Намиране на елементи на равнобедрен трапец, правоъгълен трапец и успоредник

Л. В. Йовков

НПМГ „Акад. Л. Чакалов“

Абстракт

Приложението на метричните зависимости не се ограничава само до намиране на неизвестни елементи на триъгълници. В практиката то успешно се прилага за решаване и на многоъгълници, най-често четириъгълници. Тук ние ще се спрем на въпросите за търсене на елементи в равнобедрен трапец, правоъгълен трапец и успоредник.

Алгоритъмът за намиране на неизвестни елементи на трапец и успоредник следва етапите, които въведохме при решаването на равнобедрен триъгълник.

1. ***В дадения четириъгълник осигуряваме съществуването на правоъгълен триъгълник. Това обикновено се постига чрез построяване на съответни височини.***

2. ***Избираме едно или повече фиктивни неизвестни в зависимост от естеството на задачата.***

3. ***С помощта на метричните зависимости изразяваме стойностите на търсените елементи (отсечки, лица, периметри и т. н.) чрез стойностите на дадените в условието елементи.***

4. ***Съставяме алгебрична система с толкова уравнения, колкото фиктивни неизвестни сме въвели.***

5. ***Решаваме системата уравнения за допустимите стойности на фиктивните неизвестни.***

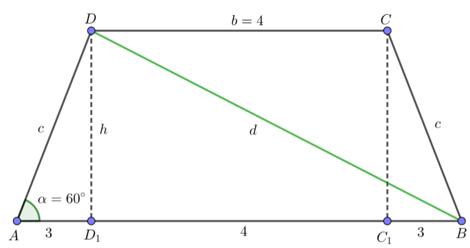
6. ***Пресмятаме конкретните стойности на търсените елементи чрез намерените стойности на фиктивните неизвестни.***

Да разгледаме някои илюстративни примери. Изложението ще групираме около вида на съответния четириъгълник. Фундаменталната идея ще бъде нагледно да покажем някои типични случаи, срещащи се в практиката.

1 Намиране на неизвестни елементи на равнобедрен трапец

Пример 1 ([2], стр. 125, зад. 32.1, а)) За равнобедрен трапец $ABCD$ са въведени означенията: $AB = a$, $DC = b$, $AD = BC = c$, $BD = d$, височина — h, лице — S, и ъгъл при голямата основа — α. Намерете всички останали елементи, ако $a = 10$, $b = 4$ и $\alpha = 60°$.

Решение. Да построим височините CC_1 и DD_1 (вж. фигура 1). С просто око се вижда, че $CD = C_1D_1 = 4$ и $AD_1 = BC_1 = \dfrac{a-b}{2} = 3$. От ΔADD_1 имаме, че $\measuredangle ADD_1 = 30°$, тогава $c = 2AD_1 \Rightarrow c = 6$. В същия триъгълник прилагаме Питагорова теорема и пресмятаме



Фигура 1:

$$h = \sqrt{c^2 - 9} = 3\sqrt{3}.$$

Отново чрез Питагорома теорема, но в ΔBDD_1 установяваме, че

$$d = \sqrt{h^2 + 7^2} = 2\sqrt{19}.$$

Накрая по формулата за лице на трапец намираме $S = 21\sqrt{3}$. □

Пример 2 ([2], стр. 99, зад. 25.3) Даден е равнобедрен трапец $ABCD$ с основи $AB = 6$, $CD = 4$ и бедро $AD = 5$. Намерете дължината на диагонала на трапеца.

Решение. Ще използваме означенията от фигура 1. От правоъгълния ΔADD_1 имаме $DD_1 = \sqrt{24}$. Дължината на неизвестния диагонал BD пресмятаме от ΔBDD_1 с помощта на Питагорова теорема:

$$BD^2 = BD_1^2 + DD_1^2 \Rightarrow BD^2 = 24 + (1+4)^2 = 49 \Rightarrow BD = 7. \ \square$$

Пример 3 ([2], стр. 100, зад. 25.6) Лицето на равнобедрен трапец е 200, а основите му са 40 и 10. Намерете височината и бедрото на трапеца.

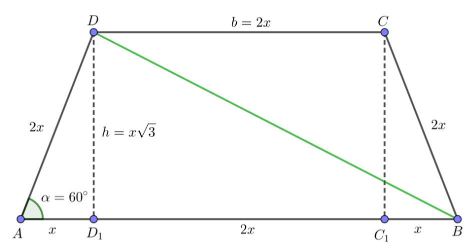
Решение. Да използваме отново чертежа, изобразен на фигура 1. Първо изразяваме дължината на височината h от формулата за лице на трапец: $h = \dfrac{2S}{a+b}$. След това заместваме с числените стойности и получаваме $h = 8$. Тъй като $AD_1 = BC_1 = \dfrac{a-b}{2} = 15$, то от ΔADD_1 имаме:

$$AD^2 = AD_1^2 + DD_1^2 = 8^2 + 15^2 = 289 = 17^2 \Rightarrow AD = 17.$$

Тук непосредствено установихме, че наредената тройка числа (8; 15; 17) е Питагорова тройка числа. $\square$

Пример 4 ([1], стр. 253, зад. 2) Даден е равнобедрен трапец с лице $96\sqrt{3}$ и ъгъл при голямата основа 60°. Да се намери периметърът на трапеца, ако малката му основа е равна на бедрото му.

Решение. Нека CC_1 и DD_1 са височините на трапеца съответно през върховете C и D. Да означим $AD = DC = CB = 2x$. Понеже $\measuredangle A = 60^\circ$, то $\measuredangle ADD_1 = 30^\circ$ и следователно $AD_1 = BC_1 = x$ (вж. фигура 2). Веднага пресмятаме $DD_1 = x\sqrt{3}$. По условие $S_{ABCD} = 96\sqrt{3}$. Последователно получаваме:



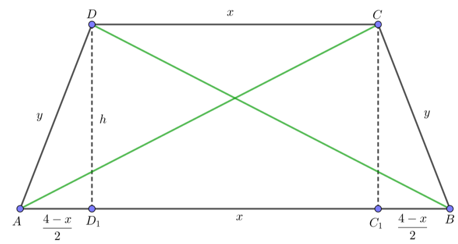
Фигура 2:

$$\frac{a+b}{2}h = S \Rightarrow \frac{4x+2x}{2} \cdot x\sqrt{3} = 96\sqrt{3} \Rightarrow 3x^2\sqrt{3} = 96\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow 3x^2 = 96 \Rightarrow x^2 = 32 = 16.2 \Rightarrow x = 4\sqrt{2}.$$

Накрая периметърът на трапеца е $P_{ABCD} = 10x = 40\sqrt{2}$. $\square$

Пример 5 ([1], стр. 255, зад. 6) В равнобедрения трапец $ABCD$ диагоналът AC е перпендикулярен на бедрото BC. Намерете дължината на малката основа CD и лицето на трапеца, ако е известно, че $AB = 4$ и $AD^2 + DC^2 = 11$.

Решение. Въвеждаме означенията $CD = x$ и $AD = y$, където $x > 0$, $y > 0$. Построяваме както обикновено височините CC_1 и DD_1 на трапеца. По свойствата на равнобедрения трапец имаме $AD_1 = BC_1 = \dfrac{4-x}{2}$ (вж. фигура 3). По условие е изпълнено равенството $AD^2 + DC^2 = 11$, което води до връзката



Фигура 3:

$$x^2 + y^2 = 11. \tag{1}$$

От друга страна, ΔADB е правоъгълен и отсечката DD_1 е височина към хипотенузата му AB. Използвайки метричните зависимости между дължините на катет, на неговата проекция и на хипотенузата, получаваме $AD^2 = AD_1.AB$. Последното равенство може да бъде записано още като

$$y^2 = \frac{4-x}{2} \cdot 4 \Leftrightarrow y^2 = 2(4-x). \tag{2}$$

Сега от (1) и (2) достигаме до системата уравнения

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 11 \\ y^2 = 2(4-x), \;\; 0 < x < 4. \end{array} \right.$$

Решаваме я със заместване и получаваме единственото допустимо решение $(x;\, y) = (3;\, \sqrt{2})$. Така малката основа на трапеца има дължина $CD = x = 3$.

Имаме още $AD_1 = \dfrac{1}{2}$ и чрез прилагане на Питагорова теорема в ΔADD_1 намираме дължината на височината на трапеца: $h = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$. Следователно лицето на трапеца е $S = \dfrac{4+x}{2} \cdot h = \dfrac{7\sqrt{7}}{4}$. $\square$

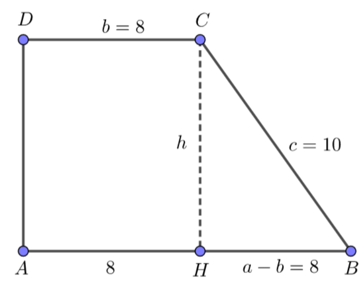
2 Намиране на неизвестни елементи на правоъгълен трапец

Пример 6 ([1], стр. 255, зад. 1) Даден е правоъгълен трапец $ABCD$ с основи $a = 16$ и $b = 8$ и наклонено бедро $c = 10$. Да се намерят периметърът и лицето на трапеца.

Решение. Нека AD е бедрото на правоъгълния трапец, което е перпендикулярно на основите, а $h = CH$ е височината през върха C (вж. фигура 4). Очевидно $CD = AH = b = 8$ и $HB = a - b = 8$. Понеже наредената тройка (6; 8; 10) е Питагорова тройка числа, то имаме $CH = AD = 6$. Оттук периметърът на трапеца е

$$P_{ABCD} = a+b+c+h = 16+8+10+6 = 40,$$

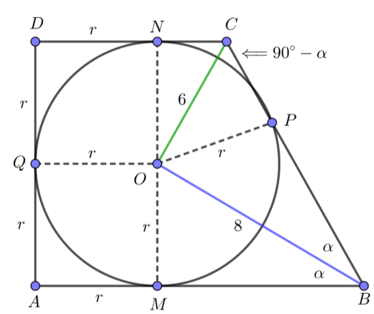
а лицето — $S_{ABCD} = \dfrac{16+8}{2} \cdot 6 = 72.$ □



Фигура 4:

Пример 7 ([1], стр. 257, зад. 6) В правоъгълен трапец $ABCD$ ($AB \perp AB$) е вписана окръжност $k(O)$. Намерете лицето на трапеца, ако $CO = 6$ и $BO = 8$.

Решение. Да означим с M, P, N и Q допирните точки на вписаната окръжност съответно със страните AB, BC, CD и AD на правоъгълния трапец; с r — радиуса на окръжността, и с 2α — мярката на острия $\measuredangle B$ (вж. фигура 5). Щом O е центърът на вписаната окръжност, то отсечката BO е ъглополовяща и $\measuredangle PBO = \alpha$. Понеже $\measuredangle B + \measuredangle C = 180^\circ$, за мярката на тъпия $\measuredangle C$ имаме $\measuredangle C = 180^\circ - 2\alpha$. Но отсечката CO също е ъглополовяща, следователно $\measuredangle PCO = 90^\circ - \alpha$. Така установяваме, че



Фигура 5:

$$\measuredangle PBO + \measuredangle PCO = 90^\circ \Rightarrow \measuredangle BOC = 90^\circ.$$

Оттук получаваме, че ΔBOC е правоъгълен и отсечката $OP = r$ е височина към хипотенузата му BC. С метрични зависимости веднага пресмятаме $BC = 10$, $BP = 6,4$, $CP = 3,6$ и $OP = 4,8$.

Лицето изчисляваме по формулата $S = pr$:

$$S = (BC + AD)r = (10 + 9,6) \cdot 4,8 = 19,6 \cdot 4,8 = 94,08. \ \square$$

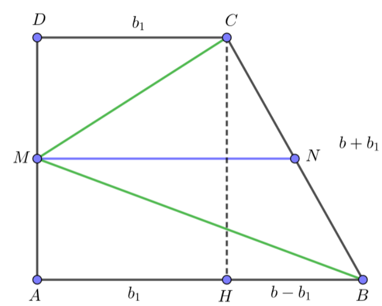
Пример 8 ([2], стр. 101, зад. 25.22) В правоъгълен трапец $ABCD$ с основи AB и CD и бедро AD, перпендикулярно на основите, е известно, че $AB = b$, $CD = b_1$ и $BC = b + b_1$.

а) Намерете лицето на трапеца.

б) Ако M е среда на AD, докажете, че ΔBMC е правоъгълен.

Решение, а). Нека CH ($H \in AB$) е височината на трапеца (вж. фигура 6). Четириъгълникът $AHCD$ е правоъгълник и $AH = CD = b_1$. Тогава имаме $BH = b - b_1$. Прилагаме Питагорова теорема в ΔBHC и след кратки преобразувания получаваме $CH = 2\sqrt{bb_1}$. За лицето на трапеца веднага намираме

$$S = \frac{b + b_1}{2} \cdot 2\sqrt{bb_1} = (b + b_1)\sqrt{bb_1}.$$



Фигура 6:

б) Да построим средната основа MN на трапеца. Тя има дължина $MN = \dfrac{b + b_1}{2}$. От друга страна, отсечката MN е медиана в ΔBCM и е равна на половината от страната, към която е спусната: $MN = \dfrac{BC}{2}$. Това ни дава пълно основание да твърдим, че ъгълът срещу страната BC в този триъгълник е прав. $\square$

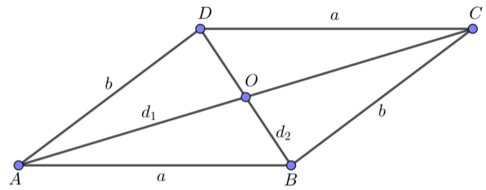
3 Намиране на неизвестни елементи на успоредник

С помощта на Питагорова теорема или с косинусова теорема, която предстои да разгледаме догодина, може да се докаже следната фундаментална теорема, валидна за **всеки** успоредник.

Теорема 1 *В успоредник сборът от квадратите на диагоналите му е равен на сбора от квадратите на страните му.*

На фигура 7 успоредникът $ABCD$ е със страни $AB = CD = a$, $BC = AD = b$ и диагонали $AC = d_1$, $BD = d_2$. Тогава математическият запис на теорема 1 изглежда така:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2). \qquad (3)$$



Фигура 7:

Като следствие от тази теорема можем да получим известната формула за дължина на медиана в триъгълник. Наистина, да разгледаме ΔABD. Понеже диагоналите в успоредник взаимно се разполовяват, то отсечката $AO = \dfrac{1}{2}d_1$ е медиана към страната BD. Да получим от формулата (4) израз за AO. Имаме последователно:

$$d_1^2 = 2(a^2 + b^2) - d_2^2 \Rightarrow \frac{d_1^2}{4} = \frac{1}{4}\left[2(a^2 + b^2) - d_2^2\right] \Rightarrow$$

$$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[2(a^2 + b^2) - d_2^2\right] \Rightarrow \frac{d_1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - d_2^2}.$$

И така, достигаме до явната формула

$$AO = \frac{1}{2}\sqrt{2(AB^2 + AD^2) - BD^2}, \qquad (4)$$

която представлява и желаното представяне на дължината на медианата AO чрез дължините на страните на ΔABD. Ще отбележим, че (4) е вярна за **всеки** триъгълник.

Пример 9 ([1], стр. 259, зад. 2) Даден е успоредник $ABCD$. Намерете страната:
а) AD, ако $AB = 3\sqrt{5}$, $AC = 5\sqrt{5}$, $BD = 8$;
б) AB, ако $AD = 6$, $AC = 6\sqrt{2}$, $BD = 4\sqrt{3}$.

Решение, а). Ще използваме чертежа от фигура 7 при следните числови данни: $a = 3\sqrt{5}$, $d_1 = 5\sqrt{5}$, $d_2 = 8$. По формула (3) получаваме:

$$(5\sqrt{5})^2 + 8^2 = 2\left[(3\sqrt{5})^2 + b^2\right] \Rightarrow 125 + 64 = 2(45 + b^2) \Rightarrow$$
$$90 + 2b^2 = 289 \Rightarrow 2b^2 = 199 \Rightarrow b = \sqrt{\frac{199}{2}}.$$

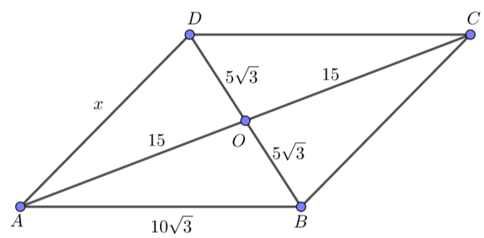
б) Тук ситуацията се поставя аналогично, с тази разлика че търсим дължината на отсечката a при входни данни $b = 6$, $d_1 = 6\sqrt{2}$ и $d_2 = 4\sqrt{3}$. Прилагаме отново формула (3) и имаме

$$(6\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{3})^2 = 2\left(a^2 + 6^2\right) \Rightarrow 72 + 48 = 2a^2 + 72 \Rightarrow$$
$$2a^2 = 48 \Rightarrow a^2 = 24 = 6.4 \Rightarrow a = 2\sqrt{6}. \ \square$$

Пример 10 ([1], стр. 260, зад. 5) Намерете лицето на успоредник със страна $AB = 10\sqrt{3}$ и диагонали $BD = 10\sqrt{3}$, $AC = 30$.

Решение. Да означим неизвестната страна AD на успоредника с x. Прилагаме формулата (3) и получаваме алгебрично уравнение за неизвестното x:

$$(10\sqrt{3})^2 + 30^2 = 2\left[(10\sqrt{3})^2 + x^2\right],$$
$$300 + 900 = 2(300 + x^2),$$
$$600 = 300 + x^2,$$
$$x = 10\sqrt{3}.$$



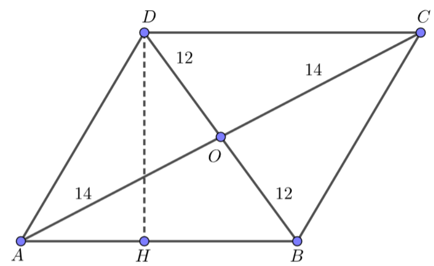
Фигура 8:

Оттук заключаваме, че $AB = BD = AD = 10\sqrt{3}$, т. е. ΔABD е равностранен. Лицето на този триъгълник пресмятаме по известната вече формула $S = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{2}$ (вж. пример 1 от темата „Решаване на равнобедрен триъгълинк“). Намираме $S_{\Delta ABD} = \dfrac{150\sqrt{3}}{2}$. Така лицето на успоредника е $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABD} = 150\sqrt{3}$. $\square$

Забележка. Доказването, че даденият успоредник е ромб, може да се извърши и чрез обратната Питагорова теорема за ΔABO. Тъй като $5\sqrt{3} < 15 < 10\sqrt{3}$ и $(5\sqrt{3})^2 + 15^2 = (10\sqrt{3})^2$, то разглежданият триъгълник е правоъгълен с прав ъгъл при върха O. Следователно успоредникът $ABCD$ има перпендикулярни диагонали, т. е. е ромб.

Пример 11 ([1], стр. 262, зад. 6) Диагоналите на ромб са 28 и 24. Намерете обиколката и височината на ромба.

Решение. Нека $ABCD$ е даденият ромб с диагонали $AC = 28$ и $BD = 24$, $AC \cap BD = O$ (вж. фигура 9). Чрез прилагане на Питагорова теорема в правоъгълния ΔABO пресмятаме дължината на страната на ромба: $AB = 2\sqrt{85}$. За периметъра на ромба веднага получаваме $P_{ABCD} = 4AB = 8\sqrt{85}$.



Фигура 9:

Да построим височината DH ($H \in AB$) на ромба. Нейната дължина ще изведем чрез познати формули за лице. Имаме:

$$S_{\Delta ABD} = \frac{BD.AO}{2} = \frac{AB.DH}{2} \Rightarrow DH = \frac{BD.AO}{AB}.$$

След заместване с числените стойности намираме $DH = \dfrac{168}{\sqrt{85}}$. $\square$

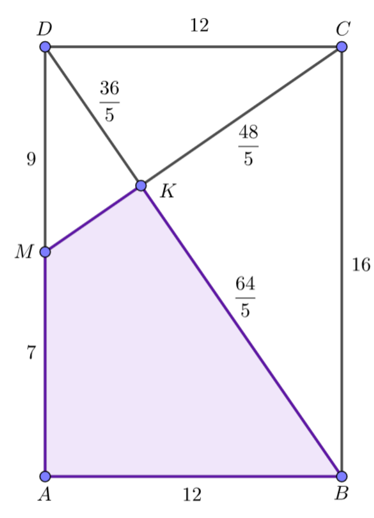
Пример 12 ([1], стр. 262, зад. 10) Страните AB и BC на правоъгълник $ABCD$ са съответно 12 и 16. От върха C е построен перпендикуляр към BD, който пресича страната AD и диагонала BD съответно в точките M и K. Намерете лицето на четириъгълника $ABKM$.

Решение. Тъй като ΔBCD е правоъгълен, веднага пресмятаме с Питагорова теорема дължината на хипотенузата му: $BD = 20$. От метричните зависимости за същия триъгълник имаме:

$$DK = \frac{CD^2}{BD} = \frac{12^2}{20} = \frac{36}{5},$$
$$BK = \frac{BC^2}{BD} = \frac{16^2}{20} = \frac{64}{5}.$$

Освен това е изпълнено равенството $CK^2 = BK.CK$. Заместваме с конкретните числени стойности и получаваме $CK = \dfrac{48}{5}$.

Лесно се вижда, че $\Delta MDK \sim \Delta CBK$. Написвайки пропорциите, пресмятаме $MD = 9$.



Фигура 10:

Тъй като лицето е адитивна функция (**addition** — *сбор*; лице от сума е сума от лица), е в сила представянето

$$S_{ABCD} = S_{ABKM} + S_{\Delta BCK} + S_{\Delta CDM}.$$

Оттук получаваме едно линейно уравнение относно неизвестното лице S_{ABKM}:

$$\begin{aligned}
&12 \cdot 16 = S_{ABKM} + \frac{(48/5) \cdot (64/5)}{2} + \frac{12 \cdot 9}{2},\\
&192 = S_{ABKM} + \frac{1536}{25} + 54,\ S_{ABKM} = 138 - \frac{1536}{25},\\
&S_{ABKM} = 138 - 61,44 \Rightarrow S_{ABKM} = 76,56.\ \square
\end{aligned}$$

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА

Задача 1 ([1], стр. 255, зад. 2) Около окръжност с радиус $r = 2$ е описан равнобедрен трапец с бедро 5. Намерете дължините на основите и лицето на трапеца.

Отг. 8; 2; 20

Задача 2 ([1], стр. 255, зад. 3) Равнобедрен трапец с височина 39 и основи 40 и 14 е вписан в окръжност. Намерете бедрото на трапеца и радиуса на окръжността, ако центърът ѝ е вътрешна точка за трапеца.

Отг. $13\sqrt{10}$; 25

Задача 3 ([1], стр. 255, зад. 7) Ъглите при голямата основа на трапец са по 60°, отношението на основите на трапеца е $5 : 3$, а дължината на отсечката, свързваща пресечната точка на диагоналите и пресечната точка на продълженията на бедрата, е $\dfrac{15\sqrt{3}}{8}$. Намерете лицето на трапеца.

Отг. $4\sqrt{3}$

Задача 4 ([1], стр. 255, зад. 8) Даден е равнобедрен трапец с диагонал 25 и лице 300. Намерете дължината на височината и средната основа на трапеца.

Отг. 15; 20

Задача 5 ([2], стр. 100, зад. 25.8) В равнобедрен трапец с основи 16 и 9 е вписана окръжност. Намерете височината на трапеца.

Отг. 12

Задача 6 ([2], стр. 101, зад. 25.18) Диагоналът на равнобедрен трапец е ъглополовяща на тъпия му ъгъл. Малката основа на трапеца е 3, а периметърът му е 42. Намерете лицето на трапеца.

Отг. 96

Задача 7 ([2], стр. 101, зад. 25.20) Даден е равнобедрен трапец с голяма основа $2a$, височина $\dfrac{3a}{2}$ и остър ъгъл 60°. Намерете лицето на трапеца.

Отг. $\dfrac{3a^2}{4}(4-\sqrt{3})$

Задача 8 ([1], стр. 257, зад. 1) Даден е правоъгълен трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$), в който $AD \perp AB$, $AD = 6$ и $AC = BC = 10$. Намерете дължините на основите на трапеца.

Отг. 16; 8

Задача 9 ([1], стр. 257, зад. 2) Даден е правоъгълен трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$), в който $AD \perp AB$, $\measuredangle DCB = 135^\circ$ и $BC = 8\sqrt{2}$. Намерете дължините на основите, ако сумата им е 16.

Отг. 12; 4

Задача 10 ([1], стр. 257, зад. 4) Даден е правоъгълен трапец $ABCD$, ($AB \parallel CD$), в който $\measuredangle DCB = 150^\circ$ и $BC = 10\sqrt{3}$. Намерете лицето на трапеца, ако малката му основа е 3.

Отг. $45\sqrt{3}$

Задача 11 ([1], стр. 257, зад. 5) В правоъгълен трапец $ABCD$, ($AB \parallel CD$, $AD \perp AB$) е вписана окръжност с радиус 8. Намерете периметъра на трапеца, ако $AB - CD = 12$.

Отг. 72

Задача 12 ([1], стр. 257, зад. 8) Правоъгълен трапец $ABCD$ има височина $AD = 12$ и основи $CD = 5$, $AB = 13$. Намерете радиуса на описаната около ΔABC окръжност.

Отг. $\dfrac{13\sqrt{13}}{6}$

Задача 13 ([1], стр. 257, зад. 9) Трапец има диагонали 10 и 24 и средна основа 13. Намерете лицето на трапеца.

Отг. 120

Задача 14 ([2], стр. 101, зад. 25.21) Един от диагоналите на правоъгълен трапец го разделя на два триъгълника, единият от които е равностранен. Намерете отношението на дължините на диагоналите на трапеца.

Отг. $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

Задача 15 ([2], стр. 101, зад. 25.23) В равнобедрен трапец $ABCD$ диагоналът AC е перпендикулярен на бедрото BC. Намерете дължината на малката основа CD, ако $AB = 4$ и $AD^2 + DC^2 = 11$.

Задача 16 ([1], стр. 259, зад. 3, а)) Намерете медианите на ΔABC, ако $AB = 8$, $BC = 10$, $AC = 12$.

Отг. $\sqrt{79}$, $\sqrt{46}$, $\sqrt{106}$

Задача 17 ([1], стр. 260, зад. 4) Определете вида на успоредник $ABCD$ със страна $AB = 13$ и диагонали $AC = 10$, $BD = 24$.

Задача 18 ([1], стр. 260, зад. 5) Намерете лицето на успоредник със страна $AB = 10\sqrt{3}$ и диагонали $BD = 10\sqrt{3}$, $AC = 30$.

Отг. $150\sqrt{3}$

Задача 19 ([1], стр. 260, зад. 7) Даден е успоредник $ABCD$ със страни $AD = 5$ и $AB = 13$ и диагонал $AC = 2\sqrt{61}$. Намерете мярката на $\measuredangle ADB$.

Отг. 90°

Задача 20 ([1], стр. 262, зад. 5) Страната на ромб е 20, а единият му диагонал е 24. Намерете другия диагонал и лицето на ромба.

Отг. 32; 384

Задача 21 ([1], стр. 262, зад. 8) Височината на ромб е $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$ и е $\dfrac{2}{3}$ от големия диагонал. Намерете лицето на ромба.

Отг. $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

Задача 22 ([2], стр. 104, зад. 26.20) Височината $DP\,(P \in AB)$ на ромба $ABCD\,(\measuredangle A < 90^\circ)$ разделя страната AB на части $AP = 9$ и $PB = 6$. Намерете диагоналите на ромба.

Отг. $6\sqrt{5}$; $12\sqrt{5}$

Задача 23 ([1], стр. 104, зад. 26.21) За правоъгълника $ABCD$ от върховете A и C са спуснати перпендикулярите AP и CQ към диагонала $BD\,(P \in BD,\, Q \in BD)$. Ако $DP = PQ = QB$ и $AC = 42$, то намерете страните на правоъгълника.

Отг. $14\sqrt{3}$; $14\sqrt{6}$

Литература

[1] **И. Тонов, Ир. Шаркова, М. Христова, Д. Капралова, В. Златилов.** *„Математика за 9. клас“*. Издателство „Регалия 6“. София, 2018

[2] **П. Рангелова** *„Сборник по математика за 9. клас“*. Издателство „Коала прес“. Пловдив, 2018