



## 第四节 狭义相对论的动量和能量

1. 质子在加速器中被加速，当其动能为静止能量的4倍时，其质量为静止质量的？

解析：由题意可知，相对论中：物体的静能为： $E_0 = m_0 c^2$ ；

动能为： $E_k = mc^2 - m_0 c^2$

又因为动能为静止能量的4倍，则：

$$E_k = mc^2 - m_0 c^2 = 4m_0 c^2$$

即： $m = 5m_0$

故选B

2. 某核电站年发电量为100亿度，它等于 $36 \times 10^{15} \text{J}$ 的能量，如果这是由核材料的全部静止能转化产生的，则需要消耗的核材料的质量为：

解析：由题意可知，根据爱因斯坦质能方程可知： $\Delta E = \Delta m c^2$ ， 则：

则需要消耗的核材料的质量为： $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = 0.4 \text{kg}$

故选A



3. 一个电子运动速度 $v=0.8c$ ，它的动能是：(电子的静止能量为 $0.51\text{MeV}$ )：

解析：由题意可知，相对论中，电子的动能为： $E_k = mc^2 - m_0c^2$

电子的静止能量为： $E_0 = m_0c^2$

又因为电子的静止质量和运动的质量之间的关系为：

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{E_0 / c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{0.51 / c^2}{0.6}$$

则它的动能为：

$$E = mc^2 - m_0c^2 = 0.85\text{MeV} - 0.51\text{MeV} = 0.34\text{MeV}$$

故选C



4. 在狭义相对论中，一质点的质量 $m$ 与速度 $v$ 的关系式为：          ，其动能的表达式为：          。

解析：相对论中，物体的质量与速度的表达式为：
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

其动能的表达式为：
$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - m_0c^2$$



5. 设电子静止质量为 $m_e$ ，将一个电子从静止加速到速率为 $0.6c$ ( $c$ 为真空中光速)，需做功：        。

解析：由题意知，电子的静止质量为： $m_e$ ，则在相对论中，当电子的速率为

$0.6c$ 时，电子的质量为： $m = \frac{m_e}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 1.25m_e$

则过程中需要做功为： $mc^2 - m_e c^2 = \frac{1}{4}m_e c^2 = 0.25m_e c^2$

6. 在速度 $v = \underline{\hspace{2cm}}$ 时粒子的动量等于非相对论动量的3倍；

解析：由题意知，在相对论中粒子的动量为： $p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 3m_0 v$

则： $v = \frac{\sqrt{8}}{3}c = 0.943c = 2.828 \times 10^8 \text{ m/s}$



7. 在速度  $v = \underline{\hspace{2cm}}$  时粒子的动能等于它的静止能量。

解析：由题意知，在相对论中粒子的动能为： $E_k = mc^2 - m_0c^2$

其静止能量为： $E_0 = m_0c^2$ ，当  $E_k = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - m_0c^2 = m_0c^2$

则：

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}c = 0.866c = 2.598 \times 10^8 \text{ m/s}$$



8. 观察者甲以 $0.8c$ 的速度( $c$ 为真空中光速)相对于静止的观察者乙运动, 若甲携带一长度为 $l$ 、截面积为 $S$ , 质量为 $m$ 的棒, 这根棒安放在运动方向上, 则甲测得此棒的密度为: \_\_\_\_\_, 乙测得此棒的密度为: \_\_\_\_\_。

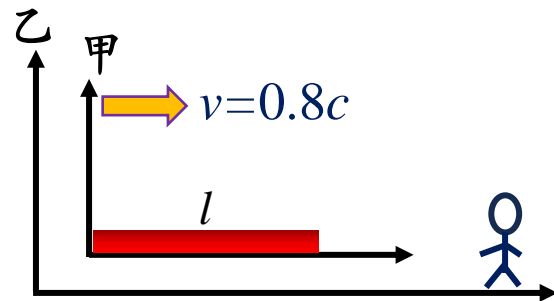
解析: 由题意知, 棒相对于甲参考系是静止的, 因此棒在甲参考系中质量为静止质量 $m$ , 长度为固有长度 $l$ , 可得其密度为:  $\rho_{\text{甲}} = \frac{m}{lS}$

然而, 棒相对于乙参考系是运动的, 因此棒在乙参考系中,

质量变为:  $M = \frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma m$     长度变为:  $L = l \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{l}{\gamma}$

由此可得, 棒在乙参考系中密度为:

$$\rho_{\text{乙}} = \frac{M}{LS} = \gamma^2 \frac{m}{lS} = \frac{25}{9} \frac{m}{lS}$$





9. 一电子以 $v=0.99c$ ( $c$ 为真空中光速)的速率运动。试求：(1)电子的总能量和动量各是多少？(2)电子的经典力学的动能与相对论动能之比是多少？(电子静止质量 $m_e=9.11\times 10^{-31}\text{kg}$ )

解析：由题意知，在相对论中电子的总能量为：

$$E = mc^2 = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 7.09m_e c^2 = 5.812 \times 10^{-13} \text{ J}$$

其动量为：

$$p = mv = \frac{m_e v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 7.09m_e c = 1.918 \times 10^{-21} \text{ kgm/s}$$

经典力学中电子的动能为：

$$E'_k = \frac{1}{2} m_e v^2 = 0.49m_e c^2 = 4.018 \times 10^{-14} \text{ J}$$

相对论中电子的动能为：

$$\begin{aligned} E_k &= mc^2 - m_0 c^2 = 6.09m_e c^2 \\ &= 58.12 \times 10^{-14} \text{ J} - 8.199 \times 10^{-14} \text{ J} \\ &= 4.99 \times 10^{-13} \text{ J} \end{aligned}$$

则经典力学中和相对论中的动能之比为： $1:12.42 = 0.0805$



10. 已知 $\mu$ 子的静止能量为105.7 MeV, 平均寿命为 $2.2 \times 10^{-8} \text{ s}$ 。试求动能为150 MeV的 $\mu$ 子的速度 $v$ 是多少? 平均寿命 $\tau$ 是多少?

解析: 由题意知, 在相对论中 $\mu$ 子的静止能量为:  $E_0 = m_0 c^2$ ;

则对于动能为 $E_k = 150 \text{ MeV}$ 的 $\mu$ 子: 
$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - m_0 c^2$$

得其速度为:

$$v = 0.91c = 2.73 \times 10^8 \text{ m/s}$$

其平均寿命为:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 5.32 \times 10^{-8} \text{ s}$$





11. 若一电子的总能量为5MeV，求该电子的静能、动能、动量和速率。

解析：这里需要注意的是 $1\text{MeV}=1\times 10^6\text{eV}=1.6\times 10^{-13}\text{J}$ 。

由题意知，在相对论中电子的静能量为：

$$E_0 = m_0 c^2 = 9.1 \times 10^{-31} \times 9 \times 10^{16} \text{ J} = 8.19 \times 10^{-14} \text{ J} = 5.12 \times 10^5 \text{ eV} = 8.19 \times 10^{-14} \text{ J}$$

因为电子的总能量为： $E = mc^2 = 5\text{MeV} = 8 \times 10^{-13} \text{ J}$

则其动能为：

$$E_k = E - E_0 = (5 - 0.512)\text{MeV} = 4.488\text{MeV} = 7.18 \times 10^{-13} \text{ J}$$

相对论中，电子的动量和能量的关系为： $E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$

即得：

$$p = \frac{\sqrt{E^2 - E_0^2}}{c} = 2.65 \times 10^{-21} \text{ kgm/s}$$

又因为：

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \text{可得} \quad \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{m_0}{m} = \frac{E_0}{E} \Rightarrow \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2$$

得，电子运动速率为： $v = 0.995c = 2.985 \times 10^8 \text{ m/s}$

此外，动量还可以利用 $v$ 得到： $p = mv = \frac{E}{c^2} v = 2.65 \times 10^{-21} \text{ kgm/s}$



12. 在惯性系 $S$ 中，有两个静止质量都是 $m_0$ 的粒子 $A$ 、 $B$ ，分别以速度 $\mathbf{v}_A = v\mathbf{i}$ ， $\mathbf{v}_B = -v\mathbf{i}$ 运动，相撞后粘在一起成为一复合粒子，求复合粒子的静止质量。

解析：这道题大家一定要注意，在经典力学中，求两物体碰撞的问题时，我们需要用到质量守恒和动量守恒两个条件（经典力学中碰撞时动能不一定守恒）。但在相对论中，在两物体碰撞时，当题中没有明确指明，物体与外界之间存在能量交换时，系统一定满足动量守恒和动质量守恒（碰撞过程中损失的动能转化为了动质量，也就是总能量守恒）两个条件。因此，本题的解析如下：

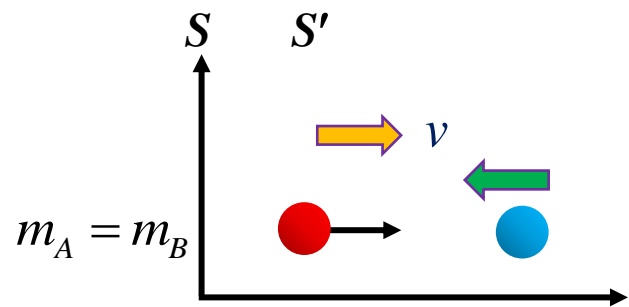
如图所示，根据动量守恒可得，碰撞前后的总动量： $P = m_A v_A + m_B v_B = Mv = 0$

根据动质量守恒（总能量守恒），可得复合粒子的质量： $M = m_A + m_B = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

又因为碰撞后动量为零，可得碰撞后复合粒子的速度为0，也就是说碰撞后复合粒子是静止的，此时碰撞后它的质量就是它的静止质量，

即

$$M_0 = M = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$





思考题：你认为可以把物体加速到光速吗？为什么？

解析：设物体的静止质量为 $m_0$ ，则当物体的速度为 $v$ ，根据相对论中动量与能量之间的关系，可得：

$$m^2 c^4 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 \Rightarrow p^2 = m^2 c^2 - m_0^2 c^2 \Rightarrow m^2 v^2 = m^2 c^2 - m_0^2 c^2$$

由此可得，物体的速度与光速之间的关系：

$$v^2 = \left(1 - \frac{m_0^2}{m^2}\right) c^2 \leq c^2$$

由该式可知，因为物体的静质量和动质量不可能是负的，所以物体的运动速度永远不可能大于光速，只有当物体的静质量为0时，物体的速度才能等于光速。