Прав кръгов конус

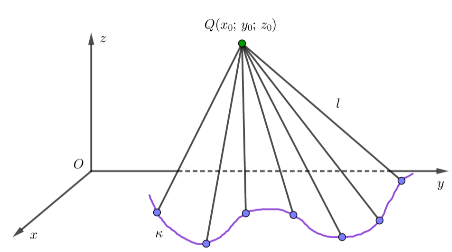
Л. В. Йовков

НПМГ „Акад. Л. Чакалов“

Абстракт

Предложената тема продължава започнатото вече въведение в раздела за ротационни тела, като запознава с другото фундаментално ротационно тяло — конуса. Ще следваме установената вече последователност на разглежданията при стереометричните тела. Както обикновено, ще въведем дефиницията за конус и неговите основни елементи, а след това ще представим директно формулите за повърхнина и обем. Навсякъде в понататъшното изложение ще предполагаме, че конусът е прав и кръгов, т. е. основата му е кръг, а височината му минава през центъра на този кръг. В практиката разнообразието от задачи за конуси е даже по-голямо от това при задачи с цилиндри. Този факт, от своя страна, потенциално увеличава и възможната им трудност.

Нека $Oxyz$ е тримерна декартова координатна система. Нека още κ е дадена линия без самопресичания, разположена без ограничение на общността в равнината Oxy, а M и $Q(x_0;\, y_0;\, z_0)$ са две произволни точки, такива, че $M \in \kappa$, а $Q \notin \kappa$. Да означим с l правата MQ. Когато точката M описва линията κ, правата MQ описва една повърхнина в пространството, която се нарича *конусна повърхнина (конус)* [2]. Точката Q наричаме *връх на конуса*, правата MQ — *образуваща на конуса*, а кривата κ — *управителна крива на конуса* (вж. фигура 1).



Фигура 1: *Конусна повърхнина*

В специалния случай, когато управителната крива е окръжност, конусът се превръща в кръгов конус. Да означим с O центъра на окръжността и с r — нейния радиус.

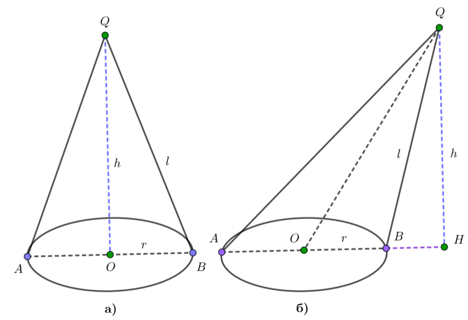
Дефиниция 1 *Основа на кръгов конус се нарича кръгът, ограничен от окръжността к.*

Дефиниция 2 *Височина на кръгов конус се нарича разстоянието от върха му Q до равнината на основата.*

Дефиниция 3 *Правата QO, минаваща през върха на конуса и през центъра на основата му, се нарича ос на конуса.*

Ако правата QO е перпендикулярна на основата на конуса, този конус е *прав кръгов*, в противен случай — *наклонен кръгов* (вж. фигура 2). Оттук насетне ние ще разглеждаме само прави кръгови конуси.

Нека λ е равнина, съдържаща оста на конуса. Тогава тази равнина ще пресече основата на конуса в диаметър, а околната му повърхнина — по две образуващи. Ако означим диаметъра с AB, то ще имаме $QA = QB$ при правия кръгов конус и $QA \neq QB$ при наклонения кръгов конус. Следователно при пресичането на кръгов конус с равнина, минаваща през оста QO, сечението е ΔQAB. Този триъгълник винаги ще бъде равнобедрен в случая на прав кръгов конус.



Фигура 2: *Прав кръгов **(а)** и наклонен кръгов **(б)** конус*

Понеже правият кръгов конус може да се разглежда като получен от правилна n-ъгълна пирамида при неограничено удвояване на броя на върховете в основата ѝ, то формулите за повърхнина и обем ще изглеждат така:

$$S_{\text{ок.}} = \pi r l, \tag{1}$$

$$S_1 = S_{\text{ок.}} + \pi r^2 = \pi r(l + r), \tag{2}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h. \tag{3}$$

Пример 1 ([7], стр. 60, зад. 1) Образуващата на прав кръгов конус е 12, а височината му е 6. Намерете:

а) лицето на околната повърхнина;
б) лицето на пълната повърхнина;
в) обема на конуса.

Решение. При стандартните означения за елементите на прав кръгов конус $h = 6$ и $l = 12$. От правоъгълния ΔBOQ на фигура 2, а) чрез прилагане на Питагорова теорема последователно получаваме

$$h^2 + r^2 = l^2 \Rightarrow r^2 = l^2 - h^2 = 12^2 - 6^2 = 6^2(2^2 - 1) = 3.6^2.$$

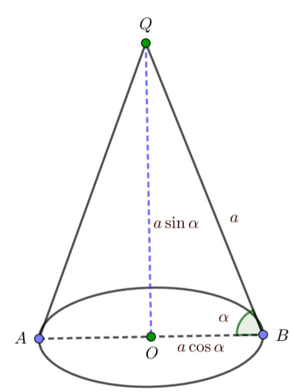
Оттук след кореннуване пресмятаме $r = 6\sqrt{3}$. Сега е необходимо да използваме формулите (1) — (3). Като заместим със съответните числени стойности, намираме

$$\begin{aligned} S_{\text{ок.}} &= \pi r l = \pi \cdot 6\sqrt{3} \cdot 12 = 72\pi\sqrt{3}, \\ S_1 &= S_{\text{ок.}} + \pi r^2 = \pi(72\sqrt{3} + 108), \\ V &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 108 \cdot 6 = 216\pi. \ \Box \end{aligned}$$

Пример 2 ([7], стр. 60, зад. 6) Образуващата на конус сключва с равнината на основата ъгъл α и има дължина a. Намерете обема на конуса.

Решение.
Нека върхът на конуса е точка Q, осното сечение е ΔABQ, а центърът на основата на конуса — точка O (вж. фигура 3). При стандартните означения за елементите на конус от правоъгълния ΔBOQ веднага получаваме $h = a \sin\alpha$ и $r = a\cos\alpha$. Тогава по формула (3) за обема имаме

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi (a\cos\alpha)^2 \cdot a\sin\alpha = \frac{\pi a^3 \sin\alpha \cos^2\alpha}{3}. \ \Box$$



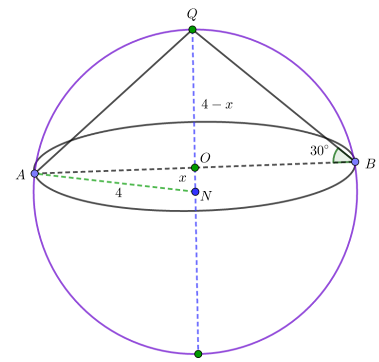
Фигура 3

Пример 3 ([7], стр. 60, зад. 9; [8], стр. 95, зад. 9) Ъгълът между образуващата на конус и основата му е 30°, а окръжността, описана около осното му сечение, има радиус 4. Намерете обема на конуса.

Решение.

Ще следваме означенията, дадени на фигура 4. Да означим с N центъра на окръжността, описана около осното сечение. Тогава ще е изпълнено $NA = NB = NQ = R_{\Delta ABQ} = 4$. Понеже $\measuredangle AQB = 120^\circ$, то центърът на окръжността ще е външна точка за ΔABQ.

Нека $NO = x$ и $OQ = 4 - x$, $0 < x < 4$. От правоъгълния ΔBOQ получаваме $BQ = 2(4 - x)$. От синусова теорема за ΔABQ следва, че



Фигура 4

$$\frac{AQ}{\sin 30^\circ} = 2R_{\Delta ABQ} \Rightarrow 2(4 - x) = 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$2(4 - x) = 4 \Rightarrow 8 - 2x = 4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2.$$

Така намираме $QO = h = 2$, а с тригонометрични зависимости в ΔBOQ — и $r = 2\sqrt{3}$. Оттук за обема имаме

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 8\pi. \ \square$$

Пример 4 ([7], стр. 61, зад. 13) Осното сечение на конус е равностранен триъгълник с лице 9. Намерете повърхнината и обема на конуса.

Решението извършете самостоятелно!

Пример 5 ([7], стр. 61, зад. 17) Осното сечение на прав кръгов конус има лице Q, а образуващата сключва с равнината на основата ъгъл α. Намерете обема на конуса.

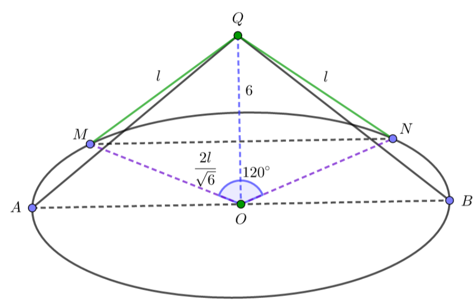
Решението извършете самостоятелно!

Пример 6 ([1], стр. 98, зад. 16) Височината на прав кръгов конус е 6. Две перпендикулярни помежду си образувателни разделят основата на две дъги, по-малката от които има мярка 120°. Намерете обема на конуса.

Решение.

Нека MN е хорда в основата $\kappa(O; OA)$ на конуса, такава, че дъгата MN има градусна мярка 120°. Понеже $\measuredangle MON$ е централен за окръжността, то

$$\measuredangle MON = \widehat{MN} = 120^\circ.$$



Фигура 5

Да използваме познатите означения $MQ = NQ = l$. От условието имаме $MQ \perp NQ$. Тогава, използвайки Питагорова теорема в ΔMNQ, пресмятаме $MN = l\sqrt{2}$. По-нататък: от синусова теорема за ΔMON следва

$$\frac{MN}{\sin 120^\circ} = \frac{MO}{\sin 30^\circ} \Rightarrow MO = \frac{l\sqrt{2}\sin 30^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{2l}{\sqrt{6}}.$$

Сега, като приложим отново Питагорова теорема, но в ΔMOQ, намираме

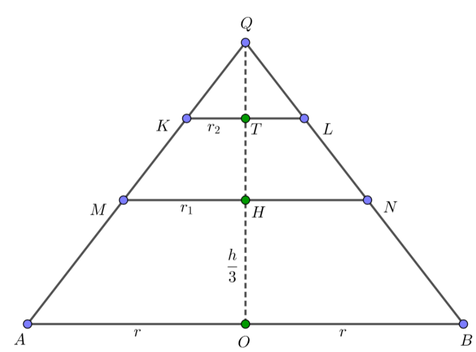
$$MO^2 + OQ^2 = MQ^2 \Rightarrow \left(\frac{2l}{\sqrt{6}}\right) + 6^2 = l^2.$$

Като решим така полученото квадратно уравнение, определяме $l = 6\sqrt{3}$. Накрая от формулата за обем на конус (3) следва $V = 144\pi$. $\square$

Пример 7 ([1], стр. 98, зад. 13) Две точки разделят образувателната на конус на три равни части. През точките са построени успоредни равнини, които разделят конуса на три тела. Намерете отношението на обемите им, смятано от върха на конуса.

Решение.

Нека AB е диаметър на конуса с връх Q. Избираме върху образуващата AQ точки M и K, такива, че $AM = MK = KQ$. През т. M и K построяваме равнините α и β, съответно успоредни на равнината на основата. Сеченията на конуса с тези равнини ще бъдат два подобни кръга. Да означим диаметрите им през т. M и т.



Фигура 6

K с MN и KL. Нека още точка O е центърът на основата на конуса и $QO \cap MN = H$, $QO \cap KL = T$. На фигура 6 е представено осното сечение на разглежданата геометрична конструкция. Както лесно може да се забележи, т. H и т. T са среди на отсечките MN и KL и следователно са центрове на споменатите кръгове.

Да означим с r, r_1 и r_2 радиусите съответно на кръговете $k(O;\, OA)$, $k_1(H;\, HM)$ и $k_2(T;\, TK)$, а с V, V_1 и V_2 — обемите на конусите с основи тези кръгове. Понеже по свойствата на успоредното проектиране $QT : QH = 1 : 2$, то за частното от обемите на най-горния конус и на този с основа кръга k_1 имаме

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\dfrac{1}{3}\pi r_2^2 \cdot QT}{\dfrac{1}{3}\pi r_1^2 \cdot QH} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \cdot \frac{QT}{QH}.$$

Но $\Delta KTQ \sim \Delta MHQ$

$$\Rightarrow \frac{QT}{QH} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Като заместим този израз в горното равенство, ще получим

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

От последната пропорция имаме $V_2 = s$, $V_1 = 8s$ за някакъв множител $s > 0$.

Съвършено аналогично се доказва, че

$$\frac{V_2}{V} = \left(\frac{r_2}{r}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

Тогава

$$\frac{s}{V} = \frac{1}{27} \Rightarrow V = 27s.$$

Остава да съобразим, че построявайки равнините α и β, ние сме разбили първоначалния конус на един по-малък конус с връх — върха на дадения конус, и два други пресечени конуса с основи — последователните кръгове от делението. Окончателно търсеното отношение е

$$V_2 : (V_1 - V_2) : (V - V_1) = s : 7s : 19s = 1 : 7 : 19. \ \square$$

Пример 8 ([5], стр. 105, зад. 23.13; [6], стр. 130, зад. 552) Лицето на сечението DAB през върха D на прав кръгов конус е равно на 42. Точките A и B лежат върху окръжността на основата на конуса и я делят в отношение $1:5$. Да се намери обемът на конуса, ако $\cos\measuredangle DAB = \dfrac{3}{\sqrt{58}}$.

Решение.
Да изберем точките A, B и N върху окръжността така, че да е изпълнено

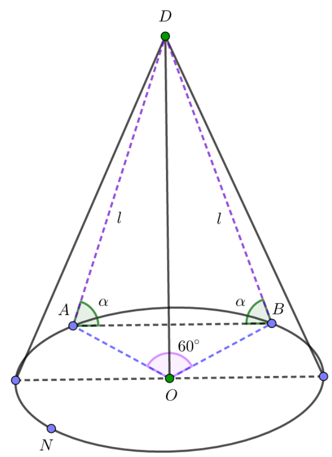
$$\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{ANB} = 1:5 \text{ (вж. фигура 7).}$$

Тогава очевидно $\overset{\frown}{AB} = 60^\circ$ и от определението за централен ъгъл имаме $\measuredangle AOB = 60^\circ$.

Да въведем означенията $AD = BD = l$ и $\measuredangle BAD = \measuredangle ABD = \alpha$. По условие $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{58}}$. Оттук веднага пресмятаме, че $\sin\alpha = \dfrac{7}{\sqrt{58}}$. Сега поради тъждеството

$$\sin 2y = 2\sin y\cos y,$$

изпълнено за всяка стойност на ъгъла y, установяваме, че $\sin 2\alpha = \dfrac{21}{29}$.



Фигура 7

Ще открием дължината на отсечката l, като използваме, че $S_{\Delta DAB} = 42$. От формулата

$$S_{\Delta DAB} = \frac{l^2}{2}\sin\measuredangle ADB = \frac{l^2}{2}\sin(180^\circ - 2\alpha)$$

след заместване с числовите данни достигаме до уравнението $l^2 = 4.29$, чийто единствен положителен корен е $l = 2\sqrt{29}$.

По синусова теорема за ΔABD имаме

$$\frac{AB}{\sin\measuredangle ADB} = \frac{BD}{\sin\measuredangle BAD} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 2\alpha} = \frac{l}{\sin\alpha} \Rightarrow AB = \frac{6l}{\sqrt{58}}.$$

Но $OA = OB$ и $\measuredangle AOB = 60^\circ$. Следователно ΔAOB е равностранен и

$$OA = OB = AB = \frac{12}{\sqrt{2}}.$$

Накрая от правоъгълния ΔAOD с Питагорова теорема откриваме, че $DO = 2\sqrt{11}$. По формула 3 окончателно получаваме $V = 48\pi\sqrt{11}$. $\square$

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА

Задача 1 ([5], стр. 104, зад. 23.1) За прав кръгов конус с височина h, радиус r и образуваща l намерете:
а) h, ако $l = 10$, $r = 6$;
б) l, ако $r = 2,5$, $h = 4,6$;
в) r, ако $l = 7,9$, $h = 5,8$.

Отг. $h = 8$; $l = 5,236$; $r = 5,364$

Задача 2 ([5], стр. 104, зад. 23.2) Намерете ъгъла α (негова тригонометрична функция) при върха на осното сечение на прав кръгов конус, ако:
а) $l = 16,4$, $r = 7,8$; **б)** $l = 111,6$, $h = 79,6$

Отг. $\alpha = 56°48'$; $\alpha = 89°$

Задача 3 ([5], стр. 104, зад. 23.5) Даден е прав кръгов конус с образуваща l и дължина на окръжността в основата — c. Намерете обема му.

Отг. $\dfrac{c^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 l^2 - c^2}$

Задача 4 ([5], стр. 104, зад. 23.7) Лицето на повърхнината на прав кръгов конус е 24π, а лицето на осното сечение е 12. Намерете дължините на радиуса на основата, на височината на конуса и на образувателната му.

Отг. $r = 3$; $h = 4$; $l = 5$

Задача 5 ([5], стр. 104, зад. 23.9) Лицето на околната повърхнина на прав кръгов конус е Q, а това на пълната — P. Намерете ъгъла β между височината и образуващата.

Отг. $\sin\beta = \dfrac{P - Q}{Q}$

Задача 6 ([5], стр. 104, зад. 23.11) Лицето на околната повърхнина на прав кръгов конус е сбор от лицата на основата му и негово осно сечение. Намерете обема на конуса, ако радиусът му е r.

Отг. $\dfrac{2\pi^2 r^3}{3(\pi^2-1)}$

Задача 7 ([5], стр. 105, зад. 23.15) През върха на прав кръгов конус са построени две равнини. Едната от тях сключва с основата на конуса ъгъл α и отсича хорда с дължина a, а другата сключва с основата на конуса ъгъл β и отсича хорда с дължина b. Намерете обема на конуса.

Отг. $\dfrac{\pi}{24} \cdot \dfrac{b^2\cot^2\alpha - a^2\cot^2\beta}{(\cot^2\alpha - \cot^2\beta)^{3/2}} \cdot \sqrt{b^2-a^2}$

Задача 8 ([4], стр. 66, зад. 34.15) Лицето на осното сечение на конус е два пъти по-малко от лицето на правилен шестоъгълник, вписан в основата на конуса. Да се намери ъгълът α между образувателната и основата на конуса.

Отг. $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

Задача 9 ([4], стр. 69, зад. 34.31) В основата на конус е вписан квадрат със страна a. Равнина, минаваща през страна на квадрата и върха на конуса, образува сечение, което е равнобедрен триъгълник с ъгъл при върха α. Да се намери височината на конуса.

Отг. $\dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$

Задача 10 ([4], стр. 69, зад. 34.32) Образувателната и височината на конус са съответно 13 и 12. Конусът е пресечен с права, успоредна на основата и на разстояние 6 от нея. Да се намери дължината на онази отсечка от правата, която е разположена вътре в конуса, ако правата е на разстояние 2 от височината му.

Отг. 3

Задача 11 ([4], стр. 69, зад. 34.33) Височината на конус е 24, а радиусът на основата му е 12. В конуса, успоредно на височината му, е вписан квадрат със страна 6, два от върховете на който лежат на основата на конуса, а другите два — на околната повърхнина. Да се намери разстоянието между височината и равнината на квадрата.

Отг. $6\sqrt{2}$

Задача 12 ([4], стр. 83, зад. 36.53) Радиусът на конус е R, а ъгълът при върха на развивката на околната му повърхнина е прав. Да се намери обемът на конуса.

Отг. $\dfrac{\pi R^3\sqrt{15}}{3}$

Задача 13 * ([4], стр. 70, зад. 34.39) Радиусът на конус е R, а ъгълът при върха на развивката на околната му повърхнина е прав. Да се намери височината на конуса.

Отг. $R\sqrt{15}$

Задача 14 ([4], стр. 82, зад. 36.39) Да се намери обемът на конус, ако средата на височината му е отдалечена от околната му повърхнина на разстояние a, а ъгълът между образувателна и равнината на основата е α.

Отг. $\dfrac{8\pi a^3}{3\sin^2\alpha\cos\alpha}$

Задача 15 * ([3], стр. 85, зад. 17) Ъгълът при върха на осното сечение на прав кръгов конус е $\dfrac{2\pi}{3}$, а образувателната му е $l = \sqrt{2}$. Нека S е лицето на сечението на конуса с равнина, минаваща през две образувателни, а x — мярката на ъгъла между тези две образувателни.
а) Изразете S като функция на x.
б) Намерете в кой интервал тази функция расте и в кой намалява.
в) Намерете най-голямата стойност на S.
г) Постройте графиката на функцията $S = S(x)$.
д) Като ползувате така построената графика на $S = S(x)$, намерете при какви стойности на x лицето на сечението е по-голямо от лицето на осното сечение на конуса.
Упътване. Използвайте разгледаните в 9 клас понятия „растяща функция“, „намаляваща функция“, „най-голяма стойност в интервал“ и „най-малка стойност в интервал“, където те бяха изложени върху квадратната функция $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Задача 16 ([4], стр. 69, зад. 34.34) Радиусът и височината на конус имат дължина 1. Да се намери ръбът на куба, вписан в конуса, където едната стена на куба лежи върху основата на конуса.

Отг. $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

Задача 17 ([4], стр. 79, зад. 36.19) В конус с височина 1 е вписан цилиндър. Да се намери височината на цилиндъра, ако обемът му е равен на обема на отсечения над него конус.

Отг. $\frac{1}{4}$

Задача 18 * ([4], стр. 84, зад. 36.58) Перпендикулярът от центъра на основата на конус към негова образувателна се върти около оста на конуса. Получената ротационна повърхнина разполовява обема на конуса. Да се намери косинусът на ъгъла между образувателна и височината на конуса.

Отг. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Задача 19 ([4], стр. 75, зад. 35.44) В конус с височина h и образувателна $\frac{3h}{2}$ е вписан цилиндър, околната повърхнина на който е 4 пъти по-малка от околната повърхнина на конуса. Да се намери височината на цилиндъра.

Отг. $\frac{3h}{4}$ **или** $\frac{h}{4}$

Задача 20 * ([4], стр. 70, зад. 34.41) Конус е вписан в правилен тетраедър с височина h. Да се намери лицето на осното сечение на конуса.

Отг. $\frac{h^2\sqrt{2}}{4}$

Задача 21 * ([4], стр. 77, зад. 35.53) В конус е вписан цилиндър, височината на който е равна на диаметъра на основата на конуса. Повърхнината на цилиндъра е равна на лицето на основата на конуса. Да се намери тангенсът на ъгъла между образувателната и основата на конуса.

Отг. $\frac{2}{5}(4 + \sqrt{6})$

Задача 22 ([4], стр. 81, зад. 36.32) Да се намери частното от обемите на конус и описаната около него четириъгълна пирамида, ако основата ѝ е правоъгълен трапец с остър ъгъл 30°.

Отг. $\dfrac{\pi}{6}$

Задача 23 * ([4], стр. 84, зад. 36.55) В конус е вписана пирамида с основа правоъгълен триъгълник. Околните стени на пирамидата, които минават през катетите на основата, образуват с нея ъгли α и β. Да се намери отношението на обемите на пирамидата и конуса.

Отг. $\dfrac{2\cot\alpha\cot\beta}{\pi(\cot^2\alpha+\cot^2\beta)}$

*Задачите, отбелязани със *, са с повишена трудност и са взети от [3] и [4].*

Литература

[1] **Г. Кожухарова, И. Марашева, П. Недевски, Ю. Цветков.** *„Сборник по математика за 10. клас“*. Издателство „Анубис“. София, 2019

[2] **Гр. Станилов.** *„Аналитична геометрия“*. Издателство „Наука и изкуство“. София, 1974

[3] **Гр. Станилов, А. Лангов, Й. Кучинов, Д. Николов.** *„Геометрия за 10. клас на единното средно политехническо училище“*. Държавно издателство „Народна просвета“. София, 1984

[4] **К. Коларов, Хр. Лесов.** *„Сборник от задачи по геометрия VII – XII клас“*. Издателство „Интеграл“. Добрич, 2007

[5] **П. Рангелова.** *„Сборник по математика за X клас“*. Издателство „Коала прес“. Пловдив, 2019

[6] **П. Рангелова.** *„Сборник задачи за 11. – 12. клас с методични указания“*. Издателство „Коала прес“. Пловдив, 2006

[7] **Ч. Лозанов, Т. Витанов, П. Недевски, Евг. Стоименова.** *„Математика за 12. клас – задължителна подготовка“*. Издателство „Анубис“. София, 2005

[8] **Ч. Лозанов, Т. Витанов, П. Недевски, Евг. Стоименова.** *„Математика за 12. клас – профилирана подготовка“*. Издателство „Анубис“. София, 2002