МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Институт информационных технологий, математики и механики

Кафедра Дифференциальных уравнений,

математического и численного анализа

Отчет по лабораторной работе:

**«Интерполяция кубическими сплайнами»**

Выполнил:

студент института ИТММ  
3-го курса, группы 381406-1

Баранов Евгений Васильевич

Проверил:

К.ф.-м.н., преподаватель

Федоткин Андрей Михайлович

Нижний Новгород, 2017 г.

**Содержание**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. | Введение | 3 |
| 2. | Постановка задачи | 4 |
| 3. | Описание алгоритма | 5 |
| 4. | Результаты экспериментов | 7 |
| 5. | Заключение | 9 |
| 6. | Список литературы | 10 |

**Введение**

*Интерполяция* - это способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений. Интерполяция использует значения некоторой функции, заданные в ряде точек, чтобы предсказать значения функции между ними. Предположим, что есть система несовпадающих точек xi (i ϵ 0, 1, …, N) из некоторой области G. Значения функции f известны только в этих точках: yi = f(xi), i = 1, …, N. Процесс интерполяции состоит в поиске такой функции f из заданного класса функций, что F(xi) = yi, i = 1, …, N. Точки xi являются узлами интерполяции, а их совокупность - интерполяционной сеткой. Пары (xi, yi) являются точками данных. Разность между «соседними» значениями ∆xi = xi -xi -1 - называют шагом интерполяционной сетки. Шаг может быть переменным или постоянным. Функцию F(x) - интерполирующей функцией.

*Сплайн* – функция, которая вместе с несколькими производными непрерывна на всем заданном отрезке [a,b], а на каждом частичном отрезке [xi, xi+1] в отдельности является некоторым алгебраическим многочленом. Степенью сплайна называется максимальная по всем частичным отрезкам степень многочленов, а дефектом сплайна - разность между степенью сплайна и порядком наивысшей непрерывной на [a,b] производной. Например, непрерывная ломанная является сплайном степени 1 с дефектом 1 (так как сама функция – непрерывна, а первая производная уже разрывна). На практике наиболее часто используются кубические сплайны S3(x) - сплайны третьей степени с непрерывной, по крайней мере, первой производной. При этом величина mi = S’3(x) называется наклоном сплайна в точке (узле) xi.

*Кубическим интерполяционным сплайном*, соответствующим данной функции *f*(*x*) и данным узлам *xi*, называется функция *S*(*x*), удовлетворяющая следующим условиям:

* на каждом сегменте [*xi*-1, *xi*], *i* = 1, 2, ..., *n* функция *S*(*x*) является полиномом третьей степени;
* функция *S*(*x*), а также ее первая и вторая производные непрерывны на отрезке [a, b];
* *S*(*xi*) = *f*(*x*), *i* = 0, 1, ..., *n*.

**Постановка задачи**

Пусть функция f(x) задана набором точек (xi, yi) на интервале [a,b]: yi = f(xi), i=0,..,N, a≤xi≤b. Задача интерполяции – найти функцию F(x), принимающую в точках xi те же значения yi. Тогда,условие интерполяции: F(xi) = yi.

Кроме нахождения функции F(x) требуется посчитать погрешность отклонения полученного многочлена от исходной функции. Для демонстрации результатов вычислений нужно изобразить графики функций F(x) и f(x).

**Описание алгоритма**

**Построение кубического сплайна**

Пусть некоторая функция f(x) задана на отрезке [a,b] , разбитом на части , . [Кубическим](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%83%D0%B1_%28%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%29) [сплайном](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BF%D0%BB%D0%B0%D0%B9%D0%BD) называется [функция](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F_%28%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0%29) , которая:

* на каждом отрезке является [многочленом](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D1%87%D0%BB%D0%B5%D0%BD) степени не выше третьей;
* имеет непрерывные первую и вторую [производные](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B7%D0%B2%D0%BE%D0%B4%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8) на всём отрезке [a,b];
* в точках выполняется равенство, т.е. сплайн [интерполирует](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D1%8F%D1%86%D0%B8%D1%8F) функцию f в точках .

Для однозначного задания сплайна перечисленных условий недостаточно, для построения сплайна необходимо наложить дополнительные требования. Естественным кубическим сплайном называется кубический сплайн, удовлетворяющий также граничным условиям вида:

Обозначим:

На каждом отрезке функция есть полином третьей степени , коэффициенты которого надо определить. Запишем для удобства в виде:

тогда

Запишем условия непрерывности всех производных до второго порядка включительно:

Так же нельзя забывать об условиях интерполяции: , т. е. значения в точках у функции и её приближения должны совпадать.

Отсюда получаем формулы для вычисления коэффициентов сплайна:

**(1)**

**(2)**

**(3)**

**(4)**

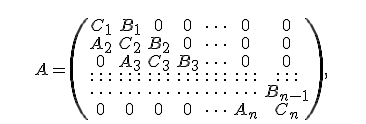
Если учесть, что , то вычисление можно провести с помощью [метода прогонки](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%BD%D0%BA%D0%B8) для [трёхдиагональной матрицы](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D1%80%D1%91%D1%85%D0%B4%D0%B8%D0%B0%D0%B3%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D0%B0).

**Метод прогонки**

Метод прогонки используется для решения систем линейных уравнений вида {\displaystyle Ax=F}, где *A* — трёхдиагональная матрица. Представляет собой вариант метода последовательного исключения неизвестных.

Уравнение (2) можно решить методом прогонки, представив в виде системы линейных алгебраических уравнений вида , где вектор соответствует вектору , вектор поэлементно равен правой части уравнения (2).

Трёхдиагональная матрица выглядит следующим образом:



где

Данный метод основан на предположении, что искомые неизвестные связаны рекуррентным соотношением:

Используя это соотношение, выразим и через и подставим в i-e уравнение:

где – правая часть i-го уравнения. Это соотношение будет выполняться независимо от решения, если потребовать

Отсюда следует:

Из первого уравнения получим:

После нахождения коэффициентов получим решение системы:

**Результаты**

Для данной работы в качестве исследуемой функции была взята функция следующего вида:

Программа позволяет пользователю для построения интерполированного многочлена выбрать необходимые параметры:

* Количество точек в интерполяционной сетке
* Интервал построения
* Точность для определения количества точек интерполяции

А также менять эти значения в режиме on-line с помощью кнопок + и – задавая интервал изменения.

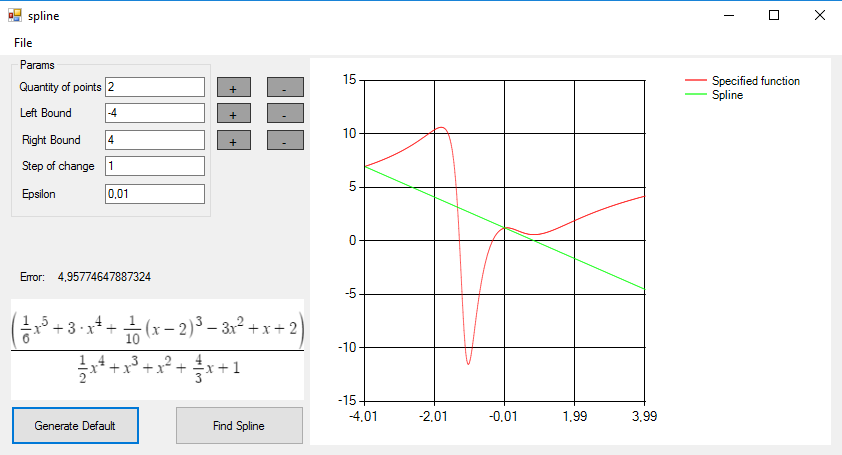


Рис 1. Стандартные параметры

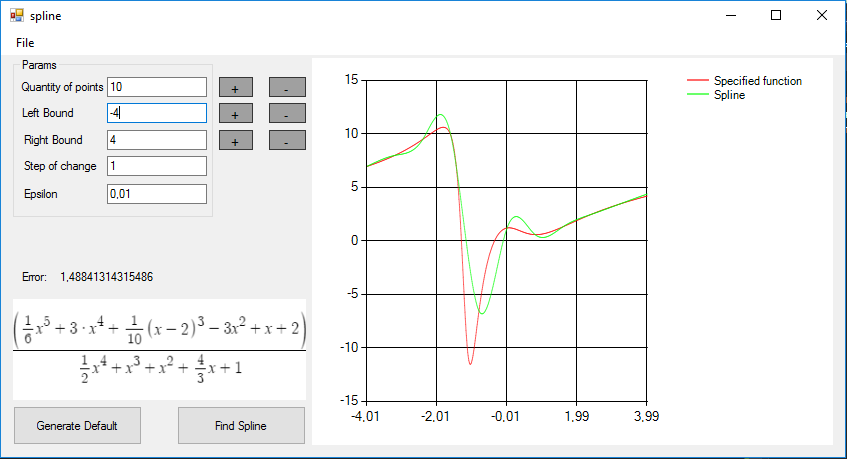


Рис 2. 10 точек интерполяции

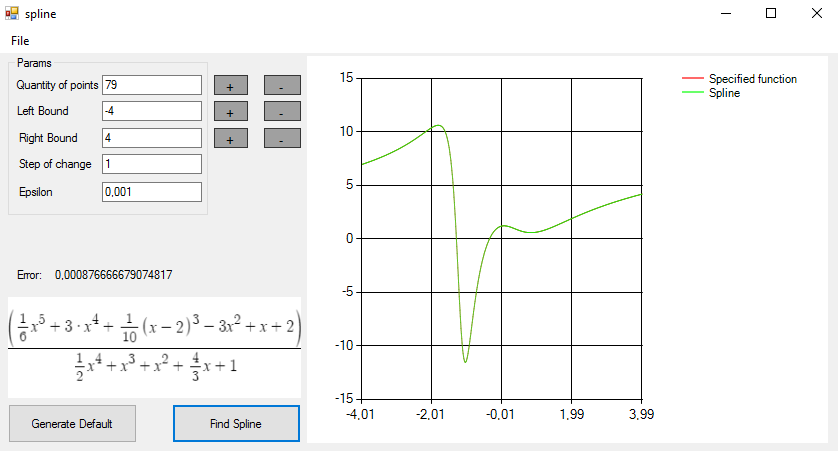


Рис 3. Количество точек после поиска интерполяционного многочлена с точностью 0.001

Программа высчитывает погрешность расхождения полученного интерполяционного многочлена и исходной функции путём поиска среднего отклонения по всем точкам построения.

**Заключение**

В ходе данной работы была разработана программа, которая строит многочлен по заданному набору точек (x,y) с помощью кубических сплайнов.

В результате проведения экспериментов было установлено, что интерполяция кубическими сплайнами дает хорошие результаты при большом количестве точек и с увеличением числа точек растет точность (полученный многочлен приближается к исходной функции) и уменьшается погрешность.

**Список литературы**

1. Самарский А.А. “Введение в численный методы”, Наука, 2009 г.
2. Копчёнова Н.В., Марон И.А. “Вычислительная математика в примерах и задачах”, Наука, 1972 г.
3. https://ru.wikipedia.org/wiki/Кубический\_сплайн