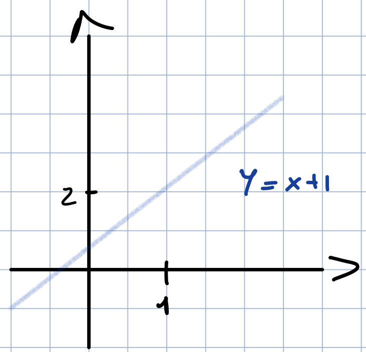
14/11/2023

LIMITI

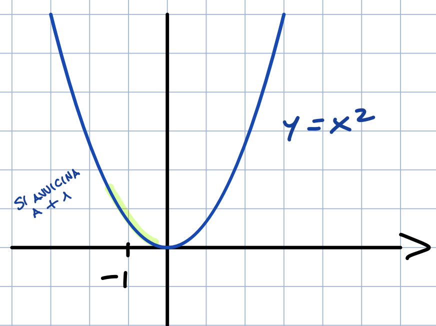


$$\overbrace{\lim_{x \to 1} x+1}^{\text{y=x come si comporta in ascissa?}}$$

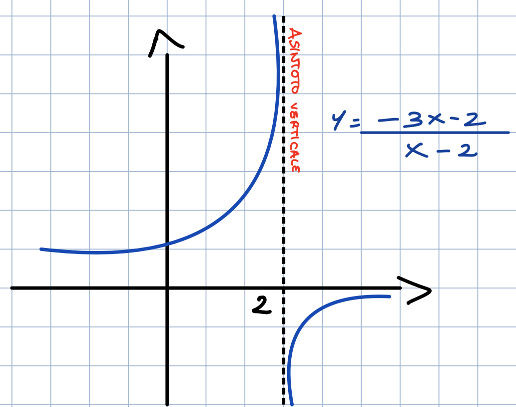
cosa fa la quantita' x+1, ovvero la y, quando x si avvicina a 1?

$$\lim_{x \to 1} x+1 = 2$$

$$\lim_{x \to -1} x^2$$



$$\lim_{x \to -1} x^2 = 1$$

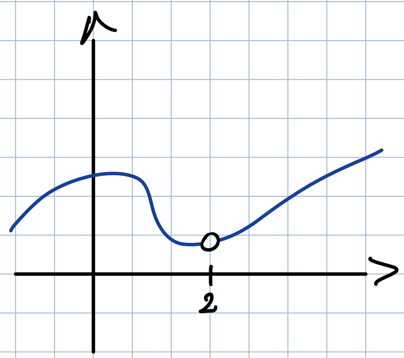


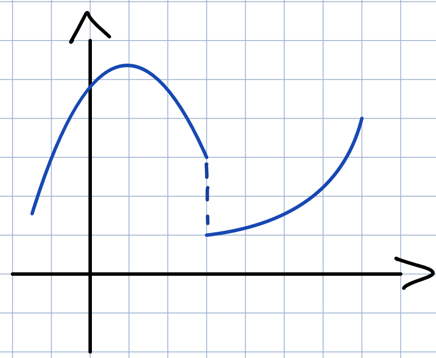
$$\lim_{x \to 2} \frac{-3x-2}{x-2} =$$

$$= \frac{-3(2)-2}{1(2)-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-6-2}{2-2} = \frac{-8}{0}$$

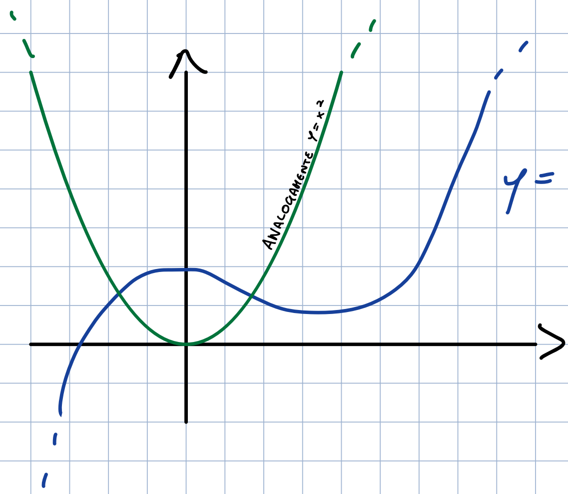
ovviamente $\frac{n}{0}$ non e' possibile quindi si studia il comportamento di f quando si AVVICINA a 2 tali situazioni si presentano anche per:





PUNTI ESCLUSI SALTI

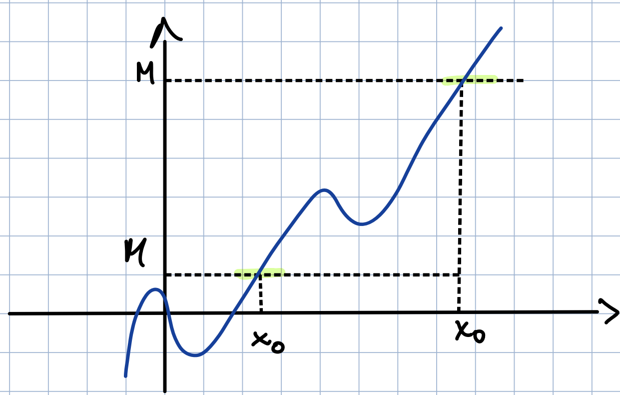
$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$



quando a x "grandissime" corrispondo y "grandissime" si dice $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

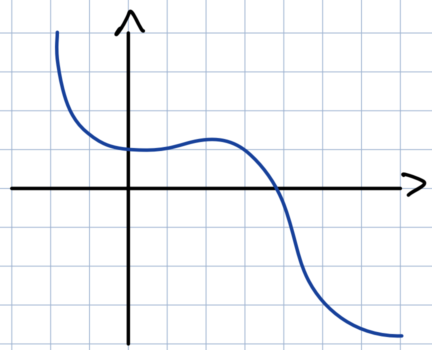
le funzioni del tipo $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ sono funzioni che da un certo punto in poi crescono ma non è un requisito fondamentale.

Per ogni quota M fissata sull'asse y deve esistere x_0 maggiore di quel punto lì tale che la funzione sta sempre sopra M



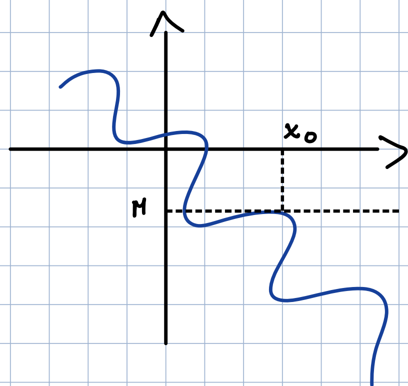
ANALOGAMENTE

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$$



al cresare di x
y diventa sempre
più piccola

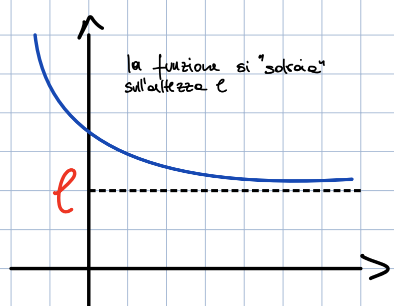
ma anche funzioni
del tipo

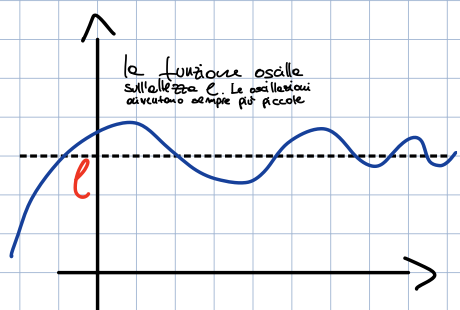


$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$$

presa una qualunque
quota M, esiste
un corrispettivo x_0
tale che f sia
sempre al di sotto di M

$$\text{limite}_{x \to +\infty} \; g(x) = \ell$$



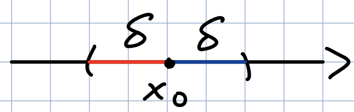


ℓ è un qualunque $n \in \mathbb{R}$ e la funzione si avvicinerà sempre
di più all'asse delle ascisse (per x molto grandi)

Se la funzione non ricade in nessun dei tre casi precedenti si dice che $\lim_{x\to+\infty} g(x) = N.E.$ si dice al massimo che f oscilla tra due valori

LE STESSE CONSIDERAZIONI POSSONO ESSERE FATTE PER $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

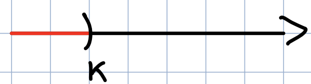
Chiamiamo intorno centrato in x_0 e di raggio $\delta>0$ l'intervallo aperto $U_\delta(x_0) = (x_0-\delta,\ x_0+\delta)$



più piccolo è δ più siamo vicini a x_0

Esistono anche intorni per ∞, $+\infty$ e $-\infty$

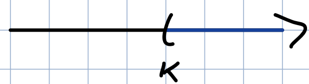
intorno di $-\infty$



con $K\in\mathbb{R}$

$$(-\infty, K) = \{x\in\mathbb{R} : x<K\}$$

intorno di $+\infty$



$$(K, +\infty) = \{x\in\mathbb{R} : x>K\}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

$x_0, L \in \mathbb{R}$:

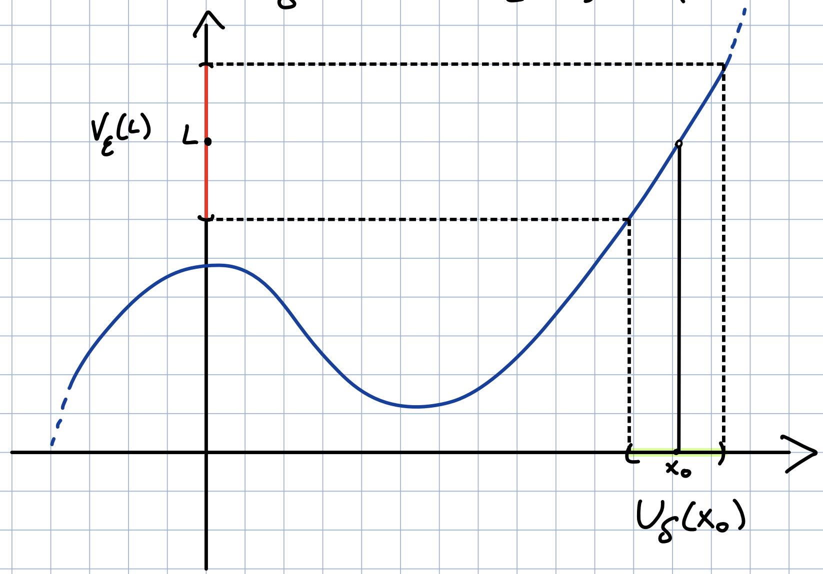
Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di A.

Si dice che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

Se, per ogni intorno $V_\varepsilon(L)$ esiste un intorno $U_\delta(x_0)$ tale che

$$x \in U_\delta(x_0) \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$$



$L \in \overline{\mathbb{R}}$

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di A.

Si dice che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

Se, per ogni intorno $V_\varepsilon(L)$ esiste un intorno $U_\delta(x_0)$ tale che

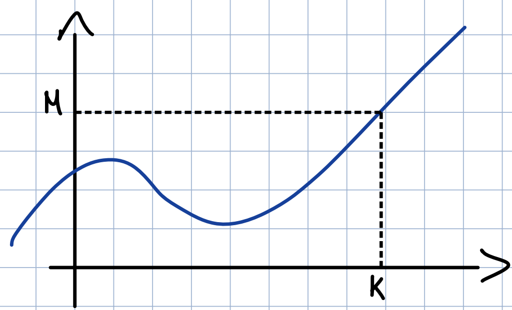
$$x \in U_\delta(x_0) \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(L)$$

dove $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$

Se $x_0 = +\infty$ e $\ell = +\infty$ la precedente definizione equivale alla seguente:

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dica che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



SE, PER OGNI $M>0$ ESISTE $K>0$ TALE CHE

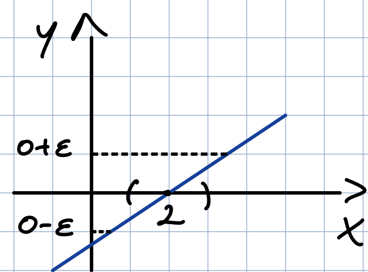
$$x \in (K, +\infty) \cap A \Rightarrow f(x) > M$$

VERIFICA DEL LIMITE

1) $\lim_{x \to \underset{x_0}{2}} (x-2) = \overset{\ell}{0}$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists I(2) : \overbrace{|f(x) - \ell| < \varepsilon}^{\text{FORMA GENERALE}}, \ \forall x \in I(2)$$

$$|x - 2 - 0| < \varepsilon, \ \forall x \in I(2)$$

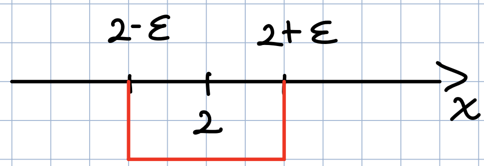


$$|f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} f(x) - \ell < \varepsilon \\ f(x) - \ell > -\varepsilon \end{cases} \Rightarrow |x - 2| < \varepsilon$$

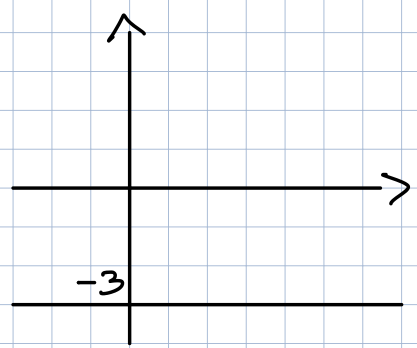
$$-\varepsilon < x - 2 < \varepsilon \Rightarrow 2-\varepsilon < x < \varepsilon + 2$$



$2-\varepsilon < x < \varepsilon + 2$ e' un intorno di 2. Il limite e' verificato

2) $\lim\limits_{x \to \boxed{+\infty}} \dfrac{-3x}{|x|+1} = -3$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 : \left| \frac{-3x}{|x|+1} - (-3) \right| < \varepsilon \quad \forall x > c$$



D: $\underline{|x| \neq -1}$ Un modulo e' sempre un valore positivo

$\Downarrow$

$\forall x \in \mathbb{R}$

comportamento asintotico

posso levare il modulo perché so che lo posso avere come x $(+\infty)$

$$\left| \frac{-3x + 3|x| + 3}{|x|+1} \right| < \varepsilon \Rightarrow \qquad |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ \boxed{-x \quad x < 0} \end{cases}$$

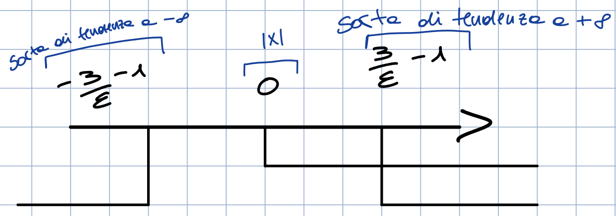
se avessi avuto $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

$$\Rightarrow \left| \frac{\cancel{-3x} + \cancel{3x} + 3}{x+1} \right| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{3}{x+1} \right| < \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{x+1} < \varepsilon \\[2ex] \dfrac{3}{x+1} > -\varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} > \dfrac{1}{\varepsilon} \\ \dfrac{x+1}{3} < -\dfrac{1}{\varepsilon} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1 > \dfrac{3}{\varepsilon} \Rightarrow x > \dfrac{3}{\varepsilon} - 1 \\ x+1 < -\dfrac{3}{\varepsilon} \Rightarrow x < -\dfrac{3}{\varepsilon} - 1 \end{cases}$$

$$-\frac{3}{\varepsilon} - 1 < x < \frac{3}{\varepsilon} - 1$$



$$x > \frac{3}{\varepsilon} - 1 \qquad \underbrace{x > M}_{\text{della definizione}}$$

ESERCIZIO

$$\lim_{x \to 2} 3x + 2 = 8$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists I(2) : \ |3x+2-8| < \varepsilon$$

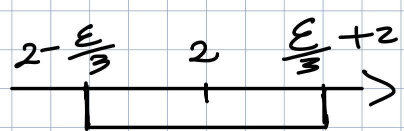
$$|3x-6| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < 3x - 6 < \varepsilon ;$$

$$6 - \varepsilon < 3x < \varepsilon + 6$$

$$\frac{6}{3} - \frac{\varepsilon}{3} < x < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{6}{3}$$

$$2 - \frac{\varepsilon}{3} < x < \frac{\varepsilon}{3} + 2$$



ESERCIZIO

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{x+1} = -2$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 : \left| \frac{-2x}{x+1} + 2 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{\cancel{-2x} + \cancel{2x} + 2}{x+1} \right| < \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x+1} < \varepsilon \\ \dfrac{2}{x+1} > -\varepsilon \end{cases} ; \begin{cases} \dfrac{x+1}{2} > \dfrac{1}{\varepsilon} \\ \dfrac{x+1}{2} < -\varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+1 > \dfrac{2}{\varepsilon} \\ x+1 < -\dfrac{2}{\varepsilon} \end{cases} ; \begin{cases} x > \dfrac{2}{\varepsilon} - 1 \\ x < -\dfrac{2}{\varepsilon} - 1 \end{cases}$$

$M = \dfrac{2}{\varepsilon} - 1$; non stiamo cercando $-M$ quindi basta questo

FORME INDETERMINATE

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 - 5x^2 + 1 = +\infty - \infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{x^3}_{+\infty} \left(1 - \boxed{\underbrace{\frac{5}{x}}_{0}} + \boxed{\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{0}} \right) = +\infty(1) = +\infty$$

$+\infty$ 0 0 $+\infty$ $+\infty$

LIMITE DI FUNZIONE POLINOMIALE

LIMITI DI FUNZIONI RAZIONALI

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+4x-3}{2x^2+5} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\cancel{3}}\left(1-\frac{4}{x^2}-\frac{3}{x^2}\right)}{2\cancel{x^2}\left(1+\frac{5}{2x^2}\right)} = \frac{\infty}{2} =$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-4x}{5x^6-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{x^{\cancel{3}}\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}{\underbrace{5x^{\cancel{6}}\left(1-\frac{1}{5x^6}\right)}_{\infty \cdot 0}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-x}{x^2+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{2\cancel{x^2}\left(1-\boxed{\frac{1}{x}}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\boxed{\frac{1}{x^2}}\right)} = \frac{2\,(1)}{1} = 2$$

$\to 0$ $\to 0$

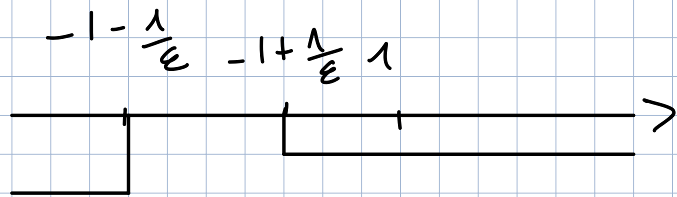
- Se il grado del numeratore e' maggiore del denominatore il risultato sara' $\pm\infty$
- Se il grado del denominatore e' maggiore del numeratore il risultato sara' sicuramente 0
- Se numeratore e denominatore sono dello stesso grado allora il risultato sara' un numero finito

CALCOLA I SEGUENTI LIMITI

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x+1} =$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists I(1^+) : \left|\frac{1}{x+1}\right| < \varepsilon \qquad \begin{cases} \frac{1}{x+1} < \varepsilon \\ \frac{1}{x+1} > -\varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+1 > \dfrac{1}{\varepsilon} \\ x+1 < -\dfrac{1}{\varepsilon} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x > -1 + \dfrac{1}{\varepsilon} \\ x < -1 - \dfrac{1}{\varepsilon} \end{cases}$$



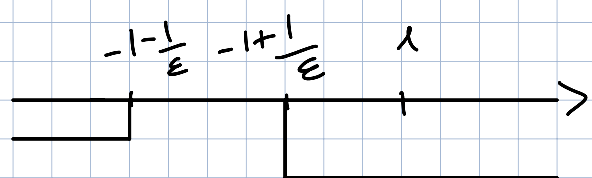
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x+1}$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists I(x_0) : \left| f(x) - \ell \right| < \varepsilon ,$
$\forall x \in I(x_0) \ x \neq x_0$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists I(-1^+) : \left| \frac{1}{x+1} \right| < \varepsilon$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+1} < \varepsilon \\ \dfrac{1}{x+1} > -\varepsilon \end{cases} ; \quad \begin{cases} x+1 > \dfrac{1}{\varepsilon} \ ; \ x > -1 + \dfrac{1}{\varepsilon} \\ x+1 < -\dfrac{1}{\varepsilon} \ ; \ x < -1 - \dfrac{1}{\varepsilon} \end{cases}$$



verificato per $I(-1^+)$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{-1+1} = \frac{1}{0} = +\infty$$

n° 211

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{9-x^2} = +\infty \qquad \forall M>0\ \exists I(x_0) : f(x) > M,\ \forall x \in I(x_0),\ x \neq x_0$$

$$\frac{1}{9-x^2} > M \Rightarrow 9 - x^2 < \frac{1}{M} \;;$$

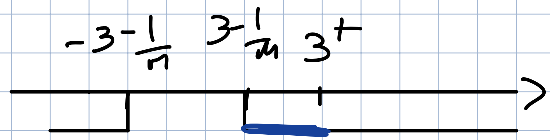
D: $9 - x^2 > 0$
$9 - x^2 = 0$
$x^2 - 9 = 0$
$x = \pm 3$

$$x^2 - 9 > -\frac{1}{M} \;;\; x^2 - 9 = -\frac{1}{M}$$

$x < -3 \vee x > 3$

$$x = \pm\sqrt{9 - \frac{1}{M}} \;;\; x = \pm\ 3 - \frac{1}{M}$$

$$x > 3 - \frac{1}{M} \vee x < -3 - \frac{1}{M}$$



limite verificato per $I(3^+)$

30/11

GRUPPO STUDIO

dominio: dove la funzione e' definita

$f(x) = x$ $\mathbb{R}$ LINEARE

$(-\infty, +\infty)$

FRATTA $f(x) = \frac{1}{x}$ dom : $x \neq 0$

$f(x) = \frac{1}{x^2-2}$ dom $x^2 - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{2}$

LOGARITMICA $\log_a x$ dom: $x > 0$
$a \neq 1$

$f(x) = \dfrac{1}{x^2+x-2}$ dom: $x^2+x-2 \neq 0$

$\Delta = 9$

$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow$ $x_1 = -\dfrac{\cancel{4}}{\cancel{2}} - 2$

$x_2 = \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\ 1$

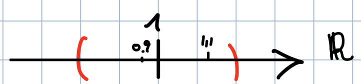
dom: $x \neq -2 \cup x \neq 1$

ESPONENZIALE

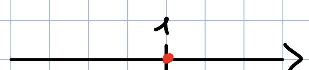
$f(x) = e^x$ dom: $\mathbb{R}$

PUNTO DI ACCUMULAZIONE

$E \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, e' un punto di accumulazione per E se $\forall$ intorno sferico $\mathcal{U}$ di x si ha che $(\mathcal{U} \cap E) \setminus \{x_0\} \neq 0$



$\neq 0$

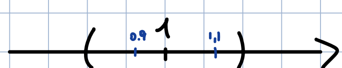


$\neq 0$

insieme vuoto; non e' un punto di accumulazione

PUNTO DI ADERENZA

$E \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, e' un punto di aderenza per E se $\forall$ intorno sferico $\mathcal{U}$ di x si ha che $(\mathcal{U} \cap E) \neq 0$



1 in questo caso e' un punto di aderenza (x_0 non viene escluso)

non esiste un intorno che includa un punto ma non l'altro

PUNTO ISOLATO

$E \subseteq \mathbb{R}$, x e' un punto isolato se $\exists$ un intorno sferico $\mathcal{U}$ di x tale che $(\mathcal{U} \cap E) \neq \{x\}$

ESERCIZI

TROVARE TUTTI I PUNTI DI ACCUMULAZIONE DELL'INSIEME:

$$E = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$n = 1$ $\qquad E = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2} = 0.5$

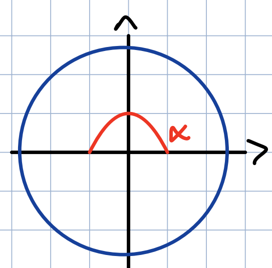
$n = 2$ $\qquad E = \dfrac{2}{3} = 0.67$

$n = 100$ $\qquad E = \dfrac{100}{101} = 0.99$

$n = 1000$ $\qquad E = \dfrac{1000}{1001} = 0.99$

all'aumentare di n si avvicina sempre di più ad 1 che non viene mai trovato calcolando $\dfrac{n}{n+1}$

$$E = \left\{ \cos(n\pi) \frac{n^2}{2n^2+n} \right\}$$



$\cos\pi = -1$

$\sin\pi = 0$

cos asse X

sen asse Y

$n = 1 \qquad \cos\pi\left(\frac{1^2}{2(1)^2+1}\right) = \cos\pi \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow -1 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} = -0.33$

$n = 2 \qquad \cos(2\pi)\,\frac{4}{8+2} = 1 \cdot \frac{2}{5} = 0.4$

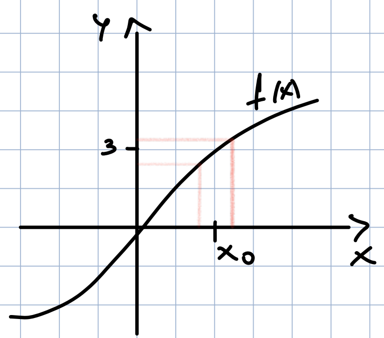
se è pari cos=1
se è dispari cos=-1

$n = 100 \qquad \underbrace{\cos(100\pi)}_{=1}\,\frac{100^2}{2(100)^2+100} = 0.49$

$n = 99 \qquad \cos(99\pi) \cdot \frac{99^2}{2(99)^2+99} = -1 \cdot 0.49 = -0.49$

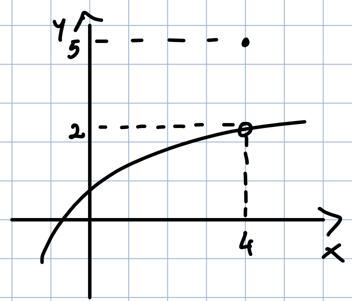
$x = \pm \frac{1}{2} = \pm 0.5$ è un punto di accumulazione

LIMITI



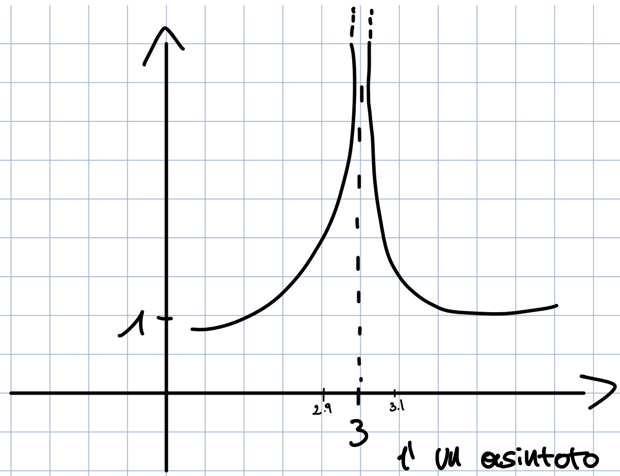
$\lim_{x \to x_0} f(x)$

"VALUTARE LA FUNZIONE VICINO A x_0"



$\lim_{x \to 4} f(x) = 2$

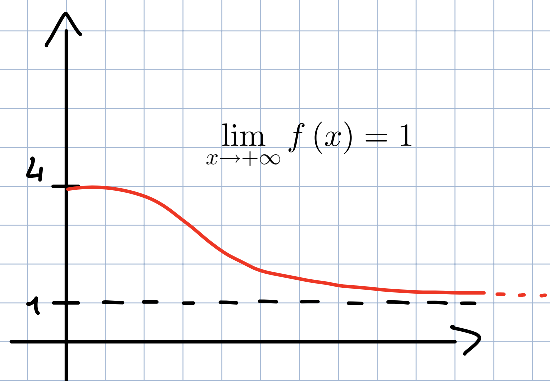
punti che non sono 4
ma molto vicini a 4

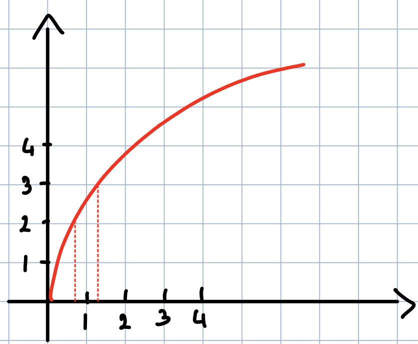


è un asintoto

$$\lim_{x \to 3} f(x)$$

$f(3)$ non esiste
ma esistono valori molto vicini al punto



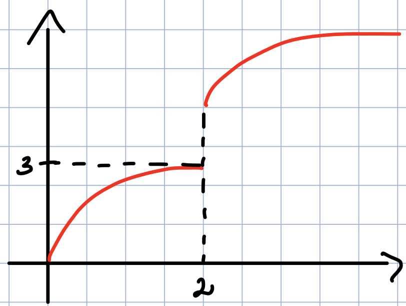


$$\lim_{x \to 1^+} f(x)$$

si avvicina a 1 da destra, numeri alla destra di 1

$\lim_{x \to 1^-} f(x)$ si avvicina a 1 da sinistra, numeri alla sinistra di 1

Se lim dx ≠ lim sx non esiste



$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 5$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$$

$\neq$ non esiste $\lim_{x \to 2} f(x)$

TEOREMA DELL'UNICITÀ DEL LIMITE

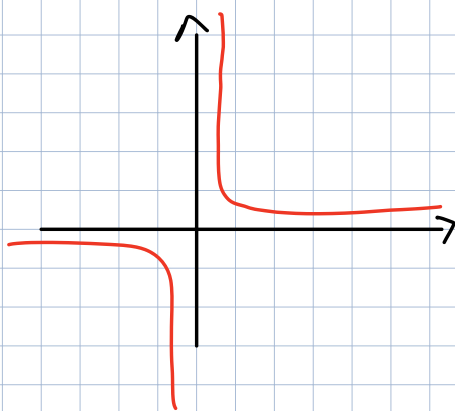
$$\lim_{\substack{x \to 5 \\ \downarrow \\ x_0}} \overbrace{3x+2}^{f(x)} = 3 \cdot 5 + 2 = 15 + 2 = 17$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 + x + 5) = +\infty$$

differenza tra limite destro e sinistro

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$



$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \nexists \qquad \lim dx \neq \lim sx$$

$$\frac{0}{n} = 0 \qquad \frac{\infty}{n} = \infty \qquad -\frac{\infty}{n} = -\infty$$

$$\frac{n}{\infty} = 0 \qquad \frac{n}{-\infty} = 0$$

$$f(x) = \frac{1-4x}{(x-3)^2}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{1-12}{(0)^2} = \frac{-11}{0^2} = -\infty$$

$$f(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} e^{\frac{x}{x^2-1}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4+6x+5}{x^2+4} = \frac{\infty}{\infty}$$ FORMA INDETERMINATA

$$\frac{x^{\cancel{4}\,2}\left(1 + \frac{6}{x^3} + \frac{5}{x^4}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{4}{x^2}\right)} = +\infty \cdot \frac{1}{1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 - 48x - 100 = \infty - \infty$$ FORMA INDETERMINATA

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 - 48x - 100 = \lim_{x \to +\infty} x^2 \left(1 - \frac{48}{x} - \frac{100}{x^2}\right) = +\infty$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln_e}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln_e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

ESERCIZIO

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x \qquad \lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)} \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^x} = \frac{e^{\cancel{2}}}{\cancel{e}} = e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1} - 1}{\frac{\operatorname{sen}}{x} - 1} = \frac{0}{0} \qquad \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 = t$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = \ln_e = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{(x^2)} - 1\right) \ln(1+x)}{x(1-\cos x)}$$

$$\frac{e^y - 1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}} \Rightarrow \left(\frac{e^y - 1}{y}\right)\sqrt{y}$$

$$\nearrow 1$$

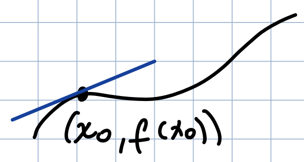
$$= e^y$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^y - 1}{\sqrt{y} \cdot \sqrt{y}} \cdot \sqrt{y} \cdot \frac{\ln(1+x)}{1-\cos x} \qquad \boxed{\sqrt{y} = x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \ln(1+x)}{1-\cos x} \Rightarrow \frac{x \ln(1+x)}{x^2 \underbrace{\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)}_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{\cancel{x} \ln(1+x)}{x^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{2}} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} =$$

$$2 \lim_{x \to 0} = \frac{1}{\ln e} = 2 \, \frac{1}{1} = 2$$

DERIVATE

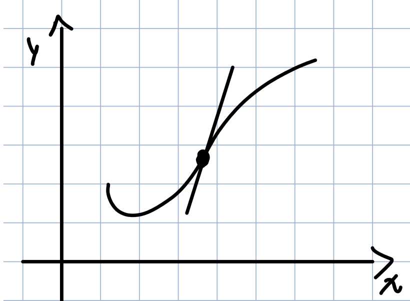


IDEA DI BASE → trovare il coeff. angolare m

ESEMPIO

$f(x) = x^2 \quad x_0 = 2 \quad (2,4)$

$$f(x) = f(x_0) + \underline{m}(x - x_0) \quad \to \quad \underline{m} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ RAPPORTO INCREMENTALE

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad h = x - x_0$$

h è la differenza della distanza tra x e x_0 (altezza banalmente)

TEOREMA

$f: I \to \mathbb{R}$ f è derivabile in $x_0 \in I$, è continua in x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

DEF

$f': X \to \mathbb{R}$ e' continua

f e' di C^1 su $X \to f \in C^1(X)$

e^x $\log x$

DERIVATA DESTRA E DERIVATA SINISTRA

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

in questo caso e' un punto di accumulazione destro ($x_0 \neq \emptyset$)

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

x_0 di acc. sinistro

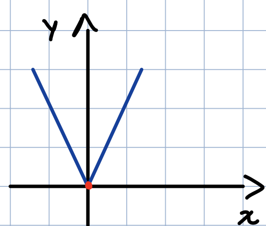
PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

I intervallo aperto, $f: I \to \mathbb{R}$

f'_+ e f'_- esistono, $f'_+ \neq f'_-$ x_0 punto di non derivabilita'

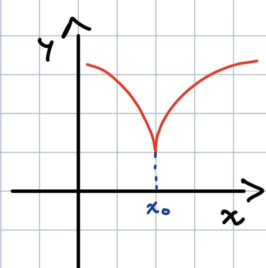
1) PUNTO ANGOLOSO

f'_+ o f'_- e' finita, $u \in \mathbb{R}$



2) CUSPIDE

f'_+ e f'_- sono entrambe infinite ma di segno opposto. Una $+\infty$, una $-\infty$



3) FLESSO A TANGENTE VERTICALE

f'_+ e f'_- sono entrambe infinite
e con lo stesso segno

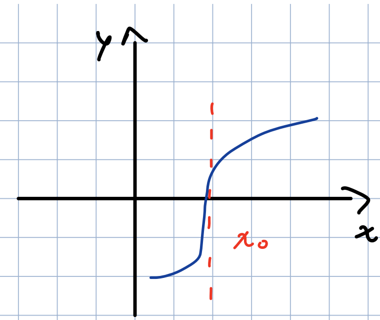


TAVOLA DELLE DERIVATE

$f(x)$	$f'(x)$
$k \in \mathbb{R}$	0
x^n	$n x^{n-1}$
$\lvert x \rvert$	$\operatorname{sgn} x = \frac{x}{\lvert x \rvert}$
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\operatorname{tg} x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

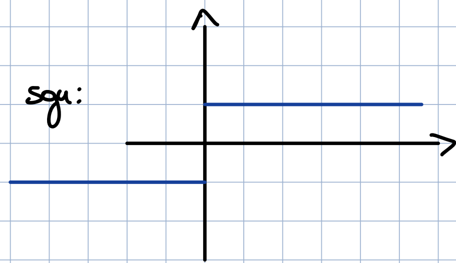
$x^2 = 2x$

$3^x = 3^x \ln 3$

$e^{2x} = ?$ e' una funzione composta

$e^{2x} = 2e^{2x}$

sgn:



PROPRIETÀ ELEMENTARI

1) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

$f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x - 1$

$f'(x) = 9x^2 - 8x + 5$

2) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$

$x^2 \ln x \qquad x^2 = f \qquad \ln x = g$

$f' = 2x \qquad g' = \frac{1}{x}$

$(2x)(\ln x) + (x^2)\left(\frac{1}{x}\right)$

3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

$\frac{x^2+1}{x^2-4} = \frac{(2x)(x^2-4) - (x^2+1)(2x)}{(x^2-4)^2}$

4) $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$

REGOLA DELLA CATENA

$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

$\Big(\underbrace{\overbrace{(x-1)^2}^{g(x)}}_{f(x)}\Big)' = 2(x^2-1) \cdot 2x$

$(x^3-3)^3 = 3(x^3-3)^2$

$(3e^{2x}-1)' \qquad f(x) = e^x \qquad g(x) = 2x$

$3e^{2x}(2)$

$\left[(x-1)^2(x+1)^3\right]' = 2(x^2-1)(2x)(x+1)^3 + 3(x+1)^2(x^2-1)^2$

$\left[\sin(\ln x)\right]' = \cos x(\ln x)\frac{1}{x}$ COMPOSTA!

$$(\operatorname{sen}(x))' = \cos x$$

RAPPORTO INCREMENTALE

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}(x)}{h} =$$

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$$

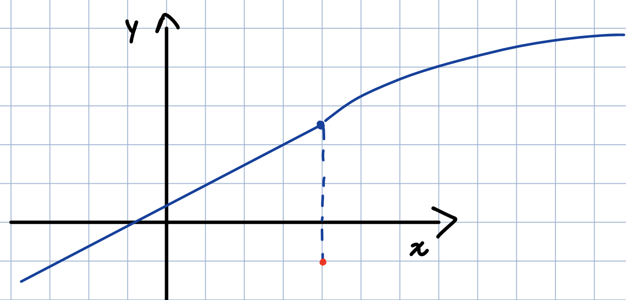
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}x\cos h + \cos x \operatorname{sen}h - \operatorname{sen}x}{h} = \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}x \underbrace{\overbrace{\left(\frac{\cos h + 1}{h^2}\right)}^{\text{LIMITE NOTEVOLE}}}_{-\frac{1}{2}} h + \cos x \underbrace{\overbrace{\left(\frac{\operatorname{sen}h}{h}\right)}^{\text{LIMITE NOTEVOLE}}}_{1} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}x\left(-\frac{1}{2}\right)\overset{\to 0}{h} + \cos x = \cos x$$

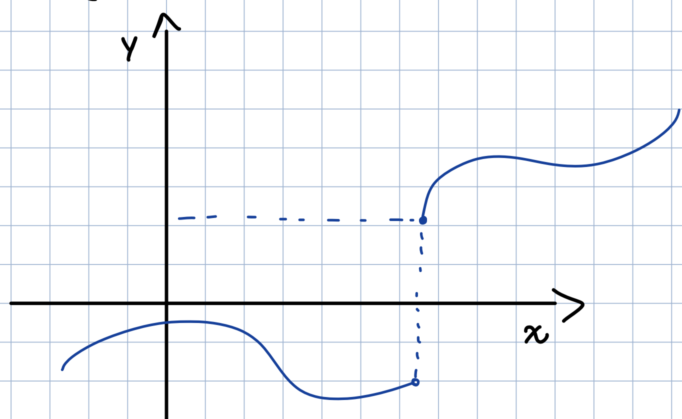
PUNTI DI DISCONTINUITÀ

1) DISCONTINUITÀ ELIMINABILE (O 3ª SPECIE)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R} \neq f(x_0)$$



2) SALTO (I SPECIE)



$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ MA $\in \mathbb{R}$

3) Tutti gli altri casi si dicono di seconda specie

STUDIO DI FUNZIONE

Passo 1: dominio naturale

Passo 2: parità e simmetrie

$$f(x) = -f(-x) \Rightarrow f \text{ è dispari}$$

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow f \text{ è pari}$$

Passo 3: LIMITI AGLI ESTREMI

- punti di discontinuità, asintoti

ASINTOTI → VERTICALI, ORIZZONTALI

Se non ci sono ricerco eventuale asintoto obliquo

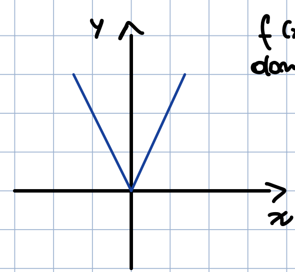
$y = mx + q$

$y = mx \Rightarrow m = \frac{y}{x} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ Se esiste ho finito

- $q = \lim_{x \to +\infty} f(x) - mx$ altrimenti continuo

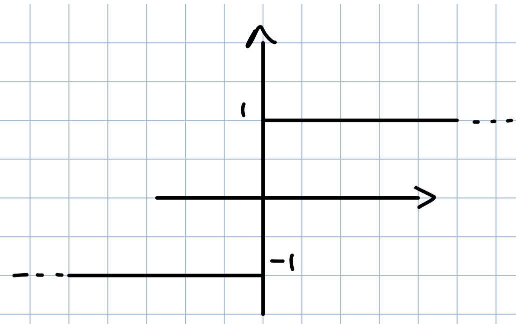
Passo 4: DERIVATA, punti angolosi e cuspidi

CALCOLO $f'(x)$ e ne studio la continuità



$f(x) = |x|$
dom $f = \mathbb{R}$

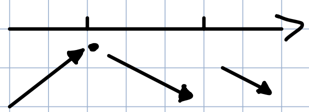
$f'(x) = \text{sgn}\, x = \frac{x}{|x|}$



Si ricade nei punti di discontinuità

PASSO 5: punti di massimo e minimo

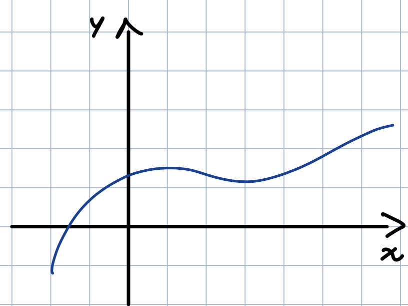
$f'(x) \geq 0$



PASSO 6: derivata seconda, punti di flesso

$f''(x) \geq 0$

PASSO 7: GRAFICO



15/01/2022 ESERCIZIO n° 4

$f(x) = 2\sqrt{x} - |x+1|$

a: dominio naturale di f

$|x+1|$ $\quad x+1 \geq 0$

$x \geq -1$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & x \geq -1 \\ (-1)(x+1) \\ -x-1 & x < -1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} - (x+1) & x \geq -1 \\ 2\sqrt{x} - (-x-1) & x < -1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} - x - 1 & x \geq -1 \\ 2\sqrt{x} + x + 1 & x < -1 \end{cases}$$

- $x \geq 0$ dom $f: \mathbb{R}^+, [0, +\infty)$ dunque si considera solo il I caso

b) dominio di derivabilità

$f'(x) = 2\sqrt{x} - x - 1$ in $\mathbb{R}^+$ $\qquad \sqrt{x} = x^{1/2}$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$$

$f \in C^1(I)$?

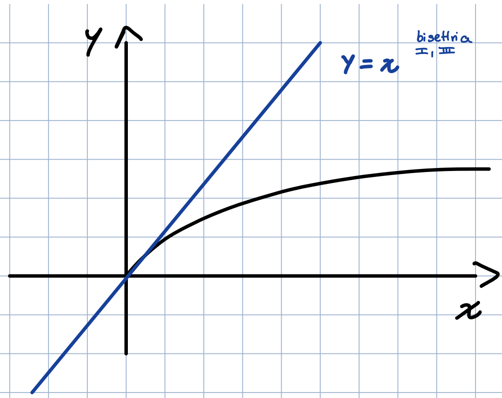
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2\sqrt{x} - x - 1 - (-1)}{x} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{x} - \frac{x}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{\sqrt{x}} - 1 = +\infty$$

dom $f': \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

c) TROVARE IL PIÙ GRANDE INTERVALLO DEL TIPO $[0, a]$ con $a \in \mathbb{R}$ per cui f e' invertibile

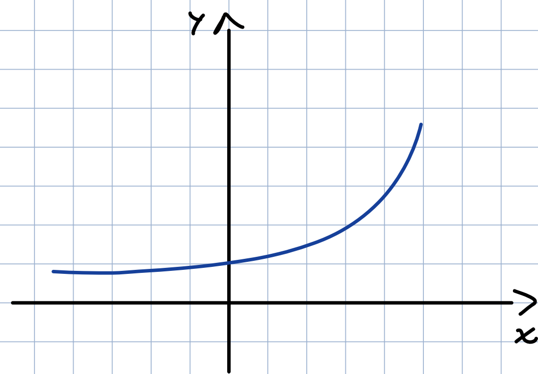
$Y = \sqrt{x}$ $\qquad f^{-1}(x)$



$y = \sqrt{x}$

$y^2 = x \quad \cdot \quad f^{-1}(x)$

f e' invertibile se e solo se f e' iniettiva oppure strettamente monotona



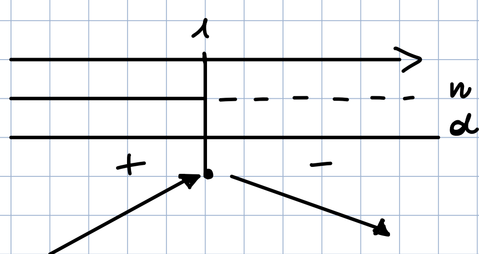
e' graficamente iniettiva

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \geq 0 \qquad \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \geq 0$

$n: \ 1 - \sqrt{x} \geq 0 \qquad \sqrt{x} \leq 0$

$x \leq 1$

$d: \ \sqrt{x} \qquad \forall x \in \text{dom} f$



1 e' un punto di massimo

$[0, a]$; $a = 1$ perché ad uno e' strettamente crescente (monotone) e dunque f e' invertibile

GRUPPO STUDIO 14/12

PRINCIPIO DI INDUZIONE

Sia p una proposizione (una frase, un'equazione)

$P(n)$

Se $P(0)$ e' vera, se $P(1)$ e' vera, se $P(2)$ e' vera e $P(n)$ e' vera allora e' vera sempre $P(n+1)$

COME RISOLVERE UN ESERCIZIO CON IL PRINCIPIO DI INDUZIONE:

- Passo base $P(0)$ o $P(1)$ $n \in \mathbb{N}$
- Assumere $P(n)$ come vera
- Passo induttivo $P(n+1)$

I APPELLO ESTIVO

Dimostra che $5^n - 1$ e' divisibile per 4 per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

- PASSO BASE

$P(1)$

$5^n - 1 \Rightarrow 5^1 - 1 = \frac{4}{4} = 1$, quindi $P(1)$ e' vera

- ASSUMO $P(n)$ come vera

$\exists n : \frac{5^n - 1}{4} = m, \; m \in \mathbb{N}$

- PASSO INDUTTIVO

$P(n+1)$ $\quad 5^{n+1} - 1 \ldots P(n) + m$

4+1

e' divisibile per 4

e' divisibile per 4

$$5^{n+1}-1 = 5^n \cdot 5^1 - 1 = 5^n(4+1)-1 = 5^n \cdot 4 \cdot 5^n - 1 = (5^n \cdot 4) + \underbrace{(5^n - 1)}_{P(n)}$$

è tutto divisibile per 4

I APPELLO ESTIVO 2022

$$\sum_{j=0}^{n} j = j_0 + j_1 + j_2 + \dots + j_n = 0 + 1 + 2 + \dots + n$$

I APPELLO SESSIONE INVERNO 2023

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \cdot 2^j = \frac{1+(-1)^n(2)^{n+1}}{3} \quad \text{per } n \in \mathbb{N}$$

• PASSO BASE $P(0)$

$$\sum_{j=0}^{0} (-1)^j \cdot 2^j = \frac{1+(-1)^0 \cdot 2^1}{3} \Rightarrow (-1)^0 (2)^0 = \frac{1+2}{3}$$

$$1 = 1$$

Assumo $P(n)$ come vera

• PASSO INDUTTIVO $P(n+1)$

$$\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j (2)^j = \frac{1+(-1)^{n+1}(2)^{n+1+1}}{3}$$

$$j_0, \sim j_1, \sim j_n, —— j_{n+1}$$

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \cdot 2^j + (-1)^{n+1}(2)^{n+1} = \frac{1+(-1)^{n+1} \cdot 2^{n+1+1}}{3}$$

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \cdot 2^j = 1 + (-1)^{n+1} 2^{n+1+1} - \frac{3(-1)^{n+1} \cdot 2^{n+1}}{3}$$

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \cdot 2^j = \frac{1+(-1)^{n+1} \cdot 2^{n+1+1} - 3(-1)^{n+1} \cdot 2^{n+2}}{3} =$$

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j 2^j = \frac{1+(-1)^n \cdot 2^{n+1}(-2+3)}{3} = \frac{1+(-1)^n 2^{n+1}}{3} = \frac{1+(-1)^n 2^{n+1}}{3}$$

II APPELLO INVERNALE 2023

DIMOSTRO $2^3+4^3+\ldots+(2n)^3 = 2n^2(n+1)^2$ per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

$$\sum_{j=1}^{n} (2j)^3 = 2n^2(n+1)^2$$

passo base $p(1)$

$$(2\cdot 1)^3 = 2\cdot 1^2 (1+1)^2$$

$$2^3 = 2(2)^2$$

ASSUMO VERA $P(n)$

passo induttivo $P(n+1)$

$$\sum_{j=1}^{n+1} (2j)^3 = 2(n+1)^2(n+1+1)^2$$

$$\sum_{j=1}^{n} (2j)^3 + (2(n+1))^3 = 2(n+1)^2\left((n+1)^2+2(n+1)+1\right) =$$

$$= (2(n+1))^3 = 2^3(n+1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} (2j)^3 = -2^3(n+1)^3 + 2(n+1)^4 + 4(n+1)^3 + 2(n+1)^2 =$$

$$= 2(n+1)^4 - 4(n+1)^3 + 2(n+1)^2 =$$

$$= 2(n+1)^2\left((n+1)^2 - 2(n+1)+1\right) = 2(n+1)^2\left(n^2+2n+1-2n-2+1\right) = 2(n+1)^2 n^2$$

SUCCESSIONI

Una successione reale e' una funzione da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_n\} = a_n$$

SUCCESSIONI →
- CONVERGENTE
- DIVERGENTE
- NON AMMETTE LIMITE

$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ (un numero finito) la successione si dice convergente

$\lim_{n \to +\infty} a_n = \pm \infty$ e' divergente

$a_n = \frac{1}{n}$

$a_{(1)} = \frac{1}{1}$ $a_{(3)} = \frac{1}{3}$ ...

$a_{(2)} = \frac{1}{2}$ $a_{(4)} = \frac{1}{4}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$ e' convergente a 0

$x_n = 4n$

x_{2k} e' la sottosuccessione pari

x_{2k+1} e' la sottosuccessione dispari

TEOREMA

Successioni monotone e limitate sono convergenti

$l \in \mathbb{R}$

Successioni ricorsive

I APPELLO INVERNALE 2023

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1 + a_n^2}{2} \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

avendo a_n sia a primo membro che a secondo membro so che e' una successione ricorsiva

• MOSTRARE CHE $\{a_n\}$ E' CRESCENTE

$a_0 = 0$

$a_1 = 1/2$

$a_2 = \frac{5}{8}$

$a_3 = \dfrac{1 + \frac{25}{64}}{2} = \frac{89}{128}$

$a_{n+1} > a_n$

$\frac{1 + a_n^2}{2} > a_n \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n^2 - 2a_n + 1 > 0$

$(a_n - 1)^2 > 0$ ✓

dimostrare che per ogni $n \geq 1$, il numero $a(n) = n^3 + 5n$ e' divisibile per 6

$n = 1$

$a(1) = (1)^3 + 5(1) = 6$; $6/6 = 1$ l'ipotesi e' verificata

Assumo $P(n)$ come vera

$a(n+1) = (n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 1 + 3n + 3n^2 + 5n + 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow (n^3 + 5n) + 3n(n+1) + 6$

$a(n+1)$ e' la somma di 3 termini tutti divisibili per 6, $a(n)$ e' quindi divisibile per 6 per ogni $n \geq 1$

DIMOSTRARE PER INDUZIONE CHE $2^n \geq n+1$ PER OGNI $n \geq 0$

• PASSO BASE

$n = 1$

$2^{(1)} \geq 1 + 1 \Rightarrow 2 \geq 2$ la proprietà e' verificata

• ASSUMO CHE $P(n)$ sia valida per ogni $n \in \mathbb{N}$

DIMOSTRO SIA VERA PER $P_{(n+1)}$

$2^{n+1} \geq n+1+1 \Rightarrow 2^n \cdot 2^1 \geq n+2$

$P_{(n+1)} = P_{(n)}$

Ipotesi induttiva $2^n \geq n+1$ $\quad 2^{n+1} \geq 2+n$

$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2(n+1) = 2n+2 \geq n+2$

$2^{n+1} \geq n+2$

E' vero

ES. 1

$4^n > n^2 \qquad n \geq 1$

Sia $n=1$, $4^{(1)} > 1^{(2)} \Rightarrow 4 > 1$ la proprietà è verificata

Assumo $P(n)$ sia reale $n=k \Rightarrow 4^k > k^2$
Verifico per $P(n+1)$ $n=k$

$4^{k+1} > \boxed{(k+1)^2}$

• MOLTIPLICO AMBI I MEMBRI DI $4^k > k^2$ PER 4

$4 \cdot 4^k > 4k^2$, mi rendo conto che scrivere $4 \cdot 4^k$ o 4^{k+1} è la stessa cosa

$4^{k+1} > \underline{4k^2} > \underline{(k+1)^2}$

$4k^2 > (k+1)^2 \Rightarrow 4k^2 > k^2+1+2k \Rightarrow 3k^2 - 2k - 1 > 0$

$3k^2 - 2k - 1 = 0$
$\Delta = 4 + 12 = 16$
$x_{1,2} = \frac{2 \mp 4}{6} \Rightarrow x_1 = 6/6 = 1$
$x_2 = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$ N.A. $\notin \mathbb{N}$

quindi $k > 1$

La disuguaglianza è quindi verificata

$9 = 10^n - 1$ DIVISIBILE PER 9 $n \geq 1$

• PASSO BASE

$n=1 \qquad 9 = 10^1 - 1 \Rightarrow 9 = 9$ l'ipotesi è verificata

$n=k \qquad 10^k - 1$ assumo sia verificata

$n=k+1 \qquad 10^{k+1} \boxed{-1} \Rightarrow 10 \cdot 10^k \boxed{-10+9}$

$10(10^k - 1) + 9$

$\frac{10(10^k-1)}{9} + \frac{9}{9}$

$10^k - 1$ è stata assunta come vera
quindi $\frac{10^k-1}{9}$ è verificata, così come $\frac{9}{9}$

La proprietà quindi vale per ogni $n \geq 1$