принципа на максимума.

Принципът на максимумът е формулиран от Л. С. Понтрягин през 1953 г. като необходимо условие за екстремум в задачите за оптимално управление

17. Принцип на максимума (минимума) на Понтрягин.

1. Постановка на задачата.

Дадено е: $$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t)) ,$$

където: $\mathbf{X}(t)$ е n-мерен вектор на състоянието на системата,
$\mathbf{U}(t)$ - r-мерен вектор на управлението на системата,
$\mathbf{f}(.)$ - n-мерен вектор с компоненти нелинейни функции, описващи динамиката на системата.

Началното и крайното състояние са съответно:

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(0); \quad \mathbf{X}_\mathbf{T} = \mathbf{X}(T).$$

Търси се такова управление $\mathbf{U}(t)$, принадлежащо на областта на допустимите управления $\mathbf{U}(t) \subset \Omega_\mathbf{U}$, което да привежда системата от начално състояние $\mathbf{X_0}$ в крайно състояние $\mathbf{X_T}$ за време $t \in [0;T]$, така че да максимизира (минимизира) критерия за качество

$$I = \int_0^T f_0(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t))dt. \tag{1}$$

$\mathbf{U}(t)$ принадлежи към класа на отсечково-непрекъснатите функции и приема стойности от $\Omega_\mathbf{U}$.

2. Формулировка на принципа на максимума.

Нека съществува спомагателна непрекъсната и ненулева вектор-функция $\Psi(t) = [\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n]^{\mathrm{T}}$, която участвува в Хамилтониана

$$H(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), \Psi(t)) = \psi_0(t) f_0(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t)) + \Psi^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{f}(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t)), \qquad (2)$$

където $\psi_0(t) \le 0$ (обикновено $\psi_0 = -1$).

За да бъдат управлението $\mathbf{U}(t)$ и състоянието $\mathbf{X}(t)$ оптимални, в смисъла на избрания критерий за оптималност (1) е необходимо да съществува такава вектор-функция $\Psi(t)$, която заедно с $\mathbf{U}(t)$ и $\mathbf{X}(t)$ да удовлетворява уравненията на *спрегнатата система*:

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = -\frac{\partial H(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \Psi)}{\partial \mathbf{X}}, \qquad (3а)$$

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \frac{\partial H(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \Psi)}{\partial \Psi}, \qquad (3б)$$

и за всяко $t \in [0; T]$ функцията на Хамилтон (2) да приема максималната си възможна стойност:

$$H(\mathbf{X}^*(t), \mathbf{U}^*(t), \Psi^*(t)) = \max_{\mathbf{U} \subset \Omega_{\mathbf{U}}} H(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), \Psi(t)).$$

$\Psi(t)$ е решение на системата (3а) и се нарича *спрегнат вектор*.

3. Формулировка на принципа на минимума.

Същността на принципа на максимума е запазена, променена е само формата. Спомагателната променлива се нарича *канонична*, означава се с $\mathbf{P}(t)=[p_1, p_2,..., p_n]^{\mathrm{T}}$ и се определя от

$$\mathbf{P}(t)=-\Psi(t)\,; \qquad p_0=-\psi_0\,,$$

където $p_0(t)\geq 0$ (обикновено $p_0=1$). Функцията на Хамилтон и спрегнатата система (тук наречена *канонична*) са, съответно:

$$H(\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),\mathbf{P}(t))=p_0(t)\,f_0(\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t))+\mathbf{P}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{f}(\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t))\,, \qquad (4)$$

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt}=-\frac{\partial H(\mathbf{X},\mathbf{U},\mathbf{P})}{\partial \mathbf{X}}\,, \qquad (5\text{а})$$

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt}=\frac{\partial H(\mathbf{X},\mathbf{U},\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}}\,, \qquad (5\text{б})$$

и вместо максимум се търси минимум на Хамилтониана (4) при решението на (5):

$$H(\mathbf{X}^*(t),\mathbf{U}^*(t),\mathbf{P}^*(t))=\min_{\mathbf{U}\subset\Omega_{\mathbf{U}}} H(\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),\mathbf{P}(t))\,.$$

Ако H_Ψ и H_{P} е Хамилтонианът, съответно в принципа на максимума и принципа на минимума, то $H_{\mathrm{P}}=-H_\Psi$. $\mathbf{P}(t)$ е решение на системата (5а) и се нарича каноничен *вектор*.
Останалата част от формулировката остава непроменена.

4. Връзка между принципа на максимума и динамичното програмиране.

Спрегнатият вектор $\Psi(t)$ се представя като

$$\boldsymbol{\Psi} = -\mathrm{grad}\, S(\mathbf{X}) = [-\frac{\partial S}{\partial x_1}, -\frac{\partial S}{\partial x_2}, \ldots, -\frac{\partial S}{\partial x_n}]^{\mathrm{T}},$$

където S е функцията на Белман, и се въвежда още една променлива на състоянието

$$x_0(t) = \int_0^T f_0(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t))dt = I, \quad x_0(0) = 0 \quad \text{и} \quad x_0(T) = I.$$

След диференциране се получава

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = f_0(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t)),$$

Ако системата е неавтономна се въвежда още една координата на състоянието $x_{n+1}(t) = t$ и съответно още едно диференциално уравнение $\dot{x}_{n+1}(t) = 1$ с начално условие $x_{n+1}(0) = 0$. Размерността на $\Psi(t)$ се допълва до тази на $\mathbf{X}(t)$ чрез полагането:

$$\psi_0 = -1; \qquad \psi_{n+1} = -\frac{\partial S}{\partial x_{n+1}} = -\frac{\partial S}{\partial t}.$$

<u>*17. Принцип на максимума (минимума) на Понтрягин.*</u>

При направените дотук уточнения, уравнението на Белман

$$-\frac{\partial S(\mathbf{X}^*(t),t)}{\partial t}=\min_{\mathbf{U}\subset\Omega_{\mathbf{U}}}[\,f_0(\mathbf{X}^*(t),\mathbf{U}(t),t)+(\operatorname{grad}S(\mathbf{X}^*(t),t))^{\mathrm{T}}\mathbf{f}\,(\mathbf{X}^*(t),\mathbf{U}(t),t)]$$

може да се приведе до вида

$$0=\max_{\mathbf{U}\subset\Omega_{\mathbf{U}}}[(-1)\,f_0-(\operatorname{grad}S)^{\mathrm{T}}\mathbf{f}-\frac{\partial S}{\partial t}(+1)]=\max_{\mathbf{U}\subset\Omega_{\mathbf{U}}}(\widetilde{\mathbf{\Psi}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\mathbf{f}}\,),\qquad(6)$$

където $\widetilde{\Psi}$ и $\widetilde{\mathbf{f}}$ са разширените $n+2$ -мерни вектори, съответстващи на Ψ и $\mathbf{f}$.

От (6) следва, че в принципа на *максимума* Хамилтонианът е винаги *неположителен*, а в принципа на *минимума* - *неотрицателен*.