Ъгъл между две прави в пространството

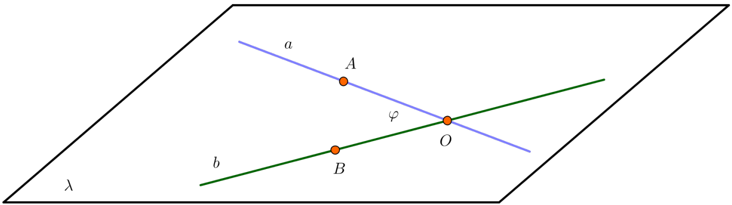
Л. Йовков

НПМГ „Акад. Л. Чакалов“

26. 03. 2020

Нека λ е дадена равнина. Нека още a и b са две пресичащи се прави от тази равнина с обща точка O (вж. фигура 1). Знаем, че под ъгъл между пресичащите се прави a и b се разбира острият ъгъл между тях:

$$\measuredangle(a; b) = \varphi = \measuredangle AOB.$$



Фигура 1: Ъгъл между две прави в равнината

За равнинни ъгли е в сила следната

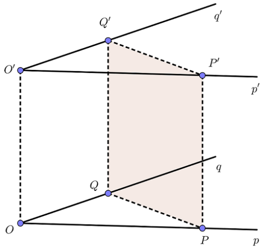
Теорема 1

Ако раменете на два ъгъла са еднопосочни лъчи, то тези ъгли имат една и съща мярка.

Ще докажем, че тази теорема е вярна и за ъгли в пространството (вж. фигура 2).

Доказателство 1

1. Нека $\measuredangle pOq$ и $\measuredangle p'O'q'$ са в различни равнини и нека раменете им са еднопосочни лъчи.
2. Нека $PP' \parallel OO'$. Тогава $OPP'Q'$ е успоредник и $PP' = OO'$, $OP = O'P'$.
3. Аналогично нека $QQ' \parallel OO'$, значи $OQQ'O'$ е успоредник и $QQ' = OO'$, $OQ = O'Q'$.
4. Следователно $PQQ'P'$ е успоредник $\Rightarrow PQ = P'Q'$.
5. Тогава $\Delta POQ \simeq \Delta P'O'Q'$ (3 пр.), откъдето $\measuredangle POQ = \measuredangle P'O'Q'$.



Фигура 2: Ъгли с взаимноуспоредни рамене

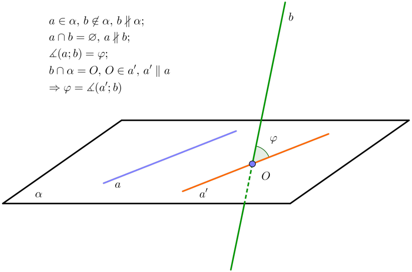
Ъгъл между две прави в пространството

Като използваме току-що доказаната теорема, можем да дадем следната дефиниция за ъгъл между две кръстосани прави.

Дефиниция 1

Ъгъл между две кръстосани прави е ъгълът между две пресичащи се прави, съответно успоредни на дадените кръстосани прави.

Геометричният смисъл е показан на фигура 3.



Фигура 3: Ъгъл между кръстосани прави в пространството

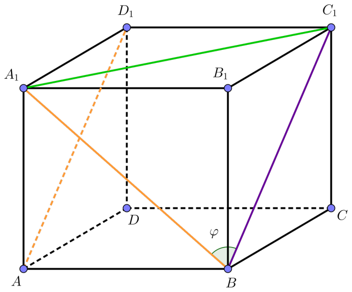
Забележка 1

Ако ъгълът между две кръстосани прави a и b е прав, те се наричат перпендикулярни. Пишем $a \perp b$. Освен това, ако $a \perp b$ и c е трета права в пространството, такава, че $c \parallel a$, то $c \perp b$.

Да разгледаме няколко примера.

Пример 1

Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Да се намери ъгълът между правите AD_1 и A_1B.



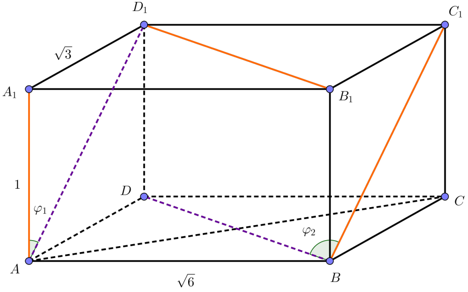
Решение 1

Правите AD_1 и A_1B са кръстосани, защото лежат в различни стени на куба. Понеже $AB \parallel C_1D_1$ и $AB = C_1D_1$, то фигурата ABC_1D_1 е успоредник $\Rightarrow AD_1 \parallel BC_1$. Тогава $\varphi = \measuredangle(AD_1; A_1B) = \measuredangle(BC_1; A_1B) = \measuredangle A_1BC_1$. Но $BA_1 = BC_1 = A_1C_1$ (диагонали в еднакви квадрати) $\Rightarrow \varphi = 60^\circ$.

Пример 2

Даден е правоъгълен паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ръбове $AA_1 = 1$, $AB = \sqrt{6}$ и $AD = \sqrt{3}$. Намерете ъглите между правите:

а) AA_1 и BC_1; б) B_1D_1 и BC_1.



Решение 2

Да означим търсените ъгли със $\varphi_1 = \measuredangle(AA_1;\, BC_1)$ и $\varphi_2 = \measuredangle(B_1D_1;\, BC_1)$.

а) Понеже четириъгълникът ABC_1D_1 е успоредник, то $BC_1 \parallel AD_1$. Тогава $\varphi_1 = \measuredangle(AA_1;\, AD_1) = \measuredangle A_1AD_1$. От ΔAA_1D_1 ($\measuredangle A_1 = 90^\circ$) пресмятаме $\tan\varphi_1 = \dfrac{A_1D_1}{AA_1} = \sqrt{3}$, следователно $\varphi_1 = 60^\circ$.

б) Ясно е, че $\varphi_2 = \measuredangle(BD;\, BC_1) = \measuredangle C_1BD$. От ΔCC_1D по Питагорова теорема намираме $C_1D = \sqrt{7}$. Аналогично получаваме $BC_1 = 2$ и $BD = 3$. Сега от косинусовата теорема за ΔBC_1D имаме $\cos\varphi_2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi_2 = 60^\circ$.

И така, получихме, че $\varphi_1 = \varphi_2 = 60^\circ$.

Задачи за самостоятелна работа

Задача 1

Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Намерете ъгъла между правите:

а) AA_1 и BC; б) AA_1 и DC;
в) AA_1 и BC_1; г) AB_1 и BC_1.

Задача 2

Основата $ABCD$ на четириъгълната пирамида $ABCDS$ е квадрат и $SA = SB = SC = SD = AB$. Намерете ъгъла между правите:

а) SD и AB; б) SD и BC.

Задачи за самостоятелна работа

Задача 3

Дадена е правилна триъгълна пирамида $ABCD$ с основа равностранния ΔABC със страна 2 и околен ръб $DA = \sqrt{2}$. Ако M е средата на ръба AB, намерете ъгъла между правите DM и BC.

Задача 4

Дадена е правилна четириъгълна пирамида $ABCDS$ с връх S, на която всичките ръбове са равни. Намерете ъгъла между правите AC и SD.
Упътване. През средата на отсечката AC постройте права, успоредна на DS.

Задачи за самостоятелна работа

Задача 5

Дадена е триъгълна пирамида $ABCD$, всички ръбове на която са равни на 12. Точка M е среда на ръба AB, а P — среда на BC. Върху ръба BD е взета точка N така, че $DN = 4$. Да се намери ъгълът (негова тригонометрична функция) между правите MN и AP.

Задача 6

Основата на триъгълна пирамида $ABCD$ е равностранният ΔABC със страна 2, а околният ръб DA има дължина $\sqrt{2}$ и е перпендикулярен на ръбовете AB и AC. Да се намери тангенсът на ъгъла между правата DA и правата, минаваща през средите на ръбовете DB и AC.

Задачи за самостоятелна работа

Задача 7

В правилната четириъгълна пирамида $ABCDV$ с връх V основните ръбове са равни на 2, а околните — на $2\sqrt{2}$. Намерете мярката на ъгъла между правите AV и DM, където точка M е средата на ръба CV.

Задача 8

Точките M и N са съответно среди на околните ръбове CC_1 и BB_1 на правилната четириъгълна призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Ако $AA_1 = 2AB$, докажете, че ъгълът между правите AN и BM е равен на $60°$.

Задачи за самостоятелна работа

Задача 9

Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка P е среда на ръба CD, а точка N е среда на ръба AD. Докажете, че $\cos\measuredangle(BN;\ C_1P) = 0,4$.

Задача 10

В правилна четириъгълна пирамида $ABCDV$ с връх V всички ръбове са равни. Точките M и N са среди съответно на ръбовете BC и CV. Докажете, че ъгълът между правите DM и BN е по-голям от $45°$ и по-малък от $60°$.
Упътване. Използвайте монотонността на функцията $\cos x$ в интервала $[0°;\ 90°]$.