Върху някои приложения на аналитичната геометрия в планиметрията и стереометрията

Иво И. Лозанов[1], *Людмил В. Йовков*[2], *Явор М. Йорданов*[3]

[1,3] НПМГ „Акад. Л. Чакалов“, ул. „Бигла“ 52, София

[2] НПМГ „Акад. Л. Чакалов“, София, ул. „Бигла“ 52; ФМИ, СУ „Св. Климент Охридски“, София, бул. „Джеймс Баучер“ 5

Абстракт

Геометричните задачи, които се разглеждат в курса по елементарна математика, невинаги допускат традиционен метод за решаване. Този факт обикновено се дължи на усложнената равнинна или пространствена конструкция, с която се сблъскваме. В такива случаи е разумно да се прибегне до слабо застъпените в училище, но изключително мощни концепции на аналитична геометрия. Изложението на статията хвърля светлина върху някои от приложенията на аналитичната геометрия при овладяването на класически моменти в евклидовата геометрия: установяване колинеарност на три точки; установяване инцидентност на три прави с дадена точка; изчисляване дължина на отсечка; доказване равенство на дължини; използване на афинни еквивалентности и др.

Ключови думи: *аналитична геометрия, вектори, инцидентност, колинеарност, координати на вектор, координати на точка, уравнение на права, уравнение на равнина, уравнение на окръжност.*

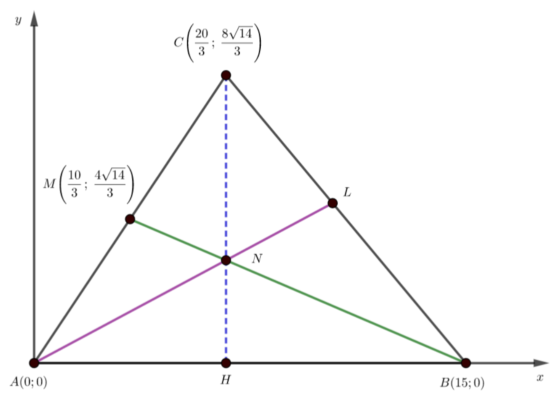
Задача 1 [инцидентност на точка и три прави] (*[4], стр. 60, зад. 7*) Даден е ΔABC със страни $AB = 15$, $BC = 13$ и $AC = 12$. Докажете, че ъглополовящата през върха A, медианата през върха B и височината през върха C се пресичат в една точка.

Решение. Да въведем декартова координатна система в равнината така, че $A(0; 0)$ и $B(15; 0)$. Без ограничение на общността да допуснем, че точка C има координати $(x; y)$ и е разположена в първи квадрант (вж. фиг. 1). Като използваме условията $AC = 12$ и $BC = 13$, достигаме до следната нелинейна система за определяне на координатите на точка C:

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 144 \\ (x-15)^2 + y^2 = 169, \end{array} \right.$$

при условия $x > 0$ и $y > 0$. Веднага получаваме $C\left(\dfrac{20}{3};\ \dfrac{8\sqrt{14}}{3}\right)$.

Нека AL, BM и CH са съответно ъглополовящата през върха A, медианата през върха B и височината през върха C. Да означим с N пресечната точка на AL и BM. Ще докажем, че $N \in CH$.



Фигура 1

Понеже M е средата на отсечката AC, лесно намираме координатите на тази точка: $M\left(\dfrac{10}{3};\ \dfrac{4\sqrt{14}}{3}\right)$. Като използваме уравнение на права през две точки, получаваме общото уравнение на медианата през върха B:

$$BM:\ 4\sqrt{14}x + 35y - 60\sqrt{14} = 0. \tag{1}$$

Да преминем сега към написването на уравнението на ъглополовящата AL. За целта първо намираме ъгловия коефициент на тази права. Очевидно $k_{AL} = \operatorname{tg}\measuredangle BAL = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, където $\alpha = \measuredangle BAC$. От ΔABC с помощта на косинусовата теорема пресмятаме $\cos\alpha = \dfrac{5}{9}$, а след това по формулата $\cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 1$ получаваме $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$ и $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. Следователно $k_{AL} = \dfrac{\sqrt{14}}{7}$. Оттук имаме

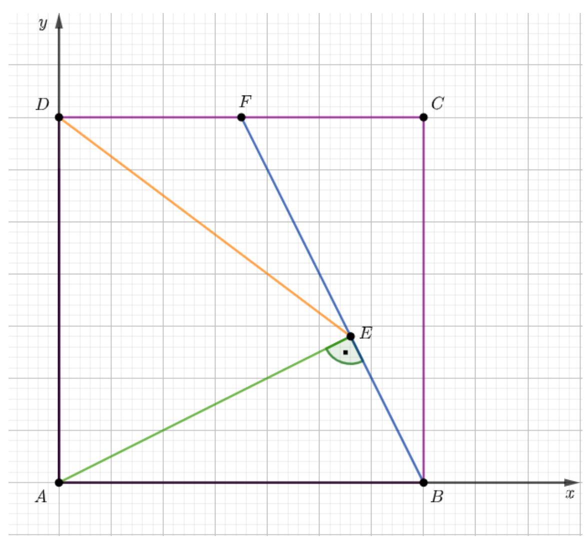
$$AL:\ y = \frac{\sqrt{14}}{7}x. \tag{2}$$

Координатите на пресечната точка на ъглополовящата AL и BM намираме, като решим съвместно уравненията (1) и (2). Веднага получаваме $N\left(\frac{20}{3}; \frac{20\sqrt{14}}{21}\right)$. Понеже абсцисите на точките C и N са равни, то тези точки лежат върху вертикалната права с уравнение $x = \frac{20}{3}$. Това обаче е достатъчно, за да твърдим, че $N \in CH$. $\square$

Задача 2 [равенство на дължини на отсечки] (*[4], стр. 83, зад. 19*) Даден е квадратът $ABCD$. Точката F е средата на CD, а точка E е петата на перпендикуляра от A към BF. Докажете, че $AD = DE$.

Решение. Въвеждаме правоъгълна координатна система в равнината така, че точка A да бъде с координати $(0; 0)$. Да означим с $a > 0$ дължината на страната на квадрата. Избираме разположението на точките B, C и D така, че те да притежават следните координатни представяния: $B(a; 0)$, $C(a; a)$, $D(0; a)$ (вж. фиг. 2).

Тъй като точка F е среда на CD, то координатите ѝ са $\left(\frac{a}{2}; a\right)$. Правата BF е определена с точките B и F, затова декартовото ѝ уравнение е $BF : y = 2(a - x)$. Правата AE минава през центъра на координатната система, следователно притежава декартово задаване $AE : y = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$. От условието $AE \perp BF$ определяме $\alpha = \frac{1}{2}$ и $AE : y = \frac{1}{2}x$.



Фигура 2

Координатите на пресечната точка на правите AE и BF намираме от линейната система

$$\left| \begin{array}{l} y = 2(a - x) \\ y = \frac{1}{2}x. \end{array} \right.$$

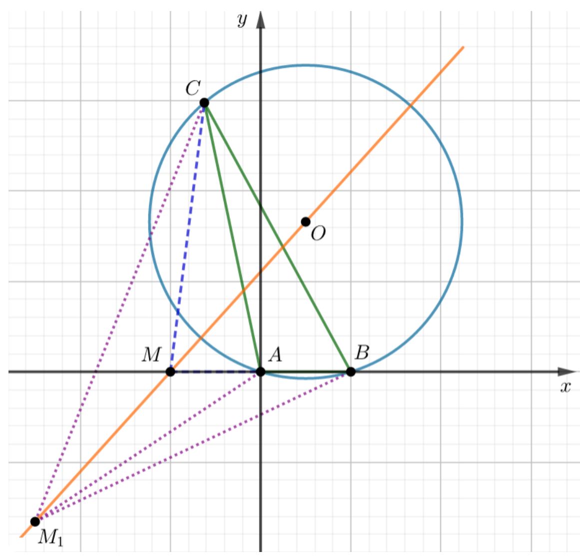
Веднага получаваме $E(0,8a;\, 0,4a)$ и по формулата за разстояние между две точки пресмятаме

$$DE = \sqrt{(x_D - x_E)^2 + (y_D - y_E)^2} = \sqrt{0,64a^2 + 0,36a^2} = a > 0.$$

Оттук веднага следва, че $AD = DE$, което и трябваше да се докаже. $\square$

Задача 3 [колинеарност на три точки] (*[5], стр. 38, зад. 224*) Разстоянията от точка M до върховете A, B и C на ΔABC са съответно равни на 1, 2 и 3, а от точка M_1 до върховете — съответно на 3, $\sqrt{15}$ и 5. Да се докаже, че правата MM_1 минава през центъра на окръжността, описана около ΔABC.

Решение. Въвеждаме правоъгълна координатна система в равнината така, че точка A да съвпада с центъра ѝ. Без ограничение на общността нека приемем, че точка B лежи върху положителната страна на абсцисната ос, т. е. $B(\xi; 0)$, а точка $C(a; b)$ лежи в горната полуравнина ($a \in \mathbb{R}$, $\xi, b \in \mathbb{R}^+$). Въвеждаме още и означения за координатите на дадените точки M и M_1: $M(p; q)$ и $M_1(u; v)$ (p, q, u, $v \in \mathbb{R}$). Очевидни са следните координатни представяния (вж. фиг. 3):



Фигура 3

$$\overrightarrow{AM} = (p; q),\ \ \overrightarrow{BM} = (p - \xi; q),\ \ \overrightarrow{CM} = (p - a; q - b),$$
$$\overrightarrow{AM}_1 = (u; v),\ \ \overrightarrow{BM}_1 = (u - \xi; v),\ \ \overrightarrow{CM}_1 = (u - a; v - b),$$

както и следните скаларни равенства за квадратите на дължините на векторите:

$$\overrightarrow{AM}^2 = p^2 + q^2,\ \ \overrightarrow{AM}_1^2 = u^2 + v^2,$$
$$\overrightarrow{BM}^2 = (p - \xi)^2 + q^2,\ \ \overrightarrow{BM}_1^2 = (u - \xi)^2 + v^2,$$
$$\overrightarrow{CM}^2 = (p - a)^2 + (q - b)^2,\ \ \overrightarrow{CM}_1^2 = (u - a)^2 + (v - b)^2.$$

Като използваме данните от условието, достигаме до нелинейната система уравнения

$$\left| \begin{array}{l} p^2+q^2=1 \\ (p-\xi)^2+q^2=4 \\ (p-a)^2+(q-b)^2=9 \\ u^2+v^2=9 \\ (u-\xi)^2+v^2=15 \\ (u-a)^2+(v-b)^2=25. \end{array} \right. \tag{3}$$

Тя съдържа **шест** уравнения, но **седем** неизвестни. Това означава, че едно от неизвестните ще играе ролята на параметър. Нека изберем q в качеството на параметър. Ако представим първото и второто уравнение на (3) във вида

$$p^2=1-q^2,\ \ (p-\xi)^2=4-q^2,$$

забелязваме, че трябва едновременно да са изпълнени неравенствата

$$1-q^2\geq 0,\ \ 4-q^2\geq 0.$$

Оттук получаваме $-1\leq q\leq 1$, затова полагаме $q=0$.

След като решим квадратните уравнения, чийто брой вече съвпада с броя на неизвестните, установяваме, че системата (3) има повече от едно решение (по-точно на нея ѝ съответстват 16 различни наредени седморки числа $(a;\ b;\ p;\ q;\ u;\ v;\ \xi)$, които я удовлетворяват). Разглежданията ще проведем върху решението

$$\begin{aligned} &a=\frac{13-\sqrt{649}}{20},\ \ b=\frac{1}{11}\left[8\sqrt{11}-\frac{3\sqrt{11}}{20}(13-\sqrt{649})\right], \\ &p=-1,\ q=0,\ u=-\frac{5}{2},\ v=-\frac{\sqrt{11}}{2},\ \xi=1, \end{aligned} \tag{4}$$

което отговаря на поставените по-рано условия $b>0$ и $\xi>0$.

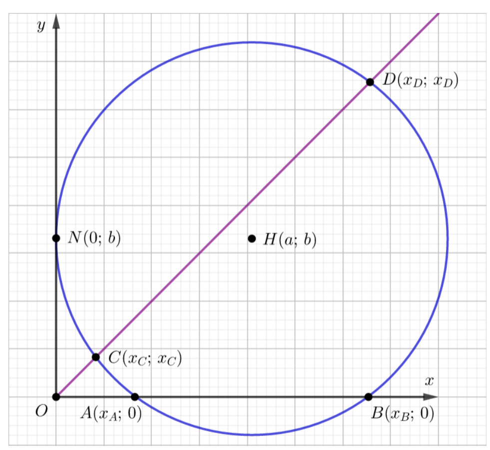
Уравнението на симетралата на отсечката AB е $s_{AB}:\ x=\dfrac{1}{2}$, а на симетралата на отсечката BC — $s_{BC}:\ y-\dfrac{b}{2}=\dfrac{1-a}{b}\left(x-\dfrac{a+1}{2}\right)$. От тях веднага определяме координатите на центъра O на описаната около ΔABC окръжност: $O\left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{a^2+b^2-a}{2b}\right)$. За да докажем, че правата MM_1 минава през точка O, е достатъчно да покажем, че координатите на тази точка удовлетворяват уравнението на правата MM_1. Но декартовото уравнение на тази права е

$$MM_1 : \; y = \frac{v-q}{u-p}x + \frac{qu-pv}{u-p}. \tag{5}$$

С непосредствено заместване в него, вземайки предвид (4), се убеждаваме, че $O \in MM_1$ (за $x = \dfrac{1}{2}$ и $y = \dfrac{a^2+b^2-a}{2b}$ лявата и дясната страна на (5) приемат една и съща числена стойност $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$). $\square$

Задача 4 [дължина на отсечка в равнината] (*[4], стр. 70, зад. 10*) Окръжност, чийто център лежи във вътрешността на прав ъгъл, се допира до едното рамо на ъгъла и пресича другото му рамо в точките A и B. Тази окръжност пресича ъглополовящата на ъгъла в точките C и D. Намерете радиуса на окръжността, ако $AB = \sqrt{6}$ и $CD = \sqrt{7}$.

Решение. В равнината въвеждаме декартова координатна система така, че началото ѝ $O(0;\,0)$ да бъде връх на дадения прав ъгъл. Нека k е дадената окръжност, $H(a;\,b)$ е нейният център ($a > 0$, $b > 0$), $r > 0$ — нейният радиус, а $N(0;\,b)$ — допирната точка на k с ординатната ос.



Фигура 4

Понеже точките A и B лежат върху абсцисната ос, те ще имат съответно координати $A(x_A;\,0)$ и $B(x_B;\,0)$ ($x_B > x_A > 0$). От друга страна, точките C и D лежат върху ъглополовящата на правия ъгъл (т. е. върху ъглополовящата на първи и трети квадрант, вж. фиг. 4), ето защо те ще имат следното координатно представяне: $C(x_C;\,x_C)$, $D(x_D;\,x_D)$ ($x_D > x_C > 0$).

Да означим с $\rho_1 = HH_1$ ($H_1 \in AB$) и $\rho_2 = HH_2$ ($H_2 \in CD$) разстоянията от центъра $H(a;\,b)$ на окръжността съответно до правите $AB : \; y = 0$ и $CD : \; x - y = 0$. Като използваме формулата за разстояние от точка до права, получаваме

$$\rho_1 = \frac{\left|0.a + 1.b\right|}{\sqrt{0^2+1^2}} = \left|b\right|, \;\; \rho_2 = \frac{\left|1.a - 1.b\right|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{\left|a-b\right|}{\sqrt{2}}.$$

От правоъгълните триъгълници AHH_1 и CHH_2 имаме

$$\rho_1^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = r^2, \;\; \rho_2^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 = r^2. \tag{6}$$

Каноничното уравнение на дадената окръжност има вида

$$k:\; (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \tag{7}$$

Тъй като точка $N(0;\,b)$ лежи върху k, то нейните координати ще удовлетворяват (7):

$$a^2 = r^2. \tag{8}$$

По този начин зависимостите (6) и (8) водят до нелинейната система уравнения

$$\left|\begin{array}{l} a^2 = r^2 \\ b^2 + \dfrac{6}{4} = r^2 \\ \dfrac{(a-b)^2}{2} + \dfrac{7}{4} = r^2. \end{array}\right.$$

От първото уравнение, вземайки предвид ограниченията $a > 0$ и $r > 0$, получаваме $a = r$. Второто уравнение поради неравенството $b > 0$ е еквивалентно на уравнението $b = \sqrt{r^2 - 1,5}$. Заместваме тези две връзки в последното уравнение, извършваме приведение и достигаме до биквадратното уравнение $2r^4 - 3r^2 - 2 = 0$ с единствен положителен корен $r = \sqrt{2}$. Това е и търсената дължина на радиуса на окръжността. $\square$

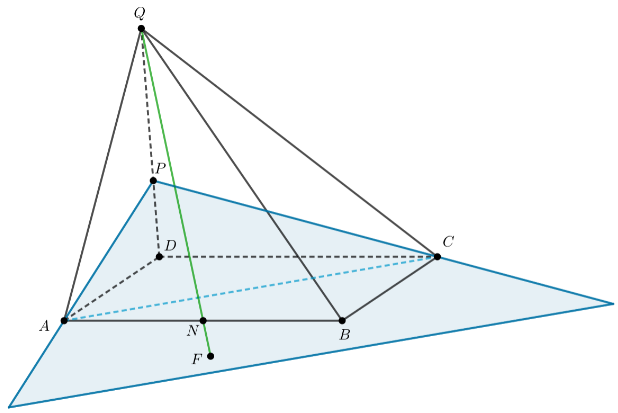
Задача 5 [дължина на отсечка в пространството] Дадена е четириъгълна пирамида $ABCDQ$ с основа успоредника $ABCD$. Точка N е средата на ръба AB, а точка P от ръба DQ е такава, че $QP : PD = 2 : 1$. Правата QN пресича равнината (ACP) в точка F. Ако $QN = 1$, намерете дължината на отсечката QF.

Решение. Въвеждаме декартова координатна система $Oxyz$ в пространството така, че върховете на успоредника да имат следните координатни представяния:

$$A(0;\,0;\,0),\;\; B(4;\,0;\,0),$$
$$C(6;\,2;\,0),\;\; D(2;\,2;\,0).$$

Понеже N е среда на ръба AB, то имаме $N(2;\,0;\,0)$. Ясно е, че ако изберем $Q(2;\,0;\,1)$, то условието $QN = 1$ ще бъде изпълнено (вж. фиг. 5).

По-нататък: като използваме факта, че $QP : PD = 1 : 2$, както и формулата за делене на отсечка в дадено отношение, лесно получаваме $P\left(2; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$. Равнината $\alpha = (ACP)$ е определена с трите неколинеарни точки A, C и P, затова общото ѝ уравнение е $\alpha : x - 3y + 6z = 0$. Понеже $QN + NF = QF$, то за намирането на дължината на QF е достатъчно да определим координатите на пресечната точка на правата NQ и равнината α. Скаларните параметрични уравнения на NQ са



Фигура 5

$$NQ: \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 1 + s, \end{cases}$$

където s е реален параметър. Решавайки съвместно тези уравнения и уравнението на α, веднага определяме $s = -\frac{4}{3}$. Следователно $F\left(2; 0; -\frac{1}{3}\right)$. Оттук лесно пресмятаме $NF = \frac{1}{3}$ и $QF = QN + NF = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. $\square$

Задачи за самоподготовка и упражнение

Задача 1 (*[4], стр. 70, зад. 11*) Радиусът на описаната около остроъгълния ΔABC окръжност е равен на 1, а точката H е ортоцентърът на триъгълника. Центърът на окръжността, описана около ΔACH, лежи върху описаната около ΔABC окръжност. Намерете AC.

Задача 2 (*[4], стр. 82, зад. 16*) Точките G и I са съответно медицентърът и центърът на вписана окръжност в правоъгълен триъгълник с хипотенуза 1. Докажете, че $\dfrac{3\sqrt{2}-4}{6} \leq GI < \dfrac{1}{3}$.

Задача 3 * (*[5], стр. 35, зад. 191*) В ΔABC са построени медианите BM и CN. Да се докаже, че ако $MB \perp CN$, то $\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma \geq \dfrac{2}{3}$.

Задача 4 (*[4], стр. 83, зад. 29*) Намерете геометричното място на точките M, лежащи във вътрешността на даден квадрат $ABCD$, за които $\measuredangle MAD + \measuredangle MBA + \measuredangle MCB + \measuredangle MDB = 180^\circ$.

Задача 5 (*[4], стр. 29, зад. 7*) Ортоцентърът H на остроъгълния ΔABC дели височината му $BD\,(D \in AC)$ в отношение $BH : HD = 3 : 1$, а точката K е среда на BD. Докажете, че $\measuredangle AKC = 90^\circ$.

Задача 6 (*[8], стр. 164, зад. 12*) Върху страните AB и AC на равностранния ΔABC са взети съответно точките E и D така, че $BE : EA = AD : DC = 1 : 2$. Отсечките BD и CE се пресичат в точка P. Докажете, че $\measuredangle APC = 90^\circ$.

Задача 7 (*[8], стр. 164, зад. 11*) Точка M е среда на страната CD на квадрата $ABCD$, а точка P лежи върху диагонала AC и е такава, че $PC = 3AP$. Намерете $\measuredangle BPM$.

Задача 8 Върху страната BC на ΔABC е взета точка D, такава, че $BD : DC = 1 : 3$. Върху отсечката AD е взета точка E, такава, че $AE : ED = 1 : 3$. Върху отсечката BE е взета точка F, такава, че $BF : FE = 1 : 3$. Отсечките AD и CF се пресичат в точка G. Да се намери отношението $S_{\Delta ABC} : S_{\Delta EFG}$.

Упътване. Тъй като в условието участват само афинни инварианти, е удобно задачата да бъде решавана в случая на равностранен триъгълник. Въведете декартова координатна система така, че върховете на дадения триъгълник да имат съответно координати $A(-1;\,0)$, $B(1;\,0)$ и $C(0;\,\sqrt{3})$.

Задача 9 (*[5], стр. 14, зад. 2*) Три окръжности с радиуси 1, 2 и 3 се допират външно една с друга. Да се намери радиусът на окръжността, която минава през трите допирни точки.

Задача 10 * (*[6], стр. 27, зад. 104*) Дадена е правилна четириъгълна пирамида $ABCDE$ с основа квадрата $ABCD$. Нека $P \in AE$ и $Q \in CE$, като $DP : PE = 1 : 3$ и $CQ = QE$. Ако $R = BE \cap (DPQ)$, намерете $BR : RE$.

Задача 11 * (*[9], стр. 179, зад. 11*) Нека M е медицентърът, а H — ортоцентърът на ΔABC. Докажете, че правата MH (правата на Ойлер) е успоредна на AB тогава и само тогава, когато $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = 3$, където $\alpha = \measuredangle CAB$ и $\beta = \measuredangle CBA$.

Задача 12 (*[9], стр. 180, зад. 15*) Върху страните AC и BC на ΔABC са построени външно квадратите $AKLC$ и $BPQC$. Докажете, че височината на триъгълника през върха C разполовява отсечката LQ.

Литература

[1] **В. А. Ильин, Э. Г. Позняк.** *Аналитическая геометрия.* Издательство „Наука“, главная редакция физико-математической литературы. Москва, 1968 г.

[2] **Гр. Станилов.** *Аналитична геометрия.* Издателство „Наука и изкуство“. София, 1964 г.

[3] **Д. В. Клетеник.** *Сборник задач по аналитической геометрии.* Издательство „Наука“, главная редакция физико-математической литературы. Москва, 1969 г.

[4] **Ив. Тонов, И. Шаркова, М. Христова, Д. Капралова, В. Златилов.** *Математика за 11. клас — профилирана подготовка. Геометрия.* Издателство „Регалия 6“. София, 2020 г.

[5] **И. Шаригин.** *Задачи по планиметрия.* Издателство „Интеграл“. Добрич, 2005 г.

[6] **П. Рангелова.** *Сборник за 11. — 12. клас с методични указания.* Издателство „Коала прес“. Пловдив, 2006

[7] **Пл. Паскалев.** *Методическо ръководство за решаване на задачи по висша математика.* Издателство „Архимед“. София, 2012 г.

[8] **Ст. Додунеков, Г. Кожухарова, М. Христова, Д. Капралова, Св. Дойчев.** *Математика за 10. клас — профилирана подготовка.* Издателство „Регалия 6“. София, 2002 г.

[9] **Ч. Лозанов, Т. Витанов, П. Недевски, Евг. Стоименова.** *Математика за 12. клас — профилирана подготовка.* Издателство „Анубис“. София, 2002 г.