Сфера и кълбо

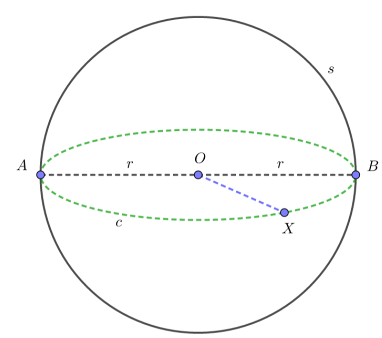
Л. В. Йовков

НПМГ „Акад. Л. Чакалов“

Абстракт

Последните и много важни тела, на които ще се спрем в настоящата тема, са сферата и кълбото. Те се отличават от разгледаните досега стереометрични фигури по това, че не притежават нито основи, нито ръбове. Следователно ние ще представим обичайна формула за обем и само една формула за пресмятане на повърхнина. В допълнение ще покажем как можем да използваме някои от елементите на аналитичната геометрия в задачи от сфера и кълбо.

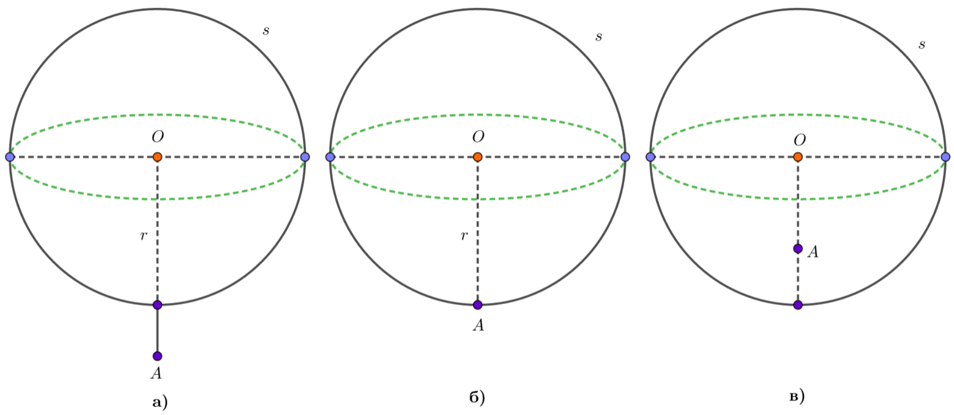
Нека O е дадена точка в пространството и $r > 0$ е реално число. Множеството от точки X в пространството, за което $OX = r$, се нарича *сфера с център O и радиус r*. Частта от пространството, която е разположена вътре в сферата, се нарича *кълбо*. Ще използваме означението $s(O; r)$.



Фигура 1: Сфера

На фигура 1 нагледно сме представили сферата $s(O; r)$. Равнината λ, която минава през центъра O на сферата, я пресича в една затворена линия — окръжност c, при това със същия център и същия радиус. Тази окръжност в стереометрията е прието да се нарича *голяма окръжност на сферата*. Ако равнината λ не съдържа центъра O, пресечницата на s и λ отново е окръжност — *малка окръжност на сферата*. По аналогичен път дефинираме понятията *малък* и *голям кръг на кълбо*.

Всяка отсечка с краища върху сферата представлява *хорда* на сферата. Очевидно хордата с най-голяма дължина е тази, която минава през центъра на сферата. Тя се нарича *диаметър*. На фигура 1 хордата AB е диаметър както на сферата $s(O;\, r)$, така и на голямата окръжност $c(O;\, r)$.



Фигура 2: а) $OA = d > r$; **б)** $OA = d = r$; **в)** $OA = d < r$

Да разгледаме възможните взаимни положения на дадена точка A в пространството и сферата $s(O;\, r)$. Нека да означим с $d = OA$ разстоянието между центъра на сферата и точката A (вж. фигура 2). Имаме:

1. $d > r \Rightarrow$ точка A е външна за сферата; в този случай отсечката OA и сферата имат пресечна точка, която е вътрешна за OA;

2. $d = r \Rightarrow$ точка A лежи върху сферата (контурна точка); сега отсечката OA и сферата имат единствена обща точка, която съвпада с A;

3. $d < r \Rightarrow$ точка A е вътрешна за сферата; лесно се вижда, че отсечката OA и сферата нямат общи точки.

Съществена разлика между сферата и познатите вече ротационни тела е липсата на **права**, по която можем да извършим надлъжен разрез. Наистина — при цилиндъра и конуса тази роля играе коя да е тяхна образуваща. При сферата линията, свързваща двата ѝ полюса, не е праволинейна. Може да се покаже, че колкото и малка дъга от сферата да изберем, не съществува допирателна равнина, която да съдържа тази дъга. Следователно **сферата не притежава развивка**. Формулите за пресмятане на повърхнина и обем са две и изглеждат така:

$$S = 4\pi r^2, \tag{1}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3. \tag{2}$$

Те могат лесно да бъдат получени, като се използват средствата на интегралното смятане.

Пример 1 ([6], стр. 107, зад. 24.2) Намерете лицето на повърхнината на сфера, ако дължината на една нейна голяма окръжност е 31,4 ($\pi = 3,14$).

Решение. Дължината на всяка голяма окръжност е $2\pi r$, където r е радиусът на сферата. Тогава ще е изпълнено

$$2\pi r = 31,4 = 3,14 \cdot 10 = 10\pi \Rightarrow r = 5.$$

Заместваме във формула (1) и получаваме $S = 100\pi$. $\square$

Пример 2 ([6], стр. 107, зад. 24.6) Дължините на радиусите на три сфери са страни на правоъгълен триъгълник. Да се докаже, че лицето на повърхнината на най-голямата от тях е равно на сумата от лицата на повърхнините на другите две.

Решение. Да означим радиусите на трите сфери съответно с r_1, r_2 и r_3, като за определеност нека имаме $r_1 < r_2 < r_3$. Тъй като тези радиуси са страни на правоъгълен триъгълник, то по Питагорова теорема ще е изпълнено

$$r_1^2 + r_2^2 = r_3^2.$$

Умножаваме това равенство с 4π и получаваме

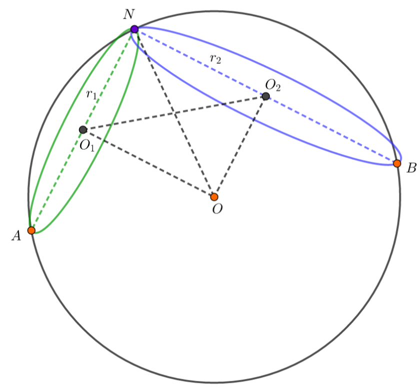
$$4\pi r_1^2 + 4\pi r_2^2 = 4\pi r_3^2 \Rightarrow S_1 + S_2 = S_3,$$

което и трябваше да се докаже. $\square$

Пример 3 ([2], стр. 100, зад. 17) Двете окръжности $k_1(O_1; r_1 = 3)$ и $k_2(O_2; r_2 = 4)$ лежат върху сфера и имат точно една обща точка помежду си. Намерете радиуса r на сферата, ако равнините, определени от окръжностите, са перпендикулярни.

Решение.

Да означим с α и β равнините съответно на окръжностите k_1 и k_2 и с N — тяхната допирна точка (вж. фигура 3). Нека $t \in \alpha$ е допирателна към първата окръжност през точка N (не е изобразена на чертежа.). Тогава тази права ще е допирателна и към втората окръжност. Следователно $O_1N \perp t$ и $O_2N \perp t$, откъдето $\measuredangle O_1NO_2$ е линейният ъгъл на двустенния ъгъл между равнините α и β. По условие $\measuredangle(\alpha; \beta) = 90°$. Така веднага получаваме $\measuredangle O_1NO_2 = 90°$.



Фигура 3

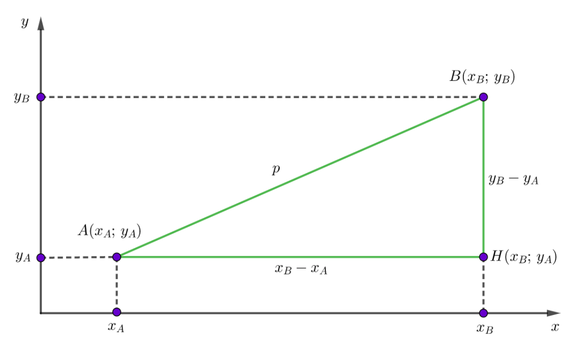
От ΔO_1O_2N с Питагорова теорема пресмятаме

$$O_1O_2^2 = r_1^2 + r_2^2 = 5^2 \Rightarrow O_1O_2 = 5.$$

Четириъгълникът OO_1NO_2 е правоъгълник (има четири прави ъгъла), откъдето

$$ON = r = O_1O_2 = 5. \ \square$$

Да разгледаме по-детайлно някои фундаментални елементи от един специален дял на геометрията — т. нар. **аналитична геометрия**. Предмет на изучаване в аналитичната геометрия са връзките между точки, линии и повърхнини, но пренесени на ниво декартова координатна система. Всеки геометричен обект е съставен от поне една точка, а всяка точка е еднозначно определена със своите координати. Дължините на отсечките в двумерния случай се определят по **формулата за разстояние между две точки** [1], [3] (вж. фигура 4):



Фигура 4: Формула за разстояние между две точки

$$p = AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}. \tag{3}$$

Ако координатната система е тримерна, всяка точка се задава с тройка координати $(x;\, y;\, z)$ и формула (3) изглежда така:

$$p = AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + (z_B - z_A)^2}. \tag{4}$$

Всяка линия и всяка повърхнина има свое **уравнение**, което я идентифицира по единствен начин. Обикновено то е връзка между зависимата променлива и независимите променливи (вж. **уравнение на права**, което сме разглеждали подробно в 9 клас).

Като използваме дефиницията за сфера, да изведем с елементарни разсъждения нейното уравнение. Нека $O(a;\, b;\, c)$ е фиксирана точка в пространството и $r > 0$ е реално число. Множеството от точки $P(x;\, y;\, z)$, такива, че $OP = r$, задава сфера с център O и радиус r. По формулата (4) получаваме, че всяка точка от сферата удовлетворява уравнението

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2. \tag{5}$$

Зависимостта (5) в аналитичната геометрия е добре известна и се нарича **уравнение на сфера**.

Пример 4 ([4], стр. 163, зад. 1084, 4)) Да се напише уравнението на сферата, която минава през точката $A(2;\, -1;\, -3)$ и има център за център точката $C(3;\, -2;\, 1)$.

Решение. Понеже A е точка от сферата, а C е центърът на тази сфера, то радиусът е отсечката AC. По формула (4) пресмятаме $r^2 = 18$. Следователно уравнението на търсената сфера е

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 18. \ \square$$

Пример 5 ([4], стр. 163, зад. 1084, 3)) Да се напише уравнението на сферата, която минава през началото на координатната система и има за център точката $C(4;\, -4;\, -2)$.

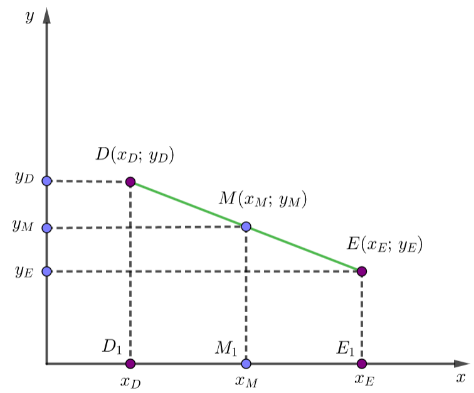
Решението извършете самостоятелно!

Пример 6 ([4], стр. 163, зад. 1084, 5)) Да се напише уравнението на сферата, за която точките $A(2;\, -3;\, 5)$ и $B(4;\, 1;\, -3)$ лежат върху нея и са краища на диаметър.

Решение. Предварително ще изведем в двумерния случай формулата за определяне координатите на среда на отсечка, ако са известни координатите на краищата на отсечката. Тази формула търпи тривиално обобщение в пространството.

Нека $D(x_D;\, y_D)$ и $E(x_E;\, y_E)$ са две произволни точки в дадена декартова координатна система, а $M(x_M;\, y_M)$ е средата на отсечката, която ги свързва (вж. фигура 5). Нека D_1, E_1 и M_1 са съответните ортогонални проекции на тези точки върху абсцисната ос. Тъй като отсечката MM_1 е средна основа в трапеца DEE_1D_1, то $MM_1 = \dfrac{DD_1 + EE_1}{2}$, откъдето получаваме

$$y_M = \frac{y_D + y_E}{2}.$$



Фигура 5: Формула за координати на среда на отсечка

Точка M_1 е среда на отсечката D_1E_1, следователно

$$x_M = \frac{x_D + x_E}{2}.$$

Окончателно средата M на отсечката DE има координати[1]

$$M(x_M;\, y_M) = M\left(\frac{x_D + x_E}{2};\, \frac{y_D + y_E}{2}\right). \tag{6}$$

В тримерния случай ще е изпълнено

$$M(x_M;\, y_M;\, z_M) = M\left(\frac{x_D + x_E}{2};\, \frac{y_D + y_E}{2};\, \frac{z_D + z_E}{2}\right). \tag{7}$$

Да се върнем на задачата. Използвайки (7) за дадените точки, установяваме, че средата на диаметъра на дадената сфера е точката с координати $(3;\, -1;\, 1)$. По-нататък по формулата за разстояние между две точки (4) намираме $AB = 2r = 2\sqrt{21}$. Тогава уравнението на сферата е

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 21. \; \square$$

[1] Доказването на тази формула е заложено като самостоятелна задача в [5], стр. 53, зад. 18.

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА

Задача 1 ([6], стр. 107, зад. 24.1) Намерете лицето на повърхнината на сфера с радиус, имащ дължина:
а) 35; **б)** $1,2$.

Отг. 4900π; $5,76\pi$

Задача 2 [6], стр. 107, зад. 24.5) Как се изменя лицето на повърхнината на сфера, ако радиусът ѝ се увеличи k пъти?

Отг. Увеличава се k^2 пъти.

Задача 3 [6], стр. 108, зад. 24.9) Дадена е сфера с радиус $r = 37$. Намерете лицето на оградения кръг от сечение, отдалечено от центъра на сферата на 23 ед.

Отг. 840π

Задача 4 [6], стр. 108, зад. 24.13) Намерете лицето на повърхнината на сфера, ако обемът на заградeното от нея кълбо е 64.

Отг. 77

Задача 5 [6], стр. 1078, зад. 24.16) Разликата от обемите на две кълба е равна на 1683,72. Разликата от дължините на радиусите им е равна на 1,3. Намерете дължините на радиусите на тези две кълба.

Отг. $10,8$ **и** $9,5$

Задача 6 [6], стр. 108, зад. 24.18) Обемът на дадено кълбо е 30. Намерете обема на второ кълбо, ако лицето на повърхнината на ограждащата го сфера е равно на половината от лицето на повърхнината на сферата, ограждаща първото кълбо.

Отг. $\dfrac{45}{6}\sqrt{2}$

Задача 7 [6], стр. 108, зад. 24.20) На какво разстояние от центъра на сфера с радиус r е равнина, която я пресича в окръжност с радиус, равен на половината от радиуса на големия кръг на сферата?

Отг. $\dfrac{r}{2}\sqrt{3}$

Задача 8 [6], стр. 109, зад. 24.24) В сфера с радиус $r = 10$ са построени две равнини α и β на разстояния 6 и 9 от центъра O на сферата. Ъгълът между тези две равнини е 120°. Те се пресичат по права, която отсича от сферата хорда d, обща за двете сечения.
а) Ако OA и OB са перпендикулярите, спуснати към равнините α и β, докажете, че хордата d е перпендикулярна на равнината (OAB).
б) Ако C е пресечната точка на d с равнината (OAB), докажете, че $\measuredangle ACB = 120^\circ$.
в) Намерете разстоянието от хордата d до центъра O на сферата.
г) Намерете дължината на хордата d.

Отг. в) $2\sqrt{21}$**; г)** 8

Задача 9 ([2], стр. 100, зад. 12) Точките A, B и C са разположени върху сфера с център O и радиус $r = 6,5$, така, че $AB = 5$, $BC = 4$ и $AC = 3$. Намерете разстоянието от точка O до равнината (ABC).

Отг. 6

Задача 10 ([2], стр. 100, зад. 13) Точките A, B и C са разположени върху сфера с център O и радиус $r = 13$, така, че $AB = 8$, а $BC = AC = 4\sqrt{5}$. Намерете разстоянието от точка O до равнината (ABC).

Отг. 12

Задача 11 ([2], стр. 100, зад. 14) Страната на равностранен ΔABC има дължина $2\sqrt{3}$. Сфера, чийто център е на разстояние 1 от равнината (ABC), се допира до страните на ΔABC. Намерете нейния радиус.

Отг. $\sqrt{2}$

Задача 12 ([2], стр. 100, зад. 18) Окръжностите $k_1(O_1;\, r_1 = 3\sqrt{3})$ и $k_2(O_2;\, r_2 = 3\sqrt{3})$ лежат върху сфера и имат точно една обща точка помежду си. Намерете радиуса r на сферата, ако равнините, определени от окръжностите, определят двустенен ъгъл с мярка 60°.

Отг. 6

Задача 13 [4], стр. 163, зад. 1084, 1), 2), 4)) Напишете уравнение на сфера s, която има:
а) център $C(0; 0; 0)$ и радиус $r = 9$;
б) център $C(5; -3; 7)$ и радиус $r = 2$;
в) център $C(3; -2; 1)$ и минава през точката $A(2; -1; -3)$.

Задача 14 ([4], стр. 163, зад. 1084, 9)) Да се напише уравнението на сферата, която минава през четирите точки $M_1(1;\,-2;\,-1)$, $M_2(-5;\,10;\,-1)$, $M_3(4;\,1;\,11)$ и $M_4(-8;\,-2;\,2)$.

Задача 15 [4], стр. 164, зад. 1093, 1), 2), 3)) Определете взаимното положение на точката $A(2;\,-1;\,3)$ и сферата s, зададена с уравнение:

а) $s:\ (x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$;

б) $s:\ (x+14)^2+(y-11)^2+(z+12)^2=625$;

в) $s:\ (x-6)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=25$.

Задача 16 [6], стр. 165, зад. 1094, 1), 2)) Намерете най-краткото разстояние от точката A до сферата s в следните случаи:

а) $A(-2;\,6;\,-3)$, $s:\ x^2+y^2+z^2=4$;

б) $A(9;\,-4;\,-3)$, $s:\ x^2+y^2+z^2+14x-16y-24z+241=0$;

в) $A(1;\,-1;\,3)$, $s:\ x^2+y^2+z^2-6x+4y-10z-62=0$.

Упътване. Предварително запишете уравнението на всяка от сферите във вида
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$
и установете положението на т. A относно тези сфери.

Литература

[1] **В. А. Ильин, Э. Г. Позняк.** *„Аналитическая геометрия“*. Издательство „Наука“, Главная редакция физико-математической литературы. Москва, 1988

[2] **Г. Кожухарова, И. Марашева, П. Недевски, Ю. Цветков.** *„Сборник по математика за 10. клас“*. Издателство „Анубис“. София, 2019

[3] **Гр. Станилов.** *„Аналитична геометрия“*. Издателство „Наука и изкуство“. София, 1974

[4] **Д. В. Клетеник.** *„Сборник задач по аналитической геометрии“*. Государственное издательство физико-математической литературы „Москва“. Москва, 1958

[5] **Н. Буюклиева, И. Атанасова, Н. Буюклиев.** *„Сборник по математика за 8 клас“*. Издателство „Педагог 6“. София, 2012

[6] **П. Рангелова.** *„Сборник по математика за X клас“*. Издателство „Коала прес“. Пловдив, 2019