19. Приложение на принципа на минимума на Понтрягин за синтез на оптимално управление на разхода на гориво.

- Постановка на задачата.
- Извеждане на управляващия закон.
- Особености на анализа на решението.
- Моделираща схема на оптимална по разход на гориво система.

1. Постановка на задачата.

Разглежда се линейна система

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t),$$

при ограничение

$$|u_j| \le 1 \quad , \; (j = 1, 2, \ldots, r).$$

Да се намери оптималното управление $\mathbf{U}^*(t)$, привеждащо системата от начално състояние $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ в крайно състояние $\mathbf{X}(T) = \mathbf{X}_\mathrm{T}$, така че да се минимизира следният функционал, характеризиращ разхода на гориво

$$I = \int_0^T \sum_{j=1}^r |u_j(t)| dt = \int_0^T \mathbf{U}^\mathrm{T}(t) \operatorname{sign} \mathbf{U}(t) dt.$$

Подинтегралната величина представлява сума от скоростите на разхода на гориво и следователно интегралът от нея съответствува на общото потребление на гориво (общия разход на гориво).

2. Извеждане на управляващия закон.

Хамилтонианът е от вида

$$
\begin{aligned}
H(\mathbf{P},\mathbf{X},\mathbf{U}) &= \mathbf{U}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathrm{sign}\,\mathbf{U}(t)+\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X}+\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{U}= \\
&= \mathbf{U}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathrm{sign}\,\mathbf{U}(t)+\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}+\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\,. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Диференциалното уравнение относно спомагателната променлива $\mathbf{P}(t)$ и неговото решение са, съответно

$$
\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}}=-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}(t);
$$

$$
\mathbf{P}(t)=\mathbf{P}_0 e^{-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}t}\,.
$$

Необходимото условие за намиране на минимума на Хамилтониана

$$
\frac{\partial H(\mathbf{X},\mathbf{U},\mathbf{P})}{\partial \mathbf{U}}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}=0\ ,
$$

не носи информация за управлението $\mathbf{U}(t)$.

19. Синтез на оптимално управление на разхода на гориво.

За да се минимизира (1) е необходимо минимизиране на членовете, съдържащи $\mathbf{U}(t)$:

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathrm{sign}\,\mathbf{U}(t)+\mathbf{U}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}=\mathbf{U}^{\mathrm{T}}(t)[\mathrm{sign}\,\mathbf{U}(t)+\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}]\xrightarrow[\mathbf{U}]{}\min\,. \qquad (2)$$

Разглеждат се следните два случая:

1. Ако $|\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}|\geq 1$, то знакът на двучлена в средните скоби (2) се определя от $\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}$,

$$\mathbf{U}^{*}=-\mathrm{sign}(\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{P})\ ;$$

2. Ако $|\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}|<1$, то знакът на двучлена в средните скоби (2) се определя от $\mathrm{sign}\,\mathbf{U}(t)$ и следователно целият израз (2) е неотрицателен. Най-малката стойност, която може да приеме е нула при $\mathbf{U}^{*}=0$.

Избира се релейно управление от вида

$$\mathbf{U}^{*}(t)=-\mathrm{dez}\,\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}^{*}(t)\ , \qquad (3)$$

където dez означава трипозиционно реле.

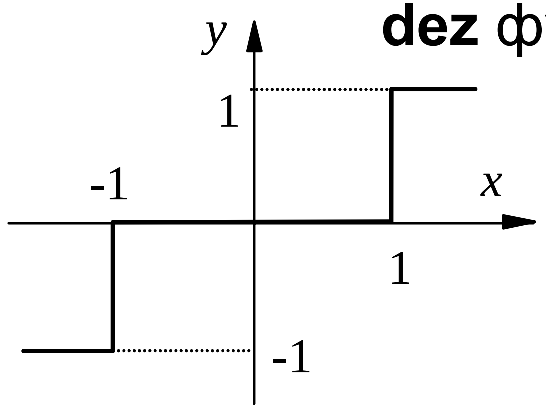
19. Синтез на оптимално управление на разхода на гориво.

Полага се $\mathbf{Q}^*(t) = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}^*(t)$. В скаларен вид (3) се свежда до

$$u_j^*(t) = -\operatorname{dez} q_j^*(t), \quad (j = 1,2,\dots,r),$$

където q_j^* е j-тата компонента на $\mathbf{Q}^*(t)$.

dez функция:



$$y = \operatorname{dez} x = \begin{cases} 1, & x \ge 1 \\ 0, & |x| < 1 \\ -1, & x \le -1 \end{cases}$$

3. Моделираща схема на отворена система, оптимална по разход на гориво.