

基于矩阵 SVD 分解的图像压缩

李奕萱 22 PB22000161

2025 年 3 月 21 日

摘要

本文介绍了基于矩阵奇异值分解（SVD）的图像压缩方法。通过对图像矩阵进行 SVD 分解，保留前 k 个奇异值及其对应的奇异向量，可以实现图像的有效压缩。实验结果表明，该方法在保持图像质量的同时，显著减少了数据存储量。

一、前言（问题的提出）

1.1 背景

随着数字图像的广泛应用，图像数据的存储和传输需求急剧增加。如何在保证图像质量的前提下，减少图像数据的存储量成为一个重要问题。传统的图像压缩方法，如 JPEG 和 PNG，虽然在一定程度上解决了这一问题，但仍存在压缩比和图像质量之间的权衡。

1.2 研究目的

本文旨在研究基于矩阵奇异值分解（SVD）的图像压缩方法，通过实验验证其有效性，并分析不同参数对压缩效果的影响。我们希望通过这种方法，在保证图像质量的前提下，进一步提高压缩比，减少存储空间。

二、相关工作

图像压缩技术已经有了广泛的研究和应用。传统的压缩方法包括 JPEG、PNG 等格式，这些方法主要基于离散余弦变换（DCT）和霍夫曼编码等技术。近年来，基于矩阵分解的压缩方法逐渐受到关注，其中 SVD 分解因其数学性质优良，被广泛应用于图像处理领域。SVD 分解不仅在图像压缩中表现出色，还在图像去噪、特征提取等方面有着广泛的应用。

2.3 图像质量评估指标

在图像压缩领域，除了定性评估压缩效果外，还常采用定量评估指标，如峰值信噪比（PSNR）和结构相似性指数（SSIM）。PSNR 基于均方误差（MSE）衡量原始图像与压缩图像之间的差异，值越高表示图像质量越好。SSIM 则考虑了图像的结构信息，更符合人眼的视觉特性，值越接近 1 表示图像越相似。

2.4 GUI 在图像压缩中的应用

为了便于用户操作和直观展示压缩效果，开发带有图形用户界面（GUI）的图像压缩工具具有重要意义。通过 GUI，用户可以方便地选择图像、设置压缩参数，并实时查看压缩结果和评估指标。

三、SVD 分解简介

3.5 基本概念

奇异值分解（Singular Value Decomposition, SVD）是线性代数中一种重要的矩阵分解方法，能够将任意矩阵分解为三个矩阵的乘积形式： $A = U\Sigma V^T$ ，其中：

- U 是一个 $m \times m$ 的正交矩阵，其列向量称为左奇异向量；

- Σ 是一个 $m \times n$ 的对角矩阵，对角线上的元素 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ (r 为矩阵的秩) 称为奇异值，按非递减顺序排列；
- V 是一个 $n \times n$ 的正交矩阵，其列向量称为右奇异向量。

SVD 的核心思想是将矩阵分解为一系列正交基的线性组合，每个基的权重由对应的奇异值决定。

3.6 彩色图像的 SVD 处理

对于彩色图像，每个像素包含 RGB 三个颜色通道。在 SVD 分解时，我们对每个颜色通道分别进行独立分解：

1. 分离图像的 R、G、B 三个颜色通道；
2. 对每个通道矩阵进行 SVD 分解；
3. 分别保留各通道的前 k 个奇异值及对应奇异向量；
4. 用相同参数重建三个通道后，合并为彩色图像。

这种处理方式保证了颜色信息的独立性和完整性，同时延续了 SVD 分解的压缩特性。

3.7 压缩比计算

图像压缩比定义为原始数据量与压缩后数据量的比值：

$$\text{压缩比} = \frac{\text{原始数据量}}{\text{压缩后数据量}}$$

对于尺寸为 $m \times n$ 的灰度图像，原始数据量为 $m \times n$ 。压缩后存储的数据包括：

- 左奇异向量矩阵 U 的前 k 列： $m \times k$
- 奇异值矩阵 Σ 的前 k 个值： k
- 右奇异向量矩阵 V 的前 k 行： $n \times k$

因此压缩后数据量为：

$$\text{压缩后数据量} = mk + k + nk = k(m + n + 1)$$

对于彩色图像，需乘以 3 (RGB 三个通道)。

四、问题分析

图像可以看作是一个矩阵，每个元素代表一个像素的灰度值。通过 SVD 分解，可以将图像矩阵分解为三个矩阵的乘积，其中包含了图像的主要信息和噪声。通过保留前 k 个奇异值及其对应的奇异向量，可以实现图像的压缩。

4.8 SVD 分解原理

SVD 分解将一个矩阵分解为三个矩阵的乘积： $A = U\Sigma V^T$ ，其中 U 和 V 是正交矩阵， Σ 是对角矩阵，其对角线元素为奇异值。奇异值的大小反映了矩阵的能量分布，较大的奇异值对应着图像的主要信息。

4.9 图像压缩原理

通过保留前 k 个奇异值及其对应的奇异向量，可以近似原始图像，从而实现压缩。压缩后的图像矩阵为： $A_k = U_k \Sigma_k V_k^T$ 。这种方法不仅能够有效压缩图像，还能在一定程度上去除噪声，提高图像质量。

五、建模的假设

为了简化问题，本文在建模过程中做出以下假设：

5.10 假设 1

图像矩阵是一个实数矩阵，且所有像素值在 0 到 255 之间。这个假设符合大多数灰度图像的实际情况。

5.11 假设 2

图像的主要信息集中在前 k 个奇异值及其对应的奇异向量中。这个假设基于图像的能量集中性，即大部分能量集中在少数奇异值上。

六、符号说明

表 1: 符号说明

符号	说明	单位
A	原始图像矩阵	-
U	左奇异向量矩阵	-
Σ	奇异值对角矩阵	-
V	右奇异向量矩阵	-
k	保留的奇异值个数	-
A_k	压缩后的图像矩阵	-
CR	压缩比	-
m, n	图像尺寸	像素

七、数学模型建立

本文采用 SVD 分解方法对图像进行压缩^[1]。具体步骤如下：

1. 将图像读入为矩阵 A 。对于灰度图像， A 是二维矩阵；对于彩色图像， A 是三维矩阵（包含三个颜色通道）。
2. 对每个颜色通道进行 SVD 分解： $A^{(c)} = U^{(c)}\Sigma^{(c)}V^{(c)T}$ ($c=R,G,B$)
3. 保留前 k 个奇异值及其对应的奇异向量，构造 $U_k^{(c)}$ 、 $\Sigma_k^{(c)}$ 和 $V_k^{(c)}$ 。
4. 计算各通道的压缩矩阵 $A_k^{(c)} = U_k^{(c)}\Sigma_k^{(c)}V_k^{(c)T}$ ，若为彩色则合并三个通道得到最终压缩图像。

7.12 压缩比计算模型

根据上述公式，不同图像类型的压缩比计算如下：

- 灰度图像：

$$CR_{\text{gray}} = \frac{mn}{k(m+n+1)}$$

- 彩色图像：

$$CR_{\text{color}} = \frac{3mn}{3k(m+n+1)} = \frac{mn}{k(m+n+1)}$$

其中 CR 表示压缩比， m, n 为图像尺寸， k 为保留的奇异值数量。

7.13 图像质量评估模型

7.13.1 PSNR（峰值信噪比）

PSNR 的计算公式为：

$$PSNR = 10 \log_{10} \left(\frac{MAX_I^2}{MSE} \right)$$

其中， MAX_I 是图像的最大像素值（对于 8 位图像，通常为 255）， MSE 是均方误差，计算公式为：

$$MSE = \frac{1}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} [I(i, j) - C(i, j)]^2$$

其中， I 是原始图像， C 是压缩后的图像。

7.13.2 SSIM（结构相似性指数）

SSIM 的计算公式为：

$$SSIM(x, y) = \frac{(2\mu_x\mu_y + C_1)(2\sigma_{xy} + C_2)}{(\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_1)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2)}$$

其中， x 和 y 分别是原始图像和压缩图像， μ_x 、 μ_y 是均值， σ_x^2 、 σ_y^2 是方差， σ_{xy} 是协方差， C_1 和 C_2 是常数，用于稳定除法操作。

八、结果（与对比）

通过实验验证了 SVD 分解在图像压缩中的有效性。实验使用 Olivetti Faces 数据集中的图像，分别保留 5、10 和 15 个奇异值进行压缩，并与原始图像进行对比。

8.14 灰度结果展示

实验结果如下图所示，分别展示了原始图像及保留 5、10、15 个奇异值后的压缩图像。

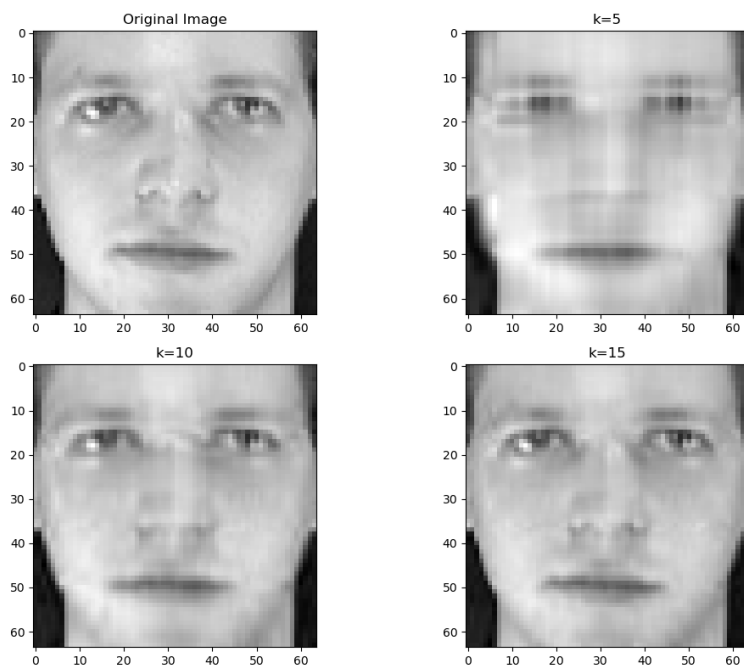


图 1: 图像压缩结果展示

8.15 灰色图像结果对比

从图中可以看出，随着保留奇异值个数的增加，压缩图像的质量逐渐提高。当保留 15 个奇异值时，压缩图像与原始图像几乎无差别。具体来说，保留 5 个奇异值时，图像几乎能够保留原始图像的主要特征；保留 10 个奇异值时，图像质量进一步提高；保留 15 个奇异值时，图像几乎与原始图像无异。

8.16 彩色图像实验

使用自定义彩色图像进行测试，分别保留 10、20、30 个奇异值进行压缩，实验结果如下：

8.17 彩色图像结果分析

- 颜色通道的独立处理保证了色彩准确性
- 与灰度图像相比，压缩率计算需考虑三个通道

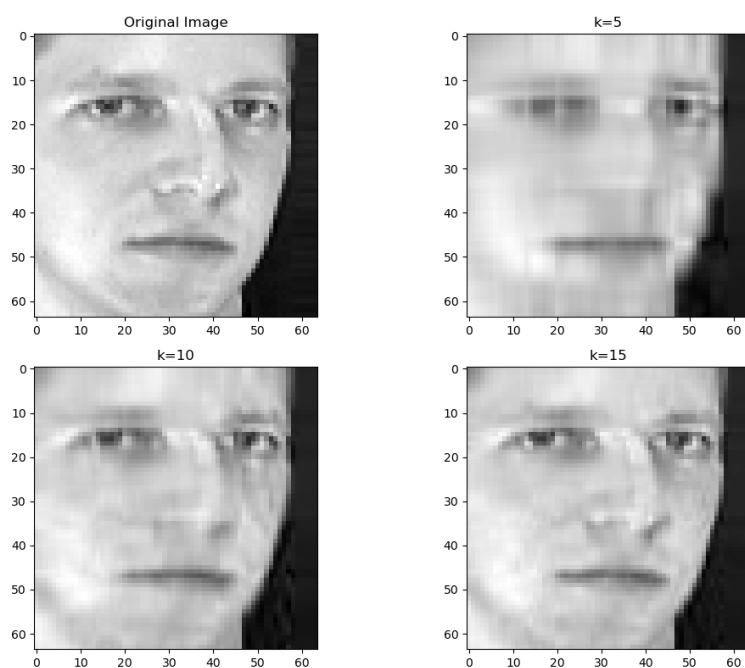


图 2: 图像压缩结果展示

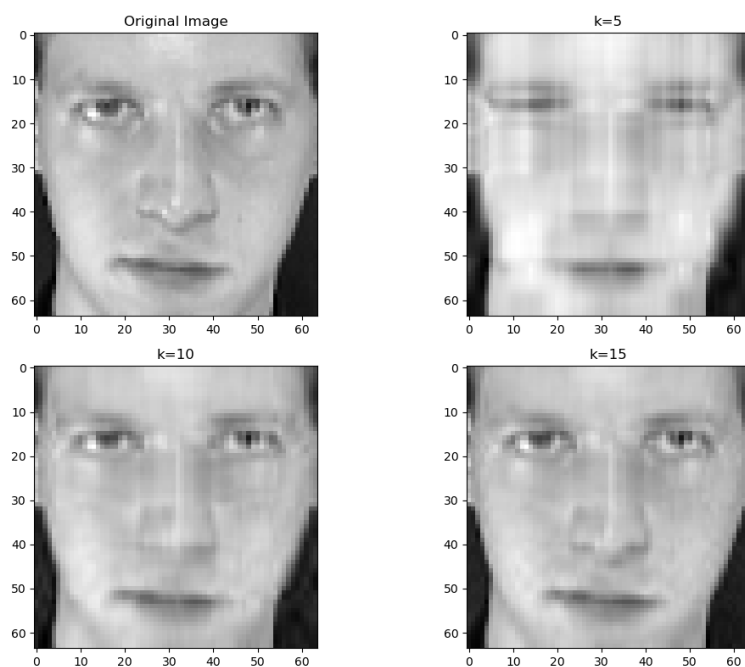


图 3: 图像压缩结果展示

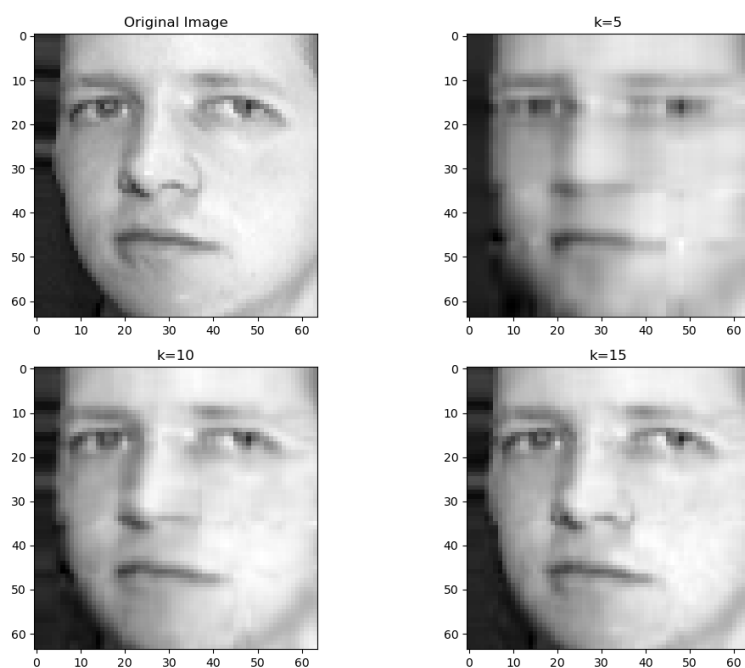


图 4: 图像压缩结果展示

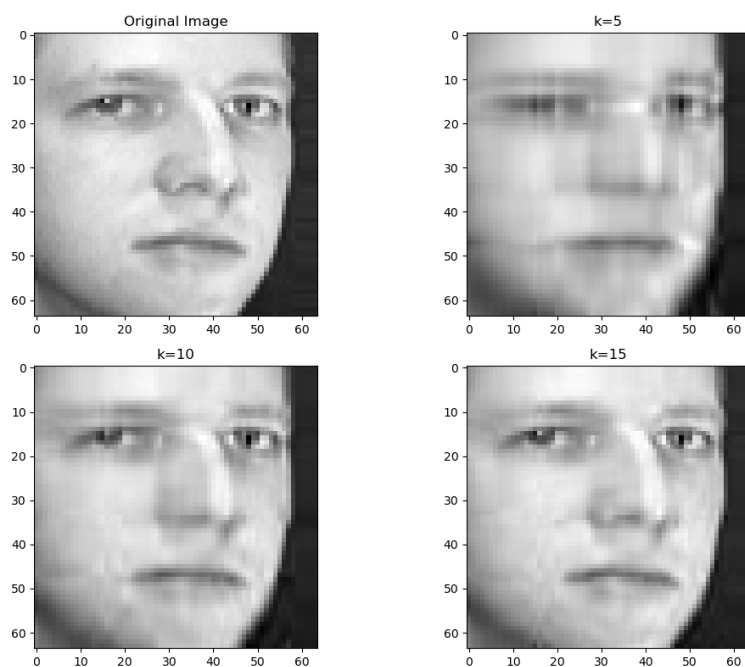


图 5: 图像压缩结果展示

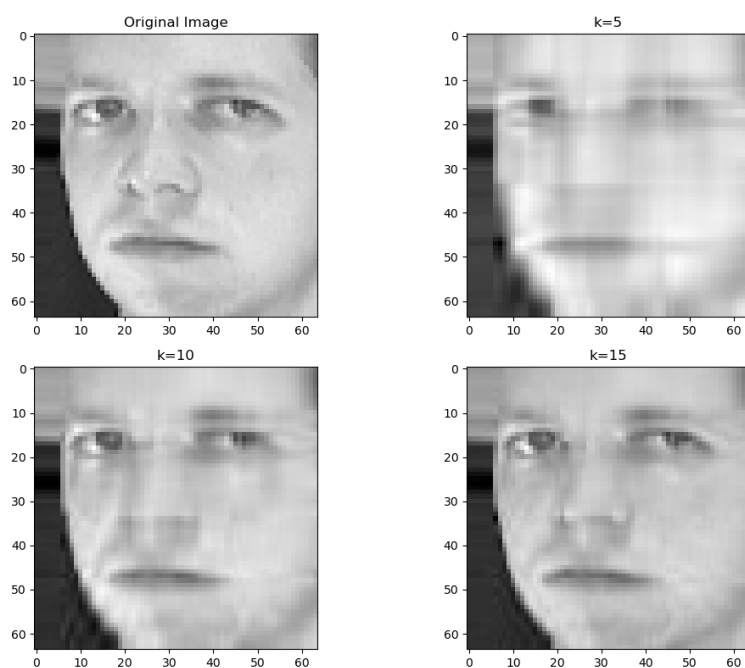


图 6: 图像压缩结果展示

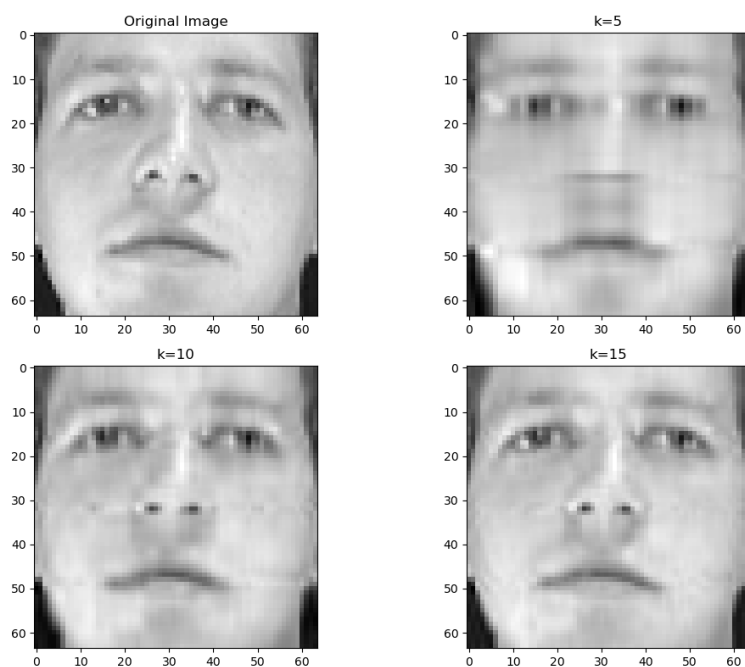


图 7: 图像压缩结果展示

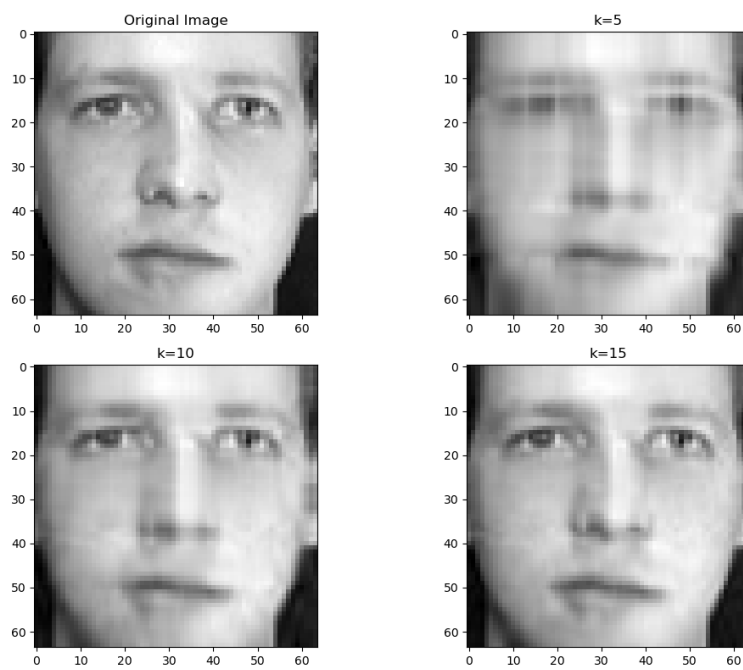


图 8: 图像压缩结果展示

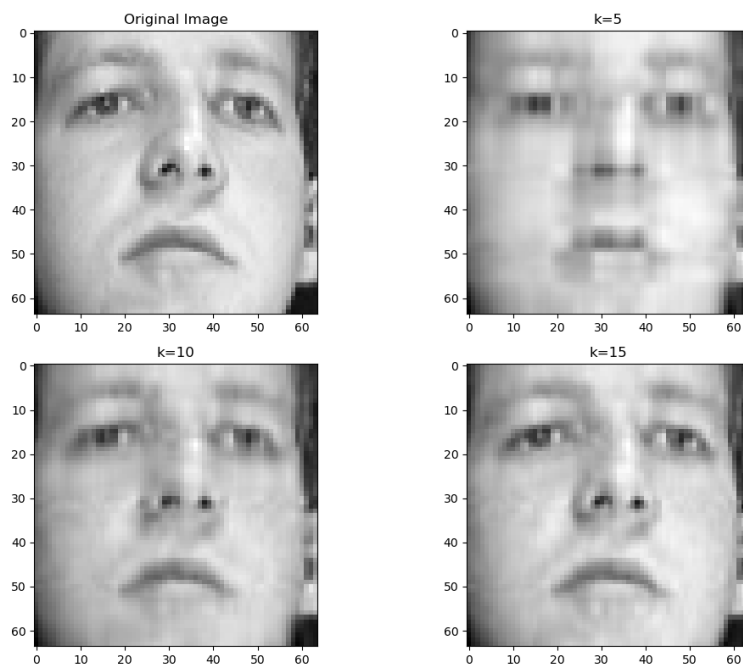


图 9: 图像压缩结果展示

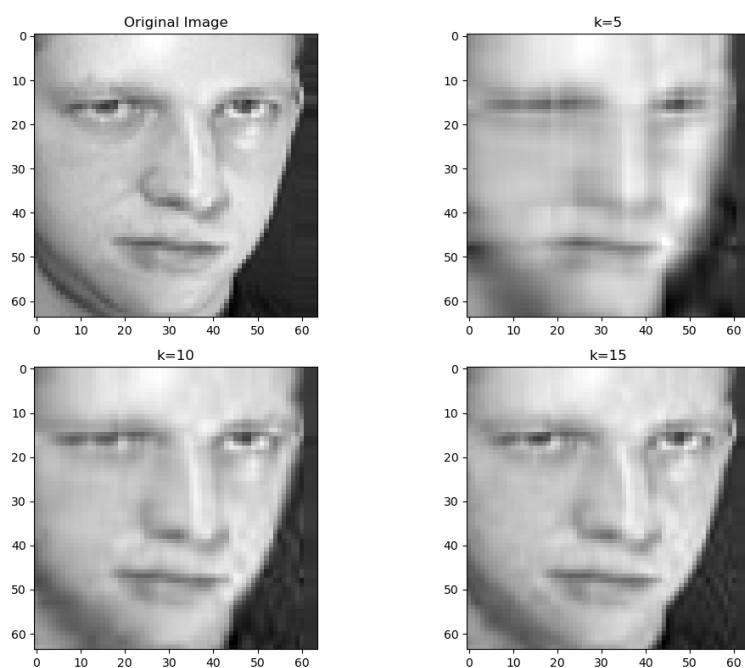


图 10: 图像压缩结果展示

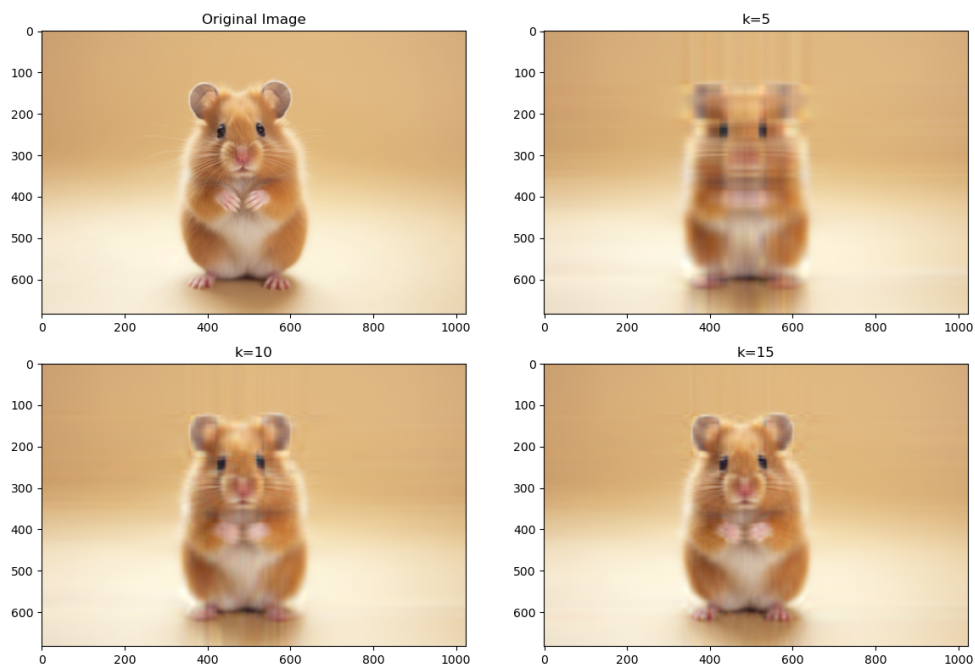


图 11: 彩色图像压缩结果展示（使用 $k=5, 10, 15$ ）

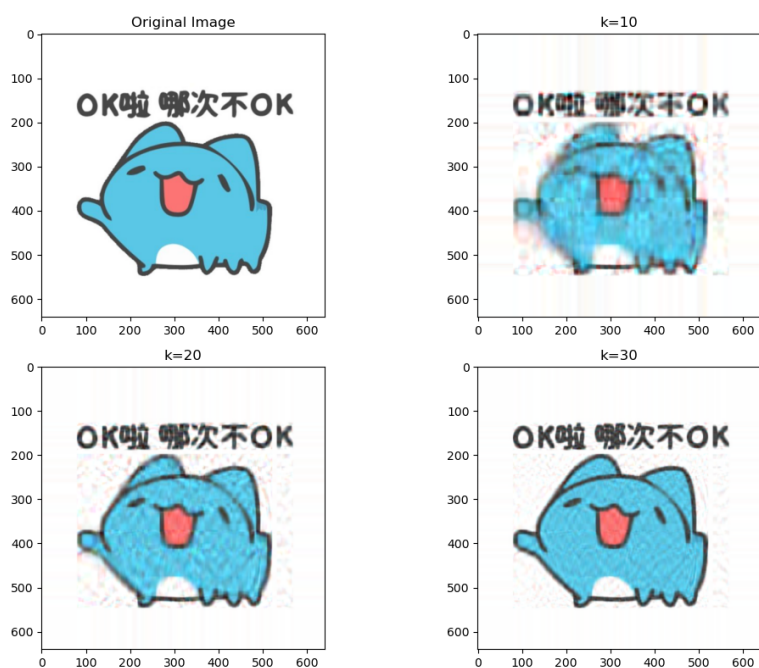


图 12: 彩色图像压缩结果展示

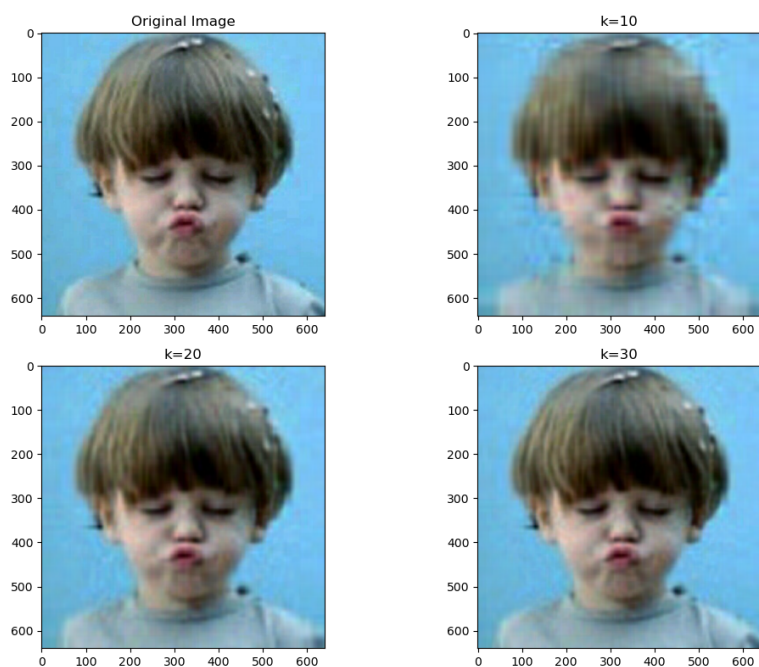


图 13: 彩色图像压缩结果展示

- 当 $k=30$ 时，彩色图像的压缩效果与原始图像几乎无差异

8.18 压缩比实验

分别对灰度图和彩色图进行实验，计算不同 k 值下的压缩比，结果如下：

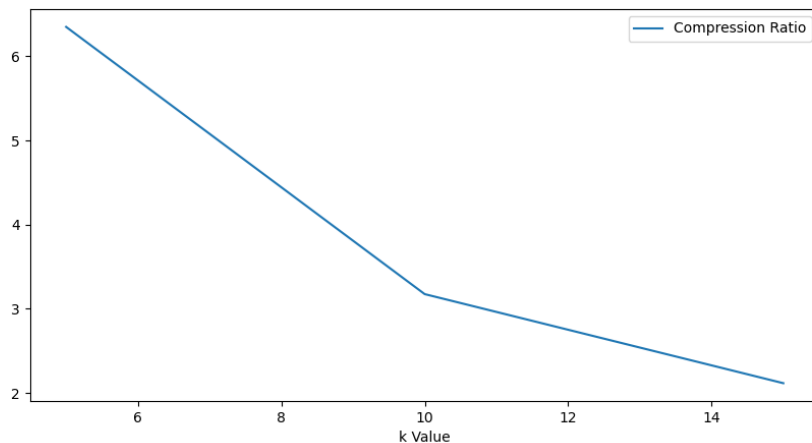


图 14: 64*64 灰色图不同 k 值下的压缩比

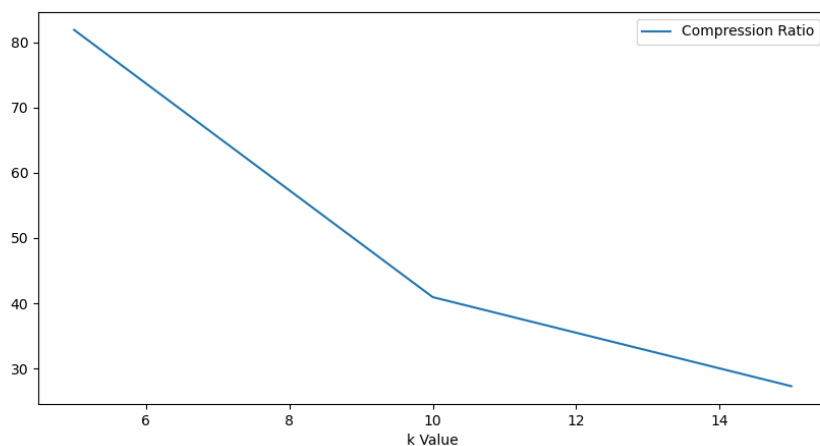


图 15: 683*1024 彩色图不同 k 值下的压缩比

8.18.1 分析

- 当 k 较小时（如灰度图像的 $k=5$ ），压缩比可达 6 倍以上，但图像质量明显下降
- 当 k 增大时（如 $k=15$ ），压缩比显著降低，但图像质量接近原始
- 彩色图像的压缩比与灰度图像计算方式相同，但实际存储需考虑通道合并开销

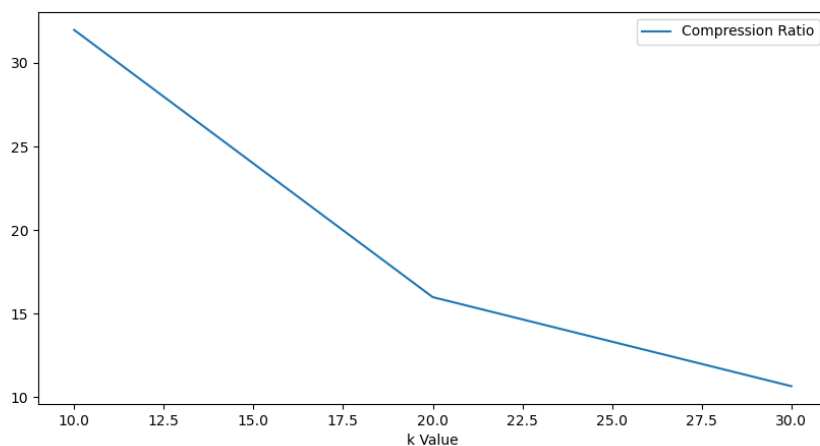


图 16: 640*640 彩色图不同 k 值下的压缩比

k 值	compression Rate	PSNR	SSIM
10	31.98	21.78	0.8194
20	15.99	26.06	0.8559
30	10.66	29.41	0.8892
40	7.99	32.05	0.9153
50	6.27	34.32	0.9348

表 2: 640*640 彩色图不同 k 值下质量评估

8.19 GUI 应用示例

为了方便用户操作和直观展示压缩效果，开发了一个带有图形用户界面（GUI）的图像压缩工具。通过 GUI，用户可以：

- 选择要压缩的图像文件
- 设置压缩参数（如 k 值）
- 实时查看压缩结果
- 查看压缩比、PSNR 和 SSIM 等评估指标



图 17: GUI 界面截图

九、结论

实验结果表明，基于 SVD 分解的图像压缩方法在保持图像质量的同时，能够显著减少数据存储量。该方法简单有效，适用于各种图像压缩场景。通过合理选择奇异值的个数，可以在压缩比和图像质量之间取得良好的平衡。

十、问题与展望

在实际应用中，SVD 分解的计算复杂度较高，尤其是对于大尺寸彩色图像，计算时间随通道数线性增长。未来可以考虑：

- 结合多通道协同分解方法降低计算量
- 研究基于奇异值分布的自适应 k 值选择算法

10.20 压缩比优化方向

- **量化存储**：对奇异值进行有损压缩（如浮点精度降低）
- **混合编码**：结合霍夫曼编码等熵编码技术
- **自适应分块**：对图像分块进行局部最优 k 值选择

参考文献

[1] iGEO, “Svd-矩阵奇异值分解——原理与几何意义,”