4. Интуитивен подход към линеаризацията чрез ОВ. Линеаризация "вход-състояние"

- Въведение в интуитивния подход за линеаризация чрез ОВ
- Пример
- Линеаризация "вход-състояние"
- Особености на решението

4. Линеаризацията чрез ОВ: линеаризация "вход-състояние".

- Линеаризацията чрез обратна връзка (feedback linearization) е подход за синтезиране на нелинейно управление.

- Основната идея е алгебрично да се преобразува динамиката на една нелинейна система в линейна (пълно или частично), така че да могат да се използват техники от управлението на линейни системи.

- Интуитивният подход към линеаризацията "вход-състояние" означава, че не се използва унифициран математичен алгоритъм за решаването на проблема.

1. Въведение в интуитивния подход за линеаризация чрез ОВ

- Линеаризацията чрез обратна връзка се прилага към клас нелинейни системи, които се представят в съпровождаща форма или управляема канонична форма

$$x^{(n)} = f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u\,,$$

където: u е скаларен управляващ вход, няма производни на u,
x - скаларен изход,
$\mathbf{x} = [x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}]^{\mathrm{T}}$ - вектор на състоянието,
$f(\mathbf{x})$- нелинейна функция на състоянията,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \ldots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \ldots \\ x_n \\ f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u \end{bmatrix}$$

4. Линеаризацията чрез ОВ: линеаризация "вход-състояние".

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dots \\ x_n \\ f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u \end{bmatrix}$$

Управлението се избира във вида: $u = \frac{1}{b}(v - f)$

където: $b \neq 0$, а v е вход на линеаризираната система. Нелинейностите се отстраняват и се получава:

$$x^{(n)} = v \, .$$

Управляващият закон v може да се избере като

$$v = -k_1 x - k_2 \dot{x} - \dots - k_n x^{(n-1)}$$

с коефициенти k_i , $i = 1,2,\dots,n$ такива, че затворената система

$$x^{(n)} + k_n x^{(n-1)} + \dots + k_1 x = 0$$

да бъде устойчива и да притежава определени показатели на качеството.

4. Линеаризацията чрез ОВ: линеаризация "вход-състояние".

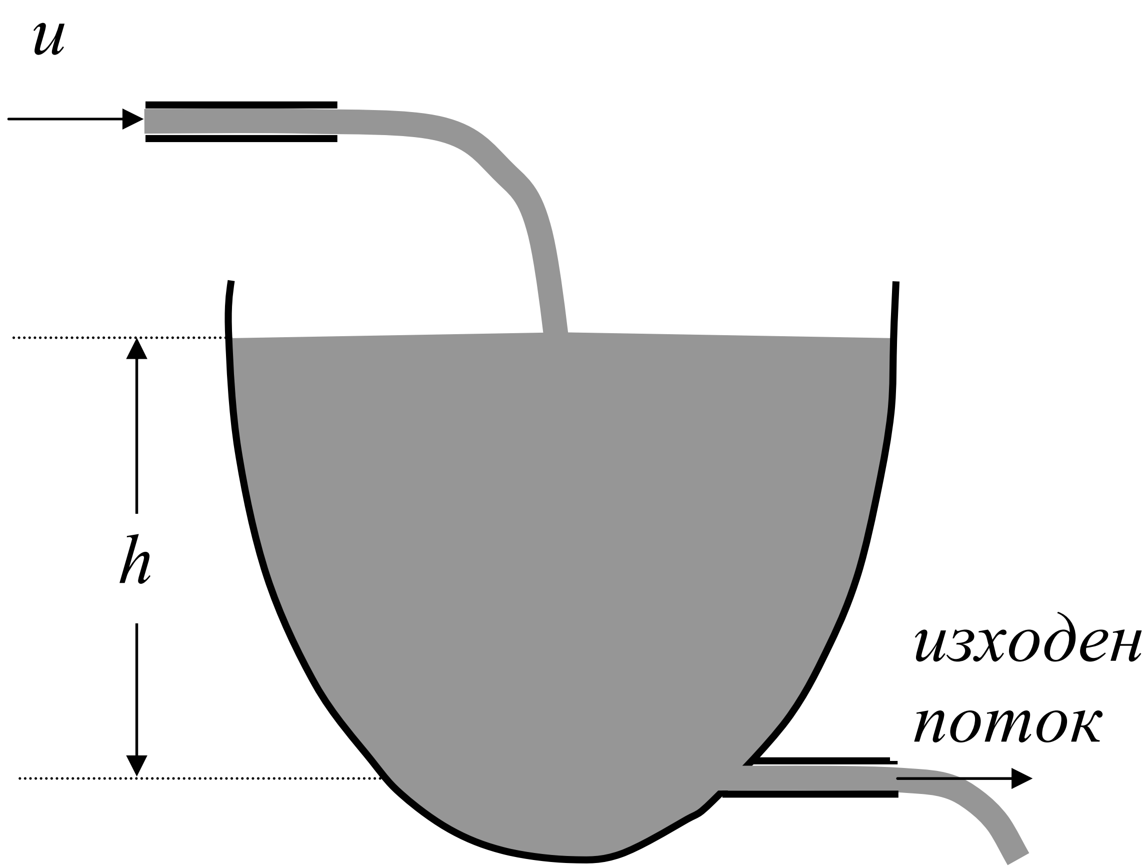
В задачите за следене на зададен желан изход $x_d(t)$ управляващият закон е

$$v = x_d^{(n)} - k_1 e - k_2 \dot{e} - \ldots - k_n e^{(n-1)},$$

където $e = x(t) - x_d(t)$ е грешката в следенето, която води до експоненциално сходящо следене при подходящо избрани k_i, $i = 1,2,\ldots,n$. Скаларът x може да се замести с вектор, а скаларът b - с инвертируема квадратна матрица.

Предполага се, че динамиката на системата е линейна по отношение на u. В противен случай, u се замества с обратима функция $g(u)$. Например в системи, включващи управление на поток чрез вентил, динамиката зависи от u^4, (u е диаметър на отваряне на вентила). Полага се $w = u^4$, модифицираният вход w се синтезира на базата на разгледаната вече процедура, а след това се изчислява u чрез обратната трансформация $u = w^{1/4}$.

➢ ***Пример 1:*** Разглежда се управлението на нивото h на течност в резервоар, което трябва да се поддържа на определено желано ниво h_d . Управляващият вход u е потокът на течността към резервоара, а началното ниво е h_o.



4. Линеаризацията чрез ОВ: линеаризация "вход-състояние".

Моделът на динамиката на резервоара е

$$\frac{d}{dt}[\int_0^h A(h)dh] = u(t) - a\sqrt{2gh},$$

където: $A(h)$ е напречното сечение на резервоара,

a - напречното сечение на изходната тръба,

Ако началното ниво h_o се различава твърде много от желаното h_d, управлението на h трябва да отчита нелинейностите на системата.

Динамиката може да бъде записана като:

$$A(h)\dot{h} = u - a\sqrt{2gh}.$$

Управляващият вход $u(t)$ е избран по следния начин:

$$u(t) = a\sqrt{2gh} + Av,$$

където v е "еквивалентен вход", който трябва да се определи. Получава се линейна динамика:

$$\dot{h} = v.$$

4. Линеаризацията чрез ОВ: линеаризация "вход-състояние".

Избира се:

$$v = -\alpha\tilde{h},$$

където $\tilde{h} = h(t) - h_d$ е грешка на нивото,

α - положителна константа.

Получава се (от $\dot{h} = v$) следната затворена система:

$$\dot{h} + \alpha\tilde{h} = 0.$$

$\Rightarrow \tilde{h}(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Нелинейният управляващ закон е:

$$u(t) = a\sqrt{2gh} - A\alpha\tilde{h}.$$

Първата част от дясната страна се използва да осигури изходния поток $a\sqrt{2gh}$, докато втората част служи за повишаване на нивото на течността според желаната линейна динамика.

4. Линеаризацията чрез ОВ: линеаризация "вход-състояние".

Ако желаното ниво е предварително известна функция на времето $h_d(t)$, еквивалентният вход v се избира като

$$v = \dot{h}_d(t) - \alpha\tilde{h} ,$$

така че $\tilde{h}(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Следователно, в системите за стабилизация:

$$v = -\alpha\tilde{h} ,$$

а в следящите системи:

$$v = \dot{h}_d(t) - \alpha\tilde{h} .$$

2. Линеаризация "вход-състояние".

- Разглежда се синтезът на управление u за нелинейна система с един вход

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u).$$

- Линеаризацията от типа "вход-състояние" (input-state linearization) се извършва на два етапа:

(1) Намира се преобразуване на състоянието $\mathbf{z} = \mathbf{w}(\mathbf{x})$ и преобразуване на входа $u = g(\mathbf{x}, v)$, така че динамиката на нелинейната система да се трансформира в еквивалентна динамика на линейна система, в познатата форма $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}v$.

(2) След това се използват стандартни линейни техники (например синтез по желани полюси) за синтезиране на v.

4. Линеаризацията чрез ОВ: линеаризация "вход-състояние".

➢ ***Пример 1:*** Разглежда се системата

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + ax_2 + \sin x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \cos x_1 + u \cos 2x_1\end{aligned} \qquad (1)$$

Трудност: нелинейността в първото уравнение не може директно да бъде отстранена чрез управляващия вход u. Разглежда нов набор от координати на състоянието, така че чрез промяната на базиса в ПС да се линеаризира първото уравнение. Новите координати са:

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1 \\ z_2 &= ax_2 + \sin x_1\end{aligned}$$

В новия базис в ПС равновесното състояние – точката (0,0) не се променя. Обратният преход към първоначалните координати също е възможен. За тази цел се изразяват x_1 и x_2:

$$\begin{aligned}x_1 &= z_1 \\ x_2 &= (z_2 - \sin z_1)/a\end{aligned}$$

и се заместват им в (*). Първото уравнение на (1) добива вида:

$$\dot{z}_1 = -2z_1 + z_2 .$$

4. Линеаризацията чрез ОВ: линеаризация "вход-състояние".

Двете страни на второто уравнение на (1) се преработват. За лявата страна се получава:

$$\dot{x}_2 \Leftarrow \frac{d}{dt}((z_2 - \sin z_1)/a) = \frac{1}{a}(\dot{z}_2 - \dot{z}_1 \cos z_1) = \frac{1}{a}[\dot{z}_2 - (-2z_1 + z_2)\cos z_1]$$

Преобразува се и дясната страна

$$-x_2 \cos x_1 + u \cos 2x_1 \Leftarrow -\frac{1}{a}(z_2 - \sin z_1)\cos z_1 + u \cos 2z_1 \ .$$

Приравняват се десните страни и се изразява $\dot{z}_2$:

$$\frac{1}{a}[\dot{z}_2 - (-2z_1 + z_2)\cos z_1] = -\frac{1}{a}(z_2 - \sin z_1)\cos z_1 + u \cos 2z_1$$

$$\dot{z}_2 = -2z_1 \cos z_1 + \sin z_1 \cos z_1 + au \cos 2z_1$$

Системата (*) в новия базис е

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -2z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= -2z_1 \cos z_1 + \cos z_1 \sin z_1 + au \cos(2z_1) \end{aligned}$$

4. Линеаризацията чрез ОВ: линеаризация "вход-състояние".

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -2z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= -2z_1\cos z_1 + \cos z_1 \sin z_1 + au\cos(2z_1)\end{aligned} \qquad (2)$$

Първото уравнение вече е линейно, а нелинейността на второто може да се отстрани чрез управляващия закон:

$$u = \frac{1}{a\cos(2z_1)}(v - \cos z_1 \sin z_1 + 2z_1 \cos z_1). \qquad (3)$$

След заместване на u в (2) се получава линейна зависимост между входа и състоянието на системата:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -2z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= v\end{aligned}. \qquad (4)$$

Чрез преобразуване на променливите на състоянието $\mathbf{x} \to \mathbf{z}$ и преобразуването на входа (3), изходната задача за стабилизиране на нелинейната система (1) използваща първоначалния управляващ вход u се трансформира в задача за стабилизиране на новата динамика – системата (4), използваща новия вход v.

4. Линеаризацията чрез ОВ: линеаризация "вход-състояние".

Новата динамична система е линейна и управляема. Управляващият закон - линейната ОВ по състояние

$$v = -k_1 z_1 - k_2 z_2$$

може да разположи полюсите на системата навсякъде в комплексната равнина чрез подходящ избор на коефициентите (k_1, k_2) на ОВ. Например, избира се: $v = -2z_2$,

водещо до устойчива затворена система:

$$\dot{z}_1 = -2z_1 + z_2$$
$$\dot{z}_2 = -2z_2$$

с 2 полюса, разположени в точката -2 на реалната ос. Решението на второто уравнение е:

$$z_2(t) = C_2 e^{-2t},$$

където C_2 е интеграционна константа. След заместване на $z_2(t)$ в първото уравнение се получава:

$$\dot{z}_1 + 2z_1 = C_2 e^{-2t};$$
$$\dot{z}_1 + 2z_1 = 0;\ \lambda + 2 = 0,\ \lambda = -2.$$

Затворената система притежава двукратен реален полюс равен на -2.

4. Линеаризацията чрез ОВ: линеаризация "вход-състояние".

Така синтезираният управляващ закон

$$v = -2z_2$$

за линеаризираната система се замества в линеаризиращата обратна връзка

$$u = \frac{1}{a\cos(2z_1)}(v - \cos z_1 \sin z_1 + 2z_1 \cos z_1).$$

При отчитане на полагането

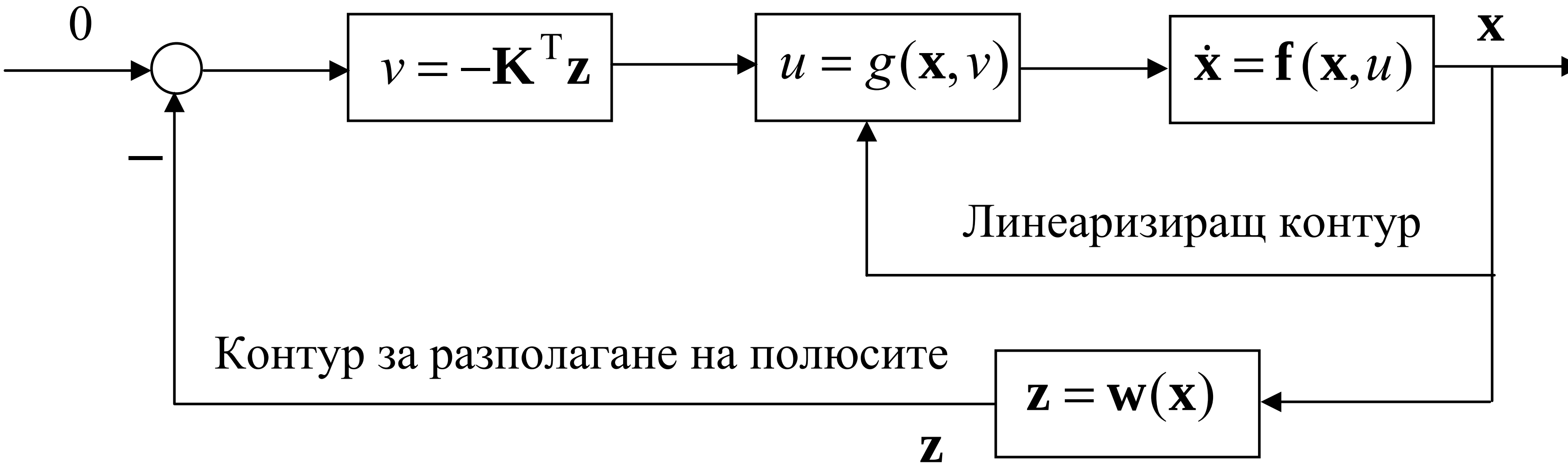
$$z_1 = x_1$$
$$z_2 = ax_2 + \sin x_1,$$

първоначалният управляващ вход u се представя във вида

$$u = \frac{1}{\cos 2x_1}(-2ax_2 - 2\sin x_1 - \cos x_1 \sin x_1 + 2x_1 \cos x_1).$$

4. Линеаризацията чрез ОВ: линеаризация "вход-състояние".

Затворената система с горния управляващ закон е представена с блок-диаграмата:



Тази система за управление съдържа два затворени контура: 1) вътрешна обратна връзка постигаща линеаризация на зависимостта "вход-състояние" и

2) външна обратна връзка постигаща стабилизация на затворената динамична система.

Това е в съответствие с (3), където управляващият вход u се вижда, че е композиран от част премахваща нелинейността и линейна компенсираща част.

Забележки:

- Полученият резултат, въпреки че е валиден за широка област от пространството на състоянията, не е глобален. Управляващият закон не е добре дефиниран когато $x_1 = (\pi / 4 \pm k\pi / 2)$, $k = 1,2,...$. Очевидно, когато началното състояние е в такива особени точки, управляващото устройство няма да приведе системата до равновесната точка.
- Линеаризацията "вход-състояние" се постига чрез комбинация от преобразувание на координатите на състоянието и преобразувание на входа, чрез ОВ по състояние използвана и в двете трансформации. Тази линеаризация с ОВ е фундаментално различна от линеаризацията чрез разлагане в ред на Тейлър за работа в малък диапазон (околност, около точката на линеаризация), върху която линеаризация се базира линейното управление.

4. Линеаризацията чрез ОВ: линеаризация "вход-състояние".

- За да се изпълни управляващият закон са неоходими нови координати на състоянието (z_1, z_2). Ако те нямат физичен смисъл или не могат да бъдат директно измерени, първоначалният вектор на състоянието $\mathbf{x}$ трябва да бъде измерен и използуван за изчисляването им.
- На модела на системата се разчита както за синтеза на управлението, така и за изчисляването на $\mathbf{z}$. Ако в модела има неизвестности, например неточно определен параметър a, това би причинило грешка в изчисляването както на новия вектор на състоянието $\mathbf{z}$, така и на управляващия вход u.
- Може да се синтезира и следящо управление. Желаното движение трябва да бъде изразено по отношение на пълния нов вектор на състоянието. Могат да се наложат сложни изчисления за преобразуване на желаното движение по отношение на новите координати на състоянието.

4. Линеаризацията чрез ОВ: линеаризация "вход-състояние".

- Обобщаването на идеята за линеаризацията "вход-състояние" към нелинейни системи изисква да се отговори на два въпроса:

- Какви класове от нелинейните системи могат да бъдат преобразувани в линейни системи?
- Как да се намерят подходящите преобразувания за тези системи, които могат да се преобразуват?