I ORDINE LINEARI INTEGRALE GENERALE

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt \qquad y = e^{A(x)}\left[\int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} b(t)\,dt + \overbrace{y(x_0)}^{c}\right]$$

ORDINE n LINEARI OMOGENEE

$$y'' + ay' + by = 0$$

eq. caratteristica

$$\lambda^2 + \lambda + b = 0$$

se $\Delta > 0$

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

se $\Delta = 0$

$$y(x) = e^{\lambda x}(C_1 + C_2 x)$$

1 sola soluzione
con molteplicità 2

I ORDINE A VARIABILI SEPARABILI

$$y'(x) = f(x)\,g(y) \qquad \frac{1}{g(y)}\,dy = f(x)\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx$$

I ORDINE VARIAZIONE DELLA COSTANTE

$$y'(x) = y(x)\,a(x) + b(x)$$

$$Y(x) = y_{omo}(x) + Y_{part.}(x)$$

$$Y_{omo}(x) = Ce^{A(x)} \Rightarrow A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt$$

$$Y_{part.}(x) = k(x)e^{A(x)}$$

$$k(x) = \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} b(t)\,dt$$

METODO DI VEROSOMIGLIANZA (QUALUNQUE ORDINE)

CASO POLINOMIALE

$$Y'(x) + a(x)y(x) = \underbrace{b(x)}_{\text{POLINOMIO DI GRADO } n}$$

$$Y_{omo}(x) = Ce^{A(x)} \Rightarrow A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt$$

• per ordine superiore al primo usa l'equazione caratteristica in λ

$Y_{part.}$ RICERCO UN POLINOMIO DELLO STESSO GRADO

- Sostituisco a Y' la $D(P(x))$
- Sostituisco in funzione di y $P(x)$
- eguaglio al termine noto dato dal testo
- risolvo il sistema

$y_{part.}(x) =$ sol. sistema

$y(x) = Y_{omo}(x) + Y_{part.}(x)$

CASO ESPONENZIALE

$$y' = y + e^{\lambda x} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

- $y_{omo}(x)$:

$$Ce^{A(x)}\ ;\ A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt$$

- $Y_{part.}(x) = Ae^{A(x)}$

$A \to \in \mathbb{R} \neq A(x)$

Se $\lambda = A(x)$ e' un assurdo, si aumenta di grado

$\lambda \neq A(x)$

$y'_{part.}(x) = A\lambda e^{\lambda x}$

$$A\lambda e^{\lambda x} = Ae^{\lambda x} + e^{\lambda x}$$

• risolvo l'equazione

$$A = \frac{1}{(\lambda - 1)} e^{\lambda x} \Rightarrow y_{part.}(x) = \frac{1}{(\lambda - 1)} e^{\lambda x}$$

• $\lambda = A(x)$

ES.

$$y' = 2y + 3e^{\lambda x}$$

$$y_{omo} = Ce^{2x}$$

$$\lambda = 2$$

$$y_{part.}(x) = Ae^{2x} \quad , \quad y'_{part.}(x) = 2Ae^{2x}$$

$$2Ae^{2x} = 2Ae^{2x} + 3e^{\lambda x} \Rightarrow 3 = 0$$, è un assurdo

• aumento di un grado

$$y_{part.}(x) = (A(x) + B)e^{2x}$$

$$y'_{part.}(x) = Ae^{2x} + 2Axe^{2x} + 2Be^{2x}$$

• sostituisco e risolvo l'equazione, impongo B=0 perché non mi interessa

$$y(x) = y_{omo}(x) + y_{part.}(x)$$

CASO GONIOMETRICO

ES.

$$y' = -y + 3\sin x$$

• Trovare l'equazione omogenea associata

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt \qquad y_{omo}(x) = Ce^{A(x)}$$

$$y_{part.}(x) = A\sin x + B\cos x$$

• calcolare la derivata, sostituire al testo e risolvere il sistema per trovare $y_{part.}(x)$

$y(x) = Y_{omo}(x) + Y_{part.}(x)$

ODE n LINEARI NON OMOGENEE

Vale solo il meto di verosomiglianza in tutti e 3 i casi, bisogna derivare l'equazione generica fino al massimo grado di derivazione e sostituire

DERIVATE

$y = x^a, \quad y' = a\, x^{a-1}$

$y = \operatorname{sen} x, \quad y' = \cos x$

$y = \cos x, \quad y' = -\operatorname{sen} x$

$y = \ln x, \quad y' = \frac{1}{x}$

$y = \log_a x, \quad y' = \frac{1}{x \ln a}$

$y = a^x, \quad y' = a^x \ln a$

$y = e^x, \quad y' = e^x$

REGOLE DI DERIVAZIONE

$y = f(x) + g(x), \quad y' = f'(x) + g'(x)$

$y = f(x) \cdot g(x), \quad y' = f'(x)\, g(x) + g'(x)\, f(x)$

$y = k \cdot f(x), \quad y' = k \cdot f'(x)$

$y = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x, \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$y = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cotan} x, \quad y' = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

FUNZIONI COMPOSTE

$y = [g(f(x))] = g'[f(x)] \cdot f'(x)$

$y = [f(x)]^n, \quad y' = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$

$y = e^{f(x)}, \quad y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

INTEGRALI

$$\int 1\,dx = x + c, \quad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad \int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c, \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2\sqrt{x} + c,$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c, \quad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c,$$

$$\int (1 + \tan^2 x)\,dx \Big/ \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c,$$

$$\int (1 + \cot\!an^2 x)\,dx \Big/ \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = -\cot\!an\, x + c$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x \cos x) + c, \quad \int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x \cos x) + c$$

$$\int \frac{1}{\tan x}\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + c$$

METODI DI INTEGRAZIONE

- PER PARTI

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

- PER SOSTITUZIONE

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

FUNZIONI RAZIONALI

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\int \frac{k}{ax+b}\,dx = \frac{k}{a}\ln|ax+b| + c$$

- DIVISIONE POLINOMIALE (grado polinomio a numeratore > g. denominatore)
- FRATTI SEMPLICI: (grado polinomio a denominatore > g. numeratore)

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)(x-2)} \Rightarrow \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} = \frac{x^2+1}{x(x-1)(x-2)}$$

- risolvere il sistema e trovare i valori di A, B e C

$$\int \frac{A}{x}\,dx + \int \frac{B}{x-1}\,dx + \int \frac{C}{x-2}\,dx$$

- FORMULA DI HERMITE

FUNZIONI A DUE VARIABILI

Dominio:

- denominatore >0, $\neq 0$;
- radice: argomento ≥ 0; solo per indice pari, n dispari tutto $\mathbb{R}^2$
- ln: argomento >0;
- Le funzioni goniometriche non si considerano
- esponenziali: tutto $\mathbb{R}^2$

CHIUSO: la funzione e' $\geq$
APERTO: la funzione $>$
MISTO: né l'uno né l'altro

Connesso: non ci sono interruzioni nel prendere i punti all'interno dell'insieme

Illimitato: si muove verso tutte le direzioni

LIMITI

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = \ell \iff \lim_{\rho \to 0^+} \sup_{\theta \in (0, 2\pi)} |f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho \operatorname{sen}\theta) - \ell| = 0$$

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = +\infty \iff \lim_{\rho \to 0^+} \inf_{\theta \in (0, 2\pi)} (f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho \operatorname{sen}\theta)) = +\infty$$

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = -\infty \iff \lim_{\rho \to 0^+} \sup_{\theta \in (0, 2\pi)} (f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho \operatorname{sen}\theta)) = -\infty$$

Si considerano ℓ e x_0, y_0 con il valore del possibile candidato al limite

ES:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) \qquad \ell = 0, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0$$

ES.

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} \qquad \begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\theta \\ y = y_0 + \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{2\rho^2 \cos^2\theta \, \rho \operatorname{sen}\theta}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta} - 0 \Rightarrow \frac{2\rho^{\cancel{3}} \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta}{\cancel{\rho^2}}$$

PRIMA RELAZIONE FONDAMENTALE DELLA GONIOMETRIA:
$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$

$$\lim_{\rho \to 0^+} \sup_{\theta \in (0, 2\pi)} 2\rho \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta \qquad \sup = 2\rho$$

$$\lim_{\rho \to 0^+} 2\rho = 0$$

- SE IL LIMITE NON DIPENDE DA ρ È PROBABILE CHE NON ESISTA, LO SI PUÒ VERIFICARE CON LE RESTRIZIONI. SE ALMENO DUE NON COINCIDONO ALLORA IL LIMITE NON ESISTE, L'AFFERMAZIONE NON È PERÒ VERIFICATA AL CONTRARIO

LIMITE DEL RAPPORTO INCREMENTALE

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}\end{aligned}\right\} \text{NELL' ORIGINE } (0,0)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0)-f(x_0,y_0)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}\end{aligned}\right\} \text{Nel punto } P_0(x_0, y_0)$$

DERIVATE PARZIALI

- Valgono le stesse proprieta' delle derivate

$\frac{\partial f}{\partial x}$ = derivata della variabile x, considero y come una costante

$\frac{\partial f}{\partial y}$ = derivata della variabile y, considero x come una costante

$\frac{\partial f}{\partial xx}$ = derivata seconda di x

$\frac{\partial f}{\partial yy}$ = derivata seconda di y

$\frac{\partial f}{\partial xy}$ = derivata di y nella derivata prima di x, considero x una costante

$\frac{\partial f}{\partial yx}$ = derivata di x nella derivata prima di y, considero y una costante

TEOREMA DI SCHWARZ

Se una funzione e' continua e derivabile in ogni direzione allora posso dire che $\frac{\partial f}{\partial xy} = \frac{\partial f}{\partial yx}$

(funzioni polinomiali, goniometriche ed esponenziali godono di questo teorema)

GRADIENTE

∇f e' il gradiente di f ed e' il vettore che contiene tutte le derivate direzionali di una funzione

$$\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g$$

$$\nabla(f \cdot g) = \nabla f g + \nabla g f$$

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\nabla f g - \nabla g f}{}$$

$$\nabla(f \circ g) = f'(g) \nabla g$$

DERIVATA DIREZIONALE

$$D_{\underline{v}} f(\underline{x}_0) = \nabla f|_{\underline{x}_0} \cdot \underline{v}$$

Es.

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy + x$$

$$\underline{v}_\alpha = (1, 2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2x$$

$$\nabla f(x,y) = (2x + 2y + 1, 2y + 2x)$$

$$D_{\underline{v}_\alpha} = \nabla f \cdot \underline{v}_\alpha$$

$$D_{\underline{v}_\alpha} = (2x + 2y + 1, 2y + 2x)(1, 2) = (2x + 2y + 1, 4y + 4x)$$

MATRICE HESSIANA

La matrice Hessiana e' la matrice di tutte le derivate seconde parziali

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta f}{\delta xx} & \frac{\delta f}{\delta xy} \\ \frac{\delta f}{\delta yx} & \frac{\delta f}{\delta yy} \end{vmatrix}$$

PUNTI CRITICI DELLA FUNZIONE

- CALCOLARE $\frac{\delta f}{\delta x}$ E $\frac{\delta f}{\delta y}$
- mettere a sistema le due derivate e trovare i punti / il punto $P_n(x_0, y_0)$
- calcolare le derivate seconde
- Impostare la matrice Hessiana sostituendo i valori di P_n alle rispettive x, y (ripetere il passaggio per il numero di punti che vengono trovati)

Se $\Delta H_f > 0$ troveremo un estremo locale forte

- se $\frac{\delta f}{\delta x} \geq 0$ avremo un minimo forte
- se $\frac{\delta f}{\delta x} < 0$ avremo un massimo forte

Se $\Delta H_f < 0$ troveremo un PUNTO SELLA

Se $\Delta H_f = 0$ bisogna svolgere ulteriori indagini con le restrizioni, potremo trovare o un punto sella o un estremo locale debole

PIANO TANGENTE

$$\tau : z = f(x_0, y_0) + \left.\frac{\delta f}{\delta x}\right|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \left.\frac{\delta f}{\delta y}\right|_{(x_0, y_0)} (y - y_0)$$