

Софийски университет „Св. Климент Охридски“
Факултет по математика и информатика
Катедра „Числени методи и алгоритми“



ДИПЛОМНА РАБОТА

на Людмил Владимиров Йовков, фак. номер 24248,

магистър в магистърска програма „Изчислителна математика и
математическо моделиране“

Тема на дипломната работа:

Модел на Нютон и модел на Каро за течение на кръв в артериите

Научни ръководители:

проф. д-р Соня Табакова,
Институт по механика, БАН

проф. д-р Татяна Черногорова
ФМИ, СУ „Св. Климент Охридски“

София, 2015

Съдържание

1	УВОД	4
2	ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТ	7
2.1	Диференчни схеми — същност, основни понятия и приложения	7
2.2	Основни апроксимации. Грешка на апроксимация	10
2.2.1	Апроксимиране на първа производна с разлика напред	10
2.2.2	Апроксимиране на първа производна с разлика назад	11
2.2.3	Апроксимиране на първа производна с централна разлика	11
2.2.4	Апроксимиране на втора производна	12
2.2.5	Апроксимиране при функции, съдържащи времева променлива	13
3	ПРАКТИЧЕСКА ЧАСТ	14
3.1	Кръв	14
3.1.1	Кръвна плазма	14
3.1.2	Кръвни клетки	14
3.2	Артерии и артериално дърво	15
3.3	Нютонови и не-Нютонови флуиди	17
3.4	Математически модел	18
3.5	Постановка на задачата	21
3.6	Стационарно уравнение, описващо движението на кръвта в артериите	23
3.6.1	Модел на Нютон ($\bar{\mu}_{app} = 1, \frac{\partial p}{\partial x} = -A_{st}$)	24
3.6.2	Модел на Каро ($\bar{\mu}_{app} \neq 1, \frac{\partial p}{\partial x} = -A_{st}$)	27
3.7	Нестационарно уравнение, описващо движението на кръвта в артериите, с косинусов закон за градиента на налягането	38
3.7.1	Модел на Нютон ($\bar{\mu}_{app} = 1, \frac{\partial p}{\partial x} = BF(\bar{t})$)	41
3.7.2	Модел на Каро ($\bar{\mu}_{app} \neq 1, \frac{\partial p}{\partial x} = BF(\bar{t})$)	51
3.8	Нестационарно уравнение, описващо движението на кръвта в артериите, при произволна периодична функция за градиента на налягането	57
3.8.1	Модел на Нютон	60
3.8.2	Модел на Каро	62

4	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	69
5	ПРИЛОЖЕНИЕ	72
5.1	Програмно осигуряване	72
5.1.1	Гранична задача за обикновено диференциално уравнение	72
5.1.2	Solver bvp4c	73
5.2	Програмна реализация	75
5.2.1	Стационарно уравнение на движение на кръв в артериите, модел на Нютон	75
5.2.2	Стационарно уравнение на движение на кръв в артериите, модел на Каро	77
5.2.3	Нестационарно уравнение на движение на кръв в артериите, модел на Нютон	85
5.2.4	Нестационарно уравнение на движение на кръв в артериите, модел на Каро	96

1 УВОД

Един от най-значимите етапи в развитието на приложната математика е появата на моделирането. Математическото моделиране е начин да се пресъздават реални явления посредством математически формули и уравнения. От 17 век насам то претърпява значително развитие. Откриваме го още в трудовете на сър Исак Нютон (17 – 18 век: закон за гравитацията, закон за всеобщото привличане между телата, закон за движението), Галилео Галилей (16 – 17 век: кинематика, динамика, небесна механика), Алберт Айнщайн (19 – 20 век: обща теория на относителността), Джеймс Максвел (19 век: втори закон на термодинамиката, уравнения на Максвел), Макс Планк (19 – 20 век: закон за квантуване на енергията).

Приложенията на математиката намират място и в химията (19 век: закон за радиоактивното разпадане, модели на кристализация), в биологията (модел на Лотка – Волтера [8], модел на Мичър за левкемна популация [7], модели за растеж на туморни клетки [8], ензимна кинетика [8]), в икономиката (модел на Блек и Шолс за определяне цените на опциите), в индустрията и производството (модели за оптимално изрязване на детайли с определена форма).

Забелязваме колко е важно да се използват математически модели, както и да се конструират такива въз основа на натрупания опит и познания. Математическият модел се състои обикновено от диференциални уравнения или системи от диференциални уравнения и от геометрична област, в която протича разглежданият процес (точка, интервал, кръг, двумерна област със сложна форма, компактен върху повърхнина, паралелепипед, цилиндър, неправилна тримерна област и т. н.). Върху решенията на уравненията се налагат допълнителни условия (начални и/или гранични) така, че моделът да бъде максимално правдоподобен.

Коректността на даден математически модел се установява чрез:

- съпоставяне на числените резултати от модела с определени експериментални данни (взети от специализирана литература, публикации, лаборатории);
- изследване на разликата между приближеното решение на диференциалната задача, получено числено, и точното решение, в случай че е известно;

- прилагане на известни теореми и факти от теорията на диференциалните уравнения и приближеното смятане върху численото решение на задачата.

Настоящата дипломна работа е посветена на модела на Нютон и модела на Каро за движение на кръвта в артериите (движение на флуид в безкрайно дълга цилиндрична тръба). Движението на кръвта е съществена част от жизнените процеси в човешкия организъм. По естествен начин възниква идеята, това движение да се моделира с помощта на диференциални уравнения и геометрия, за да бъде изследвано в определени ситуации от действителността. Научни публикации на такава тематика се появяват през 50-те години на миналия век (Carreau [10], Yasuda [10], Casson [10], Womersley [11]) и продължават да вълнуват науката и до днес (Ellis [9], Myers [9]). С течение на времето съществуващите модели се усъвършенстват или се появяват нови, които се основават на вече постигнатото. Целта на работата е числено изследване на кръвната динамика в артериите при определени стойности на участващите физични параметри.

Както ще видим по-нататък, моделите на Нютон и на Каро са частен случай на уравнението на непрекъснатостта и системата частни диференциални уравнения на Навие-Стокс [4] при определени предположения за вискозитета. Тъй като тези уравнения са квазилинейни (някои от коефициентите им зависят от търсеното решение), единственият начин да бъдат разрешени е да се построи числена схема върху избрана мрежа от точки. Ние подробно ще покажем етапите при конструирането на схемата и прехода от диференциална задача към задача върху точките от мрежата. Поотделно ще изследваме случаите, когато описваният процес не зависи явно от времето (стационарност) и когато зависи от времето (нестационарност). При нестационарно течение ще приложим принципа за максимума, за да изберем стъпките h и τ на мрежата така, че да получим устойчива дискретна задача. Ще приложим чертежи от проведените числени експерименти за онагледяване на резултатите и ще формулираме изводи.

Структурата на дипломната работа включва следните елементи:

- *Теоретична част* — в този раздел сбито е представена информацията от теорията на диференциалните схеми, необходима за цялостното разбиране съдържанието на дипломната работа.

- *Практическа част* — разглеждат се подробно стационарното и нестационарното диференциално уравнение, описващи движението на кръвта в артериите, като се градира строежът и сложността на основните концепции.
- *Заключение* — представяне в кратка форма на резултатите от изследването и от проведените числени експерименти.
- *Приложение* — това е последният раздел от дипломната работа и в него е поместена програмната реализация на физичния процес, описван с уравнения; програмната платформа е **Matlab** [13] и се предполага, че читателят е запознат с нейния синтаксис.
- *Литература*

2 ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТ

2.1 Диференчни схеми – същност, основни понятия и приложения

Както вече беше казано, диференциалните уравнения играят важна роля в развитието на съвременната приложна математика. Те активно се използват за описване на физични и биологични процеси и явления като трептене на ограничена струна, трептене на мембрана, пренос на вещество, движение на телата, радиоактивност, популационна динамика. Понеже невинаги може да бъде намерено в явен вид решението на диференциалното уравнение, науката търси начини за откриването на достатъчно приличаща на него функция. Този значим скок в изчислителната математика се нарича апроксимиране.

Един от успешните методи в диференциалните апроксимации е методът на диференчните схеми. Неговата концепция се състои в конструиране на функция, удовлетворяваща дадените начални, гранични или начално-гранични условия и известна в краен брой точки. Подходът изисква силна математическа подготовка и дава завидно добри резултати.

Идеята на диференчните схеми се състои в следното:

- извършва се дискретизация на областта, върху която се решава диференциалното уравнение;
- апроксимират се участващите в уравнението производни, като се използват крайни разлики;
- решават се получените след дискретизацията алгебрични системи от уравнения; по този начин се построява решението на задачата в предварително зададена област в равнината и с определена точност на приближенията;
- въз основа на получените резултати (изчисления, чертежи), на известни факти или теореми се съди за коректността на диференчната схема.

Към основните понятия в теорията на диференчните схеми [5] се отнасят:

- *мрежа* — това е множеството от точки, в което се търси приближено решение на задачата; мрежата може да бъде както равномерна (точките са равноотдалечени), така и неравномерна;
- *възли* на мрежата се наричат точките от мрежата;
- *мрежова функция* се нарича всяка функция, дефинирана във възлите на мрежата;
- *шаблон* на даден възел x от мрежата се нарича множеството от възела x и съседните му възли, стойностите на мрежовата функция в които се използват при апроксимирането на производните в x ;
- *околност* на възела x е множеството от точките, включени в шаблона на възела, без самия възел.

Нека е дадена линейната диференциална задача

$$\begin{aligned} (1) \quad & Lu = f(x), x \in G, \\ (2) \quad & lu = \mu(x), x \in \Gamma, \bar{G} = G \cup \Gamma, \end{aligned}$$

където $u(x)$, $f(x)$, $\mu(x)$ са елементи на нормираното пространство H с норма $\|\cdot\|$, а L и l са линейни диференциални оператори, действащи от H в H . Уравнение (1) обобщава основните диференциални уравнения, а (2) — допълнителните условия (начални, гранични или начално-гранични) на разглежданата задача. Ще предполагаме, че нейното решение съществува и е единствено.

Нека на задача (1), (2) е съпоставена диференчната задача (схема)

$$\begin{aligned} (3) \quad & L_h y_h = \varphi_h, x \in \omega_h, \\ (4) \quad & l_h y_h = \tilde{\mu}_h, x \in \gamma_h, \bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h, \end{aligned}$$

където $\bar{\omega}_h$ е мрежата от точки, въведена в областта \bar{G} , функциите y_h , φ_h и $\tilde{\mu}_h$ са мрежови функции, принадлежащи на нормираното пространство H_h с норма $\|\cdot\|_h$, а L_h и l_h са линейни диференчни оператори, действащи от H_h в H_h . Решението на задача (3), (4) зависи от стъпката h на мрежата като от параметър.

Основен интерес в теорията на диференчните схеми представлява оценката на разликата между функциите u_h и y_h .

Определение 1 Под *грешка на диференчната схема* (3), (4) се разбира мрежовата функция

$$z_h = y_h - u_h.$$

Определение 2 Под *грешка на апроксимация на диференциалното уравнение* (1) с *диференчното уравнение* (3), пресметната за точното решение на диференциалното уравнение (1), се разбира мрежовата функция

$$\psi_h = \varphi_h - L_h u_h.$$

Аналогично се дефинира и *грешка на апроксимация за граничното условие* (2) с *диференчното условие* (4), а именно

$$\nu_h = \tilde{\mu}_h - l_h u_h.$$

Ако се разглеждат тези грешки в една конкретна точка от мрежата, се говори за *локална грешка на апроксимацията*.

Определение 3 Казва се, че диференчната схема (3), (4) има n -ти ред на апроксимация, ако $\|\varphi_h\|_h = O(\|h\|^n)$ и $\|\nu_h\|_h = O(\|h\|^n)$.

Определение 4 Казва се, че диференчната схема (3), (4) е *сходяща* (решението на диференчната схема е *сходящо* към решението на диференциалната задача), ако $\|z_h\|_h = \|y_h - u_h\|_h \rightarrow 0$ при $\|h\| \rightarrow 0$. Ако $\|z_h\| = O(\|h\|^n)$, казва се, че диференчната схема (3), (4) е *сходяща със скорост* $O(\|h\|^n)$ или че има n -ти ред на точност.

Нека разполагаме не с една, а с цял клас от задачи. Съществуват диференчни схеми, които не зависят от конкретната задача, а успешно се прилагат за целия клас от задачи.

Определение 5 *Диференчни схеми, чиито коефициенти не зависят нито от избора на задача от даден клас задачи, нито от избора на мрежата, се наричат хомогенни диференчни схеми.*

Когато се решава задача от сферата на математическата физика, несъмнено се прилагат известни физични закони. Тези закони остават неизменни от каквато и гледна точка да фиксираме проблема. Искаме и диференчните схеми, които строим, да се подчиняват на същата концепция.

Определение 6 *Диференчна схема, която изразява някакъв закон за запазване върху точките на предварително избрана мрежа, се нарича консервативна.*

2.2 Основни апроксимации. Грешка на апроксимация

Тук ще приведем няколко начина за приближаване на производни и ще покажем как се изчислява грешката от апроксимация.

2.2.1 Апроксимиране на първа производна с разлика напред

Нека $u(x)$ е дадена непрекъсната функция в интервала $[a; b]$. Нека $\xi \in [a; b]$. По дефиниция

$$(5) \quad u'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{u(x) - u(\xi)}{x - \xi}.$$

Ако използваме означенията $\Delta u = u(x) - u(\xi)$ и $\Delta x = x - \xi$, можем да запишем равенството (5) във вида

$$(6) \quad u'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Разликата Δu се нарича крайна разлика от първи ред в точката ξ за функцията u . Когато Δx е малко, частното $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ апроксимира стойността на производната в точката ξ :

$$(7) \quad u'(\xi) \approx \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Разбиваме интервала $[a; b]$ на равни подинтервали с дължина h чрез редицата от точки

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

В този случай казваме, че сме въвели равномерна мрежа със стъпка h .

Сега ще покажем как можем да пресметнем приближената стойност на производната в точката $x_i \in [a; b]$, използвайки мрежата. Ако изберем $x = x_{i+1}$, $x_{i+1} > x_i$, и заместим в (7), имаме

$$u'(x_i) \approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{x_{i+1} - x_i}.$$

Това е апроксимация с крайна разлика напред. Грешката ѝ се пресмята по следния начин [1].

$$\begin{aligned}\psi_h &= \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - u'(x_i) = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - u'_i = \\ &= \frac{1}{h} \left(u_i + hu'_i + \frac{h^2}{2!} u''(x_i + \theta h) - u_i \right) - u'_i = \\ &= \frac{h}{2} u''(x_i + \theta h), \quad 0 \leq \theta \leq 1.\end{aligned}$$

Предполагайки, че $|u''(x_i + \theta h)| \leq C$, $C > 0$, в дадения интервал, получаваме

$$|\psi_h| = \left| \frac{h}{2} u''(x_i + \theta h) \right| \leq \frac{h}{2} \cdot C \Rightarrow \psi_h = O(h).$$

Следователно грешката от апроксимация с разлика напред е от първи ред.

2.2.2 Апроксимиране на първа производна с разлика назад

Ако положим в (7) $x = x_{i-1}$, имаме

$$u'_i \approx \frac{u(x_i) - u(x_{i-1}))}{x_i - x_{i-1}} \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{h}.$$

Следователно

$$\begin{aligned}\psi_h &= \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - u'_i = \frac{1}{h} \left[u_i - \left(u_i - hu'_i + \frac{h^2}{2!} u''(x_i + \theta h) \right) \right] - u'_i = \\ &= \frac{1}{h} \left(hu'_i - \frac{h^2}{2!} u''(x_i + \theta h) \right) - u'_i = -\frac{h}{2} u''(x_i + \theta h), \quad 0 \leq \theta \leq 1.\end{aligned}$$

Както и в предишния случай, грешката е от първи ред.

2.2.3 Апроксимиране на първа производна с централна разлика

Апроксимацията на производната $u'(x)$ в точката x_i се извършва чрез точките x_{i-1} и x_{i+1} и чрез стойностите на функцията в тях. Понеже

$x_{i-1} + h = x_i$ и $x_i + h = x_{i+1}$, то $x_{i-1} + 2h = x_{i+1} \Rightarrow x_{i+1} - x_{i-1} = 2h$. Ето защо

$$u'(x_i) \approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{x_{i+1} - x_{i-1}} \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}.$$

Сега развиваме в ред на Тейлър около точката x_i :

$$\begin{aligned} \psi_h &= \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - u'_i = \\ &= \frac{1}{2h} \left[u_i + hu'_i + \frac{h^2}{2!}u''_i + \frac{h^3}{3!}u'''_i - \left(u_i - hu'_i + \frac{h^2}{2!}u''_i - \frac{h^3}{3!}u'''_i \right) \right] - u'_i = \\ &= \frac{1}{2h} \left(2hu'_i + \frac{2h^3}{3!}u'''_i \right) - u'_i = \frac{h^2}{6}u'''_i; \\ |u'''_i| &\leq C, C > 0 \Rightarrow |\psi_h| = \left| \frac{h^2}{6}u'''_i \right| \leq \frac{h^2}{6} \cdot C = O(h^2). \end{aligned}$$

2.2.4 Апроксимиране на втора производна

Съобразяваме, че

$$\begin{aligned} u''(x_i) &\approx \frac{u'(x_{i+1}) - u'(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \approx \frac{u'_{i+1} - u'_i}{h} \approx \\ &= \frac{1}{h} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) \approx \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}. \end{aligned}$$

Вече сме готови да пресметнем локалната грешка на апроксимация.

$$\begin{aligned} \psi_h &= \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - u''_i = \frac{1}{h^2} \left(u_i + hu'_i + \frac{h^2}{2!}u''_i + \frac{h^3}{3!}u'''_i + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}_i \right) - \\ &= \frac{1}{h^2} \cdot 2u_i + \\ &= \frac{1}{h^2} \left(u_i - hu'_i + \frac{h^2}{2!}u''_i - \frac{h^3}{3!}u'''_i + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}_i \right) - u''_i = \\ &= u''_i + \frac{h^2}{12}u^{(4)}_i - u''_i \end{aligned}$$

Оттук, ако приемем, че четвъртата производна съществува и е ограничена, получаваме $\psi_h = O(h^2)$.

2.2.5 Апроксимиране при функции, съдържащи времева променлива

Нека $u = u(x, t)$, т. е. функцията зависи и от времето t . В този случай използването на дискретен интервал за изследването на даден физичен процес не е достатъчно, защото няма да се отчитат измененията във времето. Необходимо е да въведем мрежа не само по пространствената променлива x , но и по времето t . Нека $x \in [0; R]$, $t \in [0; T]$. Тогава

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, h = \frac{R}{N}, i = 0, 1, \dots, N\},$$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, \tau = \frac{T}{M}, j = 0, 1, \dots, M\}$$

са двете равномерни мрежи по двете променливи. Индексът по времето се пише като горен такъв. Отсечката $t = t^j$ се нарича слой. Апроксимациите на производните са аналогични на едномерните, които бяха приведени по-горе, а именно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^j) &\approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau}, \psi_\tau = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} - \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^j) = O(\tau), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^j) &\approx \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\tau}, \psi_\tau = \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\tau} - \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^j) = O(\tau), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^j) &\approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2\tau}, \psi_\tau = \frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2\tau} - \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^j) = O(\tau^2), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^j) &\approx \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}, \psi_h = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^j) = O(h^2). \end{aligned}$$

3 ПРАКТИЧЕСКА ЧАСТ

3.1 Кръв

3.1.1 Кръвна плазма

Кръвта, *sanguis*, се състои от течна основа, *plasma*, и от формени елементи — червени и бели кръвни клетки и кръвни плочици, които плават в нея [3]. Плазмата може да се сравни с основното вещество на съединителната тъкан. Кръвта не притежава собствена форма и изпълва съдовете, през които тече. Тъй като прозирката (луменът) на кръвоносните съдове вследствие на свиване или разширение на стената им се мени, и количеството на минаващата кръв през тях не е еднакво. От друга страна, и самата кръв влияе върху прозирката на съдовете. Когато нахлуе повече кръв в съдовете на една област на тялото или поради известни пречки тя не може да се оттича от тях, съдовете се разширяват.

Кръвта има червен цвят, който е ясночервен (ален), когато тя съдържа достатъчно количество кислород, и по-тъмночервен при изчерпване на кислорода в нея и абсорбиране на повече въгледвуокис. За тези газове, а също и за хранителните и отпадъчните продукти при обмяната на веществата в тялото кръвта служи като транспортно средство. Специфичното ѝ тегло е около $1050 - 1060 \text{ kg/m}^3$. Вкусът ѝ е солен. В тялото кръвта тече свободно през кръвоносните съдове, като се отличава със слаб вискозитет. Изложена на допир с въздуха, тя става лепкава и скоро се съсирва. Количеството на кръвта у хора със средна тежина на тялото възлиза на около $5 - 5,5$ литра, т. е. на около $\frac{1}{13}$ от тази тежина. Кръвта съдържа $78 - 79\%$ вода и $21 - 22\%$ твърди съставки.

3.1.2 Кръвни клетки

- Червени кръвни клетки, *erythrocytes*

Червените кръвни клетки, *еритроцитите*, представляват кръгли безядрени клетки, които са дисковидни, плоски и централно вдлъбнати по двете или по едната си страна, с около $7,5 \mu$ диаметър и $1,5 - 2 \mu$ дебелина. В един мл кръв се съдържат средно около $4,500,000$ до $5,000,000$ червени кръвни клетки, а в цялата кръв на средно голям индивид — около 30 билиона. Броят им се колебае в зависимост от възрастта, пола, климатичните условия, височината

над морското равнище и др. Той не е еднакъв в различните периоди от живота на един и същ индивид, напр. след загуба на кръв намалява.

- Бели кръвни клетки, *leucocytes*

Белите кръвни клетки, левкоцитите, имат ядра и притежават способност за самодвижение чрез псевдоподии подобно на едноклетъчните животни, напр. амебите. Левкоцитите могат да преминават през стените на тънките кръвоносни съдове (капиляри и прекапиляри), да се придвижват свободно в тъканите, да приемат хранителни вещества, да отделят ферменти и др. Посредством псевдоподиите си левкоцитите обхващат проникнали в тъканите на тялото микроорганизми, както и частици от разрушени клетки, като ги смилат и унищожават (фагоцитоза). Броят на белите кръвни клетки в кръвта се колебае нормално в тесни граници и възлиза на около 6500 — 7000 в един мл кръв.

- Кръвни плочици, *thrombocytes*

Кръвните плочици, тромбоцитите, са малки кръгли звездовидни или вретеновидни лепкави късчета от протоплазма, които съдържат по едно малко вътрешно уплътнение. Тромбоцитите се считат за фрагменти от клетки и отделят особен фермент — тромбокиназа, който играе важна роля при съсирването на кръвта. Броят им възлиза на около 300,000 — 500,000 в един мл кръв. Тромбоцитите са светлосиви или безцветни, пречуват силно светлината и са твърде неустойчиви образувания, които при съприкосновение на кръвта с въздуха се натрупват и прилепват едни към други в купчини.

3.2 Артерии и артериално дърво

Артериите, arterias, представляват големи тръби в човешкия организъм, които изпомпват приетата от сърцето кръв навън, към вътрешните органи. Според ширината на лумена си и според устройството на стената си артериите се подразделят на големи, средно големи и малки [3]. Разграничението на тези категории съдове не е рязко.

Големите артерии имат диаметър над 3 — 4 мм и се наричат съдови стволоче, като например: *arteria carotis communis*, *arteria subclavia*, *arteria axillaris* и др.

Като средно големи артерии се считат тези клонове (респ. притоци) на големите стволоче, които имат диаметър от около 1 до 3 мм, като напр. *arteria thyreoida superior*, *arteria lingualis*, *arteria epigastrica inferior* и др.

Повечето от малките артерии са клончета, респ. приточета, на средно големите съдове, нямат имена и се разпространяват във вътрешността на органите, в които се разпадат на по-тънки разклонения.

Артерията не променя своята прозирка (или калибър) между мястото на отделяне на клончета, докато след обособяването им става по-тънка. Артериите имат приблизително кръгъл напречник, чиято форма те запазват вследствие на плътността и еластичността на стената си.

Разклонението на кръвоносните съдове наподобява това на дърветата, т. е. клоновете и клончетата (респ. притоците и приточетата) вървят във всички направления на пространството. Отделянето на клонове от артериите се извършва по *монотомичен* или *дихотомичен начин*. При първия начин стволът дава последователно и поотделно странични клонове, а при втория начин той се разделя на два почти еднакво дебели клона. Клоновете се отделят от ствола по-често под остър ъгъл и по-рядко под прав ъгъл спрямо неговата посока. Още по-рядко се среща обособяване на клонове под тъп ъгъл. Клоновете на повечето артерии се разпределят в странични и крайни. Крайните клонове произлизат от последното делене.

Стената на артериите е изградена от три слоя — вътрешен, среден и външен, като най-важни са вътрешният и средният. Вътрешният слой улеснява течението на кръвта и възпрепятства съсирването ѝ. Средният слой придава плътност на стената на артерията и обуславя разширяването и стесняването ѝ.

Ендотелът е съвкупност от клеки, която застила вътрешната повърхност на артериите. Той е съществена част от *вътрешния слой*. *Средният слой* е изграден от мускулатура и съединителна тъкан. Съставът на *външния слой* съдържа предимно съединителна тъкан, която е връзката на артерията с обкръжаващата среда.

Строежът на артериалната стена зависи от вида на артерията.

При *малките артериални клончета* (т. е. тези, които са позиционирани във вътрешността на органите) ендотелът се намира върху тънка ципа от съединени еластични влакна. Около ципата са разположени концентрични кръгове от гладки мускулни клетки, които чрез мрежа от еластични влакна и колагенни влакна образуват средния пласт. Той е обграден от съединителнотъканен външен слой. Във вътрешния са вло-

жени гладки мускулни клетки, които лесно могат да променят своите размери.

В *средно големите артерии* ендотелът е разположен върху плътна съединителна тъкан, съдържаща еластични влакна. Средният слой е изграден от множество гладки мускулни клетки, които са събрани в концентрични снопове и се разполагат между циркулярно ориентирани еластични влакна. Външният слой се състои от съединителна тъкан, изградена от влакнеста еластична мрежа.

На границата на средния и вътрешния слой в *големите артерии* пластът от еластични влакна се уплътнява. Средният пласт на близките до сърцето големи артерии съдържа пластинки от еластични влакна, а между пластинките лежат гладки мускулни влакна. Тези артерии имат жълтеникав цвят.

3.3 Нютонови и не-Нютонови флуиди

Тъй като ще разглеждаме задачата за движение на кръв в артериите (което представлява задача за движение на флуид в тръба), ще споменем някои характеристики и свойства на флуидите.

Най-важните задачи при изследването на флуидите се изразяват в получаването на спомагателни закони [4]: закон за топлопроводността — връзка между топлинния поток и температурата, и закон за вискозитета — връзка между тензора на напреженията и скоростите на деформациите. Най-простите връзки са линейните: напрежението е пропорционално на скоростта (*закон на Нютон*) и топлинният поток е пропорционален на градиента на температурата (*закон на Фурие*). *Флуидите, за които е изпълнен законът на Нютон, се наричат Нютонови флуиди*. За по-сложните течности — като течните суспензии от твърди частици, биологичните разтвори, високополимерните разтвори — не е в сила законът на Нютон и *тези флуиди се наричат не-Нютонови флуиди*. Разделът от механиката, третиращ проблемите на не-Нютоновите флуиди, се нарича реология.

По-долу ще изброим някои характерни черти на двата вида флуиди.

Свойства на Нютоновите флуиди

1. *Напрежението е линейна функция на скоростта на деформация [4].*

2. *Тензорът на напреженията е симетричен.*
3. *Ако флуидът е в равновесие, напрежението е само механичното налягане.*
4. *Механичното и термодинамичното налягане са равни.*

Свойства на не-Нютоновите флуиди

1. *Напрежението е нелинейна функция на деформацията (строго нелинеен степенен закон — суспензии от асиметрични частици, разтвори на високополимери) [4].*
2. *Появяват се допълнителни нормални напрежения вследствие на срязващи сили.*
3. *Флуидът е еластичен и вискозен — модел на Бингам: материалът е еластичен до известно ниво на напрежението, след което се проявява като Нютонов флуид (концентриран глинен разтвор, паста за зъби, шоколад); модел на Максвел: линеен, вискозо-еластичен закон, където скоростта на деформацията е пропорционална на напрежението плюс скоростта на промяна на напрежението във времето (метали и термопластични полимери близо до температурата на топене, бетон).*

3.4 Математически модел

Счита се, че някои сърдечносъдови болести зависят пряко от динамиката на кръвния поток [10]. Опирайки се на медицината и на медицинската техника, е трудно да обосновем строго това твърдение. От гледна точка на математическото моделиране и числените симулации обаче проблемът изглежда разрешим. Били са реализирани различни хемореологични модели с идеята да предскажат някакви ориентировъчни стойности на хемодинамичните параметри, които повлияват генезиса на аневризми и атеросклероза.

В кръвоносната система (с изключение на вените) поведението на кръвния поток е осцилиращо — то не е еднакво навсякъде в артериалното дърво въпреки непрекъснатото изпомпване от сърцето [10]. Така потокът е нестационарен и трябва да се отчита зависимостта му от времето.

Ще покажем как се извежда уравнението, описващо динамиката на кръвния поток. За целта ще ни бъдат необходими уравнението на непрекъснатостта и уравненията на Навие-Стокс в декартова и в цилиндрична координатна система.

1. Уравнение на непрекъснатостта и уравнения на Навие-Стокс в декартова координатна система

Нека $(x; y; z)$ са координатите на дадена точка в избрана декартова координатна система и $(u; v; w)$ са координатите на вектора на скоростта \mathbf{v} .

Уравнението на непрекъснатостта е:

$$(8) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Уравненията на Навие-Стокс изглеждат по следния начин:

$$(9) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_{app}}{\rho} \Delta u,$$

$$(10) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu_{app}}{\rho} \Delta v,$$

$$(11) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu_{app}}{\rho} \Delta w.$$

Тук p е налягането, което кръвта упражнява върху стените на артериите, ρ е плътността на кръвта, $\mu_{app} = \text{const}$ е действителният ѝ вискозитет, а Δ е операторът на Лаплас в декартови координати:

$$\Delta = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

2. Уравнение на непрекъснатостта и уравнения на Навие-Стокс в цилиндрична координатна система

Преминаването в цилиндрична координатна система се осъществява, като се въведат радиалната координата r и полярният ъгъл $\theta \in [0; 2\pi)$:

$$(x; y; z) \rightarrow (x; r \cos \theta; r \sin \theta).$$

Уравнението на непрекъснатостта (8) се трансформира в

$$(12) \quad \frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = 0,$$

а уравненията на Навие-Стокс (9) – (11) – в

$$(13) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + v_r \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_{app}}{\rho} \Delta u,$$

$$(14) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + u \frac{\partial v_\theta}{\partial x} + \frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} = \\ -\frac{1}{\rho r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\mu_{app}}{\rho} \left(\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right), \end{aligned}$$

$$(15) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + u \frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{v_\theta^2}{r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = \\ -\frac{1}{\rho r} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu_{app}}{\rho} \left(\Delta v_r - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right). \end{aligned}$$

И сега Δ е операторът на Лаплас, но в цилиндрични координати:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}.$$

Течението на кръвта е слоесто течение само по направление на артерията. Тогава $v_\theta = v_r = 0$ и от уравнение (12) получаваме

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = u(r, t).$$

От уравненията (14) и (15) следва, че

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \text{т. е. } p = p(x, t).$$

По този начин (13) се преобразува до уравнението

$$(16) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_{app}}{\rho} \Delta u$$

при Нютонов флуид ($\mu_{app} = \text{const}$). Ако флуидът е не-Нютонов (μ_{app} е функция на скоростта или на градиента ѝ), уравнение (16) се записва като

$$(17) \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_{app} \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

То е от вида

$$c(r, t, u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k \left(r, t, u, \frac{\partial u}{\partial r} \right) \frac{\partial u}{\partial r} \right) + f(r, t, u),$$

в общия случай зависи от времето t и е нелинейно. Ще се спрем поотделно на възможностите, когато:

- уравнението е стационарно: $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ и $k = \text{const}$;
- уравнението е стационарно: $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ и $k = k \left(r, t, u, \frac{\partial u}{\partial r} \right)$;
- уравнението е нестационарно: $\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$ и $k = \text{const}$;
- уравнението е нестационарно: $\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$ и $k = k \left(r, t, u, \frac{\partial u}{\partial r} \right)$.

3.5 Постановка на задачата

Градиентът на налягането $\frac{\partial p}{\partial x}$ се дава с формулата

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = A_{st} \cos(nt), \quad A_{st} = 6000 \text{ Pa} \cdot \text{s}, \quad n = 2.4\pi \text{ rad/s}$$

при нестационарен процес на протичане на кръвта в артериите и с

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = A_{st},$$

когато течението е стационарно. В случая на движение на кръв в човешкия организъм A_{st} отговаря на амплитудата на налягането от 45 mm живачен стълб на метър, а n е кръговата честота от 72 удара в минута.

Задачата, която ще разглеждаме оттук нататък, фиксираме в цилиндрична координатна система и формулираме така: да се намери непрекъсната функция $u(r, t)$, която удовлетворява уравнението

$$(18) \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} = A_{st} \cos(nt) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_{app} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad r \in (0; R), \quad t \in (0; T)$$

и граничните условия

$$(19) \quad u(R, t) = 0,$$

$$(20) \quad \frac{\partial u}{\partial r}(0, t) = 0.$$

Условието (19) всъщност отговаря за полепването на потока по стените на артерията при $r = R$, а условието (20) представлява симетрия по оста $r = 0$.

За задачата (18) – (20) действителният вискозитет μ_{app} се изчислява по формулата [9], [10]

$$(21) \quad \mu_{app} = \mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty}) \left[1 + \lambda^a \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^a \right]^{\frac{n_c - 1}{a}},$$

където μ_0 и μ_{∞} са горната и долната граница на действителния вискозитет. Константите λ, n_c и a са експериментално установени. Точните стойности на споменатите константи са дадени в таблица 1.

Таблица 1: Числени стойности на константите в математическия модел

Константа	Стойност
μ_0	0.056 Pa · s
μ_{∞}	0.00345 Pa · s
λ	3.313 s
n_c	0.3568
ρ	1000 kg/m ³
a	2

Физичният смисъл на функцията $u(r, t)$ е скоростта, с която се движи кръвният поток в артериите. При $\mu_0 = \mu_{\infty} = 0.00345$ Pa · s разглежданият модел е познат като модел на Нютон (*Newton model*) за движение на

кръв в артериите, а при $\mu_0 \neq \mu_\infty$ – като модел на Каро (*Carreau model*). За всеки от тези два случая ще използваме безразмерни варианти на диференциалните уравнения.

Най-важното предимство на една безразмерна диференциална задача се състои в следното: нека сме пресметнали стойностите на безразмерното приближено решение \bar{y} във възлите $(\bar{r}_i; \bar{t}^j)$ на правоъгълника

$$\Pi = [0; R] \times [0; T]$$

при фиксирани R и T . Ако променим стойностите на R и T и се върнем към размерните величини, ние веднага получаваме приближеното решение върху новата мрежа, при това без да го преизчисляваме. Този метод е изключително ефективен при многомерни физични задачи, задачи със сложна геометрия или задачи с нелинейни коефициенти.

3.6 Стационарно уравнение, описващо движението на кръвта в артериите

Стационарното уравнение, описващо движението на кръвта в артериите, получаваме, като положим $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ и $\cos(nt) = 1$ в (18). Следователно $u(r)$ е решение на диференциалната задача

$$(22) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \mu_{app} \frac{du}{dr} \right) = -A_{st}, r \in (0; R),$$

$$(23) \quad u(R) = 0,$$

$$(24) \quad \frac{du}{dr}(0) = 0.$$

Течението на кръвта ще разгледаме за случая на каротидната артерия, при която $R = 0.0045$ m. Ще обезразмерим задачата (22) – (24), като използваме мащабирането

$$(25) \quad \bar{r} = \frac{r}{R}.$$

Понеже $0 \leq r \leq R$, то $0 \leq \bar{r} \leq 1$. Заместваме (25) в (22), разделяме двете страни на уравнението с μ_∞ , означаваме

$$(26) \quad \frac{\mu_{app}}{\mu_\infty} = 1 + \left(\frac{\mu_0}{\mu_\infty} - 1 \right) \left[1 + \left(\frac{\lambda}{R} \right)^a \left(\frac{du}{d\bar{r}} \right)^a \right]^{\frac{n_c - 1}{a}} = \bar{\mu}_{app}$$

и свеждаме вида на диференциалното уравнение (22) до безразмерен:

$$\frac{1}{\bar{r}} \cdot \frac{d}{d\bar{r}} \left(\bar{r} \bar{\mu}_{app} \frac{du}{d\bar{r}} \right) = -\frac{R^2}{\mu_\infty} A_{st}.$$

Граничните условия (23) и (24) изглеждат така:

$$u(1) = 0, \quad \frac{du}{d\bar{r}}(0) = 0.$$

Следователно безразмерната стационарна диференциална задача, която ще разглеждаме, е

$$(27) \quad \frac{1}{\bar{r}} \cdot \frac{d}{d\bar{r}} \left(\bar{r} \bar{\mu}_{app} \frac{du}{d\bar{r}} \right) = -\frac{R^2}{\mu_\infty} A_{st}, \quad \bar{r} \in (0; 1),$$

$$(28) \quad u(1) = 0,$$

$$(29) \quad \frac{du}{d\bar{r}}(0) = 0.$$

3.6.1 Модел на Нютон ($\bar{\mu}_{app} = 1, \frac{\partial p}{\partial x} = -A_{st}$)

В (26) заместваем $\mu_0 = \mu_\infty$ и намираме $\bar{\mu}_{app} = 1$. Записваме (27) – (29) в следната еквивалентна форма:

$$(30) \quad \frac{d}{d\bar{r}} \left(\bar{r} \frac{du}{d\bar{r}} \right) = -\frac{\bar{r} R^2 A_{st}}{\mu_\infty}, \quad \bar{r} \in (0; 1),$$

$$(31) \quad u(1) = 0,$$

$$(32) \quad \frac{du}{d\bar{r}}(0) = 0.$$

Вградената в **Matlab** функция `bvp4c` служи за намиране приближеното решение на гранична задача за ОДУ. За да я използваме, е необходимо предварително да сведем диференциалното уравнение от втори ред (30) до система от две диференциални уравнения от първи ред. Извършваме субституцията

$$\begin{cases} u = z_1 \\ u' = z_2. \end{cases}$$

След диференциране имаме $u' = z_1'$, откъдето $z_1' = z_2$. Пресмятаме

$$u'' = -\frac{R^2 A_{st}}{\mu_\infty} - \frac{u'}{\bar{r}}.$$

$$\text{Тогава } z'_2 = -\frac{R^2 A_{st}}{\mu_\infty} - \frac{z_2}{\bar{r}}.$$

Създаваме две файл-функции и един скриптов файл в средата на **Matlab**:

- `bvp4ode.m` — трансформация на изходното диференциално уравнение до система от първи ред;
- `bvp4bc.m` — задаване на граничните условия;
- `sol1.m` — дискретизиране на областта и пресмятане стойностите на решението в точките от избраната равномерна мрежа ¹.

От съществено значение е в скрипта `sol1.m` да зададем началното условие $u(0)$. Без него няма да успеем да намерим такова решение $u(r)$, което да удовлетворява зададеното гранично условие $u(1) = 0$. Солвърът е програмиран така, че изчислителният процес да е много бързо сходящ към точното решение при добро начално приближение.

Ние сме избрали $u(0) = 1$. За да преценим дали построеното по този начин числено решение е коректно, ще го сравним с известното аналитично решение

$$(33) \quad u_{\text{точно}} = \frac{A_{st}(R^2 - r^2)}{4\mu_\infty}.$$

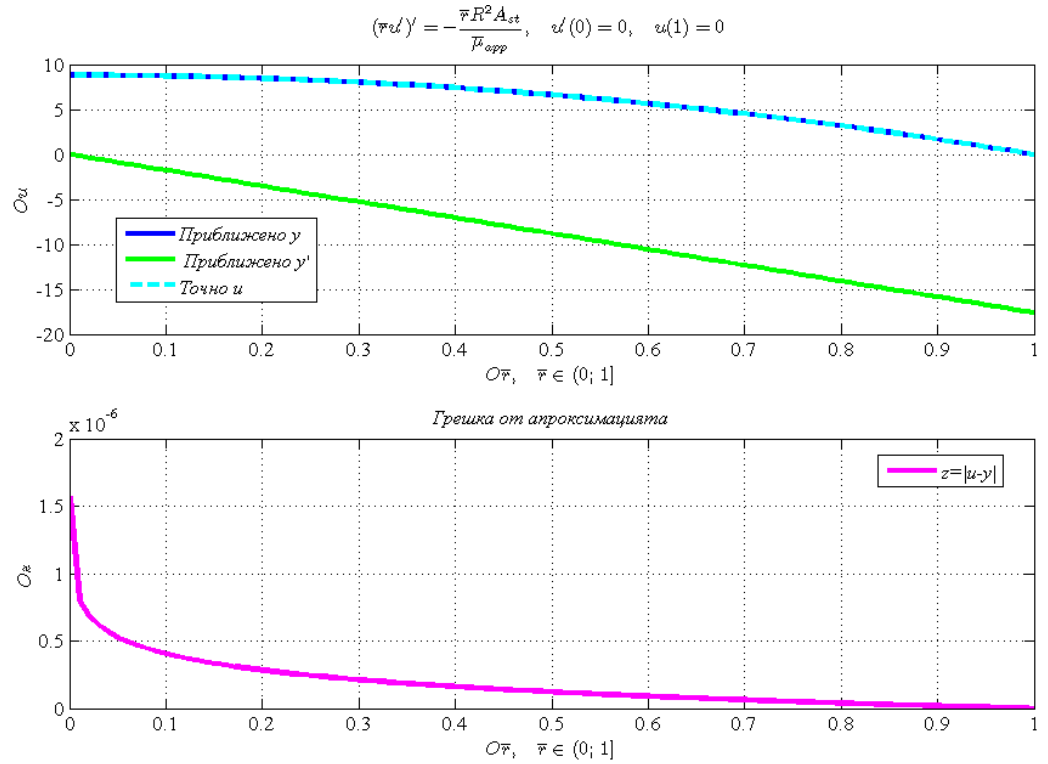
Неговият безразмерен аналог е

$$(34) \quad \bar{u}_{\text{точно}} = \frac{A_{st}R^2(1 - \bar{r}^2)}{4\mu_\infty}.$$

От фигура 1 виждаме, че избраното начално приближение $u(0) = 1$ води до сходимост от порядъка $|u - \bar{u}_{\text{точно}}| \leq 10^{-6}$. Можем лесно да се убедим с числени експерименти, че както и да фиксираме $u(0)$, ще достигаме до същата сходимост. Това се дължи на факта, че задачата (27) – (29) притежава единственото решение (34).

Определение 7 *Нека T е тяло в пространството и през тялото тече флуид. Нека $S(x)$ е напречно сечение на тялото T с равнина α , перпендикулярна на оста Oy . Масов дебит на флуида се нарича масата флуид, преминала през сечението $S(x)$ за единица време, а обемен дебит се нарича преминалият обем флуид за единица време.*

¹Вж. приложението на дипломната работа за пълния програмен код.



Фигура 1: Модел на Нютон за скоростта на стационарно течение на кръв при $A_{st} = 6000 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ и $\mu_0 = \mu_\infty = 0.00345 \text{ Pa} \cdot \text{s}$

Предполагаме, че артерията е безкрайно дълга цилиндрична тръба T . За определеност нека оста l е успоредна на Ox от фиксираната цилиндрична координатна система. Построяваме равнината $\alpha \perp l$. Резултатното сечение $T \cap \alpha = K$ е кръг с радиус r . Обемният дебит на кръвта е количеството кръв, което е преминало за една секунда през кръга K . Формулата за неговото изчисляване е

$$Q = 2\pi \int_0^R ru(r) \, dr.$$

В безразмерните величини, които сме избрали, тази формула изглежда

да така:

$$Q = 2\pi \int_0^1 \bar{r} R \bar{u}_{\text{точно}} d(\bar{r} R) = 2\pi \int_0^1 \bar{r} R \frac{A_{st} R^2 (1 - \bar{r}^2)}{4\mu_\infty} R d\bar{r} = 2\pi \int_0^1 \bar{r} \frac{A_{st} R^4 (1 - \bar{r}^2)}{4\mu_\infty} d\bar{r}.$$

С вградената функция `quadl(f,a,b)`, където f е подинтегралната функция, а a и b са границите на интеграционния интервал, намираме

$$Q \approx 0.00028005 \text{ m}^3/\text{s}.$$

3.6.2 Модел на Каро ($\bar{\mu}_{app} \neq 1$, $\frac{\partial p}{\partial x} = -A_{st}$)

Извеждането на аналитично решение в този случай е невъзможно, защото полученото уравнение е нелинейно относно $\frac{du}{d\bar{r}}$. Ще построим обаче числено решение за $\bar{\mu}_{app} = 1$ и ако то съвпадне с вече пресметнатото от солвъра `bvp4c`, диференциалният ни метод работи коректно и можем да го приложим за $\mu_\infty \neq \mu_0$. Приближеното решение ще строим върху т. нар. потокова мрежа. Тя съдържа освен възлите x_i и възлите, които са на разстояние $\frac{h}{2}$ от x_i . Тях ще означаваме с $x_{i \pm \frac{1}{2}} = x_i \pm \frac{h}{2}$ (вж. фигура 2), а съответните стойности на произволна мрежова функция f – с $f_{i \pm \frac{1}{2}}$.

Отправляме се отново към задача (27) – (29). Ще покажем как се построяват диференчните аналози на уравнението и граничните условия върху потоквата мрежа.

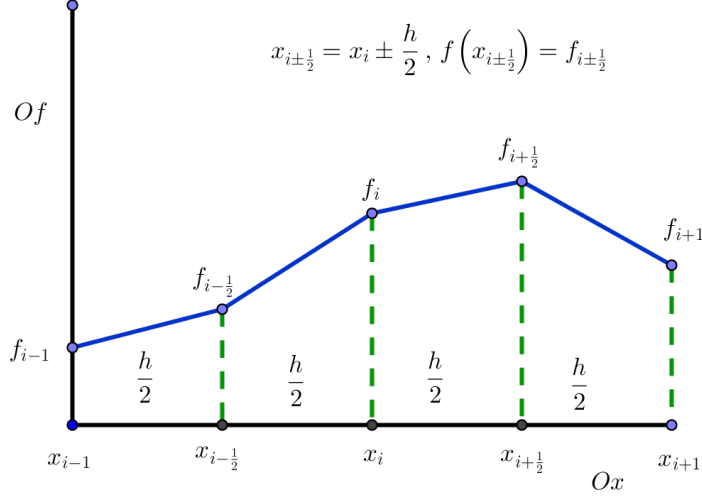
- **Апроксимация на диференциалното уравнение (27)**

Означаваме $\bar{\mu}_{app} = k(\bar{r}) > 0$, заместваем в уравнението (27) и интегрираме в интервала $[\bar{r}_{i-\frac{1}{2}}; \bar{r}_{i+\frac{1}{2}}]$:

$$\int_{\bar{r}_{i-\frac{1}{2}}}^{\bar{r}_{i+\frac{1}{2}}} \frac{d}{d\bar{r}} \left(\bar{r} k(\bar{r}) \frac{du}{d\bar{r}} \right) d\bar{r} = - \int_{\bar{r}_{i-\frac{1}{2}}}^{\bar{r}_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\bar{r} R^2 A_{st}}{\mu_\infty} d\bar{r}.$$

Означаваме с $W(\bar{r}) = -\bar{r} k(\bar{r}) \frac{du}{d\bar{r}}$ потока в точката \bar{r} . Имаме

$$- \int_{\bar{r}_{i-\frac{1}{2}}}^{\bar{r}_{i+\frac{1}{2}}} \frac{d}{d\bar{r}} W(\bar{r}) d\bar{r} = - \int_{\bar{r}_{i-\frac{1}{2}}}^{\bar{r}_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\bar{r} R^2 A_{st}}{\mu_\infty} d\bar{r} \Rightarrow$$



Фигура 2: Равномерна потокова мрежа

$$(35) \quad W_{i-\frac{1}{2}} - W_{i+\frac{1}{2}} = - \int_{\bar{r}_{i-\frac{1}{2}}}^{\bar{r}_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\bar{r} R^2 A_{st}}{\mu_{\infty}} d\bar{r}.$$

Интегралът в дясната страна се пресмята веднага:

$$\begin{aligned} \int_{\bar{r}_{i-\frac{1}{2}}}^{\bar{r}_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\bar{r} R^2 A_{st}}{\mu_{\infty}} d\bar{r} &= \frac{R^2 A_{st}}{\mu_{\infty}} \cdot \frac{\bar{r}^2}{2} \Big|_{\bar{r}_{i-\frac{1}{2}}}^{\bar{r}_{i+\frac{1}{2}}} = \frac{R^2 A_{st}}{2\mu_{\infty}} \left(\bar{r}_{i+\frac{1}{2}}^2 - \bar{r}_{i-\frac{1}{2}}^2 \right) = \\ &= \frac{R^2 A_{st}}{2\mu_{\infty}} \left(\bar{r}_{i+\frac{1}{2}} + \bar{r}_{i-\frac{1}{2}} \right) \left(\bar{r}_{i+\frac{1}{2}} - \bar{r}_{i-\frac{1}{2}} \right) = \\ &= \frac{R^2 A_{st}}{2\mu_{\infty}} \left(\bar{r}_i + \frac{h}{2} + \bar{r}_i - \frac{h}{2} \right) \left(\bar{r}_i + \frac{h}{2} - \bar{r}_i + \frac{h}{2} \right) = \frac{R^2 A_{st} \bar{r}_i h}{\mu_{\infty}} \end{aligned}$$

Така получаваме

$$(36) \quad \int_{\bar{r}_{i-\frac{1}{2}}}^{\bar{r}_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\bar{r} R^2 A_{st}}{\mu_{\infty}} d\bar{r} = \frac{R^2 A_{st} \bar{r}_i h}{\mu_{\infty}}.$$

Сега ще покажем как можем да пресметнем приближените стойности $W_{i-\frac{1}{2}}$ и $W_{i+\frac{1}{2}}$ на потока W съответно в точките $\bar{r}_{i-\frac{1}{2}}$ и $\bar{r}_{i+\frac{1}{2}}$.

От равенството

$$W(\bar{r}) = -\bar{r}k(\bar{r}) \frac{d u}{d \bar{r}}$$

изразяваме производната и намираме

$$\frac{d u}{d \bar{r}} = -\frac{W(\bar{r})}{\bar{r}k(\bar{r})}.$$

Интегрираме в интервала $[\bar{r}_{i-1}; \bar{r}_i]$:

$$\int_{\bar{r}_{i-1}}^{\bar{r}_i} \frac{d u}{d \bar{r}} d \bar{r} = - \int_{\bar{r}_{i-1}}^{\bar{r}_i} \frac{W(\bar{r})}{\bar{r}k(\bar{r})} d \bar{r} \Rightarrow u_i - u_{i-1} = - \int_{\bar{r}_{i-1}}^{\bar{r}_i} \frac{W(\bar{r})}{\bar{r}k(\bar{r})} d \bar{r}.$$

За $\bar{r}_{i-1} \leq \bar{r} \leq \bar{r}_i$ приемаме, че $W(\bar{r}) \approx W_{i-\frac{1}{2}}$, следователно

$$u_i - u_{i-1} \approx -\frac{W_{i-\frac{1}{2}}}{\bar{r}_{i-\frac{1}{2}}} \int_{\bar{r}_{i-1}}^{\bar{r}_i} \frac{1}{k(\bar{r})} d \bar{r} \Rightarrow \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \approx -\frac{W_{i-\frac{1}{2}}}{\bar{r}_{i-\frac{1}{2}}} \frac{1}{h} \int_{\bar{r}_{i-1}}^{\bar{r}_i} \frac{1}{k(\bar{r})} d \bar{r}.$$

Приближената стойност на $W_{i-\frac{1}{2}}$ е

(37)

$$W_{i-\frac{1}{2}} \approx -\bar{r}_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \underbrace{\left[\frac{1}{h} \int_{\bar{r}_{i-1}}^{\bar{r}_i} \frac{1}{k(\bar{r})} d \bar{r} \right]^{-1}}_{a_i^0} \approx -\bar{r}_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} a_i^0.$$

Заменияйки в последната апроксимация индекса i с $i+1$, намираме и израз за $W_{i+\frac{1}{2}}$:

(38)

$$W_{i+\frac{1}{2}} \approx -\bar{r}_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} a_{i+1}^0.$$

Поставяме (36) – (38) в (35), като означаваме търсената мрежова функция с y :

$$\bar{r}_{i+\frac{1}{2}} a_{i+1}^0 \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \bar{r}_{i-\frac{1}{2}} a_i^0 \frac{y_i - y_{i-1}}{h} = -\bar{r}_i h \frac{R^2 A_{st}}{\mu_\infty}.$$

Разделяме на $h > 0$ и достигаем до окончателната апроксимация на диференциалното уравнение:

(39)

$$\frac{1}{h} \left[\bar{r}_{i+\frac{1}{2}} a_{i+1}^0 \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \bar{r}_{i-\frac{1}{2}} a_i^0 \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right] = -\frac{R^2 A_{st} \bar{r}_i}{\mu_\infty}.$$

Грешката на приближението е $O(h^2)$ и диференчната схема е хомогенна и консервативна.

Остана да решим въпроса: как се пресмятат коефициентите a_i^0 ? За целта ще си послужим със средствата на численото интегриране и по-точно с някои от известните квадратурни формули. Ще покажем начина на изчисляване на коефициентите в диференчните уравнения (39).

1. **Формула на левите правоъгълници за a_i^0**

$$a_i^0 = \left[\frac{1}{h} \int_{\bar{r}_{i-1}}^{\bar{r}_i} \frac{1}{k(\bar{r})} d\bar{r} \right]^{-1} \approx \left[\frac{1}{h} \cdot \underbrace{(\bar{r}_i - \bar{r}_{i-1})}_{=h} \cdot \frac{1}{k_{i-1}} \right]^{-1} \approx k_{i-1}$$

2. **Формула на десните правоъгълници за a_i^0**

$$a_i^0 = \left[\frac{1}{h} \int_{\bar{r}_{i-1}}^{\bar{r}_i} \frac{1}{k(\bar{r})} d\bar{r} \right]^{-1} \approx \left[\frac{1}{h} \cdot \underbrace{(\bar{r}_i - \bar{r}_{i-1})}_{=h} \cdot \frac{1}{k_i} \right]^{-1} \approx k_i$$

Като съберем резултатите от формулата на левите правоъгълници и формулата на десните правоъгълници, получаваме

$$2a_i^0 \approx k_{i-1} + k_i \Rightarrow a_i^0 \approx \frac{k_{i-1} + k_i}{2}.$$

Това е следствие от двата метода на изчисляване на интегралите.

3. **Формула на централните правоъгълници за a_i^0**

$$a_i^0 = \left[\frac{1}{h} \int_{\bar{r}_{i-1}}^{\bar{r}_i} \frac{1}{k(\bar{r})} d\bar{r} \right]^{-1} \approx \left[\frac{1}{h} \cdot \underbrace{(\bar{r}_i - \bar{r}_{i-1})}_{=h} \cdot \frac{1}{k_{i-\frac{1}{2}}} \right]^{-1} \approx k_{i-\frac{1}{2}}$$

4. **Формула на трапеците за a_i^0**

$$\begin{aligned} a_i^0 &= \left[\frac{1}{h} \int_{\bar{r}_{i-1}}^{\bar{r}_i} \frac{1}{k(\bar{r})} d\bar{r} \right]^{-1} \approx \left[\frac{1}{h} \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{(\bar{r}_i - \bar{r}_{i-1})}_{=h} \cdot \left(\frac{1}{k_i} + \frac{1}{k_{i-1}} \right) \right]^{-1} \approx \\ &\approx \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{k_{i-1} + k_i}{k_{i-1}k_i} \right)^{-1} \approx \frac{2k_{i-1}k_i}{k_{i-1} + k_i} \end{aligned}$$

Удобно е да подредим получените резултати в таблица (вж. таблица 2).

Таблица 2: Пресмятане на коефициентите a_i^0

Коефициент	Φ -ла на ЛП	Φ -ла на ДП	Φ -ла на ЦП	Φ -ла на Т
a_i^0	$a_i^0 \approx k_{i-1}$	$a_i^0 \approx k_i$	$a_i^0 \approx k_{i-\frac{1}{2}}$	$a_i^0 \approx \frac{2k_{i-1}k_i}{k_{i-1} + k_i}$
Грешка	$O(h)$	$O(h)$	$O(h^2)$	$O(h^2)$

- **Апроксимация на граничните условия (28) и (29)**

Граничното условие (28) се апроксимира точно:

$$y_N = 0.$$

Ще покажем, че условието (29) се апроксимира с грешка $O(h^2)$ от диференчното уравнение [5]

$$a_1^0 y_r(0) = -\frac{hR^2 A_{st}}{4\mu_\infty}.$$

За грешката от апроксимация ψ получаваме

$$\begin{aligned}
\psi &= a_1^0 u_r(0) + \frac{hR^2 A_{st}}{4\mu_\infty} = \\
&\left[k_0 + \frac{h}{2} k'_0 + O(h^2) \right] \left[u'_0 + \frac{h}{2} u''_0 + O(h^2) \right] + \frac{hR^2 A_{st}}{4\mu_\infty} = \\
&k_0 u'_0 + \frac{h}{2} (k_0 u''_0 + k'_0 u'_0) + O(h^2) + \frac{hR^2 A_{st}}{4\mu_\infty} = \\
&\frac{h}{2} (ku')'_0 + \frac{hR^2 A_{st}}{4\mu_\infty} + O(h^2).
\end{aligned}$$

От основното диференциално уравнение (27) след извършване на диференцирането имаме

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{r}} [ku' + \bar{r}(ku')'] &= -\frac{R^2 A_{st}}{\mu_\infty} \Rightarrow \frac{ku'}{\bar{r}} + (ku')' = -\frac{R^2 A_{st}}{\mu_\infty} \Rightarrow \\ \Rightarrow (ku')' &= -\frac{ku'}{\bar{r}} - \frac{R^2 A_{st}}{\mu_\infty}; (ku')'_0 = \lim_{\bar{r} \rightarrow 0} \left(-\frac{ku'}{\bar{r}} - \frac{R^2 A_{st}}{\mu_\infty} \right) = \\ &= -\frac{R^2 A_{st}}{\mu_\infty} - \lim_{\bar{r} \rightarrow 0} \frac{k(\bar{r})u'(\bar{r}) - k(0)u'(0)}{\bar{r}} = -\frac{R^2 A_{st}}{\mu_\infty} - (ku')'_0, \end{aligned}$$

откъдето

$$(ku')'_0 = -\frac{R^2 A_{st}}{2\mu_\infty}.$$

Тогава

$$\psi = \frac{h}{2} (ku')'_0 + \frac{hR^2 A_{st}}{4\mu_\infty} + O(h^2) = -\frac{h}{2} \cdot \frac{R^2 A_{st}}{2\mu_\infty} + \frac{hR^2 A_{st}}{4\mu_\infty} + O(h^2) = O(h^2).$$

И така, диференциалната задача (27) – (29) се апроксимира с грешка $O(h^2)$ от диференчната схема

$$(40) \quad \begin{cases} \frac{1}{h} \left[\bar{r}_{i+\frac{1}{2}} a_{i+1}^0 \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \bar{r}_{i-\frac{1}{2}} a_i^0 \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right] = -\frac{R^2 A_{st} \bar{r}_i}{\mu_\infty}, \\ a_1^0 y_r(0) = -\frac{hR^2 A_{st}}{4\mu_\infty} \\ y_N = 0. \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

Условията за положителност на коефициентите

$$\begin{cases} \bar{r}_{i-\frac{1}{2}} a_i^0 > 0 \\ \bar{r}_{i+\frac{1}{2}} a_{i+1}^0 > 0 \\ \bar{r}_{i+\frac{1}{2}} a_{i+1}^0 + \bar{r}_{i-\frac{1}{2}} a_i^0 > 0 \end{cases}$$

са изпълнени и са достатъчни за устойчивост на построената хомогенна консервативна диференчна схема (40).

Ако разгледаме по-внимателно (40), ще забележим, че получената система от линейни уравнения е с тридиагонална матрица:

$$\begin{cases} y_0 - y_1 = \frac{h^2 R^2 A_{st}}{4a_1^0 \mu_\infty} \\ \bar{r}_{i-\frac{1}{2}} a_i^0 y_{i-1} - \left(\bar{r}_{i+\frac{1}{2}} a_{i+1}^0 + \bar{r}_{i-\frac{1}{2}} a_i^0 \right) y_i + \bar{r}_{i+\frac{1}{2}} a_{i+1}^0 y_{i+1} = -\frac{h^2 R^2 A_{st} \bar{r}_i}{\mu_\infty} \\ 0 \cdot y_{N-1} + 1 \cdot y_N = 0. \end{cases}$$

Нейното решение бързо и ефективно се намира например чрез *формулите на дясната прогонка*.

Разглеждаме системата [5]

$$(41) \quad \begin{cases} -C_0 y_0 + B_0 y_1 & = -F_0, i = 0 \\ A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} & = -F_i, i = 1, 2, \dots, N-1 \\ A_N y_{N-1} - C_N y_N & = -F_N, i = N. \end{cases}$$

От първото уравнение при $C_0 \neq 0$ получаваме, че

$$y_0 = \frac{B_0}{C_0} y_1 + \frac{F_0}{C_0}.$$

Означаваме

$$\alpha_1 = \frac{B_0}{C_0}, \beta_1 = \frac{F_0}{C_0} \Rightarrow y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1.$$

Търсим решението във вида

$$(42) \quad y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, i = 1, \dots, N-1.$$

Оттук $y_{i-1} = \alpha_i y_i + \beta_i$. Заместваме в i -тото уравнение на (41):

$$A_i(\alpha_i y_i + \beta_i) - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i \Rightarrow y_i = \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_i} y_{i+1} + \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - A_i \alpha_i}.$$

Сравнявайки с (42), намираме

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_i}, \beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - A_i \alpha_i}.$$

В (42) полагаме $i = N-1$, след което заместваме в последното уравнение на (41):

$$A_N(\alpha_N y_N + \beta_N) - C_N y_N = -F_N \Rightarrow y_N = \frac{A_N \beta_N + F_N}{C_N - A_N \alpha_N} = \beta_{N+1}.$$

Алгоритъмът, с който откриваме решението $(y_0; y_1; \dots; y_N)$, е следният:

1. Пресмятаме $\alpha_1 = \frac{B_0}{C_0}$, $\beta_1 = \frac{F_0}{C_0}$.
2. Пресмятаме $\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i\alpha_i}$, $i = 1, \dots, N-1$, $\beta_{i+1} = \frac{A_i\beta_i + F_i}{C_i - A_i\alpha_i}$, $i = 1, \dots, N-1$, N .
3. Полагаме $y_N = \beta_{N+1}$.
4. Пресмятаме $y_i = \alpha_{i+1}y_{i+1} + \beta_{i+1}$, $i = N-1, \dots, 0$.

Следващата теорема дава достатъчни условия за коректност и устойчивост на алгоритъма на прогонката [5].

Теорема 1 *Нека коефициентите на системата (41) са реални числа и удовлетворяват условията*

$$(43) \quad C_0 \neq 0, C_N \neq 0,$$

$$(44) \quad A_i \neq 0, B_i \neq 0, i = 1, \dots, N-1,$$

$$(45) \quad |C_i| \geq |A_i| + |B_i|, i = 1, \dots, N-1,$$

$$(46) \quad |C_0| \geq |B_0|, |C_N| \geq |A_N|,$$

като поне едно от неравенствата (45) и (46) е строго. Тогава за алгоритъма на прогонката са в сила съотношенията $C_i - A_i\alpha_i \neq 0$, $|\alpha_i| \leq 1$, $i = 1, \dots, N$, гарантиращи коректност и устойчивост на метода.

В конкретния случай коефициентите на дясната прогонка изглеждат така:

$$C_0 = -1, C_i = \bar{r}_{i+\frac{1}{2}}a_{i+1}^0 + \bar{r}_{i-\frac{1}{2}}a_i^0, C_N = -1;$$

$$A_i = \bar{r}_{i-\frac{1}{2}}a_i^0, A_N = 0;$$

$$B_0 = -1, B_i = \bar{r}_{i+\frac{1}{2}}a_{i+1}^0;$$

$$F_0 = -\frac{h^2 R^2 A_{st}}{4a_1^0 \mu_\infty}, F_i = \frac{h^2 R^2 A_{st} \bar{r}_i}{\mu_\infty}, F_N = 0.$$

Очевидно $|C_i| = |A_i| + |B_i|$, $|C_0| = |B_0|$ и $|C_N| > |A_N|$, т. е. едно от неравенствата в (45), (46) е строго. Следователно методът на прогонката за разглежданата задача е устойчив.

За диференчната схема (40) ще използваме комбинация от метод на прогонката и итерационен метод, за да получим дискретните стойности

$\{y_i\}_{i=0}^N$. Оттук нататък счиаме, че $\bar{\mu}_{app} \neq 1$, следователно $a_i^0 = a_i^0(y)$, като ще обърнем изрично внимание на случая $\mu_0 = \mu_\infty \Rightarrow \bar{\mu}_{app} = 1$.

Итерационният процес се строи по следния начин:

$$(47) \quad \begin{cases} y_0^{(s+1)} - y_1^{(s+1)} = \frac{h^2 R^2 A_{st}}{4a_1^0 \binom{(s)}{y_1} \mu_\infty} \\ \bar{r}_{i-\frac{1}{2}} a_i^0 \binom{(s)}{y_i} y_{i-1}^{(s+1)} - \\ \left[\bar{r}_{i-\frac{1}{2}} a_i^0 \binom{(s)}{y_i} + \bar{r}_{i+\frac{1}{2}} a_{i+1}^0 \binom{(s)}{y_{i+1}} \right] y_i^{(s+1)} + \\ \bar{r}_{i+\frac{1}{2}} a_{i+1}^0 \binom{(s)}{y_{i+1}} y_{i+1}^{(s+1)} = -\frac{h^2 R^2 A_{st} \bar{r}_i}{\mu_\infty} \\ 0 \cdot y_{N-1}^{(s+1)} + 1 \cdot y_N^{(s+1)} = 0. \end{cases}$$

За начално приближение на нулевата итерация $s = 0$ можем да приемем

$$y^{(0)} = \bar{u}_{\text{точно}}, \text{ ако е известно, или } y^{(0)} = 0.$$

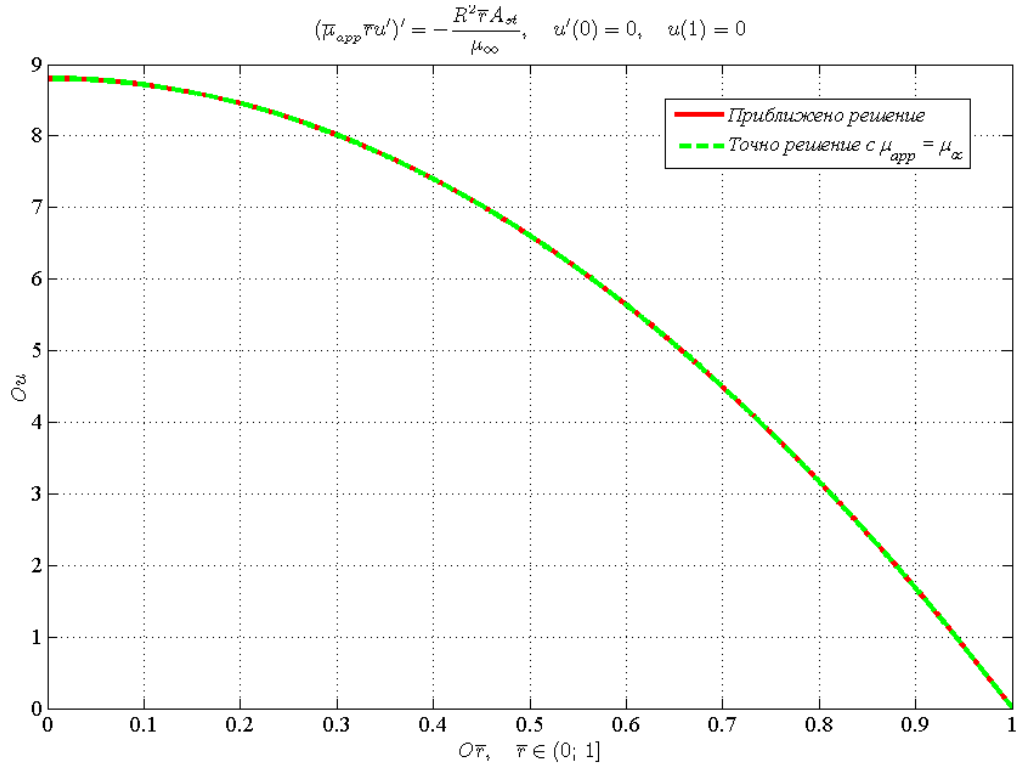
На всяка следваща итерация $s + 1$ търсим решението $\{y_i\}_{i=0}^N$ по метода на дясната прогонка. В коефициентите a_i^0 използваме стойностите на решението, получени на предишната, s -та итерация. Краят на процеса настъпва, когато разликата между две последователни приближения е направена произволно малка:

$$\left| y^{(s+1)} - y^{(s)} \right| < \epsilon.$$

Числото ϵ се избира по такъв начин, че да удовлетворява изискванията ни за точност на изчисленията, например $\epsilon = 10^{-4}$, $\epsilon = 10^{-5}$ или $\epsilon = 10^{-6}$. При нас $\epsilon = 10^{-6}$.

Забележка 1 *Първата проверка за край на итерациите е възможна при известни $y^{(0)}$ и $y^{(1)}$. Но $y^{(0)}$ е известно от началното приближение. $y^{(1)}$ се намира след еднократно прилагане на метода на дясната прогонка върху диференчната схема.*

На фигура 3 са изобразени графиките на точното решение (34) и приближеното решение от схемата (47), пресметнато за $\bar{\mu}_{app} = 1$. Ясно се



Фигура 3: Сравнение между точното и приближеното решение в стационарния модел на Каро при $\bar{\mu}_{app} = 1$

вижда пълното съвпадение (или поне с достатъчна за нашите изисквания точност) на двете графики.

Функцията на грешката между решенията (34) и (47) ще въведем по стандартния начин:

$$f_{err} = |\bar{u} - y|.$$

Ще проверим, че тази грешка е от порядъка $O(h^2)$ на избраната стъпка h по радиалната променлива \bar{r} . Фиксираме $h = 0.001$. След въвеждане в средата на **Matlab** получаваме вектор с грешките. Грешката е най-голяма в първата точка —

$$|\bar{u} - y| = 3.9053 \cdot 10^{-5}.$$

Колкото повече се движим към десния край на фиксирания интервал за радиалната променлива \bar{r} , толкова повече намалява порядъкът на

тази грешка. В приблизително 70% от точките в мрежата е изпълнено

$$|\bar{u} - y| \leq \text{const} \cdot 10^{-6} = \text{const} \cdot h^2 = O(h^2).$$

Векторът с грешките потвърждава верността на изводите от фигура 3, както и коректността на построената диференчна схема (47).

Обемният дебит на кръвта се пресмята по някоя от известните квадратурни формули, например формулата на трапеците:

$$Q = 2\pi \int_0^1 \bar{r} R u(\bar{r}) d(\bar{r} R) \approx 2\pi R^2 \frac{h}{2} \left[\bar{r}_0 y_0 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \bar{r}_i y_i + \bar{r}_N y_N \right] \approx \pi R^2 h \left[\bar{r}_0 y_0 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \bar{r}_i y_i + \bar{r}_N y_N \right].$$

Ако $\bar{\mu}_{app} = 1$, то

$$Q \approx 0.00028005 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Тази стойност вече беше получена при намиране на приближено решение с вградения солвър **bvp4c**.

Ако $\mu_0 \neq \mu_\infty$, за модела на Каро лесно намираме

$$Q \approx 0.00026873 \text{ m}^3/\text{s}.$$

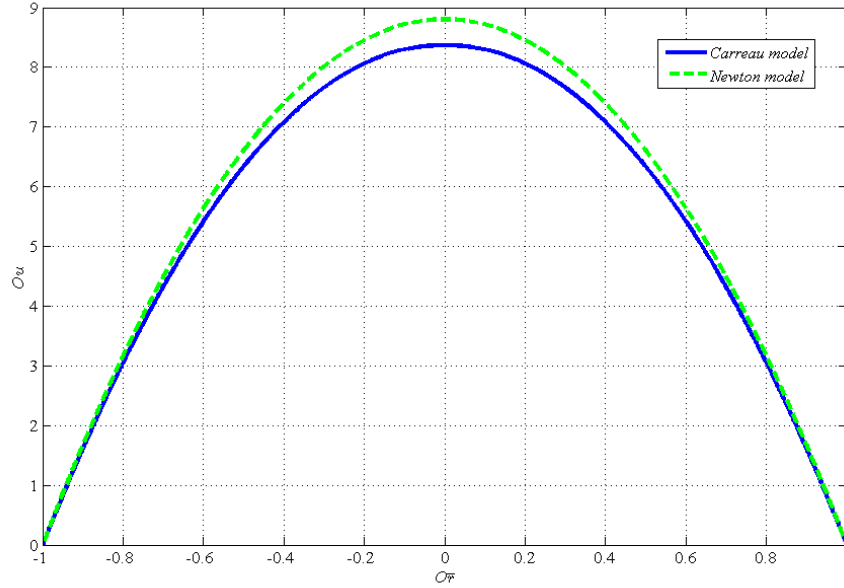
Получените резултати съвпадат с тези в [10].

Ще завършим тази секция със сравнение между разпределението на скоростите в случаите на Нютонов и не-Нютонов флуид. Нека с y_{Newton} да означим скоростта, съответстваща на модела на Нютон, а с y_{Carreau} – скоростта в модела на Каро. Пресмятанията отново извършваме със стъпка $h = 0.001$.

От фигура 4 се забелязва, че скоростите са близки по стойност, въпреки че моделът на Каро е нелинеен. Ако оценим абсолютната разлика помежду им

$$\Psi_y = |y_{\text{Newton}} - y_{\text{Carreau}}|,$$

ще получим $\max \Psi_y = 0.4370$, подобно на [10].



Фигура 4: Сравнение между разпределението на скоростите в моделите на Нютон и на Каро

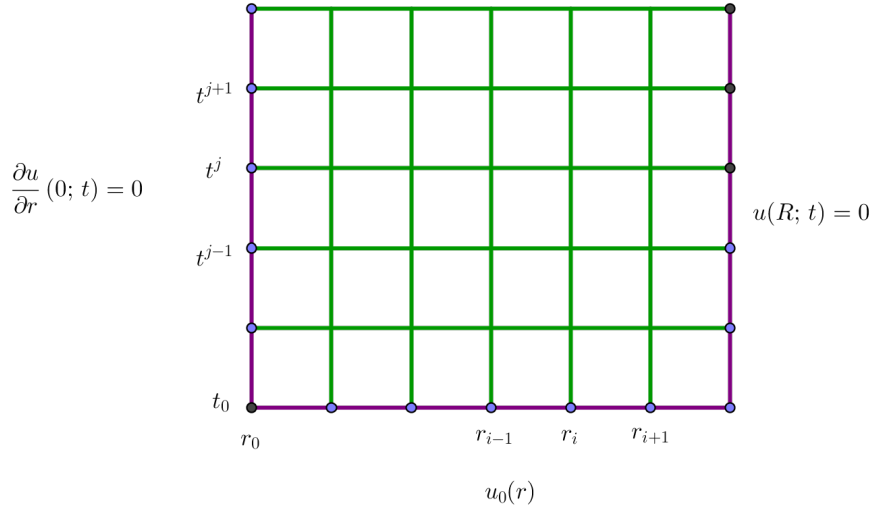
3.7 Нестационарно уравнение, описващо движението на кръвта в артериите, с косинусов закон за градиента на налягането

Отправяме се към нестационарното уравнение, описващо движението на кръвта в артериите, когато процесът зависи и от времето t . Задачата, която ще разглеждаме, записваме в следния вид:

$$(48) \quad \begin{cases} \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_{app} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + A_{st} \cos(nt), & r \in (0; R), t \in (0; T), \\ u(r, 0) = u_0(r), & r \in [0; R], \\ \frac{\partial u}{\partial r}(0, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(R, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Както вече беше казано в секция 3.5, величината n в аргумента на тригонометричната функция е кръговата честота и точната ѝ стойност

за конкретния случай е $2.4\pi \text{ rad/s}$, като $T = \frac{2\pi}{n} \text{ s}$. Отново разглеждаме течението на кръвта в каротидната артерия, т. е. $R = 0.0045 \text{ m}$.



Фигура 5: Равномерна мрежа по r и по t

Въвеждаме равномерна мрежа по двете направления r и t :

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_h &= \left\{ r_i = r_0 + ih, i = 0, 1, \dots, N, h = \frac{r_N}{N} \right\}, \\ \bar{\omega}_\tau &= \left\{ t^j = t^0 + j\tau, j = 0, 1, \dots, M, \tau = \frac{t^M}{M} \right\}, \\ \bar{\omega}_{h\tau} &= \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = (r_i; t^j)_{i=0, j=0}^{N, M} \text{ (вж. фигура 5)}.\end{aligned}$$

Трябва да изберем подходяща функция $u_0(r)$ за началното условие. Една възможност при неизвестно точно решение е да положим $u_0(r) = 0$. Тъй като за задачата (48) е известно аналитично решение при $\mu_{app} = \text{const}$, а именно [11]

$$(49) \quad u_{\text{точно}} = \mathbb{RE} \left(\frac{iAe^{int}}{n\rho} \left[\frac{J_0(i^{\frac{3}{2}}\alpha \frac{r}{R})}{J_0(i^{\frac{3}{2}}\alpha)} - 1 \right] \right), \quad \alpha = R\sqrt{\frac{n\rho}{\mu_\infty}}, \quad i = \sqrt{-1},$$

ще използваме него за инициализацията. Тук J_0 е функцията на Бесел от комплексен аргумент и от ред нула. В конкретния случай имаме $\alpha = 6.6525$ (число на Womersley [11]). Началното условие (т. е. стойностите на диференцируемата функция $u(r, t)$ върху нулевия слой t^0 по времето) ще изглежда така:

$$u(r, 0) = u_{\text{точно}}^0.$$

Избираме мащабите

$$(50) \quad \bar{r} = \frac{r}{R} \in [0; 1], \bar{t} = tn \in [0; 2\pi], \bar{\mu}_{app} = \frac{\mu_{app}}{\mu_\infty} \in \left[1; \frac{\mu_0}{\mu_\infty}\right],$$

за да обезразмерим задачата (48). Обезразмереното уравнение се представя във вида

$$(51) \quad \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{\mu}_{app} \bar{r} \frac{\partial u}{\partial \bar{r}} \right) + BF(\bar{t}),$$

където сме положили $B = \frac{R^2 A_{st}}{\mu_\infty}$ и $F(\bar{t}) = \cos \bar{t}$, а граничните условия в (48) –

$$(52) \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{r}}(0, \bar{t}) = 0, u(1, \bar{t}) = 0, \bar{t} \geq 0.$$

Безразмерното аналитично решение е

$$(53) \quad \bar{u}_{\text{точно}} = \mathbb{RE} \left(\frac{iAe^{i\bar{t}}}{n\rho} \left[\frac{J_0(i^{\frac{3}{2}}\alpha\bar{r})}{J_0(i^{\frac{3}{2}}\alpha)} - 1 \right] \right).$$

Следователно безразмерната диференциална задача, която ще разглеждаме, записваме по следния начин:

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{\mu}_{app} \bar{r} \frac{\partial u}{\partial \bar{r}} \right) + BF(\bar{t}), \bar{r} \in (0; 1), \bar{t} \in (0; 2\pi), \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{r}}(0, \bar{t}) = 0, \bar{t} \geq 0, \\ u(1, \bar{t}) = 0, \bar{t} \geq 0, \\ u(\bar{r}, 0) = \bar{u}_{\text{точно}}^0, \bar{r} \in [0; 1]. \end{array} \right.$$

3.7.1 Модел на Нютон ($\bar{\mu}_{app} = 1, \frac{\partial p}{\partial x} = BF(\bar{t})$)

- Апроксимация на диференциалното уравнение

Понеже вече задачата, която разглеждаме, е нестационарна от параболичен тип, конструираме схема с тегло σ . Схемите с тегло служат за повишаване на реда на апроксимация при различни стойности на $\sigma \in [0; 1]$. В нашия случай диференчното уравнение с тегло σ , съответстващо на основното диференциално уравнение в (54), е

$$(55) \quad \begin{aligned} \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} &= \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\bar{r}_i} \cdot \frac{1 - \sigma}{h} \left[k_{i+1}(y) \bar{r}_{i+\frac{1}{2}} \frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{h} - k_i(y) \bar{r}_{i-\frac{1}{2}} \frac{y_i^j - y_{i-1}^j}{h} \right] + \\ &+ \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\bar{r}_i} \cdot \frac{\sigma}{h} \left[k_{i+1}(y) \bar{r}_{i+\frac{1}{2}} \frac{y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}}{h} - k_i(y) \bar{r}_{i-\frac{1}{2}} \frac{y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1}}{h} \right] + \frac{B}{\alpha^2} F(\bar{t}^j). \end{aligned}$$

При $\sigma = 0$ получената схема е явна — стойностите на y^{j+1} се пресмятат непосредствено чрез стойностите y^j от предишния времеви слой. Локалната грешка на апроксимация е $O(h^2 + \tau)$.

При $\sigma = 1$ диференчната схема е чисто неявна. Получената система диференчни уравнения е с тридиагонална матрица и за намиране на нейното решение може да се използва например методът на дясната прогонка. Локалната грешка на апроксимация и тук е $O(h^2 + \tau)$.

Ако $\sigma \neq 0$ и $\sigma \neq 1$, схемата е неявна с тегло σ и отново получаваме система с тридиагонална матрица за пресмятане на стойностите y^{j+1} . Случаят $\sigma = \frac{1}{2}$ е твърде специален (схема на Кранк-Никълсън), защото при него лесно се постига грешка $O(h^2 + \tau^2)$. Това е възможно само при $t = t^{j+\frac{1}{2}}$, т. е. изчисляваме коефициентите на схемата върху точките на потоквата мрежа за t . Ако $\sigma = \frac{1}{2}$, но $t \neq t^{j+\frac{1}{2}}$, грешката отново ще бъде $O(h^2 + \tau)$, а не $O(h^2 + \tau^2)$.

Трябва да изберем как да процедираме с нелинейния коефициент $k(y)$. Него не можем да го вземем на слоя $t^{j+\frac{1}{2}}$, защото не са ни известни стойностите $y^{j+\frac{1}{2}}$. Избираме между следните две възможности:

1. $k_{i+1}(y) = k_{i+1}(y^j)$ – при $\sigma = 0$ решението y се пресмята веднага, а при $\sigma \neq 0$ – с метода на прогонката;
2. $k_{i+1}(y) = k_{i+1}(y^{j+1})$ – използваме итерационен метод, защото y^{j+1} фигурира не само в апроксимациите на производните $\frac{\partial u}{\partial \bar{t}}$ и $\frac{\partial u}{\partial \bar{r}}$, но и в израза за $k_{i+1}(y)$; итерационния процес за дифференциалното уравнение (55) строим така:

$$\begin{aligned}
 (56) \quad & \frac{y_i^{(s+1)} - y_i^{(s)}}{\tau} = \\
 & \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\bar{r}_i} \cdot \frac{1 - \sigma}{h} \left[k_{i+1} \left(y^{(s)} \right) \bar{r}_{i+\frac{1}{2}} \frac{y_{i+1}^{(s+1)} - y_i^{(s)}}{h} - k_i \left(y^{(s)} \right) \bar{r}_{i-\frac{1}{2}} \frac{y_i^{(s+1)} - y_{i-1}^{(s)}}{h} \right] + \\
 & + \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\bar{r}_i} \cdot \frac{\sigma}{h} \left[k_{i+1} \left(y^{(s)} \right) \bar{r}_{i+\frac{1}{2}} \frac{y_{i+1}^{(s+1)} - y_i^{(s+1)}}{h} - k_i \left(y^{(s)} \right) \bar{r}_{i-\frac{1}{2}} \frac{y_i^{(s+1)} - y_{i-1}^{(s+1)}}{h} \right] + \\
 & \frac{B}{\alpha^2} F \left(\bar{t}^{j+\frac{1}{2}} \right).
 \end{aligned}$$

Стойността y^{j+1} присъства и в производните, и в коефициентите, затова избираме на $s + 1$ -вата итерация $k_{i+1}(y^{j+1})$ да бъдат изчислявани чрез стойностите на y^{j+1} от предходната, s -та итерация. Индикация за прекъсване на итерациите е един от следните два признака:

- а) изчерпване на предварително зададения брой итерации n_s (например $n_s = 50$);
- б) достигане до желана от нас апроксимационна точност:

$$\left| y^{(s+1)} - y^{(s)} \right| < \epsilon.$$

Тъй като не можем да предскажем колко точно повторения на горната процедура ще бъдат необходими за качественото определяне на y , ще използваме варианта б). Неговият смисъл

е следният. На нулевата итерация ние знаем $y^{(0)}$. Пресмятаме първата итерация $y^{(1)}$ и проверяваме дали е изпълнено поставеното изискване

$$\left| y^{(1)} - y^{(0)} \right| < \epsilon.$$

Ако се окаже $\left| y^{(1)} - y^{(0)} \right| \geq \epsilon$, извършваме още една итерация и получаваме $y^{(2)}$. Отново проверяваме верността на условието

$$\left| y^{(2)} - y^{(1)} \right| < \epsilon.$$

Ако тя е положителна, край $y^{(2)}$ е приближеното решение. Иначе се връщаме в итерационния процес за откриване на $y^{(3)}$ и съответната проверка и т. н. Този подход е по-печелившият, защото наблюдаваме само дали

$$\left| y^{(s+1)} - y^{(s)} \right| < \epsilon.$$

При предварително зададен брой повторения невинаги ще получаваме това, което търсим, а именно — добър порядък на точност.

- **Апроксимация на началното условие и на граничните условия**

Апроксимацията на началното условие в (54) изглежда така:

$$(57) \quad y_i^0 = \bar{u}_{\text{точно}}^0, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Лявото гранично условие в (54) ще приближим с диференчното уравнение

$$y_1^{j+1} - y_0^{j+1} = -\frac{h^2 R^2}{4 \cdot \frac{k_0^{j+1} + k_1^{j+1}}{2}} \cdot \frac{\tau B}{\alpha^2} F\left(\bar{t}^{j+\frac{1}{2}}\right) \Rightarrow$$

$$(58) \quad y_1^{j+1} - y_0^{j+1} = -\frac{h^2 R^2}{2 \cdot (k_0^{j+1} + k_1^{j+1})} \cdot \frac{\tau B}{\alpha^2} F\left(\bar{t}^{j+\frac{1}{2}}\right),$$

$$j = 0, 1, \dots, M-1.$$

Това диференчно уравнение е аналогично на едномерния случай, в който

$$u'(0) \approx -\frac{h R^2 A_{st}}{4 a_1^0 \mu_\infty}, \quad \psi_0 = O(h^2).$$

Използваме следствието от квадратурната формула на левите правоъгълници и тази на десните правоъгълници, за да изчислим стойността на a_1^0 :

$$a_1^0 \approx \frac{k_0 + k_1}{2}.$$

Дясното гранично условие в (54) се апроксимира точно:

$$(59) \quad y_N^{j+1} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, M-1.$$

• **Итерационен процес за намиране на приближеното решение**

Диференчната схема, съответстваща на задача (54), изглежда по следния начин:

$$(60) \quad \begin{cases} \alpha^2 \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{\bar{r}_i} \cdot \frac{1 - \sigma}{h} \left[k_{i+1}(y^{j+1}) \bar{r}_{i+\frac{1}{2}} \frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{h} - k_i(y^{j+1}) \bar{r}_{i-\frac{1}{2}} \frac{y_i^j - y_{i-1}^j}{h} \right] + \\ + \frac{1}{\bar{r}_i} \cdot \frac{\sigma}{h} \left[k_{i+1}(y^{j+1}) \bar{r}_{i+\frac{1}{2}} \frac{y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}}{h} - k_i(y^{j+1}) \bar{r}_{i-\frac{1}{2}} \frac{y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1}}{h} \right] + \\ BF\left(\bar{t}^{j+\frac{1}{2}}\right), \\ i = 1, 2, \dots, N-1; j = 0, 1, \dots, M-1 \\ y_i^0 = \bar{u}_{\text{точно}}^0, \quad i = 0, 1, \dots, N \\ y_1^{j+1} - y_0^{j+1} = -\frac{h^2 R^2}{2 \cdot (k_0^{j+1} + k_1^{j+1})} \cdot \frac{\tau B}{\alpha^2} F\left(\bar{t}^{j+\frac{1}{2}}\right), \quad j = 0, 1, \dots, M-1 \\ y_N^{j+1} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, M-1. \end{cases}$$

Сега ще извършим преобразувания в (60), за да покажем, че системата от уравнения е с тридиагонална матрица. Означаваме

$$(61) \quad \begin{cases} p = k_{i+1}(y^{j+1})\bar{r}_{i+\frac{1}{2}} \\ q = k_i(y^{j+1})\bar{r}_{i-\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

За диференчното уравнение, приближаващо основното диференциално уравнение, имаме последователно:

$$\begin{aligned} \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} &= \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\bar{r}_i} \cdot \frac{1 - \sigma}{h} \left[p \frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{h} - q \frac{y_i^j - y_{i-1}^j}{h} \right] + \\ &\frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\bar{r}_i} \cdot \frac{\sigma}{h} \left[p \frac{y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}}{h} - q \frac{y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1}}{h} \right] + \frac{B}{\alpha^2} F\left(\bar{t}^{j+\frac{1}{2}}\right) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} &= \frac{1 - \sigma}{\alpha^2 \bar{r}_i h^2} [p(y_{i+1}^j - y_i^j) - q(y_i^j - y_{i-1}^j)] + \\ &\frac{\sigma}{\alpha^2 \bar{r}_i h^2} [p(y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}) - q(y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1})] + \frac{B}{\alpha^2} F\left(\bar{t}^{j+\frac{1}{2}}\right) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} &= \frac{1 - \sigma}{\alpha^2 \bar{r}_i h^2} [p y_{i+1}^j - (p + q)y_i^j + q y_{i-1}^j] + \\ &\frac{\sigma}{\alpha^2 \bar{r}_i h^2} [p y_{i+1}^{j+1} - (p + q)y_i^{j+1} + q y_{i-1}^{j+1}] + \frac{B}{\alpha^2} F\left(\bar{t}^{j+\frac{1}{2}}\right) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_i^{j+1} - y_i^j &= \frac{(1 - \sigma)\tau}{\alpha^2 \bar{r}_i h^2} [p y_{i+1}^j - (p + q)y_i^j + q y_{i-1}^j] + \\ &\frac{\tau\sigma}{\alpha^2 \bar{r}_i h^2} [p y_{i+1}^{j+1} - (p + q)y_i^{j+1} + q y_{i-1}^{j+1}] + \frac{\tau B}{\alpha^2} F\left(\bar{t}^{j+\frac{1}{2}}\right) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_i^{j+1} - y_i^j &= \frac{(1-\sigma)\tau p}{\alpha^2 \bar{r}_i h^2} y_{i+1}^j - \frac{(1-\sigma)\tau(p+q)}{\alpha^2 \bar{r}_i h^2} y_i^j + \frac{(1-\sigma)\tau q}{\alpha^2 \bar{r}_i h^2} y_{i-1}^j + \\
&\quad \frac{\tau \sigma p}{\alpha^2 \bar{r}_i h^2} y_{i+1}^{j+1} - \frac{\tau \sigma(p+q)}{\alpha^2 \bar{r}_i h^2} y_i^{j+1} + \frac{\tau \sigma q}{\alpha^2 \bar{r}_i h^2} y_{i-1}^{j+1} + \frac{\tau B}{\alpha^2} F\left(\bar{t}^{j+\frac{1}{2}}\right) \Leftrightarrow \\
&\quad \frac{\tau \sigma q}{\alpha^2 \bar{r}_i h^2} y_{i-1}^{j+1} - \left[1 + \frac{\tau \sigma(p+q)}{\alpha^2 \bar{r}_i h^2}\right] y_i^{j+1} + \frac{\tau \sigma p}{\alpha^2 \bar{r}_i h^2} y_{i+1}^{j+1} = \\
&\quad - \frac{(1-\sigma)\tau q}{\alpha^2 \bar{r}_i h^2} y_{i-1}^j + \left[\frac{(1-\sigma)\tau(p+q)}{\alpha^2 \bar{r}_i h^2} - 1\right] y_i^j - \frac{(1-\sigma)\tau p}{\alpha^2 \bar{r}_i h^2} y_{i+1}^j - \frac{\tau B}{\alpha^2} F\left(\bar{t}^{j+\frac{1}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Преписваме диференчната схема (60) в еквивалентния ѝ вид

$$(62) \quad \begin{cases} \frac{\tau \sigma q}{\alpha^2 \bar{r}_i h^2} y_{i-1}^{j+1} - \left[1 + \frac{\tau \sigma(p+q)}{\alpha^2 \bar{r}_i h^2}\right] y_i^{j+1} + \frac{\tau \sigma p}{\alpha^2 \bar{r}_i h^2} y_{i+1}^{j+1} = \\ - \frac{(1-\sigma)\tau q}{\alpha^2 \bar{r}_i h^2} y_{i-1}^j + \left[\frac{(1-\sigma)\tau(p+q)}{\alpha^2 \bar{r}_i h^2} - 1\right] y_i^j - \frac{(1-\sigma)\tau p}{\alpha^2 \bar{r}_i h^2} y_{i+1}^j - \frac{\tau B}{\alpha^2} F\left(\bar{t}^{j+\frac{1}{2}}\right), \\ i = 1, 2, \dots, N-1; j = 0, 1, \dots, M-1 \\ y_1^{j+1} - y_0^{j+1} = - \frac{h^2 R^2}{2 \cdot (k_0^{j+1} + k_1^{j+1})} \cdot \frac{\tau B}{\alpha^2} F\left(\bar{t}^{j+\frac{1}{2}}\right), j = 0, 1, \dots, M-1 \\ 0 \cdot y_{N-1}^{j+1} + 1 \cdot y_N^{j+1} = 0, j = 0, 1, \dots, M-1 \\ y_i^0 = \bar{u}_{\text{точно}}^0, i = 0, 1, \dots, N. \end{cases}$$

Коефициентите p и q се определят еднозначно от формулите (61).

Най-после достигахме до итерационния процес за разрешаване на системата (62), а именно:

$$\begin{aligned}
(63) \quad & \left\{ \begin{aligned} & \alpha^2 \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \\ & \frac{1}{\bar{r}_i} \cdot \frac{1 - \sigma}{h} \left[k_{i+1} \binom{(s)}{y^{j+1}} \bar{r}_{i+\frac{1}{2}} \frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{h} - k_i \binom{(s)}{y^{j+1}} \bar{r}_{i-\frac{1}{2}} \frac{y_i^j - y_{i-1}^j}{h} \right] + \\ & + \frac{1}{\bar{r}_i} \cdot \frac{\sigma}{h} \left[k_{i+1} \binom{(s)}{y^{j+1}} \bar{r}_{i+\frac{1}{2}} \frac{y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}}{h} - k_i \binom{(s)}{y^{j+1}} \bar{r}_{i-\frac{1}{2}} \frac{y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1}}{h} \right] + \\ & BF \left(\bar{t}^{j+\frac{1}{2}} \right), i = 1, 2, \dots, N-1; j = 0, 1, \dots, M-1 \\ & y_1^{j+1} - y_0^{j+1} = - \frac{h^2 R^2}{2 \cdot \left(k_0 \binom{(s)}{y^{j+1}} + k_1 \binom{(s)}{y^{j+1}} \right)} \cdot \frac{\tau B}{\alpha^2} F \left(\bar{t}^{j+\frac{1}{2}} \right), j = 0, 1, \dots, M-1 \\ & 0 \cdot y_{N-1}^{j+1} + 1 \cdot y_N^{j+1} = 0, j = 0, 1, \dots, M-1 \\ & y_i^0 = \bar{u}_{\text{точно}}^0, s = 0, i = 0, 1, \dots, N; y_i^0 = y_i^0, s \geq 0, i = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Коефициентите, които зависят от времето (а това е само $BF(\bar{t})$), взимаме върху точките от потоквата мрежа, т. е. ги избираме за стойности на t върху правите $t = t^{j+\frac{1}{2}}$. Грешката на диференчната схема в този и само в този случай при $\sigma = \frac{1}{2}$ е $O(h^2 + \tau^2)$.

Приемаме $\sigma = \frac{1}{2}$, за да постигнем максимална сходимост, и получаваме неявната диференчна схема на Кранк-Никълсън. Ще използваме принципа за максимума, за да покажем как се избират стъпките h и τ .

Решаваме първото уравнение в системата (62) относно y_i^{j+1} :

$$\begin{aligned}
(64) \quad & \left[1 + \frac{\tau \sigma (p + q)}{\alpha^2 \bar{r}_i h^2} \right] y_i^{j+1} = \frac{\tau \sigma}{\alpha^2 \bar{r}_i h^2} (p y_{i+1}^{j+1} + q y_{i-1}^{j+1}) + \frac{(1 - \sigma) \tau}{\alpha^2 \bar{r}_i h^2} (p y_{i+1}^j + q y_{i-1}^j) + \\ & \left[1 - \frac{(1 - \sigma) \tau (p + q)}{\alpha^2 \bar{r}_i h^2} \right] y_i^j + \frac{\tau B}{\alpha^2} F \left(\bar{t}^{j+\frac{1}{2}} \right).
\end{aligned}$$

От неравенствата

$$\begin{aligned} 0 < \bar{r}_{i-\frac{1}{2}} < 1, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ 0 < \bar{r}_{i+\frac{1}{2}} < 1, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \\ 0 < 1 \leq \bar{\mu}_{app} \leq \frac{\mu_0}{\mu_\infty} \end{aligned}$$

веднага следва, че $p > 0$ и $q > 0$. Като вземем предвид, че

$$0 \leq \sigma \leq 1, \quad B > 0, \quad \alpha^2 > 0,$$

получаваме, че за да е изпълнен принципът за максимума, е необходимо

$$(65) \quad 1 - \frac{(1-\sigma)\tau(p+q)}{\alpha^2 \bar{r}_i h^2} \geq 0.$$

От оценките

$$\begin{cases} p = k_{i+1} \bar{r}_{i+\frac{1}{2}} \leq \frac{\mu_0}{\mu_\infty} \bar{r}_{i+\frac{1}{2}} \\ q = k_i \bar{r}_{i-\frac{1}{2}} \leq \frac{\mu_0}{\mu_\infty} \bar{r}_{i-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

след събиране на неравенствата достигахме до

$$p+q \leq \frac{\mu_0}{\mu_\infty} \left(\bar{r}_{i+\frac{1}{2}} + \bar{r}_{i-\frac{1}{2}} \right) = \frac{\mu_0}{\mu_\infty} \left(\bar{r}_i + \frac{h}{2} + \bar{r}_i - \frac{h}{2} \right) = 2 \frac{\mu_0}{\mu_\infty} \bar{r}_i.$$

Заместваме получения резултат в (65):

$$\frac{(1-\sigma)\tau(p+q)}{\alpha^2 \bar{r}_i h^2} \leq \frac{2\mu_0 \bar{r}_i (1-\sigma)\tau}{\mu_\infty \alpha^2 \bar{r}_i h^2} = \frac{2\mu_0 (1-\sigma)\tau}{\mu_\infty \alpha^2 h^2} \leq 1 \Rightarrow \tau \leq \frac{\mu_\infty \alpha^2 h^2}{2\mu_0 (1-\sigma)}.$$

Това е условието за устойчивост на схемата с тегло (62). Понеже сме фиксирали $\sigma = \frac{1}{2}$, за да постигнем максимален ред на апроксимация, то в конкретния случай

$$(66) \quad \tau \leq \frac{\mu_\infty \alpha^2 h^2}{\mu_0}.$$

Числените пресмятания извършваме при $\mu_0 = \mu_\infty$ със стъпки

$$h = \frac{\bar{r}_N - \bar{r}_0}{500} = 0.002, \quad \tau = \frac{\mu_\infty \alpha^2 h^2}{\mu_0} = 0.0002.$$

При тези данни максималната абсолютна грешка между численото решение $y(\bar{r}, \bar{t})$, изчислено от схемата (63), и аналитичното решение $u(\bar{r}, \bar{t})$, дадено с формулата (53), е

$$\max |u - y| \approx 9.1823 \cdot 10^{-6}.$$

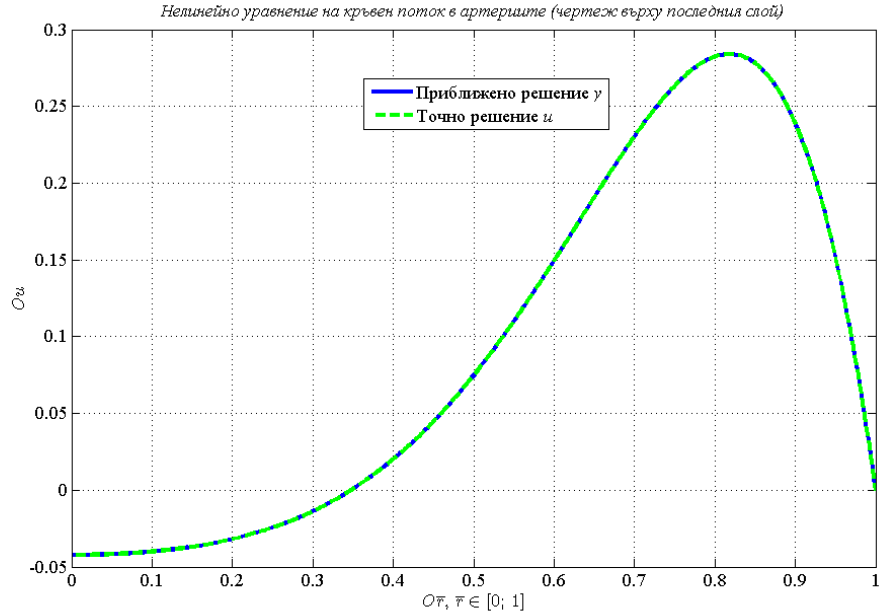
Проследявайки десетичните порядъци в матрицата $|u - y|$, забелязваме, че

$$|u - y| \sim O(10^{-6}).$$

Но

$$h^2 + \tau^2 = 0.002^2 + 0.0002^2 = 4.0313 \cdot 10^{-6};$$

$$|u - y| \leq C \cdot 10^{-6}, C = \text{const} > 0 \Rightarrow \psi_{h\tau} = O(h^2 + \tau^2).$$



Фигура 6: *Сравнение между точното и приближеното решение в нестационарния модел на Нютон*

За относителната грешка получаваме

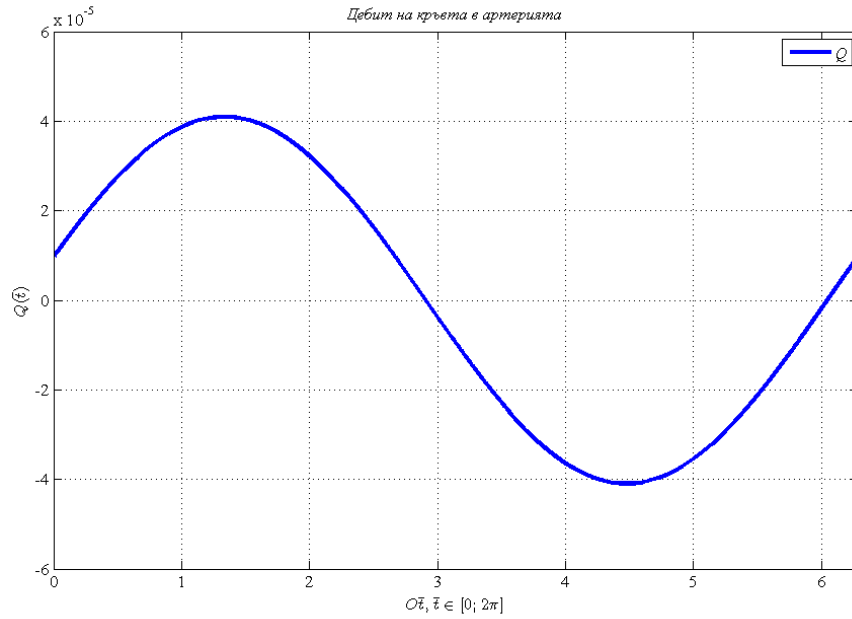
$$\frac{\max |u - y|}{\max |u|} \cdot 100 \approx 0.001\%.$$

С числен експеримент при $\sigma \neq \frac{1}{2}$ може да се установи, че

$$\psi_{h\tau} = O(h^2 + \tau).$$

Обобщените резултати се потвърждават и от фигура 6. На нея са изобразени линиите $u = u(\bar{r})$ и $y = y(\bar{r})$ за момента от време $\bar{t} = \bar{t}^M = \bar{t}^{\text{end}}$. Графиките на двете решения съвпадат напълно.

Тъй като разглежданата задача (54) е нестационарна, дебитът Q ще бъде функция, приемаща различна стойност за различните моменти от време.



Фигура 7: Дебит на кръвния поток в нестационарния модел на Нютон

Следователно трябва да пресмятаме интеграла

$$Q = 2\pi R^2 \int_0^1 \bar{r} u(\bar{r}) d\bar{r}$$

за всяко $\bar{t} = \bar{t}^j$, $j = 0, 1, \dots, M$. Квадратурната формула на трапеците

ще изглежда по следния начин:

$$(67) \quad Q^j \approx \pi h R^2 \left[\bar{r}_0 y_0^j + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \bar{r}_i y_i^j + \bar{r}_N y_N^j \right], \quad j = 0, 1, \dots, M.$$

Чертежът по точките $\{(\bar{t}^j; Q^j)\}_{j=0}^M$ е изобразен на фигура 7. От него се вижда, че $Q_{\max} \approx 0.00004 \text{ m}^3/\text{s}$ в точката $\bar{t}_{\max} \approx 1.3$ и $Q_{\min} \approx -0.00004 \text{ m}^3/\text{s}$ в $\bar{t}_{\min} \approx 4.4$.

Понеже

$$\bar{t}_{\max} + \pi \approx \bar{t}_{\min},$$

то минимумите и максимумите ще се редуват през равни периоди с големина π .

3.7.2 Модел на Каро ($\bar{\mu}_{app} \neq 1$, $\frac{\partial p}{\partial x} = BF(\bar{t})$)

Убедихме се, че за $\mu_0 = \mu_\infty$ предложената диференчна схема (60) е коректна. Нейната грешка на апроксимация е $\psi_{h\tau} = O(h^2 + \tau^2)$, защото теглото $\sigma = \frac{1}{2}$ и всички коефициенти, зависещи явно от времето, са пресметнати в точките $t^{j+\frac{1}{2}}$ от избраната потокова мрежа. Считаме, че случаят $\bar{\mu}_{app} = 1$ е изчерпан, и предполагаме, че $\bar{\mu}_{app} \neq 1$.

Използваме итерационния процес (63) от предишната секция, като сега $\mu_0 = 0.056 \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $\mu_\infty = 0.00345 \text{ Pa} \cdot \text{s}$. Пресмятанията извършваме съответно със стъпки

$$h = \frac{\bar{r}_N - \bar{r}_0}{200} = 0.005, \quad \tau = \frac{\mu_\infty \alpha^2 h^2}{\mu_0} = 0.0011.$$

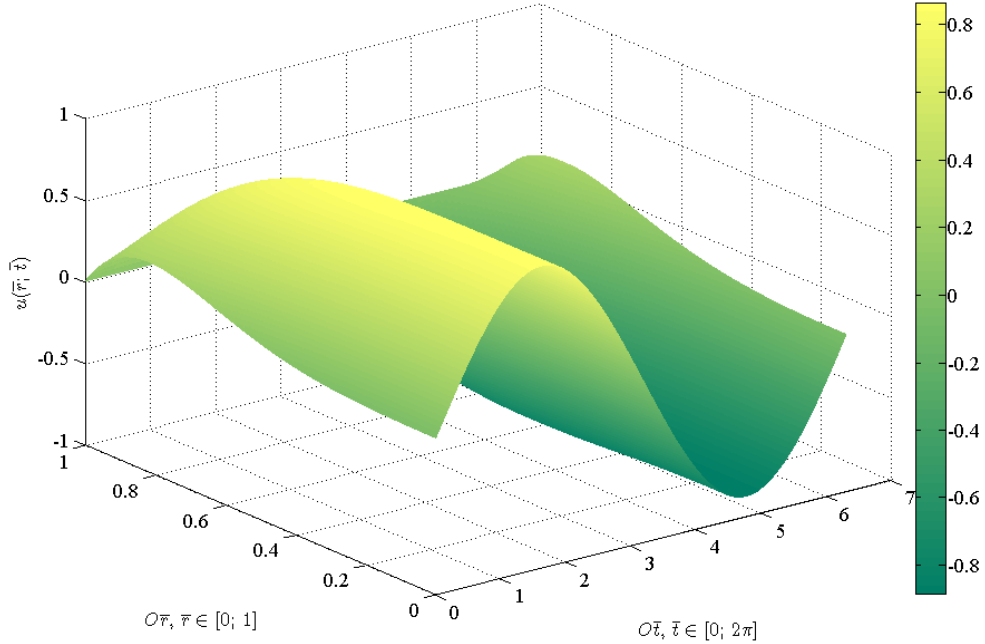
и отново с тегло $\sigma = \frac{1}{2}$.

Тъй като аналитично решение в случая не е известно, ще преценим само дали се запазва характерът на решението, както е в модела на Нютон (вж. фигура 6). За целта начертаваме повърхнината

$$P(\bar{r}, \bar{t}, y) = 0,$$

която представлява приближеното решение, в паралелепипеда

$$\Pi = \left\{ [\bar{r}_0; \bar{r}_N] \times [\bar{t}^0; \bar{t}^M] \times [\min y(\bar{r}, \bar{t}); \max y(\bar{r}, \bar{t})] \right\}.$$



Фигура 8: *Повърхнина на решението $y(\bar{r}, \bar{t})$ при нестационарно течение на не-Нютонов флуид*

Резултатът е изобразен на фигура 8. Ако пресечем повърхнината $P(\bar{r}, \bar{t}, y) = 0$ с правата $\bar{t} = \bar{t}^k$, $k = 0, 1, \dots, M$, получаваме кривата $\kappa_k : y(\bar{r}, \bar{t}^k) = 0$, $k = 0, 1, \dots, M$, която е двумерна и е разположена в равнината $\bar{r}Oy$. Характерът на всяка една от тези криви κ_k , $k = 0, 1, \dots, M$, прилича на характера на съответната крива за Нютонов флуид. Това означава, че дори и за $\bar{\mu}_{app} \neq 1$ решението на диференциалната задача (54) притежава подобни свойства като вече установените при $\mu_0 = \mu_\infty$.

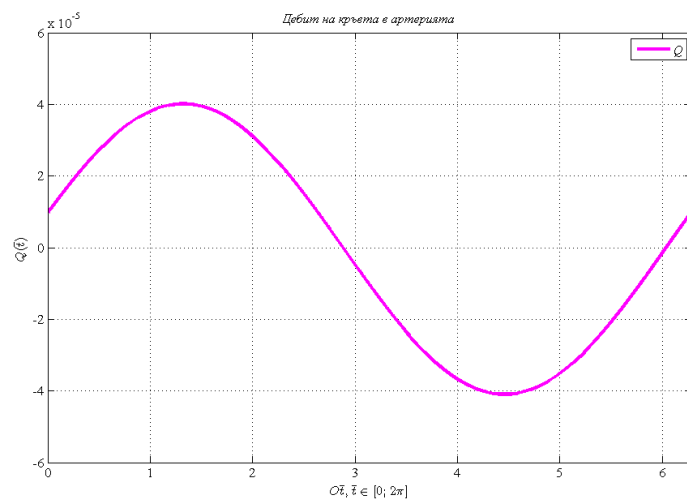
Стойностите на дебита Q в точките $\{\bar{t}^j\}_{j=0}^M$ пресмятаме както в (67). Чертежът (вж. фигура 9) е подобен на този от модела на Нютон – идеална периодична функция. Периодичността се дължи на факта, че

$$F(\bar{t}) = \cos \bar{t}, \bar{t} \in [0; 2\pi].$$

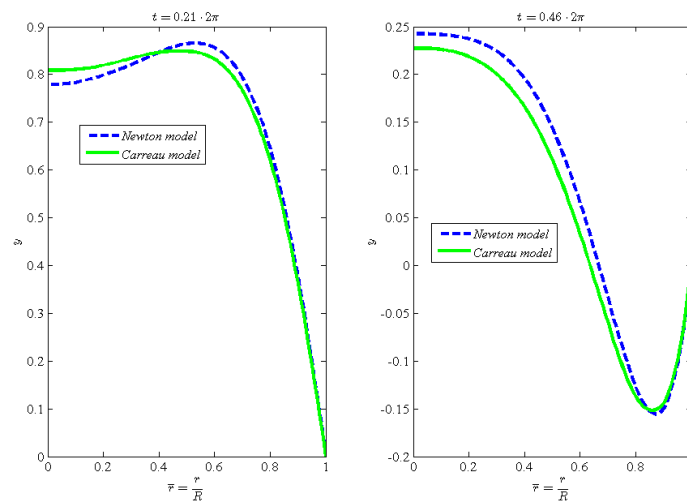
Максималната стойност на дебита се достига за $\bar{t}_{\max} \approx 1.3$ и

$$Q_{\max} \approx 0.00004 \text{ m}^3/\text{s},$$

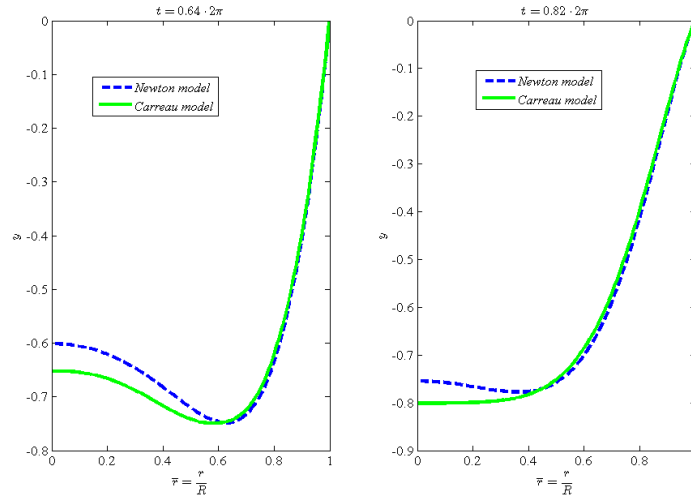
а минималната $Q_{\min} \approx -0.00004 \text{ m}^3/\text{s}$ – за $\bar{t}_{\min} \approx 4.4$.



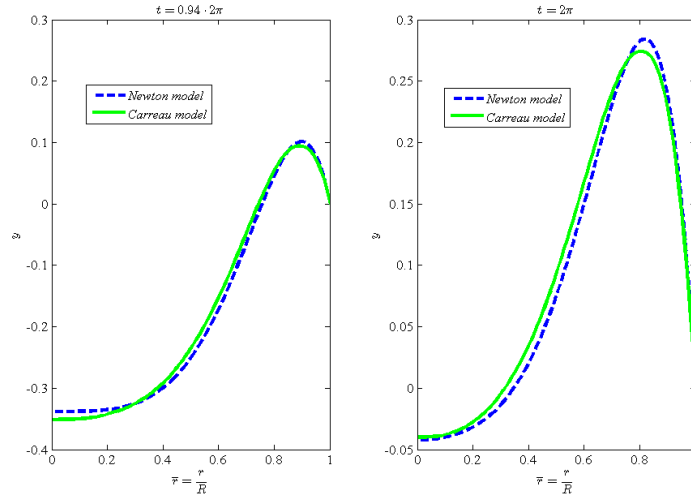
Фигура 9: Дебит на кръвния поток в нестационарния модел на Каро



Фигура 10: Сравнение между разпределението на скоростите в нестационарните модели на Нютон и на Каро за $\bar{t} = 0.21 \cdot 2\pi$ и $\bar{t} = 0.46 \cdot 2\pi$

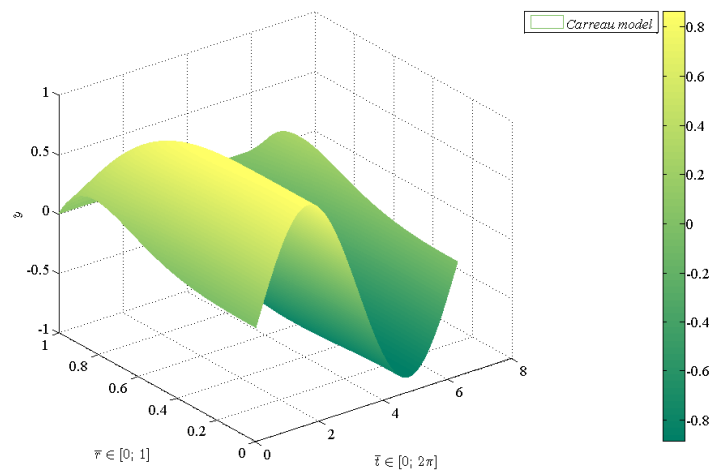


Фигура 11: Сравнение между разпределението на скоростите в нестационарните модели на Нютон и на Каро за $\bar{t} = 0.64 \cdot 2\pi$ и $\bar{t} = 0.82 \cdot 2\pi$

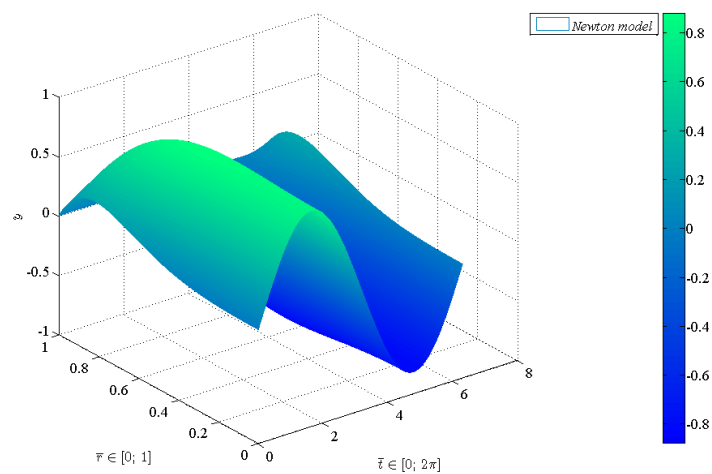


Фигура 12: Сравнение между разпределението на скоростите в нестационарните модели на Нютон и на Каро за $\bar{t} = 0.94 \cdot 2\pi$ и $\bar{t} = 2\pi$

На фигури 13 и 14 са изобразени разпределенията на скоростите от моделите на Нютон и Каро за $\bar{r} \in [0; 1]$ и $\bar{t} \in [0; 2\pi]$. Вижда се, че те са



Фигура 13: *Разпределение на скоростта в нестационарния модел на Каро за $\bar{r} \in [0; 1]$, $\bar{t} \in [0; 2\pi]$*



Фигура 14: *Разпределение на скоростта в нестационарния модел на Нютон за $\bar{r} \in [0; 1]$, $\bar{t} \in [0; 2\pi]$*

близки. На фигури 10, 11 и 12 е направено по-детайлно сравнение между

тези скорости за няколко характерни времена:

$$\bar{t} \in G, G = \{0.21 \cdot 2\pi; 0.46 \cdot 2\pi; 0.64 \cdot 2\pi; 0.82 \cdot 2\pi; 0.94 \cdot 2\pi; 2\pi\}.$$

Таблица 3: *Разлика между скоростите, пресметнати от модела на Нютон и от модела на Каро*

Време \bar{t}	$\max \Psi_y$
$\bar{t} = 0.21 \cdot 2\pi$	0.0301
$\bar{t} = 0.46 \cdot 2\pi$	0.0338
$\bar{t} = 0.64 \cdot 2\pi$	0.0511
$\bar{t} = 0.82 \cdot 2\pi$	0.0463
$\bar{t} = 0.94 \cdot 2\pi$	0.0193
$\bar{t} = 1.00 \cdot 2\pi$	0.0185

В таблица 3 са дадени максималните стойности на абсолютната разлика

$$\Psi_y = |y_{\text{Carreau}} - y_{\text{Newton}}|$$

за $\bar{t} \in G$. Ще отбележим, че максимумът на абсолютната разлика Ψ за произволно $\bar{t} \in [0; 2\pi]$ е 0.0594, т. е. от порядъка на стъпката h . Той се достига в точката $(\bar{r}; \bar{t})$ с координати $\bar{r} \approx 0.01$ и $\bar{t} \approx 4.69$.

3.8 Нестационарно уравнение, описващо движението на кръвта в артериите, при произволна периодична функция за градиента на налягането

Ще усложним задачата (54) с една вариация в явния вид на дясната страна $F(\bar{t})$. Ще искаме да представим функцията $F(\bar{t})$ в тригонометричен ред на Фурие:

$$(68) \quad F(\bar{t}) = \sum_{m=1}^{+\infty} (A_m \cos m\bar{t} + B_m \sin m\bar{t}) = A_1 \cos \bar{t} + B_1 \sin \bar{t} + A_2 \cos 2\bar{t} + B_2 \sin 2\bar{t} + \dots$$

Това е съществено нелинеен момент в разглежданата физична задача, защото:

- действителният вискозитет $k\left(\bar{r}, \bar{t}, u, \frac{\partial u}{\partial \bar{r}}\right) = \bar{\mu}_{app}$ не е постоянен, а е функция на радиалната координата, на времето, на решението, което търсим, и на неговата производна по \bar{r} ;
- в дясната част на диференциалното уравнение вече не фигурира една тригонометрична функция, а сума от тригонометрични функции, при това все още с неизвестна аналитична формула.

Сега ще се спрем върху реализирането на следната интересна концепция. Разполагаме с определени експериментални данни за функцията $F(\bar{t})$ (подредени таблично), без да знаем явния ѝ вид [11]. Искаме да открием коя е функцията $F(\bar{t})$, да я поставим на мястото на текущия коефициент $\cos \bar{t}$ и отново да решим диференчната задача [11]. Разлагането на $F(\bar{t})$ в ред на Фурие е обобщение на разгледаните ситуации до момента (досега в сумата (68) само един коефициент беше различен от нула — $A_1 = A_{st}$, всички останали бяха равни на нула) и може успешно да се прилага в различни практически задачи, залагащи на периодичността.

Връщаме се във формулата (68) и разглеждаме общия член на реда:

$$A_m \cos m\bar{t} + B_m \sin m\bar{t}.$$

Коефициентите A_m и B_m ще пресмятаме по следния начин [11]:

$$(69) \quad A_m = M_m \cos \varphi_m, \quad B_m = -M_m \sin \varphi_m,$$

Таблица 4: Стойности на коефициентите M_m и аргументите φ_m (в градуси)

m	M_m	φ_m°
1	+1.1050	+40°14'
2	+1.5316	−69°17'
3	−0.9668	+34°44'
4	−0.2857	−33°47'
5	+0.2821	+87°31'
6	+0.1924	−4°58'

където стойностите на коефициентите M_m и на аргументите φ_m са дадени в таблица 4 за $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Преди извършването на изчисленията превръщаме градусната мярка на аргументите φ_m , $m \in [1; 6]$, в радианна. Така получаваме таблица 5.

Таблица 5: Стойности на коефициентите M_m и аргументите φ_m (в радиани)

m	M_m	φ_m rad
1	+1.1050	+0.7022
2	+1.5316	−1.2092
3	−0.9668	+0.6062
4	−0.2857	−0.5896
5	+0.2821	+1.5275
6	+0.1924	−0.0867

Пресмятаме последователно коефициентите A_m и B_m за $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ по формулите (69). Получените данни оформяме в таблица 6.

Достигахме до желаното разлагане на $F(\bar{t})$ във вид на сума от тригонометрични функции:

$$\begin{aligned}
 (70) \quad F(\bar{t}) = \sum_{m=1}^6 (A_m \cos m\bar{t} + B_m \sin m\bar{t}) = \\
 0.8436 \cos \bar{t} - 0.7137 \sin \bar{t} + 0.5418 \cos 2\bar{t} + 1.4326 \sin 2\bar{t} - \\
 - 0.7945 \cos 3\bar{t} + 0.5508 \sin 3\bar{t} - 0.2375 \cos 4\bar{t} - 0.1589 \sin 4\bar{t} + \\
 0.0122 \cos 5\bar{t} - 0.2818 \sin 5\bar{t} - 0.1917 \cos 6\bar{t} - 0.0167 \sin 6\bar{t}.
 \end{aligned}$$

Таблица 6: Числени стойности на коефициентите A_m и B_m

m	A_m	B_m
1	+0.8436	-0.7137
2	+0.5418	+1.4326
3	-0.7945	+0.5508
4	-0.2375	-0.1589
5	+0.0122	-0.2818
6	-0.1917	-0.0167

Ще поставим това представяне в дясната страна на диференциалното уравнение от задачата (54), ще дискретизираме задачата по познатия начин и ще използваме вече изведения итерационен процес (63) за намиране на нейното приближено решение. Единствената разлика ще се състои в това, че на мястото на коефициента $\cos \bar{t}$ ще стои редът (70) и

$$BF\left(\bar{t}^{j+\frac{1}{2}}\right) = B \sum_{m=1}^6 \left[A_m \cos\left(m\bar{t}^{j+\frac{1}{2}}\right) + B_m \sin\left(m\bar{t}^{j+\frac{1}{2}}\right) \right].$$

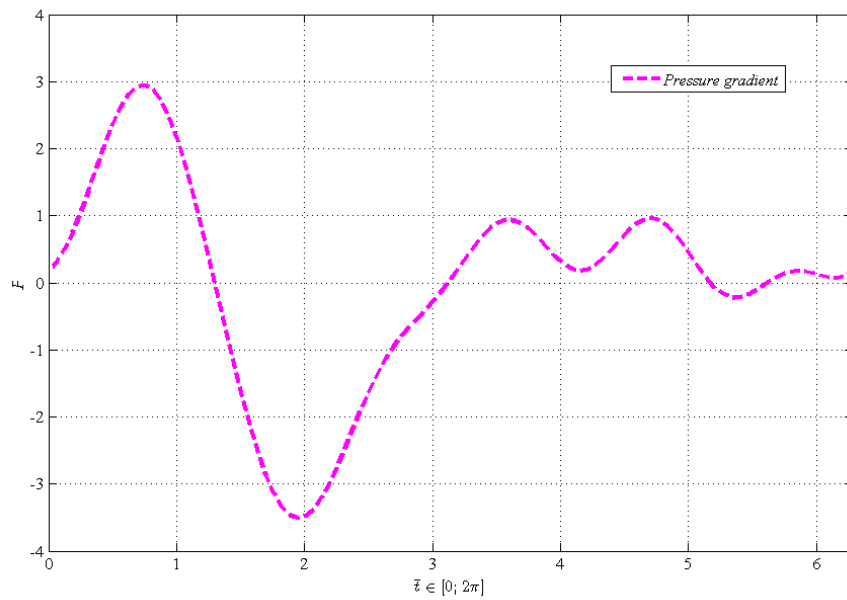
В таблица 7 са дадени стойностите на физичните параметри за изследването на процеса съответно при модела на Нютон и модела на Каро. Данните се отнасят за кръвта от феморалната артерия на куче и са взети от [11].

Таблица 7: Стойности на физичните параметри в нестационарните модели на Нютон и на Каро

Параметър	Модел на Нютон	Модел на Каро
R	0.0015 m	0.0015 m
μ_0	0.004 Pa · s	0.0207 Pa · s
μ_∞	0.004 Pa · s	0.004 Pa · s
n	6π rad/s	6π rad/s
ρ	1.05 g/ml	1.05 g/ml
A_{st}	$13600 \cdot 9.8 \cdot 0.1$ Pa · s	$13600 \cdot 9.8 \cdot 0.1$ Pa · s
λ	0.3327 s	0.3327 s
n_c	0.4505	0.4505
a	2	2

3.8.1 Модел на Нютон

През 1953 г. D. A. McDonald [6] прави измервания с манометър, за да установи стойностите на градиента на налягането във феморалната артерия на куче. Той получава търсените стойности като разлика между показанията на два различни манометъра, както е описано в [11]. На фигура 15 е показано изменението на градиента на налягането, установено от McDonald.



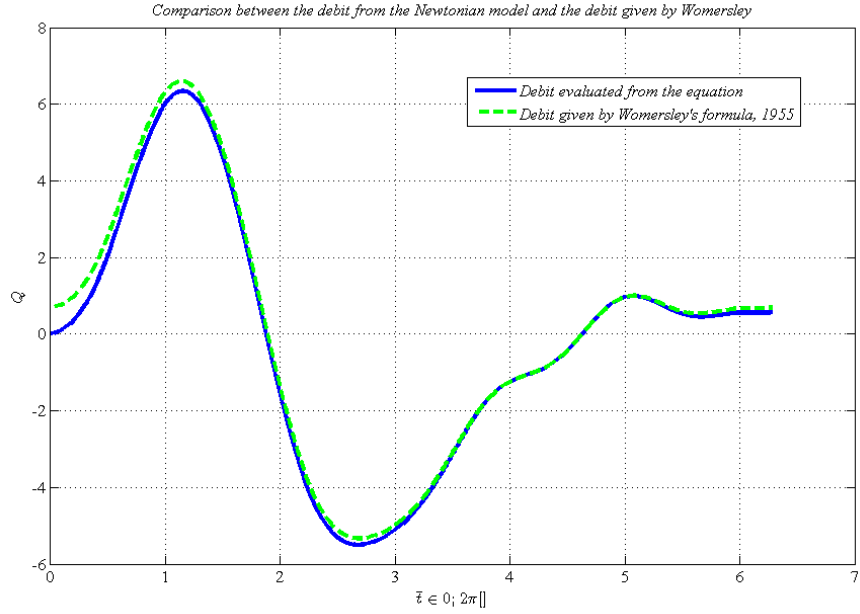
Фигура 15: *Градиент на налягането, получен от McDonald, в интервала $[0; 2\pi]$*

През 1955 г. Womersley, опитвайки се да пресметне разпределението на дебита като функция на времето, решава да го търси в разложение на Фурие [11]. Формулата, до която достига, е следната:

$$(71) \quad Q(t) = 3.56 \sin(t + 71^\circ 13') + 2.71 \sin(2t - 49^\circ 10') - \\ 1.20 \sin(3t + 50^\circ 33') - 0.28 \sin(4t - 20^\circ 17') + \\ 0.22 \sin(5t + 99^\circ 28') - 0.13 \sin(6t + 5^\circ 47').$$

Ще сравним приближението на Womersley (71) с получения по квадратурната формула (67) дебит. Заместваме реда (70) в задача (54) на мястото на $F(\bar{t})$. За числените пресмятания избираме тегло $\sigma = \frac{1}{2}$ и стъпки

$$h = \frac{\bar{r}_N - \bar{r}_0}{300} = 0.003, \tau = \frac{\mu_\infty \alpha^2 h^2}{2\mu_0(1 - \sigma)} = 0.0001.$$



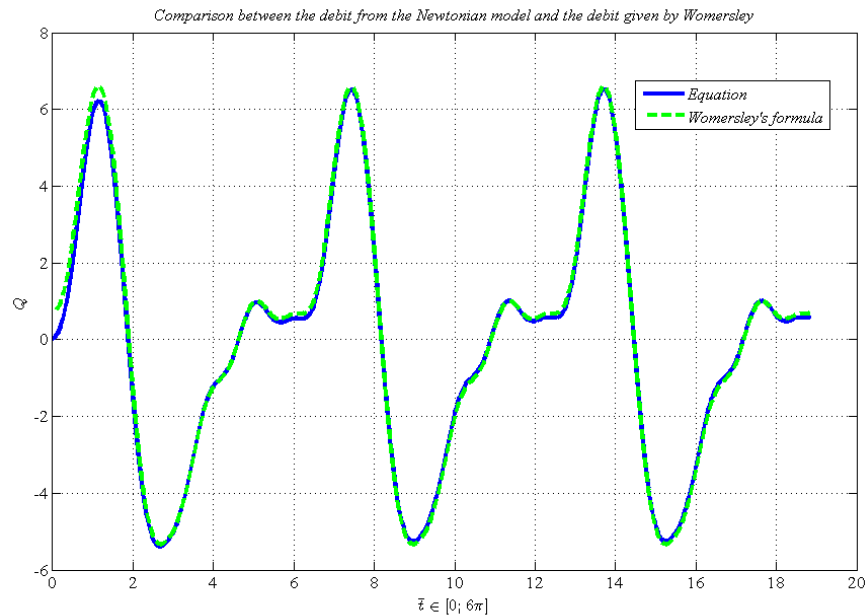
Фигура 16: Сравнение между дебита от численото решение и дебита от формулата на Womersley (71) за $\bar{t} \in [0; 2\pi]$

На фигура 16 са показани графиките на дебитите, пресметнати съответно от решението на диференциалната задача (54) при начално условие $u(\bar{r}, 0) = 0$ и от формулата на Womersley (71), в интервала $[0; 2\pi]$. Максималната абсолютна грешка е

$$\Psi_Q = |Q_{\text{equation}} - Q_{\text{Womersley}}| = 0.6943$$

и се достига за $\bar{t} = 0$.

Нека сега $\bar{t} \in [0; 6\pi]$. Фиксираме $\sigma = \frac{1}{2}$, $h = 0.02$, $\tau = 0.003$. Сравнението между дебитите е изобразено на фигура 17.



Фигура 17: Сравнение между дебита от численото решение и дебита от формулата на Womersley (71) за $\bar{t} \in [0; 6\pi]$

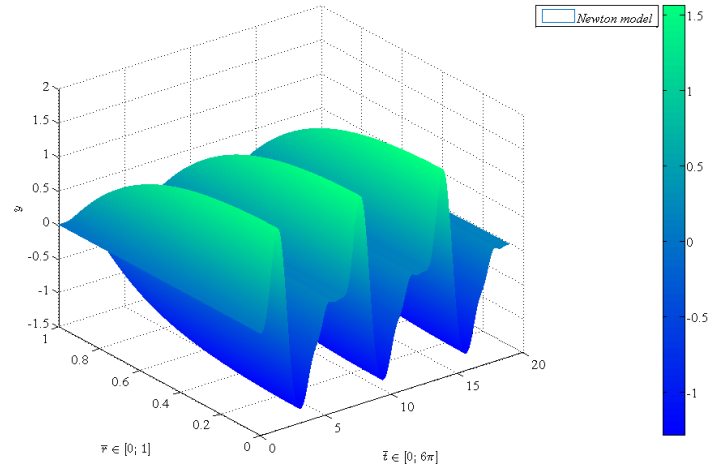
От чертежа може да се съобрази, че след точката с абсциса $\frac{\pi}{2}$ разликата между двете графики става пренебрежимо малка, от порядъка на 10^{-4} , защото процесът „забравя“ началното условие $u(\bar{r}, 0) = 0$ и се установява периодичност на решението (вж. фигура 18). Минимумът на дебита е $Q_{\min} \approx -5.3 \text{ m}^3/\text{s}$ и се достига в точката $\bar{t} \approx 2.7$, а максимумът $Q_{\max} \approx 6.6 \text{ m}^3/\text{s}$ се достига за $\bar{t} \approx 1.1$.

3.8.2 Модел на Каро

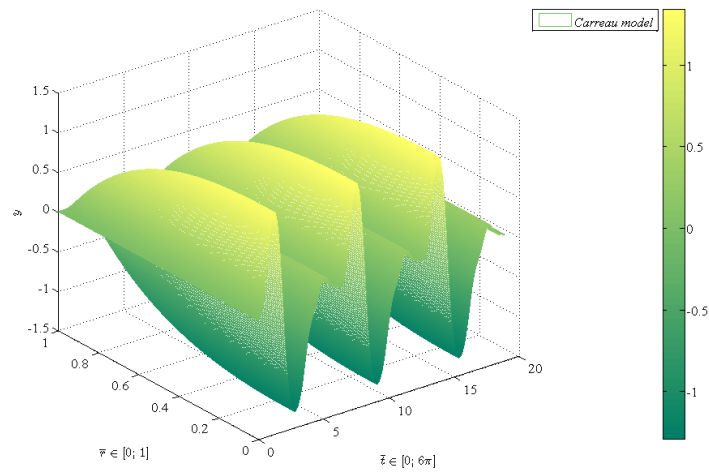
Както досега, избираме $\sigma = \frac{1}{2}$ и стъпки на изчислителния процес

$$h = 0.01, \tau = 0.006.$$

Модела на Каро разглеждаме също във времевия интервал $[0; 6\pi]$. Началното условие за процеса е $u(\bar{r}, 0) = 0$. Приближеното разпределение на скоростта за всеки момент от време намираме от схемата (63), замествайки в нея реда (70) на мястото на функцията $F(\bar{t})$.



Фигура 18: *Разпределение на скоростта в модела на Нютон при периодична функция за градиента на налягането*



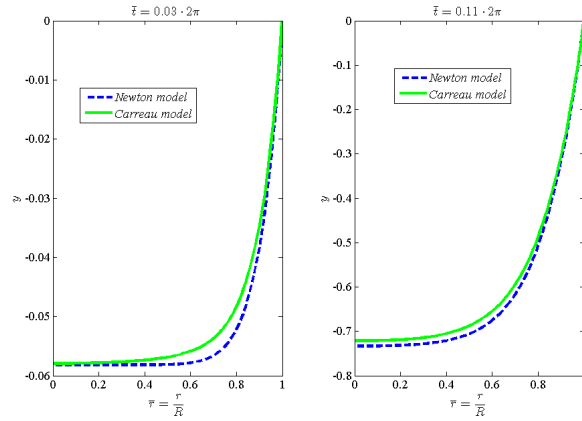
Фигура 19: *Разпределение на скоростта в модела на Каро при периодична функция за градиента на налягането*

Резултатите са показани на фигура 19. Отново е налице голяма прилика с Нютоновата скорост от фигура 18. Началното условие е „забранено“ за големи времена \bar{t} и е установена периодичност на решението с

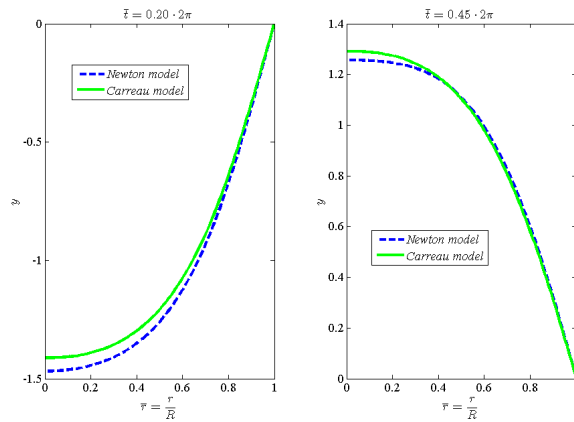
период 2π . Максималната абсолютна разлика

$$\Psi_y = |y_{\text{Carreau}} - y_{\text{Newton}}|$$

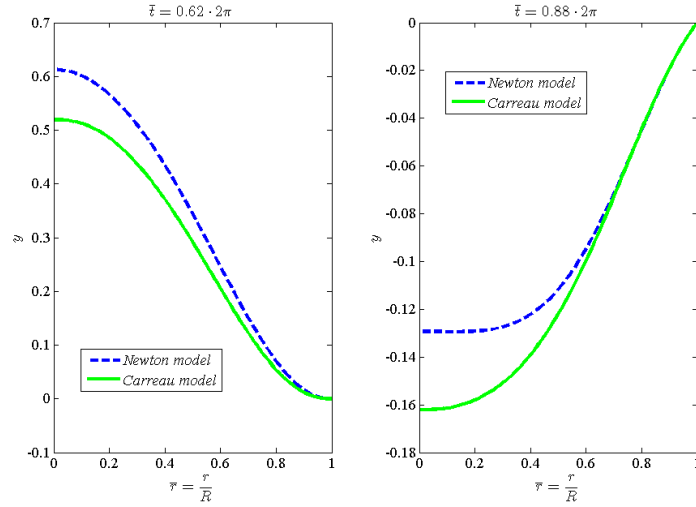
в този случай е 0.1403.



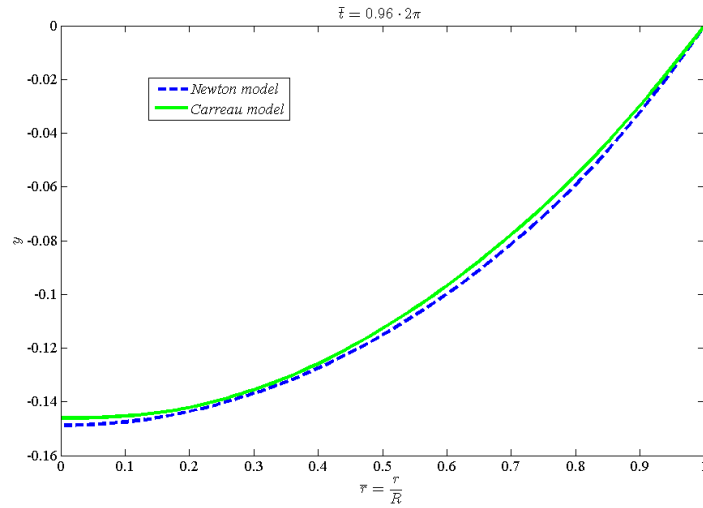
Фигура 20: Сравнение между разпределението на скоростите в нестационарните модели на Нютон и на Каро при произволна периодична функция за $\bar{t} = 0.03 \cdot 2\pi$ и $\bar{t} = 0.11 \cdot 2\pi$



Фигура 21: Сравнение между разпределението на скоростите в нестационарните модели на Нютон и на Каро при произволна периодична функция за $\bar{t} = 0.20 \cdot 2\pi$ и $\bar{t} = 0.45 \cdot 2\pi$



Фигура 22: Сравнение между разпределението на скоростите в нестационарните модели на Нютон и на Каро при произволна периодична функция за $\bar{t} = 0.62 \cdot 2\pi$ и $\bar{t} = 0.88 \cdot 2\pi$



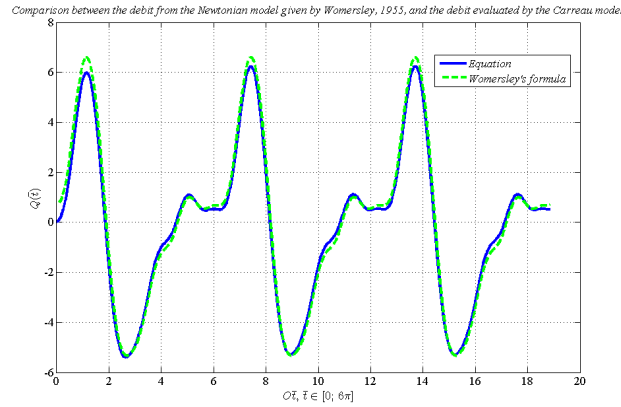
Фигура 23: Сравнение между разпределението на скоростите в нестационарните модели на Нютон и на Каро при произволна периодична функция за $\bar{t} = 0.96 \cdot 2\pi$

На фигури 20, 21, 22 и 23 са сравнени Нютоновата и не-Нютоновата скорост за различни стойности на времето \bar{t} . Абсолютните разлики са дадени в таблица 8.

Таблица 8: *Разлика между скоростите, пресметнати от модела на Нютон и от модела на Каро при произволна периодична функция за градиента на налягането*

Време \bar{t}	$\max \Psi_y$
$\bar{t} = 0.03 \cdot 2\pi$	0.004
$\bar{t} = 0.11 \cdot 2\pi$	0.02
$\bar{t} = 0.20 \cdot 2\pi$	0.06
$\bar{t} = 0.45 \cdot 2\pi$	0.03
$\bar{t} = 0.62 \cdot 2\pi$	0.0001
$\bar{t} = 0.88 \cdot 2\pi$	0.0002
$\bar{t} = 0.96 \cdot 2\pi$	0.0036

Сравнението между дебита от модела на Каро и дебита, пресметнат по формулата на Womersley (71), е изобразено на фигура 24. Максималната абсолютна разлика Ψ_Q между тях е 0.1591. Както се вижда, дебитът от модела на Каро достига минимална стойност $Q_{\min} \approx -5.4 \text{ m}^3/\text{s}$ за $\bar{t} \approx 2.6$ и максимална $Q_{\max} \approx 6.1 \text{ m}^3/\text{s}$ за $\bar{t} \approx 1.1$. Дължината на периода между всеки два максимума (минимума) е 2π .



Фигура 24: *Сравнение между дебита от модела на Каро и дебита от формулата на Womersley (71) за $\bar{t} \in [0; 6\pi]$*

Изводи

Таблица 9: *Максимални разлики между скоростите и дебитите при стационарно и нестационарно течение на кръв*

Течение	$BF(\bar{t})$	$\max \Psi_y$	$\max \Psi_Q$
Стационарно	$-B$	0.4370	0.00001
Нестационарно	$B \cos \bar{t}$	0.0594	0.000001
Нестационарно	$B \sum_{m=1}^6 (A_m \cos m\bar{t} + B_m \sin m\bar{t})$	0.1403	0.1591

В таблица 9 сбито сме представили резултатите от проведените числени експерименти, като сме сравнявали по абсолютна разлика скоростта на Нютоновия и скоростта на не-Нютоновия флуид, както и съответните им дебита в случаите на стационарно и нестационарно течение. Въз основа на нея правим следните изводи:

1. Разпределенията на скоростите при двата вида течение на кръв са сходни, въпреки че вискозитетите в моделите на Каро са нелинейни относно скоростта.
2. Дебитите са близки по стойност.
3. Съществуват възможности за още вариации в явния вид на функцията $F(\bar{t})$, като се използват комбинации от тригонометрични функции и: алгебрични полиноми; логаритмична и показателна функция; други трансцедентни функции.
4. Разглежданията могат да се обобщят до течение на кръв в артерия, която няма форма на идеална тръба. Тогава възникват допълнителни предположения за геометрията на кръвоносния съд и е необ-

ходимо да се използват апроксимации върху неравномерни мрежи или метод на крайните елементи.

4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В дипломната работа е разгледано течението на кръвта в каротидната артерия на човека и във феморалната артерия на куче при определени предположения за геометрията на кръвоносните съдове. В зависимост от това, дали процесът зависи, или не от времето, ние изследваме случаите на стационарно и нестационарно течение.

1. Стационарно течение

(а) Модел на Нютон

Предполагаме, че вискозитетът $\bar{\mu}_{app}$ на кръвта не зависи от скоростта $u(\bar{r})$, и получаваме обикновено диференциално уравнение от втори ред. Уравнението решаваме числено с вграден в **Matlab** солвър **bvp4c**, след което сравняваме приближеното решение с известното аналитично решение (34). Максимумът на абсолютната грешка е 10^{-6} .

(б) Модел на Каро

В този случай вискозитетът $\bar{\mu}_{app}$ е нелинейна функция от търсената скорост $u(\bar{r})$. Аналитично решение не е известно. Построяваме хомогенна консервативна диференчна схема с грешка $O(h^2)$ върху равномерна мрежа по радиалната координата \bar{r} . Получената вследствие на дискретизацията система от диференчни уравнения е нелинейна относно мрежовата функция u . За намирането на приближеното решение използваме метода на дясната прогонка в комбинация с итерационен метод за линеаризиране на уравненията.

Двата стационарни модела са сравнени графично и е установено, че дават сходни резултати. Максималната абсолютна разлика между тях е от порядъка на 10^{-1} .

2. Нестационарно течение

(а) Модел на Нютон

Тъй като вискозитетът е константа, получаваме частно диференциално уравнение от тип уравнение на дифузията. За да намерим решението му числено, въвеждаме равномерна мрежа по радиалната променлива \bar{r} и по времето \bar{t} . Върху тази

мрежа построяваме диференчна схема с тегло $\sigma = \frac{1}{2}$ (схема на Кранк-Никълсън). Коефициентите, зависещи явно от времето, изчисляваме на слоевете $j + \frac{1}{2}$, $j = 0, 1, \dots, M - 1$, за да постигнем локална грешка на апроксимацията $O(h^2 + \tau^2)$. Дискретизираната система от линейни уравнения е решена по метода на дясната прогонка. При постоянен вискозитет съществува аналитичното решение (53) във вид на функция на Бесел от нулев ред. Численото решение е сравнено с аналитичното и е постигната грешка на приближението $O(h^2 + \tau^2) = 10^{-6}$. Връзката между стъпките h и τ определяме от условието за положителност на коефициентите.

(б) *Модел на Каро*

Както в стационарния случай, вискозитетът $\bar{\mu}_{app}$ зависи от скоростта $u(\bar{r}, \bar{t})$. Върху равномерна по двете направления мрежа построяваме хомогенна консервативна диференчна схема с тегло. Коефициентите ѝ са функции от търсеното решение и ги изчисляваме на горния слой по времето. Ето защо дискретизираната система е нелинейна и за решаването ѝ използваме метода на дясната прогонка, съчетан с итерационен метод. Отново избираме тегло $\sigma = \frac{1}{2}$, за да достигнем ред на грешката $O(h^2 + \tau^2)$.

(в) *Модел на Нютон с произволна периодична функция за градиента на налягането*

Върху равномерна по двете направления мрежа се построяват диференчните аналози на диференциалното уравнение, на началното условие и на граничните условия. Използва се диференчната схема на Кранк-Никълсън. По известни експериментални данни за градиента на налягането намираме явното му представяне във вид на тригонометричен ред на Фурие. Заместваме този ред в получената дискретна задача и получаваме численото решение чрез метода на дясната прогонка. Сравняваме дебита на кръвния поток, като използваме квадратурната формула на трапеците с грешка $O(\tau^2)$ за пресмятането му, с приближението на Womersley (71). Разликата между двата дебита е 10^{-3} .

(г) *Модел на Каро с произволна периодична функция за градиента на налягането*

Използваме същата диференчна схема, както е в модела на Нютон, с тази разлика, че сега получената система диференчни уравнения е нелинейна, защото вискозитетът е функция от търсената скорост. Решаваме системата чрез комбинация от метод на дясната прогонка и итерационен метод, след което изчисляваме дебита на кръвния поток. Сравнението му с формулата на Womersley (71) (респ. с дебита от модела на Нютон) дава максимална абсолютна грешка от порядъка на 10^{-1} .

5 ПРИЛОЖЕНИЕ

5.1 Програмно осигуряване

В цялата дипломна работа ние използваме програмната платформа *Matlab*. Концепция на *The MathWorks*, *Matlab* [12] е език от четвърто поколение, който е предназначен за числен анализ, статистическа обработка и визуализация на резултати, изграждане на човеко-машинен интерфейс и микроконтролери.

В изложението подробно се спираме на стационарното и на нестационарното уравнение за движение на кръв в артериите. Стационарният случай представлява гранична задача за обикновено диференциално уравнение от втори ред. Тя може да бъде решена с готовата процедура `bvp4c`. Нестационарният случай обаче изисква доста по-сложна аналитична конструкция и адекватен диференчен метод.

5.1.1 Гранична задача за обикновено диференциално уравнение

Гранична задача за обикновено диференциално уравнение от втори ред ще дефинираме по следния начин: да се намери диференцируема функция $u(x)$, която да удовлетворява уравнението

$$u'' = F(x, u, u'), x \in [a; b]$$

и някои от условията:

- $u(a) = U_a, u(b) = U_b$ (*условия на Дирихле*) – задават се стойности само на функцията в краищата на интервала, но не и на нейната производна;
- $u'(a) = D_a, u'(b) = D_b$ (*условия на Нойман*) – предявяват се изисквания само върху стойностите на производната в двата края на интервала;
- $u(a) = U_a, u'(b) = D_b$ или $u(b) = U_b, u'(a) = D_a$ (*гранични условия от трети род*) – включват изисквания върху стойностите на функцията и на нейната производна, при това в различните краища на интервала.

5.1.2 Solver `bvp4c`

Солвърът `bvp4c` [13], [2] решава двуточкови гранични задачи за системи от обикновени диференциални уравнения. Той намира решенията ² на уравнения от вида

$$y' = f(x, y), x \in [a; b],$$

които удовлетворяват граничните условия на Дирихле, на Нойман или смесените такива. Солвърът `bvp4c` се извиква с минимум три входни аргумента:

```
sol = bvp4c(@odefun, @bcfun, solinit);
```

където `odefun` е име на потребителска функция, пресмятаща производните y'_1, y'_2, \dots, y'_n . Заглавният ред на тази функция има следния вид:

```
function yp = odefun(x, y).
```

Тук

- x е независимата променлива;
- y е вектор стълб с функциите y_1, y_2, \dots, y_n ;
- yp е вектор стълб с първите производни на функциите.

Аргументът `bcfun` е потребителска функция за пресмятане на изразите, дефиниращи граничните условия. Заглавният ѝ ред е

```
function res = bcfun(ya, yb);
```

където `ya` и `yb` са вектори стълбове, представляващи $y(a)$ и $y(b)$, а `res` е вектор стълб с остатъците (грешките) в граничните условия.

Третият входен аргумент `solinit` е запис с уточнените начални приближения на решението, създаван с помощта на функцията `bvpinit`. Неговите полета са:

- `x` — подредени възли на първоначалната мрежа; важно е да се отбележи, че

```
solinit.x(1) = a, solinit.x(end) = b;
```

²За разлика от задачата на Коши, дадена гранична задача е възможно да притежава едно или повече решения, както и да няма нито едно такова.

- y — начално приближение на решението; тук `solinit.y(:,i)` е началното приближение на решението във възела `solinit.x(i)`.

Изходният аргумент `sol` е създаван от солвъра запис с полета x , y и yp :

- `sol.x` — възлите на мрежата, пресметнати от `bvp4c`;
- `sol.y` — приближенията на $y(x)$, съответстващи на възлите от мрежата `sol.x`;
- `sol.yp` — приближенията на $y'(x)$, съответстващи на възлите от мрежата `sol.x`.

Помощната функция `bvpinit` служи за формиране на началното приближение на решението със солвъра `bvp4c`. Синтаксисът ѝ е

```
solinit = bvpinit(x, yinit);
```

където x е вектор, указващ началната мрежа по оста Ox . Вижда се, че `x(1) = a` и `x(end) = b`. Солвърът `bvp4c` нагажда тази мрежа към решението. Обикновено едно приближение като `x = linspace(a, b, 10)` е достатъчно. При по-трудни случаи обаче може да се наложи допълнително въвеждане на точки там, където функцията се променя рязко.

Вторият аргумент `yinit` представлява грубо начално приближение на решението. То може да бъде вектор или име на функция.

- *Вектор* — за всяка компонента на решението функцията `bvpinit` копира съответния елемент на вектора `yinit` като едно и също приближение на тази компонента за всички точки от мрежата. С други думи, `yinit` е постоянно приближение на i -тата компонента $y(i)$ на решението.
- *Функция* — за дадена точка от мрежата функцията трябва да връща вектор, чиито елементи са началните приближения на съответните компоненти y_1, y_2, \dots, y_n . Формата на тази функция е

```
function y = yinit(x);
```

където x е точка от мрежата, а y е вектор с дължина, равна на броя на координатите на решението.

5.2 Програмна реализация

Тук ще приложим програмните кодове на всички файл-функции и скриптове, които сме съставили, за да изследваме уравнението на дифузията.

5.2.1 Стационарно уравнение на движение на кръв в артериите, модел на Нютон

- файл-функция за пресмятане на израза, представящ диференциалното уравнение — `bvp4ode.m`

```
function res = bvp4ode(y, z)
Ast = 6000;
muApp = 0.00345;
R = 0.0045;
res = [z(2);
      -R^2.*Ast./muApp - z(2)./y];
end
```

- файл-функция за пресмятане на изразите, представящи граничните условия — `bvp4bc.m`

```
function res = bvp4bc(za,zb)
res = [za(2);
      zb(1)];
end
```

- скрипт за числено решаване на диференциалното уравнение — `sol1.m`

```
%=====
% РЕШАВАНЕ НА БЕЗРАЗМЕРНОТО УРАВНЕНИЕ
%=====
%R = 0.0031;
R = 0.0045;
Ast = 6000;
muApp = 0.00345;
muInf = 0.00345;
ylow = 0.0001;
yhigh = 1;
```

```

solinit = bvpinit(linspace(ylow, yhigh, 1000), ...
    [0, 1]); % [1,-1]
sol = bvp4c(@bvp4ode, @bvp4bc, solinit);
yint = linspace(ylow, yhigh);
Syint = deval(sol, yint);
%=====
% ПРЕМИНАВАНЕ КЪМ РАЗМЕРНИ ВЕЛИЧИНИ
%=====
%yintNonLine = R .* yint;
%SyintNonLine = R .* Syint;
%=====
% ЧЕРТЕЖ НА РЕШЕНИЯТА (БЕЗРАЗМЕРНИ)
%=====
subplot(2, 1, 1)
%plot(yintNonLine, SyintNonLine(1,:), 'b', 'LineWidth', 3)
plot(yint, Syint(1,:), 'b', 'LineWidth', 3)
set(gca, 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
hold on
grid on
%plot(yintNonLine, SyintNonLine(2,:), 'g', 'LineWidth', 3)
plot(yint, Syint(2,:), 'g', 'LineWidth', 3)
%=====
% ТОЧНОТО РЕШЕНИЕ (БЕЗРАЗМЕРНО)
%=====
yy = ylow : (yhigh-ylow)/99 : yhigh;
zz = Ast .* R^2 .* (1 - yy.^2) ./ (4 .* muApp);
plot(yy, zz, 'cyan--', 'LineWidth', 3)
xlabel('$$ \overline{r}, \quad \overline{r} \in (0; \, 1] $$', ...
    'interpreter', 'latex')
ylabel('$$ Ou $$', 'interpreter', 'latex')
legend('\it{Приближено y}', ...
    '\it{Приближено y}}', '\it{Точно u}')
str = ['$$ (\overline{r}u)''=-\frac{\overline{r}R^2A_{st}}{\overline{\mu}_{app}}, \quad u''(0)=0, \quad u(1)=0 $$'];
title(str, 'interpreter', 'latex')
%=====
% ЧЕРТЕЖ НА ГРЕШКАТА ОТ АПРОКСИМАЦИЯ
%=====

```

```

subplot(2, 1, 2)
err = abs(Syint(1,:)-zz);
plot(yy, err, 'magenta-', 'LineWidth', 3)
grid on
set(gca, 'FontName', 'Times', 'FontSize', 12)
xlabel('$$ \overline{0}\overline{r}, \overline{\text{quad}} \overline{\text{r}} \text{ in } (0; \backslash, 1] $$', ...
'interpreter', 'latex')
ylabel('$$ 0z $$', 'interpreter', 'latex')
title('\it{Грешка от апроксимацията}')
legend('\it{z=|u-y|}')
%=====
% WSS, Q
%=====
wss = abs(Syint(2, end) * muApp);
f = @(r) Ast .* (R.^2 - r.^2) .* r ./ (4 .* muInf);
Q = 2 * pi * quadl(f, 0, R);
helpdlg(['Wall shear stress: ', num2str(wss), ...
', flow rate: ', num2str(Q)], 'Информация')

```

5.2.2 Стационарно уравнение на движение на кръв в артериите, модел на Каро

- файл-функция за числено решаване на системи от линейни уравнения с тридиагонална матрица — *Progon.m*

```

function res = Progon(A, d)
% b vector
b = diag(A);
s = size(A);
% a vector
for j = 1 : s(1, 2)-1
    a(j) = A(j+1, j);
end
a = [0, a];
% c vector
for i = 1 : s(1, 1)-1
    c(i) = A(i, i+1);

```

```

end
c = [c, 0];
alpha(1) = -c(1)/b(1);
beta(1) = d(1)/b(1);
n = length(d);
for k = 2 : n
    alpha(k) = -c(k)/(b(k)+a(k)*alpha(k-1));
    beta(k) = (d(k)-a(k)*beta(k-1))/(b(k)+a(k)*alpha(k-1));
end
x(n) = beta(n);
for k = n-1 : -1 : 1
    x(k) = alpha(k)*x(k+1)+beta(k);
end
res = x';
end

```

- скрипт за числено решаване на диференциалното уравнение — *mysol.m*

```

tic
clear all
clc
%=====
% СТАЦИОНАРНО УРАВНЕНИЕ НА ТОПЛОПРОВОДНОСТТА
% С НЕЛИНЕЕН КОЕФИЦИЕНТ
%=====
% ЗАДАВАНЕ НА КОНСТАНТИТЕ
%=====
R = 0.0045;
%R = 0.0031;
%R = 1;
mu0 = 0.056;
muInf = 0.00345;
%mu0 = muInf;
lambda = 3.313;
nc = 0.3568;
aa = 2;
Ast = 6000;

```

```

%=====
% ЗАДАВАНЕ НА МРЕЖАТА
%=====
r0 = 0; rend = 1; h = (rend-r0)/1000; % 1000
r = r0 : h : rend;
n = length(r);
% m = Ast * h / mu0;
s = 1;
%=====
% НАЧАЛНО ПРИБЛИЖЕНИЕ
%=====
sol0 = zeros(n,1);
sol(:,s) = sol0;
%=====
% ВЕКТОРЪТ b
%=====
b(1) = 1;
for i = 2:n-1
    b(i) = -((r(i)+h/2) .* (1 + (mu0/muInf - 1) .* ...
(1 + lambda.^aa ./ (R.^2) .* ...
((sol(i+1,s)-sol(i,s)) ./ h).^aa) .^...
((nc - 1)./aa)) + ...
(r(i)-h/2) .* ...
(1 + (mu0/muInf - 1) .* ...
(1 + lambda.^aa ./ (R.^2) .* ...
((sol(i,s)-sol(i-1,s)) ./ h).^aa).^...
((nc - 1)./aa)));
end
b(n) = 1;
%=====
% ВЕКТОРЪТ c
%=====
c(1) = -1;
for i = 2:n-1
    c(i) = (r(i)+h/2) .* (1 + (mu0/muInf - 1) .* ...
(1 + lambda.^aa ./ (R.^2) .* ...
((sol(i+1,s)-sol(i,s)) ./ h).^aa).^...
((nc - 1)./aa));

```

```

end
c(n) = 0;
%=====
% ВЕКТОРЪТ a
%=====
a(1) = 0;
for i = 2:n-1
    a(i) = (r(i)-h/2) .* (1 + (mu0/muInf - 1) .* ...
        (1 + lambda.^aa ./ (R.^2) .* ...
        ((sol(i,s)-sol(i-1,s)) ./ h).^aa).^...
        ((nc-1) ./ aa));
end
a(n) = 0;
%=====
% ДЯЧАТА ЧАСТ НА СИСТЕМАТА
%=====
d(1) = 0;
for i = 2:n-1
    d(i) = -R.^2 .* h^2 .* r(i) .* Ast/muInf;
end
d(n) = 0;
%=====
% ФОРМИРАНЕ НА МАТРИЦАТА НА СИСТЕМАТА
%=====
A = zeros(n,n);
for i=1:n
    for j=1:n
        if (i==j)
            A(i,j) = b(i);
        end
    end
end
for i=1:n
    for j=1:n
        if (i==j+1)
            A(i,j) = a(i);
        end
    end
end
end

```



```

end
for i=1:n
    for j=1:n
        if(j==i+1)
            A(i,j) = c(i);
        end
    end
end
end
%=====
% НАМИРАНЕ НА ОЩЕ ЕДНО ПРИБЛИЖЕНИЕ
%=====
s = s+1; % s = 2
sol(:,s) = Progon(A,d);
%=====
% ИТЕРАТИВНИЯТ ПРОЦЕС
%=====

eps = 1.0e-06;

while(max(abs(sol(:,s)-sol(:,s-1)))>eps)
%=====
% ПОВТАРЯНЕ НА ГОРНАТА ПРОЦЕДУРА
%=====
s = s+1;
%=====
% ВЕКТОРЪТ b
%=====
b(1) = 1;
for i = 2:n-1
    b(i) = -((r(i)+h/2) .* (1 + (mu0/muInf - 1) .* ...
(1 + lambda.^aa ./ (R.^2) .* ...
((sol(i+1,s-1)-sol(i,s-1)) ./ h).^aa) .^...
((nc - 1)./aa)) + ...
(r(i)-h/2) .* ...
(1 + (mu0/muInf - 1) .* ...
(1 + lambda.^aa ./ (R.^2) .* ...
((sol(i,s-1)-sol(i-1,s-1)) ./ h).^aa).^...
((nc - 1)./aa)));

```

```

end
b(n) = 1;
%=====
% ВЕКТОРЪТ c
%=====
c(1) = -1;
for i = 2:n-1
    c(i) = (r(i)+h/2) .* (1 + (mu0/muInf - 1) .* ...
        (1 + lambda.^aa ./ (R.^2) .* ...
        ((sol(i+1,s-1)-sol(i,s-1)) ./ h).^aa).^...
        ((nc - 1)./aa));
end
c(n) = 0;
%=====
% ВЕКТОРЪТ a
%=====
a(1) = 0;
for i = 2:n-1
    a(i) = (r(i)-h/2) .* (1 + (mu0/muInf - 1) .* ...
        (1 + lambda.^aa ./ (R.^2) .* ...
        ((sol(i,s-1)-sol(i-1,s-1)) ./ h).^aa).^...
        ((nc-1) ./ aa));
end
a(n) = 0;
%=====
% ДЯСНАТА ЧАСТ НА СИСТЕМАТА
%=====
d(1) = 0;
for i = 2:n-1
    d(i) = -R.^2 .* h^2 .* r(i) .* Ast/muInf;
end
d(n) = 0;
%=====
% ФОРМИРАНЕ НА МАТРИЦАТА НА СИСТЕМАТА
%=====
A = zeros(n,n);
for i=1:n
    for j=1:n

```

```

        if (i==j)
            A(i,j) = b(i);
        end
    end
end
for i=1:n
    for j=1:n
        if(i==j+1)
            A(i,j) = a(i);
        end
    end
end
for i=1:n
    for j=1:n
        if(j==i+1)
            A(i,j) = c(i);
        end
    end
end
end
%=====
% РЕШАВАНЕ ПО МЕТОДА НА ПРОГОНКАТА
%=====
sol(:,s) = Progon(A,d);
end
%=====
% ГРАФИКА НА ПРИБЛИЖЕНОТО РЕШЕНИЕ ПРИ muApp = muInf
%=====
figure(1)
plot(r, sol(:,end), 'r', 'LineWidth', 3)
hold on
grid on
set(gca, 'FontName', 'Times', 'FontSize', 13)
xlabel('$$ 0\overline{r}, \quad \overline{r} \in (0; \, 1] $$', ...
'interpreter', 'latex')
ylabel('$$ Ou $$', 'interpreter', 'latex')
%=====
% ГРАФИКА НА ТОЧНОТО РЕШЕНИЕ ПРИ muApp = muInf
%=====

```

```

rr = r0 : h : rend;
srr = Ast*R^2/(4*muInf)*(1-rr.^2);
hold on
plot(rr, srr, 'g--', 'LineWidth', 3)
legend('\it{Приближено решение}', ...
       '\it{Точно решение с \mu_{app} = \mu_{\infty}}')
str = ['$\$ (\overline{\mu}_{app} \overline{r} u)'' =', ...
       '-R^2 \overline{r} A_{st}, \quad u''(0)=0, ', ...
       '\quad u(1)=0 \$\$'];
title(str,'interpreter','latex')
%=====
% ГРЕШКА НА АПРОКСИМАЦИЯТА
%=====
err = abs(sol(:,end)-srr');
display('Максимална абсолютна грешка: ')
max(err)
%=====
% ПРОДЪЛЖАВАНЕ НА РЕШЕНИЕТО В [-1;1]
%=====
figure(2)
r1 = -fliplr(r);
y1 = sol(:,end);
y1 = y1';
y1 = fliplr(y1);
y1 = y1';
u1 = fliplr(srr);
u1 = u1';
rNew = [r1,r];
yNew = [y1',sol(:,end)'];
uNew = [u1',srr];
plot(rNew,yNew,'b','LineWidth',3)
hold on
grid on
plot(rNew,uNew,'g--','LineWidth',3)
legend('\it{Carreau model}', '\it{Newton model}')
set(gca,'FontName','Times','FontSize',12)
xlabel('$\$ 0\overline{r} \$$', ...
       'interpreter','latex')

```

```
ylabel('$$ Ou $$', ...
'interpreter','latex')
toc
```

5.2.3 Нестационарно уравнение на движение на кръв в артериите, модел на Нютон

Тук отново използваме готовата процедура `Progon.m` за изчисляване на решението y по метода на прогонката. Новият файл е този, който описва диференчната схема — `newSolSigma.m`.

```
%format long
tic
%=====
% НЕСТАЦИОНАРНО УРАВНЕНИЕ НА
% ТОПЛОПРОВОДНОСТТА С ПРОМЕНЛИВИ
% КОЕФИЦИЕНТИ
%=====
sigma = 0.5;
%=====
% РЕШЕНИЕ С ИТЕРАЦИИ ПРИ ПРОМЕНЛИВО muApp
% И ПРИ КОЕ ДА Е sigma; ОБЕЗРАЗМЕРЕНО
% muApp
%=====
%=====
% ЗАДАВАНЕ НА КОНСТАНТИТЕ
%=====
R = 0.0045;
%R = 0.0031;
%R = 1;
%mu0 = 0.056;
muInf = 0.00345;
mu0 = muInf;
lambda = 3.313;
nc = 0.3568;
aa = 2;
Ast = -6000;
n = 2.4 * pi;
```

```

rho = 1000;
alCf = R * sqrt(n*rho/muInf);
BCf = R^2 .* Ast/muInf;
l1 = (lambda/R).^aa;
%=====
% ЗАДАВАНЕ НА МРЕЖАТА (БЕЗРАЗМЕРНИ)
%=====
r0 = 0; rend = 1; h = (rend-r0)/200; % 2500
r = r0 : h : rend;
t0 = 0; tend = 2*pi; %tau = muInf*alCf^2*h^2/(2*(1-sigma)*mu0);
%tau = (tend-t0)/400; % 1700
tau = 0.04;
t = t0 : tau : tend;
N = length(r);
M = length(t);
y = zeros(N,M);
%=====
% НАМИРАНЕ НА ТОЧНОТО РЕШЕНИЕ (БЕЗРАЗМЕРНО)
%=====
clear i;
alpha = 6.6525;
%alpha = 4.5828;
ur = zeros(N,M);
for i0 = 1 : length(r)
    for j0 = 1 : length(t)
        ur(i0,j0) = real(i*(-Ast)*exp(i*t(j0))./(n*rho) .* ...
            (besselj(0,i^(3/2).*alpha.*...
r(i0))./besselj(0,i^(3/2).*alpha)-1));
    end
end
%=====
% ЗАДАВАНЕ НА ГРАНИЧНИТЕ УСЛОВИЯ
%=====
for j = 1 : M
    y(N,j) = 0;
end
%=====
% НУЛЕВА ИТЕРАЦИЯ

```

```

%=====
s = 1;
sol0 = zeros(N,M);
for j = 1 : M
    sol0(N,j) = 0;
end
for i = 1 : N
    sol0(i,1) = ur(i,1);
    %sol0(i,1) = 0;
end
%sol(:, :, s) = sol0;
sOld = sol0;
sNew = sOld;
for j = 1 : M-1
%=====
% МАТРИЦАТА НА ПРОГОНКАТА
%=====
A = zeros(N,N);
adiag = zeros(1,N);
bdiag = zeros(1,N);
cdiag = zeros(1,N);
ddiag = zeros(N,1);
%j = 1;
%=====
% БЕКТОР a
%=====
adiag(1) = 0;
adiag(N) = 0;
%for i = 2 : N-1
%    adiag(i) = (muInf + (mu0-muInf) .* (1 + lambda.^aa .* ...
%        ((y(i,j)-y(i-1,j))./h).^aa).^((nc-1)./aa)) .* (r(i)-h/2);
%end
for i = 2 : N-1
adiag(i) = tau*sigma/(alCf^2*r(i)*h^2) .* ...
((1+(mu0/muInf-1) .* ...
    (1 + l1 .* ((sOld(i,j+1) - sOld(i-1,j+1)) ./ (h)).^aa).^...
((nc-1)./aa) ) .* (r(i)-h/2));
end

```

```

%adiag
%=====
% BEKTOP b
%=====
bdiag(1) = 1;
bdiag(N) = 1;
%for i = 2 : N-1
%    bdiag(i) = -(rho * h^2 * r(i) / tau + ...
%        (muInf + (mu0-muInf) .* (1 + lambda.^aa .* ...
%            ((y(i+1,j)-y(i,j))./h).^aa).^((nc-1)./aa)) .* (r(i)+h/2) + ...
%        (muInf + (mu0-muInf) .* (1 + lambda.^aa .* ...
%            ((y(i,j)-y(i-1,j))./h).^aa).^((nc-1)./aa)) .* ...
%            (r(i)-h/2));
%end
for i = 2 : N-1
bdiag(i) = -1 - tau*sigma/(alCf^2*r(i)*h^2) * ...
(((1+(mu0/muInf-1) .* (1 + l1 .* ...
((sOld(i,j+1) - sOld(i-1,j+1)) ./ (h)).^aa).^...
((nc-1)./aa) ) .* (r(i)-h/2))) + ...
(((1+(mu0/muInf-1) .* (1 + l1 .* ...
((sOld(i+1,j+1) - sOld(i,j+1)) ./ (h)).^aa).^...
((nc-1)./aa) ) .* (r(i)+h/2)))));
end
%=====
% BEKTOP c
%=====
cdiag(1) = -1;
cdiag(N) = 0;
%for i = 2 : N-1
%    cdiag(i) = (muInf + (mu0-muInf) .* (1 + lambda.^aa .* ...
%        ((y(i+1,j)-y(i,j))./h).^aa).^((nc-1)./aa)) .* (r(i)+h/2);
%end
for i = 2 : N-1
cdiag(i) = tau*sigma/(alCf^2*r(i)*h^2) .* ...
((1+(mu0/muInf-1) .* (1 + l1 .* ...
((sOld(i+1,j+1) - sOld(i,j+1)) ./ (h)).^aa).^...
((nc-1)./aa) ) .* (r(i)+h/2)));
end

```



```

%=====
% BEKTOP d
%=====
%ddiag(1) = 0;
%ddiag(1) = -h^2./(4*acoef(1,j)) .* Ast .* cos(n * t(j+1));
ddiag(1) = -h^2*R^2./(4 .* (0.5 * ((1 + (mu0/muInf-1) .* ...
(1 + l1 .* ((sOld(2,j+1) - sOld(1,j+1)) ./ (h)).^aa).^...
((nc-1)./aa)) + ...
(1 + (mu0/muInf-1) .* (1 + l1 .* ...
((sOld(3,j+1) - sOld(2,j+1)) ./ (h)).^aa).^...
((nc-1)./aa)))) .* (BCf/(alCf^2)) .* cos((t(j)+tau/2));
ddiag(N) = 0;
%ddiag(N) = -h^2./(4*acoef(1,j)) .* Ast .* cos(n * t(j));
%for i = 2 : N-1
%    ddiag(i) = h^2 .* r(i) .* (Ast .* cos(n .* ...
%        (t(j)+tau/2)) - rho ./ tau .* y(i,j));
%end
for i = 2 : N-1
%ddiag(i) = tau/rho .* Ast .* cos(n .* (t(j)+tau/2)) - sol(i,j,s);
ddiag(i) = -tau*(1-sigma)/(alCf^2*r(i)*h^2) .* (r(i)-h/2) .* ...
(1+(mu0/muInf-1) .* (1 + l1 .* ...
((sOld(i,j) - sOld(i-1,j)) ./ h).^aa).^...
((nc-1)./aa) ) .* sOld(i-1,j) + ...
(tau*(1-sigma)/(alCf^2*r(i)*h^2) .* ...
((r(i)-h/2) .* (1+(mu0/muInf-1) .* (1 + l1 .* ...
((sOld(i,j) - sOld(i-1,j)) ./ h).^aa).^...
((nc-1)./aa) ) + ...
(r(i)+h/2) .* (1+(mu0/muInf-1) .* (1 + l1 .* ...
((sOld(i+1,j) - sOld(i,j)) ./ h).^aa).^...
((nc-1)./aa) )) - 1) .* sOld(i,j) - ...
tau*(1-sigma)/(alCf^2*r(i)*h^2) .* ...
(r(i)+h/2) .* (1+(mu0/muInf-1) .* (1 + l1 .* ...
((sOld(i+1,j) - sOld(i,j)) ./ h).^aa).^...
((nc-1)./aa) ) .* sOld(i+1,j) + ...
tau*BCf/(alCf^2) .* cos((t(j)+tau/2));
end
%=====
% ФОРМИРАНЕ НА МАТРИЦАТА НА СИСТЕМАТА

```

```

%=====
for i0 = 1 : N
    for j0 = 1 : N
        if(i0==j0)
            A(i0,j0) = bdiag(i0);
        end
    end
end
for i0 = 1 : N
    for j0 = 1 : N
        if(i0==j0+1)
            A(i0,j0) = adiag(i0);
        end
    end
end
for i0 = 1 : N
    for j0 = 1 : N
        if(j0==i0+1)
            A(i0,j0) = cdiag(i0);
        end
    end
end
%=====
% НАМИРАНЕ НА ОЩЕ ЕДНО ПРИБЛИЖЕНИЕ
%=====
s = s+1;
sNew(:,j+1) = Progon(A,ddiag);
end
%=====
% ИТЕРАЦИОННИЯТ ПРОЦЕС
%=====
eps = 1.0e-08;
s = s+1; % s = 2
while(max(max(abs(sNew-sOld)))>eps)
%while(abs(sol(:,:s)-sol(:,:s-1))>eps)
    %s = s+1;
for j = 1 : M-1
%=====

```

```

% ПОВТАРЯНЕ НА ГОРНАТА ПРОЦЕДУРА
%=====
sOld = sNew;
for ii = 1 : N
    sNew(ii,1) = sOld(ii,1);
end
%=====
% МАТРИЦАТА НА ПРОГОНКАТА
%=====
A = zeros(N,N);
adiag = zeros(1,N);
bdiag = zeros(1,N);
cdiag = zeros(1,N);
ddiag = zeros(N,1);
%j = 1;
%=====
% ВЕКТОР a
%=====
adiag(1) = 0;
adiag(N) = 0;
%for i = 2 : N-1
%    adiag(i) = (muInf + (mu0-muInf) .* (1 + lambda.^aa .* ...
%        ((y(i,j)-y(i-1,j))./h).^aa).^((nc-1)./aa)) .* (r(i)-h/2);
%end
for i = 2 : N-1
adiag(i) = tau*sigma/(alCf^2*r(i)*h^2) .* ...
((1+(mu0/muInf-1) .* ...
    (1 + l1 .* ...
    ((sOld(i,j+1) - sOld(i-1,j+1)) ./ (h)).^aa).^...
    ((nc-1)./aa) ) .* (r(i)-h/2));
end
%adiag
%=====
% ВЕКТОР b
%=====
bdiag(1) = 1;
bdiag(N) = 1;
%for i = 2 : N-1

```

```

%      bdiag(i) = -(rho * h^2 * r(i) / tau + ...
%          (muInf + (mu0-muInf) .* (1 + lambda.^aa .* ...
%              ((y(i+1,j)-y(i,j))./h).^aa).^((nc-1)./aa)) .* (r(i)+h/2) + ...
%          (muInf + (mu0-muInf) .* (1 + lambda.^aa .* ...
%              ((y(i,j)-y(i-1,j))./h).^aa).^((nc-1)./aa)) .* ...
%              (r(i)-h/2));
%end
for i = 2 : N-1
bdiag(i) = -1 - tau*sigma/(aLCf^2*r(i)*h^2) * ...
(((1+(mu0/muInf-1) .* (1 + l1 .* ...
((sOld(i,j+1) - sOld(i-1,j+1)) ./ (h)).^aa).^...
((nc-1)./aa) ) .* (r(i)-h/2))) + ...
(((1+(mu0/muInf-1) .* (1 + l1 .* ...
((sOld(i+1,j+1) - sOld(i,j+1)) ./ (h)).^aa).^...
((nc-1)./aa) ) .* (r(i)+h/2))));
end
%=====
% BEKTOP c
%=====
cdiag(1) = -1;
cdiag(N) = 0;
%for i = 2 : N-1
%      cdiag(i) = (muInf + (mu0-muInf) .* (1 + lambda.^aa .* ...
%          ((y(i+1,j)-y(i,j))./h).^aa).^((nc-1)./aa)) .* (r(i)+h/2);
%end
for i = 2 : N-1
cdiag(i) = tau*sigma/(aLCf^2*r(i)*h^2) .* ...
((1+(mu0/muInf-1) .* (1 + l1 .* ...
((sOld(i+1,j+1) - sOld(i,j+1)) ./ (h)).^aa).^...
((nc-1)./aa) ) .* (r(i)+h/2));
end
%=====
% BEKTOP d
%=====
%ddiag(1) = 0;
%ddiag(1) = -h^2./(4*acoef(1,j)) .* Ast .* cos(n * t(j+1));
ddiag(1) = -h^2*R^2./(4 .* (0.5 * ...
((1 + (mu0/muInf-1) .* (1 + l1 .* ...

```

```

((sOld(2,j+1) - sOld(1,j+1)) ./ (h)).^aa).^...
((nc-1)./aa)) + ...
        (1 + (mu0/muInf-1) .* (1 + l1 .* ...
((sOld(3,j+1) - sOld(2,j+1)) ./ (h)).^aa).^...
((nc-1)./aa)))) .* (BCf/(alCf^2)) .* ...
cos((t(j)+tau/2));
ddiag(N) = 0;
%ddiag(N) = -h^2./(4*acoef(1,j)) .* Ast .* cos(n * t(j));
%for i = 2 : N-1
%    ddiag(i) = h^2 .* r(i) .* (Ast .* cos(n .* ...
%        (t(j)+tau/2)) - rho ./ tau .* y(i,j));
%end
for i = 2 : N-1
%ddiag(i) = tau/rho .* Ast .* cos(n .* (t(j)+tau/2)) - sol(i,j,s);
ddiag(i) = -tau*(1-sigma)/(alCf^2*r(i)*h^2) .* (r(i)-h/2) .* ...
(1+(mu0/muInf-1) .* (1 + l1 .* ...
((sOld(i,j) - sOld(i-1,j)) ./ h).^aa).^...
((nc-1)./aa) ) .* sOld(i-1,j) + ...
        (tau*(1-sigma)/(alCf^2*r(i)*h^2) .* ...
((r(i)-h/2) .* (1+(mu0/muInf-1) .* ...
(1 + l1 .* ((sOld(i,j) - sOld(i-1,j)) ./ h).^aa).^...
((nc-1)./aa) ) + ...
(r(i)+h/2) .* (1+(mu0/muInf-1) .* ...
(1 + l1 .* ((sOld(i+1,j) - sOld(i,j)) ./ h).^aa).^...
((nc-1)./aa) )) - 1) .* sOld(i,j) - ...
        tau*(1-sigma)/(alCf^2*r(i)*h^2) .* ...
(r(i)+h/2) .* (1+(mu0/muInf-1) .* ...
(1 + l1 .* ((sOld(i+1,j) - sOld(i,j)) ./ h).^aa).^...
((nc-1)./aa) ) .* sOld(i+1,j) + ...
        tau*BCf/(alCf^2) .* cos((t(j)+tau/2));
end
%=====
% ФОРМИРАНЕ НА МАТРИЦАТА НА СИСТЕМАТА
%=====
for i0 = 1 : N
    for j0 = 1 : N
        if(i0==j0)
            A(i0,j0) = bdiag(i0);

```

```

        end
    end
end
for i0 = 1 : N
    for j0 = 1 : N
        if(i0==j0+1)
            A(i0,j0) = adiag(i0);
        end
    end
end
for i0 = 1 : N
    for j0 = 1 : N
        if(j0==i0+1)
            A(i0,j0) = cdiag(i0);
        end
    end
end
end
%=====
% РЕШАВАНЕ ПО МЕТОДА НА ПРОГОНКАТА
%=====
%s = s+1;
sNew(:,j+1) = Progon(A,ddiag);
end
s = s+1;
end
%=====
% СРАВНЯВАНЕ С ТОЧНОТО РЕШЕНИЕ И ОЦЕНКА НА ГРЕШКАТА
%=====
%clear i;
%alpha = 6.6525;
%alpha = 4.5828;
%ur = zeros(N,M);
%for i0 = 1 : length(r)
%    for j0 = 1 : length(t)
%        ur(i0,j0) = real(i*(-Ast)*...
%            exp(i*n*t(j0))./(n*rho) .* ...
%            (besselj(0,i^(3/2).*alpha.*...
%            r(i0)/R)./besselj(0,i^(3/2).*alpha)-1));

```

```

%    end
%end
sol = sNew;
err = abs(sol-ur);
display('Максимална абсолютна грешка: ')
max(max(err))
relErr = err./ur;
display('Максимална относителна грешка: ')
max(max(err))/max(max(ur))*100
%=====
% ПРЕСМЯТАНЕ НА ДЕБИТА
%=====
debitQ = zeros(1,M);
for j = 1 : M
    debitQ(j) = pi * h * ...
        (2 .* sum(r' .* sol(:,j)) - ...
        r(1).*sol(1,j) - r(end).*sol(end,j));
end
figure(1)
plot(r,sol(:,end),'b',r,ur(:,end),'g--','LineWidth',3)
%plot(r,sol(:,end,end),'b','LineWidth',2)
grid on
set(gca,'FontName','Times','FontSize',13)
xlabel('$$$ \overline{0}{r}, \, \overline{1}{r} \, \text{in} \, [0; \, 1] $$$', ...
'interpreter','latex')
ylabel('$$$ Q_u $$$','interpreter','latex')
str = ['\it{Нелинейно уравнение на кръвен поток', ...
' в артериите (чертеж върху последния слой)}'];
title(str)
legend('Приближено решение \it{y}', ...
'Точно решение \it{u}')
%legend('Приближено решение \it{y(r;t)}')
figure(2)
mesh(t,r,sol)
colormap winter
colorbar
grid on
set(gca,'FontName','Times','FontSize',13)

```

```

xlabel('$$ 0\overline{t}, \, \, \overline{t} \, \text{in} \, [0; \, \, 2\pi] $$', ...
'interpreter','latex')
ylabel('$$ 0\overline{r}, \, \, \overline{r} \, \text{in} \, [0; \, \, 1] $$', ...
'interpreter','latex')
zlabel('$$ u(\overline{r}; \, \, \overline{t}) $$', ...
'interpreter','latex')
figure(3)
plot(t,debitQ,'m','LineWidth',3)
grid on
set(gca,'FontName','Times','FontSize',13)
xlabel('$$ 0\overline{t}, \, \, \overline{t} \, \text{in} \, [0; \, \, 2\pi] $$', ...
'interpreter','latex')
ylabel('$$ Q(\overline{t}) $$','interpreter','latex')
axis([min(t),max(t),-2.5,2.5])
title('\it{Дебит на кръвта в артерията}')
legend('\it{Q}')
toc

```

5.2.4 Нестационарно уравнение на движение на кръв в артериите, модел на Каро

Следва скриптът, чрез който могат да бъдат решени двете задачи на Каро: когато $f(r, t, u) = A_{st} \cos(nt)$ и когато $f(r, t, u)$ е разложена в ред на Фурие — *sigmarNewt.m*.

```

%=====
% CARREAU MODEL CASE
%=====
tic
clear all
clc
%=====
% DATA FROM WOMERSLEY, 1955
%=====
xx = [0:0.01:0.33] .* 6 * pi;
M_m = [1.1050, 1.5316, -0.9668, -0.2857, ...
0.2821, -0.1924];
M_10 = [0.6551, 0.7436, 0.7839, 0.8096, ...

```



```

0.8278, 0.8416];
eps_10 = [30+59/60, 19+57/60, 15+49/60, ...
13.5, 11+57/60, 10.75] .* (pi/180);
alpha_2 = [11.13, 22.27, 33.40, ...
44.53, 55.67, 66.80];
phi_m = [40+14/60, -69-17/60, 34+44/60, ...
-33-47/60, 87+31/60, -4-58/60] .* (pi/180);
ACoeff = M_m .* cos(phi_m);
BCoeff = -M_m .* sin(phi_m);
P_c = 0;
P_s = 0;
for i = 1:6,
    A_c(i,:) = ACoeff(i) .* cos(i.*xx);
    B_s(i,:) = BCoeff(i) .* sin(i.*xx);
    P_c = P_c + A_c(i,:);
    P_s = P_s + B_s(i,:);
end
P = P_c + P_s;
Q1 = 3.56 .* sin(xx + (71+13/60) .* pi/180) + ...
2.71 .* sin(2*xx-(49+1/6)*pi/180) - ...
1.20 .* sin (3*xx + (50+ 33/60) * pi/180)...
-0.28 .* sin(4*xx-(20+17/60) .* pi/180) + ...
0.22 .* sin(5*xx+ (99+ 28/60)*pi/180) - ...
0.13 .* sin (6*xx+(5+47/60) * pi/180);
% plots P and Q1
figure(1)
hold on
plot(xx./pi*180,P,'g',xx./pi*180,Q1,'b','LineWidth',3)
set(gca,'FontName','Times','FontSize',11)
grid on
% symbol evaluation
syms tt Ffit1 P_cSol P_sSol
P_cSol = 0;
P_sSol = 0;
% the coefficients in the analytic formula
for i = 1 : length(ACoeff)
    P_cSol = P_cSol + ACoeff(i) .* cos(i.*tt);
    P_sSol = P_sSol + BCoeff(i) .* sin(i.*tt);

```

```

end
Ffit1 = P_cSol + P_sSol;
expand(Ffit1);
simplify(Ffit1);
pretty(Ffit1)
%=====
% НЕСТАЦИОНАРНО УРАВНЕНИЕ НА
% ТОПЛОПРОВОДНОСТТА С ПРОМЕНЛИВИ
% КОЕФИЦИЕНТИ
%=====
sigma = 0.5;
%=====
% РЕШЕНИЕ С ИТЕРАЦИИ ПРИ ПРОМЕНЛИВО muApp
% И ПРИ КОЕ ДА Е sigma; ОБЕЗРАЗМЕРЕНО
% muApp
%=====
%=====
% ЗАДАВАНЕ НА КОНСТАНТИТЕ
%=====
R = 0.0015;
muInf = 0.004;
mu0 = 0.0207;
%mu0 = muInf;
lambda = 0.3327;
nc = 0.4505;
aa = 2;
Ast = 13600*9.81*0.1;
n = 6 * pi;
rho = 1050;
alCf = R*sqrt(n*rho/muInf);
%alCf = 3.3366;
BCf = R^2 .* Ast/muInf;
l1 = (lambda/R).^aa;
%=====
% ЗАДАВАНЕ НА МРЕЖАТА (БЕЗРАЗМЕРНИ)
%=====
r0 = 0; rend = 1; h = (rend-r0)/100; % 2500
r = r0 : h : rend;

```

```

t0 = 0; tend = 6*pi;
%tau = 10 * muInf*alCf^2*h^2/(2*(1-sigma)*mu0);
tau = 0.006;
t = t0 : tau : tend;
N = length(r);
M = length(t);
for jj0 = 1 : M-1
    ff(jj0) = subs(Ffit1,tt,(t(jj0)+tau/2));
end
y = zeros(N,M);
clear i;
alpha = alCf;
%=====
% ЗАДАВАНЕ НА ГРАНИЧНИТЕ УСЛОВИЯ
%=====
for j = 1 : M
    y(N,j) = 0;
end
%=====
% НУЛЕВА ИТЕРАЦИЯ
%=====
s = 1;
sol0 = zeros(N,M);
for j = 1 : M
    sol0(N,j) = 0;
end
for i = 1 : N
    sol0(i,1) = 0;
end
sOld = sol0;
sNew = sOld;
for j = 1 : M-1
%=====
% МАТРИЦАТА НА ПРОГОНКАТА
%=====
A = zeros(N,N);
adiag = zeros(1,N);
bdiag = zeros(1,N);

```

```

cdiag = zeros(1,N);
ddiag = zeros(N,1);
%j = 1;
%=====
% BEKTOP a
%=====
adiag(1) = 0;
adiag(N) = 0;
for i = 2 : N-1
adiag(i) = tau*sigma/(alCf^2*r(i)*h^2) .* ...
((1+(mu0/muInf-1) .* ...
(1 + l1 .* ((sOld(i,j+1) - sOld(i-1,j+1)) ./ (h)).^aa).^...
((nc-1)./aa) ) .* (r(i)-h/2));
end
%adiag
%=====
% BEKTOP b
%=====
bdiag(1) = 1;
bdiag(N) = 1;
for i = 2 : N-1
bdiag(i) = -1 - tau*sigma/(alCf^2*r(i)*h^2) * ...
((((1+(mu0/muInf-1) .* ...
(1 + l1 .* ((sOld(i,j+1) - sOld(i-1,j+1)) ./ (h)).^aa).^...
((nc-1)./aa) ) .* (r(i)-h/2))) + ...
(((1+(mu0/muInf-1) .* (1 + l1 .* ...
((sOld(i+1,j+1) - sOld(i,j+1)) ./ (h)).^aa).^...
((nc-1)./aa) ) .* (r(i)+h/2)))));
end
%=====
% BEKTOP c
%=====
cdiag(1) = -1;
cdiag(N) = 0;
%for i = 2 : N-1
for i = 2 : N-1
cdiag(i) = tau*sigma/(alCf^2*r(i)*h^2) .* ...
((1+(mu0/muInf-1) .* (1 + l1 .* ...

```

```

        ((sOld(i+1,j+1) - sOld(i,j+1)) ./ (h)).^aa).^...
        ((nc-1)./aa) ) .* (r(i)+h/2));
    end
    %=====
    % BEKTOP d
    %=====
    ddiag(1) = -h^2*R^2./(4 .* (0.5 * ...
    ((1 + (mu0/muInf-1) .* (1 + l1 .* ...
    ((sOld(2,j+1) - sOld(1,j+1)) ./ (h)).^aa).^...
    ((nc-1)./aa)) + ...
        (1 + (mu0/muInf-1) .* ...
    (1 + l1 .* ((sOld(3,j+1) - sOld(2,j+1)) ./ (h)).^aa).^...
    ((nc-1)./aa)))) .* (BCf/(alCf^2)) .* ff(j);
    ddiag(N) = 0;
    for i = 2 : N-1
        ddiag(i) = -tau*(1-sigma)/(alCf^2*r(i)*h^2) .* ...
        (r(i)-h/2) .* (1+(mu0/muInf-1) .* ...
        (1 + l1 .* ((sOld(i,j) - sOld(i-1,j)) ./ h).^aa).^...
        ((nc-1)./aa) ) .* sOld(i-1,j) + ...
            (tau*(1-sigma)/(alCf^2*r(i)*h^2) .* ...
        ((r(i)-h/2) .* ...
        (1+(mu0/muInf-1) .* (1 + l1 .* ...
        ((sOld(i,j) - sOld(i-1,j)) ./ h).^aa).^...
        ((nc-1)./aa) ) + ...
        (r(i)+h/2) .* (1+(mu0/muInf-1) .* ...
        (1 + l1 .* ((sOld(i+1,j) - sOld(i,j)) ./ h).^aa).^...
        ((nc-1)./aa) )) - 1) .* sOld(i,j) - ...
            tau*(1-sigma)/(alCf^2*r(i)*h^2) .* ...
        (r(i)+h/2) .* (1+(mu0/muInf-1) .* ...
        (1 + l1 .* ((sOld(i+1,j) - sOld(i,j)) ./ h).^aa).^...
        ((nc-1)./aa) ) .* sOld(i+1,j) + ...
            tau*BCf/(alCf^2) .* ff(j);
    end
    %=====
    % ФОРМИРАНЕ НА МАТРИЦАТА НА СИСТЕМАТА
    %=====
    for i0 = 1 : N
        for j0 = 1 : N

```

```

        if(i0==j0)
            A(i0,j0) = bdiag(i0);
        end
    end
end
for i0 = 1 : N
    for j0 = 1 : N
        if(i0==j0+1)
            A(i0,j0) = adia(i0);
        end
    end
end
for i0 = 1 : N
    for j0 = 1 : N
        if(j0==i0+1)
            A(i0,j0) = cdiag(i0);
        end
    end
end
end
%=====
% НАМИРАНЕ НА ОЩЕ ЕДНО ПРИБЛИЖЕНИЕ
%=====
s = s+1;
sNew(:,j+1) = Progon(A,ddiag);
end
%=====
% ИТЕРАЦИОННИЯТ ПРОЦЕС
%=====
eps = 1.0e-08;
s = s+1; % s = 2
while(max(max(abs(sNew-sOld)))>eps)
    %s = s+1;
    for j = 1 : M-1
        %=====
        % ПОВТАРЯНЕ НА ГОРНАТА ПРОЦЕДУРА
        %=====
sOld = sNew;
for ii = 1 : N

```

```

        sNew(ii,1) = sOld(ii,1);
    end
%=====
% МАТРИЦАТА НА ПРОГОНКАТА
%=====
A = zeros(N,N);
adiag = zeros(1,N);
bdiag = zeros(1,N);
cdiag = zeros(1,N);
ddiag = zeros(N,1);
%j = 1;
%=====
% БЕКТОР a
%=====
adiag(1) = 0;
adiag(N) = 0;
for i = 2 : N-1
    adiag(i) = tau*sigma/(alCf^2*r(i)*h^2) .* ...
        ((1+(mu0/muInf-1) .* ...
            (1 + l1 .* ((sOld(i,j+1) - sOld(i-1,j+1)) ./ (h)).^aa).^...
            ((nc-1)./aa) ) .* (r(i)-h/2)));
end
%adiag
%=====
% БЕКТОР b
%=====
bdiag(1) = 1;
bdiag(N) = 1;
for i = 2 : N-1
    bdiag(i) = -1 - tau*sigma/(alCf^2*r(i)*h^2) * ...
        (((1+(mu0/muInf-1) .* (1 + l1 .* ...
            ((sOld(i,j+1) - sOld(i-1,j+1)) ./ (h)).^aa).^((nc-1)./aa) ) .* ...
            (r(i)-h/2))) + ...
        (((1+(mu0/muInf-1) .* ...
            (1 + l1 .* ((sOld(i+1,j+1) - sOld(i,j+1)) ./ (h)).^aa).^...
            ((nc-1)./aa) ) .* (r(i)+h/2))));
end
%=====

```

```

% BEKTOP c
%=====
cdiag(1) = -1;
cdiag(N) = 0;
for i = 2 : N-1
cdiag(i) = tau*sigma/(alCf^2*r(i)*h^2) .* ...
((1+(mu0/muInf-1) .* (1 + l1 .* ...
((sOld(i+1,j+1) - sOld(i,j+1)) ./ (h)).^aa).^...
((nc-1)./aa) ) .* (r(i)+h/2));
end
%=====
% BEKTOP d
%=====
ddiag(1) = -h^2*R^2./(4 .* (0.5 * ...
((1 + (mu0/muInf-1) .* (1 + l1 .* ...
((sOld(2,j+1) - sOld(1,j+1)) ./ (h)).^aa).^...
((nc-1)./aa)) + ...
(1 + (mu0/muInf-1) .* ...
(1 + l1 .* ((sOld(3,j+1) - sOld(2,j+1)) ./ (h)).^aa).^...
((nc-1)./aa)))) .* (BCf/(alCf^2)) .* ff(j);
ddiag(N) = 0;
for i = 2 : N-1
ddiag(i) = -tau*(1-sigma)/(alCf^2*r(i)*h^2) .* ...
(r(i)-h/2) .* (1+(mu0/muInf-1) .* ...
(1 + l1 .* ((sOld(i,j) - sOld(i-1,j)) ./ h).^aa).^...
((nc-1)./aa) ) .* sOld(i-1,j) + ...
(tau*(1-sigma)/(alCf^2*r(i)*h^2) .* ...
((r(i)-h/2) .* (1+(mu0/muInf-1) .* ...
(1 + l1 .* ((sOld(i,j) - sOld(i-1,j)) ./ h).^aa).^...
((nc-1)./aa) ) + ...
(r(i)+h/2) .* ...
(1+(mu0/muInf-1) .* ...
(1 + l1 .* ((sOld(i+1,j) - sOld(i,j)) ./ h).^aa).^...
((nc-1)./aa) )) - 1) .* sOld(i,j) - ...
tau*(1-sigma)/(alCf^2*r(i)*h^2) .* ...
(r(i)+h/2) .* (1+(mu0/muInf-1) .* ...
(1 + l1 .* ((sOld(i+1,j) - sOld(i,j)) ./ h).^aa).^...
((nc-1)./aa) ) .* sOld(i+1,j) + ...

```



```

        tau*BCf/(alCf^2) .* ff(j);
    end
    %=====
    % ФОРМИРАНЕ НА МАТРИЦАТА НА СИСТЕМАТА
    %=====
    for i0 = 1 : N
        for j0 = 1 : N
            if(i0==j0)
                A(i0,j0) = bdiag(i0);
            end
        end
    end
    for i0 = 1 : N
        for j0 = 1 : N
            if(i0==j0+1)
                A(i0,j0) = adiag(i0);
            end
        end
    end
    for i0 = 1 : N
        for j0 = 1 : N
            if(j0==i0+1)
                A(i0,j0) = cdiag(i0);
            end
        end
    end
    %=====
    % РЕШАВАНЕ ПО МЕТОДА НА ПРОГОНКАТА
    %=====
    sNew(:,j+1) = Progon(A,ddiag);
    end
    s = s+1;
    end
    %=====
    % ИЗХОД И ОЦЕНКА НА РЕШЕНИЕТО
    %=====
    sol = sNew;
    %=====

```

```

% ПРЕСМЯТАНЕ НА ДЕБИТА
%=====
debit = zeros(1,M);
for j = 1 : M
    debit(j) = -pi * h * (r(1)*sol(1,j) + 2 * ...
sum(r(2:N-1) .* sol(2:N-1,j)') + ...
    r(end)*sol(end,j));
    %plot(r,sol(:,j),'b')
    %pause
end
% this formula is from the end of page 558
% approximation of the pressure gradient
QQ=3.56*sin(t + (71+13/60)*pi/180)+ ...
2.71*sin(2*t-(49+1/6)*pi/180)-...
1.20*sin (3*t+ (50+ 33/60)*pi/180)...
-0.28*sin (4*t-(20+17/60)*pi/180)+...
0.22*sin (5*t+ (99+28/60)*pi/180)-...
0.13*sin (6*t+(5+47/60)*pi/180);
figure(3)
plot(t,1.5^2*debit,'b','LineWidth',3)
hold on
plot(t,QQ,'g--','LineWidth',3)
set(gca,'Fontname','Times','FontSize',13)
str1 = ['\it{Comparison between the debit from the', ...
' Newtonian model given by Womersley, 1955,', ...
' and the debit evaluated by the Carreau model}'];
str2 = ['\it{Debit from the Newtonian model', ...
' given by Womersley, 1955}'];
str3 = ['\it{Debit from the Carreau model}'];
title(str1)
legend(str2,str3)
grid on
figure(4)
mesh(t,r,-sol)
colormap winter
colorbar
set(gca,'Fontname','Times','FontSize',13)
xlabel('\it{t}')

```

```

ylabel('\it{r}')
xlabel('\it{y}')
```

$$\text{errDebit} = \text{abs}(1.5^2 * \text{debit} - QQ)';$$

```

display('Максимална разлика между двата дебита: ')
[maxerr,nmax]=max(errDebit)
toc
```

Литература

- [1] Димова, Стефка. Черногорова, Татяна. Йотова, Ангелина. *Числени методи за диференциални уравнения*. София, изд. „Св. Климент Охридски“, 2012, стр. 5
<http://www.fmi.uni-sofia.bg/econtent/chmdu>
- [2] Йорданов, Йордан Тончев. *Matlab — преобразувания, изчисления, визуализация*. София, изд. „Техника“, 2008, стр. 79 — 81
- [3] Каданов, Д. Балан, М. Станишев, Д. *Анатомия на човека*. София, изд. „Медицина и физкултура“, 1964, стр. 7 — 11
- [4] Табакова, С. Радев, Ст. *Механика на флуидите*, стр. 48 — 51, стр. 182 — 183, ТУ — София, 2011
- [5] Черногорова, Татяна. *Теория на диференчните схеми*, стр. 7 — 10, стр. 57 — 58, стр. 133 — 135. София, 2005
<http://www.fmi.uni-sofia.bg/econtent/tds.pdf>
- [6] Helps, E. P. W., McDonald, D. A. *Systolic backflow in the dog femoral artery*, The Journal of Physiology, vol. 122, p. 73. 1953
- [7] Michor, F. *Strategic treatment interruptions during Imatinib treatment of chronic myelogenous leukemia*, 2005
http://digitalcommons.calpoly.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1073&context=math_fac
- [8] Murray, J. D. *Mathematical biology: an introduction*, 2001, p. 72, p. 79, p. 175
- [9] Myers, T. *Application of non-Newtonian models to thin film flow*, p. 1. Cape Town, 2005
- [10] Tabakova, S. Nikolova, E. Radev, St. *Carreau model for oscillatory blood flow in a tube*, AIP conference proceedings, vol. 1629, p. 336 — 343. Sofia, 2014
- [11] Womersley, J. R. *Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known*, The Journal of Physiology, vol. 127, p. 558 — 561. London, 1955

[12] <https://en.wikipedia.org/?title=MATLAB>

[13] <http://www.mathworks.com/help/matlab/ref/bvp4c.html>