Интерполационен полином на Лагранж. Приложения

Л. Йовков

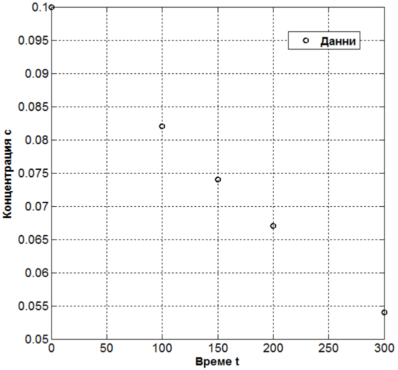
НПМГ „Акад. Л. Чакалов“

03. 12. 2019 г.

Пример 1. Изчисляване на концентрация c на вещество

t, $[s]$	c, $[mol/dm^3]$
0	0.100
100	0.082
150	0.074
200	0.067
300	0.054

Таблица: $c = c(t)$

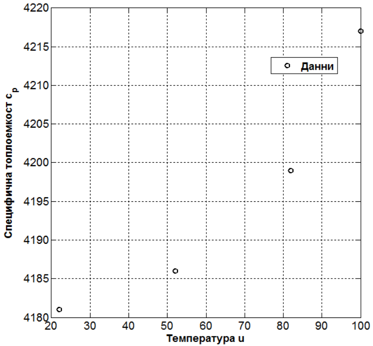


Каква е концентрацията на веществото в момента от време $t = 250$ s?

Пример 2. Изчисляване на специфичен топлинен капацитет c_p

u, $[^\circ C]$	c_p, $[J/(kg.^\circ C)]$
22	4181
52	4186
82	4199
100	4217

Таблица: $c_p = c_p(u)$

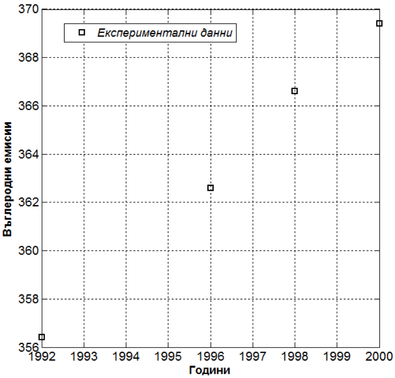


Каква е стойността на топлинния капацитет c_p при температура $u = 70^\circ C$?

Пример 3. Изчисляване на нивото на въглеродните емисии E в атмосферата

t, [год.]	E, [млн. т.]
1992	356.4
1996	362.6
1998	366.6
2000	369.4

Таблица: $E = E(t)$

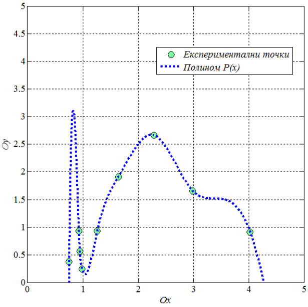


Каква са били ориентировъчните стойности на въглеродните емисии през 1993 и 1997 година?

Интерполационна задача на Лагранж

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	$\dots$	y_n

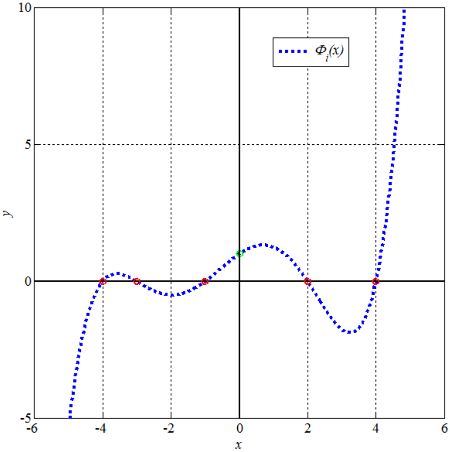
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad P(x) \in \pi_n :$$
$$P(x_i) = y_i$$



Интерполационна задача на Лагранж

- Базисни полиноми на Лагранж $\Phi_i(x) \in \pi_n$

$$\Phi_i(x_j) = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ 1, & j = i \end{cases}$$



Интерполационна задача на Лагранж

$$\Phi_i(x) = a_i(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n);$$

$$\Phi_i(x_i) = 1 \Rightarrow$$

$$a_i(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n) = 1 \Rightarrow$$

$$a_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)} \Rightarrow$$

$$\Phi_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}$$

Интерполационен полином на Лагранж $L_n(f;\, x)$

☐ Решение на класическата интерполационна задача

$$P_n(x) \equiv L_n(f;\, x) =$$
$$\sum_{i=0}^{n} y_i \Phi_i(x) = y_0 \Phi_0(x) + y_1 \Phi_1(x) + \cdots + y_n \Phi_n(x)$$

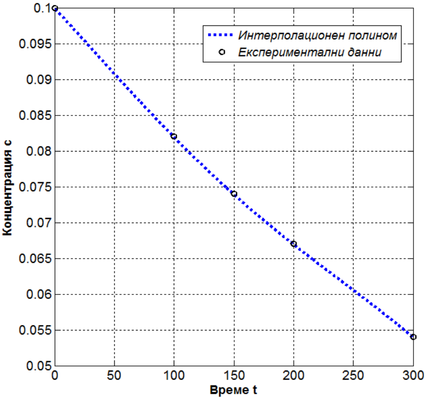
☐ Единственост на решението на класическата интерполационна задача

Интерполационни полиноми в реални задачи

□ Интерполационен полином за пример 1

$$c(t) \approx L_4(f;\ t) \approx -0,0001783t + 0,1;$$

$$t = 250\,s \Rightarrow c \approx 0,0606\,mol/dm^3$$

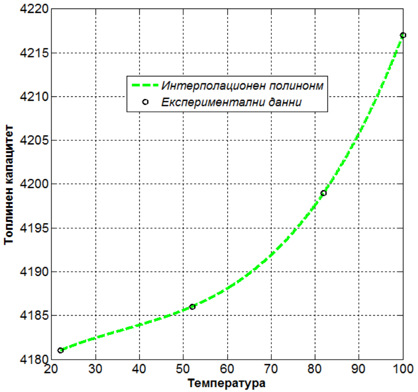


Интерполационни полиноми в реални задачи

- Интерполационен полином за пример 2

$$c_p(u) \approx L_3(f;\, u) \approx -0,01028u^2 + 0,5184u + 4174;$$

$$u = 70^\circ C \Rightarrow c_p \approx 4192\, J/(kg.^\circ C)$$



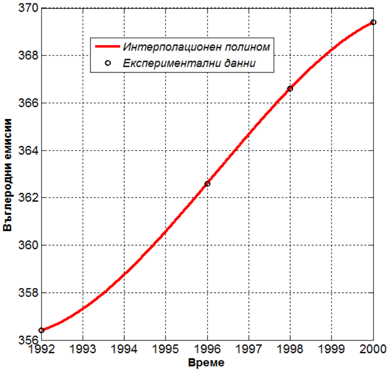
Интерполационни полиноми в реални задачи

☐ Интерполационен полином за пример 3

$$L_3(f;\ t) \approx -0,02813t^3 + 168,4t^2 - 3,362.10^5 t + 2,237.10^8;$$

$$t = 1993 \Rightarrow E(t) \approx 357,3030 \text{ млн. т.},$$

$$t = 1997 \Rightarrow E(t) \approx 364,6656 \text{ млн. т.}$$



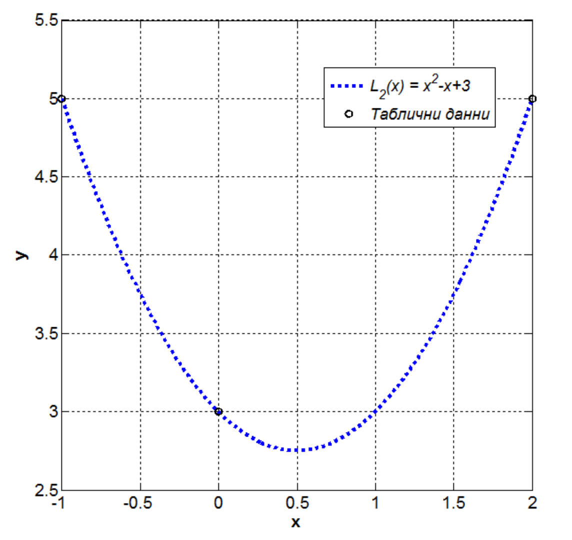
Задача

Да се намери интерполационният полином за функцията $f(x)$, зададена с таблицата:

x	-1	0	2
$f(x)$	5	3	5

Задачи за самостоятелна работа

Решение



Задача

Да се намери интерполационният полином за функцията $f(x)$, зададена с таблицата:

x	-1	0	1	2
$f(x)$	3	1	1	9

Задача

Да се намери интерполационният полином за функцията $f(x) = \log_{10} x$ в интервала $[0,25;\ 1,75]$, като се използват данните от таблицата:

x	$0,25$	$0,75$	$1,00$	$1,25$	$1,75$
$f(x)$	$-0,6021$	$-0,1249$	0	$0,0969$	$0,2430$

Графично да се оцени качеството на приближението. Да се извърши апроксимация на стойностите $\log_{10} 0,5$, $\log_{10} 1,1$ и $\log_{10} 1,5$.

Задачи за самостоятелна работа

Задача

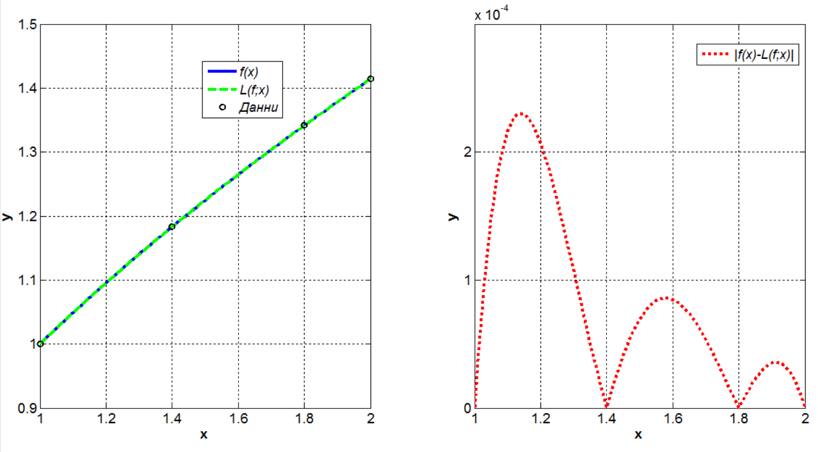
Да се построи интерполационният полином $L(f;\, x)$ за функцията $f(x) = \sqrt{x}$ по данните от таблицата

x	1.0	1.4	1.8	2.0
$f(x) = \sqrt{x}$	1.0	1.1832	1.3416	1.4142

Като се използва така построеният полином, да се пресметне приближено стойността на функцията в точките $x^* = 1,65$ и $x^{**} = 5,8$. Да се направи подходящ чертеж и да се оцени грешката. Какво е качеството на приближението?

Задачи за самостоятелна работа

Решение



$$L(f;\ x) = 0,0221x^3 - 0,1705x^2 + 0,7706x + 0,3777$$

Задачи за самостоятелна работа

Решение

□ $x^* = 1,65$

$$\max_{0\le x\le 2}\left|f(x) - L(f;\,x)\right| \le 2,2.10^{-4} \sim 10^{-4},$$

$$\sqrt{x^*} = \sqrt{1,65} \approx L(f;\,1,65) \approx 1,2846;$$

□ $x^{**} = 5,8$

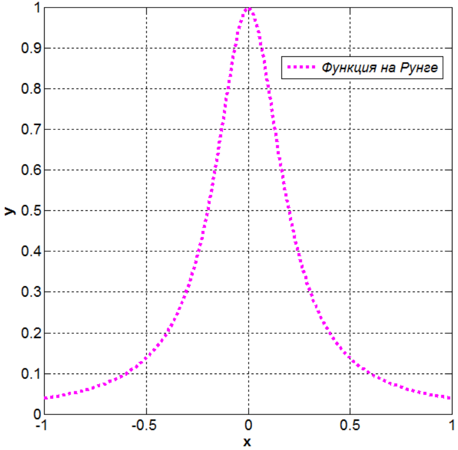
$$\sqrt{x^{**}} = \sqrt{5,8} = 2,40831891...,$$

$$L(f;\,x^{**}) = L(f;\,5,8) = 3,4329... \Rightarrow$$

$$\left|\sqrt{5,8} - L(f;\,5,8)\right| > 1$$

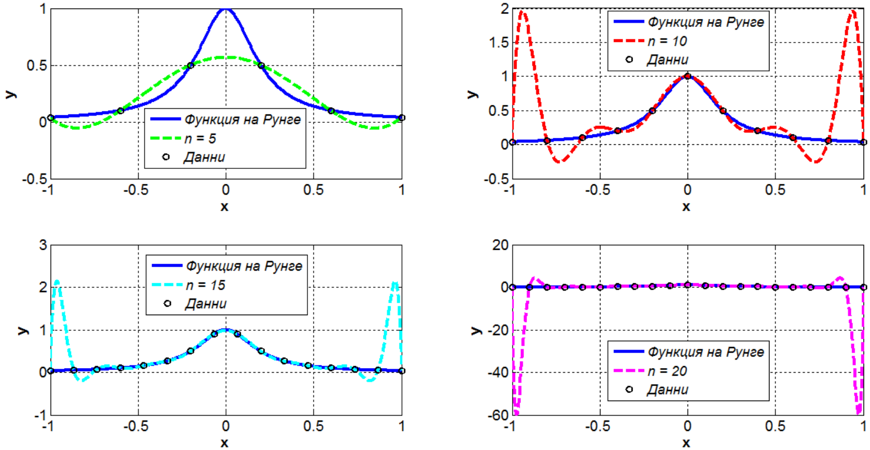
Проблеми, свързани с екстраполирането

- Функция на Рунге: $\mu(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1$



Проблеми, свързани с екстраполирането

☐ Феномен на Рунге: $\left|\mu(x) - L_n(f;\, x)\right| \to \infty$ при $n \to \infty$



Благодарности

Благодаря за вниманието!