Проект по технологични средства за обучение по математика

Людмил Владимиров Йовков

5 април 2015 г.

Съдържание

Фигура 1: Софийски университет

1 Алгебра и анализ

Задача 1 Да се реши уравнението $10^{\lg^2 x - 3} + x(\lg^2 x - 2\lg x - 3) = x^2$.

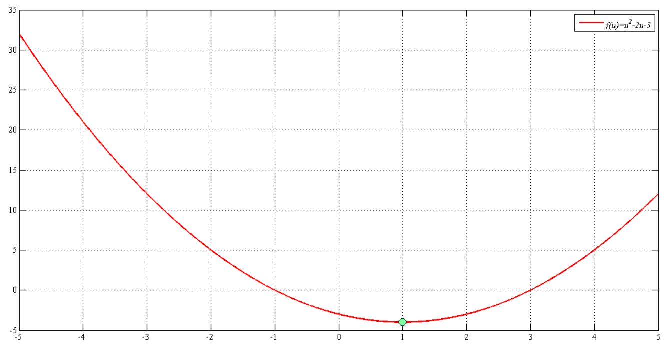
Решение 1 Полагаме $\lg x = u \Leftrightarrow x = 10^u$, $x > 0$. Така получаваме

$$10^{u^2-3} + 10^u(u^2 - 2u - 3) = (10^u)^2 \Leftrightarrow 10^{u^2-3} + 10^u(u^2 - 2u - 3) = 10^{2u}.$$

Разделяме двете му страни с числото $10^{2u} > 0$ и достигаме до

$$(1) \qquad 10^{u^2-2u-3} + 10^{-u}(u^2 - 2u - 3) = 1 \Leftrightarrow 10^{u^2-2u-3} + \frac{u^2 - 2u - 3}{10^u} = 1.$$

Върхът на паробалата $f(u) = u^2 - 2u - 3$ е в точката $u_0 = -\dfrac{b}{2a} = 1$.

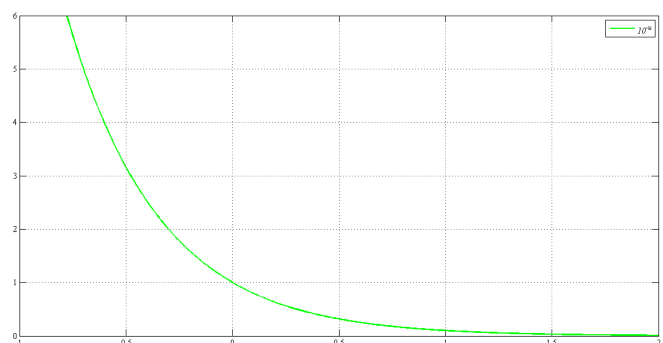


Фигура 2: Графика на функцията $f(u) = u^2 - 2u - 3$

От чертежа се вижда, че при $u < 1$ функцията $f(u)$ намалява, а при $u > 1$ тя расте.

При $u < 1$ функцията $g(u) = 10^{u^2-2u-3}$ също намалява, а при $u > 1$ $g(u)$ расте.

Функцията $h(u) = \dfrac{1}{10^u}$ е намаляваща.



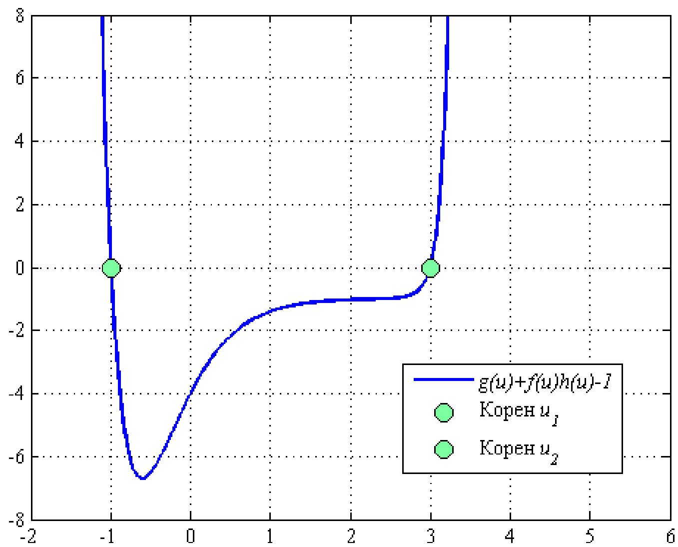
Фигура 3: Графика на функцията $h(u) = 10^{-u}$

Записваме уравнението 1 във вида

$$g(u) + f(u)h(u) = 1.$$

При $u < 1$ лявата страна е намаляваща функция (сборът, разликата, произведението и частното на монотонни функции е също монотонна функция), а дясната страна е константа. Тогава решението е само едно. Непосредствено се проверява, че това е $u = -1$, откъдето $x = \dfrac{1}{10}$.

За другия случай разсъждението е аналогично. И сега решението е единствено. Проверява се, че това е $u = 3 \Rightarrow x = 1000$. Чрез графиката се установява, че уравнението няма други корени.



Фигура 4: Графика на функцията $g(u) + f(u)h(u) - 1$

Задача 2 През т. $A(2; -1)$ от графиката на функцията

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

е построена допирателна към графиката. Тя пресича параболата

$$g(x) = -a^2x^2 + 5ax - 4$$

в точките M и N. Да се определи a, ако A е средата на отсечката MN.

Решение 2 Да си припомним, че ако $f(x)$ е дадена непрекъсната функция и $(x_0; y_0)$ е точка от нейната графика, то уравнението на допирателната през тази точка е

$$t:\ y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Пресмятаме $f'(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ и $f'(x_0) = f'(2) = 1$. Така получаваме

$$t:\ y = x - 3.$$

Пресечните точки на параболата и допирателната се определят, като се решат съвместно техните уравнения, т. е. се намерят решенията на системата

$$\begin{aligned} &y = x - 3 \\ &y = -a^2x^2 + 5ax - 4. \end{aligned}$$

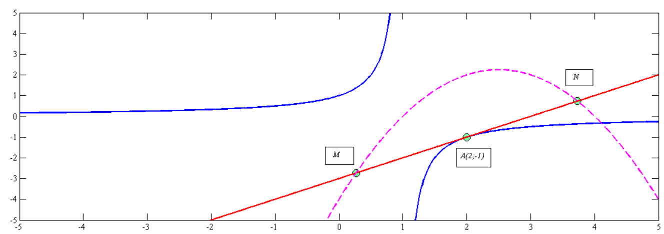
Имаме

$$x - 3 = -a^2x^2 + 5ax - 4 \Rightarrow a^2x^2 - (5a-1)x + 1 = 0.$$

Понеже графиките се пресичат на две места, това уравнение трябва да има две различни реални решения. Оттук следва, че

$$\begin{aligned} D = b_0^2 - 4a_0c_0 > 0 \Rightarrow (5a-1)^2 - 4a^2 > 0 \Rightarrow \\ (5a-1)^2 - (2a)^2 > 0 \Rightarrow (5a-1+2a)(5a-1-2a) > 0 \Rightarrow \\ (7a-1)(3a-1) > 0 \Rightarrow a \in \left(-\infty; \frac{1}{7}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right). \end{aligned}$$

Означаваме корените на полученото квадратно уравнение с x_1 и x_2. В такъв случай можем да напишем координатите на точките M и N.



Фигура 5:

$$\begin{aligned} M \in \Gamma r[g(x)],\ M \in \Gamma r[t(x)] \Rightarrow M(x_1;\ t(x_1)) = M(x_1;\ x_1 - 3), \\ N \in \Gamma r[g(x)],\ N \in \Gamma r[t(x)] \Rightarrow N(x_2;\ t(x_2)) = N(x_2;\ x_2 - 3) \end{aligned}$$

Сега прилагаме формулата за среда на отсечка, тъй като по условие точката A разполовява MN.

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{M_x + N_x}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2, \\ A_y &= \frac{M_y + N_y}{2} = \frac{x_1 - 3 + x_2 - 3}{2} = \frac{x_1 + x_2 - 6}{2} = -1 \end{aligned}$$

По Виет $x_1+x_2=-\dfrac{b_0}{a_0}=\dfrac{5a-1}{a^2}$. Тогава

$\dfrac{x_1+x_2}{2}=2 \Rightarrow x_1+x_2=4 \Rightarrow \dfrac{5a-1}{a^2}=4 \Rightarrow 4a^2-5a+1=0 \Rightarrow a_1=1,\ a_2=\dfrac{1}{4}$.

От тези две стойности избираме онази, която попада в дефиниционния интервал, а тя е $a=1$.

Задача 3 Да се реши уравнението

$$\sqrt{4x-x^2}+\sqrt{4x-x^2-3}=3+\sqrt{2x-x^2}.$$

Решение 3 Преписваме уравнението във вида

$$\sqrt{4-(x-2)^2}+\sqrt{1-(x-2)^2}=3+\sqrt{x(2-x)}.$$

и намираме дефиниционното множество.

$$\begin{cases} 4-(x-2)^2 \geq 0 \\ 1-(x-2)^2 \geq 0 \\ x(2-x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0;\,4] \\ x \in [1;\,3] \\ x \in [0;\,2] \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1;\,2].$$

Означаваме

$$f(x)=\sqrt{4-(x-2)^2}+\sqrt{1-(x-2)^2},\ g(x)=3+\sqrt{x(2-x)}.$$

Така стигаме до задачата, да се реши уравнението

$$f(x)=g(x),\ x \in [1;\,2].$$

Забелязваме, че върху дефиниционното множество двете функции са монотонни (вж. чертежа), като $f(x)$ е растяща, а $g(x)$ е намаляваща. Оттук

$$f(x) \leq \sqrt{4}+\sqrt{1}=3 \leq g(x),\ x \in [1;\,2],$$

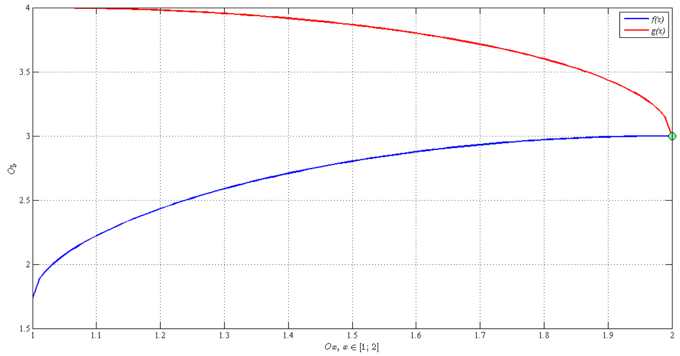
като равенството се достига само в една точка — $x=2$.

2 Тригонометрия

Задача 4 Да се намерят всички стойности на параметъра a, за които уравнението

$$2^{-x^2}\cdot 4^x+\sin\frac{\pi x}{4}+\cos\frac{\pi x}{4}-2=a^3-3a^2+a+\sqrt{2}$$

има единствено решение.



Фигура 6:

Решение 4 По метода на допълнителния ъгъл [1] получаваме

$$\sin\frac{\pi x}{4}+\cos\frac{\pi x}{4}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi x}{4}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi x}{4}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi x}{4}-\frac{\pi}{4}\right).$$

и заместваме в първоначалното уравнение:

$$2\cdot 2^{-(x-1)^2}+\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi(x-1)}{4}\right)-2-\sqrt{2}=a^3-3a^2+a.$$

Полагаме $t=x-1$ и означаваме

$$f(t)=2\cdot 2^{-t^2}+\sqrt{2}\cos\frac{\pi t}{4}-2-\sqrt{2}.$$

Тогава изходната задача се преформулира така: да се намерят стойностите на параметъра a, при които уравнението

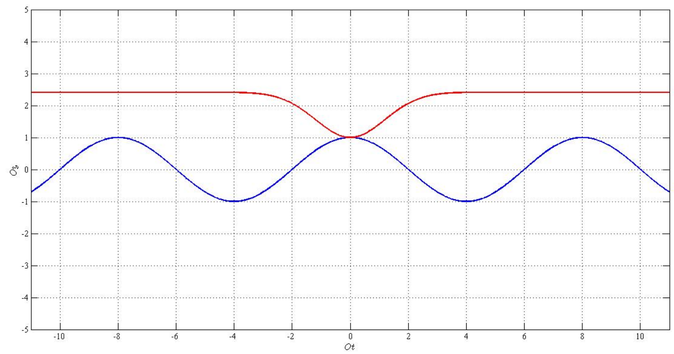
$$f(t)=a^3-3a^2+a \tag{2}$$

има единствено решение.

Тъй като $f(t)=f(-t)$, заключаваме, че ако t_0 е корен, то и $-t_0$ е корен на 2. Следователно $t=0$ е единствената възможност.

$$\Rightarrow a^3-3a^2+a=0\Rightarrow a(a^2-3a+1)=0\Rightarrow a_1=0,\ a_{2,3}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

[1] Разглеждаме израза $a\sin x+b\cos x$, $(a;b)\neq(0;0)$. Ако го препишем във вида $\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$, забелязваме, че сумата от квадратите на коефициентите е единица и тези коефициенти са в интервала $(-1;1)$. Ето защо можем да положим $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi\Rightarrow a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}(\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$. Това, дали ще изберем $\sin\varphi$ или $\cos\varphi$ при субституцията, е без значение.



Фигура 7: Графики на $f(t)$ и $g(t)$

Ако

$$f(t) = \cos\frac{\pi t}{4},\ g(t) = \sqrt{2} + 1 - 2^{\frac{1-t^2}{2}},$$

с чертеж лесно се убеждаваме, че намерените стойности на a удовлетворяват исканото условие (вж. чертежа).

Задача 5 Да се реши уравнението

$$\tan x + \tan 2x + \tan x \tan 2x \tan 3x = \tan 3x + \tan 4x.$$

Решение 5 За да има смисъл задачата, трябва да е изпълнена системата

$$\cos x \neq 0 \cap \cos 2x \neq 0 \cap \cos 3x \neq 0 \cap \cos 4x \neq 0.$$

По формулата

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

получаваме

$$\tan x = \tan(3x - 2x) = \frac{\tan 3x - \tan 2x}{1 + \tan 2x \tan 3x} \Rightarrow \tan x + \tan 2x + \tan x \tan 2x \tan 3x = \tan 3x.$$

Заместваме в уравнението и следователно

$$\tan 3x = \tan 3x + \tan 4x \Rightarrow \tan 4x = 0 \Rightarrow 4x = n\pi \Rightarrow x = \frac{n\pi}{4}.$$

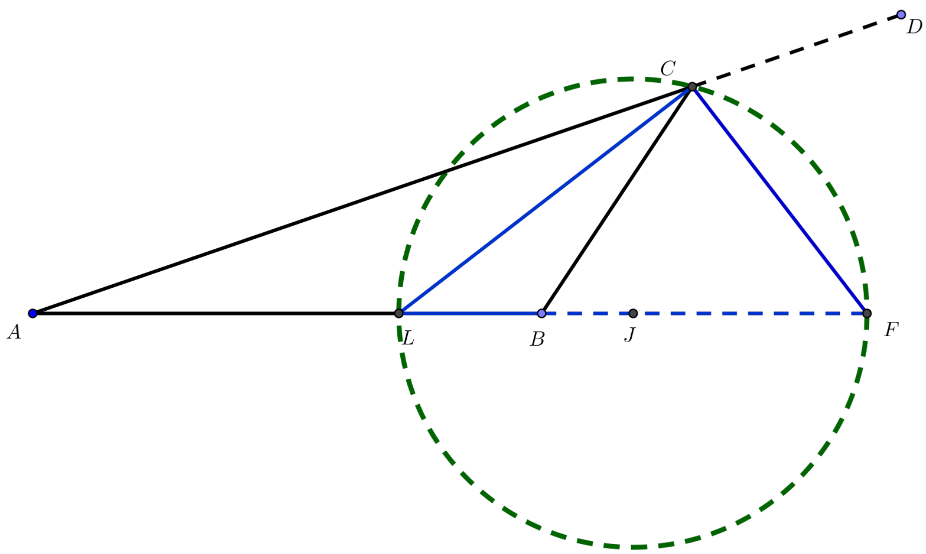
От получените точки трябва да махнем тези, за които знаменателите са равни на нула. Вършат работа само случаите $n = 0$ и $n = 4$. Така решения са $x = n\pi$.

3 Планиметрия

Задача 6 В $\triangle ABC\, CA : CB = 3 : 2$ и $AB = c$. Вътрешната и външната ъглополовяща през върха C пресичат AB съответно в точките L и F. Да се намери радиусът на описаната около $\triangle LFC$ окръжност.

Решение 6 Понеже $CA : CB = 3 : 2$, определяме, че $LA = \dfrac{3c}{5}$, $LB = \dfrac{2c}{5}$, $FA = 3c \quad \text{и} \quad FB = 2c$. Също така $\angle LCB + \angle FCB = 90^\circ$, следователно LF е диаметър на описаната около $\triangle LFC$ окръжност. Тогава

$$2R = LF = FA - LA = \frac{12c}{5} \Rightarrow R = \frac{6c}{5}.$$

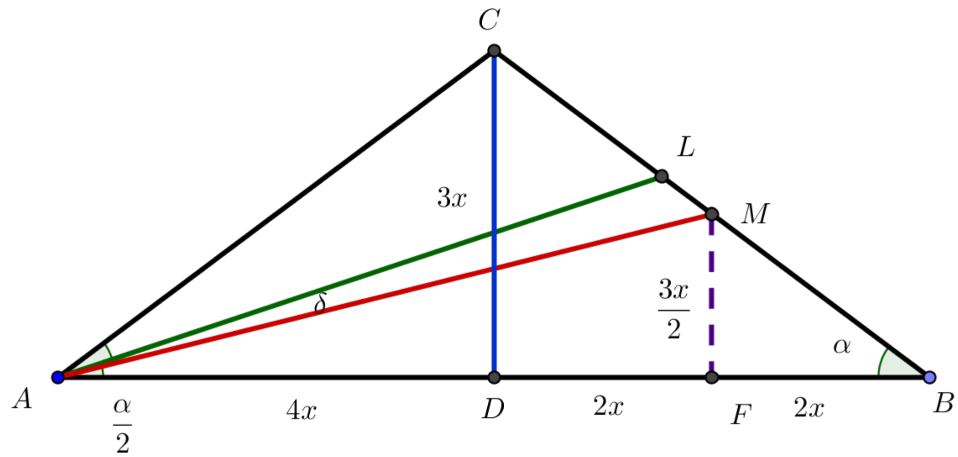


Фигура 8:

Задача 7 Тангенсът на ъгъла при основата на равнобедрен триъгълник е равен на $\dfrac{3}{4}$. Да се намери тангенсът на ъгъла между медианата и ъглополовящата, прекарани към бедрото.

Решение 7 Понеже $\tan\alpha = \dfrac{CD}{AD} = \dfrac{3}{4}$, означаваме $CD = 3x$, $AD = 4x$. Тогава $AC = BC = 5x$ и $\cos\alpha = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{4}{5}$.

От формулата $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ получаваме $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{3}$.



Фигура 9:

Построяваме $MF||CD$. MF е средна отсечка и $\tan\angle MAF = \dfrac{MF}{AF} = \dfrac{1}{4}$. Нека $\angle LAM = \delta$. Имаме

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2} - \delta\right) = \frac{\frac{1}{3} - \tan\delta}{1 + \frac{1}{3}\tan\delta} = \frac{1}{4} \Rightarrow \tan\delta = \frac{1}{13}.$$

Задача 8 Да се докаже, че ако A_1, B_1 и C_1 са допирните точки на външновписаната откъм BC окръжност с център J_a и радиус r_a, то:

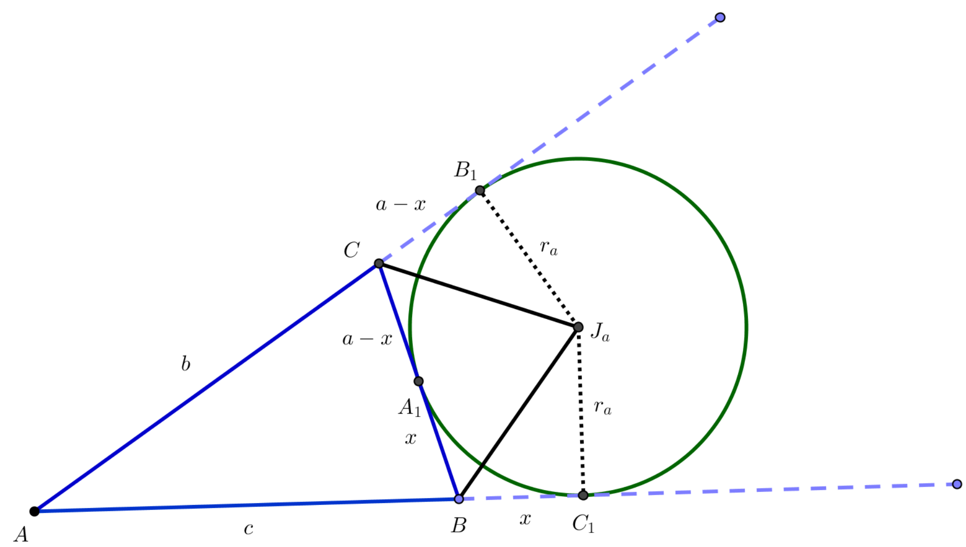
- $BC_1 = p - c$, $CB_1 = p - b$, $AC_1 = p$;
- $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{r_a}{p}$, $\cot\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{r_a}{p-c}$, $\cot\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{r_a}{p-b}$;
- $\angle BJ_aC = \dfrac{\beta+\gamma}{2}$;
- $S_{\triangle ABC} = r_a(p-a)$.

Решение 8 Приемаме за определеност, че триъгълникът е остроъгълен. Означаваме

$$BC_1 = BA_1 = x,\, CA_1 = CB_1 = a - x$$

(равни допирателни към външновписаната окръжност). От равенството

$$AB_1 = AC_1 \Rightarrow b + a - x = c + x \Rightarrow 2x = a + b - c \Rightarrow$$
$$2x = \underbrace{a + b + c}_{2p} - 2c \Rightarrow 2x = 2p - 2c \Rightarrow x = p - c \Rightarrow BC_1 = p - c.$$



Фигура 10: Външновписана окръжност

Сега

$$\begin{cases} CB_1 = a - x = a - (p - c) = a + c - p = \underbrace{a + b + c}_{2p} - b - p = p - b \\ AC_1 = c + x = c + p - c = p. \end{cases}$$

Понеже

$$J_aC_1 = J_aB_1 = r_a,$$

точката J_a лежи върху ъглополовящата на $\angle BAC$. Тогава

$$\angle C_1AJ_a = \angle B_1AJ_a = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \tan\angle C_1AJ_a = \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{J_aC_1}{AC_1} = \frac{r_a}{p}.$$

От $\triangle BC_1J_a$ последователно намираме

$$\angle C_1BJ_a = \frac{\angle C_1BC}{2} = \frac{180^\circ - \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2} \Rightarrow \angle C_1J_aB = \frac{\beta}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cot\frac{\beta}{2} = \frac{J_aC_1}{BC_1} = \frac{r_a}{x} = \frac{r_a}{p-c},\ \cot\frac{\gamma}{2} = \cot\angle CJ_aB_1 = \frac{J_aB_1}{CB_1} = \frac{r_a}{p-b}.$$

Тъй като

$$\angle AC_1J_a + \angle AB_1J_a = 180^\circ,$$

около четириъгълника $AC_1J_aB_1$ може да се опише окръжност

$$\Rightarrow \angle C_1J_aB_1 = 180^\circ - \alpha.$$

За да намерим търсения ъгъл, използваме следните връзки.

$$\underbrace{\angle B_1 J_a C_1}_{\frac{\gamma}{2}} + \underbrace{\angle C J_a B}_{x} + \underbrace{\angle C_1 J_a B}_{\frac{\beta}{2}} = \underbrace{\angle C_1 J_a B_1}_{180^\circ - \alpha};$$

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow 180^\circ - \alpha = \beta + \gamma \Rightarrow x + \dfrac{\beta + \gamma}{2} = \beta + \gamma \Rightarrow x = \angle C J_a B = \dfrac{\beta + \gamma}{2}.$

Четвъртото твърдение се доказва така.

$S_{\triangle ABC} = S_{AC_1 J_a B_1} - (S_{\triangle BC_1 J_a} + S_{\triangle CB_1 J_a} + S_{J_a BC});$

$S_{AC_1 J_a B_1} = \dfrac{r_a p}{2} + \dfrac{r_a p}{2} = r_a p,\ S_{\triangle BC_1 J_a} = \dfrac{r_a(p-c)}{2},\ S_{\triangle CB_1 J_a} = \dfrac{r_a(p-b)}{2},\ S_{\triangle J_a BC} = \dfrac{r_a a}{2} \Rightarrow$

$S_{\triangle ABC} = r_a p - r_a \left(\dfrac{p-c}{2} + \dfrac{p-b}{2} + \dfrac{a}{2} \right) = r_a p - \dfrac{r_a}{2}(p - c + p - b + a) =$

$r_a p - \dfrac{r_a}{2}(2p + a - b - c) = r_a p - \dfrac{r_a}{2}(a + b + c + a - b - c) = r_a p - r_a a = r_a(p - a)$

4 Приложение

Чертежите на алгебричните задачи са създадени в средата ***Matlab*** и са записани с разширение ***.*png***. Тук ще приложим програмните кодове на получените чертежи.

- Чертеж 2

```
u = -5 : 0.01 : 5;
f = inline('u.^2-2.*u-3');
plot(u, f(u), 'r', 'LineWidth', 2)
hold on
grid on
set(gca,'FontName','Times','FontSize',11)
plot(1, -4, 'o', 'MarkerEdgeColor', 'k', ...
    'MarkerFaceColor', [0.49, 1, 0.63], ...
    'MarkerSize', 10)
legend('\it{f(u)=u^2-2u-3}')
```

- Чертеж 3

```
u = 0 : 0.01 : 3;
f = inline('10.^(-u)');
plot(u, f(u), 'g', 'LineWidth', 2)
hold on
grid on
set(gca, 'FontName', 'Times', 'FontSize', 11)
xlabel('\it{Ou}')
ylabel('\it{f(u)}')
legend('\it{10^{-u}}')
```

- Чертеж 4

```
u = -2 : 0.01 : 6;
func = inline('10.^(u.^2-2.*u-3) + (u.^2-2.*u-3) ./ (10.^u) - 1');
%===================================
% ПРИБЛИЖЕНО РЕШАВАНЕ НА УРАВНЕНИЕТО
% ЗА ИЗГОТВЯНЕ НА ПОДХОДЯЩ ЧЕРТЕЖ
%===================================
u1 = fzero(func,-1,1.e-06)
u2 = fzero(func,3,1.e-06)
%===================================
% ГРАФИКА НА ФУНКЦИЯТА
%===================================
plot(u, func(u), 'b', 'LineWidth', 2)
hold on
grid on
%===================================
% ИЗОБРАЗЯВАНЕ НА ПОЛУЧЕНИТЕ КОРЕНИ
%===================================
plot(u1, func(u1), 'o', 'MarkerEdgeColor', 'k', ...
    'MarkerFaceColor', [0.49, 1, 0.63], ...
    'MarkerSize', 10)
plot(u2, func(u2), 'o', 'MarkerEdgeColor', 'k', ...
    'MarkerFaceColor', [0.49, 1, 0.63], ...
    'MarkerSize', 10)
axis([-2,6,-8,8])
set(gca, 'FontName', 'Times', 'FontSize', 11)
xlabel('\it{Ox}')
ylabel('\it{Oy}')
legend('\it{g(u)+f(u)h(u)-1}', ...
    'Корен \it{u_{1}}', 'Корен \it{u_{2}}')
```

- Чертеж 5

```
x = -5 : 0.01 : 5;
par = inline('-x.^2+5.*x-4');
ln = inline('x-3');
hyp = inline('1./(1-x)');
plot(x, par(x), 'm--', 'LineWidth', 2)
hold on
grid on
set(gca, 'FontName', 'Times', 'FontSize', 11)
plot(x, hyp(x), 'b', 'LineWidth', 2)
plot(x, ln(x), 'r', 'LineWidth', 2)
axis([-5, 5, -5, 5])
plot(2, -1, 'o', 'MarkerEdgeColor', 'k', ...
```

```
    'MarkerFaceColor', [0.49, 1, 0.63], ...
        'MarkerSize', 10)
plot(2+sqrt(3), -1+sqrt(3), 'o', 'MarkerEdgeColor', 'k', ...
    'MarkerFaceColor', [0.49, 1, 0.63], ...
        'MarkerSize', 10)
plot(2-sqrt(3), -1-sqrt(3), 'o', 'MarkerEdgeColor', 'k', ...
    'MarkerFaceColor', [0.49, 1, 0.63], ...
        'MarkerSize', 10)
```

- Чертеж 6

```
x = 1 : 0.01 : 2;
f = inline('sqrt(4-(x-2).^2)+sqrt(1-(x-2).^2)');
g = inline('3+sqrt(x.*(2-x))');
plot(x, f(x), 'b', 'LineWidth', 2)
hold on
grid on
plot(x, g(x), 'r', 'LineWidth', 2)
plot(2, 3, 'o', 'MarkerEdgeColor', 'k', ...
    'MarkerFaceColor', [0.49, 1, 0.63], ...
    'MarkerSize', 10)
set(gca, 'FontName', 'Times', 'FontSize', 11)
xlabel('$$ Ox, \quad x \in [1; \, 2] $$', ...
    'interpreter', 'latex')
ylabel('$$ Oy $$', 'interpreter', 'latex')
legend('\it{f(u)}','\it{g(u)}')
```

- Чертеж 7

```
t = -4*pi : 0.01 : 4*pi;
f = inline('cos(pi*t/4)');
g = inline('sqrt(2)+1-2.^((1-t.^2)./2)');
plot(t, f(t), 'b', 'LineWidth', 2)
hold on
grid on
plot(t, g(t), 'r', 'LineWidth', 2)
axis([min(t), max(t), -5, 5])
set(gca, 'FontName', 'Times', 'FontSize', 11)
xlabel('$$ Ot, \quad t \in [-4 \pi; \, 4 \pi] $$', ...
    'interpreter', 'latex')
ylabel('$$ Oy $$', 'interpreter', 'latex')
legend('\it{f(t)}', '\it{g(t)}')
```