3. Линеаризация на нелинейни системи. Приближена линеаризация (чрез разлагане в ред на Тейлър) и условия за използване на линеаризирани модели.

- Описание с нелинейни уравнения.
- Линеаризация на статични характеристики.
- Линеаризация на диференциални уравнения.
- Условия за използване на линеаризирани модели.

Разглежданият подход за линеаризация на статични характеристики и на диференциални уравнения е приложим за някаква малка област около установения режим на работа.

1. **Описание с нелинейни уравнения -** Декомпозиция на непрекъснатата система на компоненти, които се описват с диференциални уравнения до втори ред:

   (а) Уравнение на динамиката:

$$F(y, \dot{y}, \ddot{y}, u, \dot{u}, \ddot{u}) = 0$$

   (б) Уравнение на статиката:

При $u = u^*$ и $t \to \infty$, $y = y^*$

$$F(y^*, 0, 0, u^*, 0, 0) = 0$$

2. Линеаризация – Процесът на преобразуване на нелинейните уравнения в линейни се нарича *линеаризация*.

- извършва се чрез разлагане на нелинейните функции в уравнението в ред на Тейлър, в околността на зададения установен режим

(а) Линеаризация на статични характеристики.

Нека работната точка (u^*, y^*) е разположена в нелинеен участък от статичната характеристика $y = f(u)$ на звеното.

Нека,

$$u(t) = u^* + \Delta u(t)$$

$$y(t) = y^* + \Delta y(t)$$

където отклоненията Δu и Δy са много малки.

3. Приближена линеаризация на нелинейни системи.

Разлага се $f(u)$ в ред на Тейлър около точката u^*

$$y = f(u^*) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{u=u^*} \Delta u + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right|_{u=u^*} \Delta u^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{\partial^3 f}{\partial u^3}\right|_{u=u^*} \Delta u^3 + \ldots$$

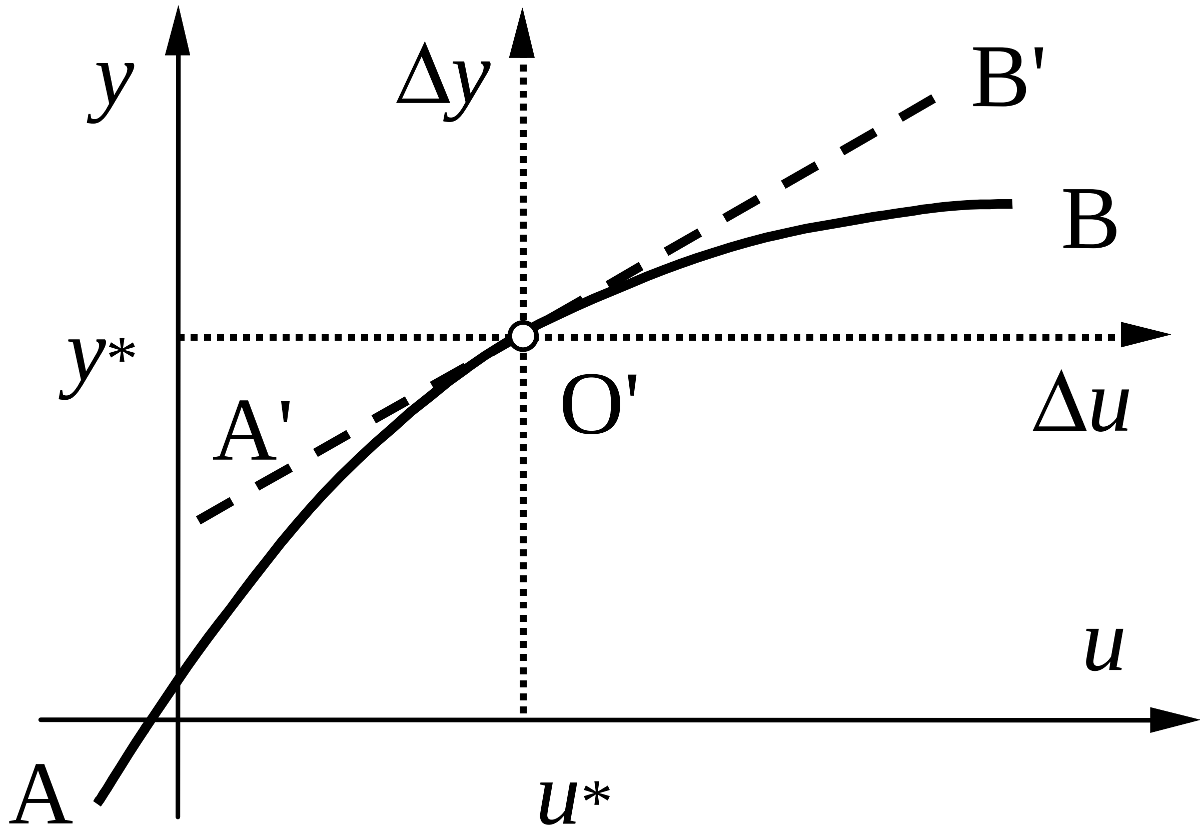
Членовете Δu^2 , Δu^3 и т.н. могат да се пренебрегнат.

Тъй като $f(u^*) = y^*$, следователно $\Delta y = k\Delta u$,

$$y - y^* = \Delta y$$

където k е производната на $f(u)$ в точката u^*.

Геометрична интерпретация на линеаризацията



(б) Линеаризация на диференциални уравнения

Да се линеаризира нелинейното диференциално уравнение

$$F(y, \dot{y}, \ddot{y}, u, \dot{u}, \ddot{u}) = 0$$

в околността на установения режим на работа

$$y = y^*,\quad \dot{y} = 0,\quad \ddot{y} = 0,\quad u = u^*,\quad \dot{u} = 0,\quad \ddot{u} = 0.$$

3. Приближена линеаризация на нелинейни системи.

Разлага се в ред на Тейлър, в околността на установения режим:

$$F(y,\dot{y},\ddot{y},u,\dot{u},\ddot{u}) = F(y^*,0,0,u^*,0,0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_* \Delta y + \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right|_* \Delta \dot{y} + \left.\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right|_* \Delta \ddot{y} +$$

$$+ \left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_* \Delta u + \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}\right|_* \Delta \dot{u} + \left.\frac{\partial F}{\partial \ddot{u}}\right|_* \Delta \ddot{u} + O$$

O - всички членове от втори и по-висок ред;

* - стойностите на аргументите в установен режим.

Въвеждаме:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right|_* = a_0 \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right|_* = a_1 \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_* = a_2$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \ddot{u}}\right|_* = -b_0 \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}\right|_* = -b_1 \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_* = -b_2$$

3. Приближена линеаризация на нелинейни системи.

Линеаризираното диференциално уравнение е:

$$a_0\Delta\ddot{y} + a_1\Delta\dot{y} + a_2\Delta y - b_0\Delta\ddot{u} - b_1\Delta\dot{u} - b_2\Delta u = 0$$

$$a_0\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_2 y = b_0\frac{d^2u}{dt^2} + b_1\frac{du}{dt} + b_2 u$$

За система от n-ти ред:

$$a_0\frac{d^n y}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + ... + a_n y = b_0\frac{d^m u}{dt^m} + b_1\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}} + ... + b_m u$$

където $m \le n$ (условие за физическа реализуемост).

В стандартна форма:

$$a'_0\frac{d^n y}{dt^n} + a'_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + ... + a'_{n-1}\frac{dy}{dt} + y = k\ (b'_0\frac{d^m u}{dt^m} + ... + b'_{m-1}\frac{du}{dt} + u)$$

$a'_i = a_i / a_n$, ($i = 0,1,..., n-1$); $b'_j = b_j / b_m$, ($j = 0,1,..., m-1$);

$k = b_m / a_n$ - в установен режим: $y = k\,u$

3. Предавателна функция

Предавателна функция се нарича отношението на образа по Лаплас на изходната величина към образа по Лаплас на входната величина при нулеви начални условия:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n)Y(p) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + ... + b_m)U(p)$$

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + ... + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n}$$