

Модел на Нютон и модел на Каро за течение на кръв в артериите

Людмил Владимиров Йовков

Софийски университет „Св. Климент Охридски“

Факултет по математика и информатика

Катедра „Числени методи и алгоритми“

Изчислителна математика и математическо моделиране, ФН 24248

21. 10. 2015

- Досегашни изследвания
- Цели и методи на изследването

Постановка на задачата

- Диференциално уравнение

$$(1) \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_{app} \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

- Гранични условия

$$(2) \quad u(R, t) = 0$$

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial r}(0, t) = 0.$$

Тук $r \in [0; R]$ и $t \in [0; T]$.

Градиент на налягането $\frac{\partial p}{\partial x}$

Два случая за градиента на налягането

- Нестационарно течение: $\frac{\partial p}{\partial x} = -A_{st} \cos(nt)$
- Стационарно течение: $\frac{\partial p}{\partial x} = -A_{st}$

Действителен вискозитет μ_{app}

Формула за пресмятане:

$$\mu_{app} = \mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty}) \left[1 + \lambda^a \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^a \right]^{\frac{n_C - 1}{a}}$$

- случаят $\mu_0 = \mu_{\infty}$
- случаят $\mu_0 \neq \mu_{\infty}$

Физични параметри

Таблица: Числени стойности на физичните параметри

| Константа | Стойност |
|--------------|------------------------|
| μ_0 | 0.056 Pa · s |
| μ_∞ | 0.00345 Pa · s |
| λ | 3.313 s |
| n_c | 0.3568 |
| ρ | 1000 kg/m ³ |
| A_{st} | 6000 Pa · s |
| R | 0.0045 m |
| a | 2 |

Стационарно уравнение с постоянен градиент на налягането. Обезразмеряване

Начин на обезразмеряване:

$$\bar{r} = \frac{r}{R} \in [0; 1],$$

$$\bar{\mu}_{app} = \frac{\mu_{app}}{\mu_{\infty}} = 1 + \left(\frac{\mu_0}{\mu_{\infty}} - 1 \right) \left[1 + \left(\frac{\lambda}{R} \right)^a \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{r}} \right)^a \right]^{\frac{n_c - 1}{a}},$$
$$\bar{\mu}_{app} \in \left[1; \frac{\mu_0}{\mu_{\infty}} \right].$$

Стационарно уравнение с постоянен градиент на налягането. Обезразмеряване

Безразмерна диференциална задача:

$$(4) \quad \frac{1}{\bar{r}} \cdot \frac{d}{d\bar{r}} \left(\bar{r} \bar{\mu}_{app} \frac{d u}{d\bar{r}} \right) = -\frac{R^2}{\mu_{\infty}} A_{st}, \quad \bar{r} \in (0; 1),$$

$$(5) \quad u(1) = 0,$$

$$(6) \quad \frac{d u}{d\bar{r}}(0) = 0.$$

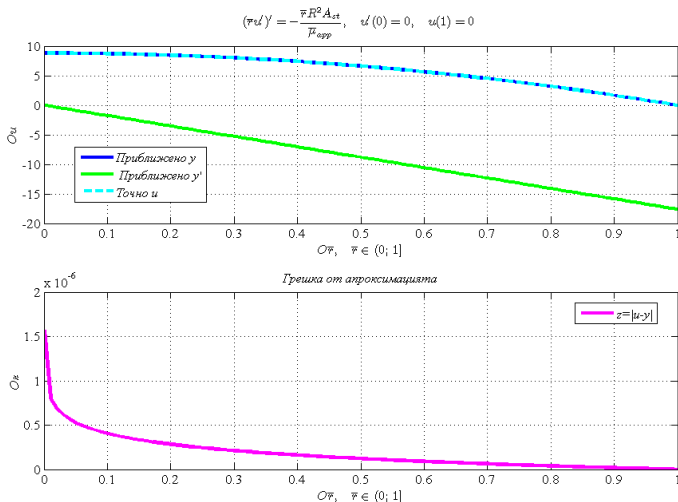
Стационарен модел на Нютон

- Обезразмерено аналитично решение

$$(7) \quad \bar{u}_{\text{точно}} = \frac{A_{st} R^2 (1 - \bar{r}^2)}{4\mu_{\infty}}$$

Стационарен модел на Нютон

- Числено решение — солвър bvp4c



Стационарен модел на Нютон

- Обемен дебит Q

$$Q = 2\pi \int_0^R ru(r) \, dr \Leftrightarrow Q = 2\pi R^2 \int_0^1 \bar{r}u(\bar{r}) \, d\bar{r}$$

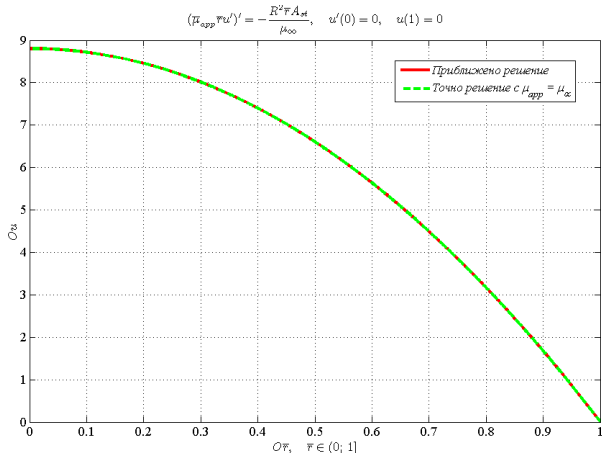
Получаваме $Q \approx 0.00028005 \, \text{m}^3/\text{s}$.

Стационарен модел на Каро

- Диференчна схема — стъпка $h = 0.001$
 - 1 хомогенност
 - 2 консервативност
 - 3 грешка на апроксимация

Стационарен модел на Каро

- Сравнение с модела на Нютон — 10^{-6}



Фигура: Сравнение между точното и приближеното решение в стационарния модел на Каро при $\bar{\mu}_{app} \Rightarrow 1$

Стационарен модел на Каро

- Обемен дебит

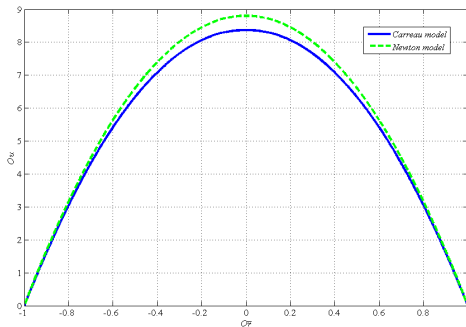
① $\mu_0 = \mu_\infty \Rightarrow Q \approx 0.00028005 \text{ m}^3/\text{s}$

② $\mu_0 \neq \mu_\infty \Rightarrow Q \approx 0.00026873 \text{ m}^3/\text{s}$

$$\Psi_Q = |Q_{\text{Carreau}} - Q_{\text{Newton}}|; \max \Psi_Q = 0.00001$$

Стационарен модел на Каро

$$\Psi_y = |y_{\text{Newton}} - y_{\text{Carreau}}|; \max \Psi_y = 0.4370$$



Фигура: Сравнение между разпределението на скоростите в моделите на Нютон и на Каро

Нестационарно уравнение с периодичен градиент на налягането. Обезразмеряване

Начин на обезразмеряване:

$$0 \leq r \leq R \Rightarrow 0 \leq \frac{r}{R} \leq 1; \bar{r} = \frac{r}{R} \in [0; 1];$$

$$0 \leq t \leq \frac{2\pi}{n} \Rightarrow 0 \leq tn \leq 2\pi; \bar{t} = tn \in [0; 2\pi];$$

$$\bar{\mu}_{app} = \frac{\mu_{app}}{\mu_{\infty}} \in \left[1; \frac{\mu_0}{\mu_{\infty}}\right]$$

Нестационарно безразмерно уравнение с периодичен градиент на налягането

Диференциална задача:

(8)

$$\begin{cases} \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{\mu}_{app} \bar{r} \frac{\partial u}{\partial \bar{r}} \right) + BF(\bar{t}), \bar{r} \in (0; 1), \bar{t} \in (0; 2\pi), \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{r}}(0, \bar{t}) = 0, \bar{t} \geq 0, \\ u(1, \bar{t}) = 0, \bar{t} \geq 0, \\ u(\bar{r}, 0) = \bar{u}_{\text{точно}}^0, \bar{r} \in [0; 1]. \end{cases}$$

$$\text{Тук } \alpha^2 = \frac{R^2 n \rho}{\mu_{\infty}}, B = \frac{R^2 A_{st}}{\mu_{\infty}}, F(\bar{t}) = \cos \bar{t}.$$

Нестационарен модел на Нютон

Начално условие: $u(\bar{r}, 0) = \bar{u}_{\text{точно}}^0$, където

$$\bar{u}_{\text{точно}} = \text{RE} \left(\frac{iA_{st}e^{i\bar{t}}}{n\rho} \left[\frac{J_0(i^{\frac{3}{2}}\alpha\bar{r})}{J_0(i^{\frac{3}{2}}\alpha)} - 1 \right] \right), \quad i^2 = -1.$$

Нестационарен модел на Нютон

Диференчна схема

- хомогенна
- консервативна
- двуслойна с тегло σ
- избор на стъпките h и τ

Условие за положителност на коефициентите

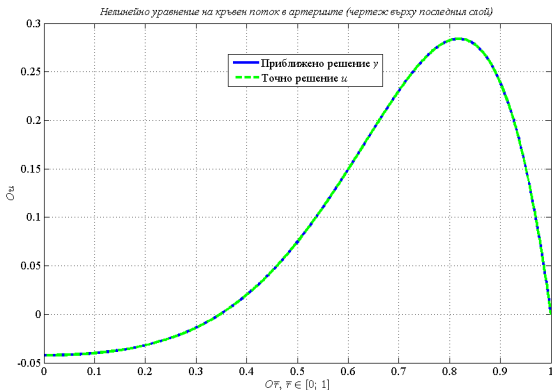
$$\Rightarrow \tau \leq \frac{\mu_{\infty} \alpha^2 h^2}{2\mu_0(1 - \sigma)}. \text{ Избираме}$$

$$h = \frac{\bar{r}_N - \bar{r}_0}{500} = 0.002, \tau = \frac{\mu_{\infty} \alpha^2 h^2}{2\mu_0(1 - \sigma)} = 0.0002.$$

- намиране на решението
- грешка на схемата

Нестационарен модел на Нютон

$$\psi = |\bar{u} - y| = O(h^2 + \tau^2)$$



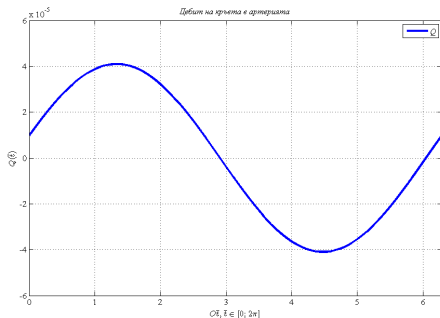
Фигура: Сравнение между точното и приближеното решение в нестационарния модел на Нютон

Нестационарен модел на Нютон

Обемен дебит

- начин на пресмятане
- чертеж по точките $\{(\bar{t}^j; Q^j)\}_{j=0}^M$

$(\bar{t}_{\min}; Q_{\min}) : (4.4; -4 \times 10^{-5}), (\bar{t}_{\max}; Q_{\max}) : (1.3; 4 \times 10^{-5})$



Фигура: Дебит на кръвния поток в нестационарния модел на Нютон

Нестационарен модел на Каро

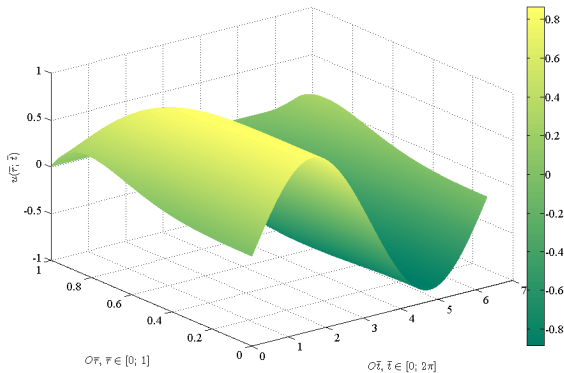
Диференчна схема

- параметри на изчислителния процес – тегло и стъпки:

$$\sigma = \frac{1}{2}, h = \frac{\bar{r}_N - \bar{r}_0}{200} = 0.005, \tau = \frac{\mu_\infty \alpha^2 h^2}{2\mu_0(1 - \sigma)} = 0.0011$$

- приближено решение

Нестационарен модел на Каро

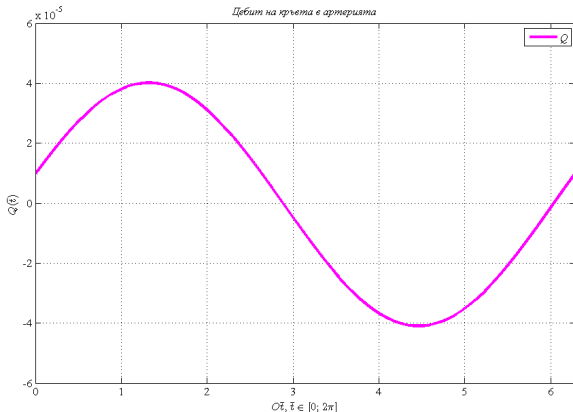


Фигура: Повърхнина на решението u при нестационарно течение на не-Нютонов флуид

Нестационарен модел на Каро

Обемен дебит

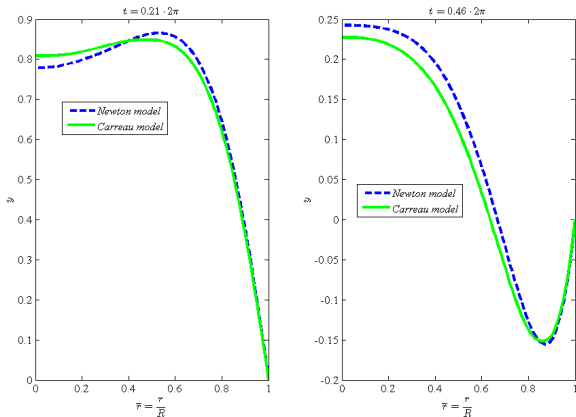
$$(\bar{t}_{\min}; Q_{\min}) : (4.4; -4 \times 10^5), (\bar{t}_{\max}; Q_{\max}) : (1.3; 4 \times 10^5)$$



Фигура: Дебит на кръвния поток в нестационарния модел на Каро

Нестационарен модел на Каро

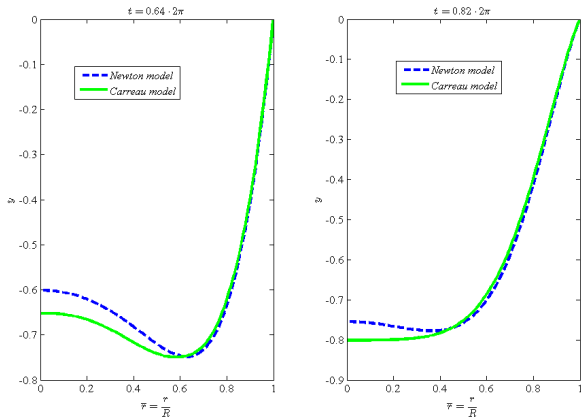
Сравнение между скоростите от нестационарните модели на Нютон и на Каро



Фигура: Сравнения за $\bar{t} = 0.21 \cdot 2\pi$ и $\bar{t} = 0.46 \cdot 2\pi$

Нестационарен модел на Каро

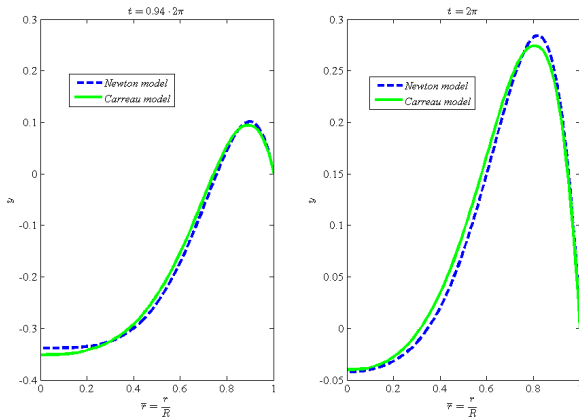
Сравнение между скоростите от нестационарните модели на Нютон и на Каро



Фигура: Сравнения за $\bar{t} = 0.64 \cdot 2\pi$ и $\bar{t} = 0.82 \cdot 2\pi$

Нестационарен модел на Каро

Сравнение между скоростите от нестационарните модели на Нютон и на Каро



Фигура: Сравнения за $\bar{t} = 0.94 \cdot 2\pi$ и $\bar{t} = 2\pi$

Нестационарен модел на Каро

Обобщени резултати

Таблица: Разлика между скоростите, пресметнати от модела на Нютон и от модела на Каро

| Време \bar{t} | $\max \Psi_y$ |
|-----------------------------|---------------|
| $\bar{t} = 0.21 \cdot 2\pi$ | 0.0301 |
| $\bar{t} = 0.46 \cdot 2\pi$ | 0.0338 |
| $\bar{t} = 0.64 \cdot 2\pi$ | 0.0511 |
| $\bar{t} = 0.82 \cdot 2\pi$ | 0.0463 |
| $\bar{t} = 0.94 \cdot 2\pi$ | 0.0193 |
| $\bar{t} = 1.00 \cdot 2\pi$ | 0.0185 |

Нестационарно уравнение с произволна периодична функция за градиента на налягането

- 1 Идея
- 2 Ред на Фурие – разлагане на $F(\bar{t})$

$$F(\bar{t}) = \sum_{m=1}^6 (A_m \cos m\bar{t} + B_m \sin m\bar{t})$$

Нестационарно уравнение с произволна периодична функция за градиента на налягането

Резултат:

$$F(\bar{t}) = \sum_{m=1}^6 (A_m \cos m\bar{t} + B_m \sin m\bar{t}) =$$
$$0.8436 \cos \bar{t} - 0.7137 \sin \bar{t} + 0.5418 \cos 2\bar{t} + 1.4326 \sin 2\bar{t} -$$
$$-0.7945 \cos 3\bar{t} + 0.5508 \sin 3\bar{t} - 0.2375 \cos 4\bar{t} - 0.1589 \sin 4\bar{t} +$$
$$+0.0122 \cos 5\bar{t} - 0.2818 \sin 5\bar{t} - 0.1917 \cos 6\bar{t} - 0.0167 \sin 6\bar{t}.$$

Нестационарно уравнение с произволна периодична функция за градиента на налягането

| Параметър | Модел на Нютон | Модел на Каро |
|--------------|------------------------------------|------------------------------------|
| R | 0.0015 m | 0.0015 m |
| μ_0 | 0.004 Pa · s | 0.0207 Pa · s |
| μ_∞ | 0.004 Pa · s | 0.004 Pa · s |
| n | 6π rad/s | 6π rad/s |
| ρ | 1.05 g/ml | 1.05 g/ml |
| A_{st} | $13600 \cdot 9.8 \cdot 0.1$ Pa · s | $13600 \cdot 9.8 \cdot 0.1$ Pa · s |
| λ | 0.3327 s | 0.3327 s |
| n_c | 0.4505 | 0.4505 |
| a | 2 | 2 |

- Измервания на McDonald
- Формула на Womersley за дебита (1955)

(9)

$$Q(t) = 3.56 \sin(t + 71^\circ 13') + 2.71 \sin(2t - 40^\circ 10') - \\ - 1.20 \sin(3t + 50^\circ 33') - 0.28 \sin(4t - 20^\circ 17') + \\ + 0.22 \sin(5t + 99^\circ 28') - 0.13 \sin(6t + 5^\circ 47')$$

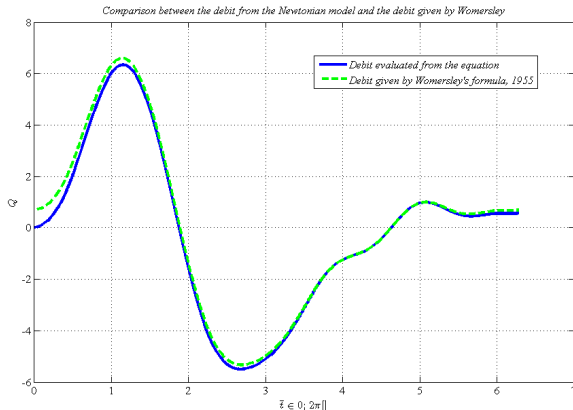
Пресмятане на решението — тегло и стъпки на изчислителния процес:

$$\sigma = \frac{1}{2}, \quad h = \frac{\bar{r}_N - \bar{r}_0}{300} = 0.003, \quad \tau = \frac{\mu_\infty \alpha^2 h^2}{2\mu_0(1 - \sigma)} = 0.0001.$$

Начално условие — $u(\bar{r}, 0) = 0$.

Модел на Нютон

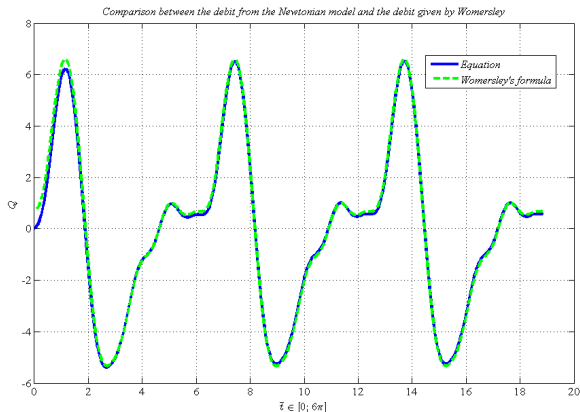
Времеви интервал – $[0; 2\pi]$.



Фигура: Сравнение между дебита от численото решение и от формулата на Womersley (9)

Модел на Нютон

Времеви интервал – $[0; 6\pi]$.

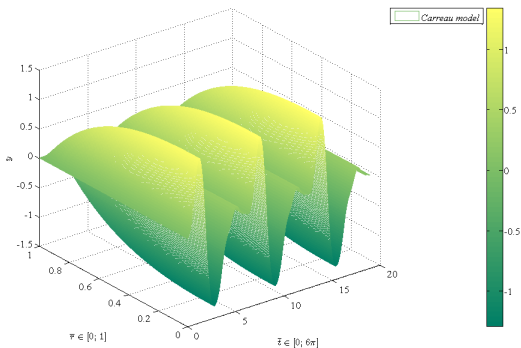


Фигура: Сравнение между дебита от численото решение и от формулата на Womersley (9)

Изчислителен процес

- $\sigma = \frac{1}{2}$, $h = 0.01$, $\tau = 0.006$
- времеви интервал – $[0; 6\pi]$
- начално условие – $u(\bar{r}, 0) = 0$

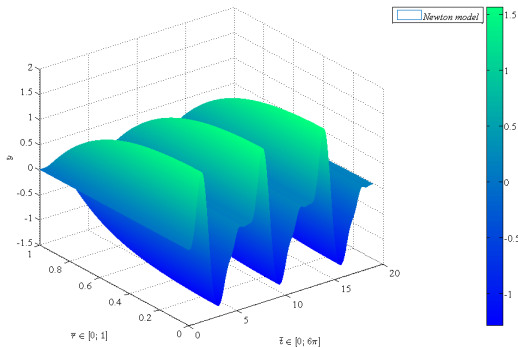
Модел на Каро — сравнение с модела на Нютон



Фигура: Разпределение на скоростта в модела на Каро

Модел на Каро — сравнение с модела на Нютон

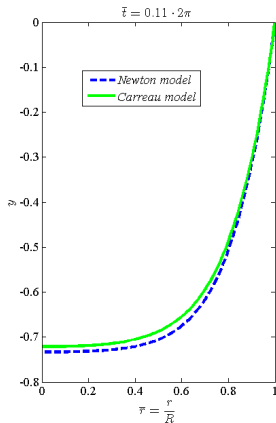
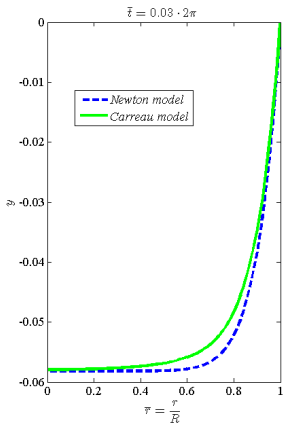
Фигура: Разпределение на скоростта в модела на Нютон



$$\Psi_y = |y_{\text{Newton}} - y_{\text{Carreau}}|; \max \Psi_y = 0.1403$$

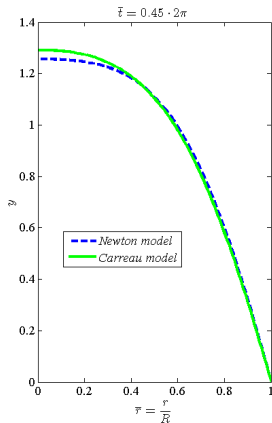
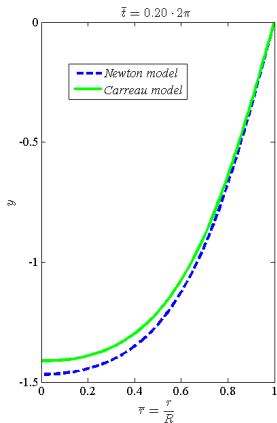
Модел на Каро — сравнение с модела на Нютон

Сравнение между скоростите от нестационарните модели на Нютон и на Каро



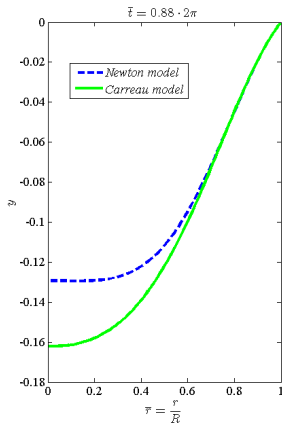
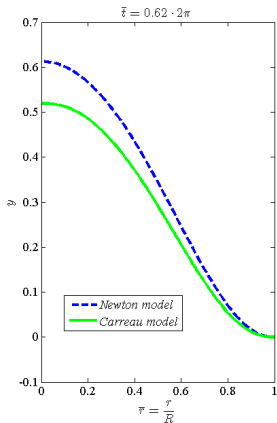
Модел на Каро — сравнение с модела на Нютон

Сравнение между скоростите от нестационарните модели на Нютон и на Каро



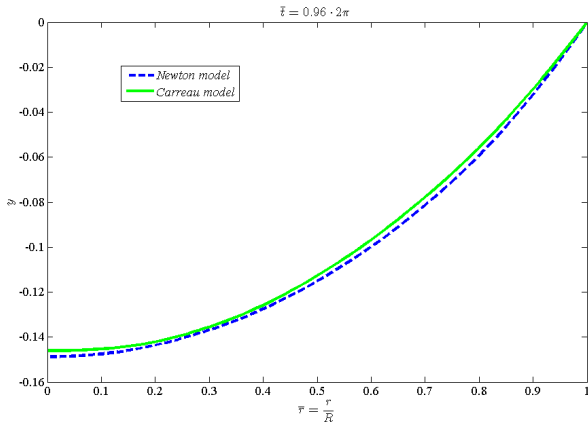
Модел на Каро — сравнение с модела на Нютон

Сравнение между скоростите от нестационарните модели на Нютон и на Каро



Модел на Каро — сравнение с модела на Нютон

Сравнение между скоростите от нестационарните модели на Нютон и на Каро



Модел на Каро — сравнение с модела на Нютон

Обобщени резултати

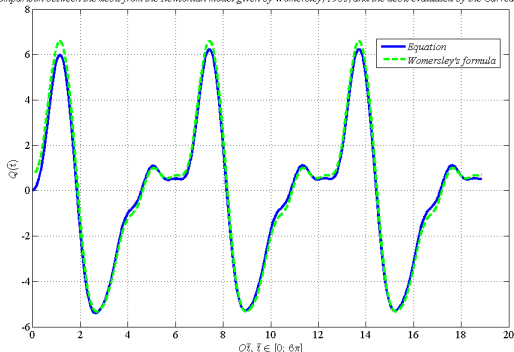
Таблица: Разлика между скоростите, пресметнати от модела на Нютон и от модела на Каро при произволна периодична функция за градиента на налягането

| Време \bar{t} | $\max \psi_y$ |
|-----------------------------|---------------|
| $\bar{t} = 0.03 \cdot 2\pi$ | 0.004 |
| $\bar{t} = 0.11 \cdot 2\pi$ | 0.02 |
| $\bar{t} = 0.20 \cdot 2\pi$ | 0.06 |
| $\bar{t} = 0.45 \cdot 2\pi$ | 0.03 |
| $\bar{t} = 0.62 \cdot 2\pi$ | 0.0001 |
| $\bar{t} = 0.88 \cdot 2\pi$ | 0.0002 |
| $\bar{t} = 0.96 \cdot 2\pi$ | 0.0036 |

Модел на Каро — сравнение с модела на Нютон

Обемен дебит — $\max \psi_Q = 0.1591$

Comparison between the debit from the Newtonian model given by Womersley, 1955, and the debit evaluated by the Carreau model



Фигура: Сравнение между дебита от модела на Каро и дебита от формулата на Womersley (9) за $\bar{t} \in [0; 6\pi]$

Благодаря за вниманието!