Решаване на равнобедрен триъгълник

Л. В. Йовков

НПМГ „Акад. Л. Чакалов“

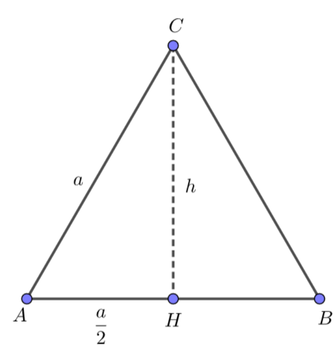
Абстракт

Разгледаните метрични зависимости могат успешно да се прилагат и за решаване на равнобедрен триъгълник. За целта е необходимо да се открие подходящ правоъгълен триъгълник, конструктивно свързан с дадения равнобедрен триъгълник. Върху някои примери ще изложим основните идеи.

Пример 1 *([1], стр. 247, зад. 1,* ***основна задача****)* Да се намерят дължината на височината, радиусът на вписаната окръжност, радиусът на описаната окръжност и лицето на равностранен триъгълник с дължина на страната a.

Решение. Нека даденият равностранен триъгълник е ABC и $CH = h$ е височината към основата му (вж. фигура 1). С помощта на Питагорова теорема, приложена в правоъгълния ΔAHC, пресмятаме

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Фигура 1:

В равностранния триъгълник медицентърът, центърът на вписаната окръжност и центърът на описаната окръжност съвпадат. Ако с G означим медицентъра на ΔABC, имаме

$$\frac{CG}{GH} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow \frac{R}{r} = \frac{2}{1},$$

откъдето $R = \dfrac{2}{3}h = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ и $r = \dfrac{1}{3}h = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$.

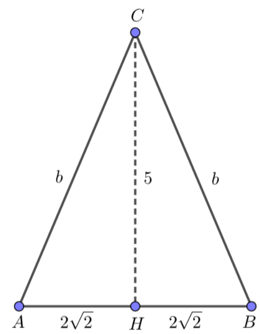
Накрая за лицето получаваме $S = \dfrac{ah}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. □

Пример 2 *([1], стр. 249, зад. 5)* Основата на равнобедрен триъгълник е $4\sqrt{2}$, а медианата към нея е 5. Намерете бедрото на триъгълника.

Решение. Нека даденият равнобедрен триъгълник е ABC, а CH е медианата към основата му (вж. фигура 2). Очевидно тази медиана е и височина.

Да означим с b дължината на бедрото. От правоъгълния ΔAHC след прилагане на Питагорова теорема имаме

$$b^2 = (2\sqrt{2})^2 + 5^2$$
$$\Rightarrow b^2 = 8 + 25 = 33$$
$$\Rightarrow b = \sqrt{33}. \ \square$$



Фигура 2:

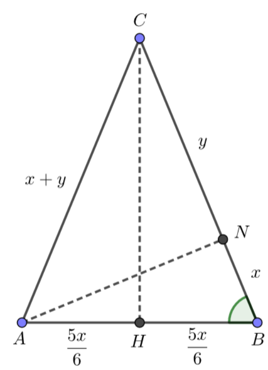
Пример 3 *([1], стр. 249, зад. 8)* В равнобедрен триъгълник височината към бедрото е 6, а височината към основата е 5. Намерете страните на триъгълника.

Решение. Нека даденият триъгълник е ABC с височини $CH = 5$ ($H \in AB$) и $AN = 6$ ($N \in BC$). Въвеждаме означенията $BN = x$ и $CN = y$. Тогава $BC = AC = x + y$ (вж. фигура 3). Чрез прилагане на Питагорова теорема в правоъгълния ΔANC получаваме връзката

$$x^2 + 2xy = 36. \tag{1}$$

По-нататък: тъй като $\Delta ABN \sim \Delta CBH$ (по първи признак), то от еквивалентностите

$$\frac{BN}{BH} = \frac{AN}{CH} \Leftrightarrow \frac{x}{0,5AB} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow AB = \frac{5x}{3}$$



Фигура 3:

след повторно прилагане на Питагорова теорема, но в ΔABN достигаме до уравнението

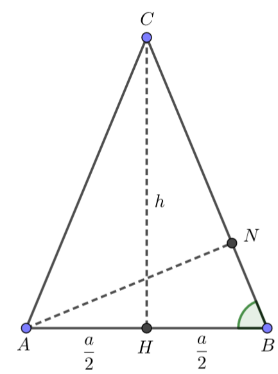
$$36 + x^2 = \frac{25x^2}{9}. \tag{2}$$

След съвместно решаване на (1) и (2) получаваме $x = \dfrac{9}{2}$ и $y = \dfrac{7}{4}$. Оттук имаме $AB = 7,5$ и $BC = AC = 6,25$. $\square$

Пример 4 *([1], стр. 248, зад. 3)* Даден е равнобедрен триъгълник с основа a и височина към нея h. Да се намерят дължините на бедрото и на височината към него.

Решение. Ще следваме означенията на фигура 4. Дължината на бедрото ще получим с помощта на Питагоровата теорема в ΔAHC:

$$AC^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{4h^2 + a^2}{4} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{4h^2 + a^2}}{2}.$$



Фигура 4:

За намиране на дължината на отсечката AN е най-удобно да използваме формула за лице. От равенството

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB.CH}{2} = \frac{BC.AN}{2}$$

получаваме $AN = \dfrac{AB.CH}{BC}$. След заместване на конкретните стойности в дясната част получаваме

$$AN = \frac{2ah}{\sqrt{4h^2 + a^2}}. \;\square$$

Разгледаният пример попада в достатъчно широкия клас от задачи, съдържащи буквени означения. Неговото решаване изисква същия брой аритметични действия както в случая на фиксирани дължини. Тук е мястото да посъветваме читателя да не пренебрегва този тип задачи поради изразената му прилика с фундаментални науки като механика и физика.

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА

Задача 1 ([2], стр. 97, зад. 24.1) Да се намери дължината на медианата в равностранен триъгълник със страна 8.

Отг. $4\sqrt{3}$

Задача 2 ([2], стр. 97, зад. 24.2) Равностранен триъгълник има лице $4\sqrt{3}$. Намерете страната и височината му, както и радиусите на описаната и вписаната за триъгълника окръжност.

Отг. $a = 4$, $h = 2\sqrt{3}$, $R = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$, $r = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Задача 3 ([2], стр. 97, зад. 24.4) Основата на равнобедрен триъгълник има дължина 16, а бедрата му — 17. Да се намери дължината на височината към основата.

Отг. 15

Задача 4 ([2], стр. 97, зад. 24.9) Около равнобедрен ΔABC със страни $AC = BC = 5$ и височина $CH = 3$ ($H \in AB$) е описана окръжност. Намерете радиуса на тази окръжност.

Отг. $\dfrac{25}{6}$

Задача 5 ([2], стр. 98, зад. 24.11) Основата на равнобедрен триъгълник е 12, а лицето му е 48. Намерете височината към основата и радиусите на вписаната и описаната окръжност.

Отг. $h = 8$, $R = \dfrac{25}{4}$, $r = 3$

Задача 6 ([2], стр. 98, зад. 24.14) Даден е равнобедрен ΔABC с лице 48 и основа $AB = 16$. От средата D на основата AB е спуснат перпендикуляр DT към бедрото AC ($T \in AC$). Намерете дължината на отсечката CT.

Отг. $CT = 3,6$

Задача 7 ([2], стр. 98, зад. 24.18) Допирателната към вписаната в равнобедрения ΔABC окръжност, успоредна на основата, пресича бедрата AC и BC съответно в точките M и N. Ако $AB = 6$ и $BC = 9$, намерете дължината на MN.

Отг. $MN = 3$

Задача 8 ([2], стр. 98, зад. 24.19) В равнобедрен ΔABC са построени височините AH и BM съответно към бедрата BC и AC. Намерете дължината на отсечката MH, ако $AB = 12$ и $BC = 18$.

Отг. $MH = \dfrac{28}{3}$

Задача 9 ([1], стр. 252, зад. 5) В равнобедрен триъгълник с основа 48 и височина към нея 18 е вписана окръжност. Намерете радиуса ѝ.

Отг. 8

Задача 10 ([1], стр. 252, зад. 9) Около окръжност с радиус 4 е описан равнобедрен триъгълник с основа 12. Намерете бедрото на триъгълника.

Отг. $15,6$

Литература

[1] **И. Тонов, Ир. Шаркова, М. Христова, Д. Капралова, В. Златилов.** *„Математика за 9. клас“*. Издателство „Регалия 6“. София, 2018

[2] **П. Рангелова** *„Сборник по математика за 9. клас“*. Издателство „Коала прес“. Пловдив, 2018