Права призма

Л. В. Йовков

НПМГ „Акад. Л. Чакалов“

Абстракт

В тази тема ще бъде разгледан първият от важните многостени, срещащи се практиката — призмата. Ще бъдат посочени основните елементи на призмите, както и съответните формули за повърхнина и обем. Върху конкретни съдържателни примери ще бъдат изложени методи за решаване на някои по-трудни задачи от призми.

Аксиоматичното изграждане на стереометрията и постановката на въпросите за взаимно положение на точки, прави и равнини в пространството ни водят до първия основен клас стереометрични обекти — **многостените**.

Дефиниция 1 *Тяло в пространството, заградено от краен брой многоъгълници, се нарича многостен.*

Всеки от многоъгълниците представлява **стена** на многостена. Страните на многоъгълниците са **ръбове** на многостена, а върховете им — **върхове** на многостена. Всяка отсечка, която свързва два върха на многостена и не лежи в негова стена, се нарича **(телесен) диагонал**. Към основните характеристики на многостените причисляваме още и важните понятия **повърхнина** и **обем**, които засега ще приемем на интуитивно ниво.

Най-простите многостенни обекти са призмите.

Дефиниция 2 *Тяло в пространството, за което две от стените са еднакви многоъгълници, лежащи в успоредни равнини, а останалите стени са успоредници, се нарича* ***призма****.*

Двата многоъгълника са **основи** на призмата, а успоредниците — **околни стени**. Страните на основите са **основни ръбове** на призмата. Отсечките, които свързват два срещуположни върха от основите, се наричат **околни ръбове**.

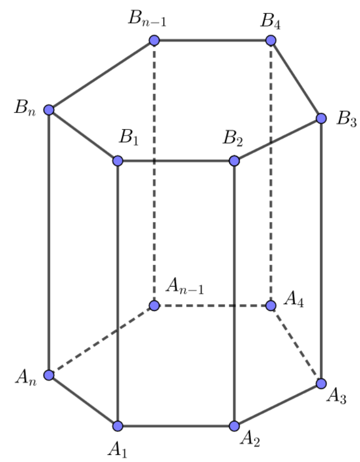
Дефиниция 3 *Призма, за която околните ръбове са перпендикулярни на основите, се нарича* ***права призма****.*

Дефиниция 4 *Права призма, за която основите са правилни n-ъгълници, се нарича* ***правилна n-ъгълна призма****.*

Дефиниция 5 *Призма, чиито основи са успоредници, се нарича* ***паралелепипед****.*

На фигура 1 е показана права призма с основи еднаквите n-ъгълници $A_1A_2...A_{n-1}A_n$ и $B_1B_2...B_{n-1}B_n$. Да посочим основните ѝ елементи, използвайки дефинициите:

- A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 и B_1B_2, B_2B_3, ..., $B_{n-1}B_n$, B_nB_1 — основни ръбове;
- A_1B_1, A_2B_2, ..., $A_{n-1}B_{n-1}$, A_nB_n — околни ръбове;
- A_1B_3, A_1B_4, ..., A_1B_{n-1} и т. н. — диагонали на призмата;
- $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ — околни стени.



Фигура 1: Права призма

Сборът от лицата на всичките околни стени представлява **околната повърхнина** S на призмата. Ако към околната повърхнина прибавим и лицата на основите, получаваме **пълната повърхнина** S_1 на призмата.

Нека да означим околния ръб на призмата от фигура 1 с h, а лицата на основите — с B. Понеже околните стени са правоъгълници, имаме:

$$S = h \cdot A_1A_2 + h \cdot A_2A_3 + \cdots + h \cdot A_nA_1 = h\Big(A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_nA_1\Big) = P_{A_1A_2...A_{n-1}A_n}h.$$

Така получаваме, че околната повърхнина на всяка права призма се пресмята по формулата

$$S = P_{\text{осн.}}h, \tag{1}$$

където $P_{\text{осн.}}$ е периметърът на основата. Съобразяваме веднага, че за пълната повърхнина на права призма е в сила формулата

$$S_1 = P_{\text{осн.}}.h + 2B. \tag{2}$$

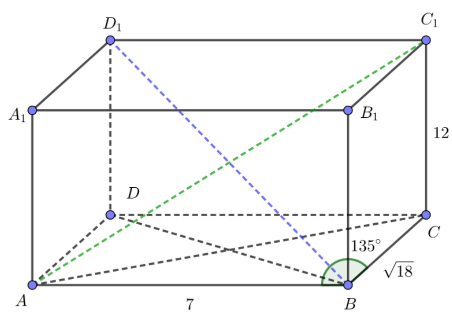
С принципа на Кавалиери [1] може да се докаже следната формула за обем на призма:

$$V = Bh, \tag{3}$$

валидна както за права, така и за наклонена призма. Във втория случай ще приемаме, че с h е означено разстоянието между успоредните равнини на основите.

Пример 1 *(зад. 20.2, стр. 90, „Сборник по математика за 10 клас“, изд. „Коала прес“, Пенка Рангелова. Пловдив, 2019)* Основните ръбове на прав паралелепипед са $\sqrt{18}$ и 7, а ъгълът между тях е $135°$. Намерете диагоналите на паралелепипеда, ако околният ръб е 12.

Решение.
Нека $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е даденият паралелепипед, за който $AB = 7$, $BC = \sqrt{18}$ и $\measuredangle ABC = 135°$ (вж. фигура 2). Да приложим косинусова теорема за страната AC в ΔABC. Намираме $AC = \sqrt{109}$. Съвършено аналогично от ΔABD с $\measuredangle BAD = 45°$ получаваме $BD = 5$. Сега, понеже паралелепипедът е прав, то околните му ръбове са перпендикулярни на равнините на основите. Тогава от $AC \in (ABCD)$ и $CC_1 \perp (ABCD)$ установяваме, че $CC_1 \perp AC$. Така ΔACC_1 е правоъгълен. По Питагорова теорема пресмятаме, че $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$, т. е. $AC_1 = \sqrt{253}$. Накрая от правоъгълния по същата причина ΔBDD_1 пресмятаме и другия диагонал на паралелепипеда: $BD_1 = 13$. $\square$



Фигура 2

Пример 2 *(зад. 20.5, стр. 91, „Сборник по математика за 10 клас“, изд. „Коала прес“, Пенка Рангелова. Пловдив, 2019)* Дадена е правилна

[1] С този принцип можете да се запознаете например чрез страницата: `https://mathbitsnotebook.com/Geometry/3DShapes/3DCavalieri.html`.

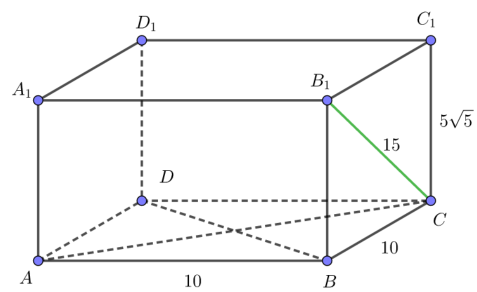
четириъгълна призма с основен ръб 10 и диагонал в околна стена 15. Да се намери лицето на околната повърхнина на призмата.

Решение. Да следваме означенията на фигура 3. Понеже призмата е правилна, то околните ѝ ръбове са перпендикулярни на основите. Тогава $\measuredangle CBB_1 = 90^\circ$ и чрез Питагорова теорема в ΔBB_1C изчисляваме дължината на околния ръб:

$$BB_1 = 5\sqrt{5}.$$

Сега по формула (1) веднага намираме

$$S = 200\sqrt{5}. \ \square$$



Фигура 3

Пример 3 *(зад. 20.6, стр. 91, „Сборник по математика за 10 клас“, изд. „Коала прес“, Пенка Рангелова. Пловдив, 2019)* Лицето на околната повърхнина на правилна четириъгълна призма е 32, а лицето на пълната ѝ повърхнина е 40. Намерете височината на призмата.

Решението на този пример извършете самостоятелно!

Пример 4 *(зад. 20.9, стр. 91, „Сборник по математика за 10 клас“, изд. „Коала прес“, Пенка Рангелова. Пловдив, 2019)* Основните ръбове на права триъгълна призма са равни на 10, 17 и 21, а височината ѝ е равна на 18. Да се намерят:
а) лицето на пълната повърхнина на призмата;
б) обемът на призмата.

Решението на този пример извършете самостоятелно!

Пример 5 *(зад. 20.12, стр. 91, „Сборник по математика за 10 клас“, изд. „Коала прес“, Пенка Рангелова. Пловдив, 2019)* Основата на права призма $ABCA_1B_1C_1$ е ΔABC, за който $AB = AC$ и $\measuredangle ABC = \alpha$. Точката D е среда на ръба AA_1, $\measuredangle DCA = \beta$ и $CD = b$. Намерете лицето на околната повърхнина на призмата.

Решение.
Да разгледаме чертежа, представен на фигура 4. Както в предишните примери, установяваме, че ΔACD е правоъгълен. С помощта на тригонометрични зависимости получаваме

$$AC = AB = b\cos\beta, \;\; AD = b\sin\beta.$$

Следователно дължината на околния ръб е $AA_1 = 2b\sin\beta$.

По-нататък: от равнобедрения ΔABC с остър ъгъл α по синусова теорема имаме

$$\frac{BC}{\sin\measuredangle BAC} = \frac{AC}{\sin\measuredangle ABC} \Rightarrow$$

$$\frac{BC}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{b\cos\beta}{\sin\alpha} \Rightarrow$$

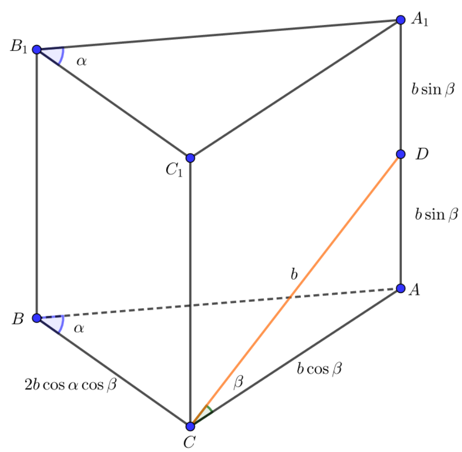
$$BC = \frac{b\cos\beta\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = 2b\cos\alpha\cos\beta.$$

Сега по формула (1) следва, че

$$S = P_{\Delta ABC}\cdot BB_1 = (2AC + BC)\cdot BB_1,$$

откъдето след заместване на конкретните стойности окончателно получаваме

$$S = 4b^2\sin\beta\cos\beta(1+\cos\alpha). \;\; \square$$



Фигура 4

Пример 6 *(зад. 20.19, стр. 92, „Сборник по математика за 10 клас“, изд. „Коала прес“, Пенка Рангелова. Пловдив, 2019)* Основата на прав паралелепипед е ромб със страна a и остър ъгъл 60°. По-малкият диагонал на паралелепипеда определя с една от околните стени ъгъл, равен на 30°. Да се намерят:
а) диагоналите на паралелепипеда;
б) двустенният ъгъл между равнината на основата и равнината, определена от два неравни диагонала на паралелепипеда.

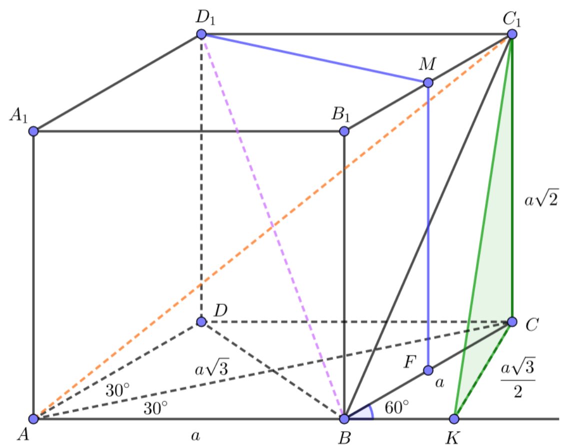
Решение, а). Нека $\measuredangle BAD = 60^\circ$ (вж. фигура 5). Тогава $BD < AC$ и от теоремата за връзката между дължините на наклонените към дадена равнина и на техните ортогонални проекции върху тази равнина получаваме $BD_1 < AC_1$.

Ще построим ъгъла между диагонала BD_1 и околната стена (BCC_1B_1). За целта в началото да установим мястото на ортогоналната проекция на точка D_1 в равнината (BCC_1B_1). Построяваме

$$D_1M \perp B_1C_1. \tag{4}$$

Понеже $\measuredangle B_1C_1D_1 = 60^\circ$, то $\Delta B_1C_1D_1$ е равностранен, следователно точка M е вътрешна за отсечката B_1C_1 и е нейна среда. Пренасяме отсечката CC_1 успоредно в т. M до отсечката MF, $F \in BC$. Тъй като по условие паралелепипедът е прав, то околните ръбове са перпендикулярни на равнините на основите. Тогава очевидно $MF \perp (A_1B_1C_1D_1)$. Но $D_1M \in (A_1B_1C_1D_1)$

$$\Rightarrow MF \perp D_1M. \tag{5}$$



Фигура 5

Сега от (4) и (5) получаваме, че отсечката D_1M е перпендикулярна на две пресичащи се прави от равнината (BCC_1B_1), т. е. е перпендикулярна на тази равнина. По този начин установяваме, че ортогоналната проекция на D_1 в равнината (BCC_1B_1) е средата на B_1C_1. Следователно

$$\measuredangle\big[BD_1;\,(BCC_1B_1)\big] = \measuredangle(BD_1;\,BM) = \measuredangle D_1BM = 30^\circ.$$

От ΔC_1D_1M лесно пресмятаме $D_1M = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, а от правоъгълния ΔBD_1M с ъгъл 30° имаме $BD_1 = a\sqrt{3}$.

Диагоналът BD в основата $ABCD$ е с дължина $BD = a$. Чрез прилагане на Питагорова теорема в правоъгълния триъгълник BDD_1 намираме и дължината на околния ръб: $DD_1 = a\sqrt{2}$. От ΔABC с $\measuredangle ABC = 120^\circ$ по косинусова теорема получаваме $AC = a\sqrt{3}$, а от правоъгълния ΔACC_1 — $AC_1 = a\sqrt{5}$.

И така, диагоналите на паралелепипеда имат дължини $AC_1 = a\sqrt{5}$, $BD_1 = a\sqrt{3}$.

б) Ясно е, че равнината (ABC_1D_1) съдържа два неравни диагонала на паралелепипеда. Ще построим линеен ъгъл на двустенния ъгъл между тази равнина и долната основа на паралелепипеда. Нека $CK \perp AB$.

Тъй като $\measuredangle ABC = 120^\circ$, точката K е външна за отсечката AB. По теоремата за трите перпендикуляра $C_1K \perp AB$. Следователно правата BK е перпендикулярна на равнината (CC_1K) и значи $\measuredangle CKC_1$ е линеен ъгъл на двустенния ъгъл между равнините $(ABCD)$ и (ABC_1D_1).

От правоъгълния ΔBCK с помощта на тригонометрични зависимости веднага изчисляваме $CK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Накрая от ΔCC_1K имаме

$$\tan \measuredangle CKC_1 = \frac{CC_1}{CK} = \frac{4}{\sqrt{6}} \Rightarrow \measuredangle CKC_1 \approx 58,5^\circ. \ \Box$$

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА

Задача 1 Намерете лицето на диагоналното сечение на куб с ръб 5.
Отг. $25\sqrt{2}$

Задача 2 Основата на прав паралелепипед е ромб със страна 4 и остър ъгъл 45°. Намерете обема на паралелепипеда, ако височината му е 8.
Отг. $64\sqrt{2}$

Задача 3 Основните ръбове на правилна четириъгълна призма имат дължина 5, а телесният ѝ диагонал — $13\sqrt{2}$. Намерете обема на призмата.
Отг. $300\sqrt{2}$

Задача 4 Основата на права призма е равнобедрен трапец с основи 9 и 1. В трапеца може да се впише окръжност и нейният радиус е равен на височината на призмата. Намерете обема и лицето на повърхнината на призмата.
Отг. $V = 22,5$, $S_1 = 60$

Задача 5 Основата на правилна шестоъгълна призма има страна 4, а височината на призмата е равна на полупериметъра на основата. Намерете обема и лицето на повърхнината на призмата.
Отг. $V = 288\sqrt{3}$, $S_1 = 48(6+\sqrt{3})$

Задача 6 Всички ръбове на прав паралелепипед имат дължина 2. Два основни ръба сключват помежду си ъгъл с мярка 60°. Намерете обема на паралелепипеда.
Отг. $4\sqrt{3}$

Задача 7 Равностранен ΔABC със страна 1 служи за основа на правилна триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$. Намерете дължината на ръба AA_1 на призмата, ако правата BC_1 сключва ъгъл с големина 45° с равнината (ABA_1B_1).
Отг. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Задача 8 Лицата на околните стени на права триъгълна призма са 26, 28 и 30, а лицето на основата ѝ е 84. Намерете обема на призмата.
Отг. 168

Задача 9 Основата на права призма е правоъгълен триъгълник с височина 12 и хипотенуза 25. Намерете обема и лицето на околната повърхнина на призмата, ако височината ѝ е равна на по-големия катет на основата.
Отг. $V = 3000$, $S = 1200$

Задача 10 Основата на права триъгълна призма е правоъгълен триъгълник. Катетите, хипотенузата на основата и височината на призмата, взети в този ред, образуват растяща аритметична прогресия. Намерете обема на призмата, ако лицето на повърхнината ѝ е 84.
Отг. 36

Задача 11 Основата на права призма е триъгълник с ъгъл 120°, чиито страни образуват аритметична прогресия. Обемът и околната повърхнина на призмата са равни на 45 и $60\sqrt{3}$. Намерете височината ѝ.
Отг. $4\sqrt{3}$

Задача 12 Основата на права призма е триъгълник, един от ъглите на който е 120°, а дължините на заключващите го страни се отнасят както 7:8. Ако лицето на най-голямата околна стена на призмата е 156, намерете лицето на околната повърхнина на призмата.
Отг. 336

Задача 13 Основата на права призма е равнобедрен трапец с основи 4 и 14 и диагонал 15. Две от околните стени на призмата са квадрати. Намерете лицето на пълната повърхнина на призмата.
Отг. 788

Задача 14 Страните на основата на правоъгълен паралелепипед са a и b. Диагонал на паралелепипеда сключва с основата ъгъл α. Намерете лицето на околната повърхнина на паралелепипеда.
Отг. $2(a+b)\tan\alpha\sqrt{a^2+b^2}$

Задача 15 Лицето на околна стена на правилна шестоъгълна призма е Q. Намерете лицето на диагоналното сечение на призмата, което минава през малък диагонал на основата.
Отг. $Q\sqrt{3}$

Задача 16 Диагоналите на прав паралелепипед са 9 и $\sqrt{33}$. Периметърът на основата му е 18, а околният ръб — 4. Намерете лицето на пълната повърхнина и обема на паралелепипеда.
Отг. $S_1 = 200$, $V = 64$

Задача 17 Основата на права призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е равнобедрен трапец $ABCD$ с основи $AB = 10$, $CD = 4$ и височина 4. Ъгълът между равнините (ADB_1) и (ABC) е $45°$. Намерете обема на призмата.
Отг. 224

Литература

[1] **Г. Кожухарова, И. Марашева, П. Недевски, Ю. Цветков.** *„Сборник по математика за 10. клас“*. Издателство „Анубис“. София, 2019

[2] **К. Коларов, Хр. Лесов.** *„Сборник от задачи по геометрия VII – XII клас“*. Издателство „Интеграл“. Добрич, 2007

[3] **П. Рангелова.** *„Сборник по математика за X клас“*. Издателство „Коала прес“. Пловдив, 2019

[4] **Ч. Лозанов, Т. Витанов, П. Недевски, Евг. Стоименова.** *„Математика за 12. клас — профилирана подготовка“*. Издателство „Анубис“. София, 2002