<u>15. Динамично програмиране за непрекъснати системи.</u>

- Постановка на задачата.
- Извеждане на уравнението на Белман за непрекъснати системи.
- Един подход за аналитично решаване.
- Предимства и недостатъци.

Динамичното програмиране е разработено в началото на 50-те години на миналия век от американския математик Р. Белман.

Методът се основава на *принципа на оптималността*.

1. Постановка на задачата.

Дадено:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t)$$

където: $\mathbf{X}(t)$ е n-мерен вектор на състоянието на системата;

$\mathbf{U}(t)$ - r-мерен вектор на управлението на с-мата;

$\mathbf{f}(.)$ - n-мерен вектор с компоненти нелинейни функции, описващи динамиката на с-мата;

Началното и крайното състояние са съответно:

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(0)\,; \qquad \mathbf{X}_T = \mathbf{X}(T).$$

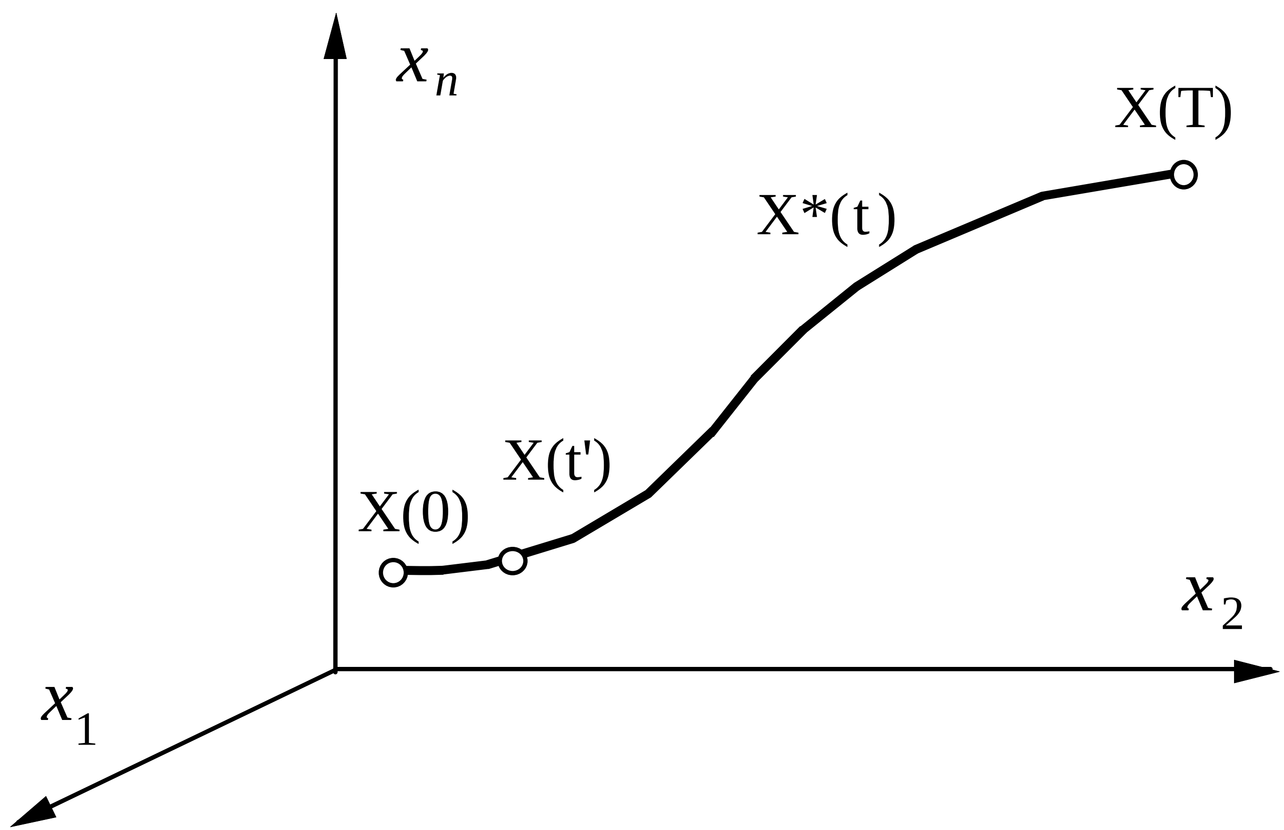
Търси се: управление $\mathbf{U}(t)$, принадлежащо на областта на допустимите управления $\mathbf{U}(t) \subset \Omega_{\mathbf{U}}$, което да привежда системата от начално състояние $\mathbf{X}_{\mathbf{0}}$ в крайно състояние $\mathbf{X}_T$ за време $t \in [0;T]$, така че да минимизира критерия за качество

$$I = \int_0^T f_0(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t)\,dt \qquad (1)$$

2. Извеждане на уравнението на Белман.

Нека начертаната траектория $\mathbf{X}^*(t)$ е оптималната, съответствуваща на оптималното управление $\mathbf{U}^*(t)$. Минимумът на функционала (1) е:

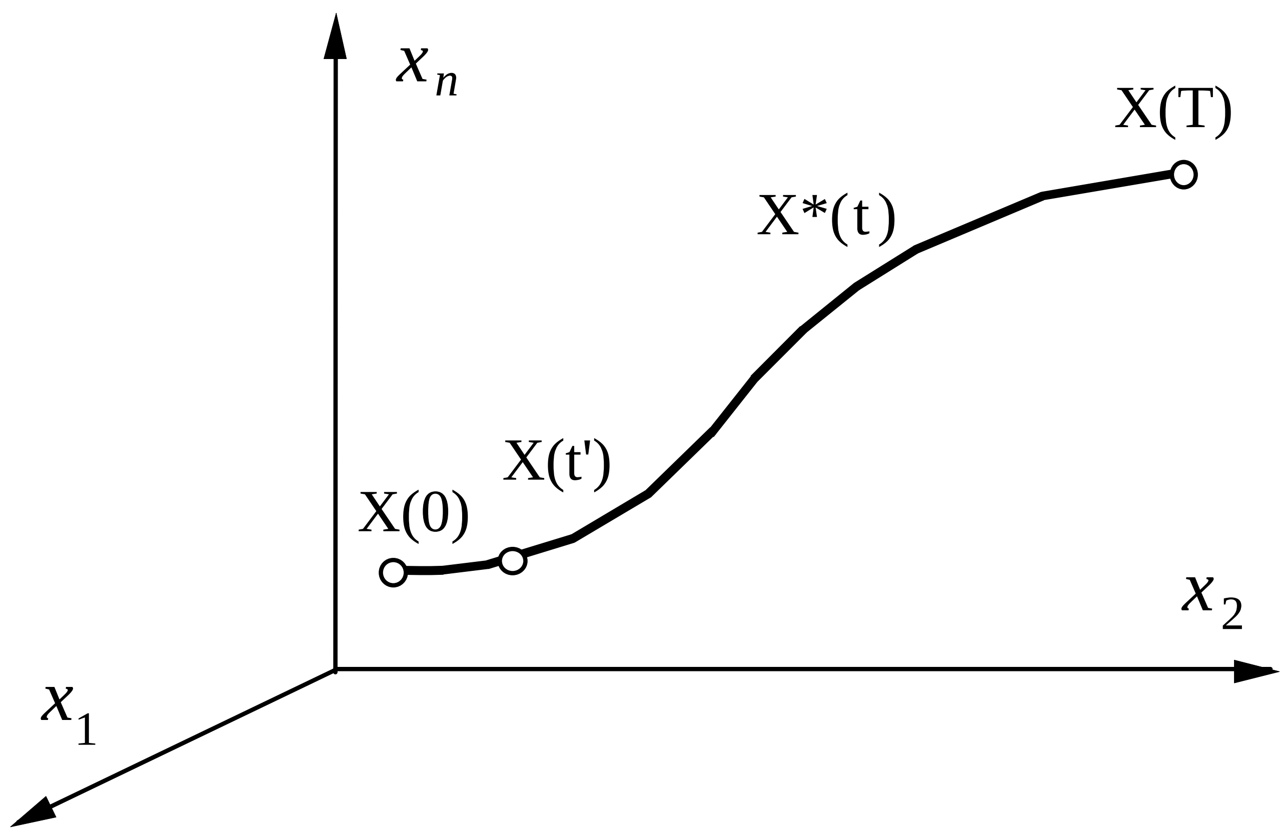
$$S = \min_{\mathbf{U}\subset\Omega_{\mathbf{U}}} I = \min_{\mathbf{U}\subset\Omega_{\mathbf{U}}} \int_0^T f_0(\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t)dt = \int_0^T f_0(\mathbf{X}^*(t),\mathbf{U}^*(t),t)dt = S(\mathbf{X}_0,0)$$



15. Динамично програмиране при непрекъснати процеси.

Нека $t = t'$ и от т. $\mathbf{X}(t')$ до края (т. $\mathbf{X}(T)$) е намерено оптималното управление. Минимумът на критерия за оптималност за този интервал е:

$$S(\mathbf{X}(t'),t') = \min_{\mathbf{U}\subset\Omega_{\mathbf{U}}} \int_{t'}^{T} f_0(\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t)dt = \int_{t'}^{T} f_0(\mathbf{X}^*(t),\mathbf{U}^*(t),t)dt$$



<u>15. *Динамично програмиране при непрекъснати процеси.*</u>

Минимумът на пълния функционал на качеството е:

$$S(\mathbf{X}_0,0) = \min_{\mathbf{U}\subset\Omega_{\mathbf{U}}}[\int_0^{t'} f_0(\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t)dt + S(\mathbf{X}(t'),t')] =$$

$$= \min_{\mathbf{U}\subset\Omega_{\mathbf{U}}}[f_0(\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t)dt + S(\mathbf{X}(t'),t')] \qquad (2)$$

Замяната на интеграла с подинтегралната функция е възможно тъй като интервалът $t' - 0 = dt$ е избран достатъчно малък. (2) се нарича *рекурентна формула на Белман за непрекъснати системи* и е аналог на рекурентната формула на Белман за дискретни процеси, а функцията $S(\mathbf{X}(t'),t')$ се нарича *функция на Белман*. Предполага се, че функцията на Белман съществува относно всички точки и е непрекъсната, съществуват и нейните непрекъснати частни производни по координатите на състоянието x_i и по времето t.

15. Динамично програмиране при непрекъснати процеси.

Нека $t' \approx 0$, следователно $(0,t') \approx dt$, т.е. разглежда се много малък интервал от време $dt = t' - 0$, за който уравнението на състоянието може да се запише във вида

$$\frac{\mathbf{X}(t') - \mathbf{X}(0)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{X}(0), \mathbf{U}(0), 0)$$

Разлага се в ред на Тейлър по степените на $t' = dt$ в околност-та на точката $\mathbf{X_0}$ стойността на минимума на критерия на качеството за интервала от t' до края:

$$S(\mathbf{X}(t'), t') = S(\mathbf{X}_0, 0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S(\mathbf{X}(t), t)}{\partial x_i} \frac{dx_i(t)}{dt}\Big|_0 dt + \frac{\partial S(\mathbf{X}(t), t)}{\partial t}\Big|_0 dt + O' =$$

$$= S(\mathbf{X}_0, 0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S(\mathbf{X}(t), t)}{\partial x_i} f_i(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t)\Big|_0 dt + \frac{\partial S(\mathbf{X}(t), t)}{\partial t}\Big|_0 dt + O' \qquad (3)$$

където с O' е означен остатъкът, съдържащ нелинейните чле-нове в реда на Тейлър. Допуска се, че $O' = 0$. След заместване на (3) в (2) се получава:

15. Динамично програмиране при непрекъснати процеси.

$$S(\mathbf{X}_0,0)=\min_{\mathbf{U}\subset\Omega_{\mathbf{U}}}[\,f_0(\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t)dt+S(\mathbf{X}_0,0)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S(\mathbf{X}(t),t)}{\partial x_i}\,f_i(\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t)\Big|_0 dt+\frac{\partial S(\mathbf{X}(t),t)}{\partial t}\Big|_0 dt] \qquad (4)$$

$S(\mathbf{X}_0,0)$ и $\frac{\partial S(\mathbf{X}(t),t)}{\partial t}\Big|_0$ не зависят от $\mathbf{U}$ и следователно могат да излязат пред знака за минимизация. Символът $\Big|_0$ означава, че се разглежда околността на точката $\mathbf{X_0}$ при $t=0$. Извеждането (4) не губи общността си за всеки произволен начален момент до края, което позволява да се отстрани символът $\Big|_0$. След съкращаване на $S(\mathbf{X}_0,0)$ и делене на dt се получава уравнението на Белман за непрекъснати системи:

$$-\frac{\partial S(\mathbf{X}(t),t)}{\partial t}=\min_{\mathbf{U}\subset\Omega_{\mathbf{U}}}[\,f_0(\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S(\mathbf{X}(t),t)}{\partial x_i}\,f_i(\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t)] \qquad (5)$$

15. Динамично програмиране при непрекъснати процеси.

Предполага се че е известна оптималната траектория $\mathbf{X}^*(t)$.
След въвеждане на вектора стълб:

$$\operatorname{grad} S(\mathbf{X}(t),t) = \frac{\partial S(\mathbf{X}(t),t)}{\partial \mathbf{X}} = \left[\frac{\partial S}{\partial x_1}, \frac{\partial S}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial x_n}\right]^{\mathrm{T}} \qquad (4)$$

(5) добива вида:

$$-\frac{\partial S(\mathbf{X}^*(t),t)}{\partial t} = \min_{\mathbf{U} \subset \Omega_{\mathbf{U}}} [\, f_0(\mathbf{X}^*(t),\mathbf{U}(t),t) + (\operatorname{grad} S(\mathbf{X}^*(t),t))^{\mathrm{T}} \mathbf{f}(\mathbf{X}^*(t),\mathbf{U}(t),t)] \qquad (6)$$

Уравнението на Белман (6) в най-общия случай е нелинейно диференциално уравнение с частни производни. Неизвестната функция е $S(\mathbf{X}(t),t)$ - минималната стойност на критерия за оптималност. Решаването на това уравнение може да стане по различни начини, но най-често се извършва числено, тъй като аналитичното му решаване е сложно и в повечето случаи невъзможно.

3. Един подход за аналитично решаване.

Ако минимумът на дясната страна на (6) се достига във вътрешните точки на дефиниционната област Ω_U, то уравнението на Белман може да се представи във вида:

$$\frac{\partial}{\partial u_j}\left\{f_0(\mathbf{X}^*(t),\mathbf{U}(t),t)+(\mathrm{grad}\,S(\mathbf{X}^*(t),t))^{\mathrm{T}}.\mathbf{f}(\mathbf{X}^*(t),\mathbf{U}(t),t)\right\}=0 \quad j=1,2,\dots,r \qquad (7)$$

$$f_0(\mathbf{X}^*(t),\mathbf{U}(t),t)+(\mathrm{grad}\,S(\mathbf{X}^*(t),t))^{\mathrm{T}}.\mathbf{f}(\mathbf{X}^*(t),\mathbf{U}(t),t)=-\frac{\partial S(\mathbf{X}^*(t),t)}{\partial t} \qquad (8)$$

Уравнение (7) изразява необходимото условие за минимум на лявата част на (6) и замества изпуснататата в (8) операция минимизация по управлението $\mathbf{U}$.

Ако десните части на уравнението на състоянието на обекта $f_i,\ i=0,1,\dots,n$ и подинтегралната функция в критерия за оптималност f_0 не зависят явно от времето и крайният момент T не е фиксиран, то функцията на Белман не зависи явно от времето и $\partial S/\partial t=0$.

15. Динамично програмиране при непрекъснати процеси.

Оптималното управление по метода на динамичното програмиране се намира по следния начин:

1) От уравнение (7) се намира управлението като функция на S, т.е. $\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^*(S)$;

2) Замества се $\mathbf{U}^*$ в уравнение (8) и след решаването му при приетото краево условие се намира функцията на Белман $S = S(\mathbf{X})$;

3) Полагайки намерената функция на Белман в $\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^*(S)$ се получава оптималното управление като функция на фазовите координати $\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^*(\mathbf{X})$.

4. Предимства и недостатъци.

Вариационните методи (класически методи за намиране на екстремум на функционал) позволяват намирането на оптималното управление като функция на времето.

- *Предимството* на динамичното програмиране е, че управлението се намира като функция на фазовите координати, т.е. решава се задачата за синтеза на оптимален регулатор.

- *Недостатък* на метода на динамичното програмиране е, че изходната задача за оптимално управление се свежда до трудно решими нелинейни диференциални уравнения с частни производни.