RECAP PL E PLI

Monday, 13 January 2025 17:46

Un problema di **programmazione lineare (PL)** è un problema di ottimizzazione in cui la funzione obiettivo *f* e tutti i vincoli *gi* sono funzioni lineari delle variabili *xj*

Soluzione di un problema di PL

- Una soluzione ammissibile di un problema di PL è un vettore $x \in R^n$ che soddisfa tutti i vincoli.
- L'insieme di tutte le soluzioni ammissibili si dice regione ammissibile o insieme ammissibile.
- Una soluzione ottima $x*$ è una soluzione ammissibile che ottimizza (minimizza o massimizza) il valore della funzione obiettivo tra tutte le soluzioni ammissibili.
- Non sempre un problema di PL ammette una soluzione ottima.
- Ogni problema di PL soddisfa sempre e solo uno dei 3 casi seguenti:

1. il problema è **inammissibile**: l'insieme ammissibile è vuoto;
2. il problema è **illimitato**: è possibile trovare delle soluzioni ammissibili che fanno diminuire (o aumentare per problemi di massimo) il valore della funzione obiettivo a piacere.
3. il problema **ammette soluzione ottima**: esiste almeno una soluzione ammissibile che ottimizza la funzione obiettivo (e il valore ottimo della funzione obiettivo è limitato).

Un modo efficiente per risolvere un problema di PL è l'algoritmo del **Simplesso**
A partire da una soluzione di base ammissibile il simplesso cerca un'altra soluzione che non sia peggiore di quella corrente. Parte da un problema espresso in forma canonica, ovvero un problema in cui la base ammissibile è una matrice identica, ricerca iterativamente una nuova soluzione di base che sia semplice da calcolare.

Step risoluzione:
1. **INIZIALIZZAZIONE**, ovvero riportare il problema in forma standard
2. **TABLEAU**, si costruisce il tableau, ovvero la matrice dei coefficienti. Se la soluzione di base è ammissibile (non ottima!) allora si procede con il Simplesso
3. **TEST DI OTTIMALITA**, se tutti i costi ridotti c, ovvero i coefficienti associati alle variabili nella funzione obbietivo sono non negativi, quindi maggiori o uguali a 0, allora la soluzione associata alla base è ottima
4. Nel caso in cui la soluzione sia ammissibile ma non ottima possiamo continuare con il metodo del Simplesso
5. **PIVOT**, per procedere avremo sicuramente bisogno di cambiare base e riportarla in forma canonica, si identifica quindi un pivot, ovvero un termine rispetto cui verranno eseguite tutte le trasformazioni in riga per ottenere una base canonica. Affinché un termine possa essere il pivot ci sono delle condizioni che deve rispettare, ovvero:
   a. Nel caso in cui la funzione sia di massimo il pivot si troverà nella colonna del costo ridotto più negativo
   b. Nel caso in cui la funzione sia di minimo il pivot si troverà nella colonna del costo ridotto più positivo fra i negativi

   Una volta individuata la colonna si effettuano dei rapporti tra tutti gli elementi della stessa > 0 e i termini noti. Quindi il pivot è dato dal rapporto tra i termini noti (numeratore) e i coefficienti della colonna individuata (positivi e diversi da 0, poiché saranno il denominatore di questo rapporto).
   Perché la scelta del pivot è così importante? La scelta del pivot determina anche chi sarà la variabile uscente in base e chi la entrante. La variabile uscente è identificata dal rapporto minimo menzionata poco fa. Possiamo pensare si crei una intersezione nel nostro tableau, dove il pivot è il nostro perno. La variabile in base corrispondente alla riga del pivot è la variabile uscente, la colonna che contiene l'elemento pivot è invece la variabile entrante
6. L'algoritmo **termina** quando si trova una soluzione ottima (soluzione di base ammissibile e costi ridotti tutti non negativi) o un tableau illimitato o inammissibile

Dualità
Ad un problema di programmazione lineare è possibile associare un problema detto duale. Se il problema primale ammette soluzione ottima allora i valori ottimi della funzione obiettivo dei due problemi coincidono. Se nel problema primale esiste un valore z* allora questo sarà uguale al valore w* nella formulazione duale.
Quando è utile utilizzare il duale? È utile quando ci conviene risolvere il problema con il minor numero di vincoli

Ad ogni vincolo primale è associata una variabile duale
Ad ogni variabile primale è associato un vincolo primale

Regola per trasformare il problema primale in duale

Problema di **minimo**:
1. La funzione obiettivo diventa di massimo
2. I termini noti diventano i costi ridotti u
3. Ad ogni termine x1, x2,…, xi coincide una riga nel problema duale che identifica tutti i termini di ogni singola variabile, in colonna, in unico vincolo. I termini noti saranno i coefficienti associati nella funzione obiettivo primale a tale variabile
4. Il segno dei vincoli nel duale è l'opposto del segno della variabile nel primale
5. Il segno delle variabili nel duale è uguale al segno dei vincoli nel primale

Problema di **massimo**:
1. La funzione obiettivo diventa di minimo
2. I termini noti diventano i costi ridotti u
3. Ad ogni termine x1, x2,…, xi coincide una riga nel problema duale che identifica tutti i termini di ogni singola variabile, in colonna, in unico vincolo. I termini noti saranno i coefficienti associati nella funzione

obiettivo primale a tale variabile

4. Il segno dei vincoli nel duale è uguale al segno della variabile nel primale
5. Il segno delle variabili nel duale è opposto al segno dei vincoli nel primale

Teoremi sulla dualità:

1. Il duale del problema duale è uguale al problema primale
2. **Dualità debole**: siano P e D i poliedri non vuoti della coppia di problemi primale-duale, allora per ogni coppia di soluzioni ammissibili per il primale e il duale vale

$$u^T b <= c^T x$$

3. **Dualità forte**:

- Teorema 3 (dualità forte): sia data una coppia primale-duale (P,D), se la regione di ammissibilità di P è un poliedro non vuoto, allora P ammette soluzione ottima se e solo se D ammette soluzione e **i valori delle funzioni obiettivo di P e D coincidono**

$$z_* = \min\{c^T x : Ax=b,\ x \geq 0\} = w_* = \max\{u^T b : u^T A \leq c^T,\ u \text{ libera}\}$$

- Siano x_{AP} ed u_{AD} due soluzioni ammissibili per P e D, se $c^T x_{AP} = u_{AD}{}^T b$ allora x_{AP} è soluzione ottima per P e u_{AD} è soluzione ottima per D

Programmazione Lineare Intera (PLI)

Un problema di PLI è un problema di ottimizzazione in cui:

- La funzione obiettivo c è lineare
- Le condizioni che descrivono l'insieme F sono lineari
- Le soluzioni ammissibili sono intere

L'idea è sempre quella di generare tutte le soluzioni ammissibili x, verificarne l'ammissibilità, e valutare l'obiettivo f(x) e scegliere la soluzione x migliore rispetto a f(x).
A questo proposito la tecnica migliore è quella del **Branching and Bound**, basata sul principio del **Divide et Impera**:

- Divide (ricorsivamente) l'insieme X di tutte le possibili soluzioni in sottoinsiemi più piccoli, non sovrapposti, quindi risolve il problema su ogni sottoinsieme
- Se venissero svolte tutte le possibili ricorsioni, si creerebbe un albero le cui foglie corrisponderebbero a tutte le soluzioni ammissibili del problema

Fase di branch: consiste nel partizionare il nodo padre per costruire i nodi figli

Le soluzioni del problema sono contenute nelle 2^n foglie, esplorarle tutte è un problema esponenziale. Occorre quindi un metodo che ci consenta di non valutare tutte le soluzioni ma solo quelle che stimiamo essere le migliori
Fase di bound: per ogni nodo consideriamo una valutazione ottimistica (non peggiore) del valore della funzione obiettivo rispetto alla soluzione rappresentata dal nodo

La regione ammissibile dei problemi di PLI è $\{x \in R^n : Ax <= b,\ x >= 0,\ x \in Z\}$

Per risolvere il problema effettuiamo delle operazioni di rilassamento che ci consentono di risolverlo senza considerare i vincoli di interezza

Nella fase di **branching** viene suddivisa la regione ammissibile di X in sottoregioni esclusive

- Viene effettuato il rilassamento continuo del problema
- Sia x* la soluzione ottima del problema rilassato e $z_L = c^T x^*$ il corrispondente valore di z
- Se x* è intera allora è anche soluzione del problema di PLI originario
  Altrimenti:
  Si considera la parte intera di x* e si risolvono i problemi

1. PLI_1: $\min\{c^T x : Ax = b,\ x \leq \lfloor x^* \rfloor,\ x \geq 0,\ x \in Z\}$
2. PLI_2: $\min\{c^T x : Ax = b,\ x \geq \lfloor x^* \rfloor + 1,\ x \geq 0,\ x \in Z\}$

Bounding: viene calcolato un bound sul valore ottimo z_i di un sotttoproblema risolvendo il relativo rilassamento continuo

L'algoritmo Branch and Bound

1. Inizializzazione
   - Stima ottimisticamente il valore B_0 della funzione obiettivo; poni $L = \{(P_0, B_0)\}$
2. Criterio di terminazione
   - Se $L = \emptyset$, allora TERMINA: x è la soluzione ottima.
   - Se viene superata una certa condizione (es. numero di nodi esplorati), allora TERMINA: x è una soluzione (non necessariamente ottima)
3. Selezione del prossimo nodo $(P_i, B_i) \in L$
4. Branching
   - Dividi P_i in J sottoproblemi

LOOP per j = 1 to J

5. Bounding
   - Valuta una stima B_{ij} in corrispondenza della soluzione x_{ij} associata al sottoproblema P_{ij}
6. Valutazione
   - Se P_{ij} non è ammissibile, CONTINUA
   - Se B_{ij} non è migliore di z ammissibile, CONTINUA
   - Se x_{ij} è ammissibile ed è migliore di z, aggiorna $z = B_{ij}$, $x = x_{ij}$, elimina da L tutti i nodi con valori non migliori di z, CONTINUA
   - Altrimenti, aggiungi (P_{ij}, B_{ij}) a L e CONTINUA
   - Vai a (2)

Applicazioni della Programmazione Lineare (PL)

1. **Logistica e Trasporti**:
   Ottimizzazione delle rotte di consegna (es. problema del trasporto).
   Minimizzazione dei costi di trasporto tra fornitori e clienti.
2. **Produzione e Pianificazione**:
   Allocazione ottimale delle risorse per minimizzare i costi o massimizzare il profitto.
   Determinazione del mix di produzione per soddisfare la domanda con vincoli di capacità.
3. **Gestione delle Risorse**:
   Assegnazione di risorse limitate (es. energia, tempo, budget) per massimizzare un obiettivo (es. profitto o efficienza).
   Pianificazione delle risorse umane.
4. **Portafoglio Finanziario**:
   Ottimizzazione del portafoglio di investimenti per massimizzare il rendimento atteso o minimizzare il rischio.
5. **Agricoltura**:
   Pianificazione delle colture per massimizzare i profitti considerando vincoli di spazio, acqua e risorse.
6. **Settore Energetico**:
   Ottimizzazione della produzione di energia per minimizzare i costi e soddisfare la domanda.

Applicazioni della Programmazione Lineare Intera (PLI)

1. **Gestione della Catena di Fornitura**:
   Decidere la localizzazione ottimale di magazzini e centri di distribuzione (problema di localizzazione).
   Determinare il numero intero di camion o unità di prodotto da spostare.
2. **Pianificazione del Personale**:
   Programmazione dei turni di lavoro in cui le ore devono essere numeri interi.
   Assegnazione di squadre o persone a specifici compiti.
3. **Problemi di Selezione e Assegnazione**:
   Assegnare risorse discrete a compiti specifici (es. il problema dell'assegnazione).
   Problema dello zaino (knapsack problem), dove si devono selezionare oggetti interi per massimizzare il valore rimanendo entro un limite di peso.
4. **Progettazione di Reti**:
   Progettare reti di comunicazione o trasporto con vincoli discreti (es. costruire solo interi numeri di linee o collegamenti).
5. **Problemi di Routing**:
   Problema del commesso viaggiatore (TSP): trovare il percorso più breve che visita un insieme di città una sola volta.
   Problemi di instradamento con vincoli di capacità.
6. **Settore Manifatturiero**:
   Pianificazione della produzione quando i prodotti devono essere prodotti in quantità intere.
   Decisioni su quali macchinari utilizzare e in che quantità.
7. **Finanza e Investimenti**:
   Selezione di investimenti o progetti (es. problema del capital budgeting) quando devono essere scelti interi progetti.

Differenza chiave nelle applicazioni

- **PL**: Adatto per problemi in cui è accettabile avere soluzioni continue (es. 3,5 unità di un prodotto o risorsa).
- **PLI**: Necessario quando il problema richiede soluzioni intere o decisioni binarie (es. 0 o 1, "faccio o non faccio").

Un esempio pratico:

- **PL**: Pianificare la produzione di 3,7 unità di un prodotto per massimizzare il profitto.
- **PLI**: Decidere se produrre un prodotto o meno (1 = sì, 0 = no), o produrre solo quantità intere di esso (es. 3 unità).