Der Hilbertraum

Lyxnn

31.10.2021

KAPITEL 1 HILBERTRAUM

Es sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

1.1 Defnition und einführende Beispiele

Definition 1.1 (inneres Produkt, Skalarprodukt)

Ein *inneres Produkt* auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$, das heißt: $\forall x, y, z \in V$ und $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

1) Positiv Definit: $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2) Hermitesch: $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
3) Sesquilinear: $\langle x + \alpha y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \overline{\alpha} \langle y, z \rangle$ und $\langle x, y + \alpha z \rangle = \langle x, y \rangle + \alpha \langle x, z \rangle$.

Bemerkung 1.2

Das Skalarprodukt kann auch linear im ersten und semilinear im zweiten Argument definiert werden. Im Hinblick auf die Bra-Ket-Notation wird es im Folgenden wie oben definiert verwendet, da damit das Skalarprodukt als $\langle x|y \rangle$ geschrieben werden kann, wobei $\langle x|$ Bra und $|y\rangle$ Ket genannt wird.
Die Abbildung $\langle x| : V \to \mathbb{K}$, $y \mapsto \langle x|y \rangle$ kann als Linearform (lineare Abbildung vom Vektorraum V in den zugrundeliegenden Körper $\mathbb{K}$) auf V aufgefasst werden.

Definition 1.3 (Prähilbertraum, Innenproduktraum)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ ein inneres Produkt, so ist

$(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein *Prhilbertraum*.

Definition 1.4 (Hilbertraum)

Ein *Hilbertraum* ist ein bezüglich der vom inneren Produkt induzierten Norm $||\cdot|| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ vollständiger Prähilbertraum.

Beispiel 1.5

1. komplexer n-dimensionaler Koordinatenraum mit Standardskalarprodukt: $(\mathbb{C}^n, \langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^n \overline{x}_k y_k)$.
2. Folgenraum $\ell^2(\mathbb{N}) = \left\{(x_n)\, n \subset \mathbb{C}; \sum_{k=1}^\infty |x_k|^2 < \infty\right\}^2$ mit $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^n \overline{x}_k y_k$.
3. Lebesgue-Raum L_2.
   Sei $(S, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $\mathcal{L}_2(S, \mathcal{A}, \mu) := \left\{f : S \to \mathbb{K}, \int_S |f|^2 \,\mathrm{d}\mu < \infty\right\}$, und $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}_2 \mid f = 0\mu-\text{ fast überall }\}$, so ist L_2 der Quotientenraum $\mathcal{L}_2/\mathcal{N}$.
   Mit

   $$\langle f, g\rangle_{L_2} = \int_S \langle f(x), g(x)\rangle \, d\mu(x)$$

   ist ein inneres Produkt definiert, wobei das Skalarprodukt im Integral, das Standardskalarprodukt bezeichne;
   die Vollständigkeit liefert der aus der Maßtheorie Satz von Riesz-Fischer.

1.2 Orthonormalbasen

Definition 1.6 (Orthonormalsystem)

Eine Teilmenge $\mathcal{E}$ eines Hilbertraums $\mathcal{H}$ heißt *Orthonormalsystem*, falls $||e|| = 1$ $\forall e \in \mathcal{E}$ und $\langle e, f\rangle = 0$ $\forall e, f \in \mathcal{E}$ mit $e \neq f$.

Definition 1.7 (Orthonormalbasis)

Ein Orthonormalsystem $\mathcal{E}$ heißt *Orthonormalbasis* (oder vollständiges Orthonormalsystem) von $\mathcal{H}$, falls $span(\mathcal{E})$ ($span(\mathcal{E}) := \{\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in \mathbb{K}, e_i \in \mathcal{E}, n \in \mathbb{N}\}$) dicht in $\mathcal{H}$ liegt (also $\overline{span(\mathcal{E})} = \mathcal{H}$).

Bemerkung 1.8

Damit lässt sich jedes $x \in \mathcal{H}$ als Grenzwert einer Folge in $span(\mathcal{E})$ Schreiben.

Definition 1.9 (orthogonales Komplement)

Sei V eine Teilmenge eines Hilbertraums $\mathcal{H}$.
$V^{\perp} := \{w \in \mathcal{H} \mid \forall v \in V : \langle v, w \rangle = 0\}$ heißt das orthogonale Komplement von V.

Satz 1.10 (Charakterisierung einer Orthonormalbasis)

Sei $\mathcal{E} = \{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ein abzählbares Orthonormalsystem in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$.
Dann sind die folgenden vier Aussagen äquivalent:

1. $\mathcal{E}^{\perp} = \{0\}$.
2. $\mathcal{E}$ ist Orthonormalbasis.
3. Es gilt $\forall x \in \mathcal{H}$:
$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, x \rangle \, e_k.$$
4. Es gilt $\forall x, y \in \mathcal{H}$
$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle \, \langle e_k, y \rangle.$$

Beweis. "(1) $\Rightarrow$ (2)" : $U := \overline{span(\mathcal{E})}$. $\mathcal{E} \subset U$ liefert $U^{\perp} \subset \mathcal{E}^{\perp}$, also $U^{\perp} = \{0\}$. Sei nun $x \in \mathcal{H}$. Definiere $s_n = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x \rangle \, e_k$. Dann ist $(s_n)_n$ eine Cauchyfolge, da gilt:

$$\begin{aligned} \|s_n - s_m\|^2 &= \left\| \sum_{k=m+1}^{n} \langle e_k, x \rangle \, e_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{j=m+1}^{n} \langle e_j, x \rangle \, e_j, \sum_{k=m+1}^{n} \langle e_k, x \rangle \, e_k \right\rangle = \\ &= \sum_{k=m+1}^{n} \langle e_k, x \rangle \left\langle \sum_{j=m+1}^{n} \langle e_j, x \rangle \, e_j, e_k \right\rangle = \sum_{k=m+1}^{n} \langle e_k, x \rangle \sum_{j=m+1}^{n} \overline{\langle e_j, x \rangle} \delta_{jk} = \\ &= \sum_{k=m+1}^{n} |\langle e_k, x \rangle|^2 \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} |\langle e_k, x \rangle|^2 \to 0 \text{ für } m \to \infty. \end{aligned}$$

Damit existiert $s = \lim_{n \to \infty} s_n \in U$. Nun folgt aber mit der Stetigkeit des Skalarprodukts

$$\forall k : \langle s - x, e_k \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle s_n - x, e_k \rangle = 0.$$

Insbesondere ist $s - x \in U^{\perp}$, also $s = x$ und damit $x \in U$. Nun folgt $U = \mathcal{H}$.
"(2) $\Rightarrow$ (3)" : Die Partialsumme $s_n = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x \rangle \, e_k$ für $x \in \mathcal{H}, n \in \mathbb{N}$. $\forall 1 \leq j \leq n : \langle e_j, s_n - x \rangle = \langle e_j, s_n \rangle - \langle e_j, x \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x \rangle \langle e_j, e_k \rangle - \langle e_j, x \rangle = 0$ Damit folgt: $\forall y \in \mathit{span}\,(e_1, \ldots, e_n) : y \perp s_n - x$, also mit dem Satz des Pythagoras (anwendbar, da $x - s_n \perp s_n - y$ und letzteres aus $\mathit{span}(e_1, \cdots, e_n))$:
$\|x - y\|^2 = \|x - s_n\|^2 + \|s_n - y\|^2 \geq \|x - s_n\|^2$.
Abschließend ist eine Folge $(x_n)_n \to x$ und eine monoton steigende Folge $(m_n)_n \subset \mathbb{N}$, so gewählt, dass $x_n \in \mathit{span}(e_1, \ldots, e_{m_n})$.
Dann ist $0 \leq \|x - s_{m_n}\|^2 \leq \|x - x_n\|^2 \to 0$. Wegen $\|x - s_{n+1}\|^2 \leq \|x - s_n\|^2$ konvergiert $(s_n)_n$ gegen x, was die Behauptung liefert.
"(3) $\Rightarrow$ (4)" : wieder $s_n = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x \rangle e_k$ und $t_n = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, y \rangle e_k$. Dann folgt: $\langle s_n, t_n \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, y \rangle$. Wegen $s_n \to x$ und $t_n \to y$ folgt mit der Stetigkeit des Skalarprodukts die Behauptung.
"(4) $\Rightarrow$ (1)" : Nun $y = x$. Es folgt: $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$. Sei $x \in \mathcal{E}^{\perp}$. Dann gilt $\forall k \in \mathbb{N} : \langle x, e_k \rangle = 0$ und damit folgt $\|x\|^2 = 0$ also $x = 0$.

Definition 1.11

Existiert für einen Hilbertraum $\mathcal{H}$ eine abzählbare Orthonormalbasis $\mathcal{E}$, dann nennt man den Hilbertraum $\mathcal{H}$ separabel.