2024 秋数值代数-实验报告 #2

姓名：李奕萱　　　学号：PB22000161

2024 年 9 月 26 日

运行环境：[win11,vscode,py3]

实验内容与要求

分别编写 Newton 迭代法 (通常也称 Newton-Raphson 迭代法)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

和霍氏迭代法

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'(x_n)f'(x_n) - f(x_n)f''(x_n)},, n = 0, 1, 2, \cdots$$

的通用程序, 并利用它们对如下非线性方程

$$f(x) \triangleq arctan(x) + 2xsin(x) - 1.1958 = 0$$

求根. 计算中的停止条件为 $|f(x_n)| < 10^{-9}$ 或迭代步数 $n > 10^4$ (可视为迭代失败). **提示**：编程前分别手算出 $f'(x), f''(x)$。

- 列表给出两种迭代方法在初始点 x_0 依次取值 -55, -40, -30, -20, -8, 0, 10, 22, 30, 40, 50 时的迭代步数（若迭代步数超过 1 万步，可视为迭代失败）以及相应的数值解 x_n (保留小数点后 6 位; 迭代失败时无需给出)；
- 比较并分析两种方法的优劣，给出合理的算法分析并作实验小结。

1 数值结果（列表或作图）

函数 $f(x)$ 图像参见图 1; 计算结果参见图 2.

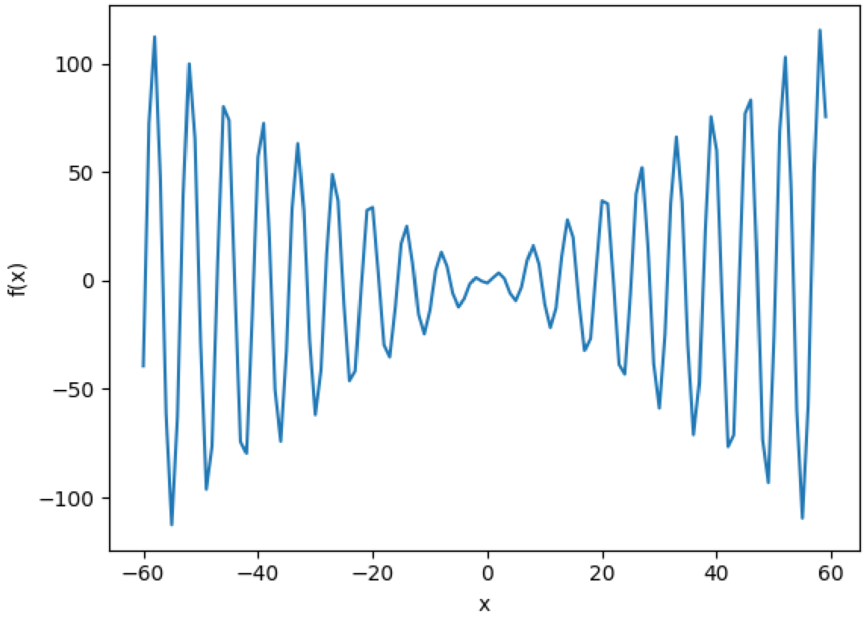

图 1: $f(x)$ 图像

-55	4	-3.141637e+02	8	-5.657297e+01
-40	4	-4.080710e+01	4	-4.080710e+01
-30	5	-3.773543e+01	5	-3.145941e+01
-20	5	-1.892133e+01	4	-1.892133e+01
-8	4	-4.401347e+01	7	-9.281020e+00
0	4	5.922063e-01	4	5.922063e-01
10	4	9.439051e+00	3	9.439051e+00
22	2	2.199864e+01	2	2.199864e+01
30	4	3.769449e+01	5	3.141046e+01
40	4	4.084500e+01	4	4.084500e+01
50	3	5.026195e+01	3	5.026195e+01

图 2: 实验结果: 误差精度 $\varepsilon = 10^{-9}$, 最大迭代步数为 10^4

其中第一列为初始 x 值，第二列第三列为牛顿迭代法的迭代步数和计算结果，第四列第五列为霍氏迭代法的迭代步数和计算结果。

2 算法分析

从表一中可以观察到：

- 在-55，-30，-8，30 时二者有较明显的差距。
- 在-20，10 时，虽然结果一样，但是牛顿迭代法迭代次数要大于霍氏迭代法。

- 在-55，-8，30 时，虽然相较于牛顿迭代法距离初始值更近，但是霍氏迭代法迭代次数更多。

3 实验小结

在本次数值实验中，我们分别测试了两种非线性方程求根的计算方法，发现了在方程有多个解时，两种结果得到的答案不一定相同，同时体会了解方程算法的选择的重要性。最终得到以下结果：

Newton 迭代法的优点：

- 只需要求一阶导数，计算成本更低；
- 二次收敛，收敛速度快；
- 适用范围广，只要可以求导数都可进行计算。

缺点是：

- 如果初始值不够靠近解，可能导致发散或找不到我们想要的根；
- 若某点导数为零，可能不适用；
- 牛顿迭代法通常只保证局部收敛，当初始值差距过大时，容易找不到解。

霍氏迭代法的优点：

- 相比牛顿迭代法收敛速度更快，同样结果所需迭代次数更少；
- 在某些情况下，霍氏迭代法比牛顿迭代法更稳定，因为它减少了高阶导数的影响;

缺点是：

- 需要求二阶导数，计算成本更高，且限制更大。
- 与牛顿迭代法一样，霍纳迭代法也具有局部收敛性，意味着如果初始猜测不适当，可能不会收敛到正确的根。