Ортогонално проектиране. Ъгъл между права и равнина

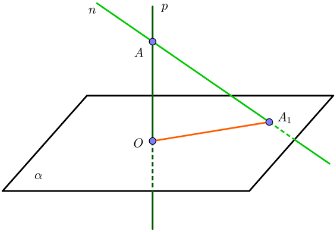
Л. Йовков

НПМГ „Акад. Л. Чакалов“

31. 03. 2020

Ортогонално проектиране. Ъгъл между права и равнина

Нека α е дадена равнина в пространството и n е права, пробождаща равнината в точка A_1 (вж. фигура 1). Нека A е произволна точка от n, $A \neq A_1$. През т. A минава единствена права $p \perp \alpha$. Да означим прободната точка на p и α с O: $p \cap \alpha = O$. Отсечката AA_1 с краища върху правата n и върху равнината α се нарича наклонена към равнината.



Фигура 1: Перпендикуляр и наклонена

Ортогонално проектиране. Ъгъл между права и равнина

Точката O представлява ортогоналната (правоъгълната) проекция на точката A върху равнината α.
Въвеждаме следните дефиниции.

Дефиниция 1

Изображението, при което на всяка точка ѝ се съпоставя нейната ортогонална проекция върху равнина, се нарича ортогонално проектиране.

Ще използваме означението $\delta_{\perp}$ за означаване на ортогонална проекция. Така например $\delta_{\perp}(A) = O$.

Дефиниция 2

Всяка равнина, върху която се извършва ортогонално проектиране, се нарича проекционна равнина.

На фигура 1 проекционната равнина е α.

Ясно е, че всяка точка от проекционната равнина съвпада с ортогоналната си проекция:

$$O \in \alpha \Rightarrow \delta_{\perp}(O) = O.$$

По означенията на фигура 1:

$$\delta_{\perp}(A) = O,\ \delta_{\perp}(A_1) = A_1 \Rightarrow \delta_{\perp}(AA_1) = OA_1.$$

Отсечката OA_1 е ортогоналната проекция на наклонената AA_1 върху равнината.

Дефиниция 3

Разстояние от точка до равнина се нарича дължината на перпендикуляра, спуснат от точката към равнината.

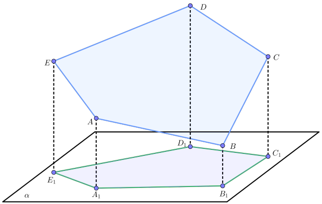
На фигура 1 разстоянието ρ от точката A до равнината α е отсечката AO: $\rho(A;\ \alpha) = AO$.

Ортогонално проектиране. Ъгъл между права и равнина

Дефиниция 4

Ортогонална проекция на фигура върху равнина се нарича множеството от ортогоналните проекции на всички точки от тази фигура върху равнината.

На фигура 2 са показани петоъгълникът $ABCDE$ и ортогоналната му проекция $A_1B_1C_1D_1E_1$ върху равнината α.



Фигура 2: Ортогонална проекция на многоъгълник

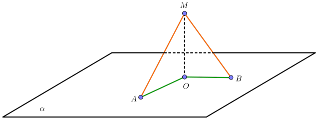
Ортогонално проектиране. Ъгъл между права и равнина

Теорема 1

Равни наклонени имат равни проекции и обратно, на равни проекции им съответстват равни наклонени.

Доказателство 1

1. Нека $MA = MB$ (вж. фигура 3).
Отсечката MO е обща за ΔAOM и ΔBOM. Тогава $\Delta AOM \simeq \Delta BOM$ откъдето $OA = OB$.
2. Обратно, нека сега $OA = OB$.
Аналогично: MO е обща страна $\Rightarrow \Delta AOM \simeq \Delta BOM \Rightarrow AM = BM$. $\square$



Фигура 3: Наклонени и проекции

Следствие 1

Равните наклонени сключват равни ъгли с общия си перпендикуляр.

Забележка 1

Ортогоналното проектиране невинаги запазва разстоянията между точките. Това ще е така само ако отсечката, която проектираме, е успоредна на проекционната равнина.

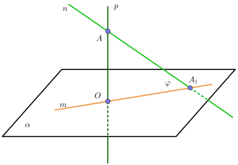
Забележка 2

Дължината на всяка наклонена, която не е успоредна на проекционната равнина, винаги е по-голяма от дължината на проекцията ѝ в тази равнина.

Дефиниция 5

Ъгъл между права и равнина, които не са перпендикулярни, се нарича ъгълът между правата и ортогоналната ѝ проекция в равнината.

На фигура 4 правата n пресича равнината α. Ортогоналната проекция на n върху α е правата m. Тогава $\varphi = \measuredangle(n;\ \alpha) = \measuredangle(n;\ m) = \measuredangle AA_1O$.



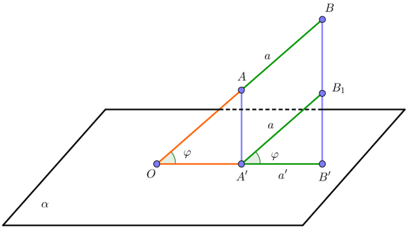
Фигура 4: Ъгъл между права и равина

Пример 1

Нека $A'B' = a'$ е ортогоналната проекция на отсечка $AB = a$ върху равнина α и $\measuredangle(AB; \alpha) = \varphi$. Да се докаже, че $a' = a\cos\varphi$.

Решение 1

Нека $A'B_1 \parallel AB$, $B_1 \in BB'$. От успоредника $A'B_1BA$ имаме $A'B_1 = a$, а от $\Delta A'B'B_1$ — $\cos\varphi = \dfrac{a'}{a}$. Следователно $a' = a\cos\varphi$. $\square$



Пример 2

Дължината на отсечката AB е 13. Разстоянията от точките A и B до равнина α са 3 и 8. Намерете дължината на ортогоналната проекция на AB в α.

Решение 2

Решението извършете самостоятелно.

Пример 3

Разстоянията от точки A и B до дадена равнина са 5 и 8. Намерете ъгъла, който правата AB сключва с равнината, ако $AB = 6$.

Решение 3

Решението извършете самостоятелно.

Пример 4

Дадена е отсечка $AB = 5\sqrt{3}$. Разстоянието от точка A до равнина α е 7,5, а $\measuredangle(AB; \alpha) = 60^\circ$. Намерете разстоянието от точка B до α.

Решение 4

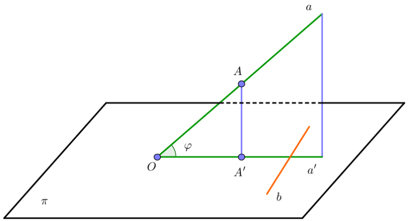
Решението извършете самостоятелно.

Ортогонално проектиране. Ъгъл между права и равнина

Ще докажем следната важна и често използвана теорема за трите перпендикуляра.

Теорема 2

Права a, наклонена към равнина π, е перпендикулярна на права b от тази равнина тогава и само тогава, когато ортогоналната проекция a' на a в π е перпендикулярна на b.



Фигура 5: Теорема за трите перпендикуляра

Доказателство 2

I. НЕОБХОДИМОСТ

Нека $a \perp b$. Ще докажем, че $a' \perp b$ (вж. фигура 5). Имаме:

1. $AA' \perp \pi \Rightarrow AA' \perp b$;
2. $\alpha = (AA'; a)$; $b \perp AA'$, $b \perp a \Rightarrow b \perp \alpha$;
3. $a' \in \alpha \Rightarrow b \perp a'$.

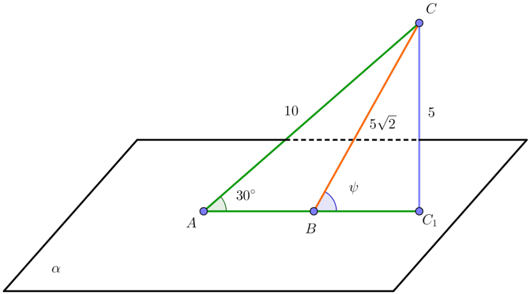
II. ДОСТАТЪЧНОСТ

Нека сега $a' \perp b$. Ще докажем, че $a \perp b$. Последователно получаваме:

1. $b \perp AA'$, $b \perp a' \Rightarrow b \perp \alpha$;
2. $a \in \alpha \Rightarrow b \perp a$. $\square$

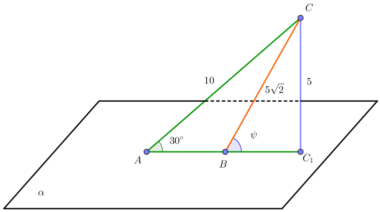
Пример 5

Дадени са точки A и B от равнината α и точка C, нележаща в нея. Правата CA сключва с равнината ъгъл 30° и $CA = 10$, $CB = 5\sqrt{2}$. Намерете ъгъла, който правата CB сключва с равнината.



Решение 5

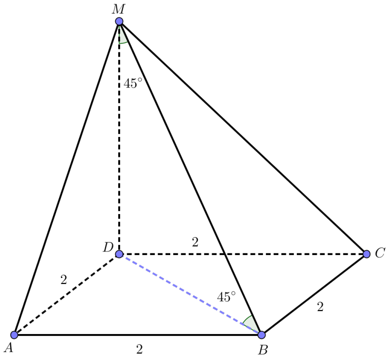
Нека точка C_1 е ортогоналната проекция на C в равнината α. Тогава $\measuredangle AC_1C = 90^\circ$. Означаваме $\measuredangle CBC_1 = \psi$. Ясно е, че $0^\circ < \psi < 90^\circ$.
От ΔACC_1 намираме $CC_1 = 0,5AC = 5$. Сега от ΔBCC_1 веднага получаваме $\sin\psi = \dfrac{CC_1}{BC} = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. От ограничението за ψ намираме $\psi = 45^\circ$. $\square$



Ортогонално проектиране. Ъгъл между права и равнина

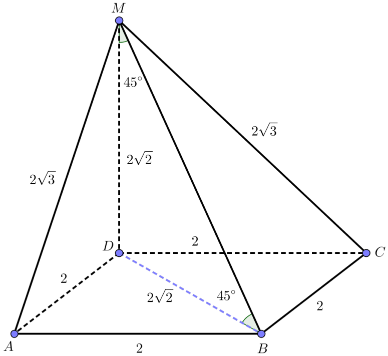
Пример 6

Дадена е четириъгълна пирамида $ABCDM$ с основа квадрата $ABCD$ със страна 2. Околният ръб MD е перпендикулярен на равнината на основата, а околният ръб MB сключва с основата ъгъл $45°$. Намерете дължините на околните ръбове на пирамидата.



Решение 6

1. Имаме, че $\delta_{\perp}(MB) = DB$ $\Rightarrow \measuredangle[(ABCD); MB] = \measuredangle MBD = 45°$. Но по усл. $\measuredangle BDM = 90°$, значи $\measuredangle BMD = 45°$.
2. От ΔABD с Питагорова теорема пресмятаме $BD = 2\sqrt{2}$. Но $BD = DM$, откъдето намираме дължината на околния ръб $DM = 2\sqrt{2}$.
3. От $\Delta ADM \simeq \Delta CDM$ получаваме $AM = CM$. С Питагорова теорема за ΔADM пресмятаме $AM = CM = 2\sqrt{3}$.



Пример 7

Катетът AC на равнобедрен правоъгълен ΔABC лежи в равнината α, а катетът BC сключва с α ъгъл 45°. Намерете ъгъла, който хипотенузата на триъгълника сключва с равнината α.

Решение 7

Решението извършете самостоятелно.

Задача 1

В куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ намерете тангенса на ъгъла, който правата DB_1 сключва с равнината (ADD_1).

Задача 2

Основата на четириъгълна пирамида е правоъгълник $ABCD$ със страни $AB = 4$ и $BC = 3$. Околният ръб $DV \perp AD$, $DV \perp CD$ и $DV = 5$. Намерете ъгъла между ръба BV и равнината (ABC).

Задача 3

Проекцията на ΔABC в равнината α е правоъгълният ΔABD ($\measuredangle ADB = 90°$), като AC и BC сключват с α ъгли съответно $45°$ и $30°$, а разстоянието от C до α е 5. Намерете дължината на AB.

Задача 4

Основният ръб на правилна триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$ има дължина 1. Правата AB_1 сключва с равнината (BCC_1) ъгъл $30°$. Намерете дължината на ръба AA_1.

Задача 5

В правилна четириъгълна пирамида ъгълът между околен ръб и основата е $45°$. Намерете тангенса на ъгъла между апотемата на околна стена и основата.

Задача 6

Дадена е правилна четириъгълна пирамида $ABCDV$ с основен ръб $AB = 4$ и височина $VO = 2$. Намерете ъгъла между правата AC и равнината (BCV).

Задача 7

В куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ намерете ъгъла между правата D_1C и равнината (ABC_1D_1).

Задача 8

Точката O е център на стената BCC_1B_1 на куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Намерете косинуса на ъгъла между правата AO и равнината (BDA_1).

Задача 9

Основата на триъгълната пирамида $ABCD$ е равнобедрен ΔABC с основа $AB = 16$ и височина към нея с дължина 16. Околните ръбове AD, BD и CD сключват с основата ъгли $45°$. Намерете дължините на околните ръбове на пирамидата.

Задачи за самостоятелна работа

Задача 10

В куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ намерете синуса на ъгъла между правата DC_1 и равнината (MCC_1), където M е средата на AB.

Задача 11

В правилна четириъгълна пирамида $ABCDV$ точките M и N са среди съответно на ръбовете BV и DV. Отношението на височината на пирамидата към основен ръб е $\sqrt{2}$. Намерете ъгъла между правата AB и равнината (AMN).

Задача 12

Да се намери разстоянието от точката M до равнината на равнобедрения ΔABC, ако е известно, че $AB = BC = 13$, $AC = 10$, а M е на разстояние $\dfrac{26}{3}$ от страните на ΔABC.

Задачи за самостоятелна работа

Задача 13

Основата на четириъгълна пирамида $ABCDS$ е правоъгълникът $ABCD$, за който $AB : AD = 1 : 3$. Околните ръбове на пирамидата образуват ъгли 60° с основата. Намерете ъгъла между правата DP и равнината (SCD), ако P е средата на SB.

Задача 14

Основата на четириъгълна пирамида $ABCDS$ е квадратът $ABCD$, а околният ръб AS е перпендикулярен на основата. Лицето на ΔSBC е два пъти по-голямо от лицето на ΔSAB. Намерете ъгъла между височината AF на ΔSAB и диагоналната равнина (SAC).