# **27. Ходограф на корените** (метод на Evans)

При този метод, *корени ще наричаме само полюсите на затворената система*.

***Ходограф на корените*** (ХК) е съвкупност от траектории, по които корените на характеристичното уравнение на затворената система се преместват в комплексната равнина при промяна на даден параметър на САУ (най-често предавателният коефициент на отворената система).

ХК се използва при решаване на следните задачи:

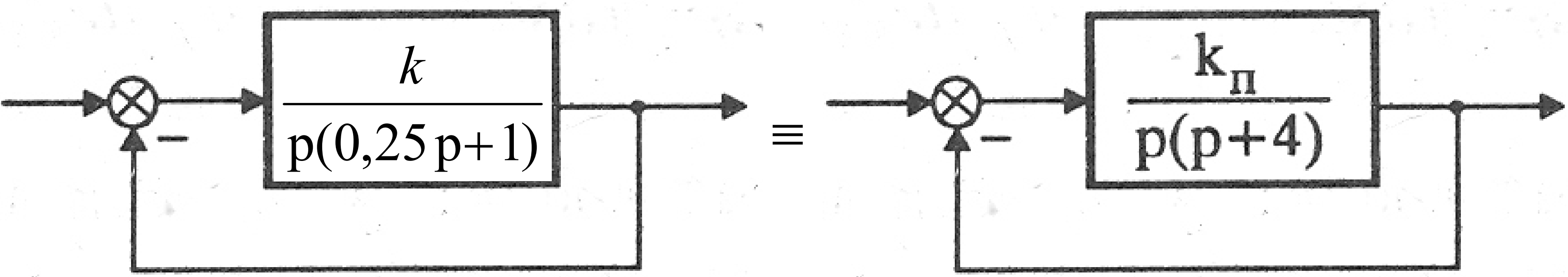
(1) анализ на качеството на ПП (оценка по полюси);

(2) избор на параметри на САУ ( $k$ );

(3) синтез на коригиращи звена, осигуряващи желано разположение на корените на затворената система.

# 27. Ходограф на корените

**Пример 1.** Да се построи аналитично ХК.




$$\frac{k}{p(0{,}25p+1)}=\frac{k}{p(\frac{1}{4}p+1)}=\frac{4k}{p(p+4)}=\frac{k_п}{p(p+4)},$$

$k_п$ - коефициент на пропорционалност по корени.

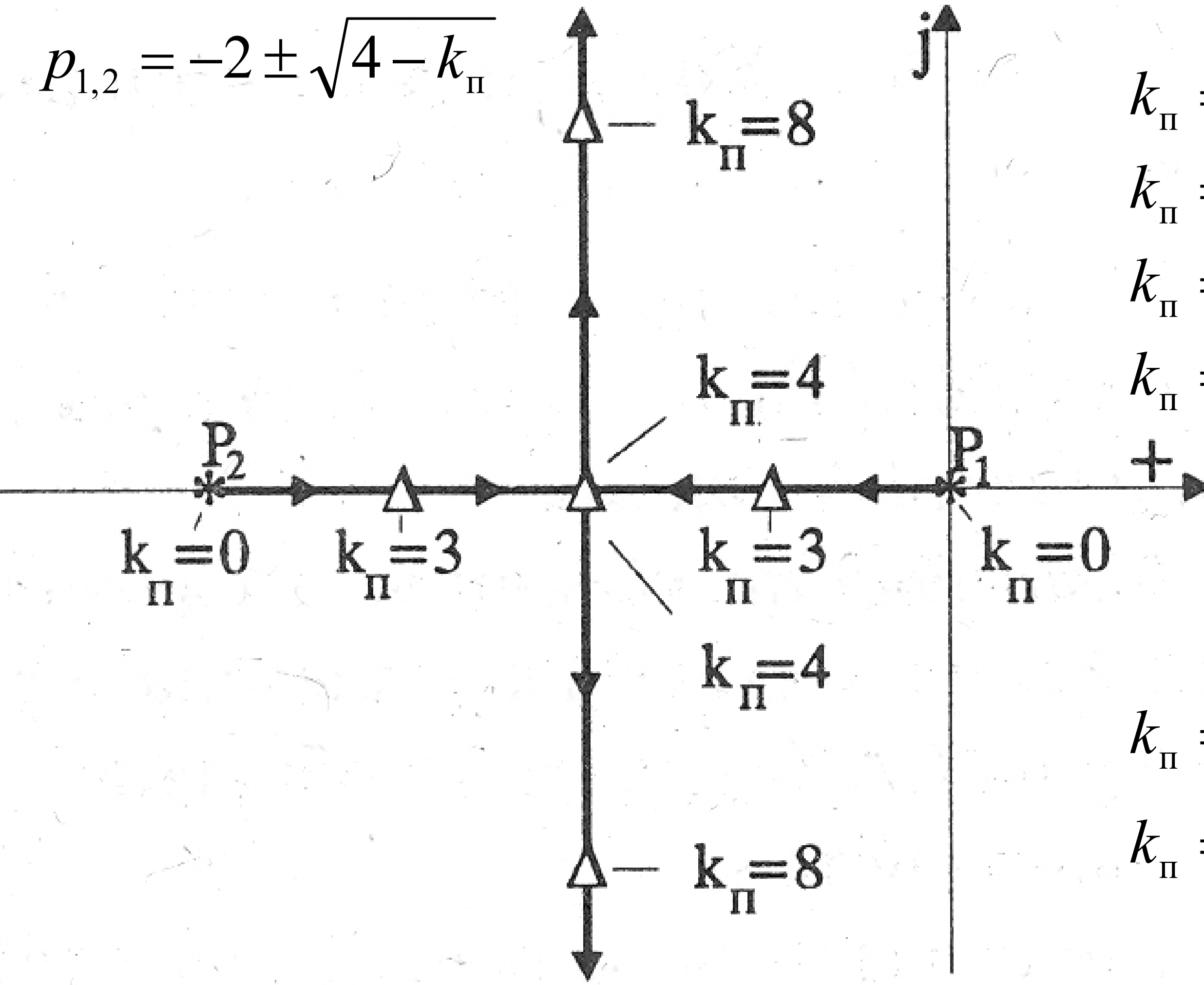
$$H_з(p)=p(p+4)+k_п=p^2+4p+k_п=0,$$

$$p_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-k_п}\,;\quad k_п\in[0;\infty].$$

Изчисляват се $p_1$ и $p_2$ за $k_п\in[0;\infty]$ и са нанасят в комплексната равнина:

# 27. Ходограф на корените

$$p_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - k_п}$$




$k_п = 0;\ p_1 = 0;\ p_2 = -4;$ "$*$"

$k_п = 3;\ p_1 = -1;\ p_2 = -3;$ "$\Delta$"

$k_п = 4;\ p_1 = p_2 = -2;$ "$\Delta$"

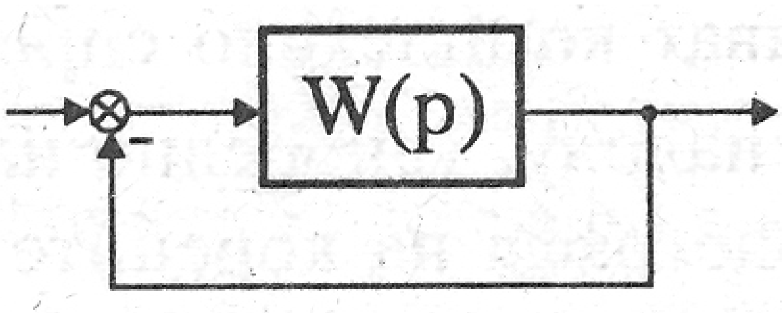
$k_п = 5;\ p_{1,2} = -2 \pm j;$ "$\Delta$"

$k_п = 8;\ p_{1,2} = -2 \pm j2;$ "$\Delta$"

$k_п = \infty;\ p_{1,2} = -2 \pm j\infty.$

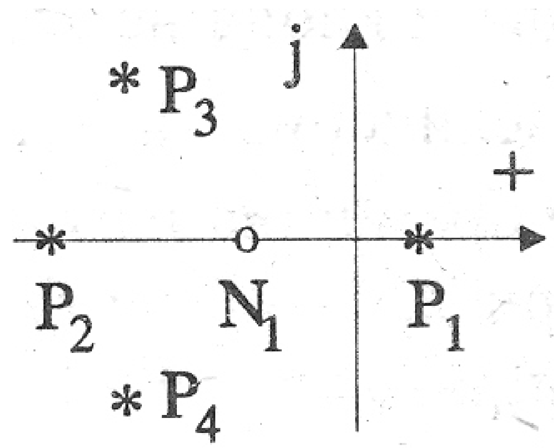
При $k_п \in [0;4]$ корените са реални, а ПП – апериодични; при $k_п > 4$ корените са комплексни, а ПП – преобладаващо апериодични (за $4 < k_п < 8$) и колебателни (за $k_п > 8$).

## 1. Основни уравнения




$$W(p) = k_{\text{п}} \frac{\prod_{i=1}^{m}(p - N_i)}{\prod_{j=1}^{n}(p - P_j)}; \quad (*)$$

"Нуполен портрет" – нулите $N_i$ и полюсите $P_j$ са нанесени върху комплексната равнина чрез символите:




$N_i$ – "o"

$P_j$ – "*"

## *27. Ходограф на корените*

ПФ на затворената система е

$$W_з(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)},$$

а корените на характеристичното уравнение се получават от:

$$1+W(p)=0, \quad \Rightarrow \quad W(p)=-1. \qquad (**)$$

Алтернативно $(**)$ се записва чрез две уравнения:

1) за модула на $W(p)$: $\quad |W(p)|=1$

2) за аргумента на $W(p)$: $\quad \arg W(p) = \pm\pi(2q+1),$

$$q = 0,1,2,\ldots$$

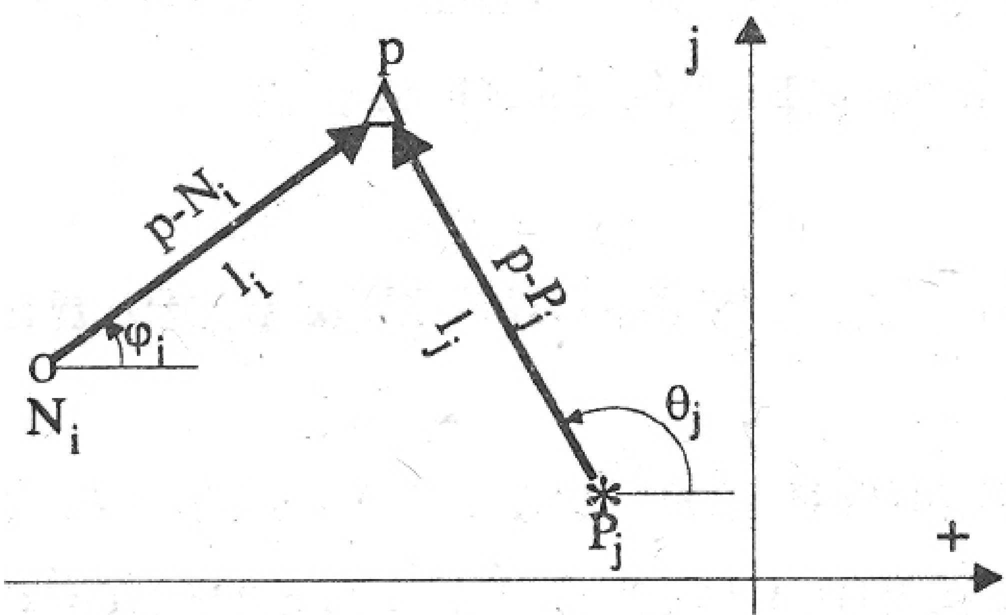
# 27. Ходограф на корените

Множителите в числителя и знаменателя на $W(p)$ могат да се представят като вектори с модул и аргумент: (*)

$$(p-N_i):\quad |p-N_i|=l_i;\quad \arg(p-N_i)=\varphi_i;$$
$$(p-P_j):\quad |p-P_j|=l_j;\quad \arg(p-P_j)=\theta_j;$$

В уравнението за модула $W(p)$ се замества с (*):

$$|W(p)|=k_{\text{п}}\frac{|p-N_1|\ldots|p-N_m|}{|p-P_1|\ldots|p-P_n|}=k_{\text{п}}\frac{\prod_{i=1}^{m}|p-N_i|}{\prod_{j=1}^{n}|p-P_j|}=k_{\text{п}}\frac{\prod_{i=1}^{m}l_i}{\prod_{j=1}^{n}l_j}=1$$




1) *Уравнение за модула*:

$$k_{\text{п}}=\frac{\prod_{j=1}^{n}l_j}{\prod_{i=1}^{m}l_i}$$

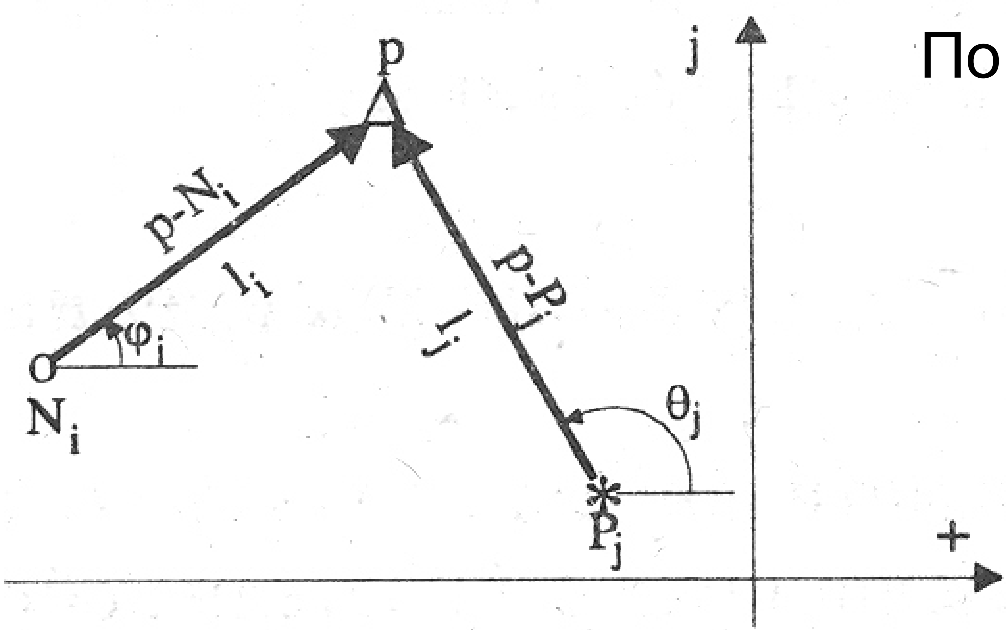
<u>*27. Ходограф на корените*</u>

2) *Уравнение за аргумента*:

$$\arg W(p) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i - \sum_{j=1}^{n} \theta_j = \pm(2q+1)\pi$$

1) и 2) са основните уравнения за построяване на ХК.

По 2) се проверява дали дадена точка $\text{т.}\Delta \in XK$;




По 1) се прави “оцифровка” – нанасяне върху точките от ХК на съответните стойности на $k_{\text{п}}$ .

## 27. Ходограф на корените

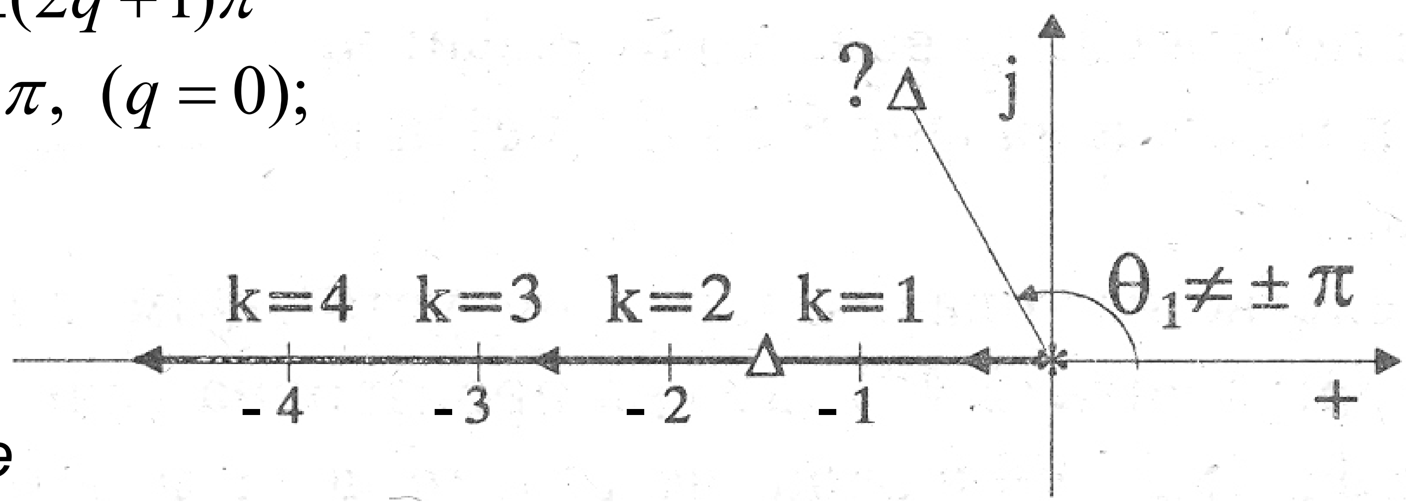
**_Пример 2._** Като се използват основните уравнения 1) и 2), да се построи ХК.

ПФ на отворената система е $W(p)=\dfrac{k}{p}$ и има 1 полюс: $p_1=0.$

(2): $-\theta_1=\pm(2q+1)\pi$

$\Rightarrow \theta_1=\mp\pi,\ (q=0);$

(1): $k_{\text{п}}=l_1$




*Построяване*

- *Компютърно* (два начина)

  - проверка на уравнението за *аргумента* + *оцифровка*;

  - $k_{\text{п}}$ се увеличава $(k_{\text{п}}\in[0;\infty])$ и се изчисляват корените

- Чрез *Свойствата* на ХК (ръчно)

## 2. Свойства

***Свойство 1:*** *Броят на клоновете на ХК е равен на броя* (*n*) *на полюсите на отворената система* (редът на отворената система е равен на реда на затворената система – следва от условието за физическа реализуемост).

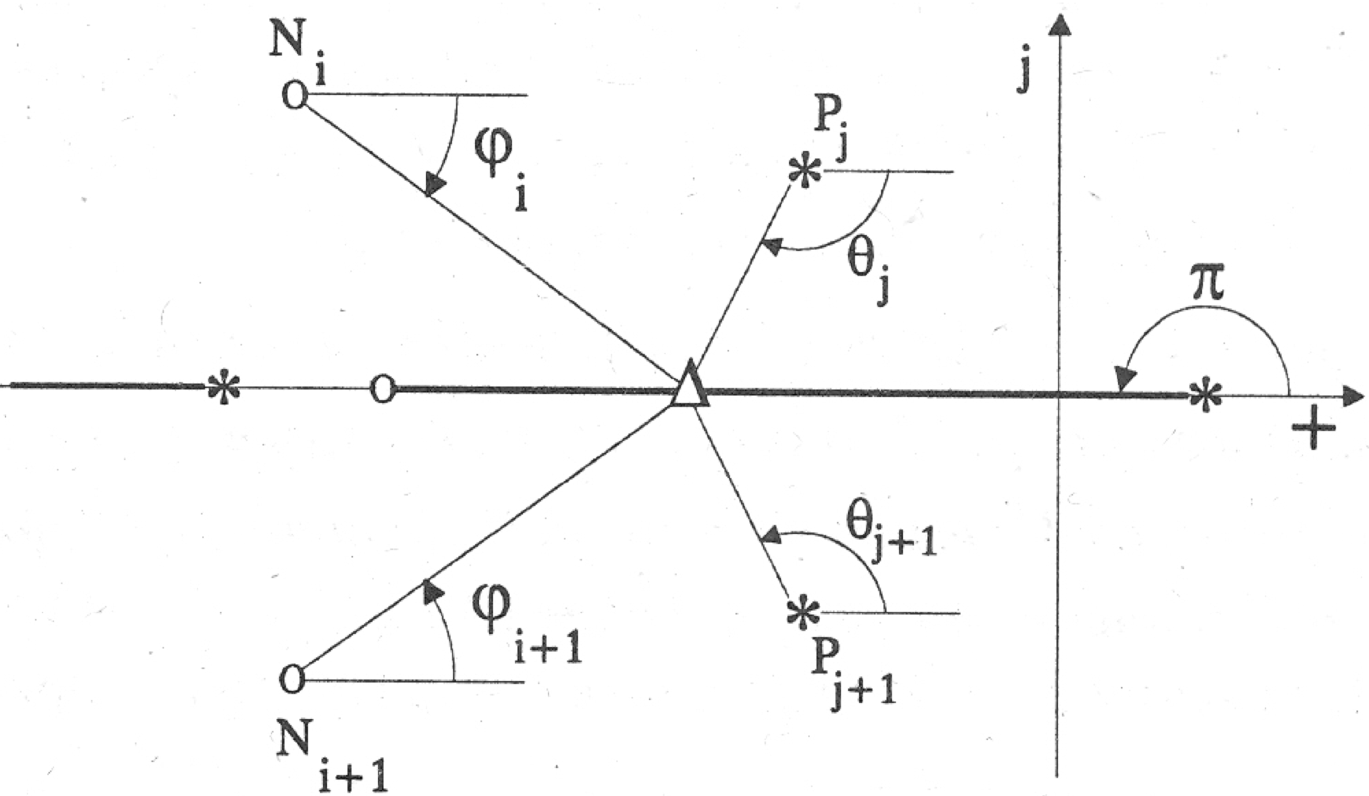
***Свойство 2:*** *Когато не лежат върху реалната ос, клоновете на ХК са симетрични спрямо нея* (това следва от факта, че корените винаги са комплексно спрегнати).

***Свойство 3:*** *Част от ХК е всяка част от Реалната ос, вдясно от която има нечетен общ брой нули и полюси на отворената система*.

*Доказателство:* Проверява се уравнението на аргумента за една произволна точка "$\Delta$", лежаща на реалната ос:

$\varphi_i + \varphi_{i+1} = 0; \;\; \theta_i + \theta_{i+1} = 0; \;\; \forall\, P_j, N_i$ наляво от "$\Delta$", ъглите са 0.

Само полюсите и нулите лежащи на реалната ос, *надясно* от "$\Delta$" дават ъгъл $\pi$. Ако техният общ брой е нечетен,




$\pm\pi(2q+1),$

се изпълнява уравнението на аргумента,

$\Downarrow$

всяка такава точка е част от ХК.

***Свойство 4:*** *ХК започва* $(k_{\text{п}} = 0)$ *от полюсите на отворената система*

*Доказателство:*

ПФ на отворената система е: $$W(p) = k_{\text{п}} \frac{B(p)}{A(p)}$$

ПФ на затворената система е: $$W_{\text{з}}(p) = \frac{k_{\text{п}} B(p)}{A(p) + k_{\text{п}} B(p)}$$

$$H_{\text{з}}(p) = k_{\text{п}} B(p) + A(p) = 0$$

При $k_{\text{п}} = 0$ корените на характеристичното уравнение на отворената и затворената система съвпадат:

$$H_{\text{о}}(p)\big|_{k_{\text{п}}=0} \equiv H_{\text{з}}(p)\big|_{k_{\text{п}}=0} = A(p) = 0$$

**Свойство 5:** При $k_{\text{п}} \to \infty$, $m$ от клоновете на ХК завършват в $m$ нули $N_i$, $i = 1,2,\ldots,m$, на отворената система. Останалите $n-m$ клона завършват в $\infty$.

*Доказателство:*

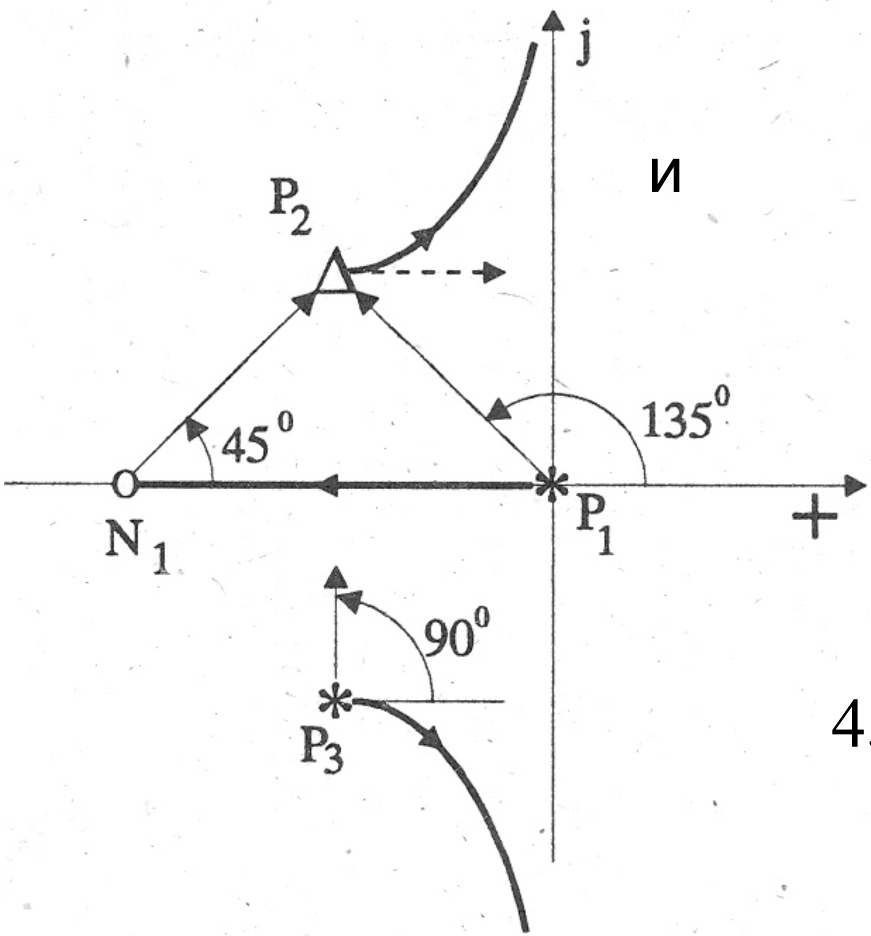
От уравнението на модула
$$k_{\text{п}} = \frac{\prod_{j=1}^{n} l_j}{\prod_{i=1}^{m} l_i},$$

$k_{\text{п}} \to \infty$, когато:

(1) $l_i \to 0, \Rightarrow m$ клона клонят към $m$ нули $(N_i, i = 1,2,\ldots,m)$

(2) $l_j \to \infty, \Rightarrow$ останалите $n-m$ клона клонят към $\infty$

**Свойство 6:** Ъгълът $\theta_j$, под който започва клон на ХК от комплексен полюс $P_j \ (k_{\text{п}} = 0)$ или ъгълът $\varphi_i$, под който влиза клон на ХК в комплексна нула $N_i \ (k_{\text{п}} \to \infty)$ може да се определи от уравнението на аргумента.




и

**Пример 3.**

ПФ на отворената система е:

$$W(p) = k_{\text{п}} \frac{(p+2)}{p(p^2+2p+2)}$$

$$N_1 = -2; \quad P_1 = 0; \quad P_{2,3} = -1 \pm j;$$

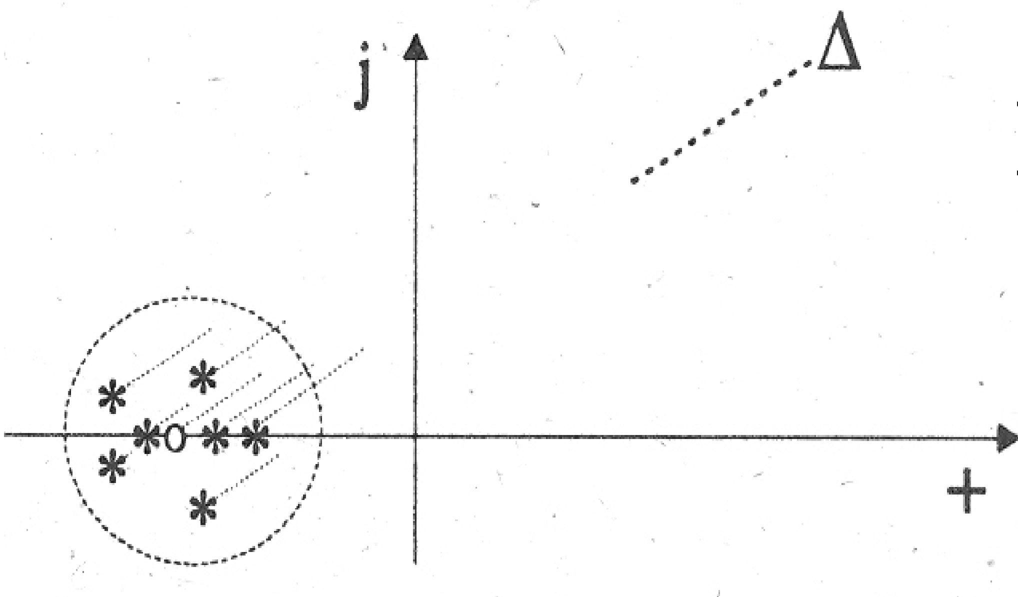
$$45 - 135 - 90 - \theta_2 = \pm(2q+1)180^0$$

$$\theta_2 = 0$$

**Свойство 7:** Всеки от $(n-m)$ -те клона на ХК, които се отдалечават към $\infty$ се стремят към своя асимптота, която сключва с абсцисната ос ъгъл:

$$\gamma = \pm\frac{1}{n-m}(2q+1)\pi, \quad q = 0,1,\ldots,n-m-1.$$

Доказателство:




Ако точката "$\Delta$" от ХК се намира в $\infty$, всичките ъгли $\varphi_i$ и $\theta_j$ са еднакви, т.е. $\gamma$.

$$m\gamma - n\gamma = \pm(2q+1)\pi,$$

$$(m-n)\gamma = \pm(2q+1)\pi,$$

$$\gamma = \mp\frac{1}{m-n}(2q+1)\pi.$$

**Свойство 8:** Асимптотите образуват правилна $(n-m)$ - лъчева звезда, центърът (точката на пресичане на асимптотите) на която е разположен на *реалната ос* на разстояние

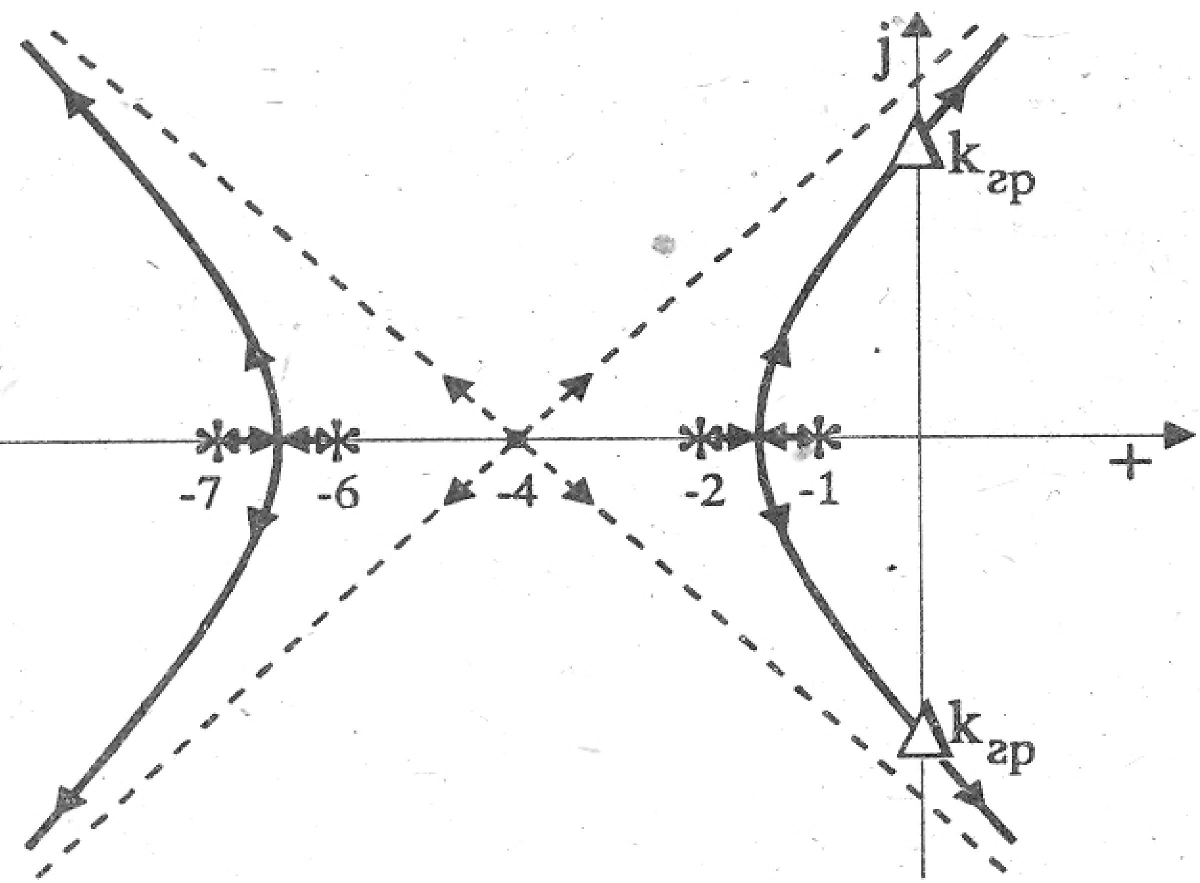
$$\sigma = \frac{\sum_{j=1}^{n} P_j - \sum_{i=1}^{m} N_i}{n-m}$$

от началото на координатната система.

**Пример 4.** ПФ на отворената система е:

$$W(p)=\frac{k_{\text{п}}}{(p+1)(p+2)(p+6)(p+7)}.$$

$$m=0;\quad n=4:\qquad p_1=-1;\quad p_1=-2;\quad p_1=-6;\quad p_1=-7;$$




$$\gamma=\frac{1}{4}\begin{cases}1\pi\\3\pi\\5\pi\\7\pi\end{cases}=\begin{cases}\pi/4\\3\pi/4\\5\pi/4\\7\pi/4\end{cases}$$

$$\sigma=\frac{\sum_{j=1}^{n}P_j-\sum_{i=1}^{m}N_i}{n-m}=$$

$$=\frac{-1-2-6-7}{4}=-4.$$

***Свойство 9:*** При $n-m>2$ част от клоновете на ХК при големи стойности на $k_{\text{п}}$ се движат надясно и след някаква гранична стойност на предавателния коефициент $k_{\text{г}}$ навлизат в дясната полуравнина.

При $2<n-m<6$ само 2 корена се движат надясно и приближават имагинерната ос. Те са доминиращи и определят устойчивостта и качеството на ПП.

***Свойство 10:*** Точката от реалната ос, където се срещат 2 клона от ХК, може да се намери, като се формира функцията

$$V(p)=\frac{k_{\text{п}}}{W(p)}$$

и нейната производна по $p$ се приравни на 0, т.е.

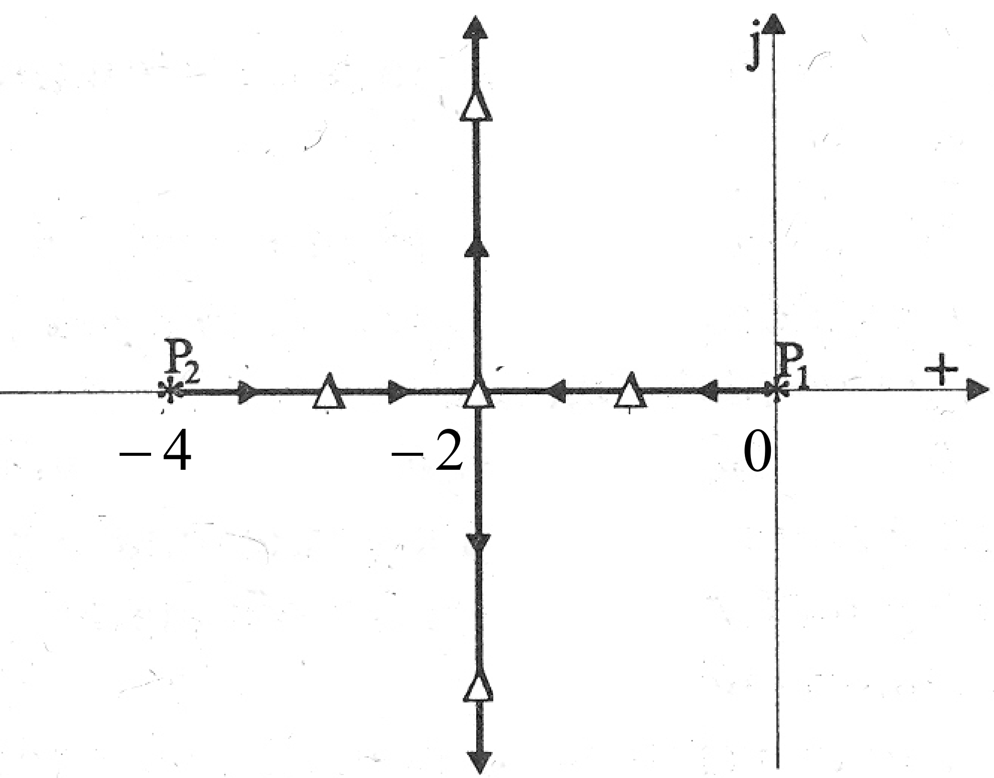
$$\frac{dV(p)}{dp}=0.$$

<u>*27. Ходограф на корените*</u>

За ***Пример 1.*** ПФ на отворената система е $W(p) = \dfrac{k_п}{p(p+4)}$

Да се определи точката на напускане на реалната ос на ХК.

$$V(p) = \frac{k_п}{k_п / p(p+4)} = p(p+4) = p^2 + 4p,$$

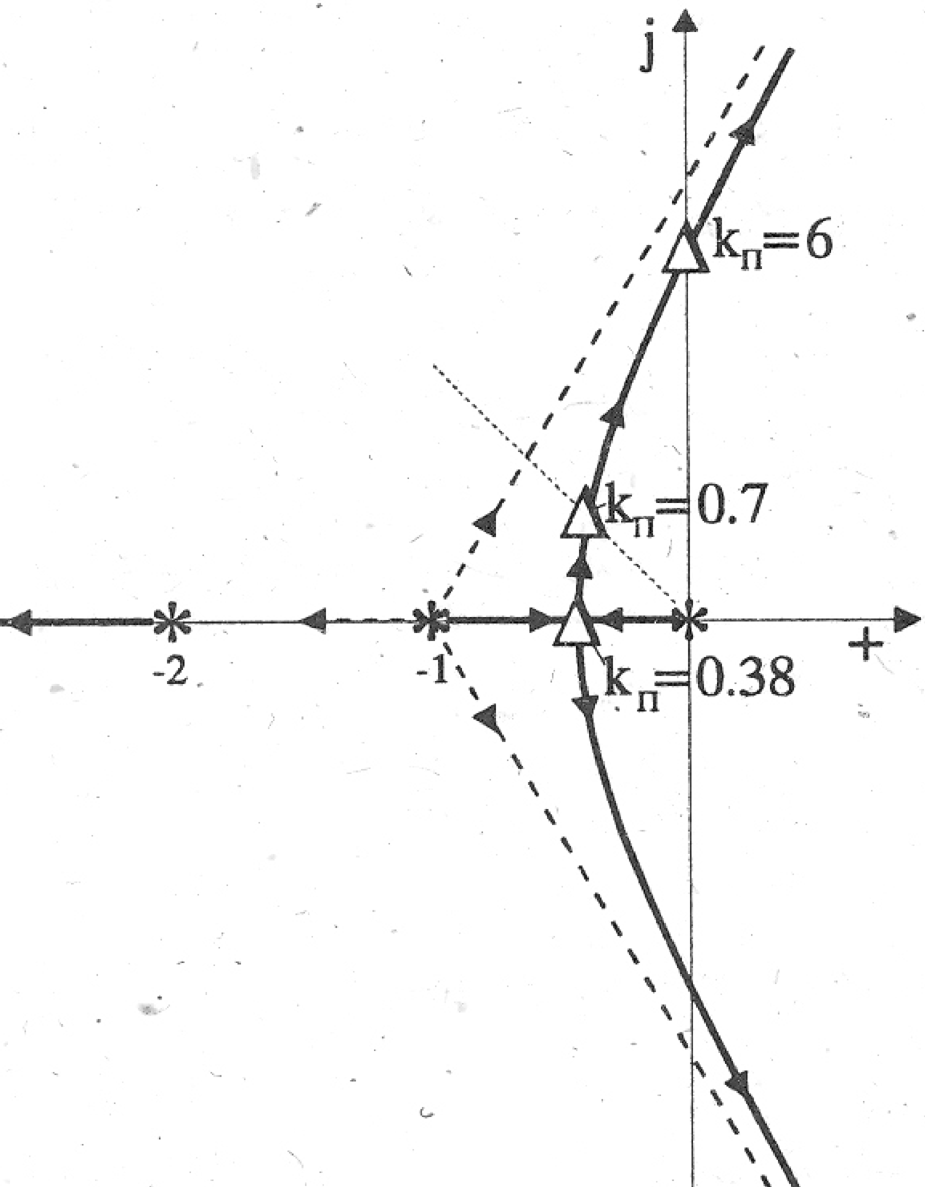


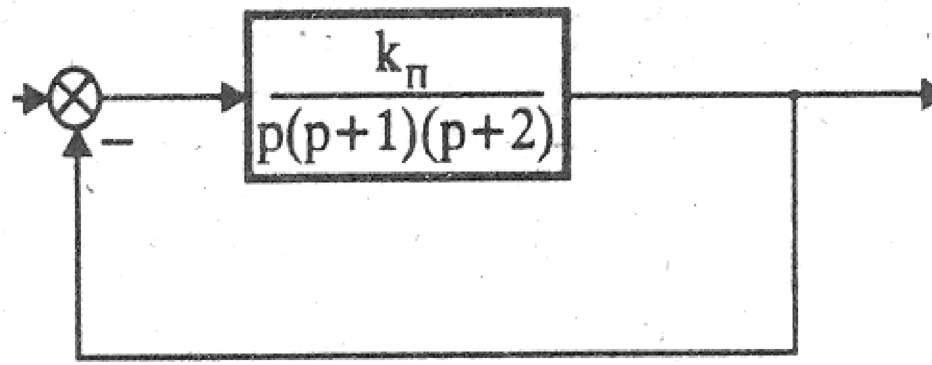

$$\frac{dV(p)}{dp} = 2p + 4 = 0,$$

$$\Downarrow$$

$p = -2$ е т. на срещата на двата клона и напускане на реалната ос.

**Пример 5.** Да се построи ХК.



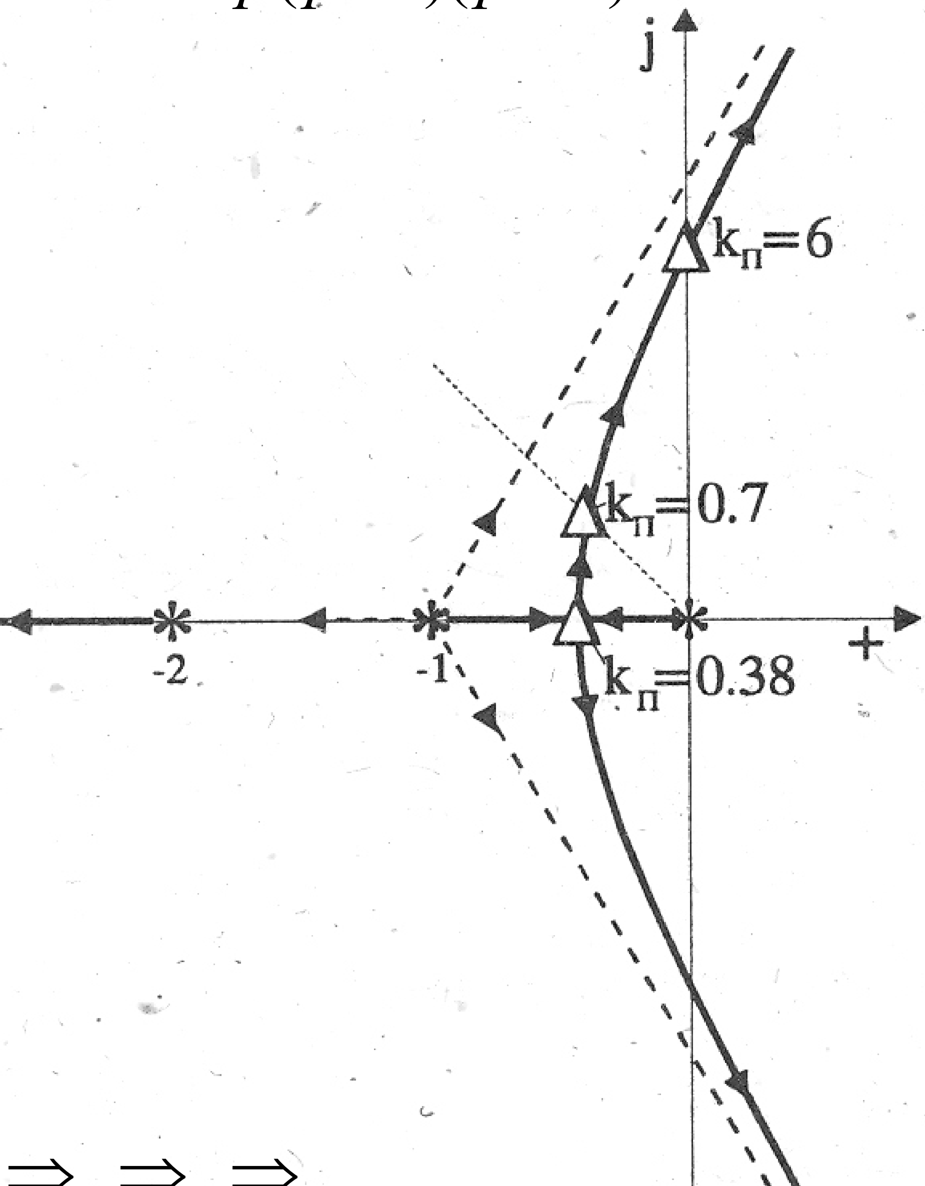

$$p_1 = 0; \quad p_2 = -1; \quad p_3 = -2;$$

$$\gamma = \frac{1}{3}\begin{cases} \pi \\ 3\pi \\ 5\pi \end{cases} = \begin{cases} \pi/3 \\ \pi \\ 5\pi/3 \end{cases}$$

$$\sigma = \frac{1}{3}(0-1-2) = -1$$

# 27. Ходограф на корените

$$W(p)=\frac{k_{\text{п}}}{p(p+1)(p+2)}$$




Определя се точката на напускане на реалната ос:

$$V(p)=\frac{k_{\text{п}}}{W(p)}$$

$$V(p)=\frac{k_{\text{п}}}{k_{\text{п}}/[p(p+1)(p+2)]}=$$

$$=p^3+3p^2+2p$$

$$\frac{dV(p)}{dp}=3p^2+6p+2=0$$

$$p_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-6}}{3}=\begin{cases}-0,423\\-1,577\end{cases}$$

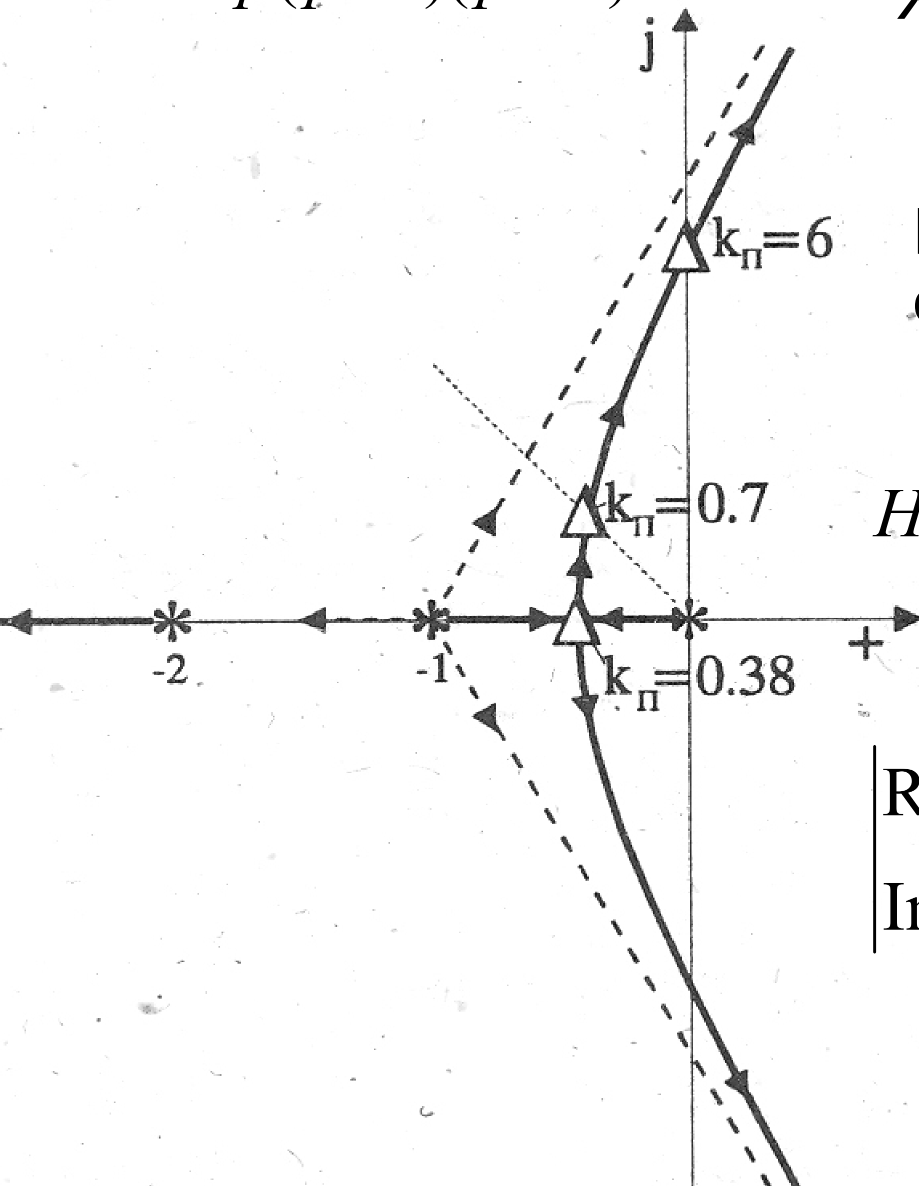
$$p=-0,423\in \text{ХК};$$

$$p=-1,577\notin \text{ХК}.$$

$\Rightarrow\ \Rightarrow\ \Rightarrow$

# 27. Ходограф на корените

$$W(p) = \frac{k_{\text{п}}}{p(p+1)(p+2)}$$




Определяне на точките, в които ХК пресича имагинерната ос:

$$H_{\text{з}}(p) = p^3 + 3p^2 + 2p + k_{\text{п}} = 0$$

По алгебричен критерий се определя $k_{\text{г}}$:

$$3 \times 2 - 1 \times k_{\text{г}} = 0; \quad k_{\text{г}} = 6.$$

$$H_{\text{з}}(j\omega) = -j\omega^3 - 3\omega^2 + j2\omega + 6 = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} \mathrm{Re} = 6 - 3\omega^2 = 0 \\ \mathrm{Im} = 2\omega - \omega^3 = 0 \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} 3(2-\omega^2) = 0 \\ \omega(2-\omega^2) = 0 \end{array} \right.$$

$$\omega_1 = 0; \qquad \omega_{2,3} = \pm 1{,}41.$$