Teoria Analisi
parte 2

2019-2020

Indice

1 Continuità

1.1 Continuità in un punto, in un insieme

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo, e $x_0 \in I$ un punto di accumulazione per I si dice che f è continua in c se esiste

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Si dice che f è continua in I se è continua in ciascun punto di I.

1.2 Punti di discontinuità

1.2.1 I specie (o di salto)

Sia $x_0 \in I$ un punto di accumulazione per I e supponiamo che f sia definita in un intorno circolare di x_0. Diciamo che la funzione f ha in x_0 un punto di discontinuità di prima specie (o di salto) se esistono finiti:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

1.2.2 II specie

Sia $x_0 \in I$ un punto di accumulazione per I e supponiamo che f sia definita in un intorno circolare di x_0. Diciamo che la funzione f ha in x_0 un punto di discontinuità di seconda specie se:

$$\lim_{x \to x_0^-} \begin{cases} \nexists \\ = \infty \end{cases} \qquad \vee \qquad \lim_{x \to x_0^+} \begin{cases} \nexists \\ = \infty \end{cases}$$

1.2.3 III specie (o eliminabile)

Sia $x_0 \in I$ un punto di accumulazione per I e supponiamo che f sia definita in un intorno circolare di x_0. Diciamo che la funzione f ha in x_0 un punto di discontinuità di terza specie (o eliminabile) se esiste finito:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \neq f(x_0)$$

Si ottiene una funzione $\tilde{f}$ continua in x_0 estendendo o modificando f:

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ l & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

1.3 Discontinuità delle funzioni monotone

Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ monotona. Allora, per il teorema di monotonia, i limiti destro e sinistro di f esistono finiti per ogni $x \in (a, b)$. Per cui una funzione monotona può solo avere discontinuità di prima specie (o di salto).

1.4 Teorema di Weierstrass

Sia f una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora f è limitata su $[a, b]$ e ivi assume valori minimo e massimo. Cioè esistono x_m,$x_M \in [a, b]$ tali che

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in [a, b]$$

Si dice che x_m è punto di minimo per f, ed $m = f(x_m)$ è il minimo di f; analogamente, x_M è punto di massimo per f, ed $M = f(x_M)$ è il massimo di f.

1.5 Teorema degli zeri (*)

Sia $f \in \mathscr{C}([a, b])$ tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora $\exists c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$

Dimostrazione

Supponiamo che $f(a) > 0$. Prendiamo $c_1 = \frac{a+b}{2}$, punto medio di $[a, b]$. Se $f(c_1) = 0$, il teorema è dimostrato. Se $f(c_1) \neq 0$, consideriamo l'intervallo $[a_1, b_1]$ e procediamo nel modo seguente:

- se $f(c_1) < 0$, allora $a_1 = a, b_1 = c_1$
- se $(c_1) > 0$, allora $a_1 = c_1, b_1 = b$

E avremo che

$$\begin{gathered} f \in \mathscr{C}([a_1, b_1]) \\ b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2} \\ a < a_1 \\ b > b_1 \end{gathered}$$

Analogamente, poniamo $c_2 = \frac{b_1+a_1}{2}$, punto medio di $[a_1, b_1]$. Se $f(c_2) = 0$, il teorema è dimostrato. Se $f(c_2) \neq 0$, consideriamo l'intervallo $[a_2, b_2]$ e procediamo nel modo seguente:

- se $f(c_2) < 0$, allora $a_2 = a_1, b_2 = c_2$

- se $(c_2) > 0$, allora $a_2 = c_2, b_2 = b_1$

E avremo che

$$f \in \mathscr{C}([a_2, b_2])$$

$$b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}$$

$$a_1 < a_2$$

$$b_1 > b_2$$

Continuando in questo modo troviamo infiniti intervalli $[a_n, b_n]$ con le seguenti proprietà

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \text{e} \quad b_n \geq b_{n+1}$$

$$f \in C([a_n, b_n])$$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

$$f(a_n) > 0 \quad \text{e} \quad f(b_n) < 0$$

Essendo $a_n \uparrow$ e $b_n \downarrow$, esistono finiti i limiti:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = c \in [a,b]$$

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n + \frac{b-a}{2^n} = c$$

Inoltre, poiché $f \in C([a,b])$

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(c) \quad \text{quindi} f(a_n) > 0 \Rightarrow f(c) \geq 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c) \quad \text{quindi} f(b_n) < 0 \Rightarrow f(c) \geq 0$$

quindi $f(c) = 0$

1.6 Teorema dei valori intermedi (*)

Sia $f \in \mathscr{C}(I)$, I intervallo, e sia $\lambda \in (Inf f, Sup f)$. Allora $\exists x \in I \mid f(x) = \lambda$.
Dimostrazione
Siano $x_1 < x_2$, $\lambda \in (Inf f, Sup f)$

$$\lambda > Inf f \Rightarrow \exists x_1 \in I \ f(x_1) < \lambda$$

$$\lambda < Sup f \Rightarrow \exists x_2 \in I \ f(x_2) > \lambda$$

Considero $[x_1, x_2]$ e una funzione $g \in C([x_1, x_2]), g(x) = f(x) - \lambda$
Allora

$$g(x_1) = f(x_1) - \lambda < 0$$
$$g(x_2) = f(x_2) - \lambda > 0$$

Per il teorema degli zeri,

$$\exists c : \ g(c) = f(c) - \lambda = 0$$

$$f(c) = \lambda$$

1.7 Asintoti

1.7.1 Asintoto verticale

Sia $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per $Dom(f)$. Si dice che f ha un asintoto verticale per $x \to x_0$ di equazione $x = x_0$ se esiste

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

1.7.2 Asintoto orizzontale

Sia $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e supponiamo che il suo dominio sia illimitato. Si dice che f ha un asintoto orizzontale di equazione $y = l$ ($l \in \mathbb{R}$) se esiste

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

1.7.3 Asintoto obliquo

Sia $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e
supponiamo che il suo dominio sia illimitato. Si dice che f ha un asintoto obliquo di equazione

$$y = mx + q \quad (m, q \in \mathbb{R}, \quad m \neq 0) \quad \text{per} \quad x \to \pm\infty$$

se esistono

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$$
$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = q$$

1.8 Continuità di funzione inversa

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo, una funzione continua in I. Allora f è invertibile in I se e solo se è strettamente monotona. In tal caso, la sua inversa è ancora strettamente monotona e continua.

2 Calcolo differenziale

2.1 Definizione di derivata

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$; f si dice derivabile in $x_0 \in (a, b)$ se esiste finito

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = k$$

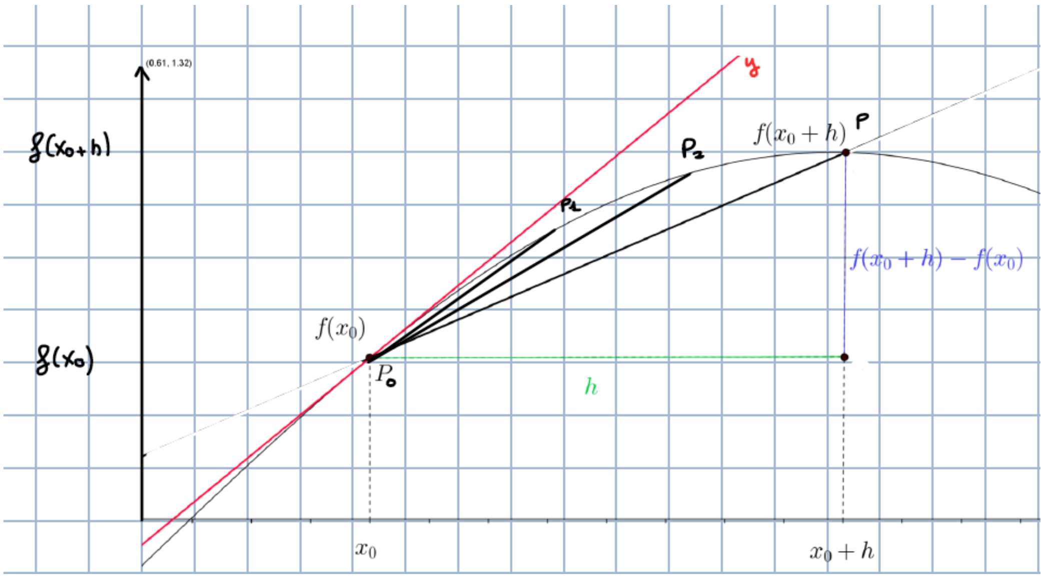
Il limite l prende il nome di "derivata di f in x_0"
e si indica con:

$$f'(x_0) \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} \quad Df(x_0) \quad \dot{f}(x_0)$$

OSS:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

2.1.1 Significato geometrico della derivata



La retta $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ è la retta tangente al grafico di f nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \Leftrightarrow f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \sigma(h) \quad h \to 0$$

ossia, scrivendo h come $h = x - x_0$

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \sigma(x - x_0) \quad x \to x_0$$

2.2 Derivabilità e continuità

Se f è derivabile in un punto x_0 allora f è continua in x_0. Non è vero il contrario, ossia che se f è continua in x_0 allora è derivabile in x_0 (esempio: $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$)

2.3 Derivata di funzione composta

Sia $g \circ f$ la composta di due funzioni f e g. Se f è derivabile in un punto x e g è derivabile in $y = f(x)$, allora $g \circ f$ è derivabile in x e vale la formula

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

2.4 Punti di non derivabilità

2.4.1 Punto angoloso

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua in un punto $x_0 \in (a, b)$. La funzione f ha in x_0 un punto angoloso se esiste

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

2.4.2 Punto a tangente verticale

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua in un punto $x_0 \in (a, b)$. La funzione f ha in x_0 un punto a tangente verticale se esiste:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty(-\infty)$$

2.4.3 Punto di cuspide

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua in un punto $x_0 \in (a, b)$. La funzione f ha in x_0 un punto di cuspide se

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty(-\infty) \quad \wedge \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty(+\infty)$$

2.5 Massimi e minimi locali

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si dice che x_0 è punto di massimo locale(o relativo) per f e che $M = f(x_0)$ è massimo locale (o relativo) di f se esiste un intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a, b]$ tale che $M = f(x_0) \geq f(x)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a, b]$ Analogamente per un minimo locale.

2.6 Punto stazionario

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo, derivabile in $x_0 \in I$. Il punto x_0 si dice punto stazionario se $f'(x_0) = 0$

2.7 Teorema di Fermat (*)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, derivabile in $x \in (a, b)$. Se x è punto di estremo locale allora

$$f'(x) = 0$$

Dimostrazione
Sia $x_0 \in (a, b)$ punto di massimo relativo, cioè

$$\exists \delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$$

tale che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$
$$0 < h < \delta \quad (positivo) \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} < 0$$
$$-\delta < h < 0 \quad (negativo) \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0$$

e quindi

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'_+(x_0) \leq 0$$
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'_-(x_0) \leq 0$$

Essendo f derivabile in x_0, $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$

2.8 Teorema di Lagrange (*)

Sia f derivabile in (a, b) e continua in $[a, b]$. Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Dimostrazione
Caso 1: Teorema di Rolle

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c : f'(c) = 0$$

$$f \in \mathscr{C}([a, b]) \Rightarrow \exists x_1, x_2 :$$

$$f(x_1) = M = Maxf \quad \text{in}[a, b]$$

$$\wedge$$

$$f(x_2) = m = Minf\text{in}[a, b]$$

- se $m = M$

$$f(x) = m = M \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

- se $m < M$

$$f(a) = f(b) \Rightarrow x_1 \in (a,b) \vee x_2 \in (a,b)$$

  supponiamo che $x_1 \in (a,b)$ sia punto di max $\Rightarrow f'(x_1) = 0$

Caso 2:

$$f(b) \neq f(a)$$

Considero la funzione ausiliaria

$$g(x) = f(x) - (f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a))$$

Si ha che

$$g(a) = g(b) = 0$$

$$g \in C([a,b])$$

$$g \quad \text{derivabile} \quad \text{in}(a,b)$$

Allora, per il teorema di Rolle,

$$\exists c : g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

2.9 Corollario 1 (*)

Sia f derivabile su I, intervallo, allora se

1. $$f'(x) = 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f = K \quad \text{su} \quad I$$

2. $$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f \quad \text{è crescente su} \quad I$$

   Analogamente per f decrescente.

3.
$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f \text{è strettamente crescente su} I$$

Analogamente per f strettamente decrescente.

Dimostrazione

1. $f'(x) = 0$
   $x_1, x_2 \in I$ e supponiamo che $x_1 < x_2$ allora
   $$\exists c \in (x_1, x_2) : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0 \Rightarrow \forall x_1, x_2 \in I \; f(x_2) = f(x_1) = k$$

2. $f'(x) \geq 0$
   $x_1, x_2 \in I$ e supponiamo che $x_1 < x_2$
   f è derivabile su $[x_1, x_2]$ allora
   $$\exists c \in (x_1, x_2) : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \geq 0$$
   $$\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

3. $f'(x) > 0$
   $x_1, x_2 \in I$ e supponiamo che $x_1 < x_2$
   f è derivabile su $[x_1, x_2]$ allora
   $$\exists c \in (x_1, x_2) : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0$$
   $$\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

2.10 Corollario 2 (*)

Se, su I, F e G sono due primitive di f, allora $G = F + k$, k costante.
Dimostrazione

$$(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

$$(G - F)(x) = k \quad \text{costante}$$

2.11 Teorema di De L'Hospital

Siano f, g derivabili in $(x_0, x_0 + \delta)$ con g e $g' \neq 0$ in $(x_0, x_0 + \delta)$ e sia $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ una forma di indeterminazione del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \ \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

2.12 Formula di Taylor con resto secondo Peano (*)

Sia f derivabile n volte in x_0 e sia T_n il suo polinomio di Taylor di grado n. Allora:

$$f(x) = T_n(f, x_{0,x}) + \sigma(x - x_0)^n, x \longrightarrow x_0$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \sigma(x - x_0)^n =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \sigma(x - x_0)^n$$

Dimostrazione

Dimostriamo per induzione su n. Caso base $n_0 = 1$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \sigma(x - x_0) \quad x \longrightarrow x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)} = \frac{0}{0}$$

Applichiamo De L'Hospital:

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) - f'(x_0) = 0$$

quindi vero per $n_0 = 1$. Supponiamo che sia vero per n, ossia che $\forall f$ derivabile n volte si ha che

$$f(x) = T_n(f, x_{0,x}) + \sigma(x - x_0)^n \quad x \longrightarrow x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(f, x_{0,x})}{(x - x_0)^n} = 0$$

Dimostriamolo per $n+1$, cioè che:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_{n+1}(f, x_{0,x})}{(x-x_0)^{n+1}} = 0$$

Poiché viene una forma di indeterminazione $\frac{0}{0}$, applichiamo De L'Hospital:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - T'_{n+1}(f, x_{0,x})}{(n+1)(x-x_0)^{n}}$$

Osserviamo che:

$$T'_{n+1}(f, x_{0,x}) = D(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} k(x-x_0)^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k} = T_n(f', x_{0,x})$$

Per cui:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - T'_{n+1}(f, x_{0,x})}{(n+1)(x-x_0)^{n}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - T_{n}(f', x_{0,x})}{(n+1)(x-x_0)^{n}} \longrightarrow 0$$

per ipotesi induttiva. Per il teorema di De L'Hospital, quindi,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - T'_{n+1}(f, x_{0,x})}{(n+1)(x-x_0)^{n}} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_{n+1}(f, x_{0,x})}{(n+1)(x-x_0)^{n}} = 0$$

Per cui è vero che

$$\exists f^{(n)}(x_0) \Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \sigma(x-x_0)^n \quad (x \longrightarrow x_0)$$

2.13 Formula di Taylor con resto secondo Lagrange

Sia f derivabile n volte in x_0 ed $n+1$ volte in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$. Allora

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \quad \exists c \in (x_0, x)(\in (x, x_0))$$

tale che

$$f(x) = T_n(f, x_{0,x}) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

con $c = c_x$ (ossia c dipende da x)

2.14 Concavità e convessità

2.14.1 Definizione analitica di funzione convessa e concava

f si dice convessa su I se e solo se

$$\forall x_1, x_2 \in I \quad f((1-\Lambda)x_1 + \Lambda x_2) \leq (1-\Lambda)f(x_1) + \Lambda f(x_2) \quad \Lambda \in [0,1]$$

f si dice concava su I se e solo se

$$\forall x_1, x_2 \in I \quad f((1-\Lambda)x_1 + \Lambda x_2) \geq (1-\Lambda)f(x_1) + \Lambda f(x_2) \quad \Lambda \in [0,1]$$

2.14.2 Definizione grafica di funzione convessa e concava

Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Se

$$Epif = \{(x, y) : x \in I \wedge y \geq f(x)\}$$

,epigrafico di f, è convesso, dico che f è una funzione convessa su I. Se $-f$ è convessa, dico che f è concava.
$Epif$ è convesso se e solo se

$$\forall P_1, P_2 \in graff \; [P_1, P_2] \in Epif$$

2.15 Derivabilità di funzione inversa

Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e invertibile in (a, b) e $g = f^{-1}$ la sua inversa, definita in $f(a, b)$. Supponiamo inoltre che esista $f'(x_0) \neq 0$ per un certo $x_0 \in (a, b)$. Allora g è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

2.16 Primitiva

Data $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se $\exists\, F : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $F'(x) = f(x) \;\; \forall x \in A$
Chiamo F "funzione primitiva" di f su A.
Oss: se F è primitiva di f, anche $G(x) = F(x) + k$ lo è.

2.17 Integrale indefinito

Sia f una funzione definita su un intervallo $[a, b]$. Si definisce integrale indefinito di f su $[a, b]$ l'insieme di tutte le primitive della funzione f in $[a, b]$ e si indica con

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) + k$$

3 Calcolo integrale

3.1 Integrale definito

Sia $f : [a, b] \to R$, f limitata, e sia P_n la generica equipartizione di $[a, b]$ con

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

somma n-esima di Cauchy-Riemann di f. Se esiste finito

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

uniforme rispetto alla scelta degli $\xi_i \in I_i$, dico che f è "integrabile secondo Cauchy-Riemann" su $[a, b]$ e chiamo integrale di f su $[a, b]$ tale limite.
Scrivo:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

3.2 Teorema della media integrale (*)

Sia $f \in \mathscr{R}([a, b])$, allora $\exists\lambda \in [Inf f, Sup f]$ tale che

$$\int_a^b f = \lambda(b - a)$$

In particolare se $f \in \mathscr{C}([a, b])$, $\exists c \in (a, b)$ tale che

$$\int_a^b f = f(c)(b - a) \quad \text{(media} \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b f = \lambda = f(c)$$

Dimostrazione

$$Inf f \leq f(x) \leq Sup f \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\int_a^b Inf f dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Sup f dx$$

$$Inf f(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq Sup f(b-a)$$

$$Inf f \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq Sup f$$

$$Inf f \leq \lambda \leq Sup f$$

Poiché $f \in \mathscr{C}([a, b])$, per il teorema dei valori intermedi, $\exists c : \lambda = f(c)$

3.3 Primo teorema fondamentale del calcolo integrale (*)

Sia $f \in \mathscr{R}([a, b])$ ed esista primitiva di f su $[a, b]$. Allora

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Dimostrazione

$$P_n = \{x_0 = a \leq x_1 \leq \ldots x_n = b\}$$

equipartizione di $[a, b]$ Allora:

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + F(x_{n-2})$$

$$+ \cdots + F(x_2) - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) = \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1})$$

Poiché sono soddisfatte le ipotesi, applichiamo il teorema di Lagrange agli intervalli $[x_{i-1}, x_i]$. Esiste allora $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tale che

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1})F'(\xi_i) = (x_i - x_{i-1})f(\xi_i)$$

Ne segue che

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\xi_i)$$

L'identità scritta vale per ogni n. Facendolo tendere a $+\infty$ troviamo

$$F(b) - F(a) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\xi_i) = \int_a^b f(x)dx$$

3.4 Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale (*)

Sia $f \in \mathscr{R}([a,b])$ e sia F, definita da

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

, una sua funzione integrale. Allora:

1. F è continua su $[a,b]$
2. se f è continua su (a,b), $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a,b)$

Dimostrazione

1. F è continua in $x\ \forall x \in [a,b]$ cioè

   $$F(x+\Delta x) \to F(x) \quad \text{se} \quad \Delta x \to 0$$

   Infatti

   $$|F(x+\Delta x) - F(x)| = |\int_{x_0}^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt| =$$

   $$= |\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt| \leq |\int_{x}^{x+\Delta x} kdt| = k|\Delta x| \to 0 \quad \text{per} \quad \Delta x \to 0$$

2. Consideriamo l'uguaglianza vista prima

   $$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt$$

   poiché, per ipotesi, f è continua, per il teorema della media integrale si ha che

   $$\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt = \Delta x \cdot f(c) \quad c \in (x, x+\Delta x)$$

   $$\frac{\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} = \frac{\Delta x \cdot f(c)}{\Delta x} = f(c)$$

   $$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x)$$

   per continuità di f.

4 Integrali generalizzati

4.1 Integrale generalizzato su un intervallo illimitato

Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{R}([a, k]) \ \ \forall k > a$ Se esiste finito il

$$\lim_{k \to +\infty} \int_a^k f(t)dt = \Lambda$$

dico che f è integrabile in senso generalizzato (o improprio) su $[a, +\infty)$ e scrivo

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \Lambda$$

4.2 Integrale generalizzato per funzioni illimitate

Sia $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, f illimitata in $v(a)$, $f \in \mathscr{R}([a + \varepsilon, b])$ Se esiste finito il

$$\lim_{\varepsilon \to o^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(t)dt = \Lambda$$

dico che f è integrabile in senso generalizzato (o improprio) su $(a, b]$ e scrivo

$$\int_a^b f(t)dt = \Lambda$$

4.3 Criteri di integrabilità

su un intervallo illimitato

4.3.1 Teorema del confronto

Siano $f, g \in \mathscr{R}([a, k]) \ \ \forall k > a$ e sia $0 \leq f(x) \leq g(x) \ \ \forall x \in [a, +\infty)$. Allora

$$\exists \int_a^{+\infty} g(x)dx \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$$

4.3.2 I corollario (*)

Sia $f(x)$ integrabile in senso generalizzato su $[a, +\infty)$. Se esiste

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

allora tale limite è nullo, quindi

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Dimostrazione
Supponiamo per assurdo che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l > 0 (< 0)$$

$$\exists H : \forall x > H \quad f(x) = \frac{l}{2}$$

ma $g(x) = \frac{l}{2}$ non è integrabile su $[H, +\infty)$

4.3.3 II corollario (convergenza assoluta) (*)

Se $f \in \mathscr{R}([a, k]), \forall k > a$ ed esiste

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

allora esiste

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

Dimostrazione
Per definizione di valore assoluto abbiamo che $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ con $x \in [a, +\infty)$
Sommando $|f(x)|$ a tutti i membri

$$0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|$$

poiché, per ipotesi, esiste

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

allora, per il criterio del confronto, esiste anche

$$\int_a^{+\infty} f(x) + |f(x)| dx$$

Consideriamo ora il seguente integrale

$$\int_a^k f(x) dx$$

Sommiamo e sottraiamo $|f(x)|$

$$\int_a^k f(x) - |f(x)| + |f(x)| dx = \int_a^k f(x) + |f(x)| dx - \int_a^k |f(x)| dx$$

e consideriamo il limite per $k \to +\infty$

$$\lim_{k\to+\infty} \int_a^k f(x) - |f(x)| + |f(x)| dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^k f(x) + |f(x)| dx - \lim_{t\to+\infty} \int_a^k |f(x)| dx$$

I due limiti al secondo membro esistono finiti, per cui esiste anche il limite al primo membro.

4.3.4 III corollario (*)

Siano $f, b : [a, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f, g > 0, \quad f, g \in \mathscr{R}([a, k]) \quad \forall k > a$
Se per $x \to +\infty \quad f(x) \sim g(x)$, allora
f è integrabile in senso generalizzato $\Leftrightarrow$ lo è g, ossia

$$\exists \int_a^{+\infty} f \Leftrightarrow \exists \int_a^{+\infty} g$$

Dimostrazione
$f(x) \sim g(x)$, sia quindi

$$\varepsilon = \frac{1}{2}$$

$$\exists H = H(\varepsilon) : \forall x > H(\varepsilon)$$

$$\frac{1}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2} g(x) < f(x) < \frac{3}{2} g(x)$$

per il criterio del confronto, se $g(x)$ converge, anche $\frac{1}{2}g(x)$ converge e quindi anche $f(x)$. Se diverge $\frac{1}{2}g(x)$, diverge anche $g(x)$ e quindi anche $f(x)$

5 Serie

5.1 Serie convergente, divergente

Si dice che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente, divergente, irregolare se la successione $\{s_n\}$ delle somme parziali (o ridotte), definita da $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \forall k = 1, 2 \ldots,$ è convergente, divergente o irregolare. In particolare, se $\exists \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n\to+\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, dico che la serie converge e che la somma è s.

5.2 Serie geometrica (*)

Sia $a_n = q^n, q \in \mathbb{R}$. Se $q \neq 1$, si ha che

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Se $q = 1, s_n = n + 1$ Prendendo il limite per $n \to +\infty$, si ha che:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \quad \text{la serie converge} \\ +\infty & q \geq 1 \quad \text{la serie diverge} \\ \nexists & q \leq -1 \quad \text{la serie è irregolare} \end{cases}$$

Dimostrazione
Per induzione su n. Caso base $n_0 = 1$

$$\sum_{k=0}^{1} q^k = 1 + q$$

$$1 + q = \frac{1 - q^2}{1 - q}$$

Supponiamo che sia vera per n

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

e dimostriamo che sia vero per $n+1$, ossia che

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1}$$

per l'ipotesi induttiva

$$= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

5.3 Serie di Mengoli (*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{converge a 1}$$

Dimostrazione
Osserviamo che

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

per cui

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

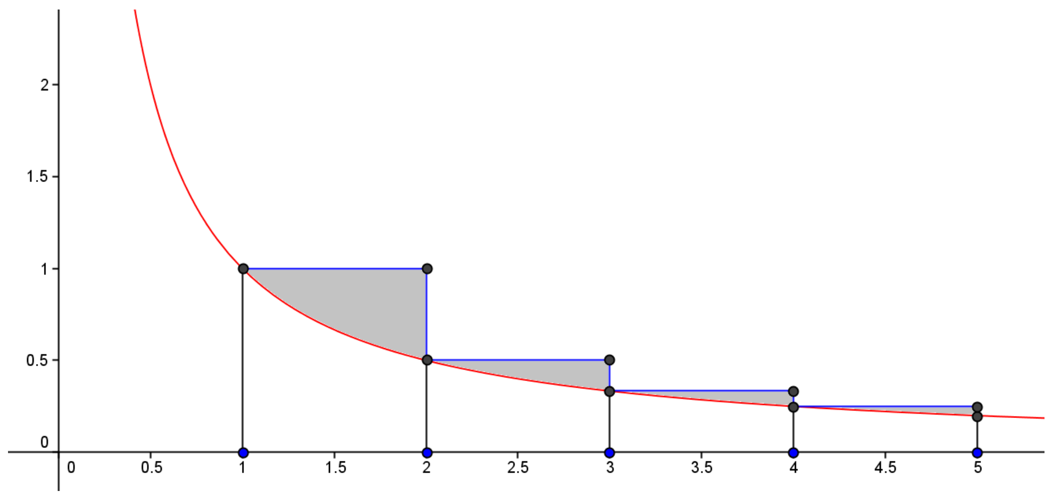
$$= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$$

5.4 Serie armonica (*)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \longrightarrow +\infty$$

Dimostrazione
Consideriamo il seguente grafico

$$f(x) = \frac{1}{n}$$



Fissato un N, intero, vale sempre

$$\int_1^N \frac{1}{n}dx < \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}$$

Poiché

$$\int_1^N \frac{1}{n}dx = logN \longrightarrow +\infty \quad N \longrightarrow +\infty$$

anche

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \longrightarrow +\infty \quad N \longrightarrow +\infty$$

5.5 Condizione necessaria per la convergenza

Condizione necessaria affinché una serie $\sum_{n=0}^{+} \infty$ converga è che $a_n \longrightarrow 0$. Tuttavia non è sufficiente. Esempio: serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

5.6 Serie a termini non negativi

La successione delle somme parziali è crescente

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$$

Per il teorema sull'esistenza del limite per successioni monotone, esiste

$$\lim_{n\to+\infty} s_n$$

tale limite sarà finito oppure $+\infty$. Perciò avremo che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \quad a_n \geq 0$$

sarà sempre regolare, ossia sarà o convergente o divergente a $+\infty$

5.7 Criteri di congruenza

5.7.1 Criterio del confronto (*)

Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ due successioni tali che $0 \leq a_n \leq b_n$. Se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge, allora anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge. Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge, allora diverge anche $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ **Dimostrazione**
Siano $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ e $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ con $A_n \leq B_n \wedge B_n \to B$ poiché $A_n \uparrow$

$$\exists \lim_{n\to+\infty} A_n = A \leq B \quad \text{con} \quad A \in \mathbb{R}$$

per il teorema del confronto per successioni $A = B$

5.7.2 Corollario (confronto asintotico) (*)

Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ successioni positive, tali che $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$ allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{converge} \quad \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \quad \text{converge}$$

Hanno cioè lo stesso carattere.

Dimostrazione
Poiché $a_n \sim b_n$ per $n \longrightarrow +\infty$ si ha che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad 1 - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < 1 + \varepsilon$$

posto $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}$$
$$\frac{1}{2} b_n < a_n < \frac{3}{2} b_n$$

per il criterio del confronto, la prima disuguaglianza implica che se $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, anche $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$, mentre la seconda che se $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge anche $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge

5.7.3 Criterio del rapporto

Sia $\{a_n\}$, $a_n \geq 0$, $a_n \neq 0$ definitivamente. Se esiste

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} l < 1 & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{converge} \\ l = 1 & \text{nulla si può dire} \\ l > 1 & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{diverge} \end{cases}$$

5.7.4 Criterio della radice (*)

Sia $\{a_n\}$, $a_n \geq 0$. Se esiste

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} l < 1 & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{converge} \\ l = 1 & \text{nulla si può dire} \\ l > 1 & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{diverge} \end{cases}$$

Dimostrazione

- $l < 1$

  $$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$$

  allora

  $$\forall \varepsilon > 0 \quad \sqrt[n]{a_n} \leq l + \frac{\varepsilon}{2}$$

ma $l < 1$, quindi per un opportuno $\varepsilon > 0$ anche $l < 1 - \varepsilon$. Per cui

$$\sqrt[n]{a_n} \leq l + \frac{\varepsilon}{2} < (1 - \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$a_n < \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$$

per il criterio del confronto con la serie geometrica convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$$

la serie di partenza converge.

- $l > 1$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l > 1$$

analogamente

$$a_n > \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n \quad \varepsilon > 0$$

per il criterio del confronto con la serie geometrica divergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$$

la serie di partenza diverge

5.8 Serie a termini di segno qualunque (*)

Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si dirà assolutamente convergente se converge $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.
Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge assolutamente, allora converge.
Dimostrazione

$$a_n^+ = Max\{a_n, 0\}, \quad a_n^- = Max\{-a_n, 0\}$$

$$a_n = a_n^+ - a_n^-$$

$$0 \leq a_n^+, \quad a_n^- \leq |a_n|$$

per il teorema del confronto $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^-$ convergono, quindi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n^+ - a_n^-) \quad \text{converge}$$

5.9 Serie a termini di segno alterno

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n \quad \text{con} \quad a_n \geq 0 \quad \forall n$$

5.10 Criterio di Leibniz

Sia data $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ tale che $a_n \geq 0$. Se

1. $a_n \downarrow$
2. $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ converge