Пирамида

Л. В. Йовков

НПМГ „Акад. Л. Чакалов“

Абстракт

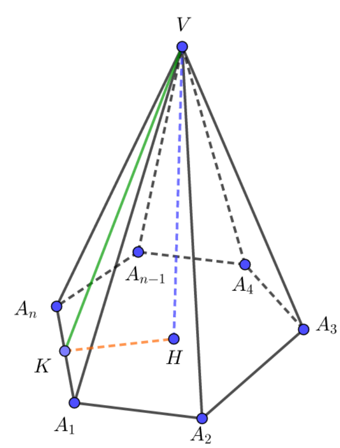
Настоящата тема запознава читателя с другия фундаментален стереометричен обект — пирамидата. Въвеждат се основните елементи и свойства на пирамидата. Върху съдържателни примери са изложени нагледно основните методи при решаване на задачи от пирамиди. В допълнение е показана връзката между ортогоналната проекция на върха на пирамидата и свойството на основата да бъде вписвана в или описвана около окръжност.

Да започнем със следната

Дефиниция 1 *Многостен, една от стените на който е изпъкнал многоъгълник, а останалите са триъгълници с общ връх, нележащ в равнината на многоъгълника, се нарича пирамида.*

На фигура 1 е показана пирамида с основа n-ъгълника $A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$ и с връх V. В нея отсечката VH е перпендикулярна на равнината на основата $(A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n)$, а отсечката VK е височина към ръба A_1A_n в ΔA_1A_nV. Нека да посочим специфичните елементи на този многостен.

- A_1, A_2, $\ldots$, A_{n-1}, A_n, V — върхове на пирамидата;
- A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 — основни ръбове;
- VA_1, VA_2, $\ldots$, VA_{n-1}, VA_n — околни ръбове;



Фигура 1: Пирамида

- ΔA_1A_2V, ΔA_2A_3V, $\ldots$, ΔA_nA_1V — околни стени;
- VH — височина на пирамидата;
- VK — апотема.

Както при призмите, и тук можем да съставим класификация за някои видове пирамиди, срещащи се в практиката.

Дефиниция 2 *Пирамида, за която основата е правилен n-ъгълник, а ортогоналната проекция на върха съвпада с центъра на тази основа, се нарича* ***правилна n-ъгълна пирамида****.*

При $n = 3$ пирамидата е известна с популярното си название **тетраедър**.

Дефиниция 3 *Тетраедър с равни основни и околни ръбове се нарича* ***правилен****.*

В природата правилния тетраедър срещаме при структурната формула на метана $\mathbf{CH_4}$. По-нататък в изложението ще се спрем подробно на задачата за намиране на валентния ъгъл в молекулата на метана.

Съществен е въпросът за ортогоналната проекция на върха на пирамидата върху равнината на основата. Положението на тази проекция зависи изключително от вида на пирамидата (правилна или от друг тип) и от мерките на двустенните ъгли между околните стени и основата. Лесно се съобразява следното:

1. ако околните стени образуват остри двустенни ъгли с основата, ортогоналната проекция на върха е вътрешна точка за основата;

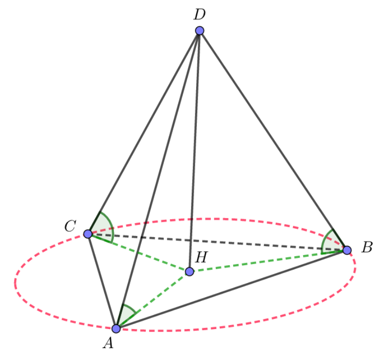
2. ако някой от двустенните ъгли между околна стена и основа е тъп, ортогоналната проекция на върха е външна точка за основата;

3. ако околна стена е перпендикулярна на основата, ортогоналната проекция на върха лежи върху основен ръб на пирамидата.

Нещо повече: при определени условия ортогоналната проекция на върха съвпада с центъра на вписаната в или описаната около основата окръжност. Да разгледаме детайлно тези възможности в случая на триъгълна пирамида. По индукция те могат да се обобщят и за n-ъгълна пирамида.

I. Върхът на пирамидата се проектира ортогонално в центъра на описаната около основата окръжност

Нека $ABCD$ е триъгълна пирамида с равни околни ръбове и с височина DH (вж. фигура 2). Понеже триъгълниците AHD, BHD и CHD са еднакви (по катет и хипотенуза), то $HA = HB = HC$. Следователно т. H е равноотдалечена от върховете на ΔABC и съвпада с центъра на описаната му окръжност. Обратно — ако $HA = HB = HC$, то $\Delta AHD \simeq \Delta BHD \simeq \Delta CHD$ (по първи признак), откъдето $DA = DB = DC$. Така доказахме следните еквивалентни твърдения:



Фигура 2

върхът се проектира в центъра на описаната около основата окръжност

$$\Leftrightarrow$$

околните ръбове на пирамидата са равни.

Може да се докажат и други еквивалентни условия за ортогонално проектиране на върха в центъра на описаната около основата окръжност, например

височината на пирамидата сключва равни ъгли с всички околни ръбове

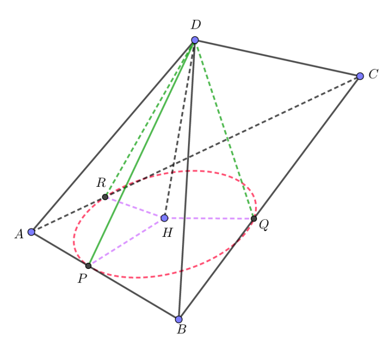
или

всички околни ръбове сключват равни ъгли с основата.

II. Върхът на пирамидата се проектира ортогонално в центъра на вписаната в основата окръжност

Да построим апотемите DP, DQ и DR съответно в стените ABD, BCD и ACD в триъгълната пирамида $ABCD$ (вж. фигура 3). Ако DH е височината на пирамидата, то по теоремата за трите перпендикуляра имаме $HP \perp AB$, $HQ \perp BC$ и $HR \perp AC$. Следователно двустенните ъгли между околните стени и основата са $\measuredangle DPH$, $\measuredangle DQH$ и $\measuredangle DRH$.

Нека $\measuredangle DPH = \measuredangle DQH = \measuredangle DRH$. Тогава триъгълниците DPH, DQH и DRH



Фигура 3

са еднакви (по втори признак), откъдето $HP = HQ = HR$. Така т. H е равноотдалечена от страните на ΔABC, т. е. тя съвпада с центъра на вписаната му окръжност.

Обратно, от $HP = HQ = HR$ имаме, че $\Delta DPH \simeq \Delta DQH \simeq DRH$ (по първи признак), следователно $\measuredangle DPH = \measuredangle DQH = \measuredangle DRH$.

По този начин доказахме, че следните твърдения са еквивалентни:

върхът се проектира в центъра на вписаната в основата окръжност

$$\Leftrightarrow$$

околните стени сключват равни двустенни ъгли с основата.

Други твърдения, еквивалентни на ортогонално проектиране в центъра на вписаната в основата окръжност, са:

апотемите сключват равни ъгли с височината на пирамидата

или

апотемите в околните стени са равни.

Аналогично на разглежданията при права призма, и тук може да се докаже следната формула за пресмятане на околна повърхнина на правилна n-ъгълна пирамида:

$$S = \frac{ak}{2}n = \frac{Pk}{2}, \tag{1}$$

където с a е означена дължината на основния ръб на пирамидата, с k — дължината на апотемата в околна стена, а с P — периметърът на основата. Представената формула (1) не е вярна в случая на неправилна пирамида.

Ако означим с B лицето на основата на пирамидата, пълната повърхнина S_1 пресмятаме по формулата

$$S_1 = S + B, \tag{2}$$

а обема V — по формулата

$$V = \frac{1}{3}Bh. \tag{3}$$

Пример 1 *(зад. 21.1, стр. 96, „Сборник по математика за 10 клас“, изд. „Коала прес“, Пенка Рангелова. Пловдив, 2019)* В правилна триъгълна пирамида основният ръб е 3, а височината ѝ е 1. Намерете:

а) околния ръб на пирамидата;

б) лицето на околната повърхнина на пирамидата;

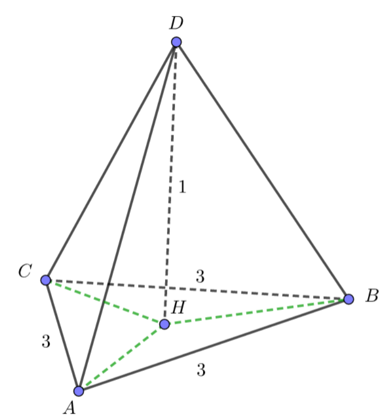
в) обема на пирамидата.

Решение. Нека $ABCD$ е дадената пирамида и DH е нейната височина (вж. фигура 4). По формулата за височина на равностранен триъгълник пресмятаме

$$h_{\Delta ABC} = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Тъй като пирамидата е правилна, ортогоналната проекция на върха D върху основата е центърът на тази основа. Следователно H е медицентър на ΔABC и

$$AH = BH = CH = \frac{2}{3}h_{\Delta ABC} = \sqrt{3}.$$



Фигура 4

а) От правоъгълния ΔBHD по Питагорова теорема намираме $BD = 2$.

б) С Хероновата формула изчисляваме $S_{\Delta ABD} = \frac{3\sqrt{7}}{4}$. Тогава

$$S = 3S_{\Delta ABD} = \frac{9\sqrt{7}}{4}.$$

в) Накрая за обема имаме

$$V = \frac{DH \cdot S_{\Delta ABC}}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Пример 2 *(зад. 4, стр. 93, „Сборник по математика за 10 клас“, изд. „Анубис“, Г. Кожухарова, И. Марашева, П. Недевски, Ю. Цветков. София, 2019)* Височината на правилна триъгълна пирамида има дължина $\sqrt{13}$, а обемът ѝ е $3\sqrt{39}$. Намерете основния ръб a, околния ръб l, апотемата k и лицето на пълната повърхнина S_1.

Решение. Нека $BP \perp AC$ и $DH \perp (ABC)$. Ясно е, че $H \in BP$ (вж. фигура 5). По формулата за обем (3) имаме

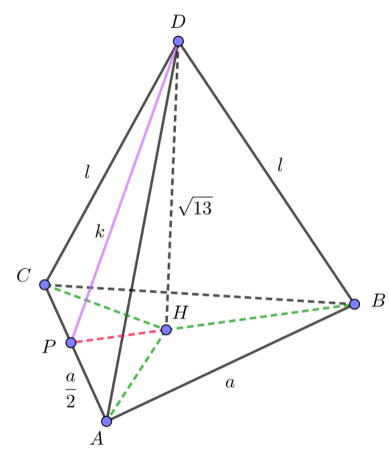
$$V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot DH \Rightarrow 3V = S_{\Delta ABC} \cdot DH.$$

Очевидно $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2 \sin 60^\circ}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Заместваме в израза за обема и получаваме последователно

$$9\sqrt{39} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{13} \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6.$$

При така намерената дължина на основния ръб a от правоъгълния ΔBAP намираме $BP = 3\sqrt{3}$. Както в предишната задача, точка H е медицентърът на основата, следователно $BH = 2\sqrt{3}$ и $HP = \sqrt{3}$. Чрез прилагане на Питагорова теорема в ΔBHD и ΔDPH веднага пресмятаме $l = 5$ и $k = 4$.

Накрая от формула (2) получаваме $S_1 = 36 + 9\sqrt{3}$. $\square$



Фигура 5

Пример 3 *(зад. 21.19, стр. 98, „Сборник по математика за 10 клас“, изд. „Коала прес“, Пенка Рангелова. Пловдив, 2019)* В правилна триъгълна пирамида с основа ΔABC и връх M точката P е среда на височината на пирамидата, спусната от върха M.
а) Ако околен и основен ръб на пирамидата са равни, да се намери $\measuredangle APB$.
б) Ако $\measuredangle APB = \alpha$, да се намери отношението между дължините на околен и основен ръб на пирамидата.

Решение, а). Да означим ръба на пирамидата с $2x$ и да използваме някои от резултатите, получени в пример 1 и пример 2. Имаме

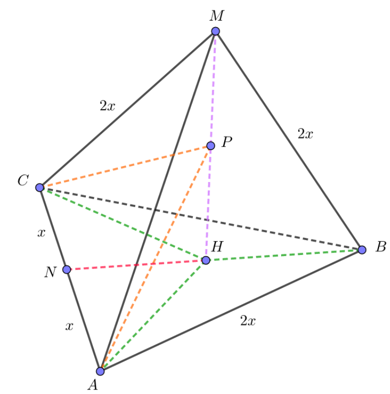
$$AH = BH = CH = \frac{2x}{\sqrt{3}},$$

а от правоъгълните триъгълници BHM и AHP с Питагорова теорема пресмятаме съответно

$$MH = \frac{4x}{\sqrt{6}}, \ \ AP = x\sqrt{2}.$$

Тъй като $\Delta AHP \simeq \Delta CHP$ (по първи признак), то $AP = CP$. Така ΔAPC е равнобедрен с бедра $AP = CP = x\sqrt{2}$, основа $AC = 2x$ и ъгъл срещу основата CPA. Прилагаме косинусова теорема и имаме:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AP^2 + CP^2 - 2.AP.CP.\cos\measuredangle CPA \\ &\Rightarrow 4x^2 = 4x^2 - 4x^2\cos\measuredangle CPA \\ &\Rightarrow \cos\measuredangle CPA = 0 \\ &\Rightarrow \measuredangle CPA = 90^\circ. \end{aligned}$$



Фигура 6

б) Нека основният ръб на пирамидата има дължина $2x$. Да означим още $AP = CP = y$ (вж. фигура 7). По синусова теорема за ΔACP имаме

$$\frac{2x}{\sin\alpha} = \frac{y}{\cos\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow y = \frac{2x\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{2x\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow y = \frac{x}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

От **а)** знаем, че $AH = BH = CH = \frac{2x}{\sqrt{3}}$. За ΔAPH прилагаме Питагорова теорема, получаваме последователно

$$HP^2 = AP^2 - AH^2 \Rightarrow HP^2 = y^2 - \left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow HP = \sqrt{\frac{3y^2 - 4x^2}{3}}.$$

Тогава височината на пирамидата има дължина

$$MH = 2HP = 2\sqrt{\frac{3y^2 - 4x^2}{3}}.$$

От правоъгълния ΔBHM отново с Питагорова теорема изчисляваме и дължината на околния ръб на пирамидата:

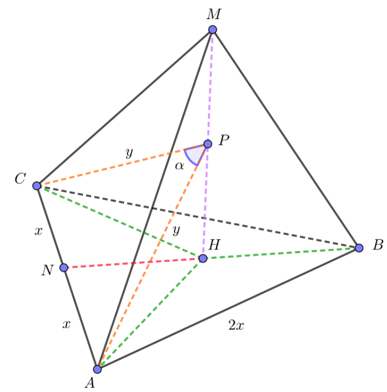
$$BM = 2\sqrt{y^2 - x^2}.$$

За частното от дължините на околния и основния ръб получаваме

$$\frac{BM}{AC} = \frac{2\sqrt{y^2 - x^2}}{2x} = \frac{1}{x}\sqrt{y^2 - x^2}.$$

Да изразим стойността на последния израз чрез известния ъгъл α. Очевидно

$$y^2 - x^2 = \frac{x^2}{\sin^2 \dfrac{\alpha}{2}} - x^2 = x^2 \frac{1 - \sin^2 \dfrac{\alpha}{2}}{\sin^2 \dfrac{\alpha}{2}}$$
$$= x^2 \frac{\cos^2 \dfrac{\alpha}{2}}{\sin^2 \dfrac{\alpha}{2}} = \left(x \cot \frac{\alpha}{2}\right)^2.$$



Фигура 7

Понеже $0° < \alpha < 180°$, то $0° < \dfrac{\alpha}{2} < 90°$ и $\cot \dfrac{\alpha}{2} > 0$. Установяваме, че

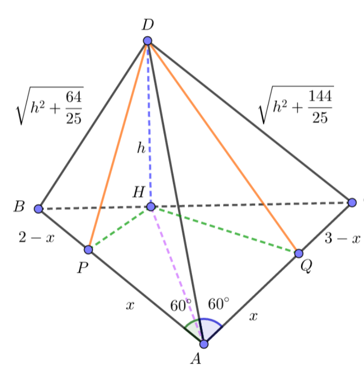
$$\sqrt{y^2 - x^2} = \sqrt{\left(x \cot \frac{\alpha}{2}\right)^2} = x \cot \frac{\alpha}{2}.$$

Окончателно търсеното отношение на околния и основния ръб на пирамидата е $\dfrac{BM}{AC} = \cot \dfrac{\alpha}{2}$. $\square$

Пример 4 *(зад. 9.6, стр. 40, „Сборник по математика за 9 — 12 клас и кандидат-студенти“, изд. „Веди“, Кероპе Чакърян, Пламен Сидеров, Ваня Хаджийски. София, 2005)* В триъгълна пирамида $ABCD$ околната стена BCD е перпендикулярна на основата ABC и ръбът AD сключва с ръбовете AB и AC ъгли с големина $60°$. Да се намери обемът на пирамидата, ако $AB = 2$, $BC = 4$ и $AC = 3$.

Решение. Тъй като околната стена BCD е перпендикулярна на основата ABC, то височината $DH = h$ на пирамидата лежи в тази стена и ортогоналната ѝ проекция е точка от ръба BC (вж. фигура 8).

Нека $DP \perp AB$ и $DQ \perp AC$. По теоремата за трите перпендикуляра $HP \perp AB$ и $HQ \perp AC$. Установяваме, че $\Delta ADP \simeq \Delta ADQ$ (страната AD е обща, $\measuredangle DAP = \measuredangle DAQ = 60°$ и $\measuredangle ADP = \measuredangle ADQ = 30°$). От еднаквостта имаме $AP = AQ$ и $DP = DQ$. Тогава и $\Delta HDP \simeq \Delta HDQ$ (по катет



Фигура 8

и хипотенуза). Следователно $HP = HQ$. Но това означава, че т. H е на равни разстояния от отсечките AB и AC и значи лежи върху ъглополовящата на $\measuredangle BAC$.

По свойството на ъглополовящата изчисляваме $CH = \dfrac{12}{5}$ и $BH = \dfrac{8}{5}$. За дължината на ъглополовящата получаваме $AH = \dfrac{3\sqrt{6}}{5}$. Сега от правоъгълните триъгълници AHD, BHD и CHD веднага намираме

$$AD = \sqrt{h^2 + \frac{54}{25}},\ \ BD = \sqrt{h^2 + \frac{64}{25}},\ \ CD = \sqrt{h^2 + \frac{144}{25}}.$$

Прилагаме косинусова теорема за страната BD в ΔABD (същият резултат ще се получи, ако разгледаме ΔACD) и пресмятаме $h = \dfrac{3\sqrt{3}}{5}$.

Накрая от Хероновата формула за лицето на основата имаме

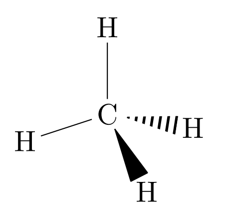
$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{15}}{4},$$

а за търсения обем —

$$V = \frac{DH.S_{\Delta ABC}}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{5} \cdot \frac{3\sqrt{15}}{4} = \frac{9}{4\sqrt{5}}.\ \square$$

Пример 5 Като се сведе чисто химичната представа за структурната формула на органичното съединение метан $\mathbf{CH_4}$ до стереометрична конструкция, да се пресметне валентният ъгъл в молекулата на метана.

Решение. Метанът е реактивоспособно органично съединение. Молекулният скелет представлява въглероден атом **C**, свързан посредством четири еднакви по здравина и дължина σ-връзки с четири водородни атома **H**:



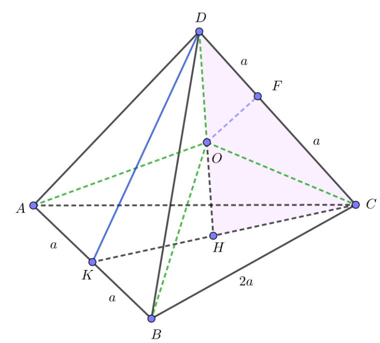
Стереометричната представа за структурата на молекулата е правилен тетраедър, в чиито върхове са позиционирани водородните атоми, а в центъра — въглеродният атом.

Нека $ABCD$ е правилният тетраедър с център O, изобразен на фигура 9. Тогава всяка от σ-връзките е всъщност разстоянието от точка O до върховете на тетраедъра, а валентният ъгъл — ъгълът между две съседни валентни черти. Да означим ръба на тетраедъра с $2a$. Ще пресметнем мярката на $\measuredangle COD$.

Тъй като тетраедърът е правилен, околните ръбове са равни и следователно ще имат равни проекции върху основата. Ако $DH = h$ е височината на пирамидата, то $HA = HB = HC$. Оттук установяваме, че точка H е центърът на ΔABC.

Нека $OF \perp CD$. Понеже $OC = OD$, то отсечката OF лежи върху симетралата на ръба CD, откъдето F е среда на този ръб. Веднага се вижда, че $\Delta DHC \sim \Delta DFO$ (по първи признак)

$$\Rightarrow \frac{DH}{DF} = \frac{DC}{DO} \Rightarrow \frac{h}{a} = \frac{2a}{DO} \Rightarrow DO = \frac{2a^2}{h}. \tag{4}$$



Фигура 9

Сега ще изразим височината h чрез ръба a на тетраедъра. Построяваме височината CK в ΔABC. От правоъгълния ΔBCK с Питагорова теорема намираме $CK = a\sqrt{3}$. Но точка H е медицентърът на основата

$$\Rightarrow \frac{CH}{HK} = \frac{2}{1} \Rightarrow HK = \frac{1}{3}CK = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Тъй като $\Delta ABC \simeq \Delta ABD$, то $CK = DK$. Сега от ΔDHK отново с Питагорова теорема изчисляваме $h = \frac{4a}{\sqrt{6}}$. Замествайки в (4), намираме, че

$$DO = \frac{3a}{\sqrt{6}}. \tag{5}$$

Накрая, като използваме (5), от косинусова теорема за равнобедрения ΔCOD достигаме до уравнението

$$\cos \measuredangle COD = -\frac{1}{3}.$$

С помощта на таблица, калкулатор или подходяща компютърна програма получаваме и търсения резултат:

$$\measuredangle COD = 109,4712206^\circ.$$

Окончателно с точност 10^{-2} можем да приемем, че валентният ъгъл на органичното съединение метан е $109,47^\circ$, което отговаря напълно на химичните измервания в лабораторни условия. $\square$

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА

Задача 1 За правилна четириъгълна пирамида с основен ръб 4 и височина 1 да се намери околният ръб на пирамидата.
Отг. 3

Задача 2 В правилна четириъгълна пирамида основният ръб е $2\sqrt{2}$, а околният ръб е 5. Намерете височината на пирамидата.
Отг. 3

Задача 3 В правилна четириъгълна пирамида основният ръб е 3, а височината — 2. Намерете апотемата на пирамидата.
Отг. $2,5$

Задача 4 В правилна триъгълна пирамида околният ръб е 10, а лицето на околната ѝ повърхнина е 144. Да се намерят основният ръб и апотемата на пирамидата.
Отг. 6 и 16 или 16 и 6

Задача 5 Основата на пирамида е правоъгълник със страни 6 и 8. Всички околни ръбове имат дължина 13. Да се намери обемът на пирамидата.
Отг. 192

Задача 6 Основният ръб на правилна триъгълна пирамида е a, а околната стена е наклонена спрямо основата под ъгъл φ. Намерете обема и лицето на пълната повърхнина на пирамидата.
Отг. $V = \dfrac{a^3}{24}\tan\varphi$, $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1+\dfrac{1}{\cos\varphi}\right)$

Задача 7 Да се намери обемът на правилна четириъгълна пирамида, ако дължината на околния ѝ ръб е b, а ъгълът между две съседни околни стени е 120°.
Отг. $\dfrac{4\sqrt{3}}{27}b^3$

Задача 8 Основата на четириъгълна пирамида $ABCDV$ е ромб $ABCD$ с диагонали $AC = 60$ и $BD = 80$. Върхът V се проектира в пресечната

точка на диагоналите на ромба, а височината на пирамидата има дължина 7. Намерете лицето на повърхнината и обема на пирамидата.
Отг. $S_1 = 4900$, $V = 5600$

Задача 9 В триъгълна пирамида $ABCD$ $AC = 6$, $BC = 8$, $AB = 10$ и $AD = BD = CD = 13$. Намерете обема на пирамидата.
Отг. 96

Задача 10 Основата на пирамида е трапец с основи 8 и 10. Околните ѝ ръбове сключват ъгли 60° с основата. Намерете обема на пирамидата, ако върхът ѝ се проектира в средата на една от страните на трапеца.
Отг. $45\sqrt{3}$

Задача 11 Околните ръбове AM, BM, CM и DM на четириъгълната пирамида $ABCDM$ сключват с основата равни ъгли с големина α. Намерете обема на пирамидата, ако $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 2$ и $AD = 3$.
Отг. $\dfrac{2\sqrt{7}}{3}\tan\alpha$

Задача 12 Намерете обема на пирамида с основа равнобедрен трапец с основи 9 и 1, ако двустенните ъгли при всички основни ръбове са равни на 45°.
Отг. $7,5$

Задача 13 В триъгълна пирамида $ABCM$ околната стена (BCM) е перпендикулярна на равнината на основата (ABC), $BM = CM = 2$ и всеки два околни ръба сключват помежду си ъгъл 60°. Пресметнете обема на пирамидата.
Отг. $\sqrt{2}$

Задача 14 Стените (ACB) и (ACD) на триъгълната пирамида $ABCD$ са равнобедрени правоъгълни триъгълници с хипотенуза $AC = \sqrt{2}$ и сключват помежду си ъгъл 45°. Намерете обема на пирамидата.
Отг. $\dfrac{2}{3}$

Задача 15 Двустенният ъгъл при основата на правилна триъгълна пирамида е α. Да се намери тангенсът на ъгъла между околен ръб и основата.
Отг. $\dfrac{1}{2}\tan\alpha$

Задача 16 В тетраедър $ABCD$ $AB = 3$, $\measuredangle ACB = 30^\circ$ и $DA = DB = DC = 5$. Пресметнете височината му през върха D.
Отг. 4

Задача 17 Да се намери височината на триъгълна пирамида $ABCV$, за която $AB = BC = VA = VC$, $BV = 4\sqrt{3}$, периметърът на основата е 16 и околните стени образуват с основата равни двустенни ъгли.
Отг. $\sqrt{30}$

Задача 18 Основата на пирамида е ромб с дължина на страната a. Две от околните стени са перпендикулярни на равнината на основата и сключват помежду си ъгъл 45°. Една от другите две околни стени сключва с равнината на основата ъгъл 60°. Да се намери обемът на пирамидата.
Отг. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Задача 19 Основата на четириъгълна пирамида $ABCDM$ е трапец $ABCD$ с периметър 90 и малка основа $CD = 18$. Диагоналът BD разполовява $\measuredangle ADC$. Намерете обема на пирамидата, ако дължините на всичките ѝ околни ръбове са равни на 20.
Отг. $756\sqrt{7}$

Задача 20 В триъгълна пирамида $ABCM$ четири от ръбовете са равни на 1 и ръбът CM е перпендикулярен на равнината (ABC). Намерете:
а) обема и лицето на повърхнината на пирамидата;
б) разстоянието от точка C до центъра на окръжността, описана около ΔABM;
в) тангенса на ъгъла между равнините (ABM) и (BCM).
Отг. **а)** $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$, $\dfrac{1}{4}(4+\sqrt{3}+\sqrt{7})$; **б)** $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$; **в)** $\sqrt{6}$

Литература

[1] **Г. Кожухарова, И. Марашева, П. Недевски, Ю. Цветков.** *„Сборник по математика за 10. клас“*. Издателство „Анубис“. София, 2019

[2] **К. Чакърян, Пл. Сидеров, В. Хаджийски.** *„Сборник по математика за 9 — 12 клас и кандидат-студенти“*. Издателство „Веди“. София, 2005

[3] **К. Коларов, Хр. Лесов.** *„Сборник от задачи по геометрия VII – XII клас“*. Издателство „Интеграл“. Добрич, 2007

[4] **П. Рангелова.** *„Сборник по математика за X клас“*. Издателство „Коала прес“. Пловдив, 2019

[5] **Ч. Лозанов, Т. Витанов, П. Недевски, Евг. Стоименова.** *„Математика за 12. клас – профилирана подготовка“*. Издателство „Анубис“. София, 2002