

ДИАНА ЦАНКОВА

МИХАИЛ ПЕТРОВ

**СЪВРЕМЕННА
ТЕОРИЯ НА УПРАВЛЕНИЕТО**

Част 1

ОПТИМАЛНО УПРАВЛЕНИЕ

Ръководство за лабораторни упражнения

**ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ
ФИЛИАЛ ПЛОВДИВ**

2003

Ръководството е съобразено с учебната програма на дисциплината "Съвременна теория на управлението", включена в магистърския план на специалността "Автоматика, информационна и управляваща техника" в Технически университет София, филиал Пловдив. То е предназначено за студентите при провеждане на лабораторни упражнения, а също и за целите на дипломното проектиране, при теми в областта на оптималното управление.

Ръководството може да се използва и от студенти от други висши учебни заведения, както и от специалисти, проявяващи интерес в дадената област.

ISBN: 954-8779-48-X (ч.1)

Отпечатано в Печатната база при ТУ – София, Филиал Пловдив

СЪДЪРЖАНИЕ

Предговор	5
<i>Лабораторно упражнение №1. Динамично програмиране – дискретен вариант</i>	<i>7</i>
<i>Лабораторно упражнение № 2. Динамично програмиране при непрекъснати процеси</i>	<i>18</i>
<i>Лабораторно упражнение № 3. Приложение на динамичното програмиране за решаване на комбинаторни задачи</i>	<i>26</i>
<i>Лабораторно упражнение № 4. Принцип на максимума (минимума) на Понтрягин. Оптимално по бързодействие програмно управление на линейни системи</i>	<i>31</i>
<i>Лабораторно упражнение № 5. Синтез на оптимална по бързодействие затворена система</i>	<i>42</i>
<i>Лабораторно упражнение № 6. Оптимално по бързодействие управление на линейни колебателни обекти от втори ред ...</i>	<i>49</i>
<i>Лабораторно упражнение № 7. Оптимално по бързодействие управление на нелинейни колебателни обекти от втори ред .</i>	<i>55</i>
<i>Лабораторно упражнение № 8. Приближено-оптимална по бързодействие система, използваща симетрична S-управляваща структура</i>	<i>61</i>
<i>Лабораторно упражнение № 9. Оптимално управление на нелинейни колебателни обекти от втори ред използващо точна линеаризация чрез обратна връзка</i>	<i>72</i>

<i>Лабораторно упражнение № 10. Приложение на принципа на минимума за синтез на оптимално управление на разхода на гориво</i>	81
<i>Лабораторно упражнение № 11. Синтез на оптимално управление при критерий минимум разход на енергия</i>	91
<i>Приложение 1</i>	95
<i>Приложение 2</i>	99
<i>Приложение 3</i>	101
<i>Приложение 4</i>	105
<i>Приложение 5</i>	107
<i>Литература</i>	110

ПРЕДГОВОР

Настоящото ръководство е част от учебния материал по дисциплината "Съвременна теория на управлението", включена в магистърския план на специалността "Автоматика, информационна и управляваща техника" в Технически университет, филиал Пловдив.

В ръководството са включени теми за лабораторни упражнения по нелинейно оптимално управление. Разгледани са динамичното програмиране на Белман, принципът на максимума на Понтрягин и различни техни приложения.

Лабораторните упражнения са представени с теоретични сведения, решени примери, указания за работа и разработени програми в средата на MATLAB. Теоретичният материал е поднесен, така че ръководството да има относителна самостоятелност, т.е. студентите да могат да се запознаят с теоретичните основи на упражненията, без да използват други учебни помагала. Използуваните литературни източници са предимно на руски език, като част от тях са преводи на известни западни автори.

Авторите са благодарни на рецензентите доц. д-р Ч. Дамянов и доц. д-р В. Петров за направените препоръки. Като всяко първо издание и това, вероятно, не е лишено от пропуски, поради което ще бъдат приети с благодарност всички отправени забележки за подобряване на съдържанието и оформлението му.

Май, 2003 г.

От авторите

Лабораторно упражнение № 1

Динамично програмиране - дискретен вариант

Целта на лабораторното упражнение е запознаване с особеностите на динамичното програмиране, с изчислителните аспекти, предимствата и недостатъците на дискретния му вариант.

1. Теоретични сведения

Динамичното програмиране е разработено в началото на 50-те години на миналия век от американския математик Р. Белман. Методът се основава на принципа на оптималността [2], който е изяснен по-нататък в изложението.

Постановка на задачата. Разглежда се система, зададена в пространството на състоянията с уравнението

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t)) , \quad (1.1)$$

където $\mathbf{X}(t)$ е n -мерен вектор на състоянието на системата, $\mathbf{U}(t)$ е r -мерен вектор на управлението на системата, а $\mathbf{f}(\cdot)$ е n -мерен вектор с компоненти нелинейни функции, описващи динамиката на системата. Началното и крайното състояние са съответно $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(0)$ и $\mathbf{X}_T = \mathbf{X}(T)$. Търси се такова управление $\mathbf{U}(t)$, принадлежащо на областта на допустимите управления $\mathbf{U}(t) \in \Omega_U$, което да привежда системата от начално състояние \mathbf{X}_0 в крайно състояние \mathbf{X}_T за време $t \in [0; T]$, така че да минимизира критерия за качество

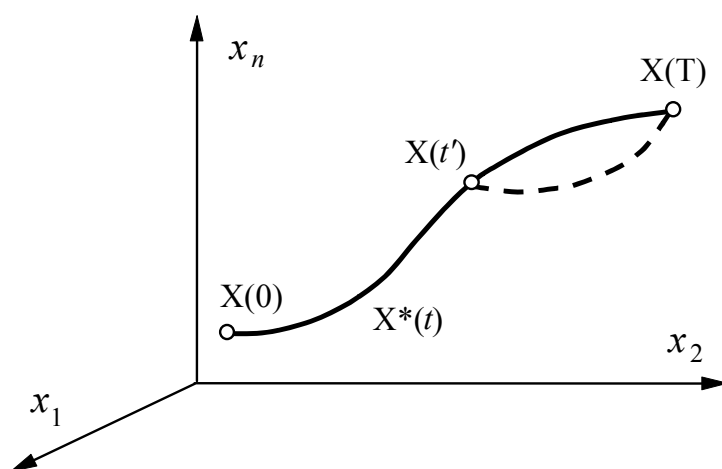
$$I = \varphi(\mathbf{X}_T) + \int_0^T f_0(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t)) dt . \quad (1.2)$$

При такава постановка на задачата са въведени ограничения само върху управлението $\mathbf{U}(t)$, но не и върху състоянията на системата $\mathbf{X}(t)$. От \mathbf{X}_0 до \mathbf{X}_T може да се стигне по много на брой различни допустими траектории, но само една от тях е оптимална $\mathbf{X}^*(t)$,

породена от оптималното управление $U^*(t)$ и е решение на задачата на динамичното програмиране.

Разглеждат се само автономни системи. Това не води до загуба на общност, тъй като неавтономната система може да се сведе до горния запис като вместо време се въведе нова променлива $x_{n+1}(t) = t$ и съответно още едно диференциално уравнение $\dot{x}_{n+1}(t) = 1$ с начално условие $x_{n+1}(0) = 0$.

Принцип на оптималността [2]. Нека $X^*(t)$ (Фиг.1.1) е търсената оптимална траектория, а $t = t'$ ($0 < t' < T$). Според принципа на оптималността, частта от оптималната траектория от междинна точка $X(t')$ до крайната точка $X(T)$ е също оптимална траектория. Това значи, че частта от траекторията между тези две точки е оптимална независимо от предисторията на системата, т.е. по какъв начин тя е достигнала до състоянието $X(t')$. (Следователно оптималното управление не зависи от предисторията на системата, а само от началното условие и крайната цел.)



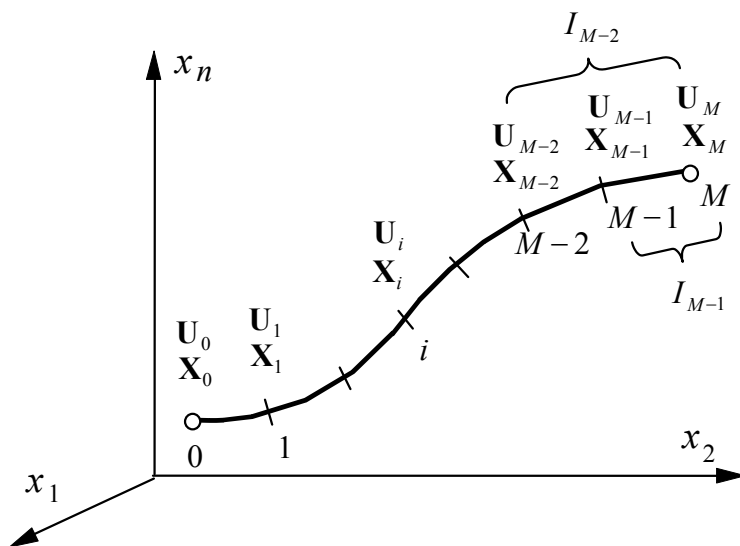
Фиг.1.1. Фазова траектория, поясняваща принципа на оптималността.

Характерна особеност на метода е, че отрязъците от оптималната траектория се определят в обратна последователност, започвайки от зададеното крайно състояние $X(T)$. Оптималността на отделните участъци следва от оптималността на цялата траектория. Обратното обаче не е вярно, т.е. оптималността на цялата траектория не следва от оптималността на отделните участъци.

Принципът на оптималността на Белман дава достатъчно общо *необходимо условие* за оптималност, което може да се използва както за непрекъснати, така и за дискретни системи.

Идея на метода. Решението на задачата се търси по следния начин: Дадена е крайната цел и се знае управлението в крайната точка (състояние). Допуска се, че е известна оптималната траектория. Времето се разглежда в обратна посока и се минимизира функционала (1.2) по U , а X се приема за известно. Така, когато се стигне в началото се получава $I = I(X)$, т.е. оптимизация на (1.2) с точност до X . В началната точка X се замества с началните условия X_0 . Възстановява се нормалният ход на времето (в права посока) и се намират оптималната траектория X^* и оптималното управление U^* . Следователно, задачата се разбива на два етапа - обратен (I) и прав (II).

Дискретен вариант. При дискретния вариант траекторията от X_0 до X_T се разделя на M достатъчно малки интервала. Времето за привеждане на системата от начално в крайно състояние е $T = M\Delta t$.



Фиг. 1.2. Фазова траектория, поясняваща дискретния вариант на динамичното програмиране.

Уравнението на състоянието в дискретен вид е

$$\frac{X_{i+1} - X_i}{\Delta t} = f(X_i, U_i), \quad i = 0, 1, \dots, M-1, \quad (1.3)$$

а критерият за качеството е

$$I = \varphi(\mathbf{X}_T) + \sum_{i=0}^{M-1} f_0(\mathbf{X}_i, \mathbf{U}_i) \Delta t . \quad (1.4)$$

I етап (обратен): Времето се разглежда в обратна посока. Нека $t = T$ и $\mathbf{X}_M = \mathbf{X}_T$. В този момент системата е в установен режим, грешката и производните и са нули и не се подава допълнително въздействие към номиналната и стойност. Следователно известни са управлението $\mathbf{U}_M = \mathbf{U}_M^*$ и състоянието $\mathbf{X}_M = \mathbf{X}_M^*$. За функцията на Белман

$$S(\mathbf{X}) = \min_{\mathbf{U} \in \Omega_{\mathbf{U}}} I(\mathbf{X}, \mathbf{U}) , \quad (1.5)$$

при $i = M$ от (1.4) се получава

$$S_M(\mathbf{X}_M) = \varphi(\mathbf{X}_M) . \quad (1.6)$$

Нека $i = M - 1$. Допуска се, че векторите $\mathbf{U}_i, (i = 0, 1, \dots, M - 2)$ по някакъв начин са избрани и трябва за дадено състояние \mathbf{X}_{M-1} да се определи векторът \mathbf{U}_{M-1} . Съгласно принципа на оптималността \mathbf{U}_{M-1} не зависи от предисторията на системата, а се определя само от състоянието \mathbf{X}_{M-1} и целта на управлението (минимизиране на критерия на качеството). Следователно, допуска се че е известно $\mathbf{X}_{M-1} = \mathbf{X}_{M-1}^*$ и се търси управление \mathbf{U}_{M-1} , което да минимизира критерия за качество (1.4) за последния интервал от т. \mathbf{X}_{M-1} до края - т. \mathbf{X}_M :

$$I_{M-1} = \varphi(\mathbf{X}_M) + f_0(\mathbf{X}_{M-1}, \mathbf{U}_{M-1}) \Delta t ,$$

$$S_{M-1} = \min_{\mathbf{U}_{M-1} \in \Omega_{\mathbf{U}}} I_{M-1} = \min_{\mathbf{U}_{M-1} \in \Omega_{\mathbf{U}}} [\varphi(\mathbf{X}_M) + f_0(\mathbf{X}_{M-1}, \mathbf{U}_{M-1}) \Delta t] . \quad (1.7)$$

Векторът на състоянието се изразява от (1.3)

$$\mathbf{X}_M = \mathbf{X}_{M-1} + \mathbf{f}(\mathbf{X}_{M-1}, \mathbf{U}_{M-1}) \Delta t \quad (1.8)$$

и след заместване в (1.7), последната добива вида

$$S_{M-1}(\mathbf{X}_{M-1}^*) = \min_{\mathbf{U}_{M-1} \in \Omega_U} [\varphi(\mathbf{X}_{M-1}^* + \mathbf{f}(\mathbf{X}_{M-1}^*, \mathbf{U}_{M-1})\Delta t) + f_0(\mathbf{X}_{M-1}^*, \mathbf{U}_{M-1})\Delta t]. \quad (1.9)$$

Нека $i = M - 2$. Допуска се, че е известно $\mathbf{X}_{M-2} = \mathbf{X}_{M-2}^*$. Критерият на качеството за отрязъка на траекторията от т. \mathbf{X}_{M-2} до края (т. \mathbf{X}_M) е

$$I_{M-2} = I_{M-1} + f_0(\mathbf{X}_{M-2}, \mathbf{U}_{M-2})\Delta t. \quad (1.10)$$

Търси се минимумът на I_{M-2} по векторите \mathbf{U}_{M-2} и \mathbf{U}_{M-1}^* . Минимумът на I_{M-1} , т.е. $S_{M-1}(\mathbf{X}_{M-1}^*)$, за произволно състояние \mathbf{X}_{M-1}^* и оптимално управление \mathbf{U}_{M-1}^* вече е намерен. Следователно

$$\begin{aligned} S_{M-2}(\mathbf{X}_{M-2}^*) &= \min_{\substack{\mathbf{U}_{M-2} \in \Omega_U \\ \mathbf{U}_{M-1}^* \in \Omega_U}} I_{M-2} = \min_{\mathbf{U}_{M-2} \in \Omega_U} [S_{M-1}(\mathbf{X}_{M-1}^*) + f_0(\mathbf{X}_{M-2}^*, \mathbf{U}_{M-2})\Delta t] = \\ &= \min_{\mathbf{U}_{M-2} \in \Omega_U} [S_{M-1}(\mathbf{X}_{M-2}^* + \mathbf{f}(\mathbf{X}_{M-2}^*, \mathbf{U}_{M-2})\Delta t) + f_0(\mathbf{X}_{M-2}^*, \mathbf{U}_{M-2})\Delta t]. \end{aligned} \quad (1.11)$$

При $i = M - k$ критерият за качество за последните k интервала (от т. \mathbf{X}_{M-k} до края) се дава с рекурентната формула

$$I_{M-k} = I_{M-k+1} + f_0(\mathbf{X}_{M-k}, \mathbf{U}_{M-k})\Delta t, \quad (1.12)$$

а оптималната му стойност - с рекурентната формула на Белман за дискретни процеси

$$\begin{aligned} S_{M-k}(\mathbf{X}_{M-k}^*) &= \min_{\substack{\mathbf{U}_{M-k} \in \Omega_U \\ \mathbf{U}_{M-k+1}^* \in \Omega_U}} I_{M-k} = \\ &= \min_{\mathbf{U}_{M-k} \in \Omega_U} [S_{M-k+1}(\mathbf{X}_{M-k+1}^*) + f_0(\mathbf{X}_{M-k}^*, \mathbf{U}_{M-k})\Delta t] = \\ &= \min_{\mathbf{U}_{M-k} \in \Omega_U} [S_{M-k+1}(\mathbf{X}_{M-k}^* + \mathbf{f}(\mathbf{X}_{M-k}^*, \mathbf{U}_{M-k})\Delta t) + f_0(\mathbf{X}_{M-k}^*, \mathbf{U}_{M-k})\Delta t], \\ &\text{където } k = 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \quad (1.13)$$

При $i = 0$ се получава оптималната стойност на (1.4) за цялата траектория

$$S_0(\mathbf{X}_0) = \min_{\mathbf{U} \in \Omega_U} I(\mathbf{X}_0, \mathbf{U}). \quad (1.14)$$

Така по обратен път в края на I етап се получават $S_i = S_i(\mathbf{X}_i^*)$ и съответните условни оптимални управления \mathbf{U}_i , $i = 0, 1, \dots, M-1$, при допускането, че е известна оптималната траектория.

II етап (прав): През този етап, на базата на изчислените условни оптимални управления \mathbf{U}_i , $i = 0, 1, \dots, M-1$, чрез уравнението на състоянието на обекта (1.3) и началните условия $\mathbf{X}_0^* = \mathbf{X}_0$ се определят действителните оптимални управления \mathbf{U}_i^* , $i = 0, 1, \dots, M-1$ и оптималната траектория $\mathbf{X}^* = \mathbf{X}(\mathbf{U}^*)$. За тази цел се определя $\mathbf{U}_0^* = \mathbf{U}_0(\mathbf{X}_0^*)$ и след заместване в (1.3) се изчислява \mathbf{X}_1^* . Аналогично $\mathbf{U}_1^* = \mathbf{U}_1(\mathbf{X}_1^*)$ се замества в (1.3) за получаване на \mathbf{X}_2^* и т.н.

Предимства и недостатъци на динамичното програмиране. Критерият на качеството може да се разглежда като сложна функция на много променливи

$$I = I(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_M; \mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_{M-1}). \quad (1.15)$$

Главното преимущество на метода на динамичното програмиране се състои в това, че задачата за минимизация за сложна скаларна функция на няколко векторни аргумента се свежда до минимизация на поредица от скаларни функции само по един векторен аргумент.

Аналитичното решение на тази задача е възможно в много редки и прости случаи, тъй като е свързано с решаване на системи нелинейни диференциални уравнения с частни производни. Затова, обикновено, динамичното програмиране се свързва с използването на изчислителна техника.

В дискретния си вариант решението на задачата изисква съхранение на големи масиви от данни за оптималното управление, съответстващо на всяка точка от фазовото пространство и за всеки интервал от решението, както и данни за стойностите на функцията на Белман за два съседни интервала. Необходимостта от голяма памет се увеличава чувствително с нарастване на реда на системата. Броят на запомнените стойности на $S(\mathbf{X})$ и $\mathbf{U}(\mathbf{X})$ в края на I етап на решението са

$$N = (2 + rM) \prod_{k=1}^n N_k, \quad (1.16)$$

където r е брой входове на управляваната система; M - брой интервали, на които е разделена оптималната траектория; N_k - брой на дискретните стойности на координатата x_k , $k = 1, 2, \dots, n$, на вектора на състоянието \mathbf{X} ; n - ред на управляваната система. Този проблем е известен като "проклятие на размерността". Затова понякога е уместно да се замени директното съхранение на необходимите стойности с въвеждане на правила или алгоритми за възпроизвеждането им, т.е. използване на апроксимация.

Тъй като се работи с дискретни стойности на управлението и на координатите на състоянието, то стойностите на функцията на Белман $S(\mathbf{X})$ за два съседни интервала и на условното оптимално управление $\mathbf{U}(\mathbf{X})$ за всичките интервали са известни и се помнят само в точките на фазовата мрежа. Като правило новите стойности на вектора \mathbf{X} , изчислени в (1.3), няма да попаднат точно в тези точки (на фазовата решетка), поради което се налага липсващите стойности на S и \mathbf{U} , необходими в I и II етапи, да бъдат определени чрез интерполация или понякога чрез екстраполация.

Алгоритъм на динамичното програмиране (дискретен вариант).

Стъпка 1. Инициализация. Задават се: броят на променливите на състоянието n и на входовете r ; техните минимални и максимални допустими стойности ($\mathbf{X}_{\min}, \mathbf{X}_{\max}, \mathbf{U}_{\min}, \mathbf{U}_{\max}$); броят на нивата им на дискретизация (N_i, R_i); броят на интервалите M ; началното и крайното състояние ($\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_T$) и крайното време T . Изчисляват се стъпките на дискретизация на променливите на състоянието и на управляващите входове, както и дискретните вектори \mathbf{X} и \mathbf{U} . Изчислява се функцията на Белман в последния интервал при $i = M$ в съответствие с (1.6) и се записва в масив $\{\mathbf{S}_i\}$ с размерност, съответстваща на възлите на фазовата решетка.

Стъпка 2. Начало на I етап (обратен). Времето се разглежда в обратна посока - броячът на интервалите се поставя на $i = M - 1$.

Стъпка 3. Броячът на състоянията (възлите) на фазовата решетка фиксира първото състояние X_i .

Стъпка 4. Броячът на комбинациите от дискретните стойности на управляващите входове фиксира първата комбинация от сигнали U_i .

Стъпка 5. Изчислява се критерият на качеството за интервала от i до $i+1$.

Стъпка 6. Решава се уравнението на състоянието (1.3) за една стъпка по времето (продължителността на един интервал).

Стъпка 7. Изчислява се критерият на качеството от i -тия интервал до края. За целта към изчисленото в *стъпка 5* се прибавя стойността на функцията на Белман, съхранявана в масива за $i+1$ -ия интервал и съответстваща на новия вектор на състоянието X_{i+1} , изчислен в *стъпка 6*. Тъй като той, най-вероятно, няма да попадне във възел от фазовата решетка на интервала $i+1$ (Фиг.1.3), то се налага интерполиране на функцията на Белман от масива $\{S_{i+1}\}$ за извличане на необходимата стойност. Изчислената стойност на критерия на качеството се записва на съответната позиция в масив J с размерност, съответстваща на броя на всички възможни комбинации от дискретни стойности на входовете.

Стъпка 8. Ако броячът на дискретните комбинации на входовете е по-малък от броя на всички възможни комбинации $\prod_{j=1}^r R_j$, той се увеличава с единица и се преминава в *стъпка 5*. В противен случай се определя функцията на Белман S_i , която е равна на минималната от стойностите на критерия на качеството, изчислявани в *стъпка 7* по всички възможни комбинации на управляващите входове, стартирани от *стъпка 4* насам и съхранявани в масива J (т.е. $S_i = \min_U J$). Векторът на управлението U_i^* , съответстващ на този минимум се съхранява в масива с условните оптимални управления $\{U_i^*\}$.

Стъпка 9. Ако броячът на възлите на фазовата решетка е по-малък от броя на всички възможни дискретни състояния $\prod_{j=1}^n N_j$, той се

увеличава с единица и се преминава към *стъпка 4*. В противен случай – масивът с функцията на Белман, изчислен за $i+1$ -ия интервал се замества с този, изчислен в i -тия: $\{S_{i+1}\} = \{S_i\}$.

Стъпка 10. Ако броячът на интервалите е по-голям от нула, той се намалява с единица и се отива в *стъпка 3*, в противен случай – следващата *стъпка 11*.

Стъпка 11. Начало на II етап (прав). Времето се пуска да тече в права посока: броячът на интервалите се поставя на $i = 0$. Началното състояние X_0 се присвоява на вектора на оптималното състояние в началния интервал, т.е., $X_i^* = X_0$.

Стъпка 12. За вектора на състоянието X_i^* се извлича оптималното управление от масива на условно оптималните управления $\{U_i^*\}$. Тъй като векторът на състоянието X_i^* най-вероятно не попада във възлите на фазовата решетка оптималното управление се интерполира, след което се решава уравнението на състоянието (1.3) за изчисляване на новото състояние X_{i+1}^* .

Стъпка 13. Ако броячът на интервалите е по-малък от M , той се увеличава с единица и се преминава към *стъпка 12*, а в противен случай - към следващата *стъпка 14*.

Стъпка 14. Алгоритъмът се прекратява, а получените резултати се визуализират (U^* и X^*).

2. Пример

По метода на динамичното програмиране да се намери оптималното (с обратна връзка) управление на системата

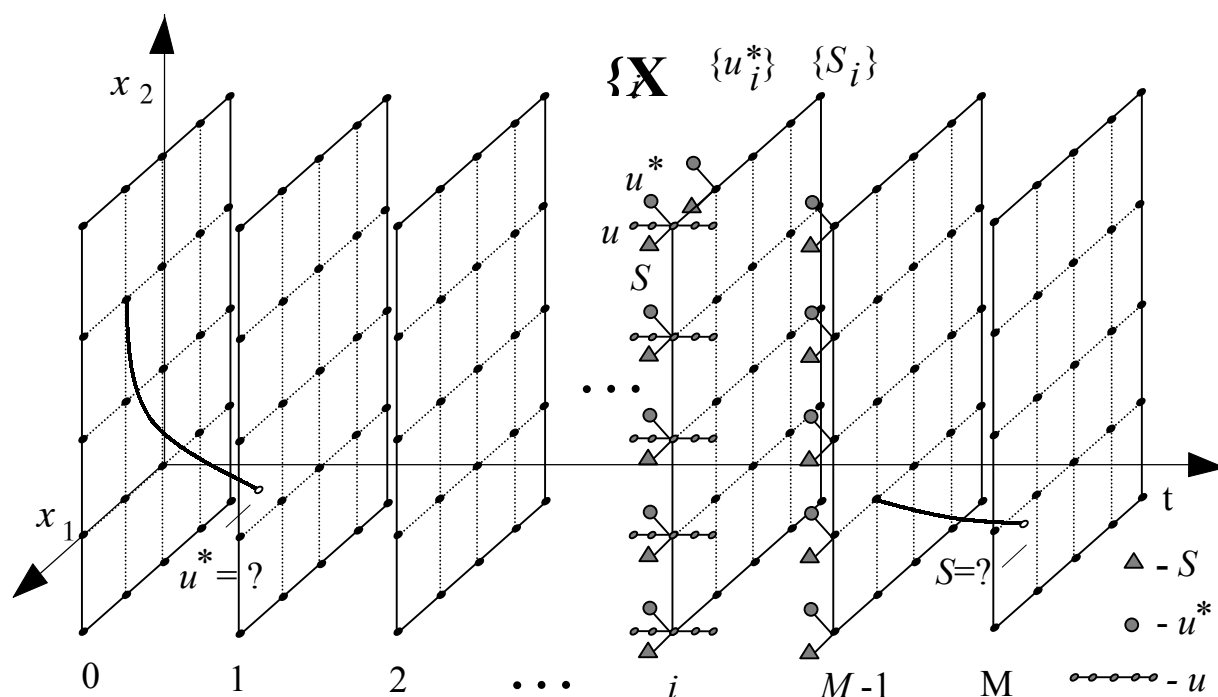
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u,\end{aligned}$$

с начално и крайно състояние, съответно $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$ и $x_1(T) = 0$, $x_2(T) = 0$. Критерият за качеството, който трябва да се минимизира е

$$I = \int_0^T (x_1^2 + u^2) dt,$$

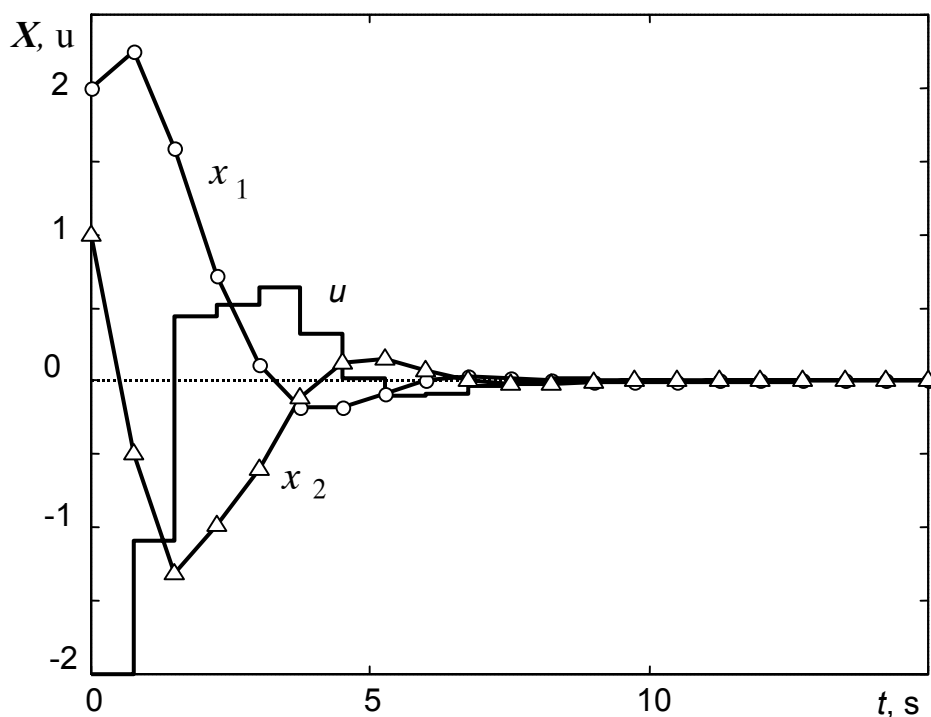
където x_1^0 и x_2^0 са произволно зададени числа, а крайното време T не е фиксирано.

Задачата се решава чрез дискретния вариант на динамичното програмиране. За тази цел на базата на разгледания по-горе алгоритъм е написана програма в средата на MATLAB (Приложение 1) с ограничено приложение за системи от втори ред. Тя се състои от главна програма BELMAN.M и подпрограми-функции: I2PLANT.M – модел на обекта, COSTFUNC.M – критерий за качеството, INTERP_S.M – интерполация на функцията на Белман, INTERP_U.M – интерполация на оптималното управляващо въздействие и RK4.M – метод на Рунге-Кута от IV ред (с постоянна стъпка) за числено решаване на диференциални уравнения.



Фиг.1.3. Динамично програмиране – изчислителни аспекти.

Допустимите области на двете променливи на състоянието са $x_1 \in [-5; 5]$, $x_2 \in [-4; 4]$, а на управлението - $u \in [-2; 2]$. Избрани са следните нива на дискретизация за променливите на състоянието $N_1 = N_2 = 11$ и за управлението $R_1 = 5$. Броят на интервалите е $M = 20$. Началното условие е $x_1(0) = 2$ и $x_2(0) = 1$, а крайното време $T = 15$ s. На Фиг.1.4 е показан резултатът от симулацията за толкова точки, колкото е броят на интервалите и началното условие, т.е. $M + 1$.



Фиг.1.4. Симулационни резултати

3. Задачи за изпълнение

Да се приложи дискретният вариант на динамичното програмиране за намиране на управляващия закон (с обратна връзка) при зададени от преподавателя обект от втори ред и критерий за оптималност. За целта се адаптират програмите от Приложение 1.

Да се симулират времевите процеси за различни начални условия, различни стъпки на дискретизация на променливите на състоянието и на управлението и различни времеви интервали.

Да се построят времевите процеси в затворената оптимална система.

4. Анализ на резултатите

Анализира се влиянието на стъпката на дискретизация на променливите на състоянието и на управлението, както и на броя на времевите интервали върху бързодействието и обема на заемащата памет. Дискутира се възможността за компресиране на съхраняваните данни.

Лабораторно упражнение № 2

Динамично програмиране при непрекъснати процеси

Целта на лабораторното упражнение е запознаване с особеностите на динамичното програмиране приложено към непрекъснати системи, както и с предимствата и недостатъците на аналитичното решение.

1. Теоретични сведения

Постановка на задачата. Разглежда се система, зададена в пространството на състоянията с уравнението

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t), \quad (2.1)$$

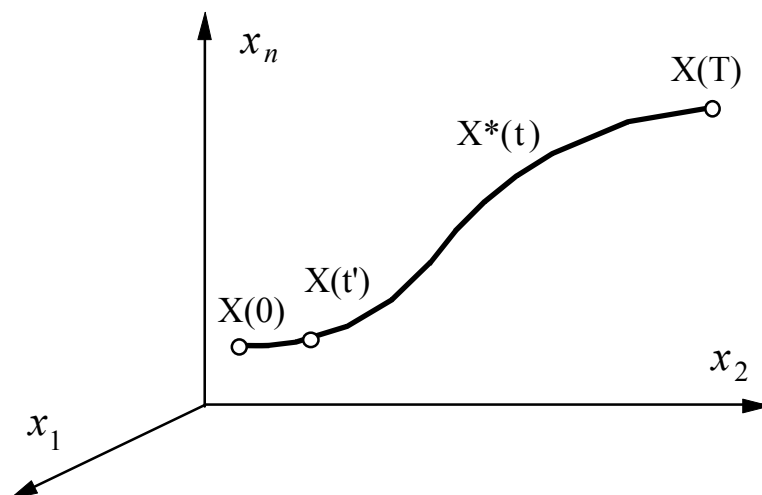
където $\mathbf{X}(t)$ е n -мерен вектор на състоянието на системата, $\mathbf{U}(t)$ е r -мерен вектор на управлението на системата, а $\mathbf{f}(\cdot)$ е n -мерен вектор с компоненти нелинейни функции, описващи динамиката на системата. Началното и крайното състояние са съответно $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(0)$ и $\mathbf{X}_T = \mathbf{X}(T)$. Търси се такова управление $\mathbf{U}(t)$, принадлежащо на областта на допустимите управления $\mathbf{U}(t) \in \Omega_U$, което да привежда системата от начално състояние \mathbf{X}_0 в крайно състояние \mathbf{X}_T за време $t \in [0; T]$, така че да минимизира критерия за качество

$$I = \int_0^T f_0(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t) dt. \quad (2.2)$$

Тук за простота е прието краевото условие $\phi(\mathbf{X}_T) = 0$. Този израз не зависи от вектора на управлението $\mathbf{U}(t)$, а единствено от крайното състояние \mathbf{X}_T , независимо как е стигнато до него.

Извеждане на уравнението на Белман. Нека начертаната на Фиг.2.1 траектория $\mathbf{X}^*(t)$ е оптималната, съответстваща на оптималното управление $\mathbf{U}^*(t)$. Минимумът на функционала (2.2) е

$$S = \min_{\mathbf{U} \in \Omega_U} I = \min_{\mathbf{U} \in \Omega_U} \int_0^T f_0(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t) dt = \int_0^T f_0(\mathbf{X}^*(t), \mathbf{U}^*(t), t) dt = S(\mathbf{X}_0, 0). \quad (2.3)$$



Фиг. 2.1. Фазова траектория, поясняваща извеждането на функцията на Белман.

Нека $t = t'$ и от т. $X(t')$ до края (т. $X(T)$) е намерено оптималното управление. Минимумът на критерия за оптималност за този интервал е

$$S(X(t'), t') = \min_{U \subset \Omega_U} \int_{t'}^T f_0(X(t), U(t), t) dt = \int_{t'}^T f_0(X^*(t), U^*(t), t) dt. \quad (2.4)$$

Минимумът на пълния функционал на качеството е

$$\begin{aligned} S(X_0, 0) &= \min_{U \subset \Omega_U} \left[\int_0^{t'} f_0(X(t), U(t), t) dt + S(X(t'), t') \right] = \\ &= \min_{U \subset \Omega_U} [f_0(X(t), U(t), t) dt + S(X(t'), t')]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Замяната на интеграла с подинтегралната функция е възможно тъй като интервалът $t' - 0 = dt$ е избран достатъчно малък. Уравнение (2.5) се нарича *рекурентна формула на Белман за непрекъснати системи* и е аналог на рекурентната формула на Белман за дискретни процеси, а функцията $S(X(t'), t')$ се нарича *функция на Белман*. Предполага се, че функцията на Белман съществува относно всички точки и е непрекъсната, съществуват и нейните непрекъснати частни производни по координатите на състоянието x_i и по времето t . Тази формула изразява принципа на оптималността. Нека $t' \approx 0$, следователно $(0, t') \approx dt$, т.е. разглежда се много малък интервал от

време $dt = t' - 0$, за който уравнението на състоянието може да се запише във вида

$$\frac{\mathbf{X}(t') - \mathbf{X}(0)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{X}(0), \mathbf{U}(0), 0). \quad (2.6)$$

Разлага се в ред на Тейлър по степените на $t' = dt$ в околността на точката \mathbf{X}_0 стойността на минимума на критерия на качеството за интервала от t' до края

$$\begin{aligned} S(\mathbf{X}(t'), t') &= S(\mathbf{X}_0, 0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(\mathbf{X}(t), t)}{\partial x_i} \frac{dx_i(t)}{dt} \Big|_0 dt + \frac{\partial S(\mathbf{X}(t), t)}{\partial t} \Big|_0 dt + O' = \\ &= S(\mathbf{X}_0, 0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(\mathbf{X}(t), t)}{\partial x_i} f_i(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t) \Big|_0 dt + \frac{\partial S(\mathbf{X}(t), t)}{\partial t} \Big|_0 dt + O', \end{aligned} \quad (2.7)$$

където е положено $\sum_{i=1}^n \frac{\partial S(\mathbf{X}(t), t)}{\partial x_i} \Big|_0 dx_i(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(\mathbf{X}(t), t)}{\partial x_i} \frac{dx_i(t)}{dt} \Big|_0 dt$, а с O' е означен остатъкът, съдържащ нелинейните членове в реда на Тейлър. Допуска се, че $O' = 0$. След заместване на (2.7) в (2.5) се получава

$$\begin{aligned} S(\mathbf{X}_0, 0) &= \min_{\mathbf{U} \in \Omega_{\mathbf{U}}} [f_0(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t) dt + S(\mathbf{X}_0, 0) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(\mathbf{X}(t), t)}{\partial x_i} f_i(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t) \Big|_0 dt + \frac{\partial S(\mathbf{X}(t), t)}{\partial t} \Big|_0 dt]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

$S(\mathbf{X}_0, 0)$ и $\frac{\partial S(\mathbf{X}(t), t)}{\partial t} \Big|_0$ не зависят от \mathbf{U} и следователно могат да излязат пред знака за минимизация. Символът $\Big|_0$ означава, че се разглежда околността на точката \mathbf{X}_0 при $t = 0$. Извеждането (2.8) не губи общността си за всеки произволен начален момент до края, което позволява да се отстрани символът $\Big|_0$. След съкращаване на $S(\mathbf{X}_0, 0)$ и делене на dt се получава уравнението на Белман за непрекъснати системи

$$-\frac{\partial S(\mathbf{X}(t), t)}{\partial t} = \min_{\mathbf{U} \in \Omega_{\mathbf{U}}} [f_0(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(\mathbf{X}(t), t)}{\partial x_i} f_i(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t)], \quad (2.9)$$

Предполага се че е известна оптималната траектория $\mathbf{X}^*(t)$. След въвеждане на вектора стълб

$$\text{grad } S(\mathbf{X}(t), t) = \frac{\partial S(\mathbf{X}(t), t)}{\partial \mathbf{X}} = \left[\frac{\partial S}{\partial x_1}, \frac{\partial S}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial x_n} \right]^T, \quad (2.10)$$

(2.9) добива вида

$$-\frac{\partial S(\mathbf{X}^*(t), t)}{\partial t} = \min_{\mathbf{U} \in \Omega_U} [f_0(\mathbf{X}^*(t), \mathbf{U}(t), t) + (\text{grad } S(\mathbf{X}^*(t), t))^T \mathbf{f}(\mathbf{X}^*(t), \mathbf{U}(t), t)] \quad (2.11)$$

Уравнението на Белман (2.11) в най-общия случай е нелинейно диференциално уравнение с частни производни. Неизвестната функция е $S(\mathbf{X}(t), t)$ - минималната стойност на критерия за оптималност. Решаването на това уравнение може да стане по различни начини, но най-често се извършва числено, тъй като аналитичното му решаване е сложно и в повечето случаи невъзможно.

Един подход за аналитично решаване. Ако минимумът на дясната страна на (2.11) се достига във вътрешните точки на дефиниционната област Ω_U , то уравнението на Белман може да се представи във вида

$$\frac{\partial}{\partial u_j} \{f_0(\mathbf{X}^*(t), \mathbf{U}(t), t) + (\text{grad } S(\mathbf{X}^*(t), t))^T \mathbf{f}(\mathbf{X}^*(t), \mathbf{U}(t), t)\} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (2.12)$$

$$f_0(\mathbf{X}^*(t), \mathbf{U}(t), t) + (\text{grad } S(\mathbf{X}^*(t), t))^T \mathbf{f}(\mathbf{X}^*(t), \mathbf{U}(t), t) = -\frac{\partial S(\mathbf{X}^*(t), t)}{\partial t}. \quad (2.13)$$

Уравнение (2.12) изразява необходимото условие за минимум на лявата част на (2.11) и замества изпуснатата в (2.13) операция минимизация по управлението \mathbf{U} .

Ако десните части на уравнението на състоянието на обекта и подинтегралната функция в критерия за оптималност (f_i , $i = 0, 1, \dots, n$) не зависят явно от времето и крайният момент T не е фиксиран, то функцията на Белман не зависи явно от времето и $\partial S / \partial t = 0$.

Оптималното управление по метода на динамичното програмиране се намира по следния начин:

- 1) От уравнение (2.12) се намира управлението като функция на S , т.е.
 $U^* = U^*(S)$;
- 2) Замества се U^* в уравнение (12) и след решаването му при приетото краево условие се намира функцията на Белман $S = S(\mathbf{X})$;
- 3) Полагайки намерената функция на Белман в $U^* = U^*(S)$ се получава оптималното управление като функция на фазовите координати $U^* = U^*(\mathbf{X})$.

Предимства и недостатъци. Вариационните методи (класически методи за намиране на екстремум на функционал) позволяват намирането на оптималното управление като функция на времето. Предимството на динамичното програмиране е, че управлението се намира като функция на фазовите координати, т.е. решава се задачата за синтеза на оптимален регулатор. Недостатък на метода на динамичното програмиране е, че изходната задача за оптимално управление се свежда до трудно решими нелинейни диференциални уравнения с частни производни.

2. Пример [3]

По метода на динамичното програмиране да се намери оптималното управление на системата

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u,\end{aligned}\tag{2.14}$$

с начално и крайно състояние, съответно $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$ и $x_1(T) = 0$, $x_2(T) = 0$. Критерият за качеството, който трябва да се минимизира е

$$I = \int_0^T (x_1^2 + u^2) dt,\tag{2.15}$$

където x_1^0 и x_2^0 са произволно зададени числа, а моментът T не е фиксиран.

Уравненията (2.12) и (2.13) се записват за конкретната задача. В дадения случай $\partial S / \partial t = 0$ и тези уравнения са от вида

$$x_1^2 + u^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial S}{\partial x_2} u = 0, \quad (2.16)$$

$$2u + \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0. \quad (2.17)$$

От (2.17) се намира $u^* = -\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial x_2}$ и след заместването му в (2.16) се получава

$$x_1^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial S}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 = 0. \quad (2.18)$$

Това уравнение трябва да се реши при граничното условие $S(\mathbf{X}(T)) = 0$. Решението се търси във вид на квадратична форма

$$S = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2, \quad (2.19)$$

която при началното и крайното състояние на системата удовлетворява зададеното гранично условие. Като се замести този израз в уравнението на Белман се получава

$$x_1^2 - \frac{1}{4} (2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2)^2 + (2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2)x_2 = 0 \quad (2.20)$$

или

$$(1 - a_{12}^2)x_1^2 + (2a_{11} - 2a_{12}a_{22})x_1x_2 + (2a_{12} - a_{22}^2)x_2^2 = 0. \quad (2.21)$$

Последното равенство тъждествено се изпълнява, ако

$$1 - a_{12}^2 = 0, \quad a_{11} - a_{12}a_{22} = 0, \quad 2a_{12} - a_{22}^2 = 0.$$

Тази система има следните решения

$$a_{12} = 1, \quad a_{22} = \pm\sqrt{2}, \quad a_{11} = \pm\sqrt{2}.$$

Тъй като по определение функцията на Белман е

$$S(\mathbf{X}(t)) = \int_t^T (x_1^2 + u^2) dt, \quad (2.22)$$

то $S > 0$ за всяко $t \neq T$. Ето защо, квадратичната форма удовлетворяваща уравнението на Белман ще бъде функция на Белман, ако е положително определена. Това условие се удовлетворява от решението

$$a_{12} = 1, \quad a_{22} = \sqrt{2}, \quad a_{11} = \sqrt{2}.$$

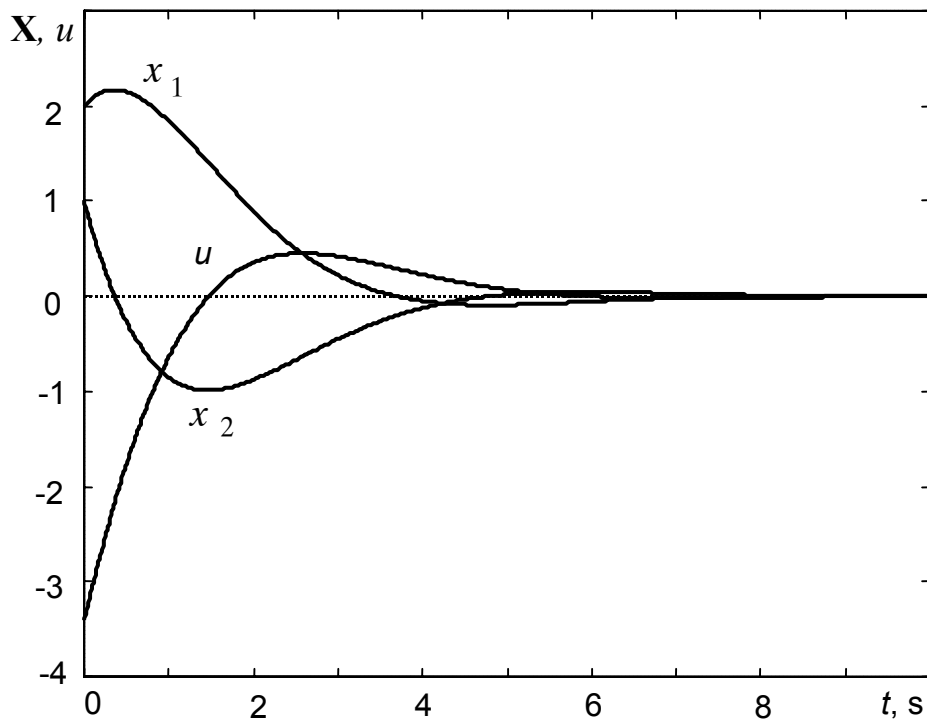
Следователно, функцията на Белман е

$$S = \sqrt{2}x_1^2 + 2x_1x_2 + \sqrt{2}x_2^2, \quad (2.23)$$

а оптималното управление се определя като

$$u^*(\mathbf{X}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial x_2} = -(x_1 + \sqrt{2}x_2). \quad (2.24)$$

Времевите процеси в затворената оптимална система са симулирани в средата на MATLAB и са показани на Фиг.2.2.



Фиг.2.2. Симулационни резултати.

3. Задачи за изпълнение

При зададена от преподавателя задача да се намери аналитично оптималният управляващ закон, като се следва решения пример и помощни указания в процеса на решаването. Да се симулира в средата на MATLAB затворената система и се построят процесите във времевата област и фазовата равнина.

4. Анализ на резултатите

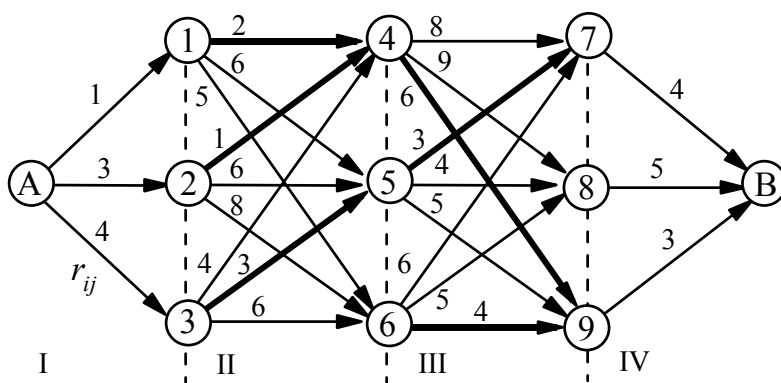
Анализират се предимствата и недостатъците на аналитичното решение и се дискутират трудностите при намирането му, ако последното е възможно.

Приложение на динамичното програмиране за решаване на комбинаторни задачи

Целта на лабораторното упражнение е запознаване с оптимизацията на многостадийни процеси и по-специално прилагането на динамичното програмиране за решаване на комбинаторни задачи.

1. Теоретични сведения [9]

Динамичното програмиране се прилага за решаване на комбинаторни задачи за определяне на оптимални пътища по определен критерий (разстояние, време, разходи) и намиране на оптимална комбинация при последователност от множество възможни решения. Чрез комбинаторната задача най-добре се илюстрира прилагането на принципа на оптималността. Тези задачи могат да се разглеждат като многостадийни процеси на взимане на решения, т.е. избор на управление на всеки стадий от определен краен брой възможни решения.



Фиг.3.1. Варианти за преход от A към B

Такъв пример е задачата за най-краткия път. На Фиг.3.1 са показани възможните пътища между точка A и B. На всяко разклонение (стадий) трябва да се вземе решение (управление) по кой път да се тръгне, така че да се премине от точка A до точка B като се минимизира цената на прехода (време, път, разход). Разходите за

преминаване от точка в точка (от разклонение до разклонение) са зададени предварително като r_{ij} .

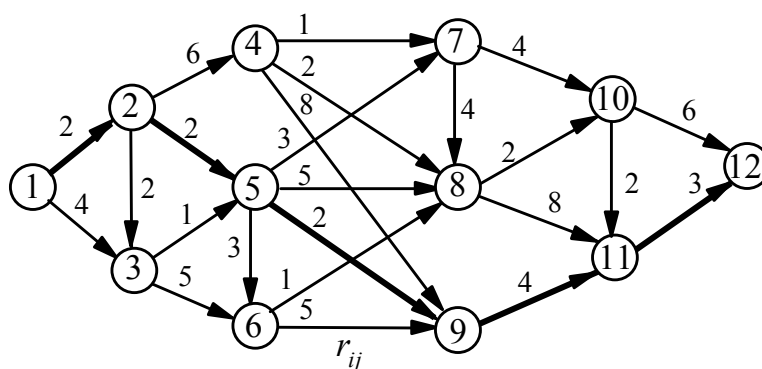
Класическият начин за решаване на задачата е преглеждане на всички възможни пътища (варианти) от А до В. Всяко преминаване от стадий в стадий се оценява във време или километри, или изразходвани средства в зависимост от избрания критерий r_{ij} . Оптималният път ще бъде най-икономичен в смисъла на избрания критерий.

Нека на стадий II има три възможни състояния. Допуска се, че от всяко от тях може да се попадне във всяко от трите състояния на III стадий. За преминаване от стадий II в стадий III е необходимо да се разгледат $3 \cdot 3 = 9$ варианта. За преминаване от стадий II през III до IV е необходимо да се сравнят $3^3 = 27$ варианта. Нека броят на стадиите е N , а възможните състояния на всеки стадий са n . При преминаване от началния стадий до N чрез разглеждане на всички възможни състояния броят на вариантите ще бъде n^N . Ако обаче най-напред се прегледат възможните варианти за преминаване от III в IV стадий и се определи оптималният път за всяко от трите състояния (4, 5 и 6) на III, броят на прегледаните варианти ще бъде $3^2 = 9$. Пътищата с минимални разходи за преминаване от III в IV от трите състояния са дадени с надебелени линии. Аналогично разглеждане от $3^2 = 9$ варианта се прави за прехода от II към III стадий. След попадане в някое от трите състояния на III, по нататък към IV вече е известен оптималният път от предишната фаза на решението. По този принцип, който е именно принципът на динамичното програмиране, ще е необходимо изследване само на $2 \cdot 3^2 = 18$ варианта. В такъв случай, ако задачата се решава от края към началото е необходимо да се изследват Nn^2 . Колкото повече стадии има задачата, толкова почувствително намалява броят на изследваните варианти по метода на динамичното програмиране по отношение на класическото пресмятане на вариантите, т.е. ускорява се решението на задачата. Това е основното предимство на динамичното програмиране.

2. Пример

Да се определи последователността на преминаване от началния стадий 1 до крайния 12, така че разходите $R_{1,12}$ да бъдат минимални.

Нека с r_{ij} е означена цената на прехода от точка (състояние) i към точка j . Възможните управления на всеки стадий в тази задача са възможните решения за избор на път. Тази задача може да се реши като се започне от първия стадий и се изследват всички възможни пътища до последния стадий. Комбинацията от преходи с минимална сума $\sum r_{ij}$ ще бъде оптималният път за преминаване от 1 към 12. Броят на последователните варианти обаче е голям и не са изключени грешки, т.е. пропускане на някой вариант. Тази задача се решава много успешно по метода на динамичното програмиране с приложение на принципа на оптималността.



Фиг.3.2. Варианти за преход от стадий 1 към стадий 12

Нека минималните разходи от i -тия стадий до края са R_i . Решението започва от последния стадий (тъй като след него разходите са нула: $R_{12} = 0$), при което се получават следните стойности за R_i , $i = 1, 2, \dots, 11$, където оптималните пътища са подчертани:

$$R_{11} = \min(r_{11,12} + R_{12}) = 3 + 0 = 3, \quad (3.1)$$

$$R_{10} = \min \left\{ \begin{array}{l} r_{10,11} + R_{11} \\ r_{10,12} + R_{12} \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 2 + 3 \\ 6 + 0 \end{array} \right\} = 5. \quad (3.2)$$

Следователно, в стадий 10 оптималното решение е през стадий 11.

$$R_9 = \min(r_{9,11} + R_{11}) = 4 + 3 = 7, \quad (3.3)$$

$$R_8 = \min \left\{ \frac{r_{8,10} + R_{10}}{r_{8,11} + R_{11}} \right\} = \min \left\{ \frac{2+5}{8+3} \right\} = 7, \quad (3.4)$$

Оптималното решение от стадий 8 до края е преминаването през стадий 10.

$$R_7 = \min \left\{ \frac{r_{7,8} + R_8}{r_{7,10} + R_{10}} \right\} = \min \left\{ \frac{4+7}{4+5} \right\} = 9, \quad (3.5)$$

$$R_6 = \min \left\{ \frac{r_{6,8} + R_8}{r_{6,9} + R_9} \right\} = \min \left\{ \frac{1+7}{5+7} \right\} = 8, \quad (3.6)$$

$$R_5 = \min \left\{ \frac{r_{5,6} + R_6}{r_{5,7} + R_7}{r_{5,8} + R_8}{r_{5,9} + R_9} \right\} = \min \left\{ \frac{3+8}{3+9}{5+7}{2+7} \right\} = 9, \quad (3.7)$$

$$R_4 = \min \left\{ \frac{r_{4,7} + R_7}{r_{4,8} + R_8}{r_{4,9} + R_9} \right\} = \min \left\{ \frac{1+9}{2+7}{8+7} \right\} = 9, \quad (3.8)$$

$$R_3 = \min \left\{ \frac{r_{3,5} + R_5}{r_{3,6} + R_6} \right\} = \min \left\{ \frac{1+9}{5+8} \right\} = 10, \quad (3.9)$$

$$R_2 = \min \left\{ \frac{r_{2,3} + R_3}{r_{2,4} + R_4}{r_{2,5} + R_5} \right\} = \min \left\{ \frac{2+10}{6+9}{2+9} \right\} = 11, \quad (3.10)$$

$$R_1 = \min \left\{ \frac{r_{1,2} + R_2}{r_{1,3} + R_3} \right\} = \min \left\{ \frac{2+11}{4+10} \right\} = 13. \quad (3.11)$$

Определена е минималната цена (разходите за прехода) от първия до 13-ия стадий - $R_1 = 13$. На втория етап от решението на задачата се намира оптималният път от началото към края. При попадане на определен стадий от решението на задачата на първия етап, вече се знае кой е оптималният път оттук до края. От първия стадий оптималният път е към 2 (подчертаният път). От стадий 2 има три решения, но минималните разходи са през 5. От стадий 5 са възможни 4 решения, но минималните разходи от 5 до края са през 9. След стадий 9 оптималният път е през 11 към 12. На Фиг.3.2 оптималният път е показан с удебелена линия.

3. Задачи за изпълнение

При зададена от преподавателя комбинаторна задача да се намери оптималният път (с минимални разходи на прехода) като се използва метода на динамичното програмиране. Допълнително, да се направи опит за разписване на всички възможни комбинации от началната до крайната точка. Да се провери твърдението: "Всяка част от оптималния път от произволен стадий до края е оптимален път, но обратното не е вярно, т.е., сумата от оптималните пътища между стадиите от началната до крайната точка не е оптимален път".

4. Анализ на резултатите

Анализират се предимствата на динамичното програмиране при решаването на комбинаторната задача. За целта се дискутират трудностите при използването на класическия метод на разглеждане на всички комбинации от възможни пътища между началната и крайната точка, а именно, огромната по-обем работа, свързана с разход на много време и повишена вероятност за допускане на грешки.

**Принцип на максимума (минимума) на Понтрягин.
Оптимално по бързодействие програмно управление
на линейни системи**

Целта на лабораторното упражнение е запознаване с особеностите на принципа на максимума (минимума) и приложението му за синтез на оптимално по бързодействие програмно управление на линеен обект.

1. Теоретични сведения

Принципът на максимумът е формулиран от Л. С. Понтрягин [7] през 1953 г. като необходимо условие за екстремум в задачите за оптимално управление.

Постановка на задачата на принципа на максимума (минимума). Разглежда се система, зададена в пространство на състоянията с уравнението

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t)) , \quad (4.1)$$

където $\mathbf{X}(t)$ е n -мерен вектор на състоянието на системата, $\mathbf{U}(t)$ е r -мерен вектор на управлението на системата, а $\mathbf{f}(\cdot)$ е n -мерен вектор с компоненти нелинейни функции, описващи динамиката на системата. Началното и крайното състояние са съответно $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(0)$ и $\mathbf{X}_T = \mathbf{X}(T)$. Търси се такова управление $\mathbf{U}(t)$, принадлежащо на областта на допустимите управления $\mathbf{U}(t) \subset \Omega_U$, което да привежда системата от начално състояние \mathbf{X}_0 в крайно състояние \mathbf{X}_T за време $t \in [0; T]$, така че да максимизира (минимизира) критерия за качество

$$I = \int_0^T f_0(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t)) dt . \quad (4.2)$$

Предполага се, че обектът е управляем, наблюдаем и нормален (Приложение 5). Управлението $\mathbf{U}(t)$ принадлежи към класа на

отсечково-непрекъснатите функции и приема стойности от допустимото множество Ω_U .

Формулировка на принципа на максимума. Нека съществува спомагателна непрекъсната и ненулева вектор-функция $\Psi(t) = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n]^T$, която участва в Хамилтониана

$$H(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), \Psi(t)) = \psi_0(t)f_0(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t)) + \Psi^T(t)\mathbf{f}(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t)), \quad (4.3)$$

където $\psi_0(t) \leq 0$ (обикновено $\psi_0 = -1$).

За да бъдат управлението $\mathbf{U}(t)$ и състоянието $\mathbf{X}(t)$ оптимални, в смисъла на избрания критерий за оптималност (4.2) е необходимо да съществува такава вектор-функция $\Psi(t)$, която заедно с $\mathbf{U}(t)$ и $\mathbf{X}(t)$ да удовлетворява уравненията на *спрегнатата система*

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = -\frac{\partial H(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \Psi)}{\partial \mathbf{X}}, \quad (4.4a)$$

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \frac{\partial H(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \Psi)}{\partial \Psi}, \quad (4.4b)$$

и за всяко $t \in [0; T]$ функцията на Хамилтон (4.3) да приема максималната си възможна стойност, т.е.

$$H(\mathbf{X}^*(t), \mathbf{U}^*(t), \Psi^*(t)) = \max_{\mathbf{U} \in \Omega_U} H(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), \Psi(t)). \quad (4.5)$$

Векторът $\Psi(t)$ е решение на *спрегнатата система* (4.4a) и се нарича *спрегнат вектор*.

Формулировка на принципа на минимума. Преимуществото на принципа на минимума е в по-тясната му връзка с вариационното смятане, принципа на Хамилтон в механиката и динамичното програмиране на Белман. Същността на принципа на максимума е запазена, променена е само формата. Тук спомагателната променлива се нарича *канонична*, означава се с $\mathbf{P}(t) = [p_1, p_2, \dots, p_n]^T$ и се определя от

$$\mathbf{P}(t) = -\Psi(t). \quad (4.6)$$

Освен това

$$p_0 = -\Psi_0, \quad (4.7)$$

където $p_0(t) \geq 0$ (обикновено $p_0 = 1$). Функцията на Хамилтон и спрегнатата система (тук наречена *канонична*) добиват, съответно, вида

$$H(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), \mathbf{P}(t)) = p_0(t)f_0(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t)) + \mathbf{P}^T(t)\mathbf{f}(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t)), \quad (4.8)$$

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = -\frac{\partial H(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{P})}{\partial \mathbf{X}}, \quad (4.9a)$$

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \frac{\partial H(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}}, \quad (4.9b)$$

и вместо максимум се търси минимум на Хамилтониана (4.8) при решението на (4.9)., т.е.

$$H(\mathbf{X}^*(t), \mathbf{U}^*(t), \mathbf{P}^*(t)) = \min_{\mathbf{U} \in \Omega_U} H(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), \mathbf{P}(t)). \quad (4.10)$$

Ако с H_Ψ и H_P се означае Хамилтонианът, съответно в принципа на максимума и принципа на минимума, то е очевидно, че

$$H_P = -H_\Psi. \quad (4.11)$$

Каноничният векторът $\mathbf{P}(t)$ е решение на каноничната система (4.9a). Останалата част от формулировката на принципа на Понтрягин остава непроменена.

Връзка между принципа на максимума и динамичното програмиране. Въпреки че принципът на максимума на Понтрягин е бил формулиран и доказан независимо от динамичното програмиране на Белман, между тях съществува връзка. Тя става очевидна, когато спрегнатият вектор $\Psi(t)$ се представи като

$$\Psi = -\text{grad} S(\mathbf{X}) = \left[-\frac{\partial S}{\partial x_1}, -\frac{\partial S}{\partial x_2}, \dots, -\frac{\partial S}{\partial x_n} \right]^T, \quad (4.12)$$

където S е функцията на Белман, и се въведе още една променлива на състоянието

$$x_0(t) = \int_0^T f_0(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t)) dt = I, \quad x_0(0) = 0 \quad \text{и} \quad x_0(T) = I. \quad (4.13)$$

След диференциране се получава

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = f_0(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t)), \quad (4.14)$$

Ако системата е неавтономна се въвежда още една координата на състоянието $x_{n+1}(t) = t$ и съответно още едно диференциално уравнение $\dot{x}_{n+1}(t) = 1$ с начално условие $x_{n+1}(0) = 0$. Очевидно е, че размерността на $\Psi(t)$ трябва да се допълни до тази на $\mathbf{X}(t)$ чрез полагането $\psi_0 = -1$ и $\psi_{n+1} = -\frac{\partial S}{\partial x_{n+1}} = -\frac{\partial S}{\partial t}$. При направените дотук уточнения уравнението на Белман

$$-\frac{\partial S(\mathbf{X}^*(t), t)}{\partial t} = \min_{\mathbf{U} \in \Omega_{\mathbf{U}}} [f_0(\mathbf{X}^*(t), \mathbf{U}(t), t) + (\text{grad } S(\mathbf{X}^*(t), t))^T \mathbf{f}(\mathbf{X}^*(t), \mathbf{U}(t), t)] \quad (4.15)$$

може да се приведе до вида

$$0 = \max_{\mathbf{U} \in \Omega_{\mathbf{U}}} [(-1)f_0 - (\text{grad } S)^T \mathbf{f} - \frac{\partial S}{\partial t}(+1)] = \max_{\mathbf{U} \in \Omega_{\mathbf{U}}} (\tilde{\Psi}^T \tilde{\mathbf{f}}), \quad (4.16)$$

където $\tilde{\Psi}$ и $\tilde{\mathbf{f}}$ са разширените $n+2$ -мерни вектори, съответстващи на Ψ и \mathbf{f} . От (4.16) следва, че в принципа на *максимума* Хамилтонианът е винаги *неположителен*, а в принципа на *минимума* - *неотрицателен*.

Постановка на задачата за оптимално бързодействие. Търси се такова управляващо въздействие $\mathbf{U}(t)$, отговарящо на условието

$$|u_j| \leq 1, \quad (j = 1, 2, \dots, r), \quad (4.17)$$

което да приведе системата

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t) \quad (4.18)$$

от начално състояние $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ в крайно състояние $\mathbf{X}(T) = \mathbf{X}_T$ за минимално време, т.е. минимизирайки критерия за оптималност

$$I = \int_0^T f_0(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t)) dt = \int_0^T 1 dt = T \rightarrow \min. \quad (4.19)$$

Формулировка на принципа на минимума за оптимално бързодействие. За оптималността на управлението $\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}^*(t)$ и на траекторията $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}^*(t)$ е необходимо да съществува такава ненулева и непрекъсната вектор-функция $\mathbf{P}(t)$, която заедно с $\mathbf{U}(t)$ и $\mathbf{X}(t)$ да удовлетворява каноничната система

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = -\frac{\partial H(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{P})}{\partial \mathbf{X}} = -\mathbf{A}^T \mathbf{P}, \quad (4.20a)$$

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \frac{\partial H(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}, \quad (4.20b)$$

и за всяко $t \in [0; T]$ Хамилтонианът

$$H(\mathbf{P}, \mathbf{X}, \mathbf{U}) = f_0(\mathbf{X}, \mathbf{U}) + \mathbf{P}^T [\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}] = 1 + \mathbf{X}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{U}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (4.21)$$

да е минимален (по \mathbf{U}) при съблюдаване на ограничения (4.17) за $\mathbf{U}(t)$.

Представянето на дясната страна на (4.21) и изчисляването на производните в (4.20) е в съответствие с някои резултати от линейната алгебра, дадени в Приложение 5.

Синтез на оптимално управление. Алгоритъм за работа.

1. Обектът се представя в пространството на състоянията във форма (4.18).
2. Съставя се Хамилтонианът (4.21).
3. Търсят се частните производни на Хамилтониана по управлението \mathbf{U} , нулират се и от условията на това нулиране се определят управленията, претендиращи за оптимални:

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, r).$$

4. След заместване на получените от т.3 управления в каноничната система, тя се решава и чрез търсене измежду многото варианти на начални условия за спомагателния вектор $\mathbf{P}(t)$ се уточняват $\mathbf{P}^*(t)$, $\mathbf{X}^*(t)$ и $\mathbf{U}^*(t)$ водещи до абсолютен минимум на H .

За разглежданата задача (оптимално бързодействие), съгласно т.3

$$\frac{\partial H(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{P})}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} = 0. \quad (4.22)$$

Необходимото условие за минимум на Хамилтониана води до практически безполезен резултат, тъй като не дава информация за търсеното управление. Минимумът на Хамилтониана (4.21) се представя във вида

$$H(\mathbf{P}(t), \mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t)) = 1 + \mathbf{P}^T(t) \mathbf{A} \mathbf{X}(t) + \mathbf{P}^T(t) \mathbf{B} \mathbf{U}(t) \rightarrow \min_{\mathbf{U}}. \quad (4.23)$$

Както бе показано в (4.16) Хамилтонианът в принципа на минимума не може да бъде отрицателно число и най-малката стойност, която може да приеме е нула. За минимизирането на (4.23) последният член трябва да е отрицателен с максималната възможна абсолютна стойност:

1. Последният член е отрицателен, когато $\mathbf{U}(t)$ е с обратен знак на $\mathbf{B}^T \mathbf{P}(t)$;
2. Максимално допустимата абсолютна стойност на $\mathbf{U}(t)$, съгласно ограничението (4.17) е $|u_j| = 1, (j = 1, 2, \dots, r)$.

Избира се релейно управление

$$\mathbf{U}(t) = -\text{sign}(\mathbf{B}^T \mathbf{P}(t)). \quad (4.24)$$

Особености на решението:

1. Решението (4.24) на задачата за оптимално управление не е завършено, тъй като не се знае началната стойност \mathbf{P}_0 на

спомагателния вектор $\mathbf{P}(t)$ и следователно самият той не може да се получи от решението на уравнението (4.20a)

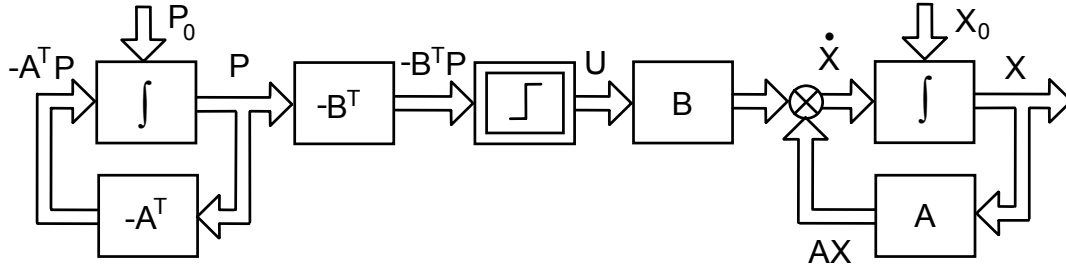
$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0 e^{-\mathbf{A}^T t}. \quad (4.25)$$

\mathbf{P}_0^* се получава чрез итеративна процедура, като за нулево приближение \mathbf{P}_0^0 се взима някаква произволна стойност, за която се изчисляват съответните $\mathbf{U}^0(t)$ и $\mathbf{X}^0(t)$. Малко вероятно е $\mathbf{X}(t)$ да попадне в началото на координатната система. (Предполага се, че целта на управлението е най-бързият преход от произволна точка във фазовото пространство в началото на координатната система.) Като мярка за близост на получената траектория до търсената оптимална се приема разстоянието r^0 от началото на координатната система до получената траектория. Следващите приближения на \mathbf{P}_0^i се избират така, че разстоянието r^i да намалява от итерация към итерация. Очевидно, на търсеното \mathbf{P}_0^* съответствува $r = 0$.

2. Управлението $\mathbf{U}^*(t)$ се намира като функция на времето, а не на фазовите координати. Следователно системата е отворена (Фиг.4.1), а това е нежелателно. Получените резултати могат да се използват за решаване на задачата до затворена форма.

3. Оптималното по бързодействие управление е отсечково-постоянна функция, която приема гранична стойност и съответно има определен брой интервали на постоянство. Броят на превключванията на релето (4.24) зависи от нулите на $\mathbf{P}(t)$. Броят на интервалите на постоянство е равен на реда на системата, ако тя е линейна и неколебателна. Този закон е формулиран от А. А. Фелдбаум [11] в теоремата за n -те интервала.

Теорема за n -те интервала: За линейна система от n -ти ред, на която всички корени на характеристичното уравнение са реални и на управлението са наложени ограничения от вида неравенство $|u_j| \leq 1$, оптималното управление $\mathbf{U}^*(t)$, водещо до екстремума на линеен функционал е отсечково-постоянна функция, която приема гранични стойности ± 1 и има не повече от n интервала на постоянство, т.е. $n - 1$ превключвания.



Фиг.4.1. Моделираща схема на отворена система, оптимална по бързодействие

2. Пример

Да се синтезира оптимално по бързодействие програмно управление чрез принципа на минимума за обект, представен в пространството на състоянията със системата

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= ku,\end{aligned}\tag{4.26}$$

където $k=1$. Да се симулират процесите в оптималната по бързодействие система за начално и крайно състояние, съответно $\mathbf{X}(0)=[2; 1]^T$ и $\mathbf{X}(T)=[0; 0]^T$.

(Векторен вариант): В съответствие с (4.18) матриците \mathbf{A} и \mathbf{B} за системата (4.26) са

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}.$$

Хамилтонианът и каноничната система са

$$H=1+\mathbf{P}^T \dot{\mathbf{X}}=1+\mathbf{X}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P}+\mathbf{U}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P},$$

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{P}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}} = -\mathbf{A}^T \mathbf{P} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -p_1 \end{bmatrix}, \\ \frac{d\mathbf{X}}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} x_2 \\ ku \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Управляващото въздействие в съответствие с (4.24) е

$$u = -\text{sign}(\mathbf{B}^T \mathbf{P}) = -\text{sign} \begin{bmatrix} 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = -\text{sign}(k p_2).$$

(*Скаларен вариант*): Хамилтонианът и каноничната система се записват по компоненти:

$$H = 1 + p_1 \dot{x}_1 + p_2 \dot{x}_2 = 1 + p_1 x_2 + p_2 k u,$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1, \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = k u. \end{array} \right|$$

В съответствие с (4.24) управлението е

$$u = -\text{sign}(b_1 p_1 + b_2 p_2) = -\text{sign} \begin{bmatrix} 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = -\text{sign}(k p_2). \quad (4.27)$$

След като се положи $p_1 = x_3$ и $p_2 = x_4$ каноничната система се записва във форма удобна за числено решение:

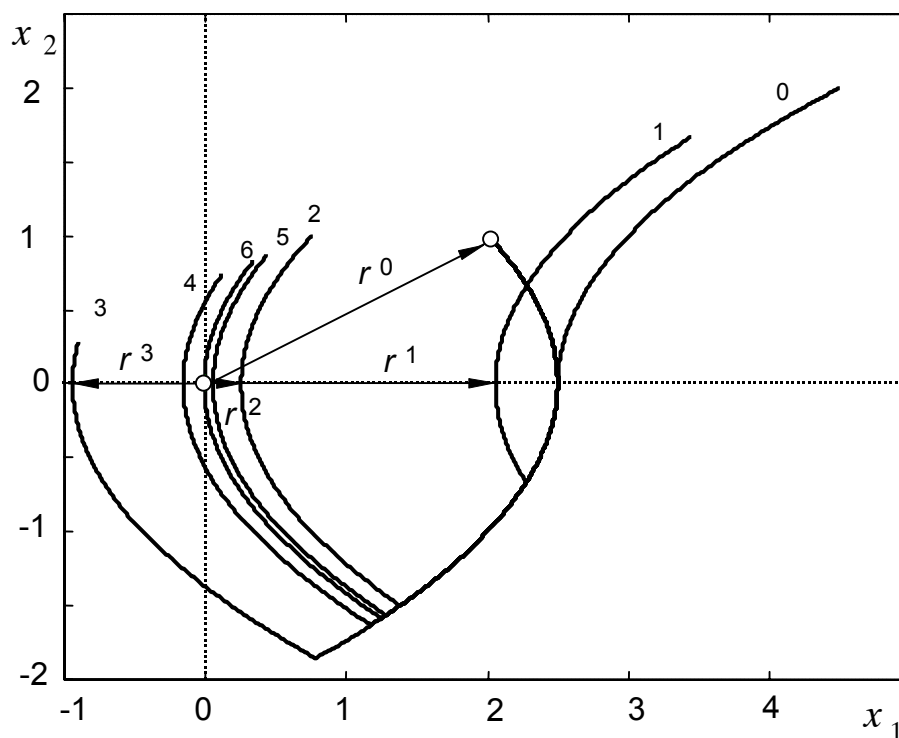
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k \text{sign}(k x_4) \\ \dot{x}_3 &= 0 \\ \dot{x}_4 &= -x_3. \end{aligned} \quad (4.28)$$

За тази цел се използва програма в средата на MATLAB (Приложение 2). Тя се състои от главна програма PONTRYAG.M и подпрограма-функция I2CANON.M, съдържаща уравненията на каноничната система (4.28). Главната програма се стартира итеративно с различни стойности на вектора на началните условия $\mathbf{X}(0)$. Компонентите $x_1(0) = 2$ и $x_2(0) = 1$ са известни от условието на задачата, а $x_3(0) = p_1(0)$ и $x_4(0) = p_2(0)$ могат да се определят итеративно по метода на "пробата и грешката", така че траекторията на системата да мине през координатното начало. За тази цел $x_4(0)$ се

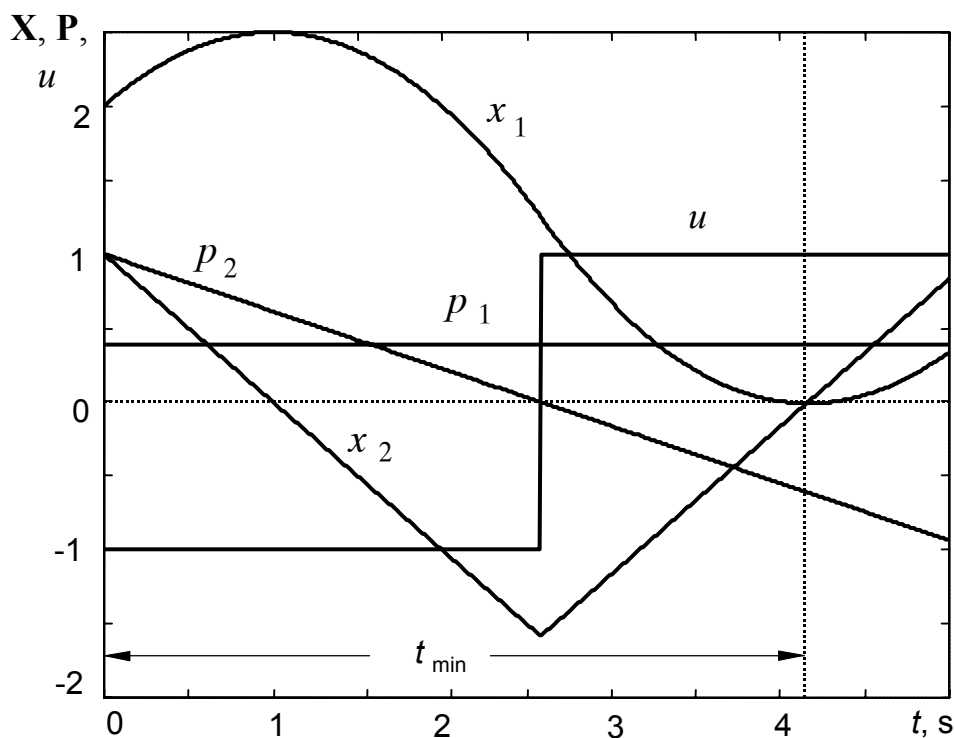
фиксира на $x_4(0)=1$, а $x_3(0)$ се променя итеративно, започвайки от $x_3(0)=1$. Координатното начало се достига след 7 итерации с точност $r^6=0.0097$. Минималното време за достигане на координатното начало е $t_{\min}=4.17$ s. Началните стойности на $\mathbf{P}(t)$ са определени като $\mathbf{P}(0)=[0.387; 1]^T$. Резултатите са показани в табл.4.1 и на Фиг.4.2. Времеви процеси в оптималната по бързодействие система са илюстрирани на Фиг.4.3.

Таблица 4.1

Итерация № i	0	1	2	3	4	5	6
$p_3(0)$	1	0.6	0.4	0.35	0.38	0.39	0.387
r^i	2.2361	2.0567	0.2525	0.9441	0.1596	0.0534	0.0097
$t_{p,i}$, s	0	2.33	4.00	4.71	4.26	4.13	4.17



Фиг.4.2. Фазови траектории при итеративното определяне на $\mathbf{P}(0)$.



Фиг.4.3. Симулация на времевите процеси в оптималната по бързодействие система.

3. Задачи за изпълнение

При зададен от преподавателя обект от втори ред (линеен и неколебателен) да се намери оптималният по бързодействие управляващ закон, като се използва принципът на минимума. Да се симулира в средата на MATLAB оптималната по бързодействие отворена система и се построят процесите във времевата област и фазовата равнина.

4. Анализ на резултатите

Дискутират се трудностите при определянето на началното условие $P(0)$ и възможностите за прилагане на търсещи алгоритми (сканиране, случайно търсене и др.) за намиране на минимума на r^i . Анализират се недостатъците на отворената форма и необходимостта за стабилизиране на координатното начало с друг регулатор след като оптималният по бързодействие е привел системата дотам.

Лабораторно упражнение № 5

Синтез на оптимална по бързодействие затворена система

Целта на лабораторното упражнение е да се синтезира оптимална по бързодействие затворена система за линеен неколебателен обект от втори ред, чрез съчетаване на принципа на минимума на Понтрягин с метода на фазовата равнина.

1. Теоретични сведения

Постановка на задачата. Разглежда се синтез на оптимално по бързодействие управление на система с един вход

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{b}u(t). \quad (5.1)$$

Търси се такова управляващо въздействие $u(\mathbf{X}(t))$, отговарящо на условието $|u| \leq 1$, което да приведе системата (5.1) от начално състояние $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ в крайно състояние $\mathbf{X}(T) = \mathbf{X}_T$ за минимално време, т.е. минимизирайки критерия за оптималност

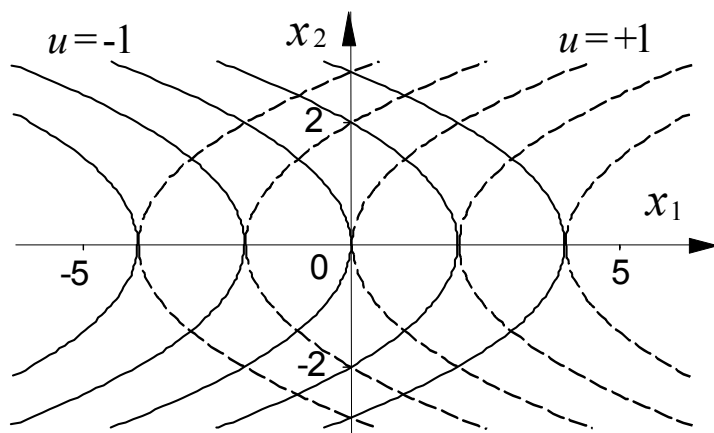
$$I = \int_0^T 1 dt = T \rightarrow \min. \quad (5.2)$$

Същност на синтеза. Един от начините за получаване на управлението като функция на фазовите координати, т.е. синтез на оптимална по бързодействие затворена система е съчетаване на принципа на максимума с метода на фазовото пространство. Тъй като геометричното онагледяване на този метод е възможно само за системи до III ред включително, ще бъде разгледана система от II ред. Чрез принципа на максимума (минимума) бе установено, че управлението трябва да има релеен двупозиционен характер. Ако $u = \pm 1$ се замести в (5.1) се получават две отделни системи диференциални уравнения

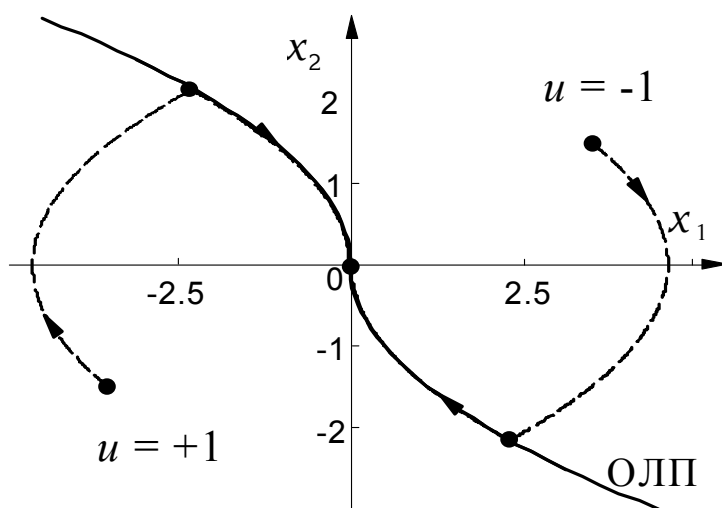
$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{b}, \quad (5.3)$$

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) - \mathbf{b}. \quad (5.4)$$

Фазовите портрети на (5.3) и (5.4) са две семейства траектории дадени на Фиг.5.1, съответно с прекъсната и непрекъсната линии (графиката съответствува на обект - две интегриращи звена).



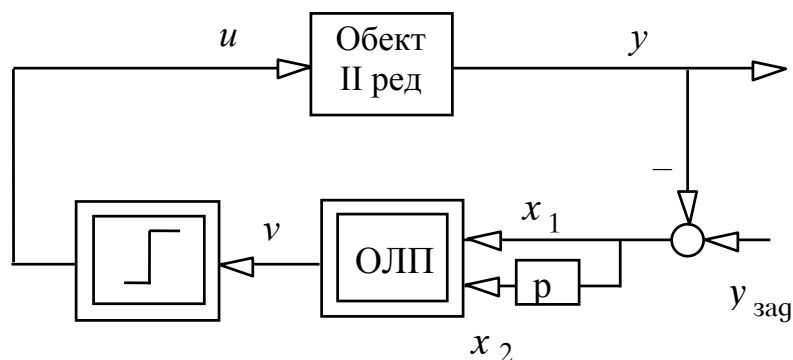
Фиг.5.1. Фазови портрети при $u = \pm 1$.



Фиг.5.2. ОЛП

Тъй като за фазови координати на системата най-често се разглеждат грешката и нейните производни, то най-често желаната крайна точка \mathbf{X}_T е началото на координатната система, тъй като в установен режим грешката и производните и са нули. Движейки се от произволна точка във фазовата равнина, за да достигне координатното начало, системата задължително трябва да попадне, т.е. да превключи върху нулевите фазови траектории на двете семейства във II и IV квадрант. Двете части (във II и IV квадрант) от нулевите фазови траектории на двете семейства се наричат *линия на превключване* или *оптимална линия на превключване* (ОЛП). ОЛП разделя фазовата

равнина на две полуравнини - в горната управлението е $u = -1$, а в долната - $u = +1$ (Фиг.5.2). Нека в един блок бъде реализирана ОЛП (в аналогов или цифров вид). На входа на този блок постъпват текущите фазови координати x_1 и x_2 на системата и се сравняват с ОЛП: ако те са над нея се подава управление $u = -1$, в противен случай $u = +1$. На Фиг.5.3 е показана структурната схема на затворената оптимална по бързодействие система.



Фиг.5.3. Структурната схема на затворената оптимална по бързодействие система

Особености на решението.

1. Оптималното по бързодействие управление е отсечково-постоянно, приемащо стойности $u = \pm 1$;
2. Управлението сменя знака си в зависимост от знака на превключващата функция $v(\mathbf{X}(t))$, т.е. управлението $u(\mathbf{X}(t))$ е функция на фазовите координати и системата е затворена;
3. Техническата реализация на оптималната превключваща функция може да бъде доста сложна. Затова е целесъобразно да се намери съвпадаща по знак нейна апроксимация с по-проста техническа реализация.
4. Тъй като елементите реализиращи оптималната система за управление не са идеални, процесите в системата се отклоняват несъществено от оптималните. В координатното начало се получават автоколебания с малка амплитуда и висока честота. За премахване на този ефект може да се въведе допълнителен (линеен) регулатор, който се включва след приключване на оптималния процес и работи в околността на координатното начало.

2. Пример [13]

Разглежда се обект с предавателна функция

$$W(p) = \frac{k}{p^2}, \quad (5.5)$$

където $k = 1$. Диференциалното уравнение е

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = ku(t). \quad (5.6)$$

След полагането $x_1 = y$ и $x_2 = \dot{y}$ уравненията на състоянието приемат вида

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad (5.7)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = ku. \quad (5.8)$$

След разделяне (5.8) на (5.7) се изключва времето t .

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{ku}{x_2}. \quad (5.9)$$

Фазовият портрет на системата се получава като решение на (5.9). Тъй като $u = \pm 1 = \text{const}$, след разделяне на променливите и интегриране на (5.9) се получава

$$x_1 = \frac{1}{ku} \frac{x_2^2}{2} + C. \quad (5.10)$$

Интеграционната константа C се определя от началните условия $x_1(0) = x_{10}$ и $x_2(0) = x_{20}$, т.е.

$$C = x_{10} - \frac{1}{ku} \frac{x_{20}^2}{2}. \quad (5.11)$$

От (5.11) и (5.10) се получават уравненията на фазовите траектории

$$x_1 = \frac{1}{ku} \frac{x_2^2}{2} + x_{10} - \frac{1}{ku} \frac{x_{20}^2}{2}. \quad (5.12)$$

След заместване на $k=1$ и $u = \pm 1$ се получават двете фамилии траектории (Фиг.5.1):

1) при $u = +1$

$$x_1 = \frac{x_2^2}{2} + x_{10} - \frac{x_{20}^2}{2}, \quad (5.13)$$

2) при $u = -1$

$$x_1 = -\frac{x_2^2}{2} + x_{10} + \frac{x_{20}^2}{2}. \quad (5.14)$$

Частта на нулевата фазова траектория на първото семейство ($u = +1$), която води към координатното начало е разположена в IV квадрант. Аналогичната крива за второто семейство ($u = -1$) е разположена във II квадрант. Двете криви се обединяват чрез следния запис

$$x_1 = \begin{cases} \frac{x_2^2}{2}, x_2 < 0 \\ -\frac{x_2^2}{2}, x_2 > 0 \end{cases}, \quad (5.15)$$

който може да се представи като

$$x_1 = -\frac{x_2^2}{2} \operatorname{sign} x_2. \quad (5.16)$$

В съответствие с (5.16) се полага

$$v = -(x_1 + \frac{x_2^2}{2} \operatorname{sign} x_2) = 0. \quad (5.17)$$

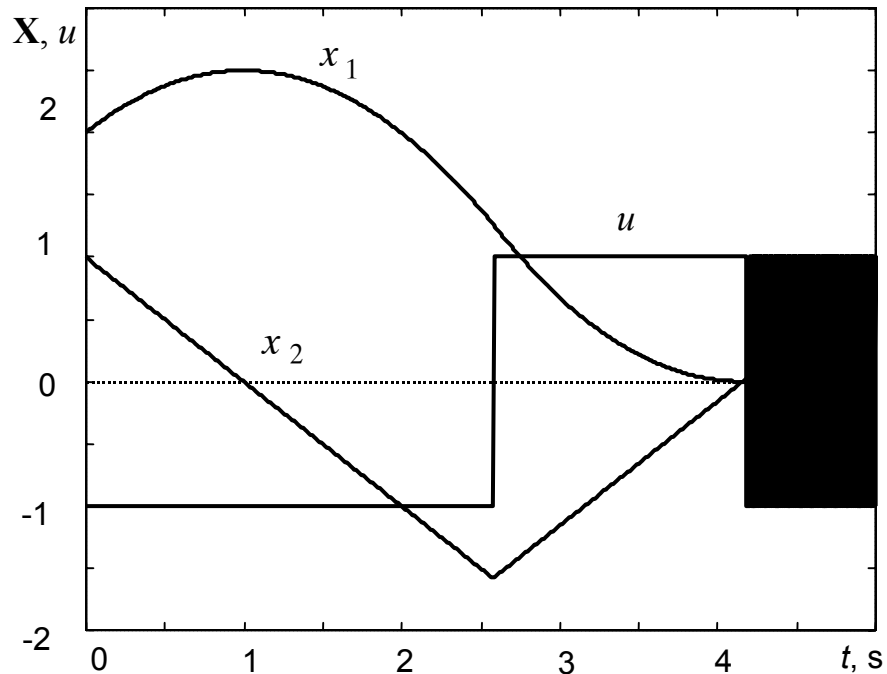
Когато изобразяващата точка се намира върху ОЛП $v = 0$, а над и под нея съответно - $v < 0$ и $v > 0$. Ако изобразяващата точка се намира над ОЛП, за да стигне до нея системата трябва да се движи по траекториите на второто семейство, т.е. $u = -1$, и обратното - под ОЛП $u = +1$. Следователно оптималният закон на управление се избира във вида

$$u = \operatorname{sign} v = -\operatorname{sign}(x_1 + \frac{x_2^2}{2} \operatorname{sign} x_2). \quad (5.18)$$

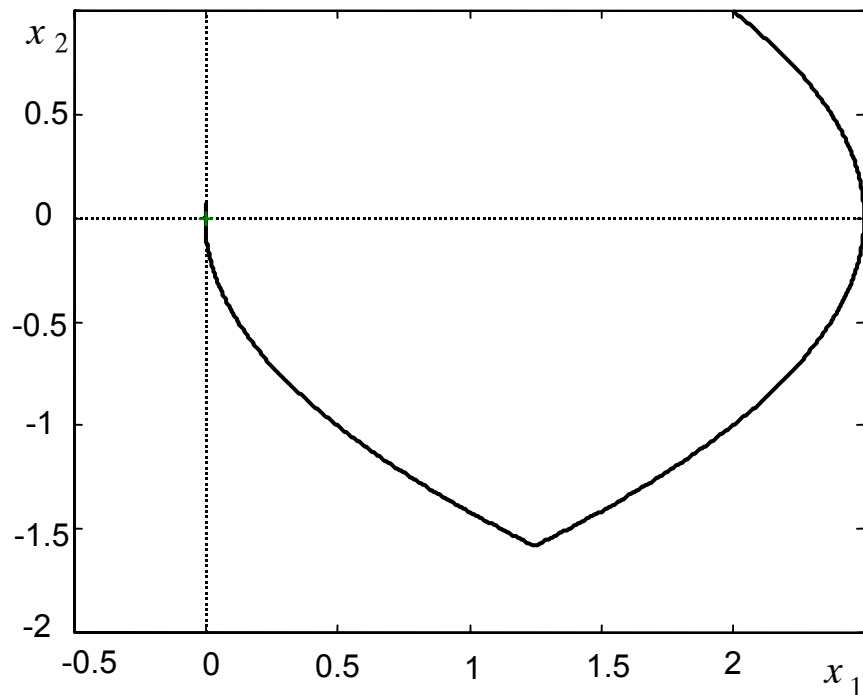
Съгласно теоремата на Фелдбаум [11] за разглежданата система, която е линейна и неколебателна, управлението има най-много два интервала на постоянство, т.е. само едно превключване на релето.

С помощта на програмите I2PLANE.M и I2SIGN.M (Приложение 2) е симулирана в средата на MATLAB оптималната по

бързодействие затворена система. I2SIGN.M е подпрограма-функция, съдържаща описанието на затворената система – (5.7, 5.8, 5.18), а I2PLANE.M е главната програма извършваща числено решаване на уравненията на системата по метода на Рунге-Кута от IV ред (RK4.M).



Фиг.5.4. Симулация на оптималната по бързодействие затворена система във времевата област



Фиг.5.5. Симулация на оптималната по бързодействие затворена система във фазовата равнина

Критерият за спиране на симулацията е достигането до Евклидовата норма (Приложение 5)

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \delta, \quad (5.19)$$

където δ е предварително зададено малко положително число. Получените резултати във времевата област и във фазовата равнина са показани на Фиг.5.4 и Фиг.5.5. Минималното време за движение между зададените начално и крайно състояния е $t_{\min} = 4.16 \text{ s}$.

3. Задачи за изпълнение

При зададен от преподавателя обект от втори ред (линеен и неколебателен) да се намери оптималният по бързодействие управляващ закон, като функция на фазовите координати. Да се симулира в средата на MATLAB оптималната по бързодействие затворена система и се построят процесите във времевата област и фазовата равнина.

4. Анализ на резултатите

Анализиран се предимствата на оптималния с обратна връзка управляващ закон пред този получен по принципа на минимума в лабораторно упражнение №4. Сравнява се минималното време за движение от началното до крайното състояние в двете системи – отворена (по принципа на минимума) и затворена (използваща и апарата на фазовата равнина).

Оптимално по бързодействие управление на линейни колебателни обекти от втори ред

Целта на лабораторното упражнение е запознаване с особеностите на синтеза на оптималното по бързодействие управление на линейни колебателни обекти и по специално на консервативен обект.

1. Теоретични сведения

Оптималната линия на превключване (ОЛП) на колебателните обекти е сложна крива, само първата дъга на която (минаваща през координатното начало) е възможна част от фазова траектория. За линейните колебателни и за нелинейните обекти теоремата за n -те интервала не е изпълнена. Анализът на фазовия портрет на оптималната по бързодействие система "колебателен обект – управляващо устройство" показва, че броят на интервалите в оптималния преходен процес не е равен на реда на обекта, а зависи от началните условия. Този факт произтича непосредствено от принципа на максимума на Понтрягин. Особеностите на синтеза на оптималното по бързодействие управление на линейни колебателни обекти са демонстрирани в следващия пример.

2. Пример [1,10,18]

Разглежда се оптимално по бързодействие управление на консервативен обект

$$\ddot{y} + y = u, \quad |u| \leq 1. \quad (6.1)$$

Обектът трябва да се приведе от произволно начално състояние $X(0) = X_0$ в крайно състояние $X(T) = X_T = (0;0)^T$ - началото на координатната система за минимално време T . Компонентите на вектора на състоянието са избрани $x_1 = y$ и $x_2 = \dot{y}$, при което (6.1) приема вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u, \end{aligned} \quad (6.2)$$

Хамилтонианът в принципа на максимума

$$H = \sum_{i=1}^2 \psi_i f_i = \psi_1 x_2 - \psi_2 x_1 + \psi_2 u \quad (6.3)$$

е записан за $\psi_0 = 0$ ($\psi_0 \leq 0$, обикновено $\psi_0 = -1$). Въз основа принципа на максимума управлението се получава във вида

$$u(t) = -\text{sign} \psi_2(t). \quad (6.4)$$

Уравненията за спрегнатия вектор $\Psi(t)$ са

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = \psi_2 \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1. \end{aligned} \quad (6.5)$$

След изключване на ψ_1 от уравнение (6.5) за ψ_2 се получава

$$\frac{d^2 \psi_2}{dt^2} + \psi_2 = 0. \quad (6.6)$$

Корените на характеристичното уравнение на (6.6) са чисто имагинерни $\lambda_{\psi} = \pm i$ и следователно решението на (6.6) е от вида

$$\psi_2(t) = C \sin(t + \varphi), \quad C > 0, \quad 0 \leq \varphi < \pi, \quad (6.7)$$

където C и φ са интеграционни константи, които се определят от началните условия, т.е. удовлетворяващи системата

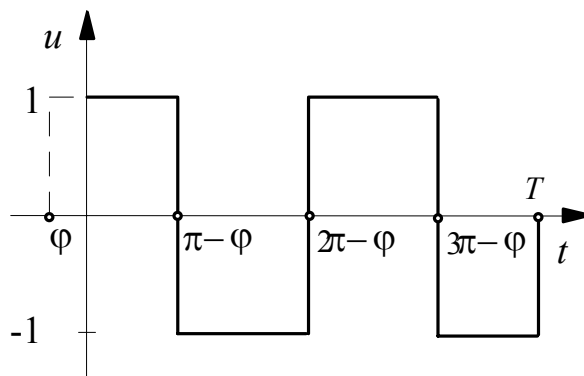
$$\begin{aligned} C \sin \varphi &= \psi_2(0) \\ -C \cos \varphi &= \psi_1(0). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Замествайки (6.7) в (6.4) се получава оптималният управляващ закон

$$u(t) = -\text{sign}(\sin(t + \varphi)), \quad (6.9)$$

където C е отстранено, тъй като не влияе върху знака на (6.7). Следователно $u(t)$ е отсечково-постоянна функция, приемаща

редуващи се стойности $u(t) = \pm 1$ в продължение на интервали не по-дълги от π (Фиг.6.1). В зависимост от началните условия броят на интервалите на постоянство на знака ще бъде различен (теоремата за n -те интервала не е в сила, защото корените на характеристичното уравнение на обекта (6.1) са имагинерни $\lambda_y = \pm i$).



Фиг. 6.1. Оптимално по бързодействие програмно управление за консервативен обект

За затваряне на системата по координатите на състоянието се разглежда фазовият портрет (ФП) на системата. За построяването му времето t се изключва от уравненията на системата (6.2) чрез разделяне второто уравнение на първото

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_1 + u}{x_2}, \quad u = \pm 1. \quad (6.10)$$

Разделяйки променливите и интегрирайки (6.10) се получават фазовите траектории

$$(x_1 - u)^2 + x_2^2 = C, \quad (6.11)$$

където интеграционната константа C се определя от началните условия $x_1(0)$ и $x_2(0)$. От (6.11) следва, че при $u = +1$ фазовите траектории са семейство окръжности с радиус \sqrt{C} и център в точката $(+1; 0)$, а при $u = -1$ - с център $(-1; 0)$ (Фиг.6.2 и Фиг.6.3). На Фиг.6.4 са показани фазовите траектории (полуокръжности с радиус единица), които водят към координатното начало (траектория 1 - при $u = +1$, траектория 2 - при $u = -1$) по които трябва да завършва оптималният процес. Траекториите 1 и 2 са полуокръжности, тъй като управлението $u(t)$ има постоянен знак в интервала $T_0 \leq \pi$, а за време π

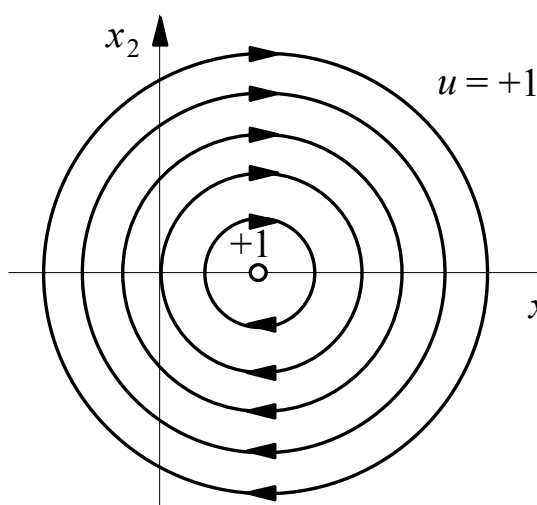
изобразяващата точка по коя да е траектория от семейството (6.11) изминава полуокръжност (Фиг.6.2). Решението на системата (6.2) при $u = \pm 1$ е

$$\begin{aligned} x_1(t) &= u + B \sin(t + \beta) \\ x_2(t) &= -B \cos(t + \beta), \end{aligned} \quad (6.12)$$

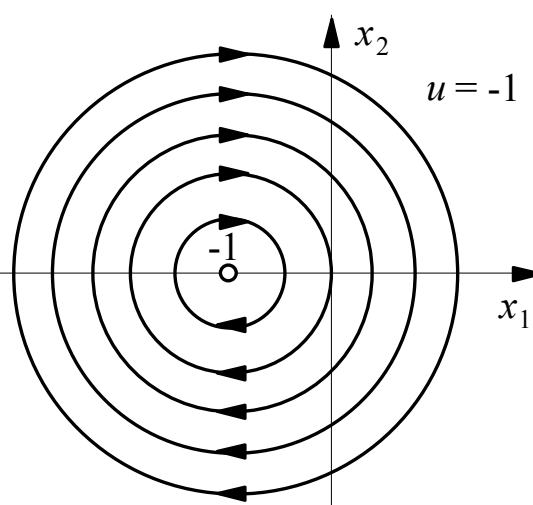
където B и β са интеграционни константи, определящи се от началните условия $x_1(0)$ и $x_2(0)$. Изхождайки от (6.12) след време π движението на изобразяващата точка ще се описва с

$$\begin{aligned} x_1(t + \pi) &= u + B \sin(t + \pi + \beta) = u - B \sin(t + \beta), \\ x_2(t + \pi) &= -B \cos(t + \pi + \beta) = B \cos(t + \beta). \end{aligned} \quad (6.13)$$

От (6.12) и (6.13) се вижда, че след време π , след като се извърви полуокръжност се стига до точка симетрична на началната по отношение на центъра $(u; 0)$.



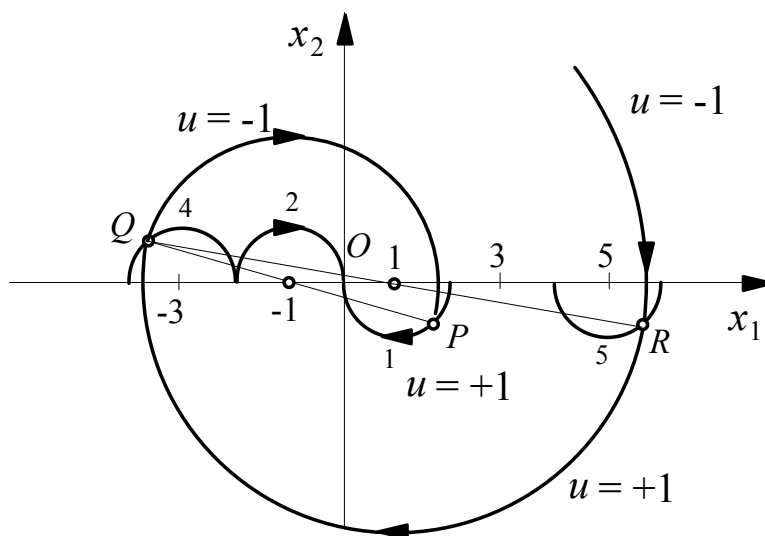
Фиг.6.2. ФП при $u = +1$



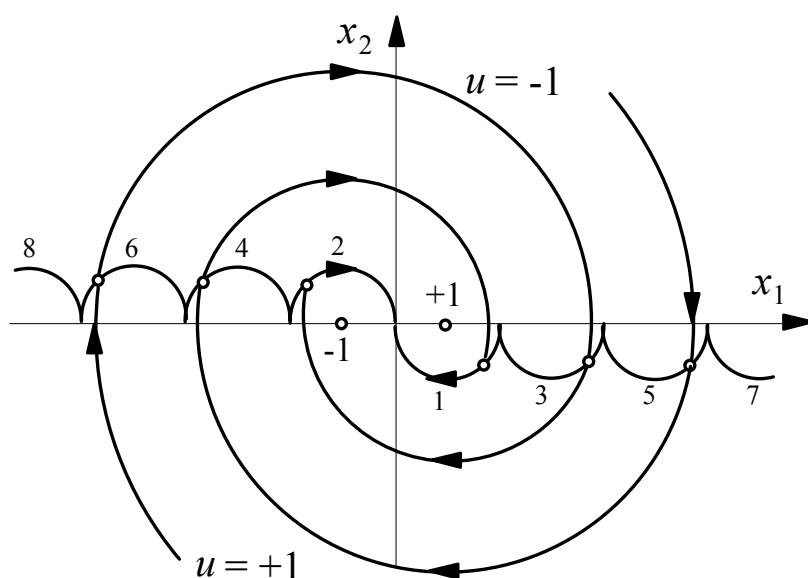
Фиг.6.3. ФП при $u = -1$

Нека последният участък ($u = +1$) от оптималната фазова траектория (Фиг.6.4) започва в т. P и завършва в координатното начало. Точка P е последна за предходния интервал ($u = -1$) започващ от т. Q , която е симетрична на т. P по отношение на центъра $(-1; 0)$. Времето за движение по полуокръжността QP е π . Ако т. P заеме всички възможни положения по полуокръжността 1, то ще се получи полуокръжност 4 с радиус 1 и център в точката $(-3; 0)$. По аналогичен начин се намира кривата 5 от която започват фазовите траектории при

$u = +1$, завършващи след време π на кривата 4. Кривата 5 е полуокръжност с център $(5;0)$ и радиус 1, симетрична относно точката $(+1;0)$ на полуокръжността 4. Построенията са аналогични, когато оптималната траектория завършва върху полуокръжността 2 ($u = -1$). В резултат се получава фазовият портрет на оптималната система на Фиг.6.5, където ОЛП е съставена от полуокръжностите ...8,6,4,2,1,3,5,7.... Сред тях само 1 и 2 са фазови траектории на системата.



Фиг. 6.4. Построяване на ОЛП за обект консервативно звено



Фиг. 6.5. ФП на оптималната по бързодействие система за обект, описван с (6.2)

Разгледан е частен случай на консервативно звено с параметри $k=1$ и $T=1\text{s}$. При други стойности на параметрите на звеното, фазовите траектории са концентрични елипси, а не окръжности. Ако звеното е колебателно фазовите му траектории са спирали и кривите 1 и 2 от ОЛП ще бъдат части от спирали.

3. Задачи за изпълнение

Да се разучи разгледаният по-горе пример и да се разшири решението на задачата до построяването на времевите процеси (при зададено начално условие) в отворената и в затворената оптимални по бързодействие системи. В първия случай да се използва управляващият закон (6.9), а във втория – да се предложи управление, като функция на фазовите координати, съчетаващо аналитични и алгоритмични елементи използващи синтаксиса на MATLAB. В симулациите да се използват няколко начални условия – в близост до координатното начало и в периферията на допустимата област на фазовите координати.

4. Анализ на резултатите

Анализира се броят на превключванията на релето и зависимостта им от началните условия. Потвърждава се, че теоремата на Фелдбаум за n -те интервала не се прилага при колебателни обекти. Дискутират се трудностите при построяването на оптималната линия на превключване и необходимостта от нейното апроксимиране.

Оптимално по бързодействие управление на нелинейни колебателни обекти от втори ред

Целта на лабораторното упражнение е запознаване с особеностите на синтеза на оптимално по бързодействие управление за нелинейни колебателни обекти от втори ред и по-конкретно за обект, описван с уравнението на Дюфинг.

1. Теоретични сведения

Оптималната по бързодействие система е релейна и задачата на управляващото устройство (УУ) се свежда до смяна на знака на управляващото въздействие в съответствие с оптималната линия на превключване (ОЛП), построена за конкретния обект. Докато ОЛП на почти всички линейни обекти от втори ред може да се получи аналитично, то за нелинейните обекти аналитично решение, най-общо, не е възможно, поради липсата на универсална методика за решаване на нелинейни диференциални уравнения.

Задачата за синтеза на оптимално по бързодействие управление допълнително се усложнява поради това, че броят на превключванията на управляващото въздействие в този случай е повече от $\frac{\dot{x}_1 = x_2}{\dot{x}_2 = -k \operatorname{sign}(x_2)} \quad (n \text{ е ред на системата})$ и защото линията на превключване представлява сложна нелинейност, в която само първата дъга е възможна част от фазова траектория.

Оптимална линия на превключване на нелинеен колебателен обект от втори ред. Обектът се представя в пространство на състоянията в канонична форма чрез системата уравнения

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= f(x_1(t), x_2(t)) + u(t), \\ |u(t)| &\leq U_{\max},\end{aligned}\tag{7.1}$$

където $x_1(t)$ и $x_2(t)$ са съответно грешката и нейната първа производна; $u(t)$ - управляващо въздействие; $f(x_1(t), x_2(t))$ - нелинейна диференцируема функция. Въз основа на принципа на максимума за (7.1) се образува функцията на Хамилтон

$$H = \psi_1(t)x_2(t) + \psi_2(t)f(x_1, x_2) + \psi_2(t)u(t), \quad (7.2)$$

според която оптималното управление е

$$u(t) = U_{\max} \operatorname{sign} \psi_2(t). \quad (7.3)$$

Функциите $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ се определят от спрегнатата система уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\psi_2(t) \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \\ \dot{\psi}_2(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1(t) - \psi_2(t) \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Оптималната фазова траектория се състои от части, на които управлението сменя последователно знака си ($u(t) = +U_{\max}$ или $u(t) = -U_{\max}$), при което моментите на смяната на знака на управлението съгласно (7.3) съвпадат с моментите на смяната на знака на спрегнатата функция $\psi_2(t)$.

Процедурата за построяване на ОЛП е разгледана подробно в [6]. Накратко тя се състои в следното:

1) Системата (7.1) се решава в обратно време ($t < 0$) при нулеви начални условия ($x_{1H} = 0; x_{2H} = 0$) и управляващо въздействие $u(t) = U_{\max}$. По получените $x_1(t)$ и $x_2(t)$ се строи дъгата W_+^1 (фиг.7.1) на оптималната фазова траектория, лежаща в четвърти квадрант и представляваща част от ОЛП. При $t = -\tau_1$ тази траектория достига до абсцисната ос.

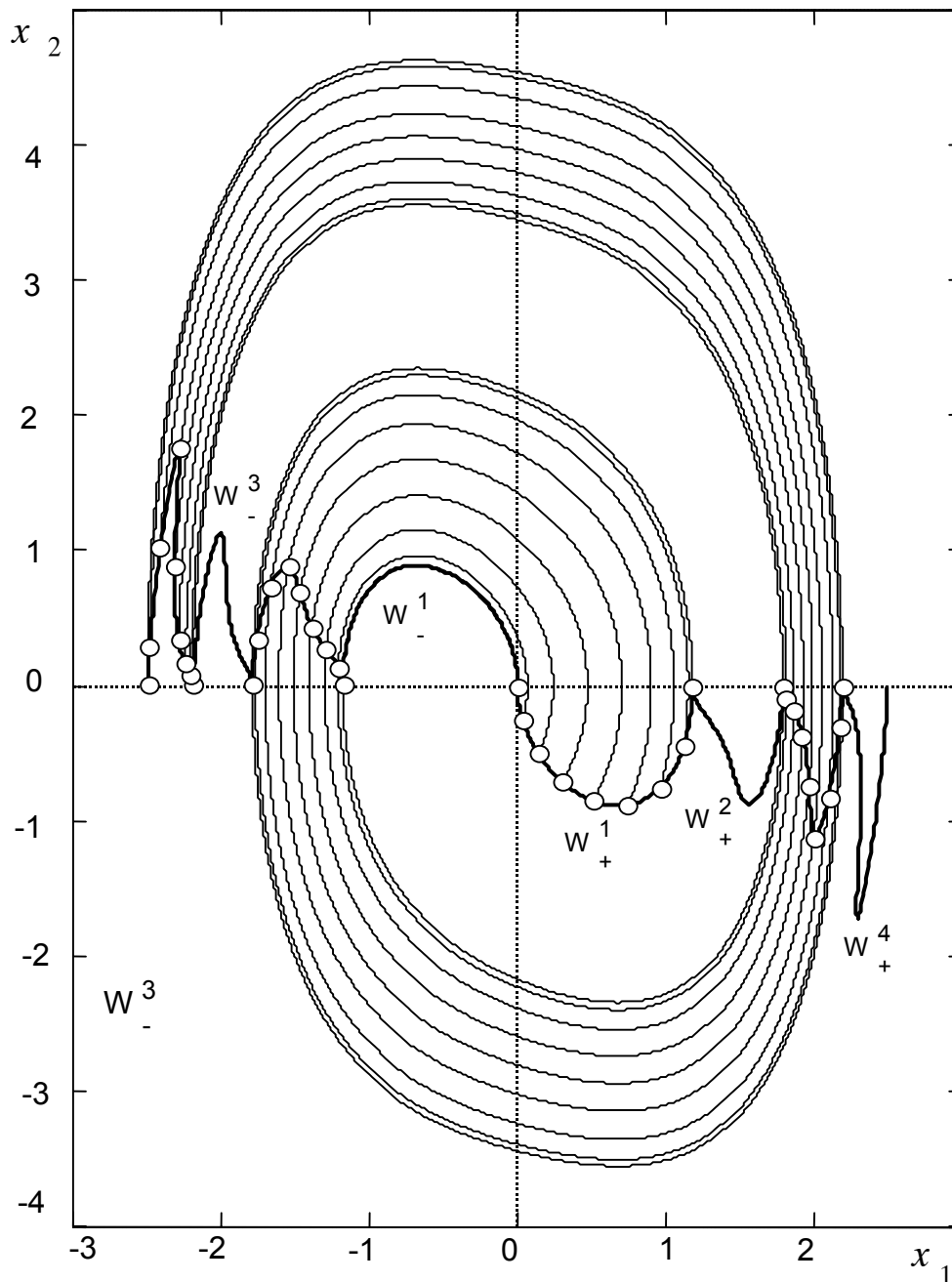
2) Аналогично се изчисляват координатите на дъгата W_-^1 ($x_{1H} = 0; x_{2H} = 0; t < 0; u(t) = -U_{\max}$), разположена във втори квадрант на фазовата равнина.

3) За начални условия, разположени на дъгата W_+^1 при $t < 0$, $u(t) = -U_{\max}$ и начални условия за спрегнатата система $\psi_{1H} = -1$ и $\psi_{2H} = 0$ се решават съвместно (7.1) и (7.4). От получените $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ се намира такъв момент $t = -\tau_2$, при който $\psi_2(\tau_2) = 0$. Той определя времето за движение по траекториите $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

Координатите $x_1(\tau_2)$ и $x_2(\tau_2)$ определят точки, разположени на втората дъга W_-^2 на линията на превключване.

4) Аналогично на построението от т.3, но за начални условия на дъгата W_-^1 ($\psi_{1H} = 1$; $\psi_{2H} = 0$; $t < 0$; $u(t) = U_{\max}$) се намират координатите на точки от дъгата W_+^2 , разположена в четвърти квадрант на фазовата равнина.

5) По същия начин се построяват и следващите дъги, ако има такива.



Фиг.7.1. Илюстриране на методиката за построяване на ОЛП на обект, описван с уравнението на Дюфинг

Изложената дотук методика се отнася за произволен нелинеен колебателен обект от втори ред, независимо че ОЛП на фиг.7.1 е построена за конкретен обект - системата уравнения (7.6).

2. Пример [6]

Разглежда се обект за управление, представен с уравнението на Дюфинг, което описва нелинейна консервативна система:

$$\ddot{y}(t) + y(t) + y^3(t) = u(t). \quad (7.5)$$

Съгласно (7.1) описанието в пространството на състоянията и дефиниционната област на входния сигнал за конкретния обект са

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_1^3 + u, \\ |u| &\leq 1, \end{aligned} \quad (7.6)$$

Функцията на Хамилтон е

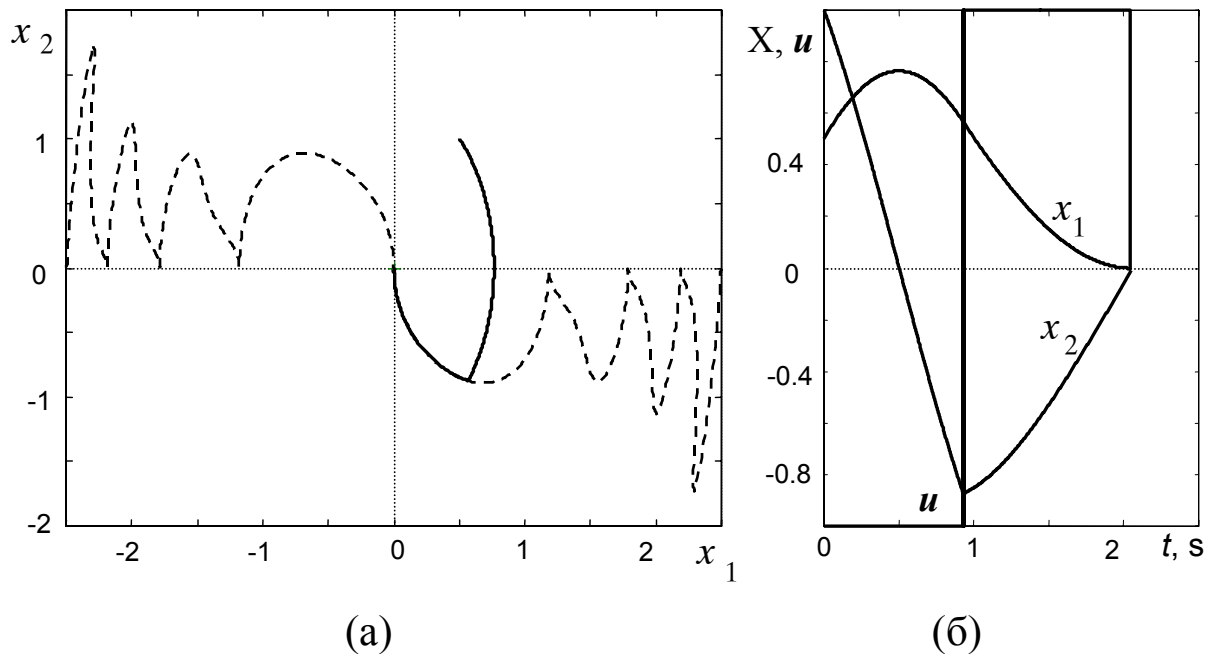
$$H = \psi_1 x_2 - \psi_2 x_1 - \psi_2 x_1^3 - \psi_2 u. \quad (7.7)$$

В съответствие с (7.4) уравненията на спрегнатата система са

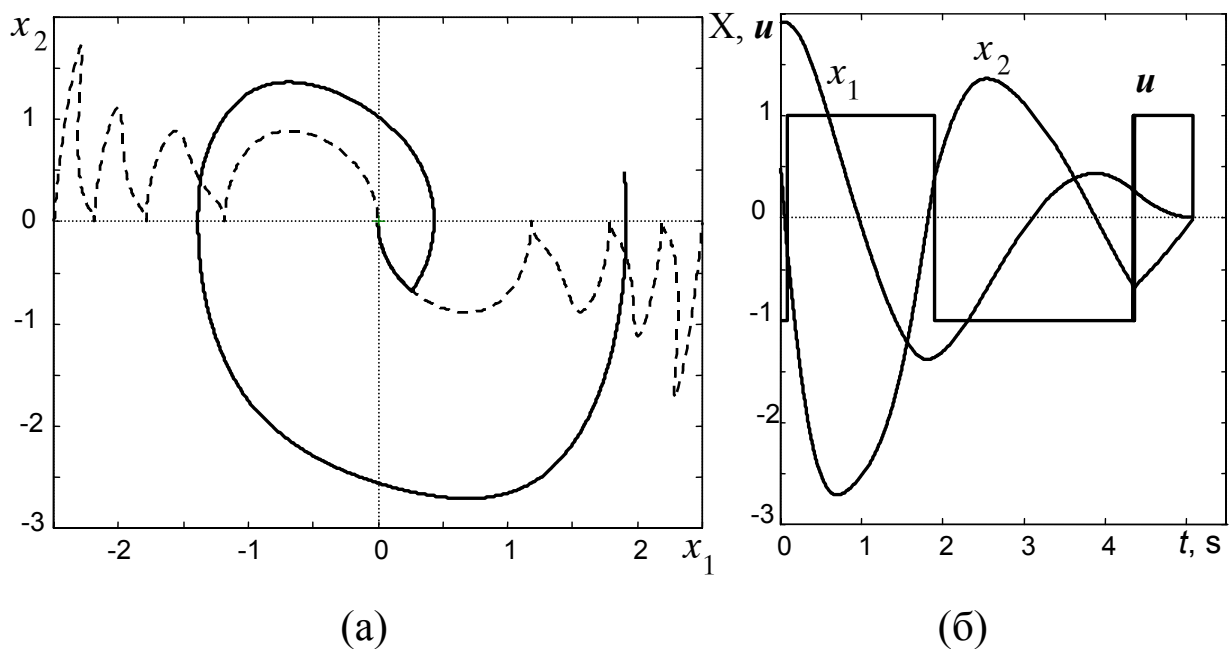
$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \psi_2 (1 + 3x_1^2) \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_1. \end{aligned} \quad (7.8)$$

ОЛП на обект, описван с уравнението на Дюфинг е построена на Фиг.7.1, в съответствие с процедурата, представена по-горе. В Приложение 3 са представени програмите за изчисляване на дъгите на ОЛП: DufW1r.m – първата дъга отлясно; DufW2l.m – втората дъга отляво; DufW3r.m – третата дъга вдясно. Подпрограмите DufBt.m и DufBtH.m съдържат в обратно време уравнението на Дюфинг (в пространството на състоянията), съответно само и заедно със спрегнатата система. За симулиране на затворената оптимална по бързодействие система се използва програмата DufClose.m и подпрограмата Duf.m, съдържаща уравнението на Дюфинг в право време (7.6), в същото приложение. За две начални условия са симулирани процесите в оптималната по бързодействие система и са

показани на Фиг.7.2 и Фиг.7.3. Оптималните времена за достигане на крайната цел в двата случая са съответно $t_{\min} = 2.051 \text{ s}$ и $t_{\min} = 5.096 \text{ s}$. Като критерий за спиране е избрана Евклидовата норма (5.19) при $\delta = 0.01$. Симулациите потвърждават, че броят на превключванията на релето (интервалите на постоянство) зависи от началното условие, а не от реда на системата.



Фиг.7.2. Оптимална по бързодействие система: преходни процеси във фазовата равнина (а) и във времевата област (б)



Фиг.7.3. Оптимална по бързодействие система: преходни процеси във фазовата равнина (а) и във времевата област (б)

3. Задачи за изпълнение

Да се построи оптималната линия на превключване за нелинеен колебателен обект от втори ред, описван с уравнението на Ван дер Пол. Да се симулират в MATLAB процесите в затворената система за различни начални условия и да се определи минималното време за достигане до целта (началото на координатната система). За целта да се адаптират програмите от Приложение 3.

4. Анализ на резултатите

Анализира се броят на превключванията на релето и зависимостта им от началните условия. Потвърждава се, че теоремата на Фелдбаум за n -те интервала не се прилага при колебателни обекти. Дискутират се трудностите при построяването на оптималната линия на превключване и необходимостта от нейното апроксимиране.

Приближено-оптимална по бързодействие система, използваща симетрична S-управляваща структура

Целта на лабораторното упражнение е да се синтезира приближено-оптимално по бързодействие управление за нелинеен колебателен обект, описван с уравнението на Дюфинг, като оптималната линия на превключване (ОЛП) се апроксимира чрез симетрична S-управляваща структура.

1. Теоретични сведения

Методи за синтез на приближено-оптимални системи за управление. Приближено-оптималните (квазиоптимални) закони за управление се отклоняват незначително от оптималните, в смисъла на избрания критерий, като за сметка на това са технически лесно реализируеми. Построяването на такива системи се обосновава със следните причини:

- Управляващите устройства се състоят от реални елементи, притежаващи ограничени възможности, налагащи ограничения върху избора на теоретичния закон за управление.
- Математичният модел на обекта, на базата на който се синтезира управлението, често е приближен, тъй като структурата и параметрите на обекта не винаги са напълно известни.
- При реализацията на оптималните системи е необходима пълна информация за координатите на системата, които най-често са грешката и нейните идеални производни до $(n-1)$ -ви ред. Получаването на такава информация в реалните системи е свързана с много трудности, като грешки в измерването на висшите производни, водещи до големи изкривявания, изключващи възможността за използването им в закона на управлението.

Начините за синтез на приближено-оптимални системи се делят на две групи. Към *първата група* се отнасят методите използващи предварително опростяване на обекта, т.е. *приближен модел на обекта*. За апроксимирания модел на обекта се намира оптималното управление. Към *втората група* се отнасят методите, в които *оптималният закон за управление за точния модел се апроксимира с*

оглед използване на по-прости технически средства за реализацията му.

Първата група методи е по лесна за реализиране, тъй като още от началото се работи с прост обект. Съществен недостатък е невъзможността да се оцени степента на отдалечаване от оптималния процес. Опростяването на обекта може да стане чрез:

- линеаризация или отстраняване на второстепенните нелинейности;
- понижаване реда на уравненията на обекта до втори или трети.

Предимството на втората група методи, апроксимиращи оптималния управляващ закон, е във възможността да се сравни полученият процес със строго оптималния и да се определи степента на отклонение от него. За удобството на синтеза и най-вече за простотата на техническата реализация, често се ограничава класът на управляващата функция $U(X)$. Например, за системите от втори ред се използват лесно реализуеми отсечково линейни апроксимации, изпълнени като *sat*- и последователни или паралелни *sign*-управляващи структури.

Режим на хлъзгане. В приближено-оптималните системи броят на превключванията на релето обикновено е по-голям, отколкото в съответните им оптимални системи (не се изпълнява теоремата на Фелдбаум). В повечето случаи това се дължи на възникването на т.н. *режим на хлъзгане*, който има съществено значение за доброто им функциониране. За илюстрацията му на Фиг.8.1 се разглежда апроксимация на ОЛП с една единствена права линия.

Нека т. A е обща за ОЛП B_1OB_2 и за нейната апроксимация $B'_1OB'_2$. Движението A_0AO е еднакво както в оптималната, така и в приближено-оптималната система. За всеки процес, за който превключването се осъществява в т. A' , т.е. преди ОЛП B_1OB_2 (A' е точка от вътрешната апроксимация, т.е. обхваща се от ходографа на ОЛП), при определени условия се получава режим на хлъзгане. Процесът протича без колебания, като изобразяващата точка се "хлъзга" по линията на превключване. Той се характеризира с теоретически безкрайно висока честота на превключване на релето. Когато превключването се осъществява в т. A'' , т.е. след ОЛП B_1OB_2 (A'' е точка от външна апроксимация и не се обхваща от ходографа на ОЛП) се получават колебателни процеси (с пререгулиране).

За съществуването на режим на хлъзгане е необходимо към всяка точка от неговия участък да подхождат две фазови траектории,

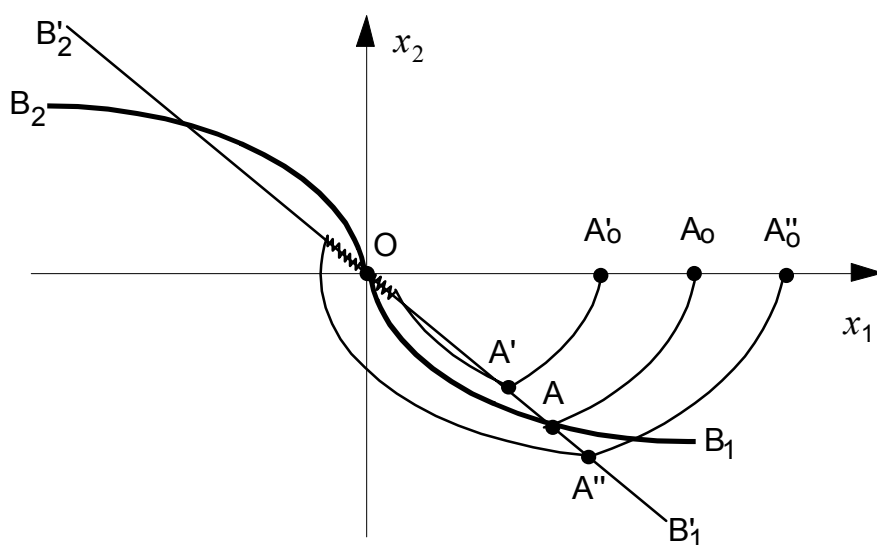
съответстващи на различни знаци на управляващото въздействие. Тъй като уравнението на апроксимиращата права е

$$x_2 + kx_1 = 0, \quad (\dot{x}_1 + kx_1 = 0), \quad (8.1)$$

където k е ъглов коефициент, а от въвеждането $x_2 = \dot{x}_1$ става ясно, че фазовата променлива $x_1(t)$ се изменя по експоненциален закон:

$$x_1(t) = Ce^{-kt}. \quad (8.2)$$

Следователно движението в този участък не зависи от параметрите на обекта за управление, а се определя само от наклона на превключващата права.



Фиг.8.1. Режим на хлъзгане

Режимите на хлъзгане се създават изкуствено с цел да гарантират определено качество на процеса на управлението при силно изменящи се параметри на обекта. Като цяло режимът на хлъзгане, макар че забавя процесите, е за предпочитане, тъй като не води до пререгулиране и е инвариантен на промяната на параметрите на обекта.

Синтез на ОЛП в обратно време. Разглежда се обект от II ред с един вход

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{b}u(t). \quad (8.3)$$

Тъй като оптималното по бързодействие управлението има релеен двупозиционен характер, след заместване на $u = \pm 1$ в (8.3) се получават две отделни системи диференциални уравнения

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{b} , \quad (8.4)$$

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) - \mathbf{b} . \quad (8.5)$$

За построяване на ОЛП е необходимо да се изчислят частите от нулевите фазови траектории на двете семейства, водещи към координатното начало. Това може да се постигне по обратен път, т.е. ако се тръгне от координатното начало $\mathbf{X}(T) = \mathbf{X}_T = (0;0)^T$ и се върви в обратно време

$$\tau = T - t . \quad (8.6)$$

Тогава

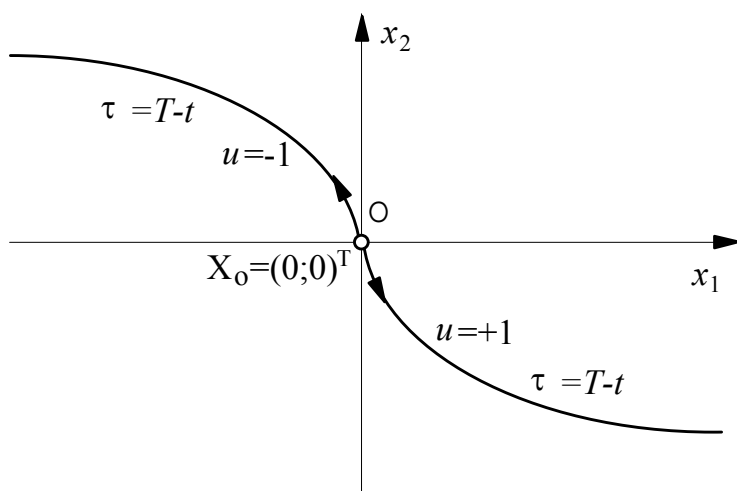
$$d\tau = -dt , \quad (8.7)$$

а системите (8.4) и (8.5) в обратно време добиват вида

$$\dot{\mathbf{X}}(\tau) = -\mathbf{A}\mathbf{X}(\tau) - \mathbf{b} , \quad (8.8)$$

$$\dot{\mathbf{X}}(\tau) = -\mathbf{A}\mathbf{X}(\tau) + \mathbf{b} . \quad (8.9)$$

ОЛП се получава като решение на (8.8) и (8.9) при нулеви начални условия $\mathbf{X}(\tau) = \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 = (0;0)^T$ (Фиг.8.2).



Фиг.8.2. Построяване на ОЛП в обратно време

Симетрична S-управляваща структура [5,8,14]. ОЛП се апроксимира с начупена линия, която за $x_1 \rightarrow \pm\infty$ е успоредна на абсцисната ос (Фиг.8.3). Такава апроксимация може да се изпълни като сума от оразмерени по подходящ начин *sat* функции, за ограничен тип обекти. Допуска се, че $x_{11} < x_{12} < \dots < x_{1N}$. Апроксимацията от Фиг.8.3 може да се представи като сума от две *sat* функции

$$f = S_1 + S_2 = a_1 \text{ sat } b_1 x_1 + a_2 \text{ sat } b_2 x_1. \quad (8.10)$$

В линейната зона на S_1 апроксимацията (8.10) добива вида

$$f_1 = a_1 b_1 x_1 + a_2 b_2 x_1 = (a_1 b_1 + a_2 b_2) x_1. \quad (8.11)$$

В нелинейната зона на S_1 и линейната на S_2

$$f_2 = a_1 + a_2 b_2 x_1. \quad (8.12)$$

В нелинейната зона на S_1 и S_2

$$f_3 = a_1 + a_2. \quad (8.13)$$

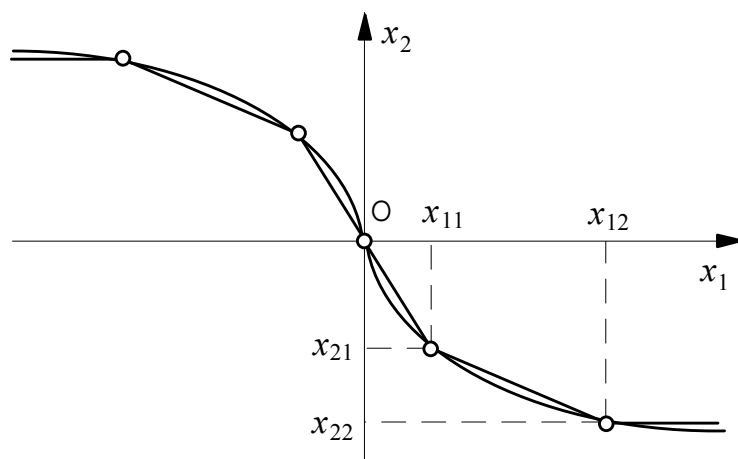
При системи от II ред със симетрична линия на превключване може да се използва следната превключваща функция

$$v = f - x_2 = \sum_{i=1}^N a_i \text{ sat } b_i x_1 - x_2, \quad (8.14)$$

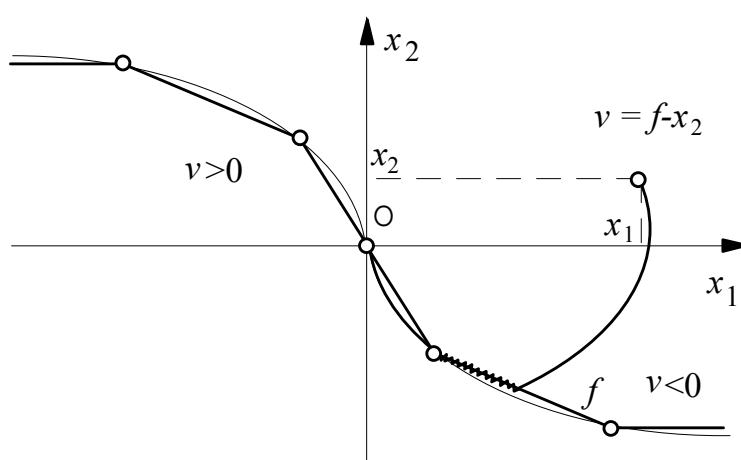
където N е броят на използваните *sat* функции, а броят на отсечките в апроксимацията (8.10) е $2N+1$. Тъй като за всяка точка над приближено-оптималната линия на превключване (ПОЛП) функцията v ще бъде определена отрицателно ($v < 0$), а под ПОЛП - положително ($v > 0$), то управлението се генерира във вида

$$u = \text{sign } v, \quad (8.15)$$

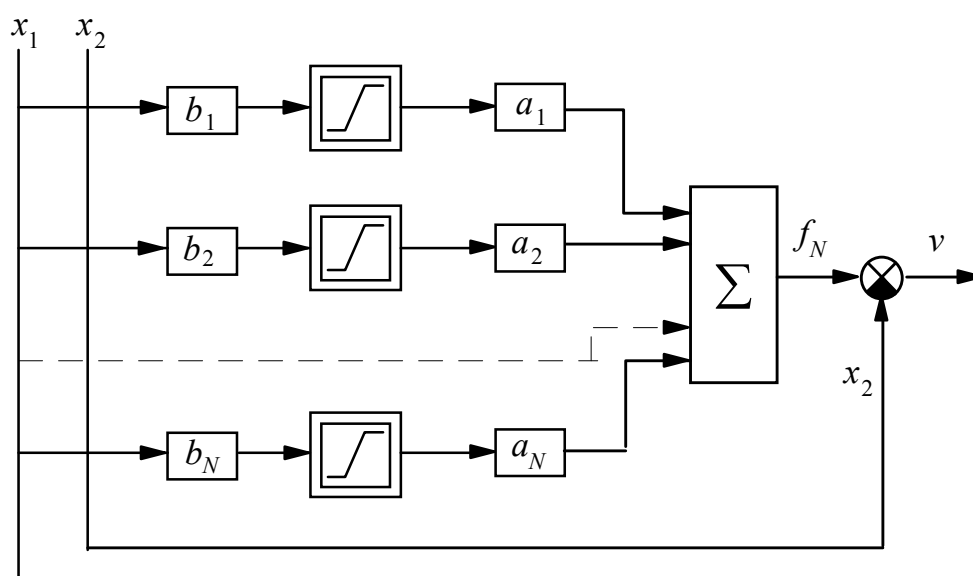
а системата е близка до оптималната по бързодействие.



Фиг.8.3. Отсечково-линейна апроксимация на ОЛП



Фиг.8.4. ПОЛП: деление на фазовата равнина на две полуравнини с различни знаци



Фиг.8.5. S-управляваща структура

Ако във израза (8.14) x_1 и x_2 се заместят с x_{1j} и x_{2j} , $j = 1, 2, \dots, N$ (които лежат на начупената линия и са нейни върхове) се получава $v = 0$. Следователно:

$$v(x_{1j}, x_{2j}) = f(x_{1j}) - x_{2j} = \sum_{i=1}^2 a_i \text{sat} b_i x_{1j} - x_{2j} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (8.16)$$

$$\text{т.}(x_{11}, x_{21}): \quad a_1 \text{sat} b_1 x_{11} + a_2 \text{sat} b_2 x_{11} = x_{21}, \quad (8.17)$$

$$\text{т.}(x_{12}, x_{22}): \quad a_1 \text{sat} b_1 x_{12} + a_2 \text{sat} b_2 x_{12} = x_{22}. \quad (8.18)$$

Тъй като ПОЛП е изградена от инвертирани sat функции, то се очаква коефициентите a_i , $i = 1, 2, \dots, N$, (в частност a_1 и a_2) да са отрицателни. Имайки предвид (8.11) - (8.13) и (8.17), (8.18) се получава системата

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 b_2 x_{11} &= x_{21}, \\ a_1 + a_2 &= x_{22}. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Тъй като по определение аргументът на sat функцията в края на линейния диапазон е ± 1 , то

$$b_1 x_{11} = 1, \quad \Rightarrow b_1 = \frac{1}{x_{11}}, \quad (8.20)$$

$$b_2 x_{12} = 1, \quad \Rightarrow b_2 = \frac{1}{x_{12}}. \quad (8.21)$$

В общия случай b_i се изчисляват по формулата

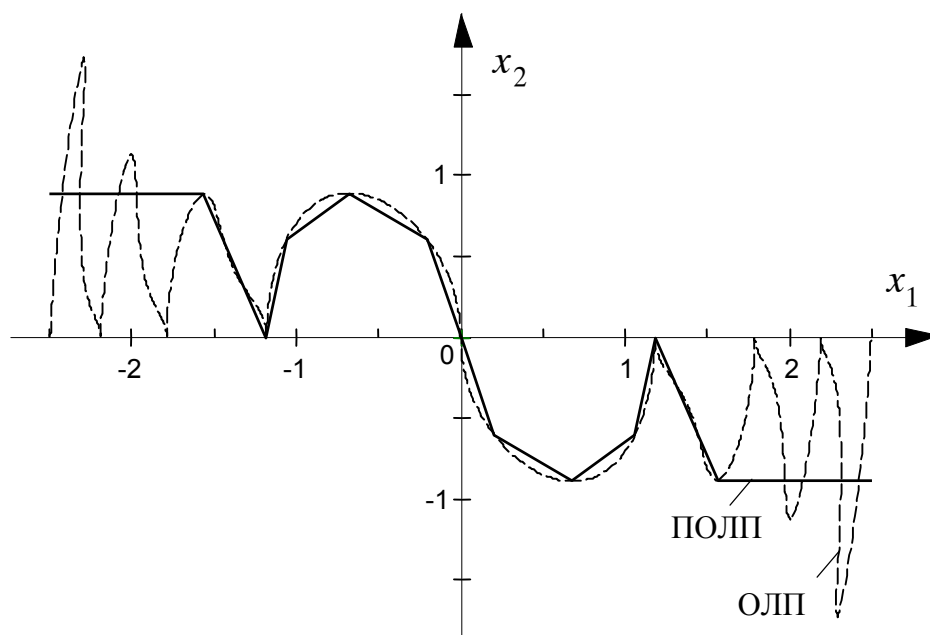
$$b_i = \frac{1}{x_{1i}}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (8.22)$$

Замествайки b_2 от (8.21) в (8.19) се получава

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 \frac{x_{11}}{x_{12}} &= x_{21}, \\ a_1 + a_2 &= x_{22}. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Тази система е винаги решима, ако е спазено условието $x_{11} < x_{12} < \dots < x_{1N}$. За N sat елемента (8.23) приема вида

описанието на затворената система с приближено-оптималната по бързодействие Sat-управляваща структура. Изчислените коефициенти са дадени в табл.8.2.



Фиг.8.7. ОЛП и ПОЛП на обект, описван с уравнението на Дюфинг

Таблица 8.1

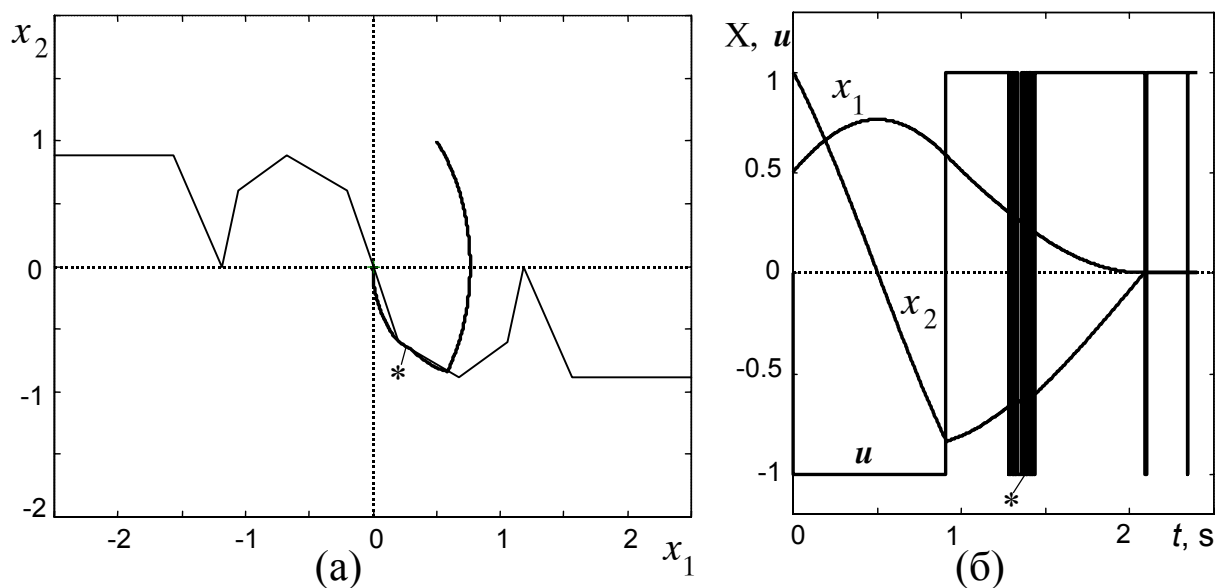
Т.№	1	2	3	4	5
x_1	0.2038	0.6746	1.0615	1.1795	1.5639
x_2	-0.6044	-0.8891	-0.6012	0	-0.8829

Таблица 8.2

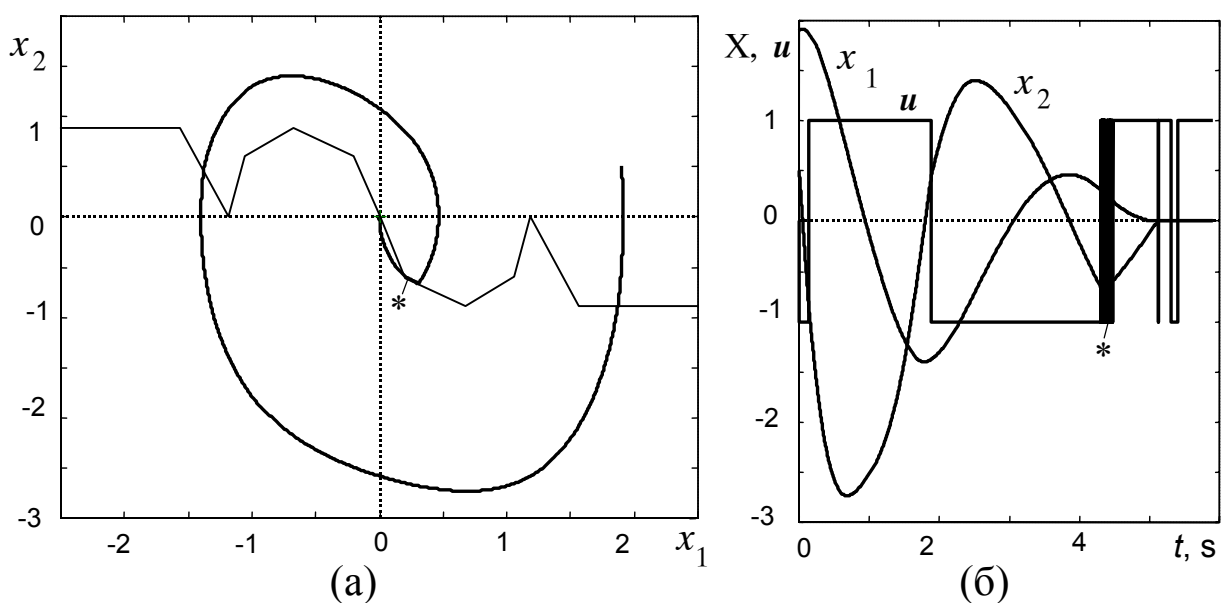
Sat №	1	2	3	4	5
a_i	-0.4812	-0.9099	-4.6184	8.7186	-3.5920
b_i	4.9068	1.4824	0.9421	0.8478	0.6394

На Фиг.8.8 и Фиг.8.9 са показани симулации в затворената ПОБС във фазовата равнина и времевата област за две различни начални условия. Режимът на хлъзгане е означен с "*". Вижда се, че движението при този режим не е по фазови траектории (не зависи от параметрите на обекта), а приблизително следва апроксимиращата линия чрез превключване на релето върху тази линия с много висока честота. Минималните времена за движение на ПОБС за двете начални условия (Фиг.8.8 и Фиг.8.9) са съответно $t_{\min}^{\text{ПОБС}} = 2.078 \text{ s}$ и

$t_{\min}^{\text{ПОБС}} = 5.114 \text{ s}$. В ОБС (Упражнение №7, Фиг.7.2 и 7.3) тези времена са съответно $t_{\min}^{\text{ОБС}} = 2.051 \text{ s}$ и $t_{\min}^{\text{ОБС}} = 5.096 \text{ s}$. Точността с която се достига координатното начало (критерият за спиране) и в двете системи е $\delta = 0.01$. Вижда се, че времето за движение се увеличава незначително в ПОБС в сравнение с ОБС, в замяна на опростяване на линията на превключване, водещо до по-лесната техническа реализация на последната.



Фиг.8.8. ПОБС: преходни процеси във фазовата равнина (а) и във времевата област (б). Режим на хлъзгане – "*".



Фиг.8.9. ПОБС: преходни процеси във фазовата равнина (а) и във времевата област (б). Режим на хлъзгане – "*".

3. Задачи за изпълнение

За нелинеен колебателен обект от втори ред, описван с уравнението на Ван дер Пол да се построи ОЛП. Да се построи отсечково-линейната апроксимация на ОЛП при зададен от преподавателя брой на sat-функциите и определени от студентите координати на точките – върхове на апроксимацията. Да се симулират в MATLAB процесите в затворената ПОБС за различни начални условия и да се определи минималното време за достигане до целта (началото на координатната система). За целта да се адаптират програмите от Приложение 4.

4. Анализ на резултатите

Сравнява се минималното време за движение в ОБС и в ПОБС. Анализира се компромисът между лесна техническа реализация и загуба (малка) на бързодействие. Дискутират се предимствата (инвариантност на промяната на параметрите на обекта) на режима на хлъзгане, възникващ в ПОБС.

Лабораторно упражнение № 9

Оптимално управление на нелинейни колебателни обекти от втори ред използващо линеаризация чрез обратна връзка

Целта на лабораторното упражнение е запознаване с точната линеаризация с обратна връзка, като средство за опростяване на модела на обекта (нелинеен колебателен от втори ред) до получаване на стандартна двойно-интеграторна форма, за която оптималното по бързодействие управление е добре известен аналитичен закон (Лабораторни упражнения №4 и №5).

1. Теоретични сведения

Както вече бе показано в Лабораторните упражнения №7 и №8, задачата за синтеза на оптимално по бързодействие управление на нелинейни колебателни обекти от втори ред е трудна, тъй като броят на превключванията на управляващото въздействие е повече от $n - 1$ (n е ред на системата), а оптималната линия на превключване (ОЛП) е сложна нелинейност, в която само първата дъга е възможна част от фазова траектория. В предишното упражнение №8 беше разгледана възможността за опростяване на техническата реализация на ОЛП чрез използване на отсечково-линейна апроксимация, което води до приближено-оптимална по бързодействие система. Трудността по построяването на самата оригинална ОЛП си остава. Тук ще бъде разгледана идеята за точна линеаризация на обекта чрез използване на обратна връзка, вместо апроксимиране на ОЛП. За линеаризацията се използва подход от диференциалната геометрия, водещ до получаването на стандартен модел в двойно интеграторна форма, чиято ОЛП е проста аналитична крива (Лабораторно упражнение №5).

Средства от диференциалната геометрия [16].

Векторно поле: Преобразуването $f : D \rightarrow R^n$, където $D \subset R^n$ е област, се нарича векторно поле в D . Векторното поле се означава с n -дименсионен вектор-стълб.

Диференциал: Нека $h : D \rightarrow R$. Диференциалът на h се определя като

$$dh = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{X}} = \left[\frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \right]. \quad (9.1)$$

Производна на Ли: Нека $h : D \rightarrow R$ и $\mathbf{f} : D \rightarrow R^n$. Производната на Ли на h по отношение на \mathbf{f} се определя чрез

$$L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{X}) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{f}(\mathbf{X}). \quad (9.2)$$

Повтарящите се производни на Ли по отношение на същото векторно поле \mathbf{f} или на ново \mathbf{g} се определят рекурсивно:

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{X}) &= \frac{\partial(L_{\mathbf{f}}h)}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{g}(\mathbf{X}), \\ L_{\mathbf{f}}^2h(\mathbf{X}) &= L_{\mathbf{f}}L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{X}) = \frac{\partial(L_{\mathbf{f}}h)}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{f}(\mathbf{X}), \\ L_{\mathbf{f}}^k h(\mathbf{X}) &= L_{\mathbf{f}}L_{\mathbf{f}}^{k-1}h(\mathbf{X}) = \frac{\partial(L_{\mathbf{f}}^{k-1}h)}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{f}(\mathbf{X}), \\ L_{\mathbf{f}}^0 h(\mathbf{X}) &= h(\mathbf{X}). \end{aligned}$$

Скоба на Ли. Нека \mathbf{f} и \mathbf{g} са две векторни полета в $D \subset \mathbf{R}^n$. Скобата на Ли на \mathbf{f} и \mathbf{g} , означена с $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]$, е трето векторно поле определено чрез

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}](\mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{f}(\mathbf{X}) - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{g}(\mathbf{X}), \quad (9.3)$$

където $\partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{X}$ и $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{X}$ са Якобиан-матрици. Скобата на Ли се записва най-общо като $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]$. Повтарящите се скоби на Ли могат да се определят рекурсивно чрез

$$\begin{aligned} ad_{\mathbf{f}}^0 \mathbf{g}(\mathbf{X}) &= \mathbf{g}(\mathbf{X}), \\ ad_{\mathbf{f}} \mathbf{g}(\mathbf{X}) &= [\mathbf{f}, \mathbf{g}](\mathbf{X}), \\ ad_{\mathbf{f}}^k \mathbf{g}(\mathbf{X}) &= [\mathbf{f}, ad_{\mathbf{f}}^{k-1} \mathbf{g}](\mathbf{X}). \end{aligned}$$

Точна линеаризация чрез обратна връзка [15]. За система с един вход и един изход, зададена в следната форма

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{f}(\mathbf{X}) + \mathbf{g}(\mathbf{X})u \\ y &= h(\mathbf{X}),\end{aligned}\tag{9.4}$$

управляващата входна променлива u се представя като

$$u = \alpha(\mathbf{X}) + \beta(\mathbf{X})v,\tag{9.5}$$

където v е зададен външен вход (на линеаризираната система). Заместването на (9.5) в (9.4) води до получаването на следната затворена система

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{f}(\mathbf{X}) + \mathbf{g}(\mathbf{X})\alpha(\mathbf{X}) + \mathbf{g}(\mathbf{X})\beta(\mathbf{X})v \\ y &= h(\mathbf{X}).\end{aligned}\tag{9.6}$$

Подразбира се, че $\beta(\mathbf{X})$ е ненулева функция за всяко \mathbf{X} в едно отворено множество на \mathbf{R}^n .

Разглежда се използването на обратна връзка по координатите на състоянието (и промяна на координатите в пространството на състоянията) за целите на преобразуването на дадена нелинейна система в линейна и управляема. Промяната на координатите, водеща до получаване на нормална форма се дава чрез

$$z_i = \phi_i(\mathbf{X}) = L_{\mathbf{f}}^{i-1}h(\mathbf{X}), \quad 1 \leq i \leq n.\tag{9.7}$$

В новите координати системата се описва чрез следните уравнения

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\dots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= b(\mathbf{Z}) + a(\mathbf{Z})u,\end{aligned}\tag{9.8}$$

където $\mathbf{Z} = (z_1, \dots, z_n)^T$, $a(\mathbf{Z}) = L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{n-1}h(\mathbf{X})$ и $b(\mathbf{Z}) = L_{\mathbf{f}}^nh(\mathbf{X})$. Точката $\mathbf{Z}^0 = \Phi(\mathbf{X}^0)$ и така за всяко \mathbf{Z} в околността на \mathbf{Z}^0 , функцията $a(\mathbf{Z})$ е ненулева.

Избира се следният управляващ закон – обратна връзка по координатите на състоянието

$$u = \frac{1}{a(\mathbf{Z})}(-b(\mathbf{Z}) + v),\tag{9.9}$$

който съществува и е добре дефиниран в околността на \mathbf{Z}^0 . Получената затворена система, описана с уравненията

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\dots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= v\end{aligned}\tag{9.10}$$

е *линейна* и *управляема*. Обратната връзка, изразена като функция на координатите на състоянието \mathbf{X} (в зависимост от функциите $\mathbf{f}(\mathbf{X})$, $\mathbf{g}(\mathbf{X})$, $h(\mathbf{X})$, които характеризират първоначалната система) е

$$u = \frac{1}{a(\Phi(\mathbf{X}))} (-b(\Phi(\mathbf{X})) + v) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(\mathbf{X})} (-L_f^n h(\mathbf{X}) + v).\tag{9.11}$$

Тази обратна връзка по координатите на състоянието трансформира системата в такава, чието поведение "вход-изход" е идентично на това на линейна система с предавателна функция $W(p) = \frac{1}{p^n}$. За така получената линейна система може да се синтезира ново управление v , като оптималното по бързодействие управление.

Забележка 1 [15]: Всяка нелинейна система от втори ред може да бъде преобразувана в линейна система чрез обратна връзка по координатите на състоянието и смяна на координатите, в околността на една точка \mathbf{X}^0 , *тогава и само тогава, когато* матрицата $[\mathbf{g}(\mathbf{X}^0) \quad ad_{\mathbf{f}} \mathbf{g}(\mathbf{X}^0)]$ има ранг 2.

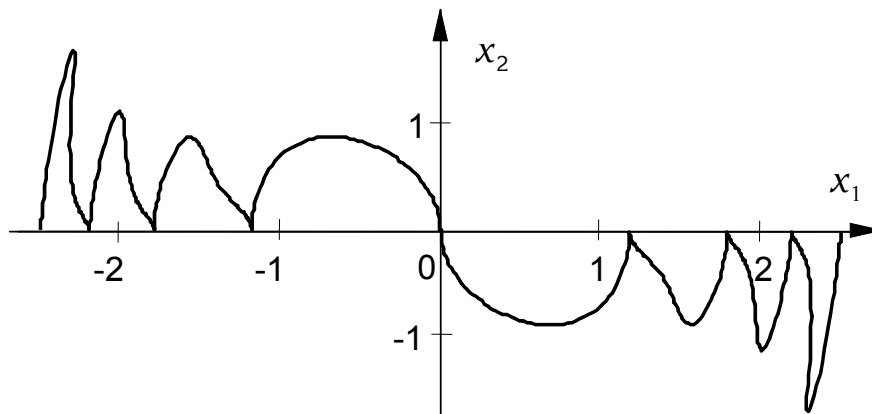
2. Пример

За система, описвана с уравнението на Дюфинг

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_1^3 + u\end{aligned}\tag{9.12}$$

да се синтезира оптимално по бързодействие управление, използващо точна линеаризация чрез обратна връзка

В лабораторно упражнение №7 е дадена методиката за построяване на ОЛП на нелинейни колебателни обекти от втори ред и е построена ОЛП на обект, описван с уравнението на Дюфинг. Видът и е показан на Фиг.9.1.



Фиг.9.1. ОЛП на обект, описван с уравнението на Дюфинг

Точна линеаризация чрез обратна връзка на уравнението на Дюфинг. За да се провери дали разглежданата нелинейна система може да се линеаризира чрез обратна връзка по координатите на състоянието (и смяна на базиса в пространството на състоянията) се изчислява $ad_f \mathbf{g}(\mathbf{X}^0)$ и се тестват условията на *Забележка 1*:

$$ad_f \mathbf{g}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (9.13)$$

В равновесното състояние, точката $\mathbf{X}^0 = (0 \ 0)^T$, матрицата

$$[\mathbf{g}(\mathbf{X}^0) \ ad_f \mathbf{g}(\mathbf{X}^0)] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.14)$$

има ранг 2 и следователно условието на *Забележка 1* е изпълнено. Уравнението на Дюфинг може да се трансформира в линейна и управляема система чрез обратна връзка по координатите на състоянието и смяна на базиса в пространството на състоянията около точката $\mathbf{X}^0 = (0 \ 0)^T$.

Разглежда се смяна на базиса в пространството на състоянията за получаване на нормалната форма в съответствие с (9.7), (9.8) и (9.9):

$$\begin{aligned} z_1 &= L_f^0 h(\mathbf{X}) = x_1 \\ z_2 &= L_f^1 h(\mathbf{X}) = x_2, \end{aligned} \quad (9.15)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= b(\mathbf{Z}) + a(\mathbf{Z})u, \end{aligned} \quad (9.16)$$

където

$$\begin{aligned} a(\mathbf{Z}) &= L_g L_f h(\mathbf{X}) = 1 \\ b(\mathbf{Z}) &= L_f^2 h(\mathbf{X}) = -x_1 - x_1^3. \end{aligned}$$

Обратната връзка изразена чрез фазовите координати в съответствие с (9.11) е

$$u = \frac{1}{L_g L_f h(\mathbf{X})} (-L_f^2 h(\mathbf{X}) + v) = x_1 + x_1^3 + v, \quad (9.17)$$

а линеаризираната система е

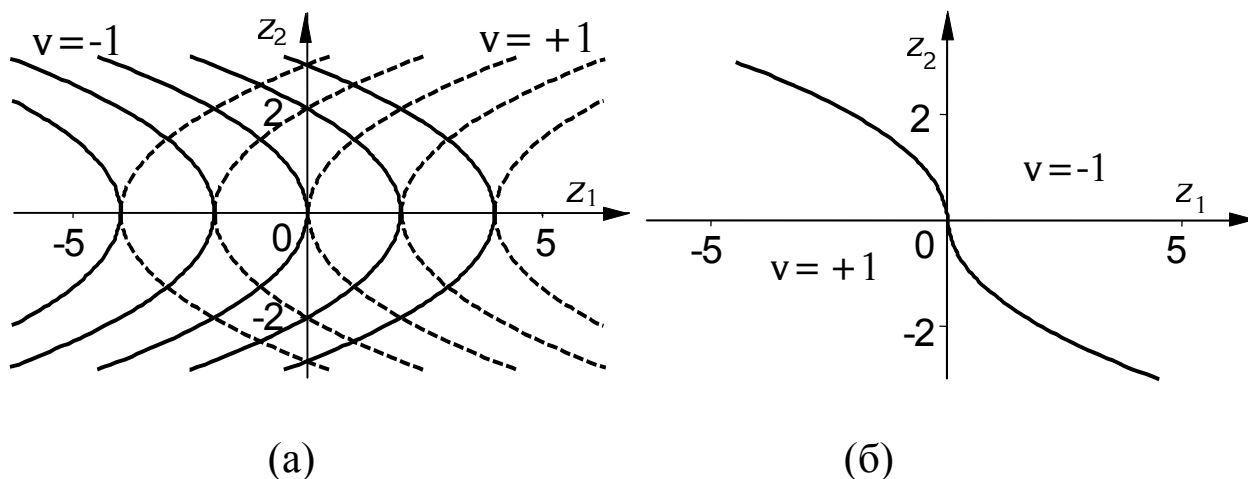
$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= v. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Оптимално по бързодействие управление на линеаризираната система. За линейната система (9.18) може да се синтезира оптимално по бързодействие управление. ОЛП на обект с динамика на две интегриращи звена е добре известна (Лабораторно упражнение №5). Тя се състои от части от нулевите фазови траектории на двата фазови портрета за $v = \pm 1$, както е показано на Фиг.9.2 (а). Фазовата равнина е разделена от ОЛП на две области (Фиг.9.2 (б)). Ако текущото състояние е над ОЛП, оптималното управление е $v = -1$, а под нея - $v = +1$. Управляващият закон е

$$v = -\text{sign} \left(z_1 + \frac{z_2^2}{2} \text{sign } z_2 \right). \quad (9.19)$$

Чрез заместване на (9.19) в (9.17) се получава управляващият закон за първоначалната нелинейна система, описвана с уравнението на Дюфинг

$$u = x_1 + x_1^3 - \text{sign} \left(x_1 + \frac{x_2^2}{2} \text{sign } x_2 \right). \quad (9.20)$$

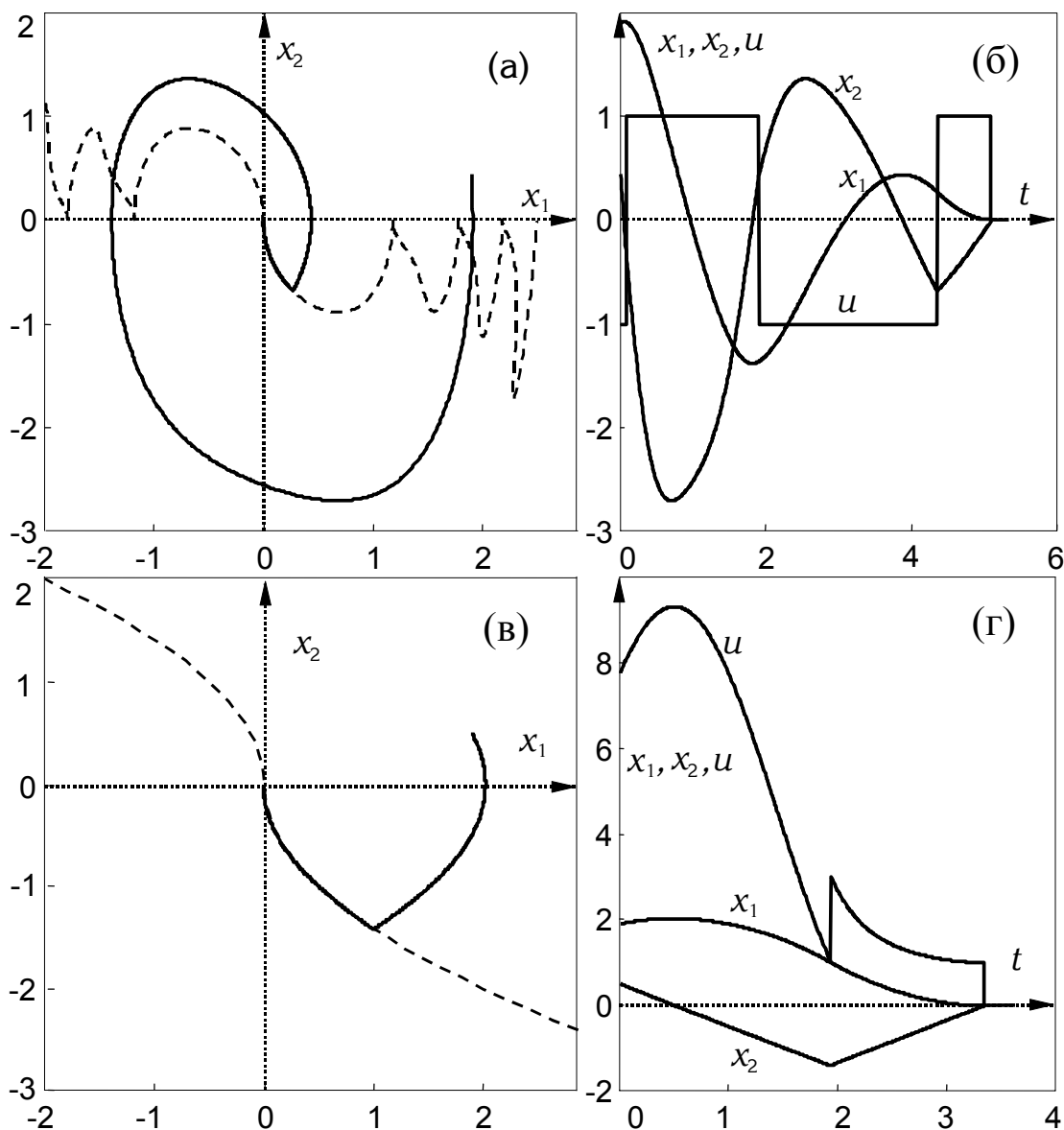


Фиг.9.2. Обект "две интегриращи звена":
(а) фазови портрети за $v = \pm 1$; (б) ОЛП

Симулационни резултати. На Фиг.9.3 са показани симулации на затворената оптимална по бързодействие система: (а) и (в) - във фазовата равнина; (б) и (г) – във времевата област. Критерият за спиране е достигането на Евклидовата норма

$$\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)} \leq \delta, \quad (9.21)$$

където $\delta = 0.01$. Оптималните времена за движение в първоначалната нелинейна система (Фиг.9.3 (а,б)) и в линеаризираната (Фиг.9.3 (в,г)) са съответно $t_{nonlin} = 5.100$ s и $t_{lin} = 3.355$ s. Този резултат показва, че в линеаризираната система може да се получи време по-малко отколкото във първоначалната нелинейна система. Това обаче се постига за сметка на по-големи управляващи сигнали (Фиг.9.3 (г)). При обратно връщане в изходната нелинейна система управляващият сигнал вече не се подчинява на ограничението $|u| \leq 1$ и не е отсечково-постоянен, поради което няма обща база за сравняване на бързодействието на двете системи. Като цяло, линеаризацията с обратна връзка прави синтеза и техническата реализация на оптималното по бързодействие управление по-лесно, с по-малко изчислителни трудности.



Фиг.9.3. Симулационни резултати във фазовата равнина и във времевата област: (а) и (б) – нелинеен обект, описван с уравнението на Дюфинг; (в) и (г) – линеаризираната чрез обратна връзка система

3. Задачи за изпълнение

Да се линеаризира чрез обратна връзка нелинеен колебателен обект от втори ред, описван с уравнението на Ван дер Пол. Да се синтезира оптимално по бързодействие управление за линеаризираната система. Да се симулират в средата на MATLAB процесите в първоначалната нелинейна система с така синтезираното оптимално управляващо устройство за различни начални условия и да се определи минималното време за движение до целта. Да се

използват програмите от Приложение 4, като се адаптират по подходящ начин.

4. Анализ на резултатите

Дискутират се предимствата и недостатъците на линеаризацията с обратна връзка. Анализира се компромисът между лесна техническа реализация и по-големи входни въздействия (неизпълнение на ограничението $|u| \leq 1$). Винаги ли е възможна линеаризацията с обратна връзка? Как тя се отразява върху робастността на синтезираната система?

Приложение на принципа на минимума за синтез на оптимално управление на разхода на гориво

Целта на лабораторното упражнение е да се приложи принципът на минимума за синтез на оптимална по разход на гориво система, като се разгледат случаите на свободно и фиксирано крайно време.

1. Теоретични сведения [12]

При управлението на самолети и космически летателни апарати управляващата променлива (сила на тяга или въртящ момент) е пропорционална на скоростта на разхода на масата на горивото и следователно е ограничена. И тъй като общият запас на гориво също е ограничен, то всички сложни движения или движението по курса трябва да се извършват с минимален разход на гориво.

Разглежда се линейна система

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t), \quad (10.1)$$

при ограничение

$$|u_j| \leq 1, \quad (j = 1, 2, \dots, r). \quad (10.2)$$

Да се намери оптималното управление $\mathbf{U}^*(t)$, привеждащо системата от начално състояние $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ в крайно състояние $\mathbf{X}(T) = \mathbf{X}_T$, така че да се минимизира следният функционал, характеризиращ разхода на гориво

$$I = \int_0^T \sum_{j=1}^r |u_j(t)| dt = \int_0^T \mathbf{U}^T(t) \text{sign } \mathbf{U}(t) dt. \quad (10.3)$$

Подинтегралната величина представлява сума от скоростите на разхода на гориво и следователно интегралът от нея съответствува на общото потребление на гориво (общия разход на гориво). Хамилтонианът е от вида

$$\begin{aligned} H(\mathbf{P}, \mathbf{X}, \mathbf{U}) &= \mathbf{U}^T(t) \text{sign } \mathbf{U}(t) + \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{P}^T \mathbf{B} \mathbf{U} = \\ &= \mathbf{U}^T(t) \text{sign } \mathbf{U}(t) + \mathbf{X}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{U}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P}. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Диференциалното уравнение относно спомагателната променлива $\mathbf{P}(t)$ и неговото решение са, съответно

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}} = -\mathbf{A}^T \mathbf{P}(t), \quad (10.5)$$

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0 e^{-\mathbf{A}^T t}. \quad (10.6)$$

Необходимото условие за намиране на минимума на Хамилтониана

$$\frac{\partial H(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{P})}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} = 0, \quad (10.7)$$

не носи информация за управлението $\mathbf{U}(t)$. За да се минимизира (10.4) е необходимо минимизиране на членовете, съдържащи $\mathbf{U}(t)$:

$$\mathbf{U}^T(t) \text{sign } \mathbf{U}(t) + \mathbf{U}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} = \mathbf{U}^T(t) [\text{sign } \mathbf{U}(t) + \mathbf{B}^T \mathbf{P}] \xrightarrow{\mathbf{U}} \min. \quad (10.8)$$

Разглеждат се следните два случая:

1. Ако $|\mathbf{B}^T \mathbf{P}| \geq 1$, то знакът на двучлена в средните скоби (10.8) се определя от $\mathbf{B}^T \mathbf{P}$,

$$\mathbf{U}^* = -\text{sign}(\mathbf{B}^T \mathbf{P}); \quad (10.9)$$

2. Ако $|\mathbf{B}^T \mathbf{P}| < 1$, то знакът на двучлена в средните скоби (10.8) се определя от $\text{sign } \mathbf{U}(t)$ и следователно целият израз (10.8) е неотрицателен. Най-малката стойност, която може да приеме е нула при $\mathbf{U}^* = 0$.

Избира се релейно управление от вида

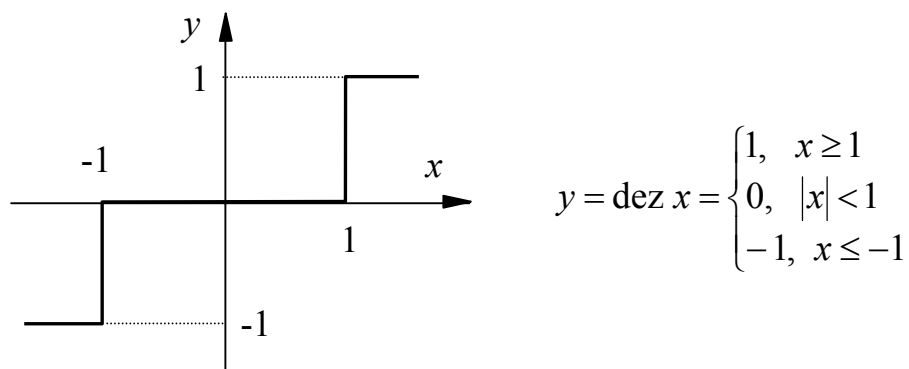
$$\mathbf{U}^*(t) = -\text{dez } \mathbf{B}^T \mathbf{P}^*(t), \quad (10.10)$$

където със съкращението *dez* (*dead-zone function* - функция със зона на нечувствителност) се означава трипозиционно реле (Фиг.10.1). Понякога се използва и означението *sgzm* - съкратено от латинското *signum functio cum zona mortua* (знакова функция със зона на

нечувствителност). Полага се $\mathbf{Q}^*(t) = \mathbf{B}^T \mathbf{P}^*(t)$. В скаларен вид (10.10) се свежда до

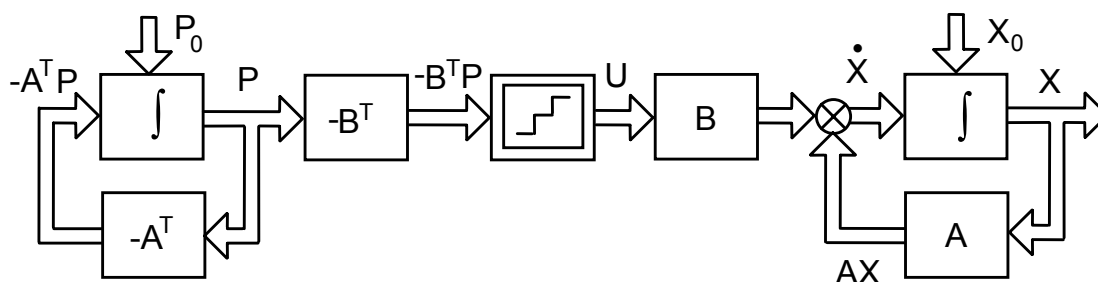
$$u_j^*(t) = -\text{dez } q_j^*(t), \quad (j = 1, 2, \dots, r), \quad (10.11)$$

където q_j^* е j -тата компонента на $\mathbf{Q}^*(t)$.



Фиг.10.1. dez функция

Следователно, управлението минимизиращо разхода на гориво се задава с отсечково-непрекъсната функция, приемаща стойности $u_j^* = +1$, $u_j^* = 0$ и $u_j^* = -1$, в зависимост от решението на каноничната (спрегнатата) система. За това оптимално управление са необходими не повече от два вентила от типа "включено-изключено" (понятието отрицателно управление съответствува на изменение на посоката на движение на горивото - обратна посока). От непрекъснатостта на функцията $q_j^*(t)$ следва съществуването на време, за което управлението е $u_j^* = 0$, между периоди с управление $u_j^* = +1$ и $u_j^* = -1$.



Фиг.10.2. Моделираща схема на отворена система, оптимална по разход на гориво

2. Пример [17]

Нека динамиката на обекта се описва със системата

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u.\end{aligned}\tag{10.12}$$

Управляващият вход е ограничен чрез

$$|u_j| \leq 1.\tag{10.13}$$

Да се синтезира управление, което да приведе системата от произволно начално състояние $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$ в координатното начало $x_1(T) = 0$, $x_2(T) = 0$, като при това се изразходва минимално гориво, т.е.

$$I = \int_0^T |u(t)| dt \rightarrow \min.\tag{10.14}$$

Да се разгледат двата случая - със свободно и с фиксирано крайно време T .

Формиране на оптималното управление. Хамилтонианът за разглежданата система е

$$H = |u| + p_1 x_2 + p_2 u.\tag{10.15}$$

Каноничната система на спомагателния вектор е

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1,\end{aligned}\tag{10.16}$$

а решенето и е

$$\begin{aligned}p_1(t) &= \text{const} = p_1 \\ p_2(t) &= p_2(T) + (T - t)p_1.\end{aligned}\tag{10.17}$$

Втората компонента $p_2(t)$ на спомагателния вектор е линейна. В зависимост от все още неизвестните p_1 и $p_2(T)$ (които зависят от

началното състояние), $p_2(t)$ може да бъде константа ($p_1 = 0$) нарастваща ($p_1 < 0$), или намаляваща ($p_1 > 0$).

Решението на (10.16) с интеграционни константи, определени от неизвестните начални условия $p_1(0) = p_1^0$ и $p_2(0) = p_2^0$ е

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \text{const} = p_1^0 \\ p_2(t) &= p_2^0 - p_1^0 t . \end{aligned}$$

Според принципа на минимума управляващият закон се синтезира като

$$u(t) = -\text{dez}(p_2(t)) . \quad (10.18)$$

Траектории във фазовата равнина. Фазовият портрет на (10.12) при $u(t) = \pm 1$ и $u(t) = 0$ е показан на Фиг.10.3. Ако $u(t) = 0$ за всяко t , решението на (10.12) е

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_2(0) = x_2^0 \\ x_1(t) &= x_1^0 + x_2^0 t . \end{aligned} \quad (10.19)$$

Тези контури на постоянство на x_2 са хоризонтални линии във фазовата равнина, върху които движението за еднотекунден интервал с $x_1^0 = 0$ е показано с вектор върху всеки контур. Вижда се, че системата се движи по-бавно по траекториите, които са по-близо до началото на координатната система.

Фазовите траектории за $u = 0$ са пътища с нулева консумация на гориво. За да се минимизира консумираното гориво, трябва да се използва предимството на движението на системата "по инерция", като с $u = 1$ или $u = -1$ тя да се придвижи до точка върху един от тези пътища, след това да се остави да се движи по инерция ($u = 0$) към началото до нулевата фазова траектория, след това се прилага $u = -1$ или $u = 1$ за да се придвижи изобразяващата точка в координатното начало.

Свободно крайно време. Нека крайният момент T на движението не е фиксиран. Ако началното състояние е (x_1^0, x_2^0) , както е показано на Фиг.10.4 движението на обекта към координатното начало може да стане само чрез управления -1 , 0 , 1 , които се превключват в моментите t_1 и t_2 . Ако крайното време е свободно, ще бъде

демонстрирано, че не съществува оптимално по разход на гориво управление.

За да се намери оптималният управляващ закон трябва да се определят моментите на превключване t_1 и t_2 . Необходимо е да се прилага управление $u = -1$ достатъчно дълго, за да се придвижи x_2 до отрицателна стойност. Нека $u = -1$ докато се стигне до $x_2 = \tilde{x}_2 = -\varepsilon$ (ε е малко положително число) и след това се подава $u = 0$. След премахване на управлението, изобразяващата точка свободно ще се движи наляво по траекторията за $u = 0$, описано като

$$x_1(t) = x_1(t_1) - \varepsilon(t - t_1), \quad t > t_1. \quad (10.20)$$

Когато изобразяващата точка попадне върху нулевата фазова траектория

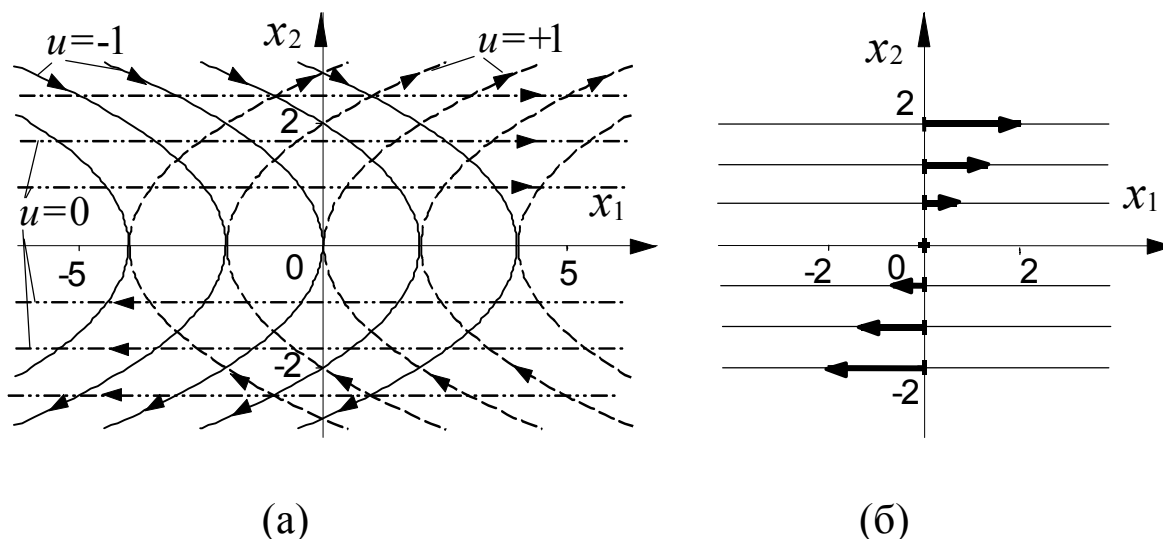
$$x_1 = -\frac{x_2^2}{2} \operatorname{sign} x_2 \quad (10.21)$$

в момента t_2 , трябва да се приложи управление $u = 1$ за да приведе системата в координатното начало.

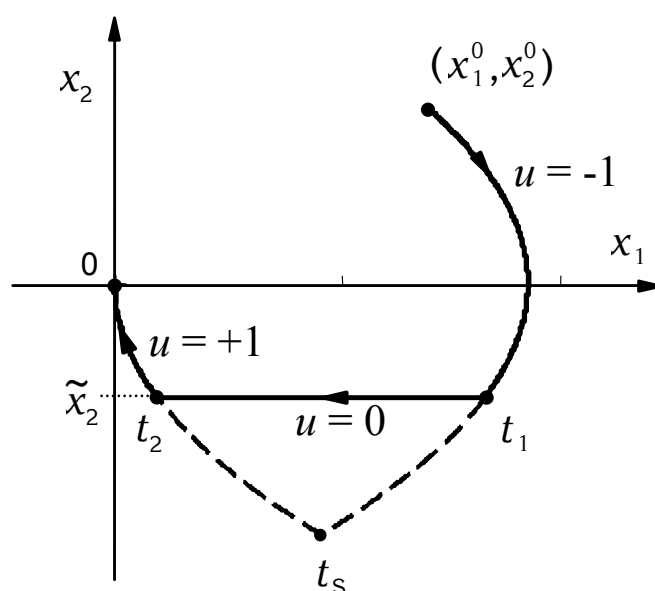
Колкото по-малък е интервалът в който се прилага $u = -1$, толкова по-малко гориво се изразходва, но за всяко избрано ε може винаги да се намери управляващ закон, при който да се консумира по-малко гориво, отколкото кандидат управлението чрез изключване на управлението $u = -1$, когато $x_2 = \tilde{x}_2 = -\varepsilon/2$. Това води до свободно движение наляво, описано като

$$x_1(t) = x_1(t_1) - \frac{\varepsilon}{2}(t - t_1), \quad t > t_1. \quad (10.22)$$

При достигане на нулевата фазова траектория (10.21) отново се подава управление $u = 1$. Този втори управляващ закон ще направи системата по-бавна от гледна точка на бързодействието, но с по-малък разход на гориво. Следователно, ако T не е ограничено, не съществува за дадената система управление, оптимално по минимум разход на гориво.



Фиг.10.3. Фазови портрети при $u = 0, \pm 1$.



Фиг.10.4. Траектория на система с минимален разход на гориво

Фиксирано крайно време. Оптималното по бързодействие управление се получава чрез прилагане на $u = -1$ до момента $t = t_s$, а след това превключва към $u = 1$ (на Фиг.10.4 траекторията на оптималната по бързодействие система е показана с прекъсната линия). Може да се изчисли, че минималното крайно време (при движение по тази траектория) е

$$T_{\min} = x_2^0 + 2\sqrt{x_1^0 + \frac{(x_2^0)^2}{2}}. \quad (10.23)$$

Допуска се, че T за системата с минимален разход на гориво е фиксирано на стойност

$$T > T_{\min}. \quad (10.24)$$

Тогава оптималният по разход на гориво управляващ закон приема стойности $-1, 0, 1$ с времена на превключване t_1 и t_2 , които трябва да се определят. Траекторията на системата с минимален разход на гориво е с фиксирано зададено крайно време T . Това позволява определянето на t_1, t_2 и \tilde{x}_2 (координатата в момента на превключване t_1) в зависимост от (x_1^0, x_2^0) и T .

За $0 < t < t_1$, $u(t) = -1$, така че от (10.19) и (10.20) следва

$$\tilde{x}_2 = x_2(t_1) = x_2^0 - t_1, \quad (10.25)$$

$$x_1(t_1) = x_1^0 + x_2^0 t_1 - \frac{t_1^2}{2}. \quad (10.26)$$

За $t_1 < t < t_2$ се прилага $u(t) = 0$, така че решението на уравнението на състоянието е

$$x_2(t_2) = \tilde{x}_2, \quad (10.27)$$

$$x_1(t_2) = x_1(t_1) + \tilde{x}_2(t_2 - t_1). \quad (10.28)$$

За $t_2 < t < T$, $u(t) = 1$, така че

$$0 = x_2(T) = x_2(t_2) + (T - t_2), \quad (10.29)$$

$$0 = x_1(T) = x_1(t_2) + x_2(t_2)(T - t_2) + \frac{(T - t_2)^2}{2}, \quad (10.30)$$

От (10.25), (10.27) и (10.29) се получава

$$t_2 = x_2^0 + T - t_1. \quad (10.31)$$

Замествайки (10.25), (10.26), (10.27), (10.28) и (10.31) в (10.30) се идва до

$$t_1^2 - (x_2^0 + T)t_1 + (x_1^0 + x_2^0 T + \frac{(x_2^0)^2}{2}) = 0, \quad (10.32)$$

откъдето

$$t_1 = \frac{(x_2^0 + T) \pm \sqrt{(x_2^0 - T)^2 - (4x_1^0 + 2(x_2^0)^2)}}{2}. \quad (10.33)$$

От (10.31) и факта, че $t_1 < t_2$ следва

$$t_1 = \frac{(x_2^0 + T) - \sqrt{(x_2^0 - T)^2 - (4x_1^0 + 2(x_2^0)^2)}}{2} \quad (10.34)$$

и

$$t_2 = \frac{(x_2^0 + T) + \sqrt{(x_2^0 - T)^2 - (4x_1^0 + 2(x_2^0)^2)}}{2}. \quad (10.35)$$

Условието $T > T_{\min}$ гарантира положителност на дискриминантата.

Отворената, оптимална по разход на гориво система има управление от вида

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & t < t_1 \\ 0, & t_1 \leq t < t_2 \\ 1, & t_2 \leq t \end{cases} \quad (10.36)$$

Според (10.25) и (10.34) минималната стойност на $\tilde{x}_2 = -2.7$, постигната под действието на това управление е отрицателното количество

$$\tilde{x}_2 = \frac{(x_2^0 - T) + \sqrt{(x_2^0 - T)^2 - (4x_1^0 + 2(x_2^0)^2)}}{2}. \quad (10.37)$$

При $x_1^0 = 10$, $x_2^0 = 10$ и $T = 35$ s моментите на превключване са $t_1 = 12.7$ s и $t_2 = 32.3$ s, а постоянната скорост на движението по инерция през интервала, в който $u(t) = 0$ е $\tilde{x}_2 = -2.7$.

3. Задачи за изпълнение

Да се симулира в средата на MATLAB системата, разгледана в примера от точка 2, при $x_1^0 = 10$, $x_2^0 = 10$ и $T = 35$ s. Да се проверят чрез компютърната симулация времената на превключване (10.34) и

(10.35) и постоянната скорост (10.37) на движение в интервала, в който $u(t) = 0$.

Да се симулира отворената система от Фиг.10.2 и итеративно да се намери началното условие $\mathbf{P}(0)$ на вектора $\mathbf{P}(t)$, довеждащо системата в координатното начало.

4. Анализ на резултатите

Дискутират се трудностите при определянето на началното условие $\mathbf{P}(0)$, предимствата на затворената форма на управление, както и задаването на фиксиран краен момент на управлението.

Лабораторно упражнение № 11

Синтез на оптимално управление при критерий минимум разход на енергия.

Целта на лабораторното упражнение е да се приложи принципът на минимума за синтез на оптимална по разход на енергия система, (като се разгледат случаите на свободно и фиксирано крайно време.)

1. Теоретични сведения [12, 17]

Съществува цял клас задачи за управление, в които квадратът на управляващата променлива е пропорционален на отдаваната мощност, а интегралът от този квадрат по времето е пропорционален на изразходваната енергия. Например в електрическите вериги такава променлива може да бъде напрежението или електрическият ток.

Разглежда се линейна система

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t), \quad (11.1)$$

при ограничение

$$|u_j| \leq 1, \quad (j = 1, 2, \dots, r). \quad (11.2)$$

Да се намери оптималното управление $\mathbf{U}^*(t)$, привеждащо системата (11.1) от начално състояние $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ в крайно състояние $\mathbf{X}(T) = \mathbf{X}_T$, така че да се минимизира следният функционал, характеризиращ разхода на енергия

$$I = \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{j=1}^r u_j^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T \mathbf{U}^T(t) \mathbf{U}(t) dt. \quad (11.3)$$

Хамилтонианът е

$$H(\mathbf{P}, \mathbf{X}, \mathbf{U}) = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{U} + \mathbf{P}^T (\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{U} + \mathbf{X}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{U}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P}, \quad (11.4)$$

Получената оттук канонична (спрегната) система диференциални уравнения е същата като при задачите за оптимално по бързодействие

и отпимално по минимум разход на гориво управление. Същите са и трудностите свързани с намирането на началното условие \mathbf{P}_0 (11.6) на спомагателния вектор $\mathbf{P}(t)$ в (11.5), водещо до определяне на оптималното решение $\mathbf{P}^*(t)$

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}} = -\mathbf{A}^T \mathbf{P}(t), \quad (11.5)$$

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0 e^{-\mathbf{A}^T t}. \quad (11.6)$$

За минимизирането на (11.4) трябва да се минимизират членовете, съдържащи $\mathbf{U}(t)$, т.е.

$$\frac{1}{2} \mathbf{U}^T(t) \mathbf{U}(t) + \mathbf{U}(t)^T \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t) = \mathbf{U}^T(t) \left[\frac{1}{2} \mathbf{U}(t) + \mathbf{B}^T \mathbf{P}(t) \right] \xrightarrow{\mathbf{U}} \min. \quad (11.7)$$

Необходимото условие за минимум на (11.4) във векторна форма е

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}} \left[\mathbf{U}^T \left(\frac{1}{2} \mathbf{U} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \right) \right] \Big|_{\mathbf{U}=\mathbf{U}^*} = 0, \quad (11.8)$$

а в скалярна форма (по компоненти), след полагането $\mathbf{Q}^*(t) = \mathbf{B}^T \mathbf{P}^*(t)$, (11.8) добива вида

$$\frac{\partial}{\partial u_j} \left[\frac{1}{2} u_j^2 + u_j q_j \right] \Big|_{u_j=u_j^*} = u_j^* + q_j^* = 0, \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad (11.9)$$

където q_j^* е j -тата компонента на $\mathbf{Q}^*(t)$.

Разглеждат се следните два случая:

1. Ако $|q_j| \leq 1$, то от (11.9) следва $u_j^* = -q_j^*$;
2. Ако $|q_j| > 1$, то от ограничението на управлението (11.2) следва невъзможността на (11.9). В този случай Хамилтонианът получава най-малката си стойност при $u_j^* = -\text{sign } q_j^*$, $j = 1, 2, \dots, r$.

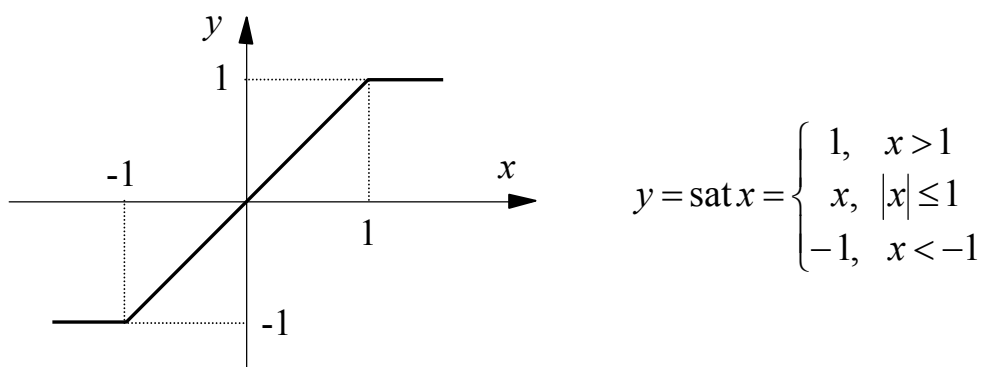
Законът за управление може да се запише във следната форма

$$u_j^*(t) = -\text{sat } q_j^*(t), \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad (11.10)$$

а когато *скалярната функция с насищане* sat по скаларен аргумент, се замени с *векторна функция* sat по векторен аргумент, то (11.10) добива вида

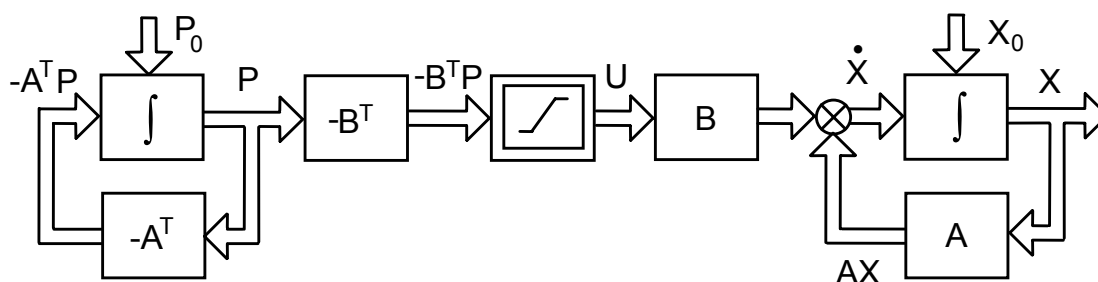
$$\mathbf{U}^*(t) = -\text{sat} \mathbf{Q}^*(t). \quad (11.11)$$

Sat-функцията се използва за математично описание на нелинейния елемент - усилвател с насищане (Фиг.11.1).



Фиг.11.1. sat функция

Недостатъците на решението на задачата за оптимално по разход на енергия управление са същите като при задачите за оптимално по бързодействие и оптимално по разход на гориво управление.



Фиг.11.2. Моделираща схема на отворена система оптимална по разход на енергия

2. Задачи за изпълнение

При зададен от преподавателя обект (линеен неколебателен от втори ред) да се намери оптималният при критерий минимум разход на енергия управляващ закон, като се използва принципът на

минимума. Да се симулира в средата на MATLAB оптималната по бързодействие отворена система и се построят процесите във времевата област и фазовата равнина.

3. Анализ на резултатите

Дискутират се трудностите при определянето на началното условие $\mathbf{P}(0)$. Анализират се недостатъците на отворената форма и възможността за затварянето на системата с помощта на метода на фазовата равнина.

Приложение 1

BELMAN.M

```
clear all
global n1 n2 x1 x2 X Y

% ----- Initialization: -----
n1=11;           % Number of levels for x1;
n2=11;           % Number of levels for x2;
x1Min=-5; x1Max=5; % x1 belongs to [x1Min;x1Max];
x2Min=-4; x2Max=4; % x2 belongs to [x2Min;x2Max];
r=5;             % Number of levels for u (SISO);
uMin=-2; uMax=2; % u belongs to [uMin;uMax];
Kst=20;          % Number of stages (without stage0);
x0=[2;1];        % Initial condition for x=[x1;x2];
xf=[0;0];        % Final condition for x=[x1;x2];
t0=0; tf=15;     % Initial and final time;
key=1;           % Key for final conditions (xf);

% Steps:
delta_x1=(x1Max-x1Min)/(n1-1);
delta_x2=(x2Max-x2Min)/(n2-1);
delta_u=(uMax-uMin)/(r-1);
delta_t=(tf-t0)/Kst;

% x1, x2, u, t - vectors:
x1=x1Min:delta_x1:x1Max;
x2=x2Min:delta_x2:x2Max;
[X,Y]=meshgrid(x1',x2');
u=uMin:delta_u:uMax;
t=t0:delta_t:tf;

% ----- Backwards in time calculations: -----
Uextr=zeros(n2*(Kst+1),n1); % Initialization;
Sold=zeros(n2,n1); J=zeros(1,r); % Initialization;
for i=1:n1
    for j=1:n2
        Sold(j,i)=costfunc([x1(i);x2(j)],0,delta_t);
    end
end
Sold
```

```

% Uextr with dimension  n2*(Kst+1) x n1:
for k=Kst-1:-1:0
    for i=1:n1
        for j=1:n2
            J=[];
            x=[x1(i);x2(j)];
            for l=1:r
                Jnew=costfunc(x,u(l),delta_t);
                xNew=i2plant(x,u(l),delta_t);
                Sinterpol=interp_S(xNew,Sold);
                J=[J Jnew+Sinterpol];
            end
            [Sextr(j,i),index]=min(J);
            Uextr(j+k*n2,i)=u(index);
        end
    end
    Sold=Sextr;
end

% ----- Straightwards in time calculations: -----
Xcurrent=x0; Xextr=[]; Ucurrent=zeros(1,Kst+1);%
xNew=x0;
for k=0:Kst
    Ucurrent(k+1)=interp_u(Xcurrent,Uextr,k);
    xNew=i2plant(Xcurrent,Ucurrent(k+1),delta_t);
    Xextr=[Xextr;Xcurrent'];
    Xcurrent=xNew;
end

% ----- Plot: -----
t_bar=[]; U_bar=[];
for i=1:Kst
    t_bar=[t_bar t(i) t(i+1)];
    U_bar=[U_bar Ucurrent(i) Ucurrent(i)];
end
t_bar=[t_bar t(Kst+1)];
U_bar=[U_bar Ucurrent(Kst+1)];

plot(t,Xextr(:,1)',t,Xextr(:,2)'), hold on
plot(t_bar,U_bar), grid on

```


I2PLANT.M

```
function xdt=i2plant(x,u,delta_t)
xdt=zeros(2,1);
dt=delta_t./10;
for i=1:10
    x(1)=x(1)+x(2).*dt;
    x(2)=x(2)+u.*dt;
end
xdt(1)=x(1);
xdt(2)=x(2);
```

COSTFUNC.M

```
function J=costfunc(x,u,delta_t)
J=(x(1).*x(1)+u.*u).*delta_t;
```

INTERP_S.M

```
function S=interp_S(x,Sold)
global n1 n2 x1 x2 X Y
if x(1)<x1(1)|x(1)>x1(n1)|x(2)<x2(1)|x(2)>x2(n2)
    %disp('Error')
    S=1E+10; % Extrapolation is needed.
else
    S=interp2(X,Y,Sold,x(1),x(2));
end
```

INTERP_U.M

```
function u=interp_u(x,Uextr,k)
global n1 n2 x1 x2 X Y
if x(1)<x1(1)|x(1)>x1(n1)|x(2)<x2(1)|x(2)>x2(n2)
    disp('Error'); % Extrapolation is needed.
    u=0;
else
    u=interp2(X,Y,Uextr(1+k*n2:(k+1)*n2,:),x(1),x(2));
end
```

RK4.M

```
function [tout, yout] = rk4(ypfun, t0, tfinal, y0, h)
% 4th order Runge-Kutta formulas,
% without estimation of the error.
% Initialization
if nargin~=5,error('Wrong number of arguments.');
```

```
end
t = t0; y=y0(:);
chunk = ceil((tfinal-t0)/h)+1;
tout = zeros(chunk,1);
yout = zeros(chunk,length(y));
k = 1;
tout(k) = t; yout(k,:) = y.';
% The main loop
while (t < tfinal) & (t + h > t)
    if t + h > tfinal, h = tfinal - t; end
    % Compute the slopes
    s1 = feval(ypfun,t,y); s1 = s1(:);
    s2 = feval(ypfun,t+h/2,y+h*s1/2); s2 = s2(:);
    s3 = feval(ypfun,t+h/2,y+h*s2/2); s3 = s3(:);
    s4 = feval(ypfun,t+h,y+h*s3); s4 = s4(:);
    % Update the solution
    t = t + h;
    y = y + h*(s1+2*s2+2*s3+s4)/6;
    k = k+1;
    tout(k) = t; yout(k,:) = y.';
end
tout = tout(1:k);
yout = yout(1:k,:);
```

Приложение 2

PONTRYAG.M

```
% Minimum principle
clear all
global k

k=1;
t0=0; tf=5; step=0.005;
x0=[2;1;0.387;1]; % Change x0(3)!

[t,x]=rk4('i2canon',t0,tf,x0,step);
x1=x(:,1); x2=x(:,2);
x3=x(:,3); x4=x(:,4);
u=-sign(k.*x4);
xevk1=sqrt(x1.*x1+x2.*x2);
[xmin,xindex]=min(xevk1)
tmin=t(xindex)

figure(1)
plot(t,x,t,u);
figure(2)
plot(x1,x2,[0],[0],'+')
```

I2CANON.M

```
function xdt=i2canon(t,x)
% i2 plant - canonic system

global k
xdt=zeros(4,1);
xdt(1)=x(2);
xdt(2)=-k.*sign(k.*x(4));
xdt(3)=0;
xdt(4)=-x(3);
```

I2PLANE.M

```
global k
k=1;
delta=0.001;delta=0.0097;
```

```

t0=0; tf=5; step=0.0025;
x0=[2;1]; % Initial condition

[t,x]=rk4('i2sign',t0,tf,x0,step);
x1=x(:,1); x2=x(:,2);
u=-sign(x1+x2.*x2.*sign(x2)./(2.*k));

xevkl=sqrt(x1.*x1+x2.*x2);
m=size(xevkl,1);

for i=1:m
    if xevkl(i,1)<=delta
        xindex=i; tmin=t(i), break
    end
end

figure(1)
plot(t,x1,t,x2,t,u), grid on
figure(2)
plot(x1,x2,[0],[0],'+' ), grid on

```

I2SIGN.M

```

function xdt=i2sign(t,x)
% i2sign State space form of i2 plant
% with sign control input - u.

global k
xdt=zeros(2,1);
u=-sign(x(1)+x(2).*x(2).*sign(x(2))./(2.*k));
xdt(1)=x(2);
xdt(2)=k.*u;

```

Приложение 3

DufW1r.m

```
% OSL for Duffing oscillator - the first right arc
global U

U=1; t0=0; tf=3.6; h=0.005;
x0=[0;0]; % Initial condition for DufBt.m
[t,x]=rk4('DufBt',t0,tf,x0,h);
[m,n]=size(x);
for i=1:m
    if x(i,2)<=0
        x1r(i,:)=x(i,:); t1(i)=t(i);
    else
        break
    end
end
[m,n]=size(x1r);
xx=x1r(1,:); tt=t1(1); pp=53;
for i=1:m
    if i==pp
        xx=[xx;x1r(i,:)]; tt=[tt t1(i)]; pp=pp+53;
    end
end
x1r=[xx;x1r(m,:)]; t1=[tt t1(m)]; [t1' x1r]

save Dw1r t1 x1r
plot(x1r(:,1),x1r(:,2),'ko')
```

DufBt.m

```
function xdt=DufBt(t,x)
% Duffing equation in back time.

global U
xdt=zeros(2,1);
xdt(1)=-x(2);
xdt(2)=-(-x(1)-x(1).^3+U);
```

DufW2l.m

```
% OSL for Duffing oscillator - the second left arc
global U
load Dw1r
[m,n]=size(x1r);
U=-1; t0=0; tf=3.7; h=0.0005;

for i=1:m
    x0=[x1r(i,:) -1 0]'; %Initial condition for DufBtH.m
    [t,x]=rk4('DufBtH',t0,tf,x0,h);
    [m1,n]=size(x);
    for j=10:m1
        if abs(x(j,4))<=0.001
            x2l=[x2l;x(j,1:2)]; break
        end
    end
end
end

save Dw2l
plot(x2l(:,1),x2l(:,2),'ko');
```

DufBtH.m

```
function xdt=DufBtH(t,x)
% Duffing canonic equations (dX/dt and -dH/dX)
% (in back time).

global U
xdt=zeros(4,1);
xdt(1)=-x(2);
xdt(2)=-(-x(1)-x(1).^3+U);
xdt(3)=-(x(4).*(1+3.*x(1).^2));
xdt(4)=-(-x(3));
```

DufW3r.m

```
% OSL for Duffing oscillator - the third right arc
global U
load Dw2l
[m,n]=size(x2l);
U=1; t0=0; tf=3.7; h=0.0005;
```

```

for i=1:m
    x0=[x2l(i,:) 1 0]'; %Initial condition for DufBtH.m
    [t,x]=rk4('DufBtH',t0,tf,x0,h);
    [m1,n]=size(x);
    for j=10:m1
        if abs(x(j,4))<0.001
            x3r=[x3r;x(j,1:2)]; break
        end
    end
end
end

save Dw3r
plot(x3r(:,1),x3r(:,2),'ko')

```

DufClose.m

```

% Duffing oscillator: time optimal closed loop system
global u
load OSL_Duf
n=size(xx,1);
OSL_1=xx(:,1); OSL_2=xx(:,2);
clear xx

x1_arr=[]; x2_arr=[]; t_arr=[]; u_arr=[];
tStep=0.001; delta=0.01;
t0=0; tf=15; t=0;
x0=[2;1]; % Initial condition
x=x0;

for ll=t0:tStep:tf
    for i=1:n-1
        if (x(1)>=OSL_1(i)) & (x(1)<OSL_1(i+1))
            y_line=OSL_2(i);
            u=-sign(x(2)-y_line); break
        elseif x(1)>=OSL_1(n)
            u=-sign(x(2)-OSL_2(n)); break
        elseif x(1)<OSL_1(1)
            u=-sign(x(2)-OSL_2(1)); break
        end
    end
end

```

```

[TT, xx]=rk4('Duf',ll,(ll+tStep),x,tStep);
xx = xx(size(xx,1), :);
x1=xx(1); x2=xx(2);
x=[x1;x2];

x1_arr=[x1_arr x1]; x2_arr=[x2_arr x2];
t=t+tStep; t_arr=[t_arr t];
u_arr=[u_arr u];

xevkl=sqrt(x1.*x1+x2.*x2);
if (xevkl<=delta)
    tmin=t, break
end
end

figure(1)
plot(t_arr,x1_arr,t_arr,x2_arr,t_arr,u_arr);
figure(2)
plot(OSL_1,OSL_2,x1_arr,x2_arr,[0],[0],'+')

```

Duf.m

```

function xdt=duf(t,x)
% State space form of Duffing equation

global u
xdt=zeros(2,1);
xdt(1)=x(2);
xdt(2)=-x(1)-x(1).^3+u;

```


Приложение 4

SatCoef.m

```
% Calculate the coefficients of SAT-controller
OLP_Vertex=[ 0.2038 -0.6044;
             0.6746 -0.8891;
             1.0615 -0.6012;
             1.1795  0.;
             1.5639 -0.8829];
n=size(OLP_Vertex,1);

B=1./OLP_Vertex(:,1);
for i=1:n
    for j=1:n
        if j>i
            Ca(i,j)=OLP_Vertex(i,1)./OLP_Vertex(j,1);
        else
            Ca(i,j)=1;
        end
    end
end
Cb=OLP_Vertex(:,2);

D=det(Ca);
for i=1:n
    Cab=Ca; Cab(:,i)=Cb;
    Db(i,1)=det(Cab);
    A(i,1)=Db(i,1)./D;
end
A_B=[A B]
save SatCoef A B OLP_Vertex
```

DufNear.m

```
global u A B
load SatCoef
n=size(OLP_Vertex,1);
OLPright=[0 0; OLP_Vertex; 2.5 OLP_Vertex(n,2)];
OLPleft=-OLPright;

t0=0; tf=5.9;
delta=0.01; tStep=0.001;
```

```

x0=[1.9;0.5]; % Initial condition
t=0; x=x0;
x1_arr=x0(1); x2_arr=x0(2); t_arr=0; u_arr=0;

for ll=0:tStep:tf
    [tt,x]=rk4('DufSat',ll,(ll+tStep),x,tStep);
    x = x(size(x,1), :);
    x1=x(1); x2=x(2);
    x=[x1;x2];

    x1_arr=[x1_arr x1];
    x2_arr=[x2_arr x2];
    u_arr=[u_arr u];
    t=t+tStep;
    t_arr=[t_arr t];
end

xevkl=sqrt(x1_arr.*x1_arr+x2_arr.*x2_arr);
m=size(xevkl,2);
for i=1:m
    if xevkl(1,i)<=delta
        tmin=t_arr(i), break
    end
end

figure(1)
plot(t_arr,x1_arr,t_arr,x2_arr,t_arr,u_arr);
figure(2)
plot(x1_arr,x2_arr,[0],[0],'+'), hold on
plot(OLPright(:,1),OLPright(:,2)), hold on
plot(OLPleft(:,1),OLPleft(:,2)), hold on

```

DufSat.m

```

function xdt=DufSat(t,x)
% Plant (Duffing equation) with Sat-controller

global u A B
xdt=zeros(2,1);
u=sign(A'*sat(B.*x(1,1))-x(2,1));
xdt(1)=x(2);
xdt(2)=-x(1)-x(1).^3+u;

```

Приложение 5

I. Матрично-векторни изчисления

1. Правила за диференциране [12]

Ако \mathbf{X} е n -мерен вектор стълб, а \mathbf{A} е симетрична матрица с размерност $n \times n$ в сила са следните съотношения:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{X}^T}{d\mathbf{X}} &= \mathbf{I}, & \frac{d\mathbf{X}^T \mathbf{A}}{d\mathbf{X}} &= \mathbf{A}, \\ \frac{d\mathbf{X}^T \mathbf{X}}{d\mathbf{X}} &= 2\mathbf{X}, & \frac{d\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}}{d\mathbf{X}} &= (\mathbf{A}^T + \mathbf{A})\mathbf{X}.\end{aligned}$$

2. Норми на вектор [12]

Евклидовата норма на вектор с координати реални числа е

$$\|\mathbf{X}\| \triangleq \sqrt{\mathbf{X}^T \mathbf{X}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Понякога се използват и други норми, например

$$\|\mathbf{X}\| = \mathbf{X}^T \text{sign } \mathbf{X} = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

3. Представяне на Хамилтониана във вид, удобен за диференциране по \mathbf{P} , \mathbf{X} и \mathbf{U}

Хамилтонианът в принципа на минимума е

$$H(\mathbf{P}, \mathbf{X}, \mathbf{U}) = f_0(\mathbf{X}, \mathbf{U}) + \mathbf{P}^T [\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}],$$

където $f_0(\mathbf{X}, \mathbf{U})$ е подинтегралната функция в критерия за качество, \mathbf{P} - каноничният вектор, а $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}$ - уравнението на състоянието. Като се има предвид правилото за транспониране на произведение на матрици

$$(\mathbf{A}\mathbf{X})^T = \mathbf{X}^T \mathbf{A}^T$$

и се отчете че Хамилтонианът $H(\mathbf{P}, \mathbf{X}, \mathbf{U})$ е скаларна функция ($H^T = H$), се получава

$$\begin{aligned}
H(\mathbf{P}, \mathbf{X}, \mathbf{U}) &= f_0(\mathbf{X}, \mathbf{U}) + \mathbf{P}^T[\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}] = \\
&= f_0(\mathbf{X}, \mathbf{U}) + [\mathbf{P}^T(\mathbf{A}\mathbf{X})]^T + [\mathbf{P}^T(\mathbf{B}\mathbf{U})]^T = \\
&= f_0(\mathbf{X}, \mathbf{U}) + (\mathbf{A}\mathbf{X})^T \mathbf{P} + (\mathbf{B}\mathbf{U})^T \mathbf{P} = \\
&= f_0(\mathbf{X}, \mathbf{U}) + \mathbf{X}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{U}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P}.
\end{aligned}$$

II. Управляемост, наблюдаемост и нормалност на обекти [12]

Многомерен обект за управление от вида

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{X}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t) \\
\mathbf{Y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(t)
\end{aligned} \tag{П5-1}$$

е *напълно управляем* тогава и само тогава, когато матрицата на управляемостта

$$\mathbf{H} = [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B},]$$

има ранг равен на n .

Обектът (П5-1) е *напълно наблюдаем* тогава и само тогава, когато матрицата на наблюдаемостта

$$\mathbf{G} = [\mathbf{C}^T, \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T, (\mathbf{A}^T)^2\mathbf{C}^T, \dots, (\mathbf{A}^T)^{n-1}\mathbf{C}^T,]$$

има ранг равен на n .

Обектът (П5-1) е *нормален* тогава и само тогава, когато е напълно управляем и наблюдаем, и освен това всеки подобект от вида

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{X}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{b}_j u_j(t) \\
y_i(t) &= \mathbf{c}_i^T \mathbf{X}(t)
\end{aligned}$$

също е напълно управляем и наблюдаем. Тук \mathbf{b}_j е j -тият вектор-стълб на матрицата \mathbf{B} , а u_j е j -тата координата на вектора \mathbf{U} .

Управляемостта означава, че

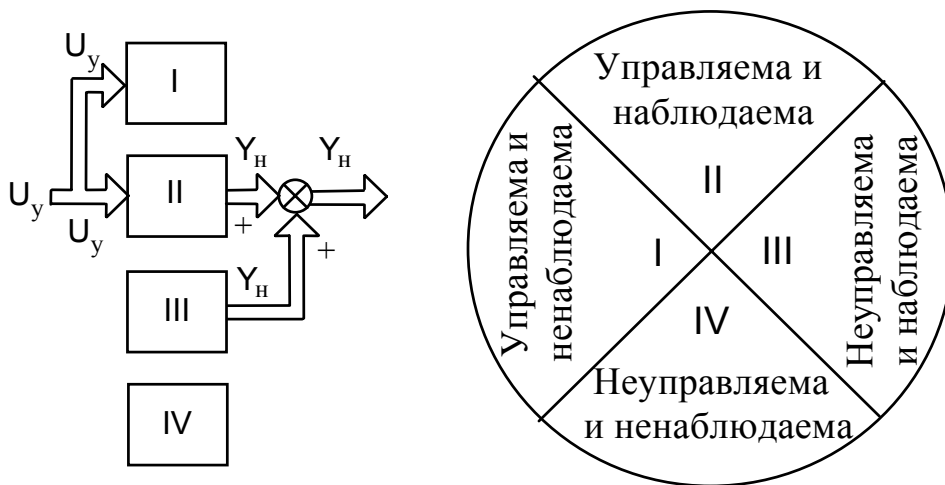
$$|\mathbf{H}_j| \neq 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, r,$$

където матрицата $\mathbf{H}_j = [\mathbf{b}_j, \mathbf{A}\mathbf{b}_j, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_j]$. Ако с \mathbf{c}_i^T се означава i -тият вектор-ред на матрицата \mathbf{C} , а с y_i - i -тата изходна променлива, то пълната наблюдаемост означава, че

$$|\mathbf{G}_i| \neq 0, \forall j = 1, 2, \dots, l,$$

където $\mathbf{G}_i = [\mathbf{c}_i, \mathbf{A}^T \mathbf{c}_i, \dots, (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{c}_i]$. Следователно, за многомерните обекти свойството нормалност е по-силно, отколкото разглежданите заедно характеристики управляемост и наблюдаемост. В едномерния случай ако обектът е управляем и наблюдаем, той е и нормален.

На Фиг.П5-1 схематично са представени различните възможни комбинации на характеристиките управляемост и наблюдаемост. Всяка система (или обект за управление) може най-общо да се разбие на четири възможни подсистеми: управляема и ненаблюдаема (I), управляема и наблюдаема (II), неуправляема и наблюдаема (III), и неуправляема и ненаблюдаема (IV). Управляемостта и наблюдаемостта на цялата система изисква тя да съдържа само подсистемата II. Останалите три подсистеми водят до неработоспособност на цялата система.



Фиг. П5-1 Разбиване на системата на части

ЛИТЕРАТУРА

1. Атанс, М., П. Фалб. *Оптимальное управление*. М., Машиностроение, 1968.
2. Беллман Р. *Динамическое программирование*. М., ИЛ, 1960.
3. Воронов А. А. *Теория автоматического управления*. ч.2, М., Высшая школа, 1986.
4. Гунчев Л. *Оптимально управление*. Основи на техническата кибернетика, т.5, (под редакцията на Н.Наплатанов), С., Техника, 1987.
5. Дамянов, Ч. И., *Бързодействащи регулатори на колебателни обекти с промишлено предназначение*. Дисертация. София, 1984.
6. Ли, Э. Б., Маркус Л., *Основы теории оптимального управления*. М., Наука, 1972.
7. Понтрягин, Л. С. *Оптимальное управление*. Избранные научные труды, т.2, М., Наука, 1988.
8. Проичев, Т. Ф. *Изследване и параметричен синтез на приближено-оптимальни управляващи устройства*. Дисертация. ВМЕИ, София, 1977.
9. Стоянов, С. К. *Оптимизация на технологични обекти*, С., Техника, 1983.
10. Судзиловский, Н. Б., *Основы теории автоматического управления*, М., Машиностроение, 1985.
11. Фельдбаум, А. А. и А.Г. Бутковский, *Методы теории автоматического управления*, М., Наука, 1971.
12. Чаки Ф. *Современная теория управления*. М., Мир, 1975.
13. Юревич, Е. И., *Теория автоматического управления*, Л., Энергия, 1975.

14. Damyanov, Ch., T. Proychev, L. Gunchev. Synthesis of near time-optimal control of oscillatory plants with time-delay, *Proc. of the 9th IFAC World Congress: A Bridge between Control Science and Technology*, Vol.IX, pp.125-130, Budapest, Hungary, 1984.
15. Isidori, A. *Nonlinear Control Systems: An Introduction*. 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
16. Khalil, H. K. *Nonlinear Systems*. 2nd Edition, Prentice Hall, New Jersey, 1996.
17. Lewis, F. L., V. L. Syrmos. *Optimal Control*. John Wiley & Sons, New York, 1995.
18. Vincent, Th. L., W. J. Grantham. *Nonlinear and Optimal Control Systems*. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1997.

Д. ЦАНКОВА М. ПЕТРОВ

ОПТИМАЛНО УПРАВЛЕНИЕ

*Ръководство
за лабораторни
упражнения*

Пловдив 2003

съвременна
теория на
Управлението