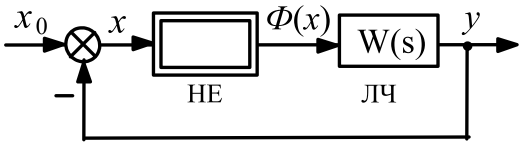
16. Честотен критерий за абсолютна устойчивост на В.М. Попов

Методът е предложен през 1959-1960г. от румънския учен В.М.Попов.

1. Общи сведения за абсолютна устойчивост на положението на равновесие.



Фиг.1

Нека $x_0(t)$ (Фиг.1) е *изчезващо външно въздействие*. Под **изчезващо външно въздействие** се разбира ограничено въздействие, което представлява абсолютно изчезваща функция на времето, т.е., изпълнени са условията:

$$\int_0^\infty |x_0(t)|\,dt < \mu_0 < \infty, \qquad \lim_{t\to\infty} x_0(t) = 0.$$

В зависимост от това при какви стойности на горната граница (supremum) на изчезващото външно въздействие, а именно

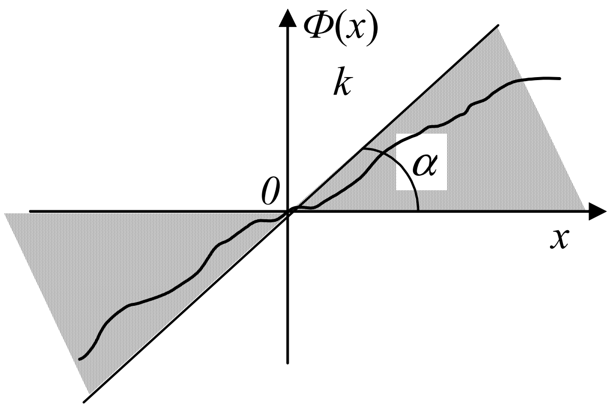
$$\sup|x_0(t)| = \eta_S$$

се изпълнява определено условие за устойчивост, се различават:

- **устойчивост при малки отклонения** (η_S е достатъчно, или безкрайно малка величина);
- **устойчивост при големи отклонения** (η_S - голяма, но крайна, ограничена величина);
- **устойчивост в цялост** ($\eta_S \le \infty$, т.е. неограничена голяма величина).

Ако съществува асимптотическа устойчивост, и условието за тази устойчивост не зависи от големината на началните отклонения, съответно от $\sup|x_0(t)|$, като е изпълнено при произволно големи начални отклонения, нелинейната система се нарича **асимптотически устойчива в цялост**.

Абсолютната устойчивост е асимптотическа устойчивост в цялост, при зададена нелинейност в системата, принадлежаща към определен клас. Типичен е класът на нелинейности със статична характеристика, разположена в определен, ограничен ъгъл, например от права и абсцисната ос.



Фиг.2

където $\alpha = \operatorname{arctg} k$; k е коефициент на наклона; $0 < \dfrac{\Phi(x)}{x} < k$.

Проблемът на критерия за абсолютна устойчивост на положението на равновесие на нелинейната система с типова структура, представена на фиг.1, се свежда до това, какви условия трябва да се наложат на характеристиките на нелинейния елемент и линейната част на системата, за да има затворената, нелинейна САР абсолютно устойчиво положение на равновесие.

Предполага се, че линейната част на системата е устойчива (т. е. предавателната ѝ функция W(s) има полюси в лявата полуравнина). Изисква се характеристиките на НЕ да принадлежат на сектора (0, *k*), т.е.

$$0 < \frac{\Phi(x)}{x} < k \,,$$

$\Rightarrow$ статическият коефициент на усилване $K_C(x)$ на НЕ е ограничен, т.е.

$$0 < K_C(x) < k \,.$$

За прилагане на метода на В.М.Попов се въвежда видоизменена АФЧХ:

$$W^*(j\omega) = \mathrm{Re}[W(j\omega)] + j\omega \,\mathrm{Im}[W(j\omega)],$$

където $W^*(j\omega)$ е модифицирана АФЧХ.

2. Абсолютна устойчивост при устойчива линейна част (критерий на Попов).

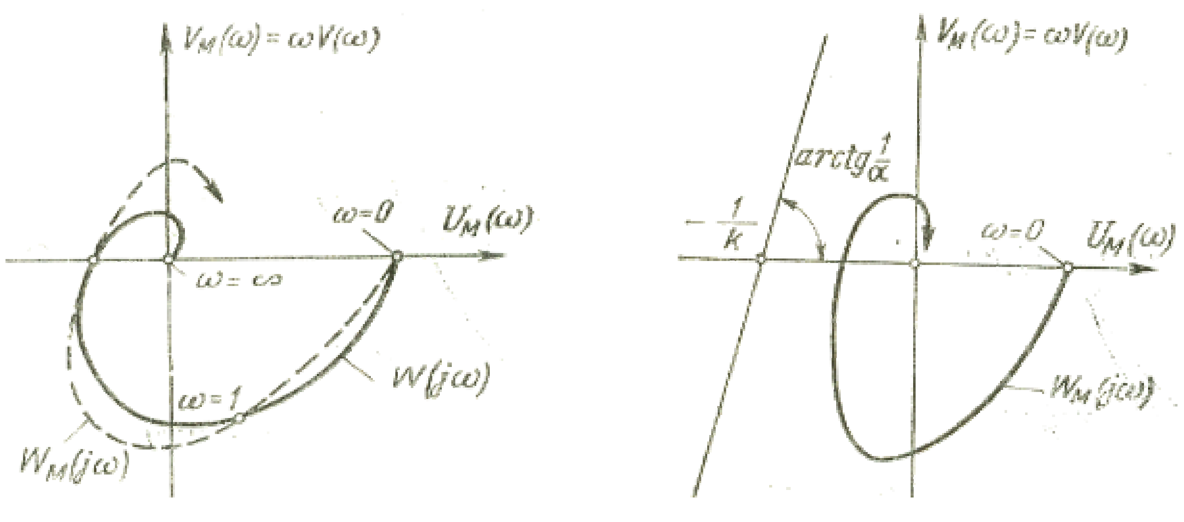
За да съществува **абсолютно устойчиво състояние на равновесие** в НСАР (с устойчива ЛЧ) е достатъчно да се подбере такова крайно реално число h, при което за всяко $\omega \geq 0$ е изпълнено условието:

$$\mathrm{Re}\{(1 + jh\omega)\, W(j\omega)\} + \frac{1}{k} > 0 \,,$$

където k е коефициент, определящ ъгъла, в който е статичната характеристика на НЕ.

Геометрична интерпретация.

За да има абсолютна устойчивост положението на равновесие в НСАР с устойчива линейна част и характеристика на НЕ, принадлежаща на сектор (0, *k*), достатъчно е да се избере права в комплексната равнина на предавателната функция $W^*(j\omega)$, която да е прекарана през точката $(-\frac{1}{k}, j0)$, така че модифицираната АФЧХ да бъде надясно от тази права. Наклонът на правата не е от значение, зависи от избора на h.



Фиг.3

Модифицираната честотна характеристика $W^*(j\omega)$ и обикновената честотна характеристика $W(j\omega)$ имат общи точки при честотите $\omega = 0$, $\omega = 1$ и в евентуалните пресичания на честотната характеристика $W(j\omega)$ с абсцисната ос, което следва от съотношенията:

$$U^*(\omega) = U(\omega)$$
$$V^*(\omega) = \omega V(\omega) .$$

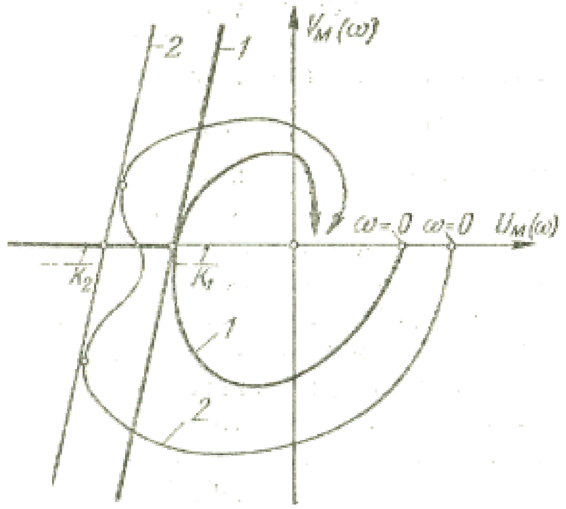
Чрез честотния критерий на В.М.Попов е възможно да се решат 2 основни задачи:

1) Да се определи дали съществува абсолютна устойчивост на положението на равновесие, когато нелинейните характеристики са разположени в сектор $[0, k]$ при основния случай;

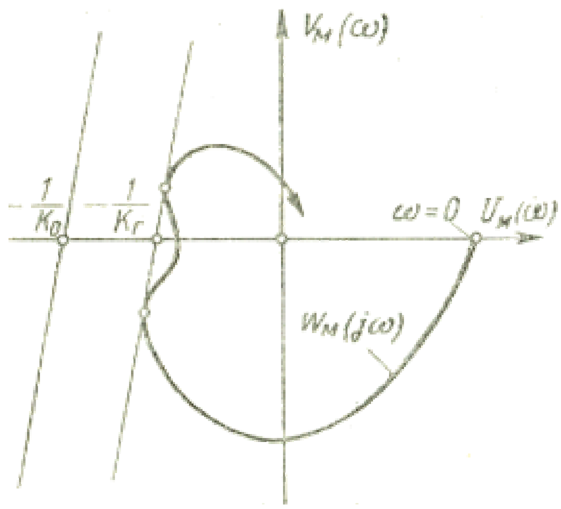
2) Да се определи най-голямата възможна стойност на коефициента $k = k_Г$, т.е. най-широкия сектор $[0, k_Г]$, за който съществува абсолютна устойчивост при основния случай или $[0, k_Г]$ при особени случаи.

Определяне на $k_Г$

На фиг. 5 е показана модифицираната АФЧХ 1, която лежи надясно от правата 1, прекарана през точкава $-\dfrac{1}{k_1}$. Следователно, съществува абсолютна устойчивост на положението на равновесие за система с ЛЧ 1 в сектора $[0, k_1]$. Системата с модифицирана АФЧХ 2 е с абсолютна устойчивост в сектора $[0, k_2]$, не би могло да се твърди, че същата система е абсолютно устойчива в сектора $[0, k_1]$.



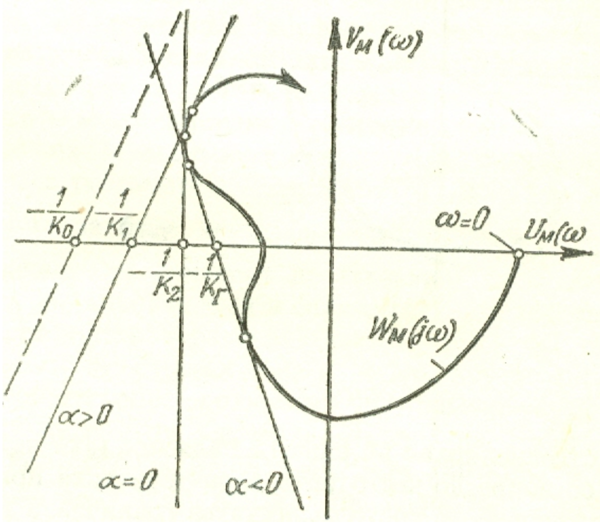
Фиг.5



Фиг.6

Чрез транслиране на правата на Попов надясно се получава граничният коефициент $k_Г$ (когато правата допре $W^*(j\omega)$). Следователно, $[0, k_Г]$ е максималната ширина на сектора на НЕ.

Ъгловият коефициент $\dfrac{1}{h}$ на правата на Попов може да бъде изменян и същата права линия да променя своето положение, без да пресича модифицираната честотна характеристика. На фиг. 7 е показано такова движение на правата, когато h има положителна стойност, нулева стойност и отрицателна стойност. Такова своеобразно "ротационно" движение на правата може да се съчетае с транслиране на същата надясно, така че правата да се допре до честотната характеристика при някакво положение, за което съществува граничната точка на пресичане с реалната ос $-\frac{1}{k_Г}$. По този начин се определя най-широкият сектор на разполагане на нелинейните характеристики, а именно $[0, k_Г]$.

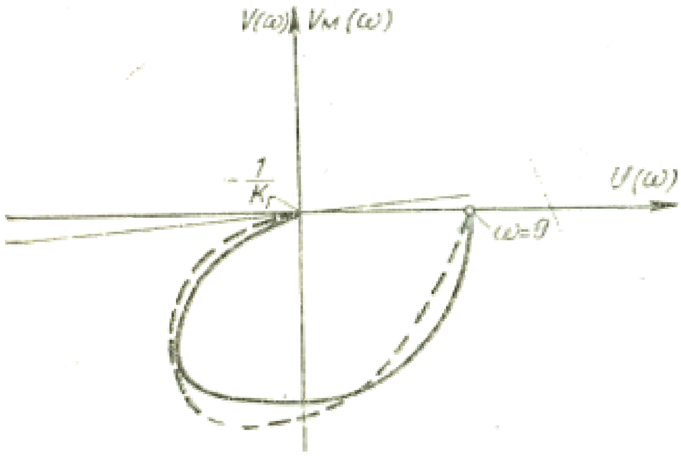


Фиг.7

При изпъкнала предавателна функция $W^*(j\omega)$, критерият на Попов означава, че НЕ може да се замести с ЛЧ с предавателна функция k. Тогава по Найквист за линейни системи може да се определи граничният предавателен коефициент $k_Г$. При това $k_Г$ определен по критерия на Найквист и $k_Г$, определен по критерия на Попов, съвпадат. В този случай модификацията на критерия на Найквист и честотният критерий на Попов за абсолютна устойчивост на положението на равновесие водят до един и същи резултат при определяне на $k_Г$ и за разглеждания случай **критерият на Попов прераства в необходимо и достатъчно условие**.

Този метод (кртелий на В.М.Попов) дава **достатъчно условие за устойчивост** (дава част от областта на абсолютна устойчивост). Неизпълнението на условието не означава непременно, че системата е неустойчива.

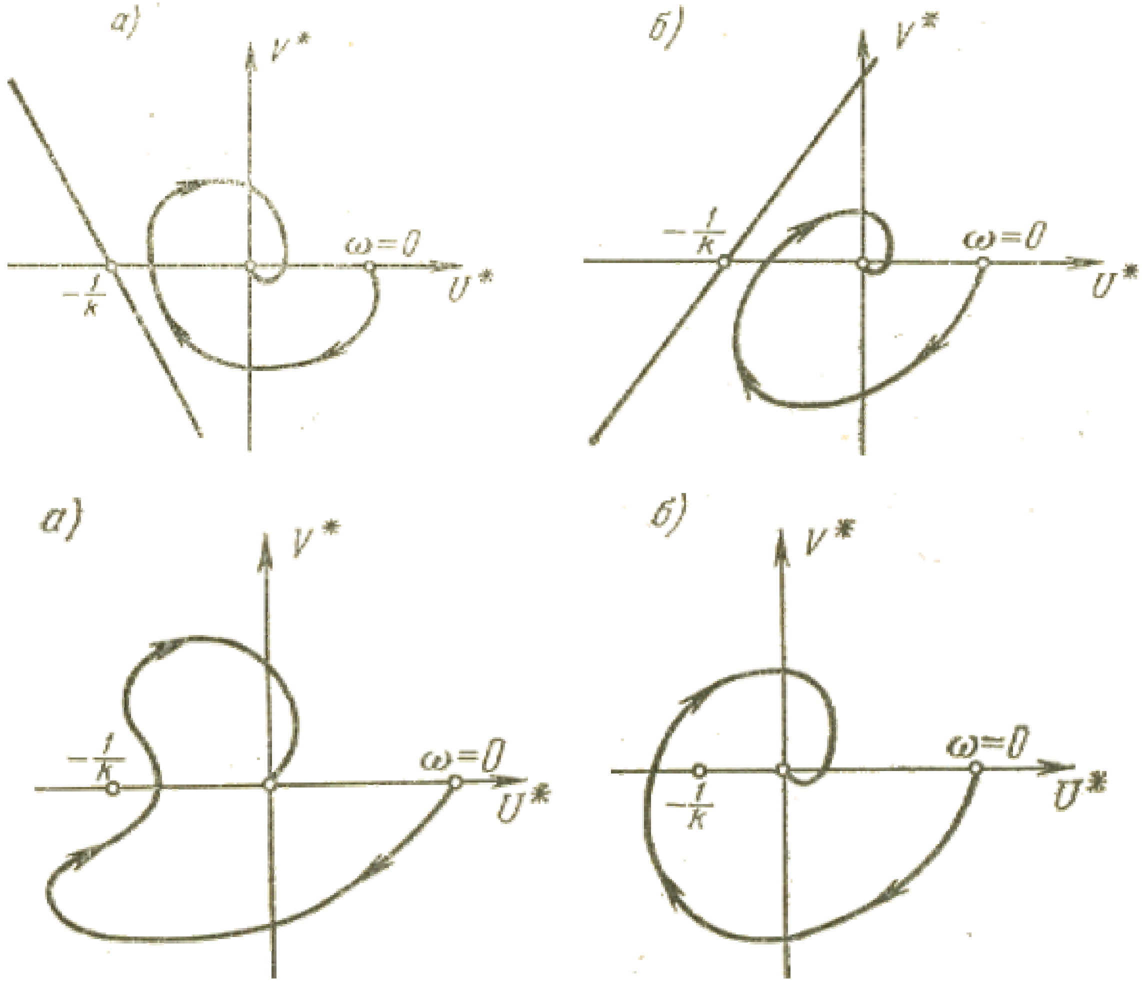
Определяне на $k_{гр}$ за изпъкнала и вдлъбната $W^*(j\omega)$.



Фиг.8

Ако $W^*(j\omega)$ е от втори ред, то АФЧХ е в долната полуравнина, $\Rightarrow$ секторът ограждащ НЕ е максимално широк $(0,\infty)$ (Фиг.8).

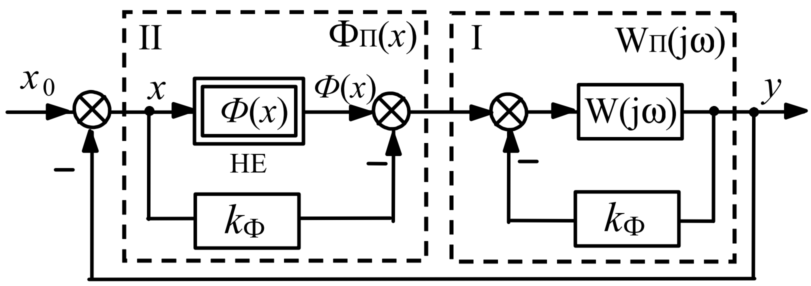
Примери за определяне на абсолютна устойчивост на равновесното състояние при изпъкнала и вдлъбната $W^*(j\omega)$ (устойчива $W(j\omega)$):



Фиг.9

3. Абсолютна устойчивост при неустойчива линейна част (обобщен критерий на Попов).

Прави се преобразуване на НСАР за получаване на устойчива линейна част (фиг. 10). За целта се въвежда ЛЕ, пропорционално звено с коефициент на усилване k_Φ, в местна ООВ, която обхваща линейната част на системата (фиг. 10) и я превръща в устойчива. За да бъде еквивалентно преобразованието същият коефициент k_Φ се въвежда паралелно (със знак “-“ на НЕ.



където:

$\Phi(x)$ - функция на НЕ;

I корекция – прави ЛЧ устойчива;

II корекция – прави се, за да не се промени системата.

Фиг.10

k_Φ - ограничава статичната характеристика отдолу (може да е с различна стойност в зависимост от статичната характеристика.

k_Φ трябва да се подбере така, че включено към линейната част като ОВ да я превърне в устойчива. Тогава:

$$W_\Pi(s) = \frac{W(s)}{1 + k_\Phi W(s)}$$
$$\Phi_\Pi(x) = \Phi_\Pi(x) - k_\Phi x \,.$$

Случаите на устойчива или неутрална ЛЧ се получават като частен случай на обобщения критерий на Попов.

За преобразуваната линейна част, която вече е устойчива се прилага условието за абсолютна устойчивост:

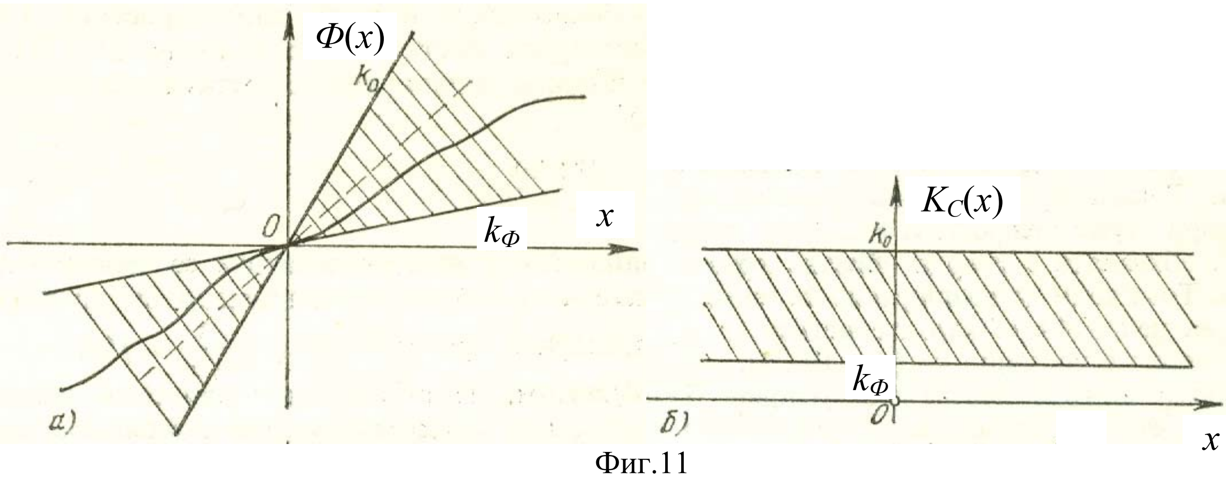
$$\mathrm{Re}\left\{(1 + jh\omega)\frac{W(j\omega)}{1 + k_\Phi W(j\omega)}\right\} + \frac{1}{k} > 0 \,,$$

където k е ъглов коефициент на правата, която ограничава отгоре сектора на преобразуваните нелинейни характеристики $\Phi_\Pi(x)$.

$$\Phi_\Pi(x) = \Phi(x) - k_\Phi x\,; \quad 0 < \frac{\Phi_\Pi(x)}{x} < k\,, \quad 0 < \frac{\Phi(x) - k_\Phi x}{x} < k\,,$$

$$\Rightarrow \quad k_\Phi < \frac{\Phi(x)}{x} < k + k_\Phi\,, \qquad k_0 = k + k_\Phi\,,$$

$\Rightarrow$ Непреобразуваната нелинейна характеристика $\Phi(x)$ трябва да принадлежи на сектора (k_Φ, k_0), т.е. $(k_\Phi, k + k_\Phi)$.



Фиг.11

$k_C = \dfrac{\Phi(x)}{x}$ - статичен предавателен коефициент на НЕ

Формулировка на обобщения критерий на Попов

За да има НСАР с ЧХ $W(j\omega)$ абсолютно устойчиво положение на равновесие, достатъчно е да бъдат изпълнени следните условия:

1) Избира се k_Φ, при който характеристичното уравнение $1 + k_\Phi W(s) = 0$ има корени в лявата полуравнина;

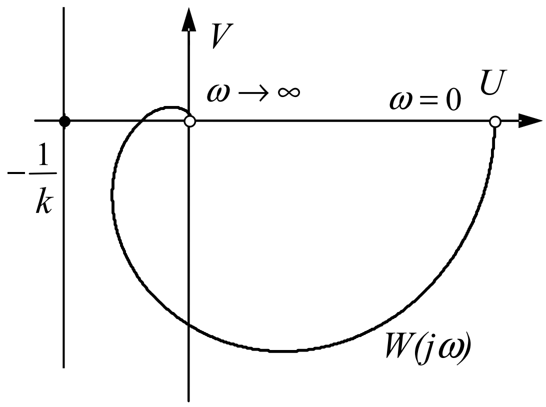
2) Характеристиките на НЕ $\Phi(x)$ да принадлежат на сектора (k_Φ, k_0), където $k_0 = k + k_\Phi$;

3) Приведената $W_\Pi(s) = \dfrac{W(s)}{1 + k_\Phi W(s)}$ да се модифицира (имагинерната част се умножава с ω) и $W_\Pi^*(j\omega)$ да лежи надясно от правата на Попов, прекарана през т. $(-\dfrac{1}{k_0 - k_\Phi}, j0)$.

4. Абсолютна устойчивост при динамични режими.

(а) При устойчива линейна част – ако НЕ е в сектора $(0, k)$. Условията са:

- Да съществува права на Попов, успоредна на ординатната ос, така че $W(j\omega)$ да остава надясно от нея. Правата е през т. $(-\frac{1}{k}, j0)$.
- Производните на $\Phi(x)$ да се намират в участъка $(0, k)$ ($0 < \frac{d\Phi(x)}{dx} < k$).



Фиг.12

(б) При неустойчива линейна част – също като в статичен режим (с въвеждане на k_Φ).

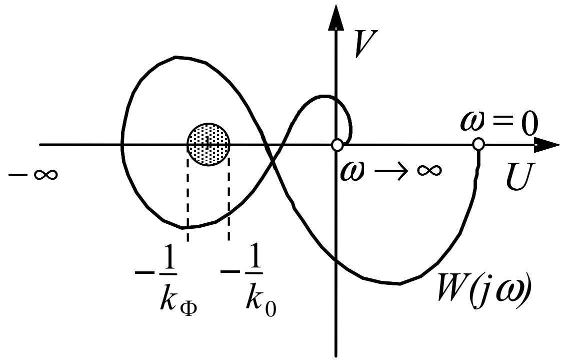
За да бъде породеният от ограничено външно въздействие процес в НСАР абсолютно устойчив, достатъчно е производната $\Phi'(x)$ на характеристиката на НЕ да принадлежи на определена лента, т.е., $k_\Phi < \frac{d\Phi(x)}{dx} < k_0$ (където $k_0 = k + k_\Phi$), да съществува такъв коефициент k_Φ, при който преобразуваната линейна част на системата е устойчива и АФЧХ $W(j\omega)$ на изходната (непреобразувана) линейна част да лежи извън окръжността (k_Φ, k_0), която има център върху реалната ос и пресича същата в точките $-\frac{1}{k_\Phi}$ и $-\frac{1}{k_0}$, като тази честотна характеристика не навлиза в окръжността и при неустойчива изходна линейна част я обхваща толкова пъти и така, както съответната критична точка при критерия на Найквист.

Също като при статични режими линейната неустойчива част се обхваща с ООВ k_Φ и се преобразува в устойчива, а нелинейната характеристика се преобразува до

$$\Phi_\Pi(x) = \Phi(x) - k_\Phi x;$$

$$\text{като} \quad k_\Phi < \frac{d\Phi(x)}{dx} < k_0, \quad \text{където} \quad k_0 = k + k_\Phi,$$

като преобразуваната характеристика на НЕ е разположена в сектора $(0, k)$.



Фиг.12