Взаимно положение на две равнини. Ъгъл между две равнини

Л. Йовков

НПМГ „Акад. Л. Чакалов“

05. 04. 2020

Взаимно положение на две равнини. Ъгъл между две равнини

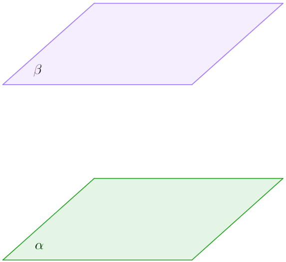
Да започнем с изследването на взаимните положения на две равнини в пространството.

I. УСПОРЕДНИ РАВНИНИ

Дефиниция 1

Две равнини, които нямат общи точки, се наричат успоредни.

На фигура 1 са представени равнините α и β, които са успоредни. Пишем $\alpha \parallel \beta$. Очевидно е, че всяка права от едната равнина е успоредна на другата равнина.



Фигура 1: Успоредни равнини

Взаимно положение на две равнини. Ъгъл между две равнини

Ще формулираме без доказателство следния критерий за успоредност на две равнини.

Теорема 1

Ако две пресичащи се прави от една равнина са успоредни на две пресичащи се прави от друга равнина, то двете равнини са успоредни.

Съдържанието на този критерий не е случайно и е свързано с една от основните аксиоми на стереометрията, според която всеки две пресичащи се прави задават единствена равнина.

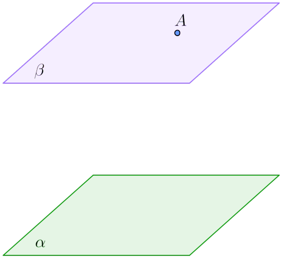
Взаимно положение на две равнини. Ъгъл между две равнини

Освен това са в сила и средващите две теореми.

Теорема 2

През точка, нележаща на дадена равнина, съществува единствена равнина, успоредна на дадената.

На фигура 2 през точката A, нележаща в равнината α, минава единствена равнина β, успоредна на дадената.



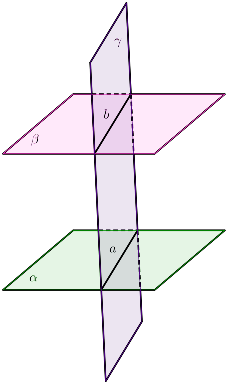
Фигура 2: Равнина през точка, успоредна на дадена равнина

Теорема 3

Пресечниците на равнина с две успоредни равнини са успоредни прави.

На фигура 3 равнините α и β са успоредни. Пресечниците на равнината γ с α и β са съответно правите a и b. Тогава $a \parallel b$ или записано символично:

$$\alpha \parallel \beta,$$
$$\gamma \cap \alpha = a, \gamma \cap \beta = b$$
$$\Rightarrow a \parallel b.$$

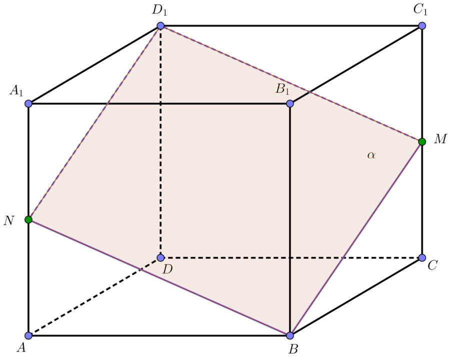


Фигура 3: Пресечници на успоредни равнини с трета равнина

Взаимно положение на две равнини. Ъгъл между две равнини

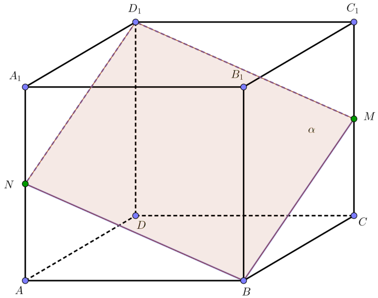
Пример 1

Точката M е средата на ръба CC_1 на куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Нека $\alpha = (BMD_1)$.
а) Да се намери пресечницата на равнините α и (ABB_1A_1).
б) Ако $N = \alpha \cap AA_1$, да се намери отношението $AN : AA_1$.



Решение 1

1. $AB \parallel CD$, $BB_1 \parallel CC_1 \Rightarrow$ по теорема 1 получаваме $(ABB_1A_1) \parallel (DCC_1D_1)$
2. Нека $\alpha \cap (ABB_1A_1) = BN$. Тогава по теорема 3 имаме $BN \parallel MD_1$.
3. Аналогично $BM \parallel D_1N$.
4. BMD_1N — успоредник $\Rightarrow BM = D_1N$
5. $\Delta BCM \simeq \Delta D_1A_1N$ по 4 пр. $\Rightarrow A_1N = CM = \frac{1}{2}CC_1$ $\Rightarrow AN : AA_1 = 1 : 2$ $\square$



Взаимно положение на две равнини. Ъгъл между две равнини

Пример 2

Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Намерете пресечницата на равнината, минаваща през средите на ръбовете AB, BC и A_1D_1, с равнината $A_1B_1C_1D_1$.

Решение 2

Решението извършете самостоятелно.

Пример 3

Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажете, че равнините (ACB_1) и (A_1C_1D) са успоредни.

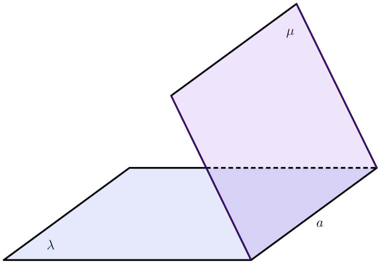
Решение 3

Решението извършете самостоятелно.

Дефиниция 2

Фигурата, образувана от права и две полуравнини с контур тази права, се нарича двустенен ъгъл.

На фигура 4 равнините λ и μ се пресичат по правата a и образуват двустенен ъгъл. Правата a се нарича ръб на двустенния ъгъл, а самите равнини — стени на двустенния ъгъл. Бележим със $\measuredangle(\lambda; \mu)$.



Фигура 4: Двустенен ъгъл

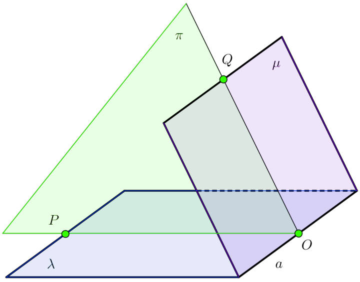
Взаимно положение на две равнини. Ъгъл между две равнини

На фигура 5 през точка O от ръба на двустенния ъгъл сме построили равнина $\pi \perp a$. Ясно е, че през O няма друга равнина с това свойство.

Дефиниция 3

Ъгълът, който се получава при пресичането на двустенния ъгъл с равнина, перпендикулярна на ръба му, се нарича линеен ъгъл на двустенния ъгъл.

Ъгълът POQ е линеен ъгъл на двустенния $\measuredangle(\lambda; \mu)$.



Фигура 5: Линеен ъгъл на двустенен ъгъл

Взаимно положение на две равнини. Ъгъл между две равнини

Забележка 1

При пресичането на ръба на двустенния ъгъл с равнини, перпендикулярни на този ръб, получаваме ъгли с взаимноуспоредни рамене. Те очевидно имат една и съща мярка. Следователно всичките линейни ъгли на даден двустенен ъгъл са равни.

Забележка 2

В практиката обикновено за построяване на двустенен ъгъл се използва разгледаната и доказана вече теорема за трите перпендикуляра от темата „Ортогонално проектиране. Ъгъл между права и равнина“.

Взаимно положение на две равнини. Ъгъл между две равнини

Въвеждаме още и следната

Дефиниция 4

Мярка на двустенен ъгъл се нарича мярката на кой да е негов линеен ъгъл.

Дефиниция 5

Два двустенни ъгъла се наричат равни, ако са равни линейните им ъгли.

Дефиниция 6

Ъгъл между две равнини се нарича по-малкият от двустенните ъгли, образувани от равнините.

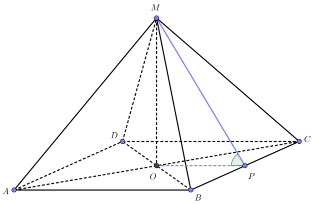
Взаимно положение на две равнини. Ъгъл между две равнини

Пример 4

Дадена е правилна четириъгълна пирамида $ABCDM$ с основен ръб 2 и околен ръб $\sqrt{5}$. Да се намери двустенният ъгъл между околна стена и основата.

Решение 4

Нека MO е височината на пирамидата. Понеже околните ръбове са равни, то и проекциите им върху основата са равни: $OA = OB = OC = OD$. Тогава точка O е центърът на квадрата $ABCD$.

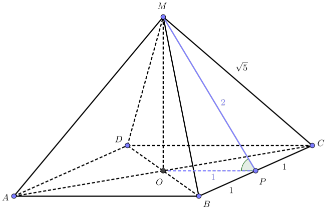


Построяваме $MP \perp BC$. Понеже $\delta_{\perp}(MP) = OP$, то по теоремата за трите перпендикуляра $OP \perp BC$. Така $BC \perp (OMP)$ и

$$\measuredangle[(ABCD); (BCM)] = \measuredangle OPM.$$

От ΔCPM с Питагорова теорема пресмятаме $MP = 2$. Сега от ΔOPM имаме

$$\cos \measuredangle OPM = \frac{OP}{PM} = \frac{1}{2} \Rightarrow \measuredangle OPM = 60^{\circ}. \square$$

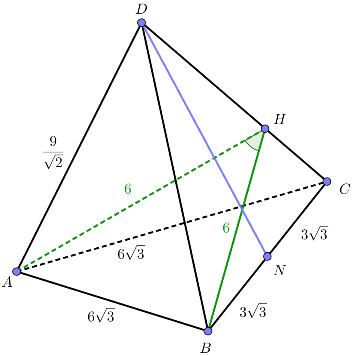


Пример 5

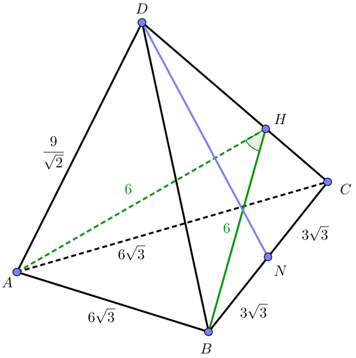
В правилна триъгълна пирамида $ABCD$ основните ръбове имат дължина $6\sqrt{3}$, а околните — $\frac{9}{\sqrt{2}}$. Намерете мярката на двустенния ъгъл между две съседни околни стени.

Решение 5

Понеже $\Delta BCD \simeq \Delta ACD$ с обща страна CD, то петите на височините през върховете A и B към CD ще съвпадат.



1. Построяваме $BH \perp CD$, тогава и $AH \perp CD$, значи $CD \perp (ABH)$ и $\measuredangle[(BCD); (ACD)] = \measuredangle AHB$.
2. Нека $DN \perp BC$. От ΔBND пресмятаме $\sin \measuredangle NBD = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
3. От ΔBCH имаме $\sin \measuredangle BCH = \dfrac{BH}{BC}$, откъдето $\dfrac{BH}{6\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow BH = 6$.
4. Сега от равнобедрения ΔABH по косинусова теорема получаваме $\cos \measuredangle AHB = -\dfrac{1}{2}$, т. е. $\measuredangle AHB = 120^\circ$. □



II. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИ РАВНИНИ

Двустенен ъгъл, за който линейният му ъгъл има мярка $90°$, се нарича прав двустенен ъгъл.

Дефиниция 7

Две равнини, които сключват прав двустенен ъгъл, се наричат перпендикулярни.

В сила е

Теорема 4

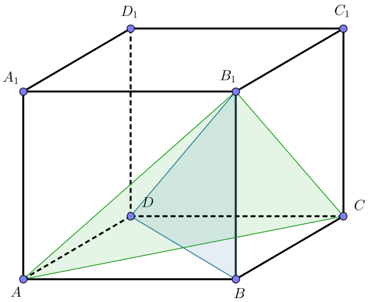
Ако една равнина минава през права, перпендикулярна на друга равнина, то двете равнини са перпендикулярни.

Пример 6

Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Да се докаже, че равнините (ACB_1) и (BDB_1) са перпендикулярни.

Решение 6

Понеже $BB_1 \perp (ABCD)$, то $AC \perp BB_1$. Освен това $AC \perp BD$. Следователно $AC \perp (BDB_1)$. Но $AC \in (ACB_1)$, откъдето по теорема 4 имаме $(ACB_1) \perp (BDB_1)$. $\square$



Задачи за самостоятелна работа

Задача 1

Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Определете ъгъла между равнините (ABC_1) и (ABC).

Задача 2

В правилната четириъгълна пирамида $ABCDV$ с връх V всички ръбове са равни. Намерете косинуса на ъгъла между равнините (ABC) и (BCV).

Задача 3

В правилна триъгълна пирамида $ABCDV$ основните ръбове имат дължина $2\sqrt{3}$, а околните — $\sqrt{7}$. Намерете двустенния ъгъл при основен ръб на пирамидата.

Задачи за самостоятелна работа

Задача 4

В правилна четириъгълна пирамида $ABCDV$ околните стени сключват с основата ъгъл с мярка 45°. Намерете основния ръб на пирамидата, ако височината ѝ е 5.

Задача 5

В правилна четириъгълна пирамида $ABCDV$ основните ръбове са равни на 6, а околните — на $3\sqrt{3}$. Намерете мярката на двустенния ъгъл между околните стени.

Задача 6

Основата на триъгълна пирамида $ABCD$ е равностранен ΔABC и околният ръб DC е перпендикулярен на основата. Ако $AB = CD$, намерете тангенса на двустенния ъгъл при ръба AB.

Задачи за самостоятелна работа

Задача 7

Основата на триъгълна пирамида $ABCD$ е равнобедрен ΔABC, като $AB = 6$ и $AC = BC = 5$. Ако $AV = 4,8$ и $AV \perp (ABC)$, намерете мярката на двустенния ъгъл при ръба BC.

Задача 8

Основните ръбове на правилна шестоъгълна пирамида са равни на 6. Околните ръбове на пирамидата са равни на 7. Намерете синуса на половината от двустенния ъгъл между две съседни околни стени.

Задача 9

Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Намерете косинуса на ъгъла между равнината $(ABCD)$ и равнината, минаваща през върха A и средите на ръбовете DD_1 и C_1D_1.

Задача 10

В правоъгълния паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 1$ и $BC = CC_1 = 2$. Точка N е среда на CC_1, а точка M — на A_1D_1. Намерете косинуса на ъгъла между равнините (ABC) и (B_1NM).

Задача 11

Основата на пирамида е квадрат със страна a. Околният ръб $AV \perp (ABCD)$ и има дължина $a\sqrt{3}$. Намерете косинуса на двустенния ъгъл при ръба CV.

Задача 12

Основата на пирамидата $ABCDV$ е правоъгълен трапец с основи $AB = 4$ и $CD = 1$. По-голямото бедро на трапеца е $BC = 5$, а околният ръб $AV \perp (ABC)$, като $BV = 8$. Намерете мярката на ъгъла между равнините (ABV) и (DCV).

Задачи за самостоятелна работа

Задача 13

В правилна триъгълна пирамида ъгълът между околен ръб и основа е α. Двустенният ъгъл при основен ръб е β. Докажете, че $2\tan\alpha = \tan\beta$.

Задача 14

Равнината на ромба $ABCD$ и равнината на правоъгълния трапец $DCEF$ ($DC \parallel EF$, $DC > EF$) са перпендикулярни. Да се намери отношението на периметъра на ромба към радиуса на вписаната в него окръжност, ако $\cos\measuredangle BCE = \dfrac{DF}{CE} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Задача 15

Равнината на квадрата $ABCD$ със страна a и равнината на равнобедрения ΔBCM с $\measuredangle MBC = 120^\circ$ са перпендикулярни. Да се намери лицето на ΔADM.

Задача 16

Основата на права призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е равнобедреният трапец $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). Диагоналът на трапеца има дължина $3\sqrt{3}$ и е ъглополовяща на ъгъла при основата, който е равен на $60°$. Да се намери ъгълът между равнината на основата и равнината на сечението, което минава през ръба AB и върха D_1, ако $DD_1 = \frac{3}{2}AD$.

Задача 17

Дадени са ΔABC и равнина α. Разстоянията от върховете A, B и C до α са $AA_1 = 2$, $BB_1 = 1$ и $CC_1 = 2,5$. Дължините на ортогоналните проекции на AB и на височината CD към нея са равни на $\sqrt{3}$. Да се определи ъгълът, заключен между равнината на ΔABC и равнината α, ако разстоянието от точка D до пробода на AB с равнината α е 3.