

# 平面点列曲线拟合报告

李奕萱 22 PB22000161

2025 年 3 月 31 日

## 摘要

本报告介绍了一个基于 Python 的平面点列曲线拟合工具的实现，特别侧重于参数化方法和拟合方法的选择与应用。参数化和拟合方法是曲线拟合中的两个关键步骤，直接影响拟合曲线的质量和性能。报告详细描述了几种常见的参数化方法及其在不同拟合方法中的应用，并通过实验验证了各方法的优缺点。

## 一、前言（问题的提出）

### 1.1 问题背景

曲线拟合是计算机图形学、计算机视觉和数据处理领域中的一个重要问题。参数化方法和拟合方法的选择对拟合结果有显著影响，不同的方法适用于不同的数据分布和拟合需求。

### 1.2 研究目的

本报告旨在实现一个基于 Python 的平面点列曲线拟合工具，支持多种参数化方法和拟合方法，包括均匀参数化、弦长参数化、离心参数化、Foley-Nielsen 参数化，以及多项式拟合、样条拟合、径向基函数拟合和神经网络拟合。通过该工具，用户可以方便地选择不同的参数化方法和拟合方法，实时查看拟合结果。

## 二、相关工作

参数化方法和拟合方法在曲线拟合中起着至关重要的作用。常见的参数化方法包括：

- 均匀参数化：假设点之间的参数间隔均匀。
- 弦长参数化：根据点之间的欧几里得距离分配参数。
- 离心参数化：考虑点之间的距离和角度信息。
- Foley-Nielsen 参数化：结合弦长和角度信息的改进方法。

常见的拟合方法包括：

- 多项式拟合：通过最小二乘法找到最佳拟合多项式。
- 样条拟合：通过分段多项式函数实现更平滑的拟合效果。
- 径向基函数拟合：利用径向基函数网络进行非线性拟合。
- 神经网络拟合：利用多层感知机（MLP）进行高度非线性的拟合。

## 三、问题分析

### 3.3 参数化的重要性

参数化方法直接影响拟合曲线的平滑性和拟合精度。不同的参数化方法适用于不同的数据分布：

- 均匀参数化适合均匀分布的点。

- 弦长参数化适合非均匀分布的点。
- 离心参数化适合包含角度变化的点。
- Foley-Nielsen 参数化适合复杂分布的点。

### 3.4 拟合方法的选择

拟合方法的选择取决于数据的特性和拟合需求：

- 多项式拟合适合简单的数据集。
- 样条拟合适合需要平滑曲线的复杂形状。
- 径向基函数拟合适合非线性数据。
- 神经网络拟合适合高度非线性数据，具有较强的泛化能力。

### 3.5 挑战

- 实现多种参数化方法和拟合方法，并允许用户在不同方法之间切换。
- 在用户添加或移动点时，实时更新参数化结果和拟合曲线。
- 提供友好的用户界面，支持点的添加、删除和保存功能。

## 四、参数化方法

### 4.6 均匀参数化

均匀参数化假设点之间的参数间隔均匀。对于点列  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ ，参数  $t$  的计算公式为：

$$t_i = \frac{i-1}{n-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

### 4.7 弦长参数化

弦长参数化根据点之间的欧几里得距离分配参数。参数  $t$  的计算公式为：

$$t_1 = 0, \quad t_i = t_{i-1} + \frac{\|p_i - p_{i-1}\|}{L}, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

其中  $L$  是所有相邻点之间距离的总和。

### 4.8 离心参数化

离心参数化考虑点之间的距离和角度信息。参数  $t$  的计算公式为：

$$t_1 = 0, \quad t_i = t_{i-1} + \frac{\|p_i - p_{i-1}\| + \alpha_i}{L + \sum \alpha_i}, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

其中  $\alpha_i$  是点  $p_{i-1}$  和  $p_i$  之间的角度变化。

## 4.9 Foley-Nielsen 参数化

Foley-Nielsen 参数化结合弦长和角度信息，参数  $t$  的计算公式为：

$$t_1 = 0, \quad t_i = t_{i-1} + \frac{\|p_i - p_{i-1}\| + \beta_i}{L + \sum \beta_i}, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

其中  $\beta_i$  是点  $p_{i-1}$  和  $p_i$  之间的综合权重。

# 五、拟合方法

## 5.10 多项式拟合

多项式拟合通过最小二乘法找到最佳拟合多项式。给定点列  $P = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ ，我们寻找一个多项式  $f(t)$  使得误差最小化：

$$\min \sum_{i=1}^n (f(t_i) - y_i)^2$$

其中  $t_i$  是参数化变量。

## 5.11 样条拟合

样条拟合通过分段多项式函数实现更平滑的拟合效果。我们使用三次样条插值，确保在每个区间内曲线的二阶导数连续。

## 5.12 径向基函数拟合

径向基函数拟合利用径向基函数网络进行非线性拟合。我们选择高斯径向基函数：

$$\phi(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

其中  $r$  是距离， $\sigma$  是标准差。

## 5.13 神经网络拟合

神经网络拟合利用多层感知机（MLP）进行高度非线性的拟合。我们使用 GeLU 激活函数和均方误差（MSE）损失函数。神经网络的参数设置如下：

- 隐藏层神经元数量：128
- 学习率：0.001
- 训练迭代次数：1000
- 激活函数：ReLU
- 损失函数：均方误差（MSE）

## 六、符号说明

表 1: 符号说明

符号	说明	单位
$P$	点列	无
$t$	参数化变量	无
$x$	点的 $x$ 坐标	像素
$y$	点的 $y$ 坐标	像素
$d$	多项式阶数	无
$f$	拟合函数	无

## 七、结果（与对比）

### 7.14 结果展示

通过实现的工具，我们对不同的点列进行了拟合实验。以下展示了不同拟合方法的结果：其中，蓝色为均匀参数化结果、绿色为弦长参数化结果、红色为离心参数化结果、黑色为 Foley-Nielsen 参数化结果。

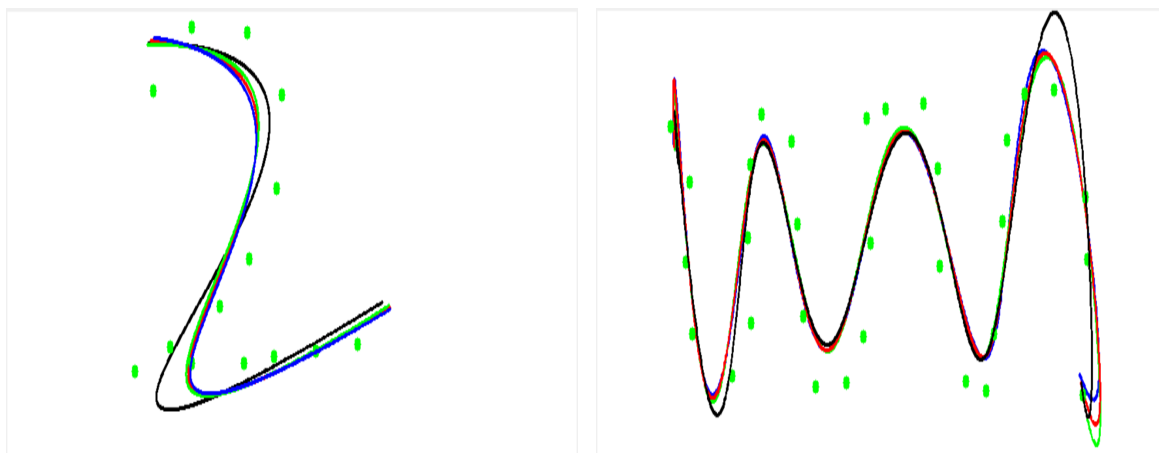


图 1: 多项式插值

通过实现的工具，我们对不同的拟合方式进行了拟合实验。以下展示了不同拟合方法的结果：其中，蓝色为多项式插值结果、绿色为样条拟合结果、红色为径向基函数结果、黑色为神经网络拟合结果。

神经网络不同参数：

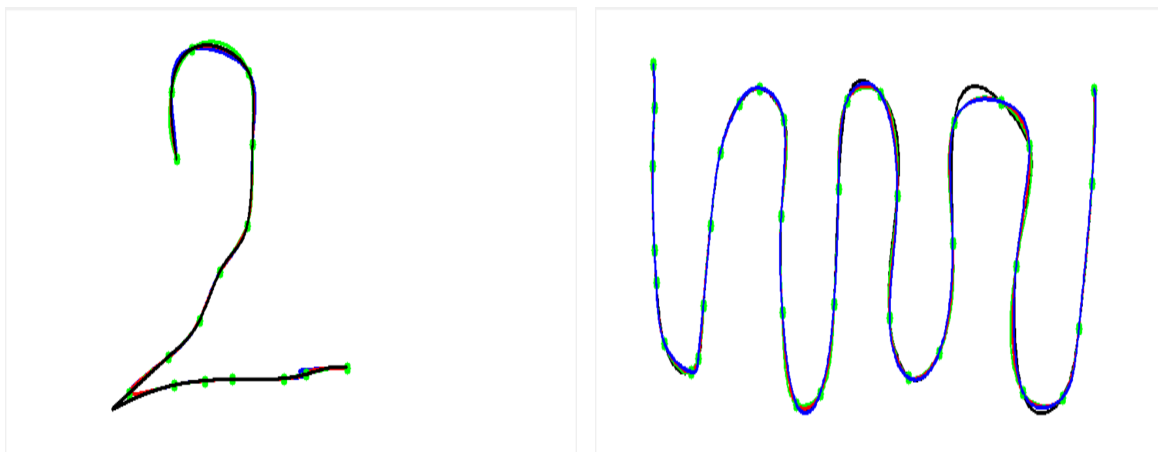


图 2: 样条拟合结果

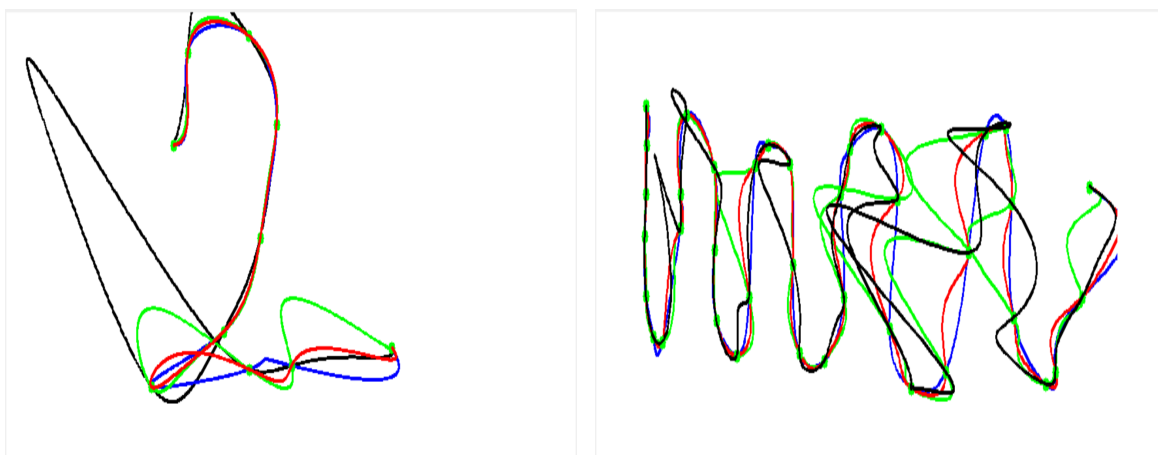


图 3: 径向基函数拟合结果

### 7.15 结果对比

不同拟合方法的对比结果如下表所示：

### 7.16 参数化方法对比

不同参数化方法的对比结果如下表所示：

### 7.17 神经网络拟合实现细节

神经网络拟合利用多层感知机（MLP）进行高度非线性的拟合。我们使用 GeLU（ReLU、ELU）激活函数和均方误差（MSE）损失函数。神经网络的参数设置如下：

- 隐藏层神经元数量：128
- 学习率：0.01
- 训练迭代次数：5000

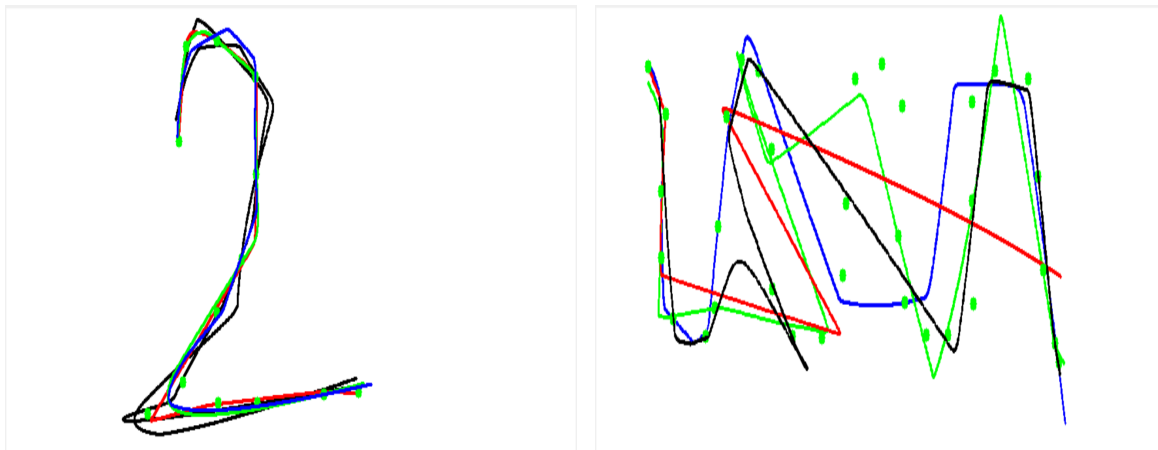


图 4: 神经网络拟合结果

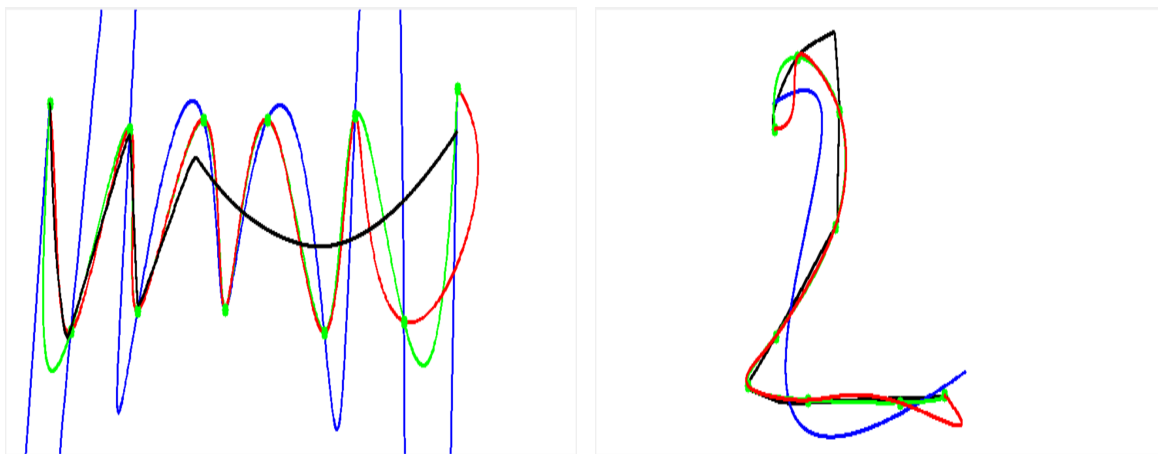


图 5: 均匀参数化

- 激活函数: GeLU、ReLU、ELU
- 损失函数: 均方误差 (MSE)、Chamfer 距离

神经网络模型结构如下:

- 输入层: 1 个神经元 (接收参数化变量  $t$ )
- 隐藏层 1: 128 个神经元, 使用 GeLU 激活函数
- 隐藏层 2: 64 个神经元, 使用 GeLU 激活函数
- 隐藏层 3: 32 个神经元, 使用 GeLU 激活函数
- 输出层: 2 个神经元 (输出拟合曲线的  $x$  和  $y$  坐标)

训练过程中, 我们使用 AdamW 优化器来更新网络权重, 以最小化损失函数。通过这种方式, 神经网络能够学习到数据的内在规律, 并生成平滑的拟合曲线。

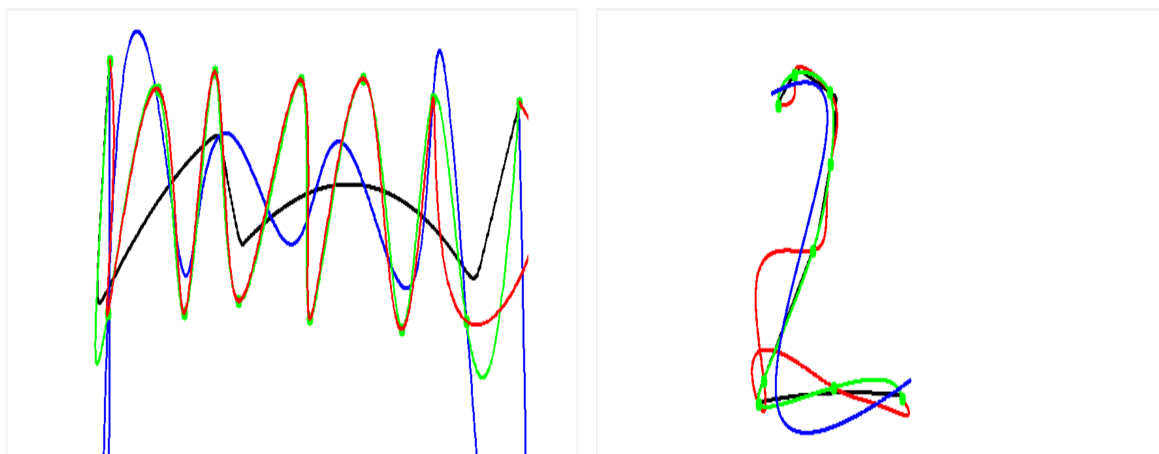


图 6: 弦长参数化

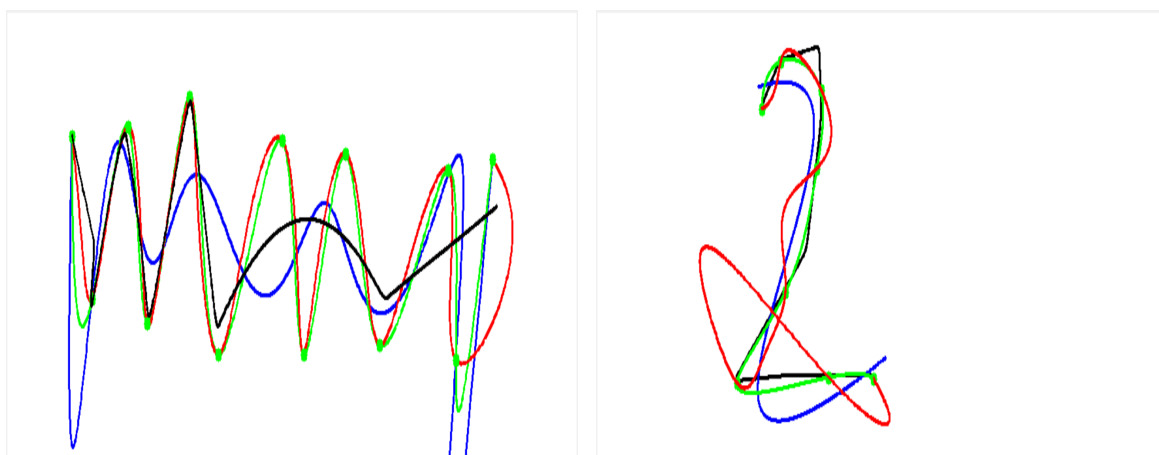


图 7: 离心参数化

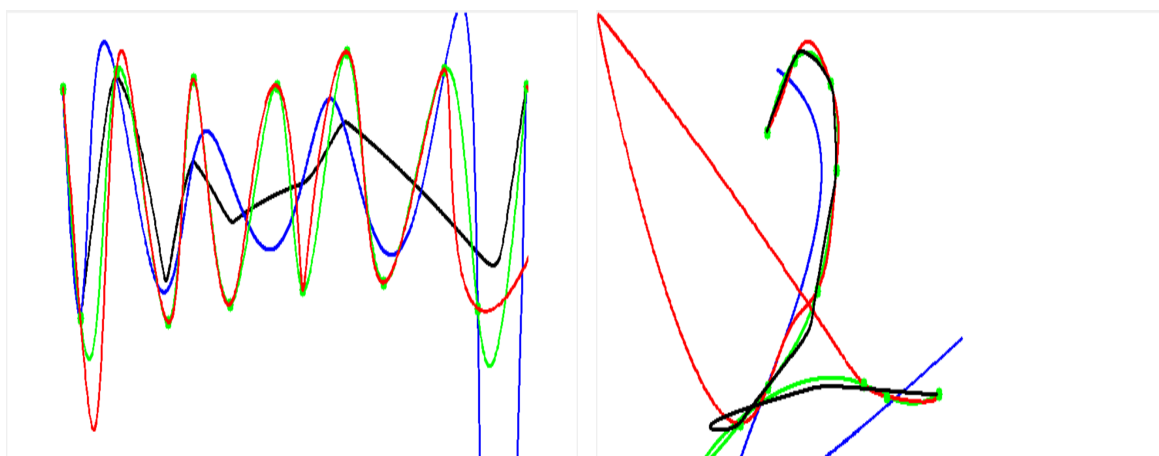


图 8: Foley-Nielsen 参数化



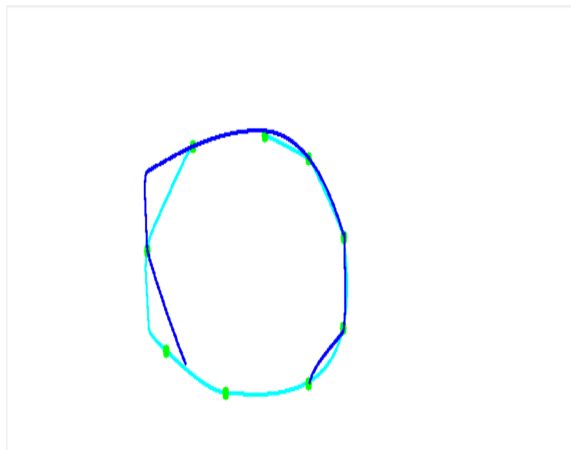


图 9: MSE 损失函数下, 蓝色为 mse 损失函数, 紫色为 chamfer 损失函数

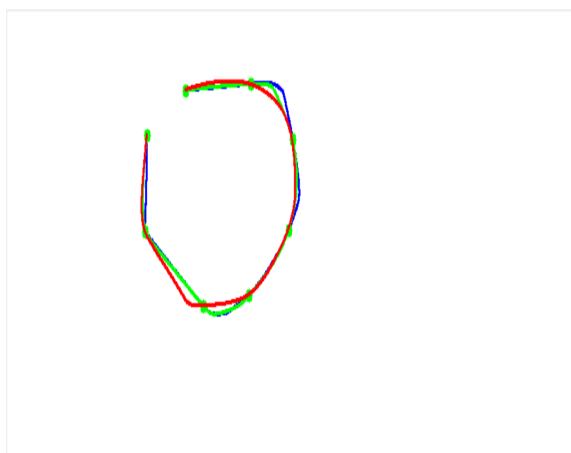


图 10: MSE 损失函数下, 红色为 Relu, 绿色为 Gelu, 蓝色为 Elu

表 2: 拟合方法对比

方法	优点	缺点
多项式拟合	计算简单, 适合小数据集	高阶多项式可能导致过拟合
样条拟合	平滑性好, 适合复杂形状	计算复杂度较高
径向基函数拟合	非线性拟合能力强	参数选择敏感
神经网络拟合	高度非线性拟合, 泛化能力强	计算资源需求高, 训练时间长

表 3: 参数化方法对比

方法	优点	缺点
均匀参数化	计算简单, 适合均匀分布的点	对非均匀分布的点效果较差
弦长参数化	考虑点间距离, 适合非均匀分布的点	计算复杂度较高
离心参数化	考虑角度变化, 适合复杂形状的点列	计算复杂度最高, 对异常值敏感
Foley-Nielsen 参数化	结合弦长和角度信息, 适合复杂分布的点	计算复杂度最高, 实现难度较大



图 11: 载入图片

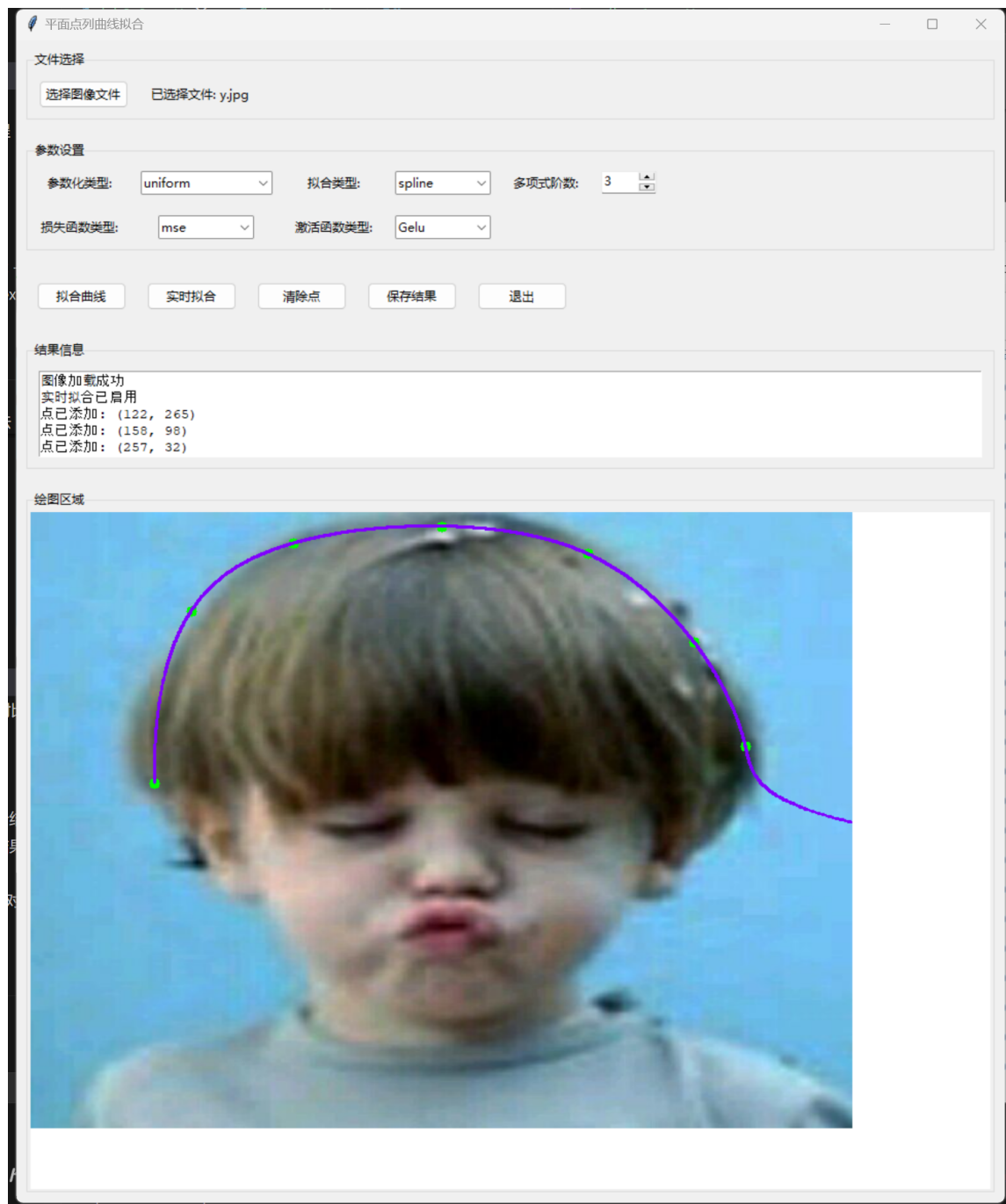


图 12: GUI+ 实时拟合

## 八、结论

通过实验，我们验证了不同拟合方法在平面点列曲线拟合中的效果。多项式拟合适合简单的数据集，样条拟合在复杂形状中表现良好，径向基函数拟合和神经网络拟合在非线性数据中具有优势。未来的工作可以进一步优化神经网络的训练效率，并探索更多的拟合方法。

## 九、问题与改进方向

在实现过程中，我们发现以下问题和改进方向：

- 参数化方法的性能优化：在点数较多时，某些参数化方法的计算时间较长，需要进一步优化算法。
- 异常值处理：当前工具对异常值较为敏感，需要引入鲁棒参数化方法。
- 用户交互增强：可以增加更多的交互功能，如点的拖动和删除。
- 神经网络训练效率：神经网络拟合的训练时间较长，需要优化网络结构和训练算法。