6. Метод на фазовата равнина за изследване на САУ.

- Получаване на уравненията на фазовите траектории.
- Особени точки.
- Фазови портрети на типови линейни системи от II ред.

1. Основни понятия.

- ***Фазовото пространство*** е такова пространство, в което движението на системата се изобразява с непресичащи се траектории така, че на всяко начално състояние на системата еднозначно съответствува нейното по-нататъшно поведение. Координатите, които определят това пространство се наричат ***фазови координати***.

- На всяко моментно състояние на системата съответствува една точка, наречена ***изобразяваща точка***.

- При изменение на състоянието на системата се изменя положението на изобразяващата точка във фазовото пространство; Траекторията на това преместване се нарича ***фазова траектория***.

- Съвкупността от фазови траектории образува ***фазов портрет*** (ФП). Фазовият портрет дава геометрична представа за динамиката на процесите в САР.

6. Метод на фазовата равнина за изследване на САУ.

- *Времето не участвува като фазова координата*, а е отразено в неявен вид. ФП не дава представа за протичане на процесите във времето. Той служи само за ***качествена характеристика*** на динамиката на САР.

- За инженерните изследвания използването на n –мерното ФП е свързано със значителни трудности. Затова най-често се използва ***фазовата равнина***, която дава възможност да се изследват нелинейни системи, които се описват с диференциални уравнения от втори ред.

- Фазовите променливи в този случай са x и $y = dx/dt$. Уравненията описващи системата са:

$$\frac{dx(t)}{dt} = y(t),$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(x(t), y(t)).$$

6. Метод на фазовата равнина за изследване на САУ.

- Като се раздели второто на първото уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = y(t), \qquad (1)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(x(t), y(t)). \qquad (2)$$

се получава диференциалното уравнение на интегрална крива във фазовата равнина - фазова траектория:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y}.$$

- През всяка точка на фазовата равнина минава една единствена траектория. Изключение правят само така наречените ***особени точки*** (***равновесни състояния***), в които едновременно $y = 0$ и $f(x, y) = 0$.

2. Фазови портрети на линейни системи..

- За илюстрация ще използваме следния ***пример***:

  Разглеждаме линейна система с ПФ:

$$W(s) = \frac{k}{s^2}$$

Диференциалното уравнение е от вида:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = ku(t)$$

Описанието в ПС е от вида:

$$\frac{dx(t)}{dt} = y(t), \qquad (1)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = ku(t). \qquad (2)$$

Уравнението на фазовите траектории се получава след като от горната система изключим времето t чрез деление (2) : (1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ku}{y}.$$

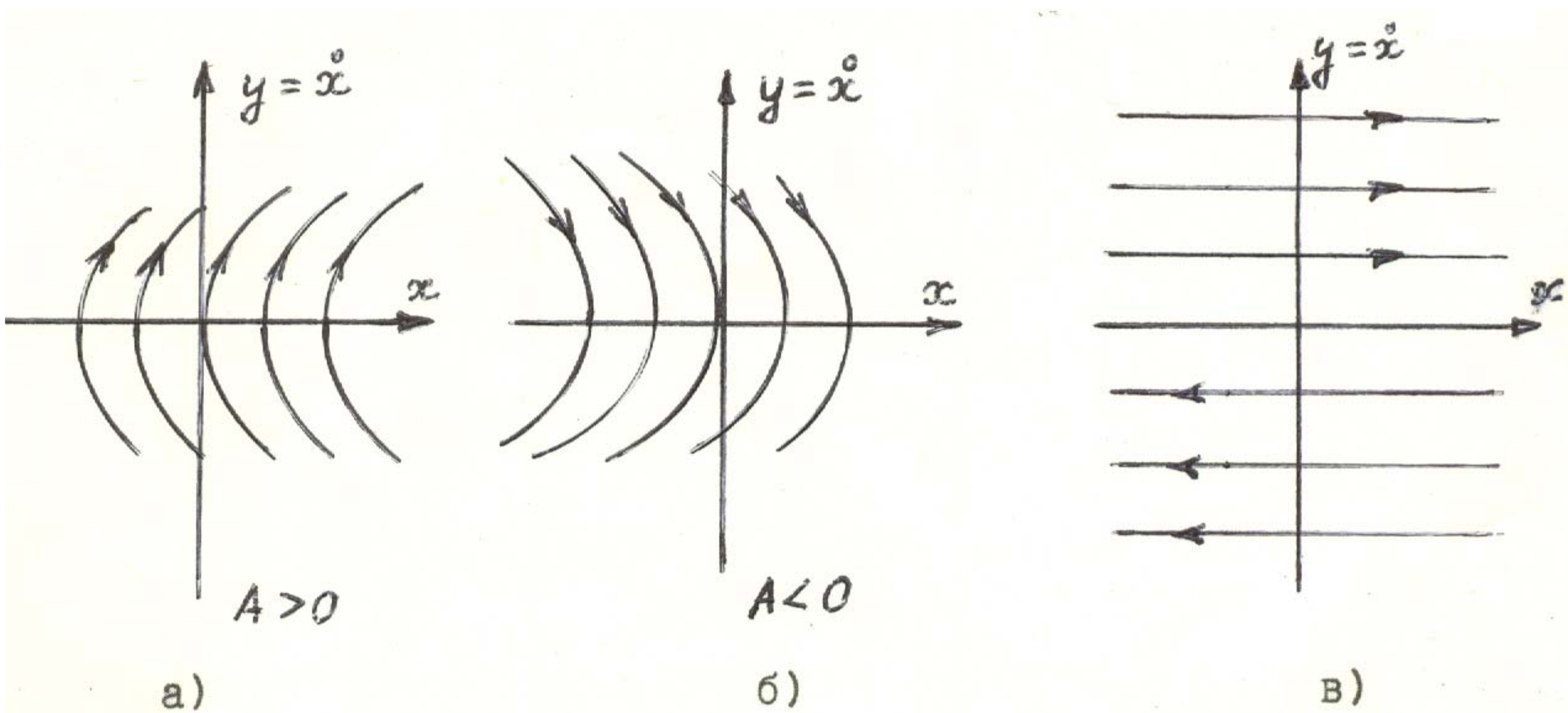
6. Метод на фазовата равнина за изследване на САУ.

1) Нека входното въздействие $u(t) = A = const$

$$ydy = kAdx, \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y^2}{2kA} + const \; .$$

2) Нека $u(t) = 0$ (свободно движение на системата)

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad \Rightarrow \quad y(x) = const \; .$$



6. Метод на фазовата равнина за изследване на САУ.

В най-общ вид една линейна система от II ред се записва така:

ПФ: $$W(s) = \frac{k}{a_0 s^2 + a_1 s + 1}$$

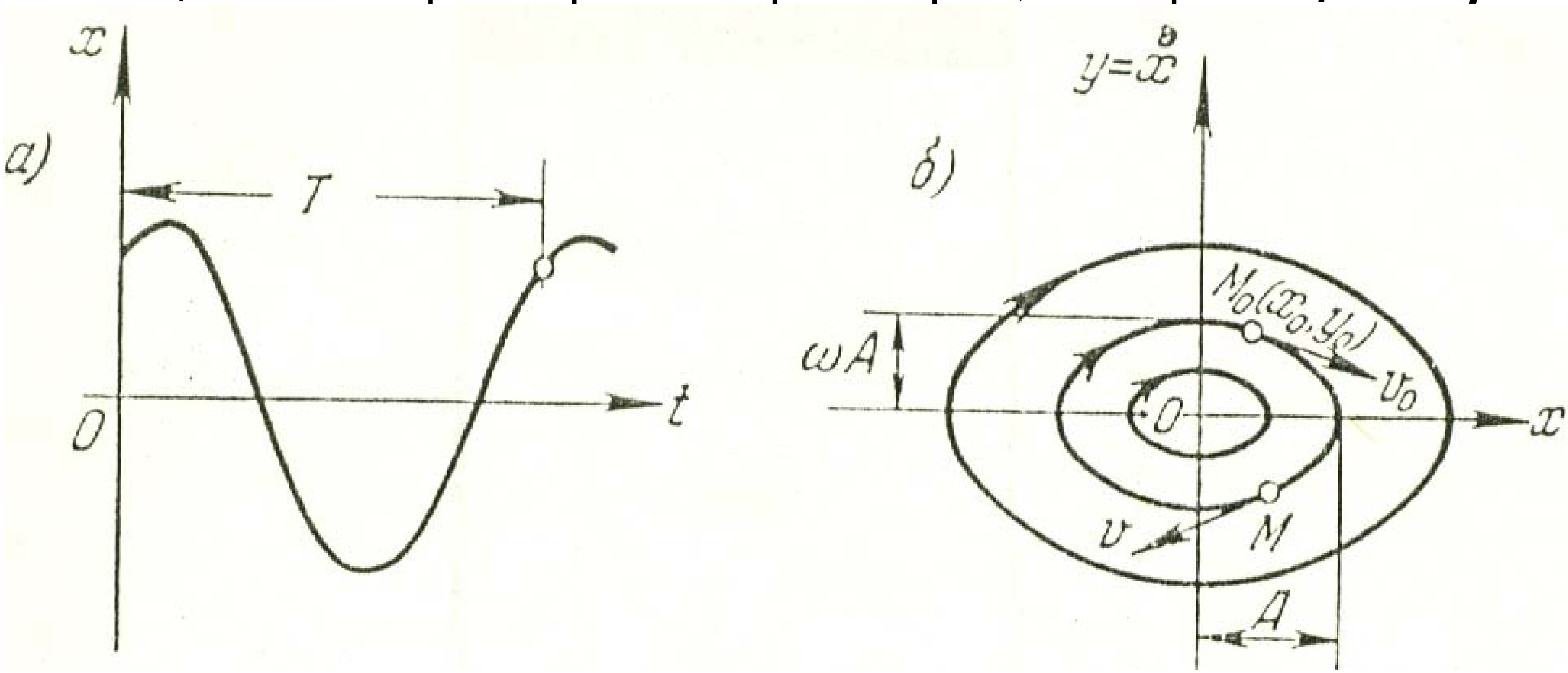
ДУ: $$a_0 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = ku(t)$$

В зависимост от корените на характеристичното уравнение се наблюдават следните случаи:

- Чисто имагинерни корени
- Реални отрицателни корени
- Реални положителни корени.
- Комплексно-спрегнати корени с отрицателна реална част.
- Комплексно-спрегнати корени с положителна реална част.
- Реални корени с различни знаци.

(1). Чисто имагинерни корени: *линейна консервативна с-ма, с незатихващи колебания*.

ФП: концентрични елипси и особена точка (0;0). Особена точка, през която не минава нито една фазова траектория и се обхваща от затворени фазови траектории, се нарича ***център***.

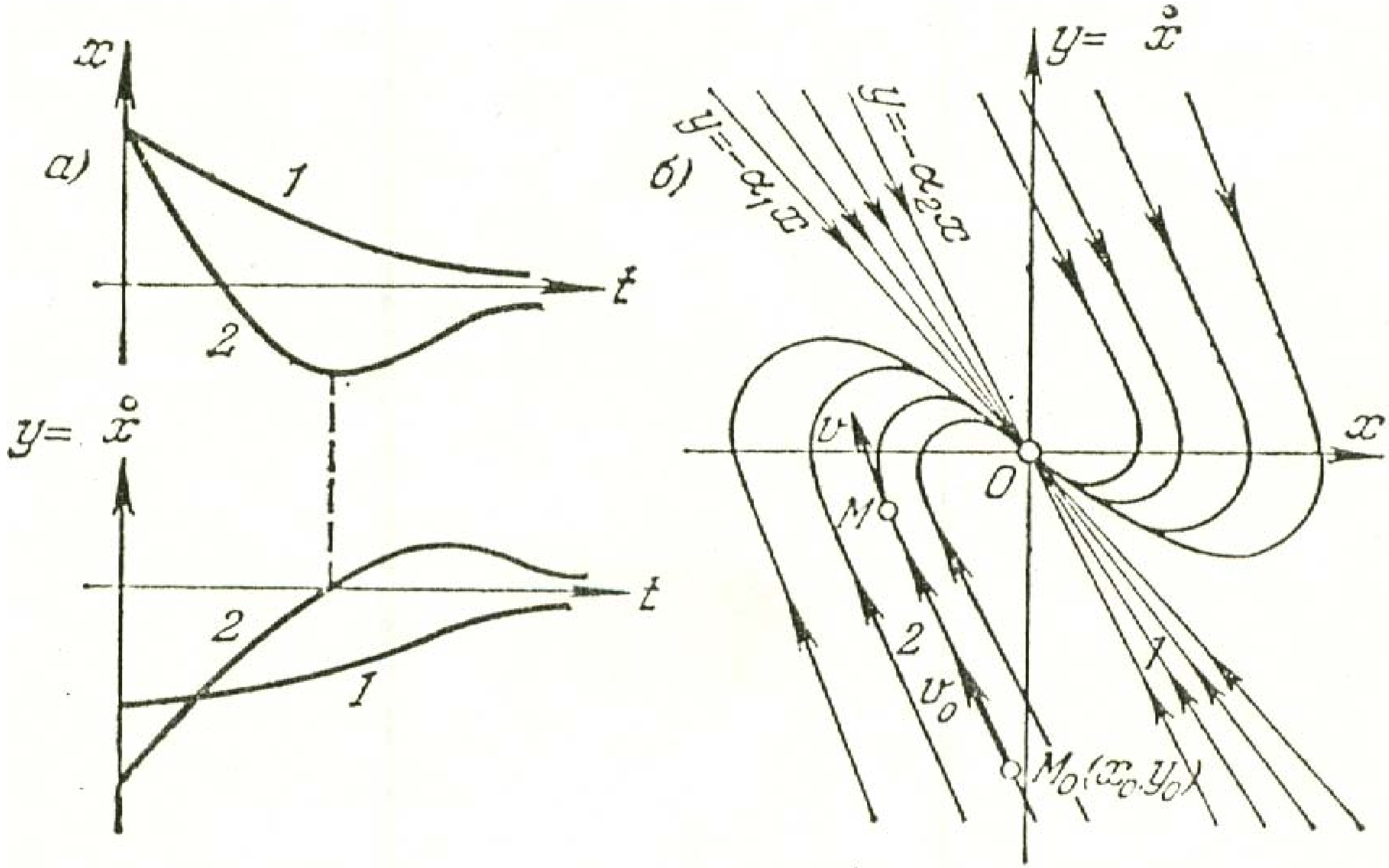


A - амплитуда на незатихващите колебания

ω [rad/s] - честота на незатихващите колебания

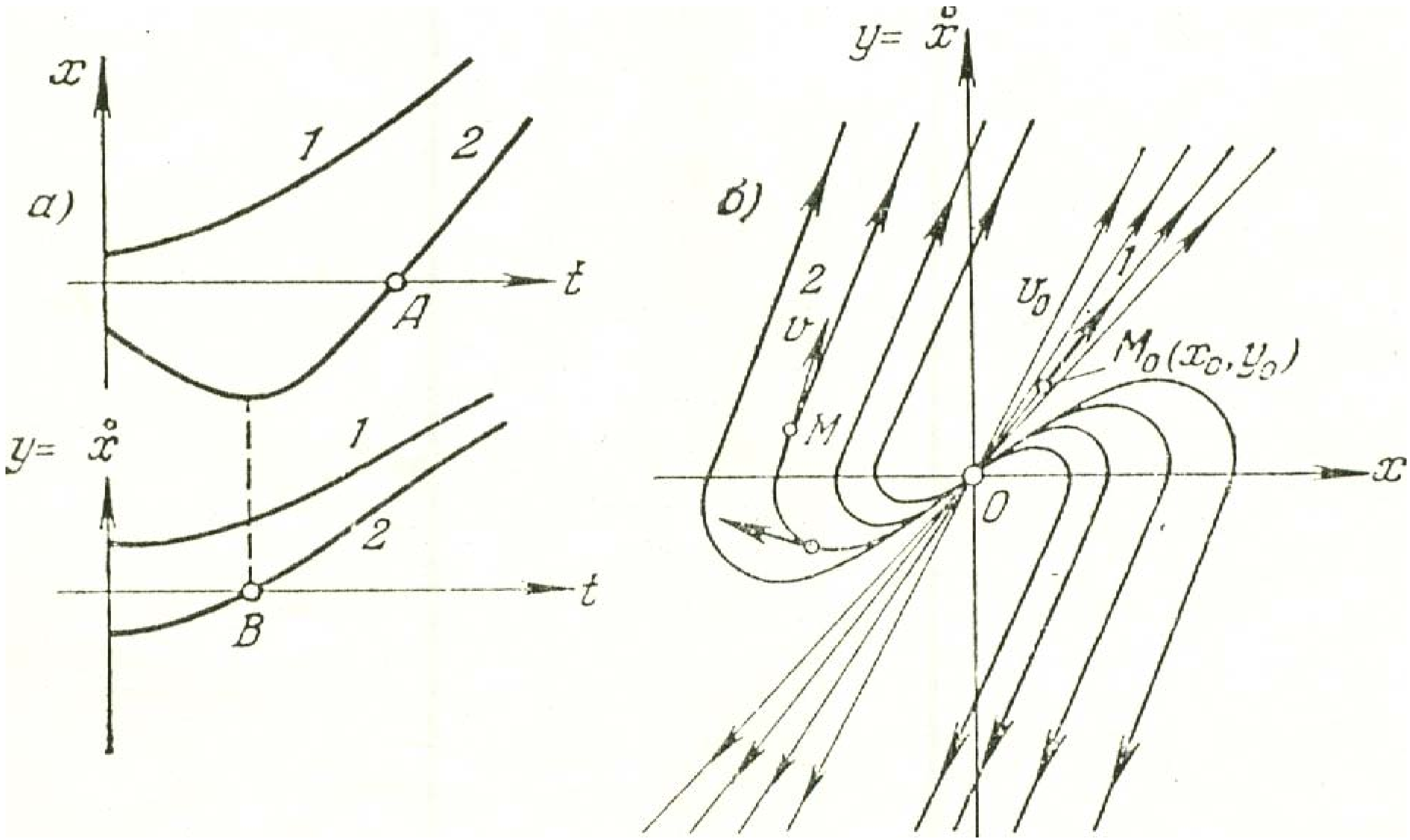
T [s] - период на незатихващите колебания

(2). Реални отрицателни корени: На траекториите “1” съответства монотонен апериодичен процес, а на ”2” - апериодичен с пререгулиране. Точката (0;0) е особена точка - ***устойчив възел***, тъй като всички траектории се "вливат" в нея. Той съответства на устойчиво равновесно състояние.



(3). Реални положителни корени:

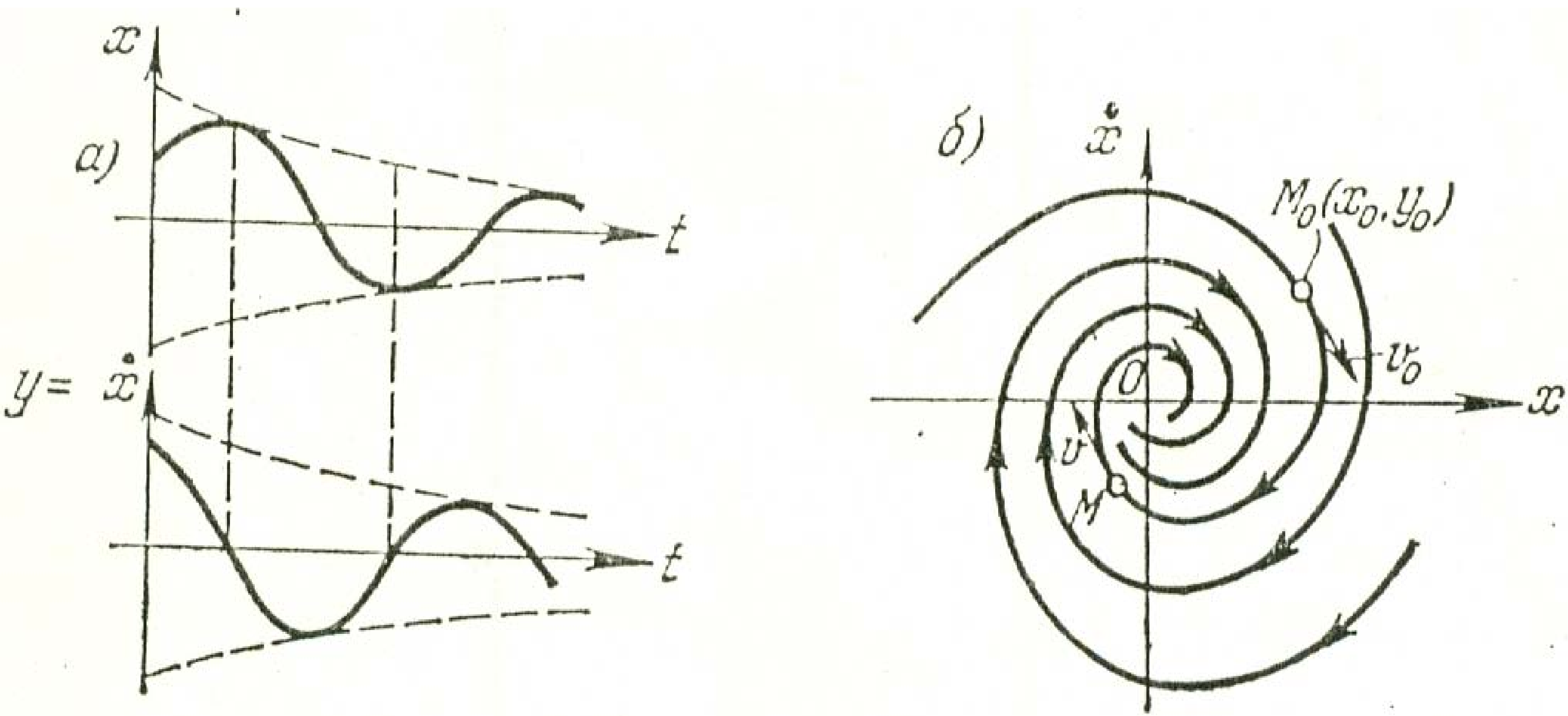
Фазовият портрет съответства на ***неустойчива система*** *с апериодичен преходен процес*. Точката (0;0) е особена точка, наречена ***неустойчив възел***.



(4). Комплексно-спрегнати корени с отрицателна реална част:

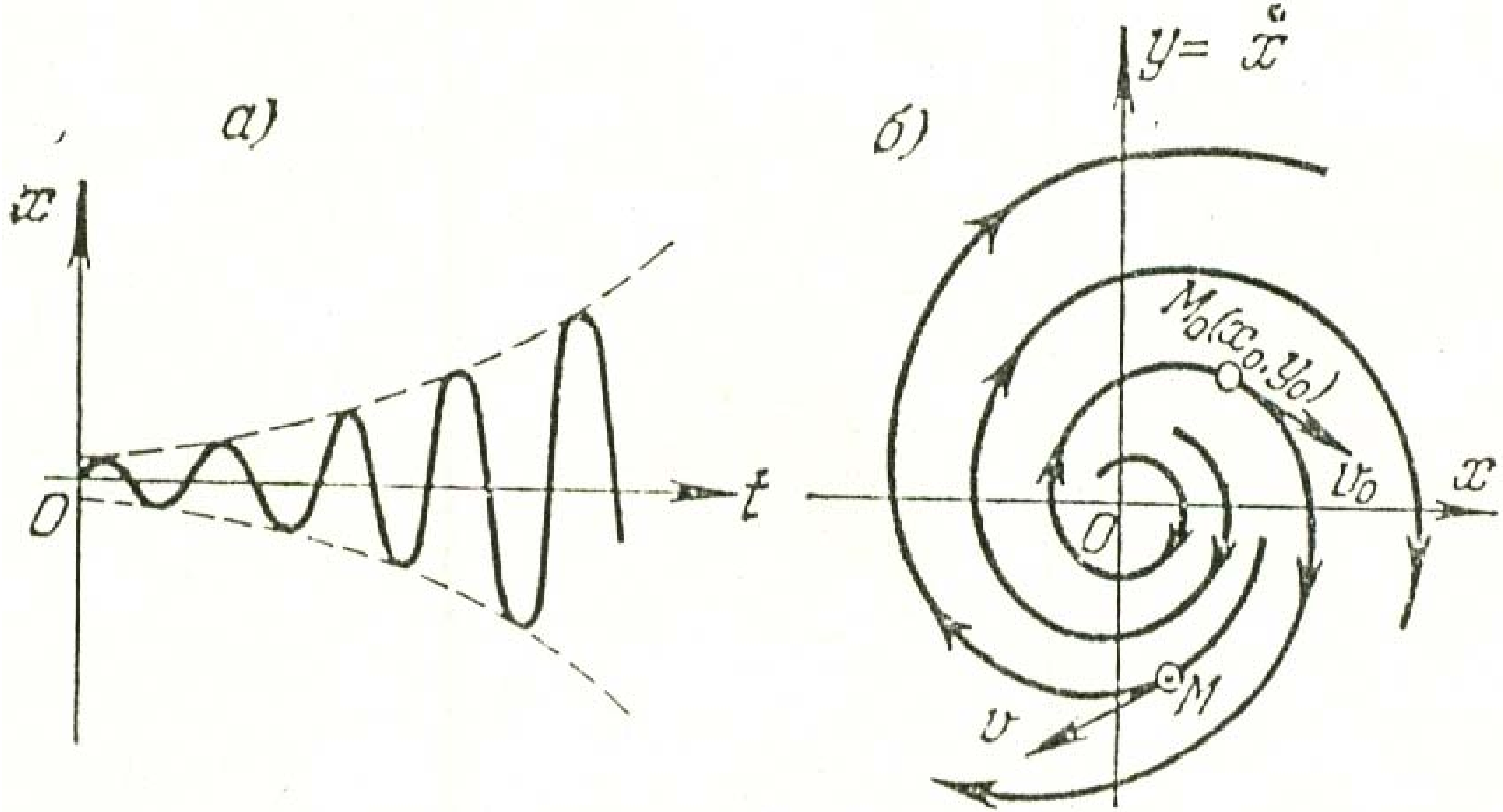
Преходният процес е ***устойчив колебателен***, а фазовият портрет се състои от сходящи спирали.

Точката (0;0) е особена точка, наречена ***устойчив фокус***.



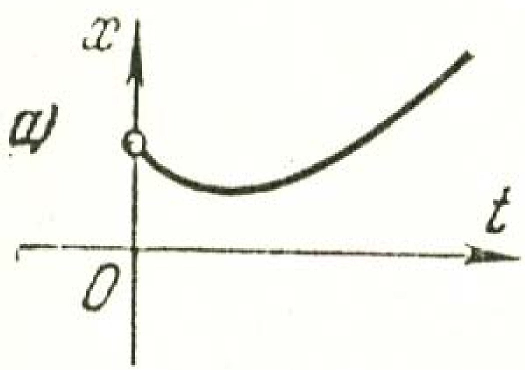
(5). Комплексно-спрегнати корени с положителна реална част:

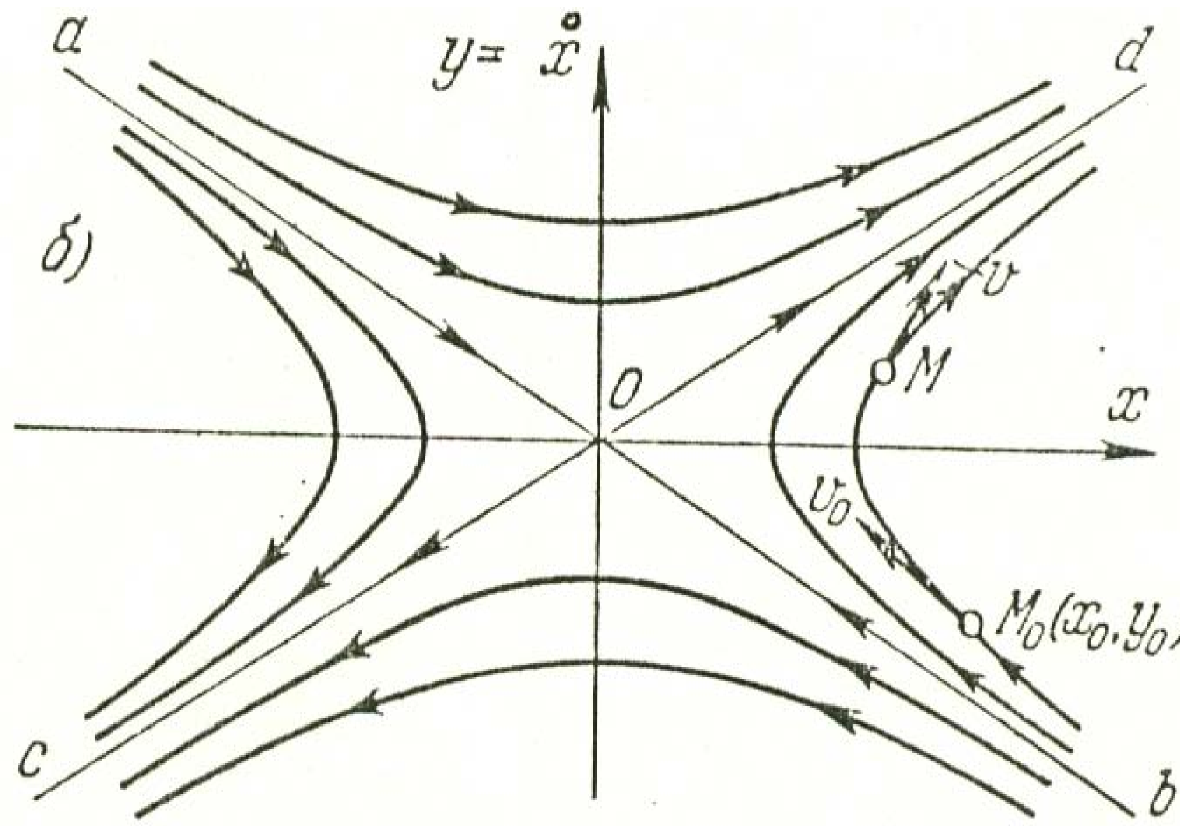
Системата е ***неустойчива*** с ***колебателен*** *преходен процес* с нарастваща амплитуда. Фазовият портрет е с развиващи се от центъра към периферията спирали. Особената точка (0;0) е ***неустойчив фокус***.



(6). Реални корени с различни знаци:

Системата е ***неустойчива*** с ***апериодичен*** *преходен процес*. Фазовият портрет се състои от семейство хиперболи, за които изобразяващата точка, движеща се по тях, се отдалечава от координатното начало. Особената точка (0;0) се нарича ***седло*** и винаги е ***неустойчиво***.

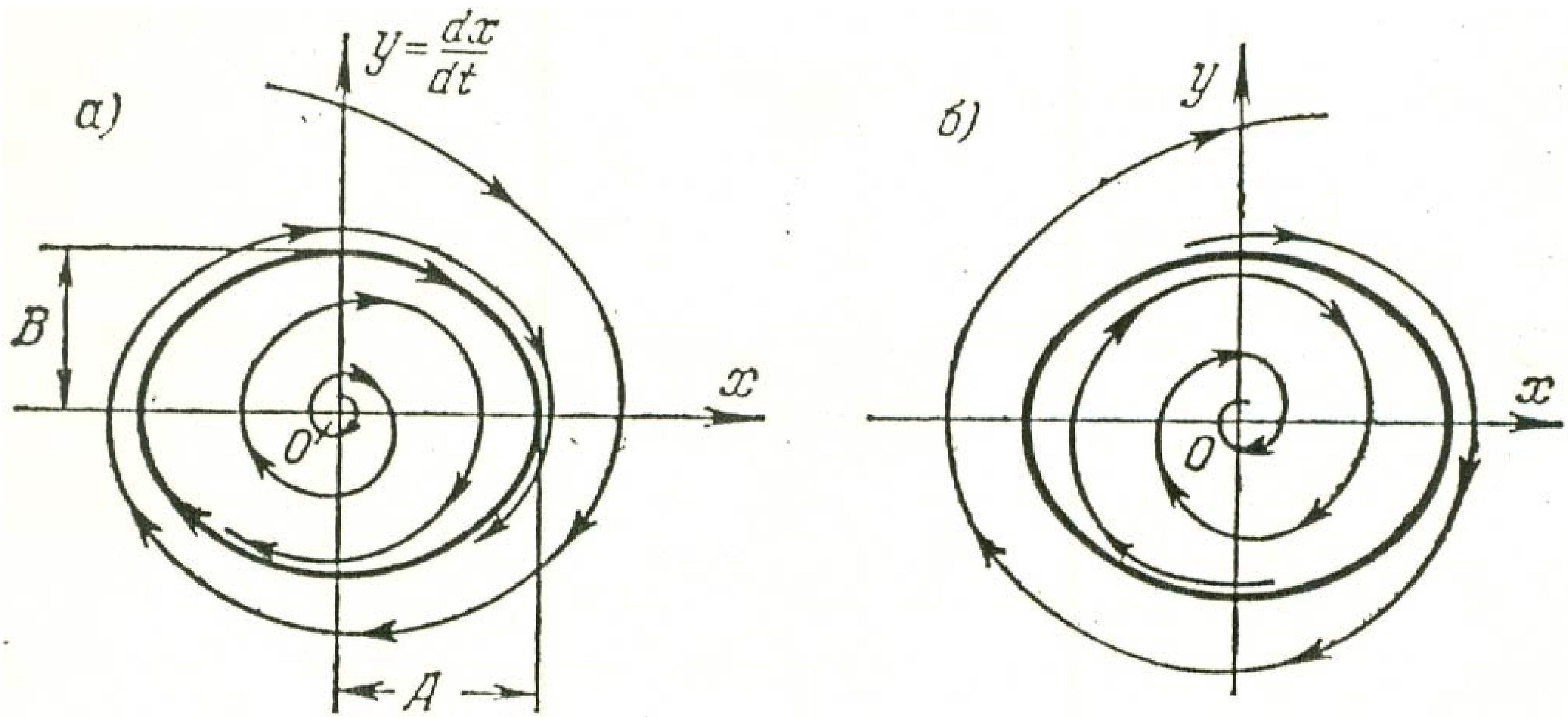




7. Построяване на фазови траектории на нелинейни системи. Гранични цикли, анализ.

- Гранични цикли.
- Анализ на гранични цикли – устойчивост и автоколебания.
- Пример.

- ***Граничните цикли*** са отделни особени изолирани затворени фазови траектории, които се срещат в нелинейни системи. Характерна особеност е, че всяка траектория, съседна на затворена траектория, не е затворена. Тя или се "навива" на граничния цикъл или се "отвива" от него, като в зависимост от това граничният цикъл е съответно: ***устойчив*** (*а*) или ***неустойчив*** (*б*).



7. Построяване на фазови траектории на нелинейни системи.

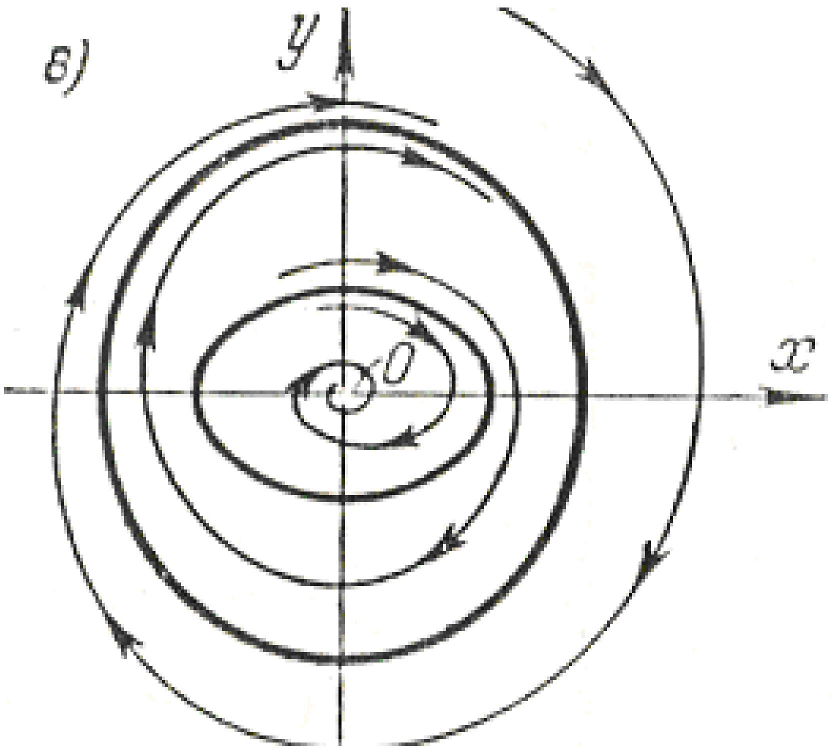
- Ако фазовите траектории от едната страна на граничния цикъл се "навиват" към него, а от другата страна се "отвиват", той се нарича ***полуустойчив***.

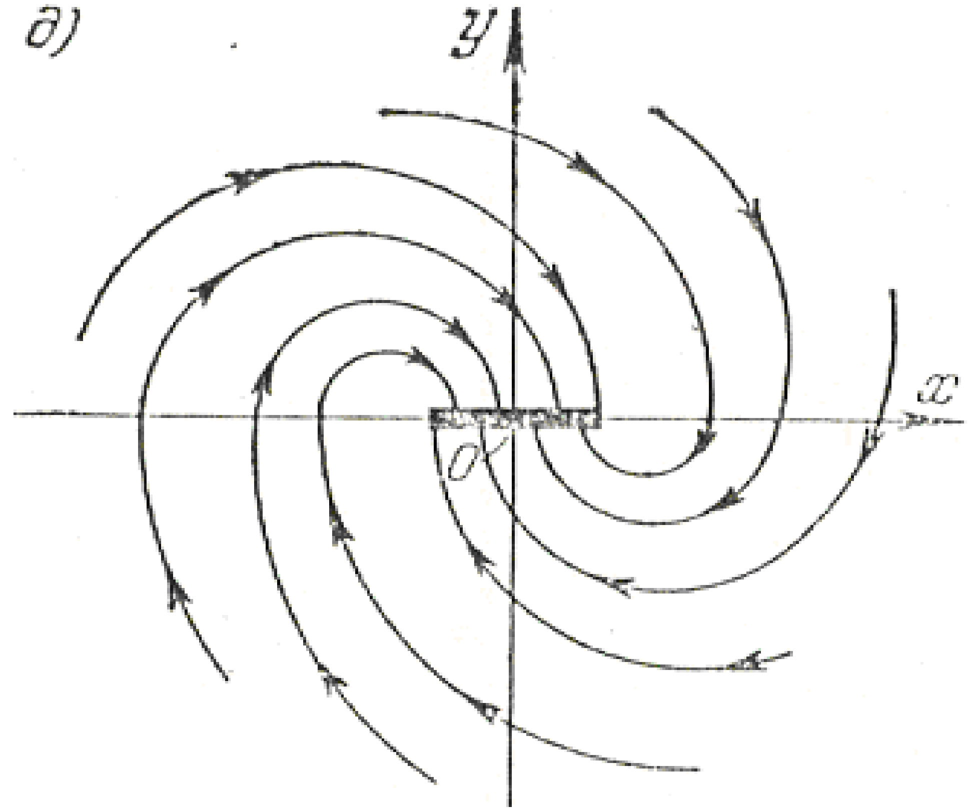
- При устойчив граничен цикъл, където и да се намира изобразяващата точка (тъй като всички траектории се схождат към граничния цикъл), след известно време тя попада върху него. В системата се установява ***периодичен режим***, *който* ***не зависи от началните услови****я*. Възникналите колебания са дълготрайни (устойчиви) и се наричат ***автоколебания***.

- Когато системата има *няколко гранични цикъла*, съответствуващи на една и съща особена точка, тогава ***неустойчивите*** и ***устойчивите*** цикли винаги ***се редуват*** (*в*).

- В системите със зона на нечувствителност и със сухо триене съществуват области на "застои", когато установеното състояние съответства не на една точка, а на цяла област от възможни равновесни състояния (*д*).

7. Построяване на фазови траектории на нелинейни системи.





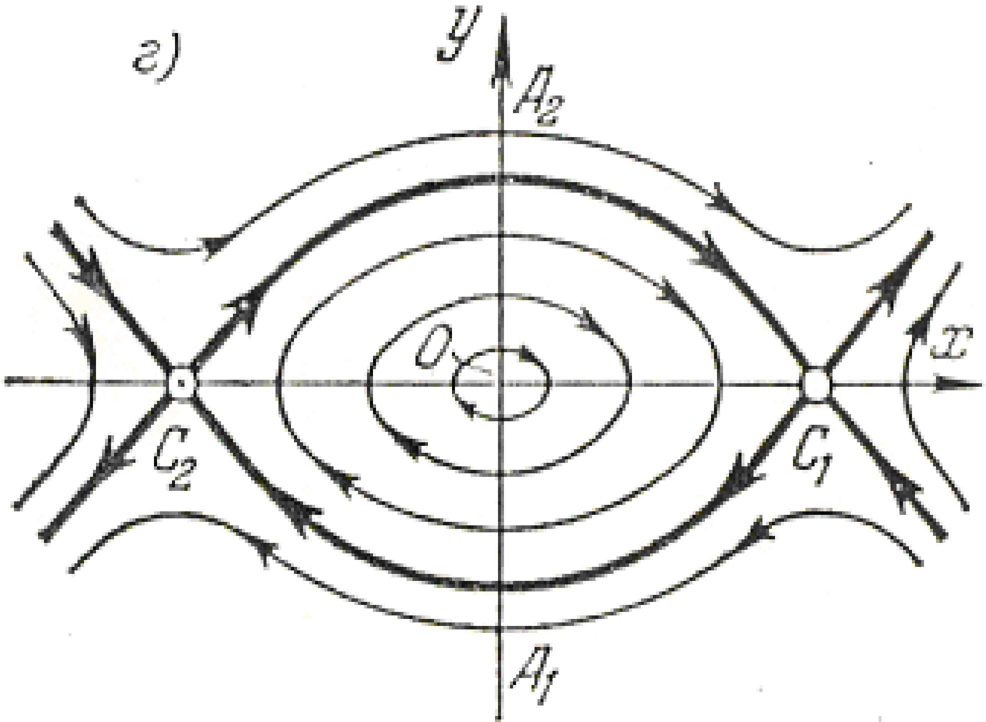
(в) редуващи се неустойчиви и устойчиви цикли

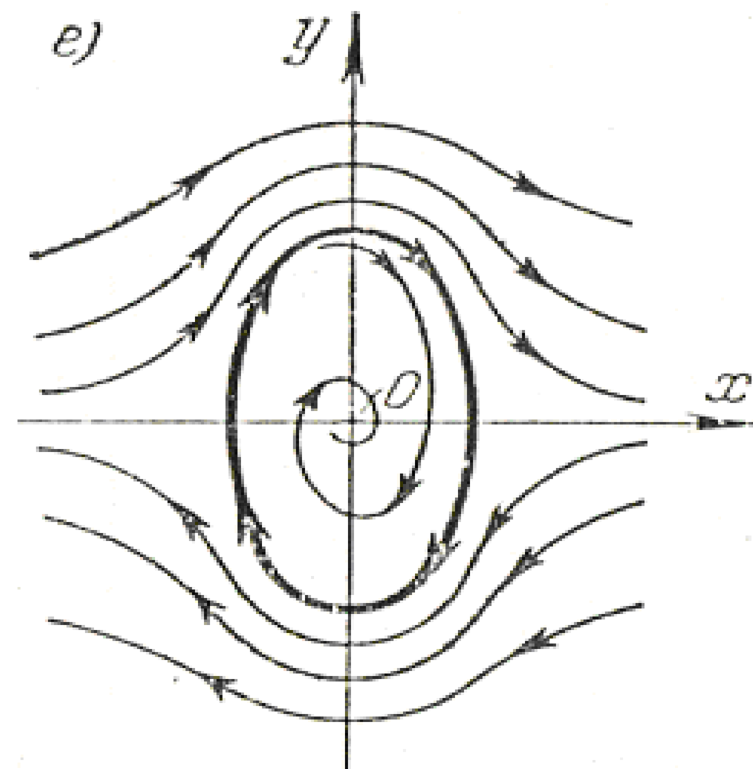
(д) цяла област от възможни равновесни състояния

7. Построяване на фазови траектории на нелинейни системи.

- Показани са фазовите портрети на системи, които при ***малки отклонения*** реагират като ***линейни*** ((*г*) - чисто имагинерни корени; (*е*) - комплексни с отрицателна реална част), а при ***големи отклонения*** се проявява ***нелинейността*** на системите.

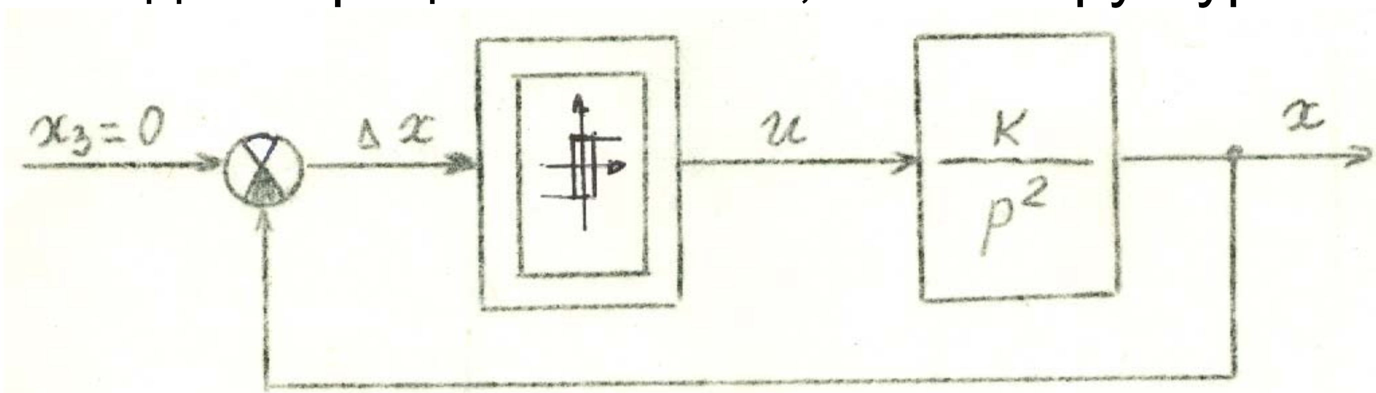
- Кривите $C_1A_1C_2$ и $C_2A_2C_1$ са особени линии, наречени ***сепаратриси*** –(*г*).





- НСАР, които могат да се разделят на области, във всяка от които системата има линейно поведение се наричат ***отсечково-линейни***.
- **Пример:**

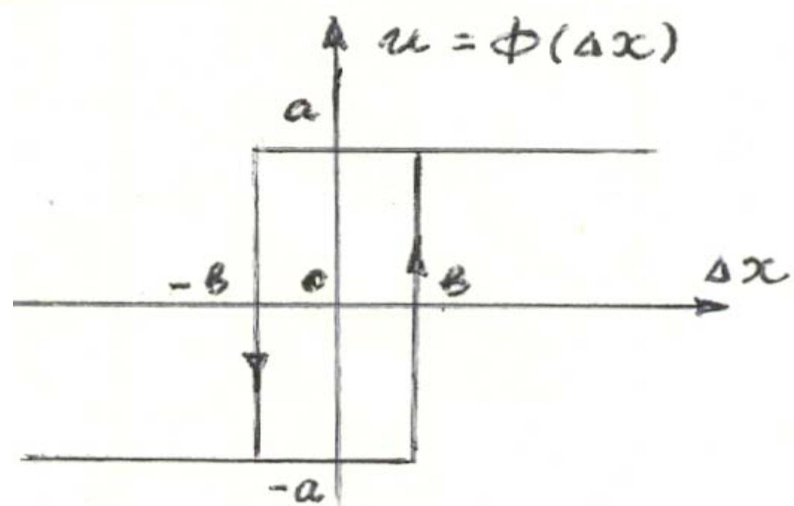
Да се изследват процесите в САР, чиято структурна схема



където $k=10$, а поляризованото реле има статична характеристика със следните параметри:

$a=1$,

$b=0.2$.



7. Построяване на фазови траектории на нелинейни системи.

Решение:

Уравнението, описващо релето, е

$$\Phi(x)=\begin{cases}-a, \text{при } \ x\le -b,\ \dot{x}\le 0 \ \cup \ x\le b,\ \dot{x}\ge 0 & (1)\\ a, \text{при } \ x> -b,\ \dot{x}< 0 \ \cup \ x> b,\ \dot{x}> 0 & (2)\end{cases}$$

Уравнението на суматора е

$$\Delta x = x_3 - x = -x$$

Тъй като статичната характеристика на релето е нечетна функция, то е изпълнено

$$u=\Phi(\Delta x)=\Phi(-x)=-\Phi(x)$$

Описанието на линейната част на системата е

$$x(s)=\frac{k}{s^2}U(s)=-\frac{k}{s^2}\Phi[x(s)],$$

$$\ddot{x}(t)=ku(t)=-k\Phi(x)=-k\begin{cases}-a, \dots\dots\dots\dots & (1)\\ a, \dots\dots\dots\dots & (2)\end{cases}$$

$$\ddot{x}(t)=\pm ka$$

7. Построяване на фазови траектории на нелинейни системи.

В пространство на състоянията

$$\dot{x} = y\ ,\qquad (3)$$

$$\dot{y} = \pm ka\ ,\qquad (4)$$

$$\frac{(4)}{(3)}: \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \pm\frac{ka}{y}$$

$$\frac{y}{\pm ka}dy = dx\ ,$$

$$x = \pm\frac{y^2}{2ka} + C_1\ ,\qquad (5)$$

където C_1 е интеграционна константа, която се намира от началните условия ($t = t_0$; $x = x_0$; $y = y_0$)

$$x = \pm\frac{y^2}{2ka} + C_1 \Rightarrow C_1 = x_0 \mp \frac{y_0^2}{2ka}\ .$$

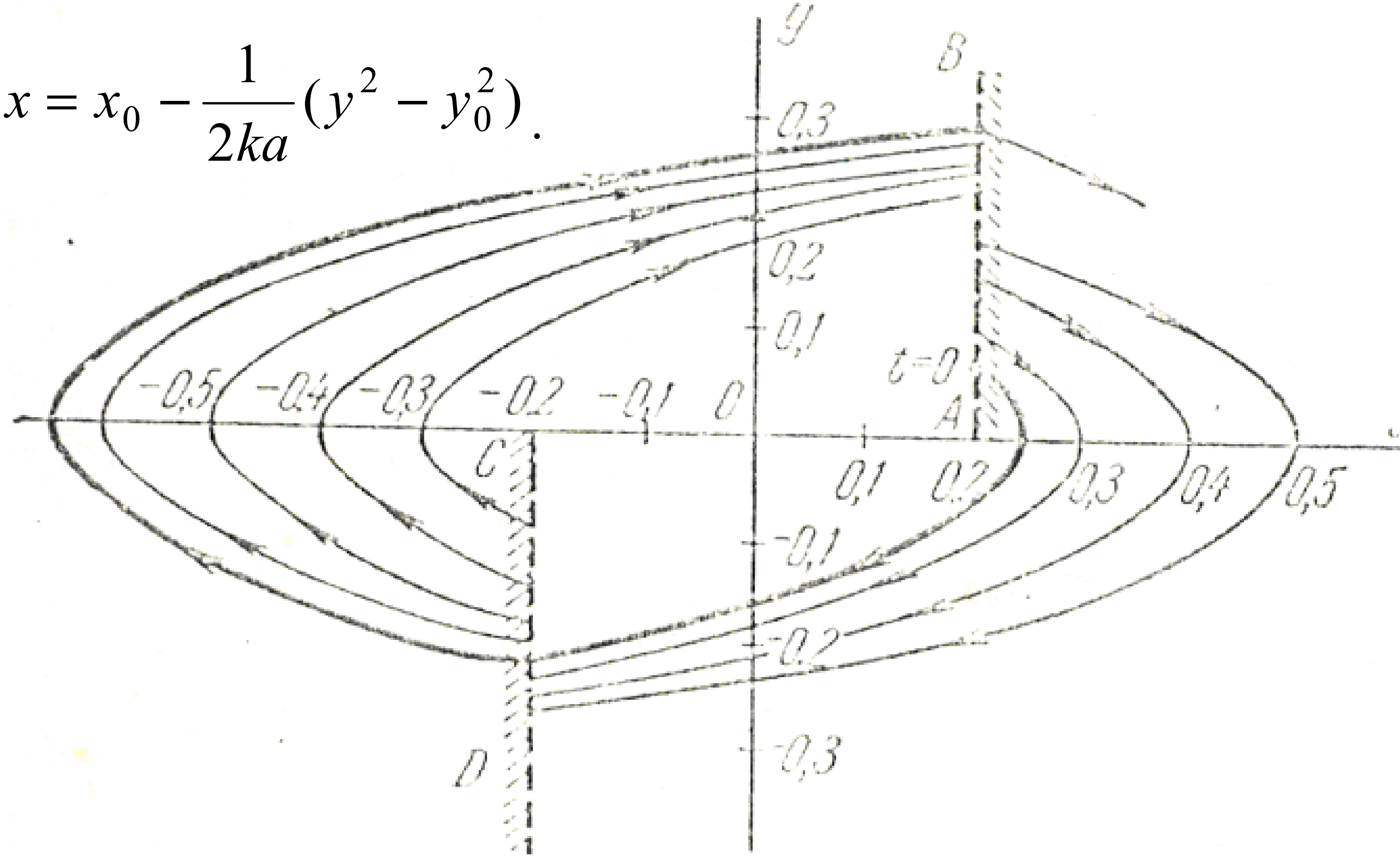
Заместваме C_1 в (5):

$$x = x_0 \pm \frac{1}{2ka}(y^2 - y_0^2)\ .$$

7. Построяване на фазови траектории на нелинейни системи.

От дясната страна на линията на превключване движението на системата се извършва по семейството параболи от (2):

$$x = x_0 - \frac{1}{2ka}(y^2 - y_0^2).$$



При всякакви начални условия, изобразяващата точка се отдалечава от началото на координатната система. Следователно системата е ***неустойчива***.