

Метод на хордите за приближено решаване на нелинейни уравнения

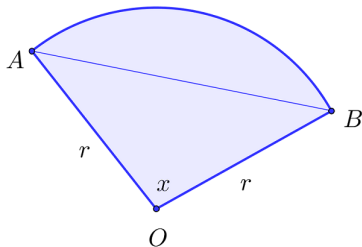
Л. ЙОВКОВ

НПМГ „Акад. Л. Чакалов“

17. 12. 2019 г.

Пример 1. Лице на кръгов сектор

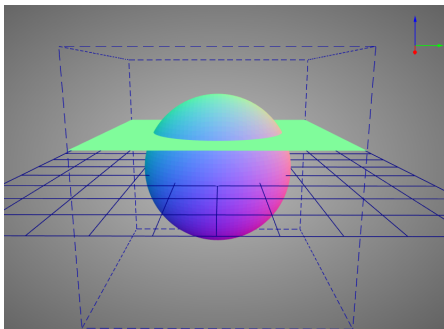
Да се намери големината на централния ъгъл на сектор, чието лице се дели на две равни части от хордата, свързваща краищата на дъгата му.



Фигура: $x - 2 \sin x = 0$

Пример 2. Обем на кълбов сегмент

На какво разстояние от центъра на кълбо с радиус R минава секуща равнина, която отсича от кълбото $1/n$ -та част от обема му?



Фигура: $x^3 - 3R^2x + 2R^3\left(1 - \frac{2}{n}\right) = 0$

Идея на итерационните методи за решаване на нелинейни уравнения

□ Отделяне на корените

Теорема

Теорема (на Болцано). Ако функцията $y = f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал $[a; b]$ и ако $f(a)f(b) < 0$, то съществува поне едно число $c \in [a; b]$, за което $f(c) = 0$.

□ Условие за единственост на корена в интервала $[a; b]$

□ Итерационен процес: $x_{n+1} = \psi(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

□ Критерии за край на итерациите: $|f(x_{n+1})| < \varepsilon$,

$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, $N > N_0$

□ Оценка на точността ε

Итерационен метод на хордите

□ Итерационна
формула

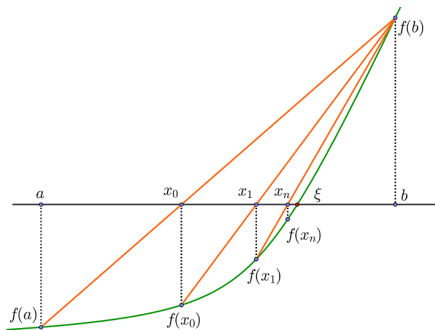
$$h_{n+1} : \frac{x - x_n}{b - x_n} = \frac{y - f(x_n)}{f(b) - f(x_n)},$$

$$h_{n+1} \cap Ox = (x_{n+1}; 0),$$

$$x_{n+1} = x_n - (b - x_n) \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}$$

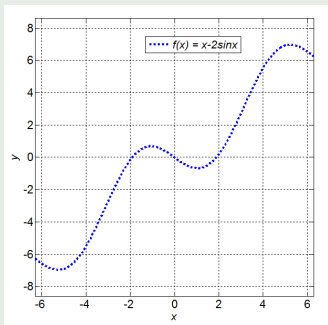
□ Сходимость

$$x_0, x_1, \dots, x_n, \dots \rightarrow \xi$$



Метод на хордите за приближено решаване на нелинейното уравнение от пример 1

Решение



$$f(1) = -0.6829 < 0, f(2) = 0.1814 > 0 \Rightarrow \\ \xi \in (1; 2) \Rightarrow [a; b] = [1; 2]$$

Метод на хордите за приближено решаване на нелинейното уравнение от пример 1

Решение

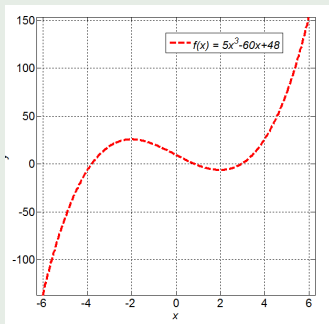
Таблица: Метод на хордите за функцията $f(x) = x - 2 \sin x$

n	x_n	$ f(x_n) $
1	1.7901246	0.1620
2	1.8891205	0.0104
3	1.8951337	0.0006
\vdots	\vdots	\vdots
8	1.8954942	3.3534×10^{-10}
9	1.8954942	1.8892×10^{-11}

$\Rightarrow \xi \approx 1.8954942 \approx 108.6038^\circ$ с точност $\varepsilon = 10^{-11}$

Метод на хордите за приближено решаване на нелинейното уравнение от пример 2

Решение



$$R = 2, n = 5 : f(x) = 5x^3 - 60x + 48, 0 < x < 2;$$
$$f(0) = 9.6000 > 0, f(1) = -1.4000 < 0 \Rightarrow \xi \in (0; 1)$$

Метод на хордите за приближено решаване на нелинейното уравнение от пример 2

Решение

Таблица: Метод на хордите за функцията $f(x) = 5x^3 - 60x + 48$

n	x_n	$f(x_n)$
1	0.8727272	0.2080120
2	0.8542181	0.0273044
3	0.8517955	0.0035206
\vdots	\vdots	\vdots
8	0.8514371	1.2384×10^{-7}
9	0.8514371	1.5925×10^{-8}

$$\Rightarrow \xi \approx 0.8514371 \text{ с точност } \varepsilon = 10^{-8}$$

Задачи за самостоятелна работа

Да се намерят приближените решения на всяко от следващите уравнения в зададените интервали. Да се избере подходяща за случая точност ε .

Задача

$$x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0, \quad \xi \in (0; 1)$$

Задача

$$x^3 + 2x - 6 = 0, \quad \xi \in (0; 2)$$

Задача

$$x^2 - 5 \sin x = 0, \quad \xi \in (2; 3)$$

Задача

$$x^4 - \cos x - 1 = 0, \quad \xi \in (-0.5; 0.5)$$

Задачи за самостоятелна работа

Задача

$$\sin x + x^3 - 5 = 0, \quad \xi \in (0; 2)$$

Задача

$$\log_{10} x - x^2 + 2 = 0, \quad \xi \in (1; 2)$$

Задача

Да се намери приближена стойност на числото $\sqrt{7}$ с 10 верни знака след десетичната запетая.

Благодарности

Благодаря за вниманието!