Метрични зависимости между отсечки в правоъгълен триъгълник. Питагорова теорема

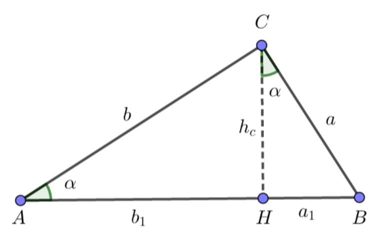
Л. В. Йовков

НПМГ „Акад. Л. Чакалов“

Абстракт

Подобността е едно от най-важните понятия в геометрията изобщо. С нейна помощ се получават редица връзки между отсечки в триъгълника, наречени метрични зависимости. В настоящата тема ние ще разгледаме основните метрични зависимости за правоъгълния триъгълник.

Нека ΔABC е правоъгълен триъгълник ($\measuredangle C = 90^\circ$) с катети $BC = a$ и $AC = b$, хипотенуза $AB = c$ и височина към нея $CH = h_c$ (вж. фигура 1). Отсечките AH и BH ще наричаме **проекции на катетите върху хипотенузата** и ще означаваме така: $BH = a_1$, $AH = b_1$.



Фигура 1: *Правоъгълен триъгълник*

Да разгледаме ΔAHC и ΔCHB. Очевидно те са подобни по първи признак. От пропорциите

$$\frac{AH}{CH} = \frac{HC}{HB} = \frac{AC}{CB}$$

получаваме $CH^2 = AH.HB$, т. е.

$$h_c^2 = a_1 b_1. \tag{1}$$

Тази връзка е *метрична зависимост между височината към хипотенузата и проекциите на катетите върху хипотенузата.*

По-нататък: понеже $\Delta CHB \sim \Delta ACB$, то

$$\frac{CH}{AC} = \frac{HB}{CB} = \frac{CB}{AB} \Rightarrow BC^2 = BH.AB.$$

Вземайки предвид традиционните означения, достигаме до формулата

$$a^2 = a_1 c, \tag{2}$$

която представлява *метрична зависимост между катета a, неговата проекция a_1 върху хипотенузата и тази хипотенуза c.* Съвършено аналогично се доказва, че

$$b^2 = b_1 c, \tag{3}$$

Събираме почленно (2) и (3):

$$a^2 + b^2 = a_1 c + b_1 c = (a_1 + b_1)c = c.c = c^2,$$

т. е. в правоъгълния триъгълник е изпълнено

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{4}$$

Тази формула е една от най-древните и важни зависимости в геометрията изобщо. Нарича се **Питагорова теорема** и към днешна дата са известни повече от 50 нейни доказателства. Всяка наредена тройка числа $(a; b; c)$, за които са изпълнени условията $a \leq b < c$ и $a^2 + b^2 = c^2$, се нарича *Питагорова тройка числа.* Например Питагорови тройки образуват числата (3; 4; 5), (5; 12; 13), (6; 8; 10) и т. н.

Както ще бъде показано по-нататък, метричните зависимости (1) — (4) съществено се използват за намиране на неизвестни елементи не само на правоъгълен триъгълник, но също така на равнобедрен триъгълник, равнобедрен трапец, правоъгълен трапец и успоредник. Процесът, при който по дадени елементи на конкретна геометрична фигура чрез използване на съответните зависимости пресмятаме останалите ѝ елементи, се нарича **решаване на фигурата**. Да разгледаме някои примери.

Пример 1 *([3], стр. 90, зад. 22.1)* За правоъгълния ΔABC ($\measuredangle C = 90°$) е построена височината CH ($H \in AB$). Ако $AH = 36$ и $BH = 64$, то намерете дължината на AC.

Решение. Нека да използваме означенията от фигура 1. В конкретния случай $a_1 = 64$ и $b_1 = 36$. От (1) веднага пресмятаме $h_c = 48$. С помощта на Питагоровата теорема (4), приложена за ΔAHC (или с метричната зависимост (3)) получаваме $b^2 = 36.100$. Следователно $b = 60$. $\square$

Пример 2 *([3], стр. 90, зад. 22.2)* За правоъгълния ΔABC ($\measuredangle C = 90°$) е построена височината CH ($H \in AB$). Известно е, че $CH = 2$ и $AH = 1$. Намерете дължината на отсечката HB.

Решение. В случая $h_c = 2$ и $b_1 = 1$. По формулата (1) имаме

$$a_1 = \frac{h_c^2}{b_1} \Rightarrow a_1 = 4. \ \square$$

Пример 3 *([3], стр. 91, зад. 22.9)* В правоъгълен триъгълник с катети a и b, хипотенуза c, височина към хипотенузата h_c, ортогонални проекции на катетите върху хипотенузата a_1 и b_1 и лице S намерете пет от тях, ако са известни две:
а) $a = 3$, $b = 4$; **б)** $b = 3$, $c = 8$; **в)** $a = 5$, $S = 10$; **г)** $a = 6$, $h_c = 3$.

Решение, а). За да решим триъгълника, използваме следния ход на работа.

1. **Пресмятане на хипотенузата** c

   Чрез Питагорова теорема веднага намираме $c = 5$.

2. **Пресмятане на проекциите** a_1 **и** b_1

   От формулите за проекциите на катетите (2) и (3) имаме

   $$a_1 = \frac{a^2}{c} = \frac{9}{5},\ b_1 = \frac{b^2}{c} = \frac{16}{5}.$$

3. **Пресмятане на височината** h_c

   Прилагаме метричната зависимост (1) и получаваме $h_c = \dfrac{12}{5}$.

4. **Пресмятане на лицето** S

   С обичайната формула за лице $S = \dfrac{ch_c}{2}$ изчисляваме $S = 6$. $\square$

б) ***Решението извършете самостоятелно!***

в) Ще използваме отново гореописаната последователност в хода на работа.

1. **Пресмятане на катета** b

   От формулата $S = \dfrac{ab}{2}$ получаваме $b = \dfrac{2S}{a} = 4$.

2. **Пресмятане на хипотенузата** c

   След прилагане на Питагорова теорема имаме

   $$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 5^2 + 4^2 = 41 \Rightarrow c = \sqrt{41}.$$

3. **Пресмятане на проекциите a_1 и b_1**

   Заместваме числените стойности във формулите за проекциите и лесно намираме дължините на търсените отсечки:

$$a_1 = \frac{a^2}{c} = \frac{25}{\sqrt{41}},\ b_1 = \frac{b^2}{c} = \frac{16}{\sqrt{41}}.$$

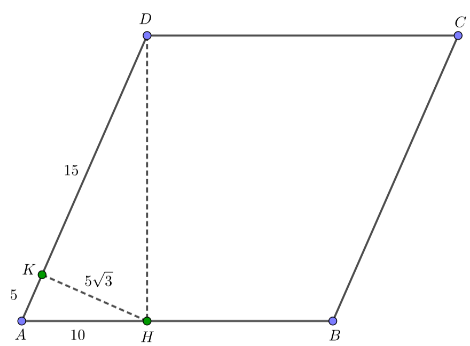
4. **Пресмятане на височината към хипотенузата h_c**

   Имаме $h_c^2 = a_1 b_1 = \dfrac{25.16}{41}$. Следователно $h_c = \dfrac{20}{\sqrt{41}}$. $\square$

г) ***Решението извършете самостоятелно!***

Пример 4 *([1], стр. 231, зад. 5)* Даден е ромб $ABCD$ с височина DH ($H \in AB$). На отсечката AD е взета точка K така, че $HK \perp AD$, $AK = 5$ и $KD = 15$. Намерете мярката на $\measuredangle BAD$.

Решение. В правоъгълния ΔADH отсечката HK е височина към хипотенузата, а отсечките AK и DK — проекции на катетите върху хипотенузата (вж. фигура 2). От метричните зависимости имаме $HK^2 = AK.DK = 3.25$. Тогава $HK = 5\sqrt{3}$. С помощта на Питагорова теорема в правоъгълния ΔAHK пресмятаме $AH = 10$. Сега, понеже в този триъгълник отсечката AK е катет, равен на половината от хипотенузата AH, установяваме, че $\measuredangle AHK = 30°$. Следователно търсеният ъгъл е $\measuredangle KAH = 60°$. $\square$



Фигура 2:

Пример 5 * *([1], стр. 235, зад. 8)* Периметърът на правоъгълния ΔABC с прав ъгъл при върха C е 72. Разликата между дължината на медианата CM и на височината CH е 7. Намерете хипотенузата и лицето на ΔABC.

Решение. Понеже даденият триъгълник не е равнобедрен, е в сила неравенството $CM > CH$. Тогава от условието е изпълнено $CM - CH = 7$.

Медианата m_c към хипотенузата е равна на половината от хипотенузата, а височината h_c към хипотенузата има дължина $\dfrac{ab}{c}$. Последователно имаме:

$$m_c - h_c = 7 \Leftrightarrow \frac{c}{2} - \frac{ab}{c} = 7 \Leftrightarrow \frac{c^2 - 2ab}{2c} = 7.$$

Оттук получаваме

$$c^2 - 2ab = 14c. \tag{5}$$

Освен това по условие за периметъра имаме

$$a + b + c = 72, \tag{6}$$

а от Питагоровата теорема получаваме, че

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{7}$$

Уравненията (5) — (7) водят до следната нелинейна система уравнения:

$$\left| \begin{array}{l} c^2 - 2ab = 14c \\ a^2 + b^2 = c^2 \\ a + b + c = 72. \end{array} \right.$$

Изразяваме дължината на хипотенузата от третото уравнение, след което заместваме в първите две. Достигаме до нелинейна система от втора степен с две неизвестни:

$$\left| \begin{array}{l} \big[72 - (a+b)\big]^2 - 2ab = 14\big[72 - (a+b)\big] \\ a^2 + b^2 = \big[72 - (a+b)\big]^2. \end{array} \right.$$

Поради тъждеството $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ след субституцията $a + b = x$ и $ab = y$ получаваме по-простата система

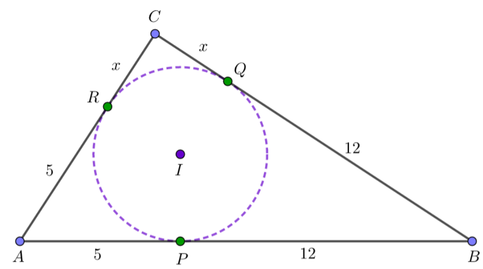
$$\left| \begin{array}{l} (72 - x)^2 - 2y = 14(72 - x),\ 0 < x < 72 \\ x^2 - 2y = (72 - x)^2. \end{array} \right.$$

Нейното единствено решение е наредената двойка $(x; y) = (40; 288)$. Следователно $a + b = 40$ и $ab = 288$.

Накрая пресмятаме $c = 72 - (a + b) = 32$ и $S = \dfrac{ab}{2} = 144$, с което задачата е решена. $\square$

Пример 6 *([2], стр. 57, зад. 11.58)* В правоъгълен триъгълник е вписана окръжност. Допирната ѝ точка дели хипотенузата на отсечки с дължини 5 и 12. Да се намерят катетите.

Решение. Нека P, Q, R са допирните точки на вписаната окръжност съответно със страните AB, BC, AC. Нека $AP = 5$ и $BP = 12$. Да означим $CQ = CR = x > 0$. След прилагане на Питагорова теорема за ΔABC достигаме до рационалното уравнение $x^2 + 17x - 60 = 0$, чието единствено положително решение е $x = 3$. Така намираме $AC = 8$ и $BC = 15$. $\square$



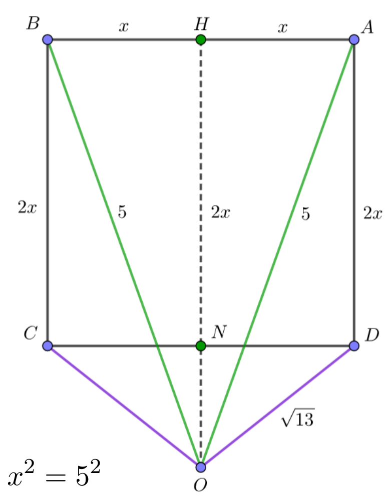
Фигура 3:

Пример 7 *([1], стр. 237, зад. 10)* Дадена е окръжност $k(O; r)$. Точка A е такава, че $AO = 13$. Построени са допирателните AT и AD към окръжността. Ако $AT = 3r$, то намерете периметъра на четириъгълника $ATOD$.

Решението извършете самостоятелно!

Пример 8 *([2], стр. 55, зад. 11.34)* Вън от квадрата $ABCD$ е взета точка O. Да се намери лицето на квадрата, ако $OA = OB = 5$ и $DO = \sqrt{13}$.

Решение. Точка O е равноотдалечена от краищата на отсечката AB, следователно лежи върху нейната симетрала. Нека $s_{AB} \cap AB = H$ и $s_{AB} \cap CD = N$ (вж. фигура 4). Да означим страната на квадрата с $2x$. Тогава ще е изпълнено, че $AH = HB = DN = NC = x$ и $NH = 2x$. От правоъгълния ΔDON с помощта на Питагорова теорема получаваме $NO = \sqrt{13 - x^2}$. За да открием лицето на квадрата, е достатъчно да пресметнем стойността на x^2. Нея ще намерим от Питагорова теорема за ΔBOH. Имаме:



Фигура 4:

$$OH^2 + HB^2 = OB^2 \Rightarrow \left(2x + \sqrt{13 - x^2}\right)^2 + x^2 = 5^2$$
$$\Rightarrow 4x^2 + 4x\sqrt{13 - x^2} + 13 - x^2 + x^2 = 25$$
$$\Rightarrow 4x^2 + 4x\sqrt{13 - x^2} = 12 \Rightarrow x^2 + x\sqrt{13 - x^2} = 3.$$

Записваме полученото ирационално уравнение във вида $x\sqrt{13-x^2} = 3-x^2$. Понеже x е дължина на отсечка, то $x > 0$. Освен това, за да има смисъл така полученото ирационално уравнение, е необходимо дясната му страна да е положителна, т. е. трябва да е изпълнено неравенството $3-x^2 > 0$. Оттук получаваме $0 < x^2 < 3$. След повдигане на ирационалното уравнение в квадрат достигаме до следното уравнение следствие:

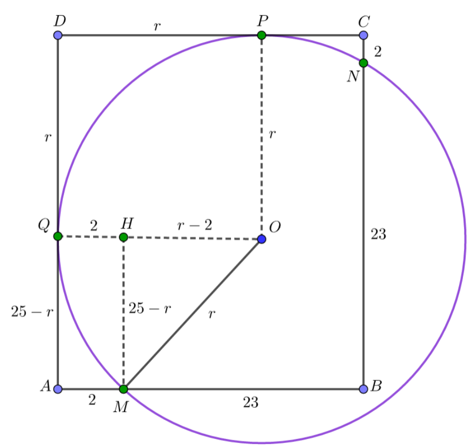
$$x^2(13-x^2) = (3-x^2)^2.$$

Очевидно след разкриване на скобите то ще бъде биквадратно. Затова полагаме $x^2 = y \in (0;3)$. Съответното квадратно относно y уравнение е $2y^2 - 19y + 9 = 0$ с решения $y_1 = 9$ и $y_2 = \dfrac{1}{2}$. Само коренът y_2 е в интервала $(0;3)$. Тогава $S_{ABCD} = 4x^2 = 4y_2 = 2$. $\square$

Пример 9 *([2], стр. 60, зад. 11.93)* Окръжност се допира до две съседни страни на квадрат и дели всяка от другите две страни на две отсечки с дължини 2 и 23. Да се намери радиусът на окръжността.

Решение.

Нека даденият квадрат е $ABCD$. Нека окръжността да се допира до страните CD и AD съответно в точките P и Q, а да пресича страните AB и BC съответно в точките M и N (вж. фигура 5). Да означим с O центъра на окръжността и с r — нейния радиус. Очевидно страната на квадрата е с дължина 25. Тъй като четириъгълникът $OPDQ$ е квадрат (правоъгълник с две равни съседни страни), то имаме $OP = DQ = r$ и $AQ = 25 - r$.



Фигура 5:

Построяваме $MH \perp OQ$, $H \in OQ$. От правоъгълния ΔHOM след прилагане на Питагорова теорема получаваме уравнението

$$(r-2)^2 + (25-r)^2 = r^2,\ 2 < r < 25.$$

Неговите корени са числата $r_1 = 17$ и $r_2 = 37$, от които само първият е в интервала $(2;25)$. Следователно търсеният радиус е $r = 17$. $\square$

Пример 10 *([2], стр. 57, зад. 11.62)* Основата на равнобедрен триъгълник е $4\sqrt{2}$, а медианата към бедрото му е 5. Да се намерят лицето и бедрото му.

Решение. Нека даденият триъгълник е ABC с основа $AB = 4\sqrt{2}$ и медиана $AM = 5$. Да построим височините CH и AT и да въведем означенията $MT = x$, $BT = y$ (вж. фигура 6). Тогава $BC = AC = 2(x+y)$. От триъгълниците AMT и ABT последователно получаваме:

$$\left| \begin{array}{l} AT^2 + x^2 = 5^2 \\ AT^2 + y^2 = (4\sqrt{2})^2 \end{array} \right. \Rightarrow 25 - x^2 = 32 - y^2 \Rightarrow y^2 - x^2 = 7. \qquad (8)$$

Сега $\Delta ABT \sim \Delta CBH$ по първи признак. Написвайки пропорциите, имаме

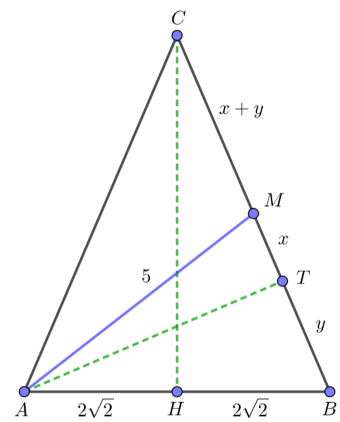
$$\frac{AB}{CB} = \frac{BT}{BH} = \frac{AT}{CH} \Rightarrow \frac{4\sqrt{2}}{2(x+y)} = \frac{y}{2\sqrt{2}},$$

откъдето достигаме до връзката

$$xy + y^2 = 8. \qquad (9)$$

Уравненията (8) и (9) водят до системата

$$\left| \begin{array}{l} y^2 + xy = 8 \\ y^2 - x^2 = 7. \end{array} \right.$$



Фигура 6:

Решаваме я по някой от разгледаните досега начини (например с първоначално събиране и последващо заместване) и пресмятаме нейното единствено положително решение: $(x; y) = \left(\frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

За бедрото на триъгълника намираме $AC = BC = 6$. Лицето на триъгълника е

$$S_{\Delta ABC} = \frac{BC.AT}{2} = \frac{2(x+y)\sqrt{25-x^2}}{2} = 4\sqrt{14}. \ \square$$

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА

Задача 1 ([1], стр. 228, зад. 7) Даден е правоъгълен ΔABC с хипотенуза AB. Ако височината към хипотенузата е $h_c = 18$ и проекцията на BC върху хипотенузата е $a_1 = 12$, то намерете дължините на проекцията b_1, хипотенузата c и катетите a и b.

Отг. $b_1 = 27$, $c = 39$, $a = 6\sqrt{13}$, $b = 9\sqrt{13}$

Задача 2 ([1], стр. 228, зад. 9) Даден е правоъгълен ΔABC с хипотенуза AB. Височината CH към хипотенузата я дели на отсечки $BH : AH = 2 : 3$. Ако $CH = 6$, то намерете дължините на отсечките AH, BH, AB, AC и BC.

Отг. $AH = 3\sqrt{6}$**,** $BC = 2\sqrt{6}$**,** $AB = 5\sqrt{6}$**,** $AC = 3\sqrt{10}$**,** $BH = \sqrt{66}$

Задача 3 ([3], стр. 90, зад. 22.4) Даде е правоъгълен ΔABC, за който $\measuredangle C = 90^\circ$, $\measuredangle A = 60^\circ$ и височината $CD = 2\sqrt{3}$. Намерете дължината на хипотенузата.

Отг. $c = 8$

Задача 4 ([3], стр. 91, зад. 22.7) Намерете третата страна на правоъгълен триъгълник, за който:
а) $a = 2$, $b = 3$; **б)** $a = 2$, $c = 2\sqrt{5}$;
в) $b = 5$, $c = 13$; **г)** $a = 12$, $b = 5$.

Отг. а) $\sqrt{13}$**; б)** 4**; в)** 12**; г)** 13

Задача 5 ([3], стр. 91, зад. 21.12) В правоъгълен ΔABC имаме, че $a_1 = 4$ и $b_1 = 8$. Да се намерят a, b, c, h_c и $S_{\Delta ABC}$.

Отг. $c = 12$, $a = 4\sqrt{3}$, $b = 4\sqrt{6}$, $h = 4\sqrt{21}$, $S = 24\sqrt{2}$

Задача 6 ([3], стр. 91, зад. 22.13) Намерете височините на правоъгълен триъгълник с катети 12 и 16.

Отг. 12; 16; $9,6$

Задача 7 ([3], стр. 91, зад. 22.14) Намерете медианите на равнобедрен правоъгълен триъгълник с катет 8.

Отг. $m_c = 4\sqrt{2}$, $m_a = m_b = 4\sqrt{5}$

Задача 8 ([3], стр. 91, зад. 22.15) Даден е правоъгълен трапец $NBCM$ с основи NB и CM ($NB > CM$) и перпендикулярно бедро NM. Върху голямата основа NB е взета точка A, такава, че $\measuredangle ACB = 90°$. През върха C е построена височината CH на трапеца. Ако четириъгълникът $NHCM$ е квадрат с лице 16 и $AN = 1$, то намерете дължината на отсечката BH.

Отг. $\dfrac{16}{3}$

Задача 9 ([3], стр. 91, зад. 22.16) За правоъгълен ΔABC с височина CH е известно, че $AH = 5$, $BC = 2\sqrt{6}$. Намерете дължината на HB.

Отг. 3

Задача 10 ([3], стр. 92, зад. 22.18) Допирната точка M на вписаната в правоъгълен ΔABC окръжност разделя катета BC на части с дължини $MB = 3$ и $CM = 2$. Намерете дължината на хипотенузата.

Отг. 13

Задача 11 ([3], стр. 92, зад. 22.19) В правоъгълен ΔABC с хипотенуза AB са построени височината CH и медианата CM. Ако $HM = 3$ и $\measuredangle HCM = 30°$, то намерете лицето на ΔABC.

Отг. $18\sqrt{3}$

Задача 12 ([2], стр. 55, зад. 11.23) Даден е ΔABC, в който $AB = 3$, височината $CD = \sqrt{3}$ и $AD = BC$. Да се намери AC.

Отг. $\sqrt{7}$

Задача 13 * ([2], стр. 60, зад. 11.100) Катетите на правоъгълен триъгълник са 15 и 20. Да се намери разстоянието от центъра на вписаната окръжност до височината към хипотенузата.

Отг. 1

Задача 14 * ([2], стр. 60, зад. 11.102) В правоъгълен ΔABC с катети $AC = 3$ и $BC = 4$ е построена височината CD. Да се намери разстоянието между центровете на окръжностите, вписани в ΔACD и ΔBCD.

Отг. $\sqrt{2}$

Задача 15 * ([2], стр. 61, зад. 11.105) Даден е правоъгълен ΔABC с катети a и b. Хипотенузата му AB служи за страна на квадрат. Да се намери разстоянието между центъра на квадрата и върха C.

Упътване. Да се проучи самостоятелно **теоремата на Птолемей за вписан четириъгълник** и да се използва в конкретната задача.

Отг. $\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$

Задача 16 * ([2], стр. 61, зад. 11.109) В правоъгълния ΔABC е построена ъглополовящата BD, а през точка D — права, перпендикулярна на BD, която разделя хипотенузата AB на отсечки $AM = 5$ и $BM = 40$. Да се намерят катетите.

Отг. 27; 36

Литература

[1] **И. Тонов, Ир. Шаркова, М. Христова, Д. Капралова, В. Златилов.** *„Математика за 9. клас“*. Издателство „Регалия 6“. София, 2018

[2] **К. Коларов, Хр. Пачев.** *„Сборник от задачи по геометрия за VIII – XII клас“*. Издателство „Интеграл“. Добрич, 2000

[3] **П. Рангелова** *„Сборник по математика за 9. клас“*. Издателство „Коала прес“. Пловдив, 2018