

1 Sfěrický harmonický rozvoj

Sfěrické harmonické funkce $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ představují řešení úhlové části Laplaceovy rovnice na kouli. V geofyzice se rozvoj do sfěrických harmonik používá mimo jiné k vyjádření tíhového pole Země a planet. Tíhové pole pak není třeba popisovat zadáním (mnoha) hodnot na jemné souřadnicové síti, ale vyjadřuje se jako sada koeficientů harmonického rozvoje.

Sfěrický harmonický rozvoj skalární funkce f definované na kouli můžeme zapsat jako

$$f(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) , \quad (1)$$

kde l značí stupeň rozvoje, m je řád rozvoje a (r, ϑ, φ) jsou planetocentrické sfěrické souřadnice, jmenovitě vzdálenost od středu r , planetopisná košířka ϑ (úhel mezi severním pólem, středem planety a popisovaným bodem) a planetopisná délka φ , měřená od nultého poledníku. Koeficienty f_{lm} lze vypočítat jako

$$f_{lm}(r) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r, \vartheta, \varphi) Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta , \quad (2)$$

hvězdička označuje komplexní sdružení.

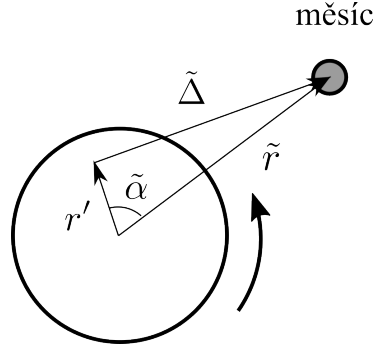
Rozvoj do sfěrických harmonik je obdobný Fourierovu rozvoji. Stupeň $l = 0$ odpovídá průměrné hodnotě funkce $f(r, \vartheta, \varphi)$ na kouli o poloměru r . Stupeň $l = 1$ pak vyjadřuje rozdíl mezi severem a jihem (pro $m = 0$) nebo mezi východem a západem (pro $m = \pm 1$). Stupeň $l = 2$ postihuje ještě jemnější rozdíl: sever-rovník-jih (pro $m = 0$), východ-nultý poledník-západ (pro $m = \pm 2$) nebo severovýchod-jihozápad (pro $m = \pm 1$). Další, jemnější detaily rozvíjené funkce jsou obsaženy na vyšších stupních $l > 2$. Pokud do sfěrických harmonik rozvíjíme potenciál tíhového pole, má pro nás $l = 0$ význam průměrného potenciálu na daném poloměru a $l = 1$ představuje posun těžiště oproti zvolené souřadné soustavě. Stupeň $l = 2$ pak odpovídá zploštění nebo protažení planety.

Při studiu slapového vývoje rotace a oběžné dráhy nás zajímají stupně $l = 2$ a vyšší, v mnoha úlohách se dokonce uvažuje pouze $l = 2$. Tíhový potenciál slapově deformované planety totiž vně planety klesá se vzdáleností od středu jako r^{-2l-2} . Přesnější rozvoje (do vyšších stupňů l) mají při teoretických studiích smysl jedině tehdy, když nás zajímají děje v bezprostřední blízkosti planety, například pohyb umělých družic v tíhovém poli Země nebo vývoj oběžné dráhy Martova měsíce Fobosu.

2 Slapový a dodatkový potenciál

2.1 Slapový potenciál ve sfěrických harmonikách

Uvažujme dokonale kulovou planetu, kolem které obíhá měsíc. Planeta má poloměr R a hmotnost M_1 , měsíc v prvním přiblížení považujeme za hmotný bod o hmotnosti M_2 .



Obrázek 1: Planeta slapově rušená měsícem.

Na každý díl (t.j. na každý infinitesimální objem) planety působí měsíc jinak velkou a jinak orientovanou gravitační silou, určenou přesnou polohou daného dílu oproti měsíci. Tato dodatečná gravitační síla představuje z pohledu každého dílu „poruchu“ v gravitačním poli samotné planety. Geometrie úlohy je znázorněna na Obrázku 1: symbol $\tilde{\Delta}$ zde představuje vzdálenost mezi rušeným dílem a měsícem, r' je vzdálenost rušeného dílu od středu planety a \tilde{r} značí vzdálenost měsíce od středu planety. Planetocentrické vektory svírají úhel $\tilde{\alpha}$. Gravitační potenciál, který kvůli přítomnosti měsíce navíc pociťuje infinitesimální objem na souřadnicích $\mathbf{r}' = (r', \vartheta', \varphi')$, je

$$\mathcal{U}(r', \vartheta', \varphi') = \frac{\mathcal{G}M_2}{\tilde{\Delta}}. \quad (3)$$

slapový potenciál = grav. potenciál

Potenciál můžeme definovat vzhledem k libovolné nulové hladině. Za tu si v případě slapového buzení zvolíme gravitační potenciál měsíce měřený ve středu planety. Střed planety, na kterou působí statický měsíc z Obrázku 1, bude mírně posunutý oproti hypotetickému středu stejné planety, na niž by žádný měsíc nepůsobil. Zde se budeme vztahovat k posunutému středu, což znamená, že budeme uvažovat pouze stupně $l \geq 2$ sférického harmonického rozvoje.

posunutým středem se myslí tížiště nebo pítá

Rovnici (3) nyní přepíšeme tak, aby obsahovala planetocentrické vzdálenosti r' a \tilde{r} . Po použití kosinové věty získáme:

$$\mathcal{U}(r', \vartheta', \varphi') = \frac{\mathcal{G}M_2}{\tilde{\Delta}} = \frac{\mathcal{G}M_2}{\sqrt{r'^2 + \tilde{r}^2 - 2r'\tilde{r}\cos\tilde{\alpha}}} = \frac{\mathcal{G}M_2}{\tilde{r}} \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\cos\tilde{\alpha}}}, \quad (4)$$

kde jsme zavedli přeznačení $\varepsilon = r'/\tilde{r}$. Druhý zlomek na pravé straně odpovídá generující funkci Legendreových polynomů $\mathcal{P}_l(x)$:

generující f-ce = je definována jako..?

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{l=0}^{+\infty} \mathcal{P}_l(x)t^l. \quad (5)$$

Po dosazení do rovnice (4) a uvážení $l \geq 2$ tedy máme:

$$\mathcal{U}(r', \vartheta', \varphi') = \frac{\mathcal{G}M_2}{\tilde{r}} \sum_{l=2}^{+\infty} \left(\frac{r'}{\tilde{r}}\right)^l \mathcal{P}_l(\cos\tilde{\alpha}). \quad (6)$$

V dalším kroku budeme chtít vyjádřit úhel $\tilde{\alpha}$ pomocí planetopisných souřadnic (délky a košířky) měsíce a rušeného infinitesimálního objemu. To je možné učinit využitím následujícího vztahu mezi Legendreovými polynomy a sférickými harmonikami:

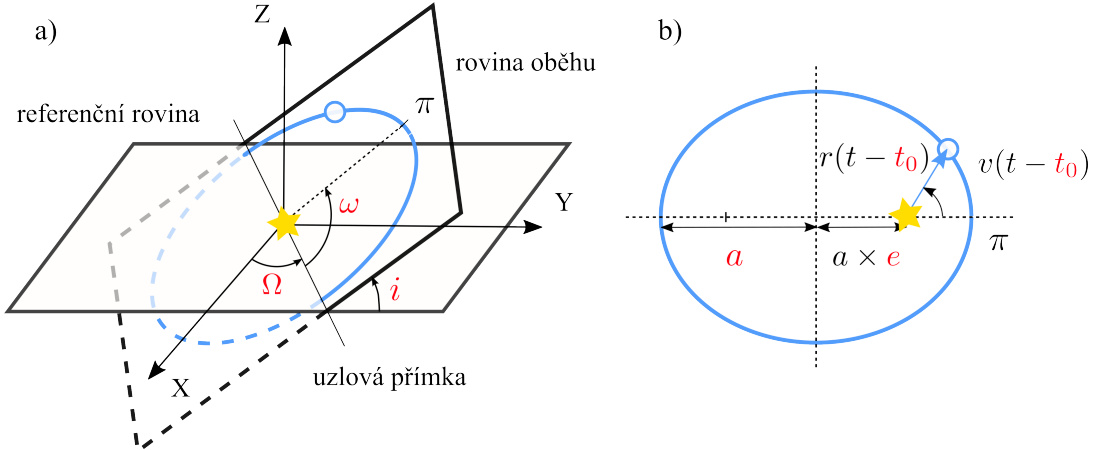
$$\mathcal{P}_l(\cos \tilde{\alpha}) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\vartheta', \varphi') Y_{lm}^*(\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}), \quad (7)$$

Vyjádření slapového potenciálu pomocí sférických harmonik tudíž vypadá následovně:

$$\mathcal{U}(r', \vartheta', \varphi') = \frac{\mathcal{G}M_2}{\tilde{r}} \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{r'}{\tilde{r}} \right)^l \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\vartheta', \varphi') Y_{lm}^*(\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}). \quad (8)$$

Sférické harmoniky jsou obecně komplexní funkce, kdežto tíhový i slapový potenciál jsou funkce reálné. S využitím definice sférických harmonik můžeme do rovnice (8) zavést i tzv. přidružené Legendreovy polynomy $\mathcal{P}_{lm}(\cos \vartheta)$, které jsou rovněž reálné. Sčítání přes řád m lze pak omezit pouze na nezáporná celá čísla:

$$\mathcal{U}(r', \vartheta', \varphi') = \frac{\mathcal{G}M_2}{\tilde{r}} \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{r'}{\tilde{r}} \right)^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2-\delta_{m0}) \mathcal{P}_{lm}(\cos \vartheta') \mathcal{P}_{lm}(\cos \tilde{\vartheta}) \cos m(\varphi' - \tilde{\varphi}). \quad (9)$$



Obrázek 2: Referenční vztažná soustava XYZ a Keplerovy elementy oběžné dráhy. Panel a) znázorňuje zavedení úhlových Keplerových elementů: délky výstupného uzlu Ω , argumentu pericentra ω a sklonu (inklinace) oběžné dráhy i . Panel b) představuje zbylé tři Keplerovy elementy: hlavní poloosu a , výstřednost e a okamžik průchodu měsíce pericentrem t_0 . Planeta je značena hvězdičkou, pericentrum symbolem π . Zbylé veličiny, r a v , jsou okamžitá vzdálenost měsíce od planety a pravá anomálie měsíce.

2.2 Slapový potenciál jako funkce elementů oběžné dráhy

Při studiu vývoje oběžné dráhy a rychlosti rotace je výhodné vyjádřit slapový potenciál pomocí Keplerových elementů. Těmi jsou hlavní poloosa a , výstřednost dráhy e , čas průchodu pericentrem t_0 , délka výstupného uzlu Ω , argument pericentra ω a sklon oběžné dráhy i . První trojice proměnných určuje tvar oběžné dráhy a polohu měsíce ve dráze. Druhá trojice určuje orientaci oběžné dráhy vzhledem k referenční soustavě. Pro jednoduchost budeme všechny úhlové proměnné vztahovat k rovníku a nultému poledníku planety.

Pokud měsíc obíhá po kruhové dráze, je hlavní poloosa rovna vzdálenosti \tilde{r} , výstřednost je nulová a pericentrum není definováno: můžeme si libovolně zvolit bod na dráze, kde se planeta nachází v námi vybraném referenčním čase $t = t_0$. Řekněme, že tímto bodem bude výstupný uzel. Rozepsáním definice přidružených Legendreových polynomů v rovnici (9), vystižením souřadnic měsíce za pomoci úhlových Keplerových elementů a opakovaným použitím binomického rozvoje dospějeme k vyjádření:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(r', \vartheta', \varphi') = & \frac{\mathcal{G}M_2}{\tilde{r}} \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{r'}{\tilde{r}} \right)^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{m0}) \mathcal{P}_{lm}(\cos \vartheta') \times \\ & \times \sum_{p=0}^l \mathcal{F}_{lmp}(\tilde{i}) \left[\cos m\varphi' \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases}_{l-m}^{\text{sudé}} \left\{ m\tilde{\Omega} + [(l-2p)\tilde{n} - m\dot{\theta}] (t - t_0) \right\} + \right. \\ & \left. + \sin m\varphi' \begin{cases} \sin \\ -\cos \end{cases}_{l-m}^{\text{sudé}} \left\{ m\tilde{\Omega} + [(l-2p)\tilde{n} - m\dot{\theta}] (t - t_0) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

První řádek tohoto dlouhého výrazu je stejný jako začátek rovnice (9). Na druhém a třetím řádku jsme si rozvinuli ty veličiny z rovnice (9), které závisí na planetografických souřadnicích měsíce. Stejně jako v předcházejícím výkladu, i nyní značí vlnovka veličiny vztahující se k měsíci, například inklinaci jeho dráhy \tilde{i} vzhledem k rovině rovníku planety. Nově jsme si zavedli úhlovou oběžnou frekvenci $\tilde{n} = 2\pi/\tilde{P}_{\text{orb}}$, kde \tilde{P}_{orb} je oběžná perioda měsíce, a úhlovou rotační frekvenci planety $\dot{\theta} = 2\pi/P_{\text{rot}}$. Za nultý poledník planety byl v rovnici (10) mlčky dosazen ten, který se na počátku běhu času ($t = t_0$) nacházel právě pod měsícem.

V rovnici (10) také nově vystupuje rozvoj do funkcí sklonu dráhy $\mathcal{F}_{lmp}(i)$, které zajišťují, že bude v každém okamžiku správně popsána poloha měsíce vůči rovině rovníku planety. Pokud se omezíme pouze na stupeň $l = 2$ rozvoje a pokud položíme oběžnou dráhu do roviny rovníku, budou téměř všechny funkce sklonu dráhy nulové, až na dvě výjimky: $\mathcal{F}_{220}(i = 0) = 3$ a $\mathcal{F}_{201}(i = 0) = -0.5$. V obecném případě jsou ovšem všechny nenulové.

Předchozí tři odstavce se týkaly speciálního případu kruhové oběžné dráhy, kdy se měsíc nacházel ve stále stejné vzdálenosti od planety a obíhal konstantní rychlostí. V obecném případě výstředné oběžné dráhy obsahuje slapový potenciál ještě jednu sumaci. Níže se podíváme, kde se tato poslední sumace objeví.

Poloha měsíce na výstředné oběžné dráze je v každém okamžiku t popsána jednak vzdáleností od počátku souřadné soustavy (středu planety) $\tilde{r}(t)$, jednak pravou anomálií $\tilde{v}(t)$, čili úhlem mezi pericentrem, počátkem souřadné soustavy a měsícem. Slapový potenciál zapsaný pomocí těchto proměnných je:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(r', \vartheta', \varphi') = & \frac{\mathcal{G}M_2}{\tilde{r}} \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{r'}{\tilde{r}} \right)^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{m0}) \mathcal{P}_{lm}(\cos \vartheta') \times \\ & \times \sum_{p=0}^l \mathcal{F}_{lmp}(\tilde{i}) \left[\cos m\varphi' \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\}_{l-m}^{l-m \text{ sudé}} \left\{ (l-2p)(\tilde{\omega} + \tilde{v}) + m(\tilde{\Omega} - \theta) \right\} + \right. \\ & \left. + \sin m\varphi' \left\{ \begin{matrix} \sin \\ -\cos \end{matrix} \right\}_{l-m}^{l-m \text{ liché}} \left\{ (l-2p)(\tilde{\omega} + \tilde{v}) + m(\tilde{\Omega} - \theta) \right\} \right], \end{aligned} \quad (11)$$

kde θ značí rotační úhel planety. Jak okamžitá vzdálenost $\tilde{r}(t)$ tak pravá anomálie $\tilde{v}(t)$ jsou v obecném případě nelineární funkcí času. Můžeme je však vyjádřit pomocí rozvoje do řady, jejíž členy obsahují **střední anomálii** $M(t) = n(t - t_0)$, a ta již na čase závisí lineárně. Parametry tohoto rozvoje jsou Hansenovy koeficienty $X_k^{n,h}$ a samotný rozvoj má následující podobu:

$$\left(\frac{\tilde{r}}{\tilde{a}} \right)^n \exp \{ih\tilde{v}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^{n,h}(\tilde{e}) \exp \{ik\tilde{M}\}. \quad (12)$$

Při popisu slapového zatěžování si vystačíme s menší podskupinou Hansenových koeficientů, které budeme říkat „funkce výstřednosti“. William Kaula, autor zde popisovaného obecného rozvoje slapového potenciálu do Keplerových elementů, pro tuto podskupinu zavedl značení $\mathcal{G}_{lpq}(e)$. Rozvojem okamžité vzdálenosti a pravé anomálie měsíce do řady funkcí výstřednosti (čili Hansenových koeficientů) přechází rovnice (11) po několika goniometrických úpravách na rovnici:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(r', \vartheta', \varphi') = & \frac{\mathcal{G}M_2}{\tilde{a}} \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{r'}{\tilde{a}} \right)^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{m0}) \mathcal{P}_{lm}(\cos \vartheta') \times \\ & \times \sum_{p=0}^l \mathcal{F}_{lmp}(\tilde{i}) \sum_{q=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_{lpq}(\tilde{e}) \times \\ & \times \left[\cos m\varphi' \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\}_{l-m}^{l-m \text{ sudé}} \left\{ (l-2p)\tilde{\omega} + (l-2p+q)\tilde{M} + m(\tilde{\Omega} - \theta) \right\} + \right. \\ & \left. + \sin m\varphi' \left\{ \begin{matrix} \sin \\ -\cos \end{matrix} \right\}_{l-m}^{l-m \text{ liché}} \left\{ (l-2p)\tilde{\omega} + (l-2p+q)\tilde{M} + m(\tilde{\Omega} - \theta) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Srovnáním indexů v definici Hansenových koeficientů s indexy vystupujícími v rovnici (13) vidíme, že vztah mezi Kaulovými funkcemi výstřednosti a Hansenovými koeficienty je:

$$\mathcal{G}_{lpq}(e) = X_{l-2p+q}^{-l-1, l-2p}(e) .$$

Funkce výstřednosti mají podobu mocninné řady **ve výstřednosti**, $\mathcal{G}_{lpq}(e) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{|q|+2k}$.

2.3 Dodatkový potenciál

Planeta se působením slapového potenciálu deformuje: jednak se mírně zploští na pólech, jednak se natáhne přibližně ve směru k měsíci a od měsíce. Tíhové pole deformované planety je přirozeně odlišné od tíhového pole kulové planety. Rozdílu mezi tíhovými potenciály deformované a kulové planety říkáme **dodatkový potenciál** a budeme jej značit $\delta\mathcal{U} = \delta\mathcal{U}(r', \vartheta', \varphi')$.

Stejně jako v případě slapového potenciálu můžeme i **dodatkový potenciál** rozvinout do řady sférických harmonických funkcí (nebo Legendreových polynomů) a následně do fourierovské řady jednotlivých slapových „módů“, tedy členů s indexy $\{lmpq\}$. V případě, že je slapová deformace malá ve srovnání s poloměrem planety a struktura planety je sféricky symetrická (např. hustota roste pouze s hloubkou a nijak se nemění v závislosti na planetopisných souřadnicích, $\rho(r', \vartheta', \varphi) = \rho(r')$), pak můžeme každý člen rozvoje **dodatkového potenciálu** vztáhnout k odpovídajícímu členu slapového potenciálu. Jejich vzájemný vztah bude takřka lineární a ve vzdálenosti r od středu planety s poloměrem R bude v čase t platit:

Legendreovy polynomy jsou sférické harmonické funkce popisující.?

$$\delta\mathcal{U}(r, \vartheta, \varphi; t) = \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} k_l \mathcal{U}(R, \vartheta, \varphi; t - \delta t) . \quad (14)$$

Veličina k_l , která vyjadřuje poměr **dodatkového potenciálu** ku slapovému potenciálu na povrchu planety, se jmenuje **potenciálové Loveovo číslo** (stupně l) a závisí na materiálových vlastnostech a struktuře planety. Obvykle nás nejvíce zajímá jeho hodnota na nejsilnějším stupni $l = 2$. Pokud je planeta homogenní a sestává z dokonalé kapaliny či plynu, platí $k_2 = 1.5$. Pokud je planeta dokonale tuhá a nedeformovatelná, máme $k_2 = 0$. Ve všech ostatních případech leží k_2 zpravidla mezi těmito dvěma krajními hodnotami. **Potenciálové Loveovo číslo** je navíc **frekvenčně závislé**. Například pro Zemi (se zanedbáním oceánů) je na půldenní **slapové frekvenci** $k_2 \approx 0.3$, na **nulové frekvenci** pak $k_2 \approx 0.9$.

V definici (14) dále vidíme, že **dodatkový potenciál** v čase t je úměrný slapovému potenciálu v dřívějším čase $t - \delta t$. Mezi příchodem měsíce na souřadnice $(\tilde{r}, \tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi})$ a zdvižením slapové výdutě, čili změnou tvaru planety, je jistý časový rozestup způsobený třením v planetárním nitru. Dokonale elastická planeta či planeta sestávající z dokonalé tekutiny se deformuje okamžitě, $\delta t = 0$. U realistických planet tento časový rozestup opět závisí na vnitřní struktuře, materiálových vlastnostech a frekvenci slapového zatěžování. Pro Zemi je časový rozestup na půldenní slapové frekvenci roven přibližně dvanácti minutám.

Tíhový potenciál dokonale kulové planety se ve vnějším prostoru jeví být stejným jako potenciál hmotného bodu o téže hmotnosti. Vhodíme-li do blízkosti kulové planety hmotnou testovací částici a udělíme-li jí vhodnou počáteční rychlost, začne se tato částice pohybovat po neměnné keplerovské elipse. V případě, že je planeta (slapově) deformovaná, však stojíme před docela jinou úlohou. Hmotná testovací částice se již nebude pohybovat po neměnné kuželosečce, ale po trajektorii, kterou je možné keplerovskou oběžnou dráhou pouze lokálně aproximovat. Abychom tento pohyb mohli popsat nástroji nebeské mechaniky, budeme muset i dodatkový potenciál vyjádřit jako funkci Keplerových elementů, tentokrát ovšem elementů testovací částice.

Pokud do rovnice (14) dosadíme slapový potenciál z rovnice (13) a podnikneme stejnou posloupnost kroků jako v předchozím pododdíle (rozvíjejíce „čárkované“ souřadnice z rovnice (13)), doputujeme k následujícímu vyjádření dodatkového potenciálu působícího na testovací částici v čase t :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{U}(a, e, i, \omega, \Omega, M) = & \frac{\mathcal{G}M_2}{\tilde{a}} \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{R}{\tilde{a}}\right)^l \left(\frac{R}{a}\right)^{l+1} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{m0}) \times \\ & \times \sum_{p_1=0}^l \mathcal{F}_{lp_1}(\tilde{i}) \sum_{q_1=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_{lp_1q_1}(\tilde{e}) \sum_{p_2=0}^l \mathcal{F}_{lp_2}(i) \sum_{q_2=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_{lp_2q_2}(e) \times \\ & \times k_l(\omega_{lp_2q_2}) \cos \left\{ (\tilde{\nu}_{lp_1q_1} - m\tilde{\theta}) - (\nu_{lp_2q_2} - m\theta) - \varepsilon_l(\omega_{lp_2q_2}) \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

Tentokrát jsme zavedli několik nových značení. Předně, rotační úhel nedeformované planety jsme přeznačili na $\tilde{\theta}$, abychom jej odlišili od rotačního úhlu deformované planety. Symbol ν_{lpq} označuje kombinaci úhlových Keplerových elementů vystupujících v argumentu rovnice (13), tedy:

$$\nu_{lpq} = (l - 2p)\omega + (l - 2p + q)M + m\Omega. \quad (16)$$

Namísto časového rozestupu mezi slapovým a dodatkovým potenciálem užíváme fázový rozestup ε_l , který je, stejně jako potenciálové Loveovo číslo k_l , funkcí frekvence. Každý slapový mód $\{lmpq\}$ odpovídá jiné frekvenci slapového buzení. Frekvenci módu $\{lmpq\}$ zapíšeme jako:

$$\begin{aligned} \omega_{lmpq} &= \dot{\nu}_{lmpq} - m\dot{\theta} \\ &= (l - 2p)\dot{\omega} + (l - 2p + q)\dot{M} + m\dot{\Omega} - m\dot{\theta} \\ &\approx (l - 2p + q)n - m\dot{\theta}. \end{aligned} \quad (17)$$

Na posledním řádku jsme předpokládali, že rychlost **stáčení oběžné dráhy** měsíce vůči rovině rovníku planety je řádově pomalejší než rychlost rotace planety a oběhu měsíce.

Jak již bylo naznačeno dříve, jak velikost tak frekvenční závislost potenciálového Loveova čísla i potenciálového fázového rozestupu závisí na vnitřní struktuře a materiálových vlastnostech planety.

Doposud jsme hovořili o měsíci, který působí na planetu slapovým potenciálem, a o hmotné testovací částici, která reaguje na dodatkový potenciál slapově deformované planety. Takovou testovací částicí však v podstatě může být i měsíc samotný. Je-li tomu tak, lze v rovnici (15) ztotožnit vlnkované proměnné s nevlnkovanými a podstatně zjednodušit argument jejích členů. Než však provedeme toto ztotožnění, odvodíme si moment sil, kterým působí „hmotná testovací částice“ na deformovanou planetu a který ovlivňuje rotaci planety.

3 Moment slapových sil

V tuto chvíli se budeme věnovat pouze vlivu slapové interakce na rychlost planetární rotace. Nepřehlédneme tedy k jejímu vlivu na sklon rotační osy ani na orientaci rotační osy v prostoru (ta se mění vlivem precese). Složku momentu slapových sil kolmou na rovník planety můžeme vyjádřit jako:

$$\mathcal{T} = -M_{\text{test}} \frac{\partial(\delta\mathcal{U})}{\partial\theta} \quad (18)$$

a po dosazení dodatkového potenciálu působícího na testovací částici z rovnice (15) získáváme:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = & -\frac{\mathcal{G}M_2M_{\text{test}}}{\tilde{a}} \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{R}{\tilde{a}}\right)^l \left(\frac{R}{a}\right)^{l+1} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2-\delta_{m0}) m \times \\ & \times \sum_{p_1=0}^l \mathcal{F}_{lmp_1}(\tilde{i}) \sum_{q_1=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_{lp_1q_1}(\tilde{e}) \sum_{p_2=0}^l \mathcal{F}_{lmp_2}(i) \sum_{q_2=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_{lp_2q_2}(e) \times \\ & \times k_l(\omega_{lmp_2q_2}) \sin \left\{ (\tilde{\nu}_{lmp_1q_1} - m\tilde{\theta}) - (\nu_{lmp_2q_2} - m\theta) - \varepsilon_l(\omega_{lmp_2q_2}) \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

Jak bylo řečeno výše, testovací částice může být v principu shodná s měsícem. Moment slapových sil, kterým působí měsíc na planetu, jež je jeho gravitačním působením deformovaná, pak vypadá následovně:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} = & -\frac{\mathcal{G}M_2^2}{a} \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{R}{a}\right)^{2l+1} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2-\delta_{m0}) m \times \\
& \times \sum_{p_1=0}^l \mathcal{F}_{lp_1}(i) \sum_{q_1=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_{lp_1q_1}(e) \sum_{p_2=0}^l \mathcal{F}_{lp_2}(i) \sum_{q_2=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_{lp_2q_2}(e) \times \\
& \times k_l(\omega_{lp_2q_2}) \sin \{ \nu_{lp_1q_1} - \nu_{lp_2q_2} - \varepsilon_l(\omega_{lp_2q_2}) \}
\end{aligned} \tag{20}$$

Podívejme se nyní zblízka na argumenty jednotlivých členů tohoto rozvoje a rozepišme si obě ν_{lmpq} znova explicitně podle definice (16):

$$\begin{aligned}
(l-2p_1)\omega + (l-2p_1+q_1)M + m\Omega - (l-2p_2)\omega - (l-2p_2+q_2)M - m\Omega - \varepsilon_{lp_2q_2} = \\
= 2(p_2-p_1)\omega + [(q_1-q_2) + 2(p_2-p_1)]M - \varepsilon_{lp_2q_2}
\end{aligned}$$

Členy rozvoje, pro něž je $(q_1-q_2) = 2(p_1-p_2)$, zjevně nezávisí na střední anomálii měsíce. Obdobně členy s indexy $p_1 = p_2$ nezávisí na argumentu pericentra. Rychlost rotace se obvykle mění na škálách podstatně delších než je oběžná perioda měsíce či perioda stáčení oběžné dráhy. Spočítáme-li střední hodnotu momentu slapových sil z rovnice (20) působícího na planetu po dobu jednoho oběhu měsíce, zjistíme, že příspěvek všech slapových módů obsahujících střední anomálii bude nulový,

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{T} \rangle_M = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{T} \, dM = \\
= & -\frac{\mathcal{G}M_2^2}{a} \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{R}{a}\right)^{2l+1} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2-\delta_{m0}) m \sum_{p_1=0}^l \mathcal{F}_{lp_1}(i) \sum_{q_1=-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_{lp_1q_1}(e) \times \\
& \times \sum_{p_2=0}^l \mathcal{F}_{lp_2}(i) \mathcal{G}_{lp_2q_2}(e) k_l(\omega_{lp_2q_2}) \sin \{ 2(p_2-p_1)\omega - \varepsilon_l(\omega_{lp_2q_2}) \},
\end{aligned} \tag{21}$$

kde $q_2 = q_1 + 2(p_2 - p_1)$. Když pak navíc moment slapových sil vystředujeme i přes periodu stáčení pericentra, zbydou nám pouze módy, které nezávisí ani na argumentu pericentra a pro které platí $p_1 = p_2$, a tedy i $q_1 = q_2$:

$$\begin{aligned}
< \mathcal{T} >_{M,\omega} &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{T} \, dM d\omega = \\
&= \frac{\mathcal{G} M_2^2}{a} \sum_{l=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{R}{a} \right)^{2l+1} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{m0}) m \sum_{p=0}^l [\mathcal{F}_{lmp}(i)]^2 \sum_{q=-\infty}^{\infty} [\mathcal{G}_{lpq}(e)]^2 \times \\
&\quad \times k_l(\omega_{lmpq}) \sin \{ \varepsilon_l(\omega_{lmpq}) \} . \tag{22}
\end{aligned}$$

Tím jsme dospěli k obecnému vyjádření sekulárního momentu sil, který popisuje dlouhodobý vývoj rychlosti rotace planety.