Взаимно положение на права и равнина

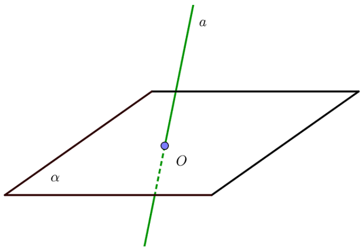
Л. Йовков

НПМГ „Акад. Л. Чакалов“

28. 03. 2020

Взаимно положение на права и равнина

Нека a е дадена права и α е дадена равнина. Знаем, че ако a не лежи в α и не е успоредна на нея, то a има само една обща точка с α. Тази точка се нарича пробод на правата с равнината (вж. фигура 1).



Фигура 1: Пресичащи се права и равнина

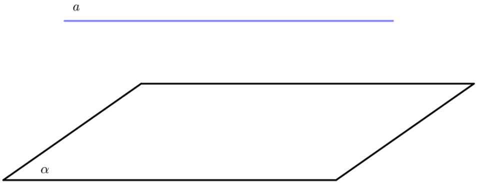
I. ПРАВА, УСПОРЕДНА НА РАВНИНА

Въвеждаме следното определение.

Дефиниция 1

Права и равнина се наричат успоредни, ако нямат общи точки.

Ако правата a е успоредна на равнината α, пишем $a \parallel \alpha$ (вж. фигура 2).



Фигура 2: Права, успоредна на равнина

Теорема 1

Ако права, нележаща в една равнина, е успоредна на някоя права в равнината, то правата и равнината са успоредни.

Доказателство 1

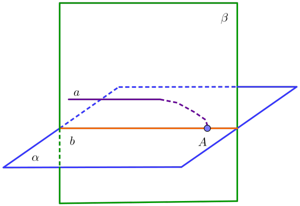
Нека $a \notin \alpha$, $b \in \alpha$, $b \parallel a$. Нека още $\beta = (a; b)$. Тогава $\alpha \cap \beta = b$. Допускаме, че $a \cap \alpha = A$. Тогава:

$$A \in a,\ a \in \beta \Rightarrow A \in \beta;$$

$$A \in \beta,\ A \in \alpha \Rightarrow A \in (\alpha \cap \beta);$$

$$A \in (\alpha \cap \beta),\ \alpha \cap \beta = b \Rightarrow A \in b.$$

Оттук $a \cap b = A$ — противоречие.



Фигура 3: Критерий за успоредност на права и равнина

Вярна е и обратната теорема:

Теорема 2

Ако права и равнина са успоредни, то в равнината съществува права, успоредна на дадената права.

В сила е следната теорема (без доказателство, вж фигура 3).

Теорема 3

Ако права и равнина са успоредни, пресечницата на всяка равнина, минаваща през правата, с дадената равнина е права, успоредна на дадената права.

На фигура 3 $a \parallel \alpha$ и $a \in \beta$. Пресечницата на равнините α и β е правата b. Тогава $a \parallel b$.

Следствие 1

Ако права е успоредна на равнина и през точка от равнината прекараме права, успоредна на дадената, то втората права лежи в равнината.

Много важна и често използвана е следната

Теорема 4

Ако права е успоредна на две пресичащи се равнини, то тя е успоредна на тяхната пресечница.

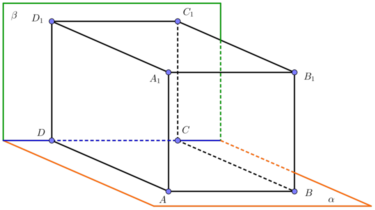
Геометричният смисъл е показан на фигура 4.

На фигура 4 е даден правоъгълният паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Имаме:

$A_1B_1 \parallel AB, \;\; AB \in \alpha \Rightarrow A_1B_1 \parallel \alpha;$

$A_1B_1 \parallel C_1D_1, \;\; C_1D_1 \in \beta \Rightarrow A_1B_1 \parallel \beta.$

Така получаваме, че правата A_1B_1 е успоредна едновременно на двете пресичащи се равнини α и β, значи е успоредна на тяхната пресечница. Понеже $\alpha \cap \beta = CD$, то по теорема 4 $A_1B_1 \parallel CD$, което се и очаква.



Фигура 4: Права, успоредна на две пресичащи се равнини

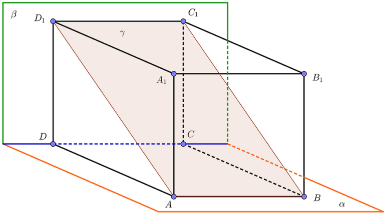
Доста често използвана е и следната

Теорема 5

Ако една равнина пресича две равнини и е успоредна на тяхната пресечница, то пресечниците ѝ с двете равнини са успоредни прави.

По означенията на фигура 5:

$$\alpha \cap \beta = CD; \;\; \gamma = (ABC_1D_1);$$
$$\gamma \cap \alpha = AB, \;\; \gamma \cap \beta = C_1D_1;$$
$$CD \parallel \gamma \Rightarrow (\gamma \cap \alpha) \parallel (\gamma \cap \beta)$$
$$\Rightarrow AB \parallel C_1D_1.$$



Фигура 5: Успоредни пресечници

Както се вижда от чертежа, $AB \parallel CD \parallel C_1D_1$. Следователно е вярна следната

Теорема 6

Ако две прави в пространството са поотделно успоредни на трета права, то те са успоредни помежду си.

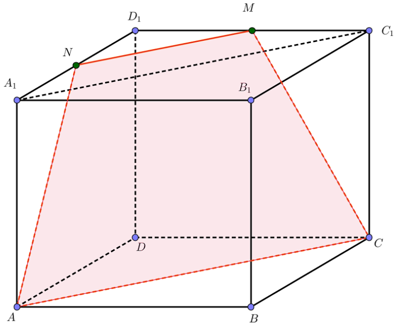
Да разгледаме един пример с приложение на споменатите вече теореми.

Пример 1

Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ръб a. Точка M е среда на ръба C_1D_1. Равнината, определена от точките A, C и M, пресича ръба A_1D_1 в точка N. Да се намери периметърът на четириъгълника $ACMN$.

Решение 1

1. Нека $\gamma = (ACM)$. Тогава пресечниците на γ съответно с равнините $(ABCD)$ и (CC_1D_1D) са правите AC и CM. Ще намерим пресечниците на γ със стените $A_1B_1C_1D_1$ и ADD_1A_1. Нека $\gamma \cap A_1D_1 = N$.
2. Понеже $AC \parallel A_1C_1$ и $AC \in \gamma$, то по теорема 1 имаме $A_1C_1 \parallel \gamma$. Освен това $\gamma \cap (A_1B_1C_1D_1) = MN$ и от $A_1C_1 \parallel \gamma$ по теорема 3 имаме $MN \parallel A_1C_1$. Така т. N е средата на ръба A_1D_1.

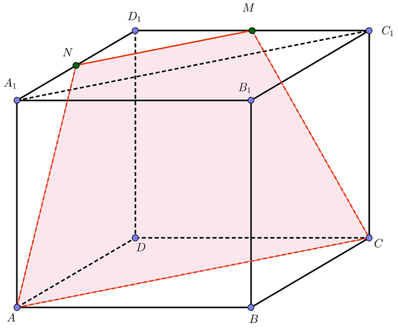


3. Понеже $\Delta CC_1M \simeq \Delta AA_1N$, то $AN = CM$. Така четириъгълникът $ACMN$ е равнобедрен трапец.
4. Остана да пресметнем дължините на страните му. С Питагорова теорема намираме

$$AC = A_1C_1 = a\sqrt{2},\ MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

и $CM = AN = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
Окончателно търсеният периметър е

$$P_{ACMN} = a\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{2}. \quad \square$$

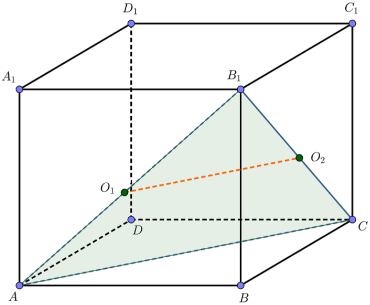


Пример 2

Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точките O_1 и O_2 са съответно центровете на квадратите ABB_1A_1 и BCC_1B_1. Докажете, че правата O_1O_2 е успоредна на равнината $(ABCD)$.

Решение 2

В ΔAB_1C отсечката O_1O_2 е средна отсечка, следователно $O_1O_2 \parallel AC$. Но $AC \in (ABCD)$. Тогава по теорема 1 веднага получаваме $O_1O_2 \parallel (ABCD)$. $\square$

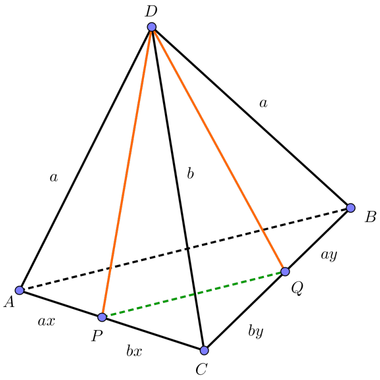


Пример 3

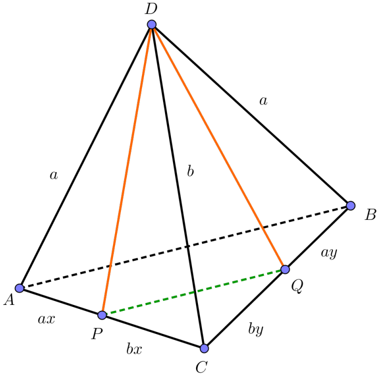
Дадена е триъгълна пирамида $ABCD$, в която $AD = DB$. Точките P и Q от ръбовете AC и BC са такива, че DP и DQ са ъглополовящите на ъглите ADC и BDC. Да се докаже, че правата PQ е успоредна на равнината ABD.

Решение 3

Да означим $AD = DB = a$, $CD = b$ и да разгледаме ΔACD.



Понеже в него DP е ъглополовяща, то по свойството на ъглополовящата имаме $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{PA}{PC} = \dfrac{a}{b}$, откъдето $AP = ax$, $CP = bx$. Аналогично получаваме $BQ = ay$, $CQ = by$. Сега в ΔABC е изпълнено $\dfrac{CP}{PA} = \dfrac{CQ}{QB} = \dfrac{b}{a}$ и по теоремата на Талес $PQ \parallel AB$. Но $AB \in (ABD)$, следователно $PQ \parallel (ABD)$, което и трябваше да се докаже. $\square$

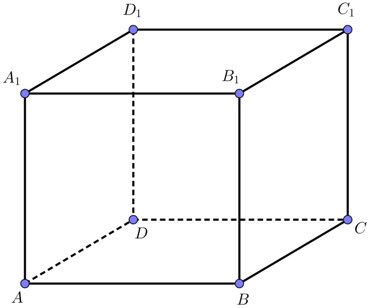


II. ПРАВА, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНА НА РАВНИНА

Да разгледаме куба, изобразен на фигура 6. Правата AA_1 е перпендикулярна едновременно на правите AB и AD. Обаче AB и AD задават равнината $(ABCD)$, следователно $AA_1 \perp (ABCD)$.

Теорема 7

Ако права е перпендикулярна на две пресичащи се прави от една равнина, то тя е перпендикулярна на равнината.



Фигура 6: Перпендикулярност на права и равнина

Въвеждаме следната

Дефиниция 2

Казваме, че правата a е перпендикулярна на равнината α, ако е перпендикулярна на всяка права от α.

Тогава е ясно, че ъгълът между правата a и коя да е права m от α (независимо дали a пресича m, или е кръстосана с нея) ще бъде прав:

$$a \perp \alpha, \;\; m \in \alpha \Rightarrow \measuredangle(a; m) = 90^\circ.$$

Следствие 2

Ако права и равнина са перпендикулярни, всяка права, успоредна на дадената права, е перпендикулярна на равнината.

По означенията на фигура 6: $AA_1 \perp (ABCD), \;\; CC_1 \parallel AA_1 \Rightarrow CC_1 \perp (ABCD)$.

В практиката често се използват и следващите теореми, които ще дадем без доказателство.

Теорема 8

През дадена точка съществува единствена права, перпендикулярна на дадена равнина.

Теорема 9

Ако две прави са перпендикулярни на една и съща равнина, то те са успоредни помежду си.

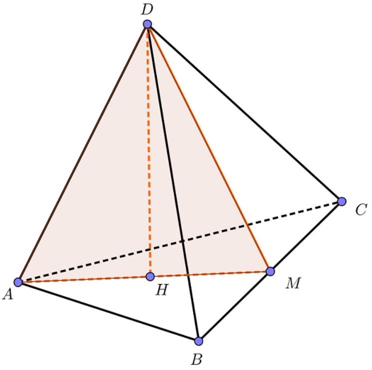
От фигура 6: $AB \perp (BCC_1B_1)$, $A_1B_1 \perp (BCC_1B_1) \Rightarrow AB \parallel A_1B_1$.

Пример 4

Дадена е триъгълна пирамида $ABCD$, на която всички ръбове са равни. Да се докаже, че $AD \perp BC$.

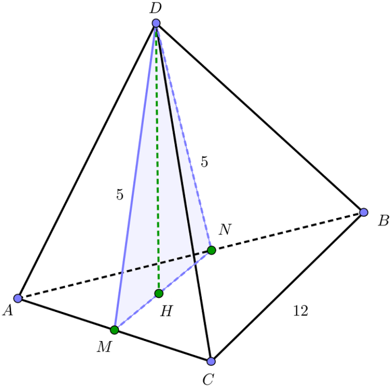
Решение 4

Нека точка M е среда на ръба BC. Понеже стените са равностранни триъгълници, то $BC \perp AM$ и $BC \perp DM$. Но AM, $DM \in (AMD)$, откъдето по теорема 7 $BC \perp (AMD)$. Накрая, тъй като $AD \in (AMD)$, то $BC \perp AD$.



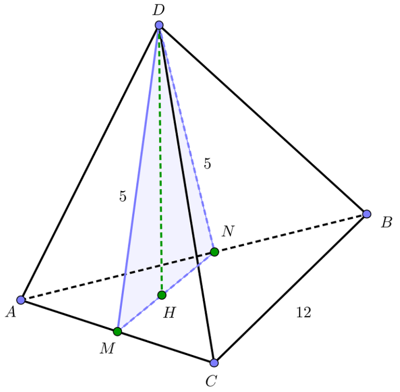
Пример 5

Основата на триъгълна пирамида $ABCD$ е правоъгълен триъгълник ABC с хипотенуза AB и катет $BC = 12$. Околните ръбове DA и DC са равни. Разстоянията от върха D до средите на AC и AB са равни на 5. Ако H е петата на перпендикуляра, спуснат от върха D до равнината на основата на пирамидата, да се намери дължината на DH.



Решение 5

1. MN — средна отсечка в $\Delta ABC \Rightarrow MN = 6$
2. $DA = DC \Rightarrow DM \perp AC$ (1)
3. $\measuredangle C = 90^\circ$, $MN \parallel AB \Rightarrow MN \perp AC$ (2)
(1), (2) $\Rightarrow AC \perp (MND)$
4. Понеже $DH \perp (ABC)$ и $AC \in (ABC)$, то $AC \perp DH$, откъдето $DH \in (MND)$ $\Rightarrow H \in MN$.
5. ΔDMN — равнобедрен $\Rightarrow HM = HN = 3$
6. $\measuredangle MHD = 90^\circ \Rightarrow MH^2 + DH^2 = DM^2 \Rightarrow DH = 4 \square$



Задачи за самостоятелна работа

Задача 1

Дадена е правилна четириъгълна пирамида $ABCDQ$ с връх Q и $AC \perp BD = O$. Докажете, че $QO \perp (ABCD)$.

Задача 2

Даден е правоъгълен ΔABC с катети $AC = a$ и $BC = a\sqrt{3}$. Отсечката $CD = 2a$ е перпендикулярна на катетите. Намерете разстоянието от точка D до средата на хипотенузата.

Задача 3

Върху ръбовете AB и A_1B_1 на куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ да избрани точки Q и P, такива, че $AQ : QB = A_1P : PB_1 = 1 : 2$. Докажете, че четириъгълникът QDD_1P е правоъгълник, и намерете лицето му, ако дължината на ръба на куба е a.

Задачи за самостоятелна работа

Задача 4

Дадена е триъгълна пирамида $ABCD$, в която $AC = BC = 7$, $AB = 4\sqrt{6}$, $DA = DB = 2\sqrt{10}$ и $DC = 3$. Намерете дължината на перпендикуляра, спуснат от точка D към равнината (ABC).

Задача 5

Основата $ABCD$ на четириъгълна пирамида $ABCDM$ е правоъгълник и $MA = MB = MC = MD = 10$, $AB = 8$, $BC = 6$. Намерете дължината на перпендикуляра, спуснат от точка M към основата на пирамидата.

Задача 6

В правилен тетраедър всичките ръбове имат дължина 3. Намерете разстоянието от връх на тетраедъра до срещуположната стена.

Задачи за самостоятелна работа

Задача 7

В правилна триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$ ръбовете AB и AA_1 имат дължини съответно 4 и 3. Ако M е средата на AC, а N — на BC, намерете разстоянието между точката A и равнината (C_1MN).

Задача 8

Даден е правоъгълен паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ръбове $AB = 20$, $BC = 15$ и $AA_1 = 5$. Намерете разстоянието от точка C до равнината (DBC_1).

Задача 9

Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ръб 1. Намерете разстоянието от точка A до равнината (DMD_1), където M е средата на AB.

Задачи за самостоятелна работа

Задача 10

Основата на четириъгълна пирамида $ABCDV$ е правоъгълник $ABCD$, за който $AB = 4$ и $BC = 3$. Ръбът $DV \perp (ABC)$ и $DV = 4$. Намерете разстоянието от точка D до равнината (ACV).

Задача 11

Дадена е триъгълна пирамида $ABCD$, за която $\measuredangle ACB = 120^\circ$, $BC = 2\sqrt{3}$, ръбът BD е перпендикулярен на равнината (ABC) и $BD = 3$. Да се намери разстоянието от точка B до равнината (ACD).

Задача 12

Намерете разстоянието между правите CB_1 и AD_1 в куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с дължина на ръба a.