22. Оптимално по бързодействие управление на линейни колебателни обекти. Пример.

1. Теоретични сведения

- Оптималната линия на превключване (ОЛП) на колебателните обекти е сложна крива, само първата дъга на която (минаваща през координатното начало) е възможна част от фазова траектория.
- За линейните колебателни и за нелинейните обекти теоремата за *n*-те интервала не е изпълнена.
- Анализът на фазовия портрет на оптималната по бързодействие система "колебателен обект – управляващо устройство" показва, че броят на интервалите в оптималния преходен процес не е равен на реда на обекта, а зависи от началните условия. Този факт произтича непосредствено от принципа на максимума на Понтрягин.

2. Пример

Разглежда се оптимално по бързодействие управление на консервативен обект

$$\ddot{y} + y = u \ , \quad |u| \le 1. \tag{1}$$

Обектът трябва да се приведе от произволно начално състояние $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ в крайно състояние $\mathbf{X}(T) = \mathbf{X}_\mathrm{T} = (0;0)^\mathrm{T}$ за минимално време T. Компонентите на вектора на състоянието са избрани $x_1 = y$ и $x_2 = \dot{y}$, при което (1) приема вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u \ , \end{aligned} \tag{2}$$

Хамилтонианът в принципа на максимума

$$H = \sum_{i=1}^{2} \psi_i f_i = \psi_1 x_2 - \psi_2 x_1 + \psi_2 u$$

е записан за $\psi_0 = 0$ ($\psi_0 \le 0$, обикновено $\psi_0 = -1$). Въз основа принципа на максимума управлението се получава във вида

$$u(t) = -\operatorname{sign} \psi_2(t) . \tag{3}$$

Уравненията за спрегнатия вектор $\Psi(t)$ са:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = \psi_2 \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1 . \end{aligned} \tag{4}$$

След изключване на ψ_1 от уравнение (4) за ψ_2 се получава

$$\frac{d^2\psi_2}{dt^2} + \psi_2 = 0 \ . \qquad (5)$$

Корените на характеристичното уравнение на (5) са чисто имагинерни $\lambda_\psi = \pm i$ и следователно решението на (5) е от вида

$$\psi_2(t) = C\sin(t+\varphi), \qquad C>0, \quad 0 \le \varphi < \pi \ , \qquad (6)$$

където C и φ са интеграционни константи, които се определят от началните условия:

$$C\sin\varphi = \psi_2(0) \, ;$$

$$-C\cos\varphi = \psi_1(0) \, .$$

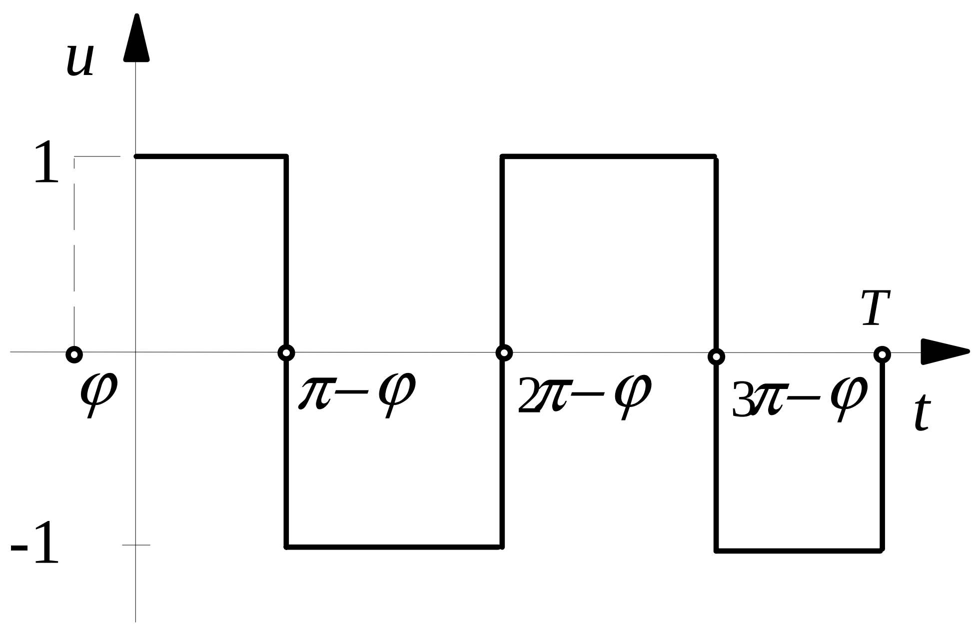
Замествайки (6) в (3) се получава оптималният управляващ закон:

$$u(t) = -\mathrm{sign}(\sin(t+\varphi)), \qquad (7)$$

където C е отстранено, тъй като не влияе върху знака на (6).

Следователно $u(t) = -\operatorname{sign}(\sin(t+\varphi))$ е отсечково-постоянна функция, приемаща редуващи се стойности $u(t) = \pm 1$ в продължение на интервали не по-дълги от π. В зависимост от началните условия броят на интервалите на постоянство на знака ще бъде различен (теоремата за n-те интервала не е в сила, защото корените на характеристичното уравнение на обекта (6.1) са имагинерни $\lambda_y = \pm i$).

Оптимално по бързодействие програмно управление за консервативен обект:



22. Оптимално управление на линейни колебателни обекти.

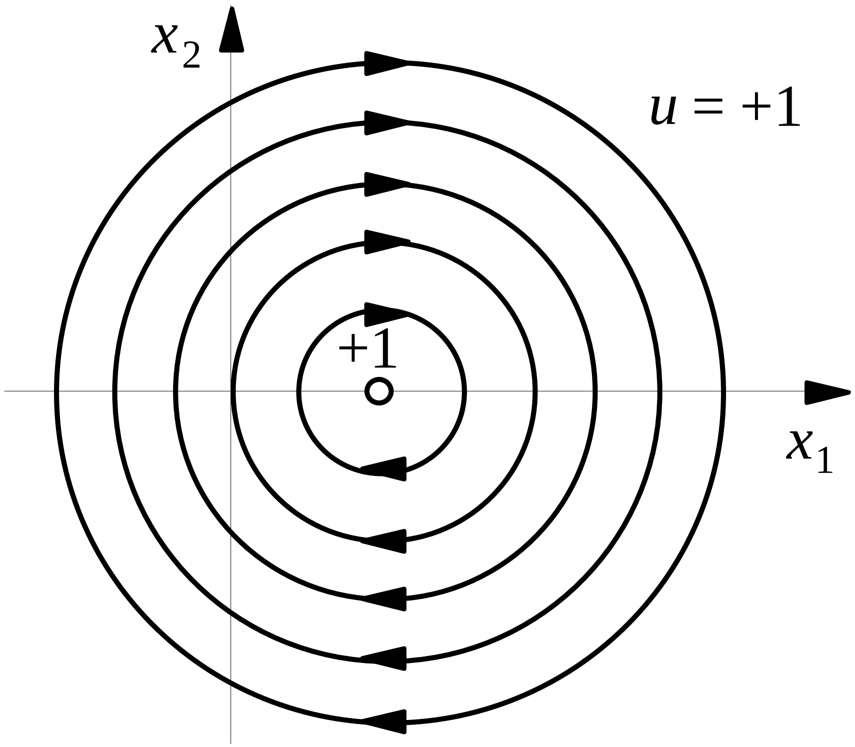
За затваряне на системата по координатите на състоянието се разглежда фазовият портрет (ФП) на системата. За построяването му времето t се изключва от уравненията на системата (2) чрез разделяне второто уравнение на първото

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_1 + u}{x_2}, \quad u = \pm 1. \tag{8}$$

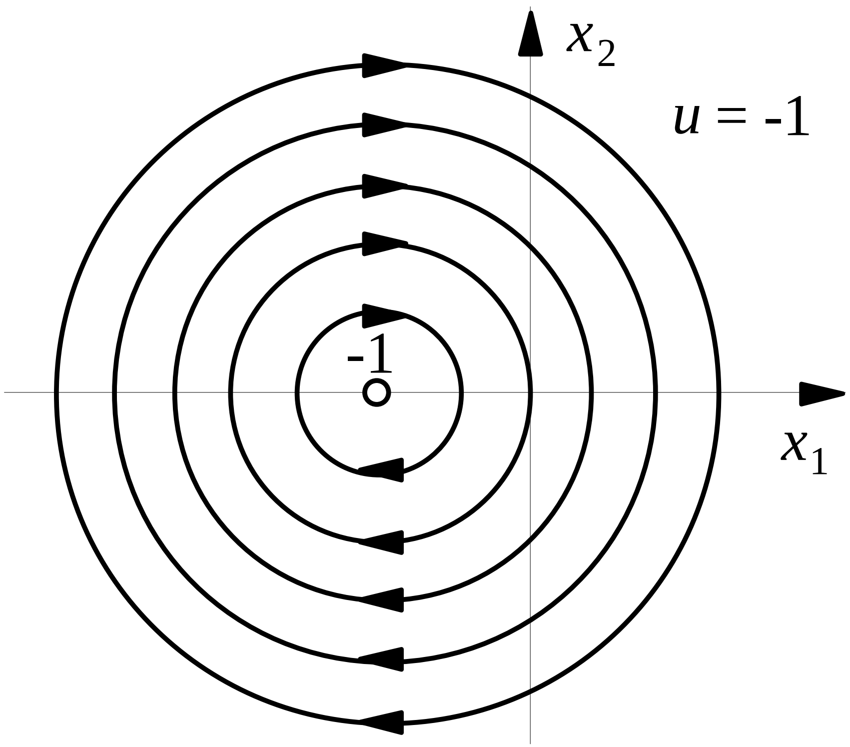
Разделяйки променливите и интегрирайки (8) се получават фазовите траектории

$$(x_1 - u)^2 + x_2^2 = C, \tag{9}$$

където интеграционната константа C се определя от началните условия $x_1(0)$ и $x_2(0)$. От (9) следва, че при $u = +1$ фазовите траектории са семейство окръжности с радиус $\sqrt{C}$ и център в точката $(+1;0)$, а при $u = -1$ - с център $(-1;0)$.



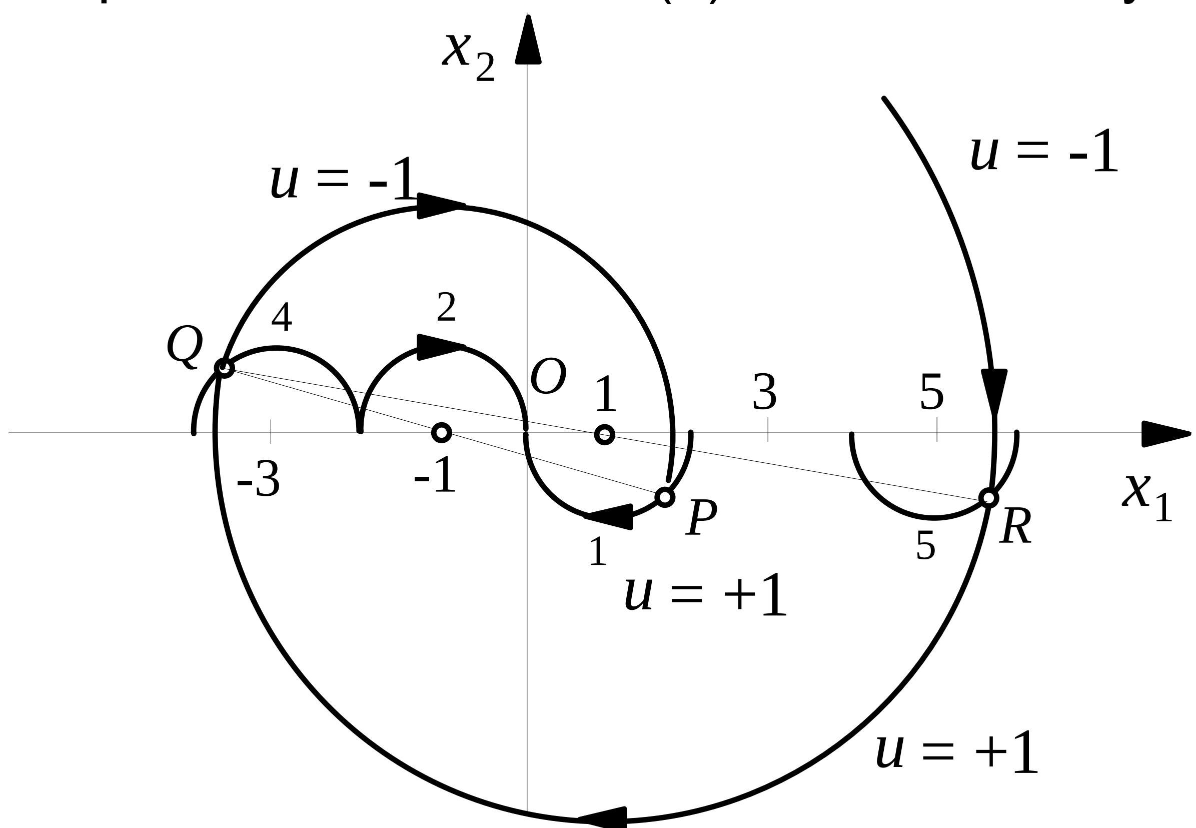
ФП при $u = +1$



ФП при $u = -1$

22. Оптимално управление на линейни колебателни обекти.

Показани са фазовите траектории (полуокръжности с радиус единица), които водят към координатното начало (траектория 1 - при $u=+1$, траектория 2 - при $u=-1$) по които трябва да завършва оптималният процес. Траекториите 1 и 2 са полуокръжности, тъй като управлението $u(t)$ има постоянен знак в интервала $T_0 \leq \pi$, а за време π изобразяващата точка по коя да е траектория от семейството (9) изминава полуокръжност.



Решението на системата (2) при $u = \pm 1$ е

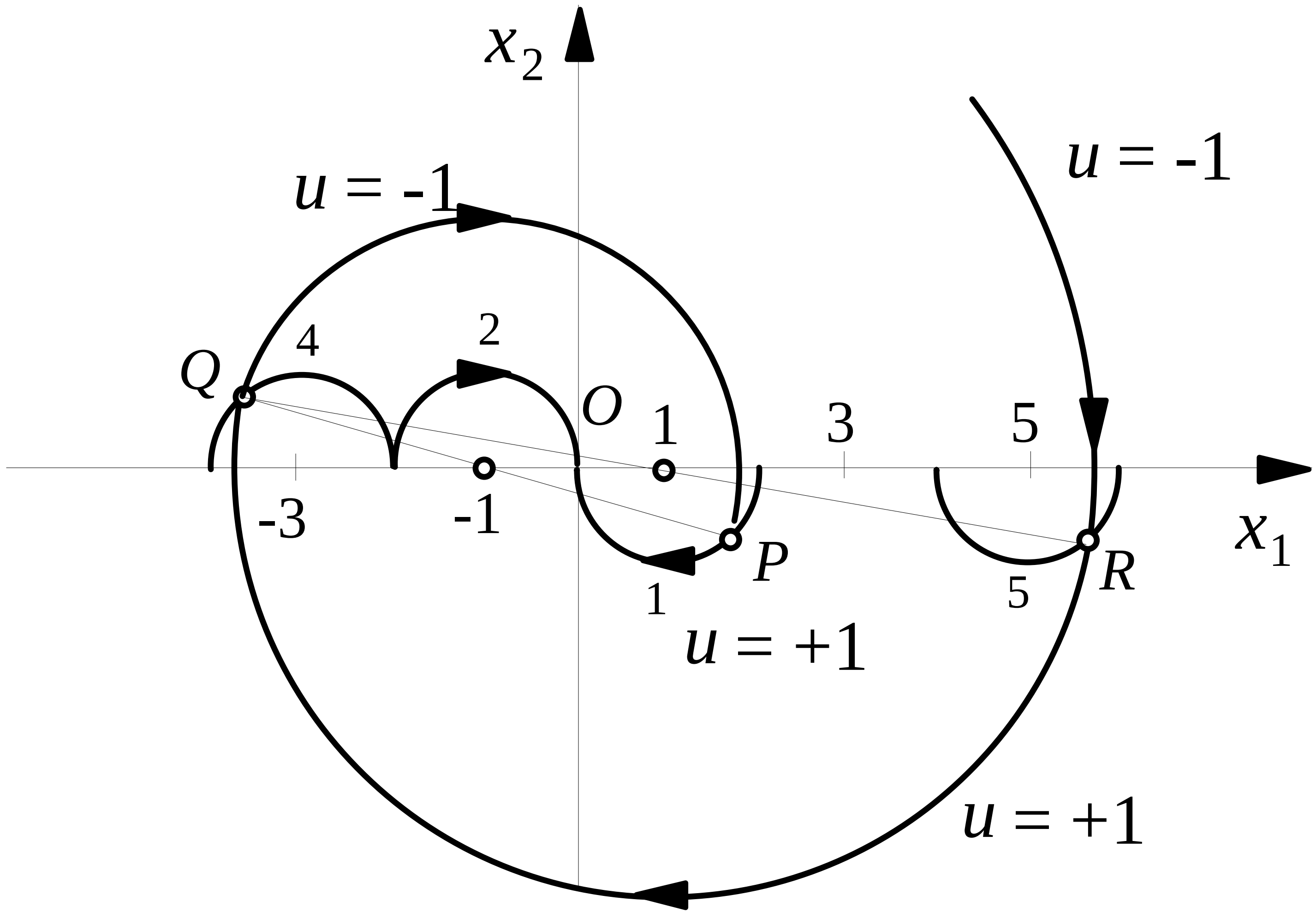
$$\begin{aligned} x_1(t) &= u + B\sin(t+\beta) \\ x_2(t) &= -B\cos(t+\beta)\,, \end{aligned} \tag{10}$$

където B и β са интеграционни константи, определящи се от началните условия $x_1(0)$ и $x_2(0)$. Изхождайки от (10) след време π движението на изобразяващата точка ще се описва с

$$\begin{aligned} x_1(t+\pi) &= u + B\sin(t+\pi+\beta) = u - B\sin(t+\beta)\,, \\ x_2(t+\pi) &= -B\cos(t+\pi+\beta) = B\cos(t+\beta)\;. \end{aligned} \tag{11}$$

От (10) и (11) се вижда, че след време π, след като се извърви полуокръжност се стига до точка симетрична на началната по отношение на центъра $(u;0)$.

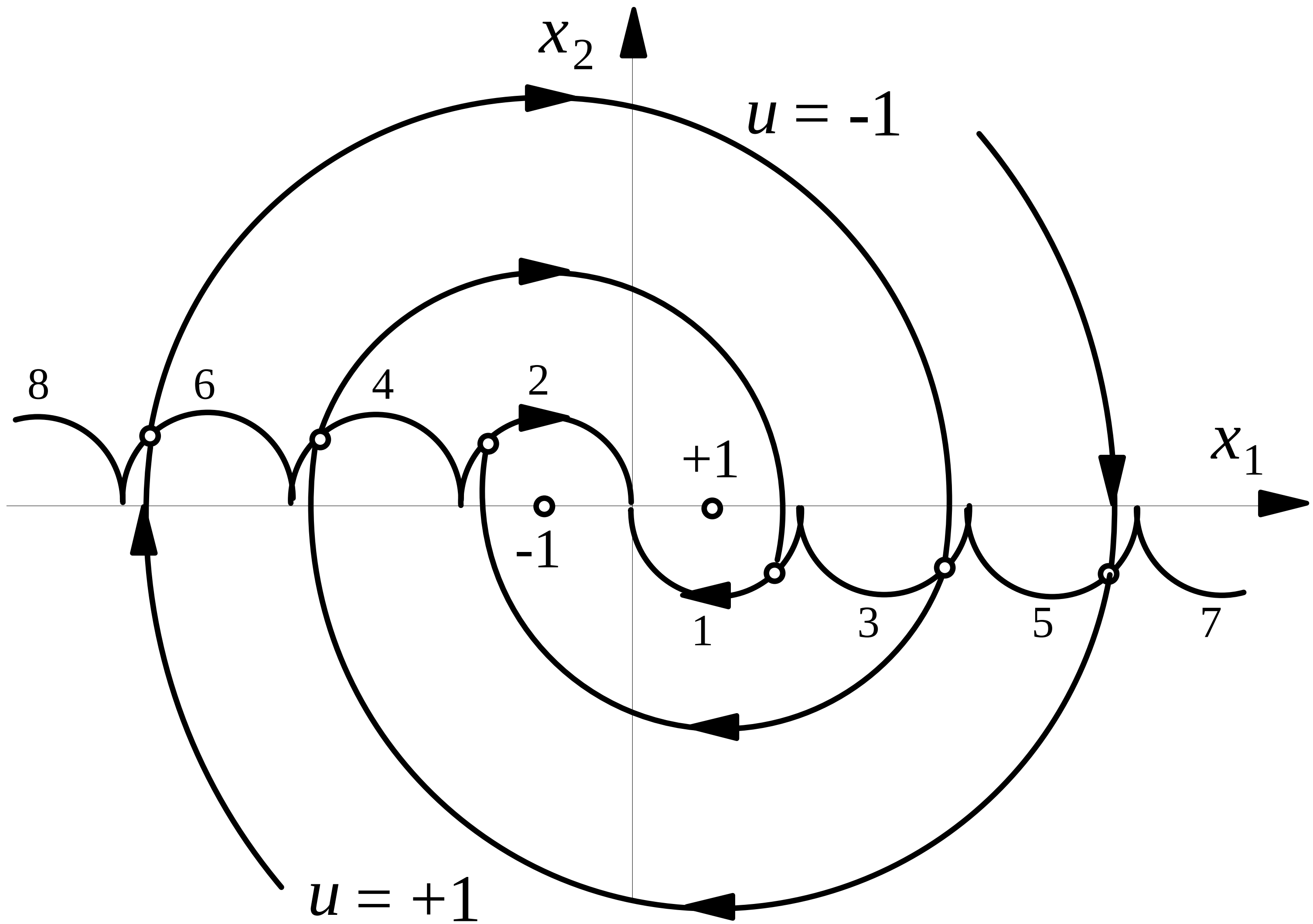
Построяване на ОЛП за обект консервативно звено



Нека последният участък ($u = +1$) от оптималната фазова траектория (*) започва в т. P и завършва в координатното начало. Точка P е последна за предходния интервал ($u = -1$) започващ от т.Q, която е симетрична на т.P по отношение на центъра $(-1;0)$. Времето за движение по полуокръжността QP е π. Ако т.P заеме всички възможни положения по полуокръжността 1, то ще се получи полуокръжност 4 с радиус 1 и център в точката $(-3;0)$. По аналогичен начин се намира кривата 5 от която започват фазовите траектории при $u = +1$, завършващи след време π на кривата 4. Кривата 5 е полуокръжност с център $(5;0)$ и радиус 1, симетрична относно точката $(+1;0)$ на полуокръжността 4. Построенията са аналогични, когато оптималната траектория завършва върху полуокръжността 2 ($u = -1$). В резултат се получава фазовият портрет на оптималната система на (**), където ОЛП е съставена от полуокръжностите ...8,6,4,2,1,3,5,7.... Сред тях само 1 и 2 са фазови траектории на системата.

22. Оптимално управление на линейни колебателни обекти.

ФП на оптималната по бързодействие система за обект, описван с (2):



<u>*22. Оптимално управление на линейни колебателни обекти.*</u>

- Разгледан е частен случай на консервативно звено с параметри $k = 1$ и $T = 1\mathrm{s}$.
- При други стойности на параметрите на звеното, фазовите траектории са концентрични елипси, а не окръжности.
- Ако звеното е колебателно фазовите му траектории са спирали и кривите 1 и 2 от ОЛП ще бъдат части от спирали.