2024 秋数值代数-实验报告 #4

姓名：李奕萱　　学号：PB22000161

2024 年 11 月 5 日

运行环境：win11,vscode,py3

1　实验内容与要求

病态线性方程组的求解

问题提出：理论上的分析表明，求解病态的线性方程组是有困难的。实际情况是否如此，具体计算过程中究竟会出现怎样的现象呢？

实验内容：考虑线性方程组 $Hx = b$, 其中 **H** 为 **n** 阶 **Hilbert 矩阵**, 即

$$H = (h_{ij})_{n\times n}, \qquad h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \quad i,j = 1,2,\cdots,n$$

这是一个著名的病态问题。通过先给定解, 比如取 x 的各个分量为 1, 再计算出右端向量 b 的办法给出一个精确解已知的问题.

实验要求：

(1) 分别编写 Jacobi 迭代法, Gauss-Seidel 迭代法以及最速下降法 (SD) 的一般程序 (不得使用符号运算)；

(2) 所有迭代的初始向量均取为 0 向量, 停止条件为 $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_1 < \epsilon \doteq 5\times 10^{-4}$ 或迭代步数超过 50 万 (可视为迭代失败);

(3) 用以上三种迭代去求解前述的病态方程组, 分别取阶数 **n=10,50,100,200,800**;

(4) 列表给出各自数值解的计算误差 (1-范数下) 以及迭代步数; 报告数值实验过程中可能出现的计算问题;

(5) 分析并比较以上三种迭代方法, 你能得出什么结论或经验教训.

2 数值结果

–数值解误差及迭代步数

n	迭代法	迭代步数	绝对误差 $\|x^{(k)} - x\|_1$
	Jacobi	500000	nan
n=10	Gauss-Seidel	614	0.43287027795357225
	SD	317	0.1728045622586729
	Jacobi	500000	nan
n=50	Gauss-Seidel	2369	1.0927517603077161
	SD	625	0.626794251788232
	Jacobi	500000	nan
n=100	Gauss-Seidel	3824	1.9001978360241425
	SD	1109	0.9452248433669382
	Jacobi	500000	nan
n=200	Gauss-Seidel	5992	3.2994818463879247
	SD	1915	1.5143794069153476
	Jacobi	500000	nan
n=800	Gauss-Seidel	15944	8.908334089350323
	SD	5481	3.978635541478246

表 1: 数值结果

3 算法分析

- **Jacobi 迭代收敛性差**
- **SD 迭代收敛效果最好**
- **Gauss_Seidel 迭代较 Jacobi 迭代更好，但在病态矩阵中跑不过 SD 迭代**

4 实验小结

计算过程中可能出现的问题 (包括这次实验中的体会，收获或经验教训)：

- **Jacobi 迭代：**

  收敛性问题：如果矩阵不是对角占优的，Jacobi 方法可能无法收敛。此时，解的精度可能无法满足要求，或者收敛速度过慢。

  数值稳定性：在高维问题中，Jacobi 方法可能会受到数值稳定性的影响，导致迭代结果不准确。

- **Gauss_Seidel 迭代:**

  收敛性问题：虽然 Gauss-Seidel 方法对某些矩阵收敛速度较快，但对于某些特定问题，尤其是条件不好的矩阵，依然可能收敛缓慢或者根本不收敛。

  迭代不稳定：对于某些稀疏矩阵或非常不规则的系统，Gauss-Seidel 方法可能变得不稳定，需要更多的迭代次数才能收敛。

- **SD 迭代：**

  步长选择问题：步长（或学习率）是最速下降法的关键。如果步长过大，可能导致解不稳定或发散；步长过小，可能导致迭代收敛非常缓慢。

  收敛性问题：对于条件较差的矩阵，最速下降法的收敛速度可能非常慢，甚至无法达到所需精度。

  比较三种算法的各自优缺点：

- **Jacobi:** 优点：简单易实现。适用于对角占优的矩阵（对角占优矩阵是指对角线上的元素比其他元素绝对值大）。

  缺点：收敛性差，特别是对于对角不占优的矩阵。收敛速度较慢。对于某些矩阵，可能需要较多的迭代才能得到足够精确的解。

- **Gauss_Seidel 迭代:**

  优点：收敛速度比 Jacobi 迭代法快，特别是对于对角占优的矩阵。适用于更广泛的矩阵类型，通常能更早收敛。

  缺点：需要逐步更新每个变量，这意味着在并行计算中不如 Jacobi 迭代法高效。同样，若矩阵条件不好（比如不是对角占优的矩阵），可能导致收敛慢或无法收敛。

- **SD 迭代:**

  优点：对于某些问题，最速下降法的收敛速度非常快，特别是当问题的解是线性系统的最小二乘解时。可以应用于非对称矩阵或不规则问题中，适应性强。

缺点：对于条件不良的矩阵，最速下降法可能会收敛得非常慢，甚至在某些情况下无法收敛。需要选择合适的步长，步长的选择直接影响到算法的收敛速度。如果步长过大，可能会跳过最优解；步长过小，可能会导致收敛速度非常慢。

小结：**Jacobi** 迭代适合用在问题规模较小或矩阵满足对角占优的情况下。

对于收敛速度要求较高且矩阵条件较好的问题，**Gauss-Seidel** 方法非常有效。

最速下降法适用于最小二乘问题和那些要求快速找到近似解的问题，尤其是高维问题中，适用范围较广。

在选择算法时，应该根据问题的矩阵性质（如对角占优）来选择合适的算法，算法不合适可能导致无法收敛或求解错误。

在病态矩阵的求解中，最速下降法表现最好。