21. Синтез на оптимална по бързодействие затворена система.

- Синтез на оптимално управляващо устройство - оптимална линия на превключване.
- Пример.
- Структурна схема на затворена оптимална по бързодействие система.
- Особености.

1. Постановка на задачата.

Разглежда се синтез на оптимално по бързодействие управление на система с един вход

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{b}u(t). \qquad (1)$$

Търси се такова управляващо въздействие $u(\mathbf{X}(t))$, отговарящо на условието $|u| \leq 1$, което да приведе системата (1) от начално състояние $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ в крайно състояние $\mathbf{X}(T) = \mathbf{X}_\mathrm{T}$ за минимално време, т.е. минимизирайки критерия за оптималност

$$I = \int_0^T 1 dt = T \to \min.$$

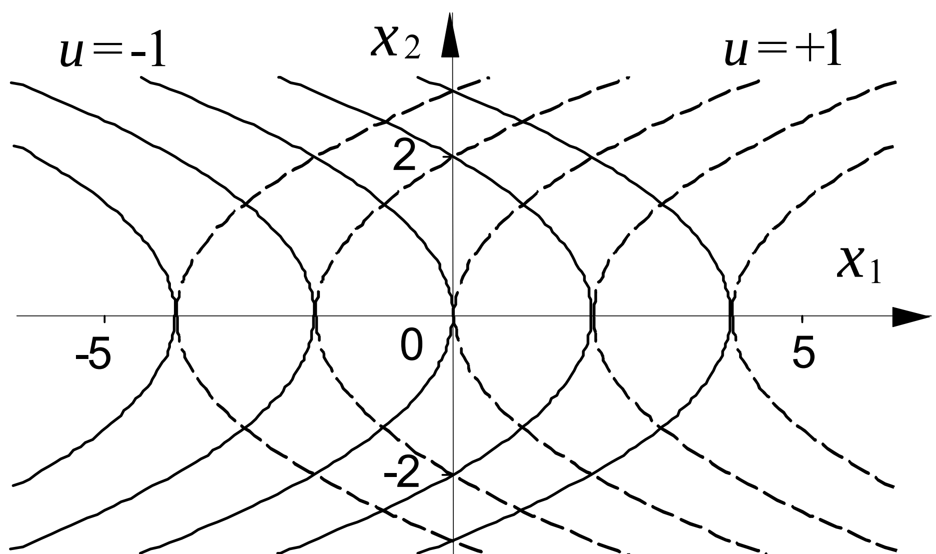
2. Същност на синтеза.

За получаване на управлението като функция на фазовите координати (синтез на оптимална по бързодействие затворена система) се съчетава принципа на максимума с метода на фазовото пространство. Чрез принципа на максимума (минимума) бе установено, че управлението трябва да има релеен двупозиционен характер. Замества се $u = \pm 1$ в (1):

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{b} \ , \qquad (2)$$

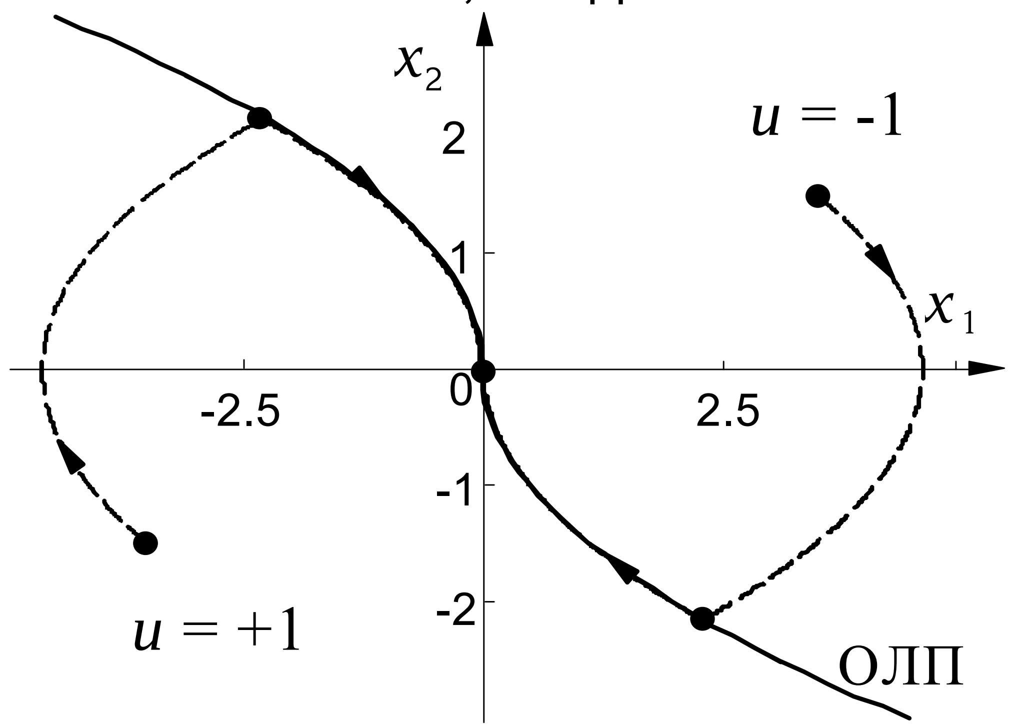
$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) - \mathbf{b} \ . \qquad (3)$$

Фазовите портрети на (2) и (3) са две семейства траектории: (графиката съответствува на обект - две интегриращи звена).



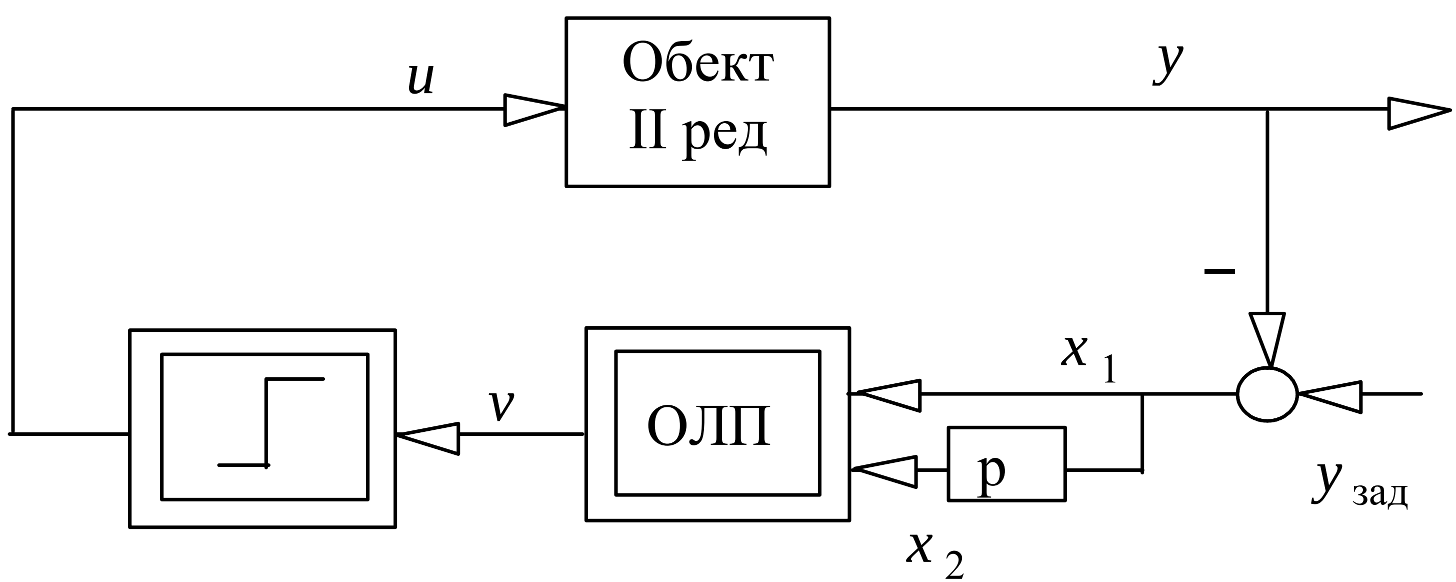
21. Синтез на оптимална по бързодействие затворена система.

Нека фазовите координати на с-мата са грешката и нейните производни. Крайна точка $\mathbf{x}_{\mathrm{T}}$ е началото на координатната с-ма. Движейки се от произволна точка във фазовата равнина, за да достигне координатното началото, с-мата трябва да попадне върху нулевите фазови траектории на двете семейства във II и IV квадрант. Двете части от нулевите фазови траектории на двете семейства се наричат *оптимална линия на превключване* (ОЛП). ОЛП разделя фазовата равнина на две полуравнини - в горната управлението е $u = -1$, а в долната - $u = +1$.



3. Структурната схема на затворената оптимална по бързодействие система

Нека в един блок бъде реализирана ОЛП (в аналогов или цифров вид). На входа на този блок постъпват текущите фазови координати x_1 и x_2 на системата и се сравняват с ОЛП: ако те са над нея се подава управление $u = -1$, в противен случай $u = +1$. Структурната схема на затворената оптимална по бързодействие система е:



4. Особености на решението.

1. Оптималното по бързодействие управление е отсечково-постоянно, приемащо стойности $u = \pm 1$;

2. Управлението сменя знака си в зависимост от знака на превключващата функция $v(\mathbf{X}(t))$; управлението $u(\mathbf{X}(t))$ е функция на фазовите координати и системата е затворена;

3. Техническата реализация на ОЛП може да бъде доста сложна. Затова е целесъобразно да се намери съвпадаща по знак нейна апроксимация с по-проста техническа реализация.

4. Тъй като елементите реализиращи оптималната система за управление не са идеални, процесите в системата се отклоняват несъществено от оптималните. В координатното начало се получават автоколебания с малка амплитуда и висока честота. За премахване на този ефект може да се въведе допълнителен (линеен) регулатор, който се включва след приключване на оптималния процес и работи в околността на координатното начало.

5. Пример.

Разглежда се обект с предавателна функция

$$W(p) = \frac{k}{p^2}, \qquad \text{където } k = 1.$$

Диференциалното у-ние е: $\dfrac{d^2 y(t)}{dt^2} = ku(t)$.

След полагането $x_1 = y$ и $x_2 = \dot{y}$ уравненията на състоянието е:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \ , \tag{4}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = ku \ . \tag{5}$$

След разделяне (5) на (4) се изключва времето *t* .

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{ku}{x_2}. \tag{6}$$

Фазовият портрет на системата се получава като решение на (6). Тъй като $u = \pm 1 = const$, след разделяне на променливите и интегриране на (6) се получава

$$x_1 = \frac{1}{ku}\frac{x_2^2}{2} + C. \tag{7}$$

21. Синтез на оптимална по бързодействие затворена система.

C се определя от началните условия $x_1(0) = x_{10}$ и $x_2(0) = x_{20}$:

$$C = x_{10} - \frac{1}{ku}\frac{x_{20}^2}{2}. \tag{8}$$

От (8) и (7) се получават уравненията на фазовите траектории:

$$x_1 = \frac{1}{ku}\frac{x_2^2}{2} + x_{10} - \frac{1}{ku}\frac{x_{20}^2}{2}.$$

След заместване на $k = 1$ и $u = \pm 1$ се получават двете фамилии:

1) при $u = +1$: $$x_1 = \frac{x_2^2}{2} + x_{10} - \frac{x_{20}^2}{2},$$

2) при $u = -1$: $$x_1 = -\frac{x_2^2}{2} + x_{10} + \frac{x_{20}^2}{2}.$$

Частта на нулевата фазова траектория на първото семейство ($u = +1$), която води към координатното начало е в IV квадрант. Аналогичната крива за второто семейство ($u = -1$) е във II квадрант. Двете криви се обединяват чрез следния запис

$$x_1 = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x_2^2}{2}, x_2 < 0 \\ -\dfrac{x_2^2}{2}, x_2 > 0 \end{array}\right\}, \tag{9}$$

21. Синтез на оптимална по бързодействие затворена система.

Двете обединени криви: $$x_1 = \begin{cases} \dfrac{x_2^2}{2}, x_2 < 0 \\ -\dfrac{x_2^2}{2}, x_2 > 0 \end{cases}, \qquad (9)$$

могат да се представят като

$$x_1 = -\frac{x_2^2}{2}\operatorname{sign} x_2 . \qquad (10)$$

В съответствие с (10) се полага

$$v = -(x_1 + \frac{x_2^2}{2}\operatorname{sign} x_2) = 0 .$$

Когато изобразяващата точка се намира върху ОЛП $v = 0$, а над и под нея съответно - $v < 0$ и $v > 0$. Ако изобразяващата точка се намира над ОЛП, за да стигне до нея системата трябва да се движи по траекториите на второто семейство, т.е. $u = -1$, и обратното - под ОЛП $u = +1$. Оптималният закон на управление се избира във вида

$$u = \operatorname{sign} v = -\operatorname{sign}(x_1 + \frac{x_2^2}{2}\operatorname{sign} x_2) .$$

21. Синтез на оптимална по бързодействие затворена система.

Съгласно теоремата на Фелдбаум за разглежданата система, която е линейна и неколебателна, управлението има най-много два интервала на постоянство (едно превключване на релето).