

# Teoria Analisi

## parte 2

2019-2020

### Indice

<b>1</b>	<b>Continuità</b>	<b>4</b>
1.1	Continuità in un punto, in un insieme . . . . .	4
1.2	Punti di discontinuità . . . . .	4
1.2.1	I specie (o di salto) . . . . .	4
1.2.2	II specie . . . . .	4
1.2.3	III specie (o eliminabile) . . . . .	4
1.3	Discontinuità delle funzioni monotone . . . . .	5
1.4	Teorema di Weierstrass . . . . .	5
1.5	Teorema degli zeri (*) . . . . .	5
1.6	Teorema dei valori intermedi (*) . . . . .	7
1.7	Asintoti . . . . .	7
1.7.1	Asintoto verticale . . . . .	7
1.7.2	Asintoto orizzontale . . . . .	8
1.7.3	Asintoto obliquo . . . . .	8
1.8	Continuità di funzione inversa . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Calcolo differenziale</b>	<b>8</b>
2.1	Definizione di derivata . . . . .	8
2.1.1	Significato geometrico della derivata . . . . .	9
2.2	Derivabilità e continuità . . . . .	9
2.3	Derivata di funzione composta . . . . .	9
2.4	Punti di non derivabilità . . . . .	10
2.4.1	Punto angoloso . . . . .	10

2.4.2	Punto a tangente verticale . . . . .	10
2.4.3	Punto di cuspidè . . . . .	10
2.5	Massimi e minimi locali . . . . .	10
2.6	Punto stazionario . . . . .	10
2.7	Teorema di Fermat (*) . . . . .	11
2.8	Teorema di Lagrange (*) . . . . .	11
2.9	Corollario 1 (*) . . . . .	12
2.10	Corollario 2 (*) . . . . .	13
2.11	Teorema di De L'Hospital . . . . .	14
2.12	Formula di Taylor con resto secondo Peano (*) . . . . .	14
2.13	Formula di Taylor con resto secondo Lagrange . . . . .	15
2.14	Concavità e convessità . . . . .	16
2.14.1	Definizione analitica di funzione convessa e concava . . . . .	16
2.14.2	Definizione grafica di funzione convessa e concava . . . . .	16
2.15	Derivabilità di funzione inversa . . . . .	16
2.16	Primitiva . . . . .	16
2.17	Integrale indefinito . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Calcolo integrale</b>	<b>17</b>
3.1	Integrale definito . . . . .	17
3.2	Teorema della media integrale (*) . . . . .	17
3.3	Primo teorema fondamentale del calcolo integrale (*) . . . . .	18
3.4	Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale (*) . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Integrali generalizzati</b>	<b>20</b>
4.1	Integrale generalizzato su un intervallo illimitato . . . . .	20
4.2	Integrale generalizzato per funzioni illimitate . . . . .	20
4.3	Criteri di integrabilità . . . . .	20
4.3.1	Teorema del confronto . . . . .	20
4.3.2	I corollario (*) . . . . .	21
4.3.3	II corollario (convergenza assoluta) (*) . . . . .	21
4.3.4	III corollario (*) . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Serie</b>	<b>23</b>
5.1	Serie convergente, divergente . . . . .	23
5.2	Serie geometrica (*) . . . . .	23
5.3	Serie di Mengoli (*) . . . . .	24
5.4	Serie armonica (*) . . . . .	24

5.5	Condizione necessaria per la convergenza . . . . .	25
5.6	Serie a termini non negativi . . . . .	25
5.7	Criteri di conseguenza . . . . .	26
5.7.1	Criterio del confronto (*) . . . . .	26
5.7.2	Corollario (confronto asintotico) (*) . . . . .	26
5.7.3	Criterio del rapporto . . . . .	27
5.7.4	Criterio della radice (*) . . . . .	27
5.8	Serie a termini di segno qualunque (*) . . . . .	28
5.9	Serie a termini di segno alterno . . . . .	29
5.10	Criterio di Leibniz . . . . .	29

# 1 Continuità

## 1.1 Continuità in un punto, in un insieme

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  intervallo, e  $x_0 \in I$  un punto di accumulazione per  $I$  si dice che  $f$  è continua in  $c$  se esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Si dice che  $f$  è continua in  $I$  se è continua in ciascun punto di  $I$ .

## 1.2 Punti di discontinuità

### 1.2.1 I specie (o di salto)

Sia  $x_0 \in I$  un punto di accumulazione per  $I$  e supponiamo che  $f$  sia definita in un intorno circolare di  $x_0$ . Diciamo che la funzione  $f$  ha in  $x_0$  un punto di discontinuità di prima specie (o di salto) se esistono finiti:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

### 1.2.2 II specie

Sia  $x_0 \in I$  un punto di accumulazione per  $I$  e supponiamo che  $f$  sia definita in un intorno circolare di  $x_0$ . Diciamo che la funzione  $f$  ha in  $x_0$  un punto di discontinuità di seconda specie se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \left\{ \begin{array}{l} \neq \\ = \infty \end{array} \right. \quad \vee \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \left\{ \begin{array}{l} \neq \\ = \infty \end{array} \right.$$

### 1.2.3 III specie (o eliminabile)

Sia  $x_0 \in I$  un punto di accumulazione per  $I$  e supponiamo che  $f$  sia definita in un intorno circolare di  $x_0$ . Diciamo che la funzione  $f$  ha in  $x_0$  un punto di discontinuità di terza specie (o eliminabile) se esiste finito:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \neq f(x_0)$$

Si ottiene una funzione  $\tilde{f}$  continua in  $x_0$  estendendo o modificando  $f$ :

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ l & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

### 1.3 Discontinuità delle funzioni monotone

Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  monotona. Allora, per il teorema di monotonia, i limiti destro e sinistro di  $f$  esistono finiti per ogni  $x \in (a, b)$ . Per cui una funzione monotona può solo avere discontinuità di prima specie (o di salto).

### 1.4 Teorema di Weierstrass

Sia  $f$  una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$ . Allora  $f$  è limitata su  $[a, b]$  e ivi assume valori minimo e massimo. Cioè esistono  $x_m, x_M \in [a, b]$  tali che

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in [a, b]$$

Si dice che  $x_m$  è punto di minimo per  $f$ , ed  $m = f(x_m)$  è il minimo di  $f$ ; analogamente,  $x_M$  è punto di massimo per  $f$ , ed  $M = f(x_M)$  è il massimo di  $f$ .

### 1.5 Teorema degli zeri (\*)

Sia  $f \in \mathcal{C}([a, b])$  tale che  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Allora  $\exists c \in (a, b)$  tale che  $f(c) = 0$

#### Dimostrazione

Supponiamo che  $f(a) > 0$ . Prendiamo  $c_1 = \frac{a+b}{2}$ , punto medio di  $[a, b]$ . Se  $f(c_1) = 0$ , il teorema è dimostrato. Se  $f(c_1) \neq 0$ , consideriamo l'intervallo  $[a_1, b_1]$  e procediamo nel modo seguente:

- se  $f(c_1) < 0$ , allora  $a_1 = a, b_1 = c_1$
- se  $f(c_1) > 0$ , allora  $a_1 = c_1, b_1 = b$

E avremo che

$$f \in \mathcal{C}([a_1, b_1])$$

$$b_1 - a_1 = \frac{b - a}{2}$$

$$a < a_1$$

$$b > b_1$$

Analogamente, poniamo  $c_2 = \frac{b_1+a_1}{2}$ , punto medio di  $[a_1, b_1]$ . Se  $f(c_2) = 0$ , il teorema è dimostrato. Se  $f(c_2) \neq 0$ , consideriamo l'intervallo  $[a_2, b_2]$  e procediamo nel modo seguente:

- se  $f(c_2) < 0$ , allora  $a_2 = a_1, b_2 = c_2$

- se  $(c_2) > 0$ , allora  $a_2 = c_2, b_2 = b_1$

E avremo che

$$f \in \mathcal{C}([a_2, b_2])$$

$$b_2 - a_2 = \frac{b - a}{2^2}$$

$$a_1 < a_2$$

$$b_1 > b_2$$

Continuando in questo modo troviamo infiniti intervalli  $[a_n, b_n]$  con le seguenti proprietà

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \text{e} \quad b_n \geq b_{n+1}$$

$$f \in C([a_n, b_n])$$

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}$$

$$f(a_n) > 0 \quad \text{e} \quad f(b_n) < 0$$

Essendo  $a_n \uparrow$  e  $b_n \downarrow$ , esistono finiti i limiti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = c \in [a, b]$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \frac{b-a}{2^n} = c$$

Inoltre, poiché  $f \in C([a, b])$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(c) \quad \text{quindi } f(a_n) > 0 \Rightarrow f(c) \geq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(c) \quad \text{quindi } f(b_n) < 0 \Rightarrow f(c) \leq 0$$

quindi  $f(c) = 0$

## 1.6 Teorema dei valori intermedi (\*)

Sia  $f \in \mathcal{C}(I)$ ,  $I$  intervallo, e sia  $\lambda \in (Inf f, Sup f)$ . Allora  $\exists x \in I \mid f(x) = \lambda$ .

**Dimostrazione**

Siano  $x_1 < x_2$ ,  $\lambda \in (Inf f, Sup f)$

$$\lambda > Inf f \Rightarrow \exists x_1 \in I \mid f(x_1) < \lambda$$

$$\lambda < Sup f \Rightarrow \exists x_2 \in I \mid f(x_2) > \lambda$$

Considero  $[x_1, x_2]$  e una funzione  $g \in C([x_1, x_2])$ ,  $g(x) = f(x) - \lambda$

Allora

$$g(x_1) = f(x_1) - \lambda < 0$$

$$g(x_2) = f(x_2) - \lambda > 0$$

Per il teorema degli zeri,

$$\exists c : g(c) = f(c) - \lambda = 0$$

$$f(c) = \lambda$$

## 1.7 Asintoti

### 1.7.1 Asintoto verticale

Sia  $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $x_0$  un punto di accumulazione per  $Dom(f)$ . Si dice che  $f$  ha un asintoto verticale per  $x \rightarrow x_0$  di equazione  $x = x_0$  se esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

### 1.7.2 Asintoto orizzontale

Sia  $f : \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e supponiamo che il suo dominio sia illimitato. Si dice che  $f$  ha un asintoto orizzontale di equazione  $y = l$  ( $l \in \mathbb{R}$ ) se esiste

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$$

### 1.7.3 Asintoto obliquo

Sia  $f : \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e supponiamo che il suo dominio sia illimitato. Si dice che  $f$  ha un asintoto obliquo di equazione

$$y = mx + q \quad (m, q \in \mathbb{R}, \quad m \neq 0) \quad \text{per} \quad x \rightarrow \pm\infty$$

se esistono

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= m \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] &= q \end{aligned}$$

## 1.8 Continuità di funzione inversa

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $I$  intervallo, una funzione continua in  $I$ . Allora  $f$  è invertibile in  $I$  se e solo se è strettamente monotona. In tal caso, la sua inversa è ancora strettamente monotona e continua.

## 2 Calcolo differenziale

### 2.1 Definizione di derivata

Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $f$  si dice derivabile in  $x_0 \in (a, b)$  se esiste finito

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = k$$

Il limite  $l$  prende il nome di "derivata di  $f$  in  $x_0$ " e si indica con:

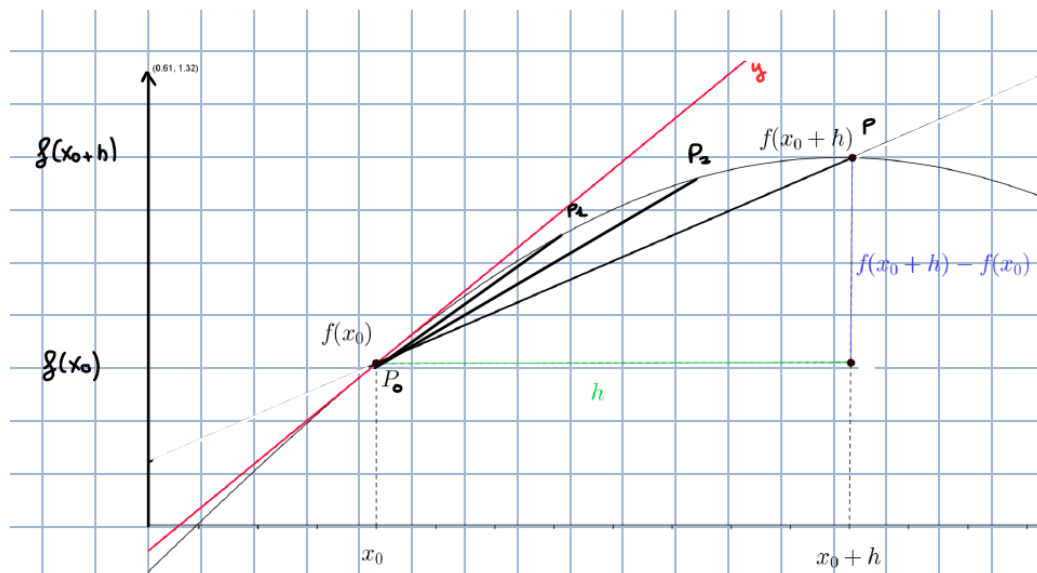
$$f'(x_0) \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \quad Df(x_0) \quad \dot{f}(x_0)$$

OSS:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$



### 2.1.1 Significato geometrico della derivata



La retta  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  è la retta tangente al grafico di  $f$  nel punto  $P_0 = (x_0, f(x_0))$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \Leftrightarrow f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \sigma(h) \quad h \rightarrow 0$$

ossia, scrivendo  $h$  come  $h = x - x_0$

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \sigma(x - x_0) \quad x \rightarrow x_0$$

## 2.2 Derivabilità e continuità

Se  $f$  è derivabile in un punto  $x_0$  allora  $f$  è continua in  $x_0$ . Non è vero il contrario, ossia che se  $f$  è continua in  $x_0$  allora è derivabile in  $x_0$  (esempio:  $f(x) = |x|$ ,  $x_0 = 0$ )

## 2.3 Derivata di funzione composta

Sia  $g \circ f$  la composta di due funzioni  $f$  e  $g$ . Se  $f$  è derivabile in un punto  $x$  e  $g$  è derivabile in  $y = f(x)$ , allora  $g \circ f$  è derivabile in  $x$  e vale la formula

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

## 2.4 Punti di non derivabilità

### 2.4.1 Punto angoloso

Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua in un punto  $x_0 \in (a, b)$ . La funzione  $f$  ha in  $x_0$  un punto angoloso se esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

### 2.4.2 Punto a tangente verticale

Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua in un punto  $x_0 \in (a, b)$ . La funzione  $f$  ha in  $x_0$  un punto a tangente verticale se esiste:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty(-\infty)$$

### 2.4.3 Punto di cuspid

Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  continua in un punto  $x_0 \in (a, b)$ . La funzione  $f$  ha in  $x_0$  un punto di cuspid se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty(-\infty) \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty(+\infty)$$

## 2.5 Massimi e minimi locali

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Si dice che  $x_0$  è punto di massimo locale(o relativo) per  $f$  e che  $M = f(x_0)$  è massimo locale (o relativo) di  $f$  se esiste un intervallo  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a, b]$  tale che  $M = f(x_0) \geq f(x)$  per ogni  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a, b]$  Analogamente per un minimo locale.

## 2.6 Punto stazionario

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $I$  intervallo, derivabile in  $x_0 \in I$ . Il punto  $x_0$  si dice punto stazionario se  $f'(x_0) = 0$

## 2.7 Teorema di Fermat (\*)

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , derivabile in  $x \in (a, b)$ . Se  $x$  è punto di estremo locale allora

$$f'(x) = 0$$

### Dimostrazione

Sia  $x_0 \in (a, b)$  punto di massimo relativo, cioè

$$\exists \delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$$

tale che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$0 < h < \delta \quad (\text{positivo}) \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} < 0$$

$$-\delta < h < 0 \quad (\text{negativo}) \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0$$

e quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'_+(x_0) \leq 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'_-(x_0) \leq 0$$

Essendo  $f$  derivabile in  $x_0$ ,  $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$

## 2.8 Teorema di Lagrange (\*)

Sia  $f$  derivabile in  $(a, b)$  e continua in  $[a, b]$ . Allora esiste  $c \in (a, b)$  tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

### Dimostrazione

Caso 1: Teorema di Rolle

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c : f'(c) = 0$$

$$f \in \mathcal{C}([a, b]) \Rightarrow \exists x_1, x_2 :$$

$$f(x_1) = M = \text{Max} f \quad \text{in} [a, b]$$

$\wedge$

$$f(x_2) = m = \text{Min} f \quad \text{in} [a, b]$$

- se  $m = M$

$$f(x) = m = M \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

- se  $m < M$

$$f(a) = f(b) \Rightarrow x_1 \in (a, b) \vee x_2 \in (a, b)$$

supponiamo che  $x_1 \in (a, b)$  sia punto di max  $\Rightarrow f'(x_1) = 0$

Caso 2:

$$f(b) \neq f(a)$$

Considero la funzione ausiliaria

$$g(x) = f(x) - (f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a))$$

Si ha che

$$g(a) = g(b) = 0$$

$$g \in C([a, b])$$

$$g \text{ derivabile in } (a, b)$$

Allora, per il teorema di Rolle,

$$\exists c : g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

## 2.9 Corollario 1 (\*)

Sia  $f$  derivabile su  $I$ , intervallo, allora se

1.

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f = K \quad \text{su } I$$

2.

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f \text{ è crescente su } I$$

Analogamente per  $f$  decrescente.

3.

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f \text{ è strettamente crescente su } I$$

Analogamente per  $f$  strettamente decrescente.

### Dimostrazione

1.  $f'(x) = 0$

$x_1, x_2 \in I$  e supponiamo che  $x_1 < x_2$  allora

$$\exists c \in (x_1, x_2) : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0 \Rightarrow \forall x_1, x_2 \in I \quad f(x_2) = f(x_1) = k$$

2.  $f'(x) \geq 0$

$x_1, x_2 \in I$  e supponiamo che  $x_1 < x_2$

$f$  è derivabile su  $[x_1, x_2]$  allora

$$\exists c \in (x_1, x_2) : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

3.  $f'(x) > 0$

$x_1, x_2 \in I$  e supponiamo che  $x_1 < x_2$

$f$  è derivabile su  $[x_1, x_2]$  allora

$$\exists c \in (x_1, x_2) : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0$$

$$\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

## 2.10 Corollario 2 (\*)

Se, su  $I$ ,  $F$  e  $G$  sono due primitive di  $f$ , allora  $G = F + k$ ,  $k$  costante.

**Dimostrazione**

$$(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

$$(G - F)(x) = k \quad \text{costante}$$

## 2.11 Teorema di De L'Hospital

Siano  $f, g$  derivabili in  $(x_0, x_0 + \delta)$  con  $g$  e  $g' \neq 0$  in  $(x_0, x_0 + \delta)$  e sia  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$  una forma di indeterminazione del tipo  $\frac{0}{0}$  o  $\frac{\infty}{\infty}$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

## 2.12 Formula di Taylor con resto secondo Peano (\*)

Sia  $f$  derivabile  $n$  volte in  $x_0$  e sia  $T_n$  il suo polinomio di Taylor di grado  $n$ . Allora:

$$\begin{aligned} f(x) &= T_n(f, x_0, x) + \sigma(x - x_0)^n, x \rightarrow x_0 \\ f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \sigma(x - x_0)^n = \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \sigma(x - x_0)^n \end{aligned}$$

### Dimostrazione

Dimostriamo per induzione su  $n$ . Caso base  $n_0 = 1$ :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \sigma(x - x_0) \quad x \rightarrow x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)} = \frac{0}{0}$$

Applichiamo De L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) - f'(x_0) = 0$$

quindi vero per  $n_0 = 1$ . Supponiamo che sia vero per  $n$ , ossia che  $\forall f$  derivabile  $n$  volte si ha che

$$f(x) = T_n(f, x_0, x) + \sigma(x - x_0)^n \quad x \rightarrow x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(f, x_0, x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Dimostriamolo per  $n + 1$ , cioè che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_{n+1}(f, x_{0,x})}{(x - x_0)^{n+1}} = 0$$

Poiché viene una forma di indeterminazione  $\frac{0}{0}$ , applichiamo De L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - T'_{n+1}(f, x_{0,x})}{(n+1)(x - x_0)^n}$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned} T'_{n+1}(f, x_{0,x}) &= D\left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k\right) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} k(x - x_0)^{k-1} = \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!} (x - x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = T_n(f', x_{0,x}) \end{aligned}$$

Per cui:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - T'_{n+1}(f, x_{0,x})}{(n+1)(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - T_n(f', x_{0,x})}{(n+1)(x - x_0)^n} \rightarrow 0$$

per ipotesi induttiva. Per il teorema di De L'Hospital, quindi,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - T'_{n+1}(f, x_{0,x})}{(n+1)(x - x_0)^n} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_{n+1}(f, x_{0,x})}{(n+1)(x - x_0)^n} = 0$$

Per cui è vero che

$$\exists f^{(n)}(x_0) \Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \sigma(x - x_0)^n \quad (x \rightarrow x_0)$$

## 2.13 Formula di Taylor con resto secondo Lagrange

Sia  $f$  derivabile  $n$  volte in  $x_0$  ed  $n + 1$  volte in  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ . Allora

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \quad \exists c \in (x_0, x) (\in (x, x_0))$$

tale che

$$f(x) = T_n(f, x_{0,x}) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

con  $c = c_x$  (ossia  $c$  dipende da  $x$ )

## 2.14 Concavità e convessità

### 2.14.1 Definizione analitica di funzione convessa e concava

$f$  si dice convessa su  $I$  se e solo se

$$\forall x_1, x_2 \in I \quad f((1 - \Lambda)x_1 + \Lambda x_2) \leq (1 - \Lambda)f(x_1) + \Lambda f(x_2) \quad \Lambda \in [0, 1]$$

$f$  si dice concava su  $I$  se e solo se

$$\forall x_1, x_2 \in I \quad f((1 - \Lambda)x_1 + \Lambda x_2) \geq (1 - \Lambda)f(x_1) + \Lambda f(x_2) \quad \Lambda \in [0, 1]$$

### 2.14.2 Definizione grafica di funzione convessa e concava

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Se

$$Epi f = \{(x, y) : x \in I \wedge y \geq f(x)\}$$

,epigrafico di  $f$ , è convesso, dico che  $f$  è una funzione convessa su  $I$ . Se  $-f$  è convessa, dico che  $f$  è concava.

$Epi f$  è convesso se e solo se

$$\forall P_1, P_2 \in \text{graff } [P_1, P_2] \in Epi f$$

## 2.15 Derivabilità di funzione inversa

Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  continua e invertibile in  $(a, b)$  e  $g = f^{-1}$  la sua inversa, definita in  $f(a, b)$ . Supponiamo inoltre che esista  $f'(x_0) \neq 0$  per un certo  $x_0 \in (a, b)$ . Allora  $g$  è derivabile in  $y_0 = f(x_0)$  e

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

## 2.16 Primitiva

Data  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se  $\exists F : A \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in A$

Chiamo  $F$  "funzione primitiva" di  $f$  su  $A$ .

Oss: se  $F$  è primitiva di  $f$ , anche  $G(x) = F(x) + k$  lo è.



## 2.17 Integrale indefinito

Sia  $f$  una funzione definita su un intervallo  $[a, b]$ . Si definisce integrale indefinito di  $f$  su  $[a, b]$  l'insieme di tutte le primitive della funzione  $f$  in  $[a, b]$  e si indica con

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) + k$$

## 3 Calcolo integrale

### 3.1 Integrale definito

Sia  $f : [a, b] \rightarrow R$ ,  $f$  limitata, e sia  $P_n$  la generica equipartizione di  $[a, b]$  con

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

somma n-esima di Cauchy-Riemann di  $f$ . Se esiste finito

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

uniforme rispetto alla scelta degli  $\xi_i \in I_i$ , dico che  $f$  è "integrabile secondo Cauchy-Riemann" su  $[a, b]$  e chiamo integrale di  $f$  su  $[a, b]$  tale limite.

Scrivo:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

### 3.2 Teorema della media integrale (\*)

Sia  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ , allora  $\exists \lambda \in [Inf f, Sup f]$  tale che

$$\int_a^b f = \lambda(b - a)$$

In particolare se  $f \in \mathcal{C}([a, b])$ ,  $\exists c \in (a, b)$  tale che

$$\int_a^b f = f(c)(b - a) \quad (\text{media} \quad \frac{1}{b - a} \int_a^b f = \lambda = f(c))$$

### Dimostrazione

$$\begin{aligned} \inf f &\leq f(x) \leq \sup f \quad \forall x \in [a, b] \\ \int_a^b \inf f dx &\leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \sup f dx \\ \inf f(b-a) &\leq \int_a^b f(x) dx \leq \sup f(b-a) \\ \inf f &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \sup f \\ \inf f &\leq \lambda \leq \sup f \end{aligned}$$

Poiché  $f \in \mathcal{C}([a, b])$ , per il teorema dei valori intermedi,  $\exists c : \lambda = f(c)$

### 3.3 Primo teorema fondamentale del calcolo integrale (\*)

Sia  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  ed esista primitiva di  $f$  su  $[a, b]$ . Allora

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

### Dimostrazione

$$P_n = \{x_0 = a \leq x_1 \leq \dots x_n = b\}$$

equipartizione di  $[a, b]$  Allora:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + F(x_{n-2}) \\ &\quad + \dots + F(x_2) - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) = \sum_{i=1}^n F(x_i) - F(x_{i-1}) \end{aligned}$$

Poiché sono soddisfatte le ipotesi, applichiamo il teorema di Lagrange agli intervalli  $[x_{i-1}, x_i]$ . Esiste allora  $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$  tale che

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1})F'(\xi_i) = (x_i - x_{i-1})f(\xi_i)$$

Ne segue che

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})f(\xi_i)$$

L'identità scritta vale per ogni  $n$ . Facendolo tendere a  $+\infty$  troviamo

$$F(b) - F(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})f(\xi_i) = \int_a^b f(x) dx$$

### 3.4 Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale (\*)

Sia  $f \in \mathcal{R}([a, b])$  e sia  $F$ , definita da

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$$

, una sua funzione integrale. Allora:

1.  $F$  è continua su  $[a, b]$
2. se  $f$  è continua su  $(a, b)$ ,  $F'(x) = f(x) \forall x \in (a, b)$

#### Dimostrazione

1.  $F$  è continua in  $x \forall x \in [a, b]$  cioè

$$F(x + \Delta x) \rightarrow F(x) \quad \text{se} \quad \Delta x \rightarrow 0$$

Infatti

$$\begin{aligned} |F(x + \Delta x) - F(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_{x_0}^x f(t)dt \right| = \\ &= \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \right| \leq \left| \int_x^{x+\Delta x} k dt \right| = k|\Delta x| \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad \Delta x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

2. Consideriamo l'uguaglianza vista prima

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

poiché, per ipotesi,  $f$  è continua, per il teorema della media integrale si ha che

$$\begin{aligned} \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt &= \Delta x \cdot f(c) \quad c \in (x, x + \Delta x) \\ \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} &= \frac{\Delta x \cdot f(c)}{\Delta x} = f(c) \\ \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = f(x) \end{aligned}$$

per continuità di  $f$ .

## 4 Integrali generalizzati

### 4.1 Integrale generalizzato su un intervallo illimitato

Sia  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{R}([a, k]) \quad \forall k > a$  Se esiste finito il

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_a^k f(t) dt = \Lambda$$

dico che  $f$  è integrabile in senso generalizzato (o improprio) su  $[a, +\infty)$  e scrivo

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \Lambda$$

### 4.2 Integrale generalizzato per funzioni illimitate

Sia  $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  illimitata in  $v(a)$ ,  $f \in \mathcal{R}([a + \varepsilon, b])$  Se esiste finito il

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(t) dt = \Lambda$$

dico che  $f$  è integrabile in senso generalizzato (o improprio) su  $(a, b]$  e scrivo

$$\int_a^b f(t) dt = \Lambda$$

### 4.3 Criteri di integrabilità

su un intervallo illimitato

#### 4.3.1 Teorema del confronto

Siano  $f, g \in \mathcal{R}([a, k]) \quad \forall k > a$  e sia  $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, +\infty)$ . Allora

$$\exists \int_a^{+\infty} g(x) dx \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

#### 4.3.2 I corollario (\*)

Sia  $f(x)$  integrabile in senso generalizzato su  $[a, +\infty)$ . Se esiste

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

allora tale limite è nullo, quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

#### Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l > 0 (< 0)$$

$$\exists H : \forall x > H \quad f(x) = \frac{l}{2}$$

ma  $g(x) = \frac{l}{2}$  non è integrabile su  $[H, +\infty)$

#### 4.3.3 Il corollario (convergenza assoluta) (\*)

Se  $f \in \mathcal{R}([a, k])$ ,  $\forall k > a$  ed esiste

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

allora esiste

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

#### Dimostrazione

Per definizione di valore assoluto abbiamo che  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$  con  $x \in [a, +\infty)$

Sommando  $|f(x)|$  a tutti i membri

$$0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|$$

poiché, per ipotesi, esiste

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

allora, per il criterio del confronto, esiste anche

$$\int_a^{+\infty} f(x) + |f(x)| dx$$

Consideriamo ora il seguente integrale

$$\int_a^k f(x) dx$$

Sommiamo e sottraiamo  $|f(x)|$

$$\int_a^k f(x) - |f(x)| + |f(x)| dx = \int_a^k f(x) + |f(x)| dx - \int_a^k |f(x)| dx$$

e consideriamo il limite per  $k \rightarrow +\infty$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_a^k f(x) - |f(x)| + |f(x)| dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^k f(x) + |f(x)| dx - \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^k |f(x)| dx$$

I due limiti al secondo membro esistono finiti, per cui esiste anche il limite al primo membro.

#### 4.3.4 III corollario (\*)

Siano  $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g > 0$ ,  $f, g \in \mathcal{R}([a, k]) \quad \forall k > a$

Se per  $x \rightarrow +\infty$   $f(x) \sim g(x)$ , allora

$f$  è integrabile in senso generalizzato  $\Leftrightarrow$  lo è  $g$ , ossia

$$\exists \int_a^{+\infty} f \Leftrightarrow \exists \int_a^{+\infty} g$$

#### Dimostrazione

$f(x) \sim g(x)$ , sia quindi

$$\varepsilon = \frac{1}{2}$$

$$\exists H = H(\varepsilon) : \forall x > H$$

$$\frac{1}{2} < \frac{f(x)}{f(g)} < \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}g(x)$$

per il criterio del confronto, se  $g(x)$  converge, anche  $\frac{1}{2}g(x)$  converge e quindi anche  $f(x)$ . Se diverge  $f(x)$ , diverge anche  $\frac{3}{2}g(x)$  e quindi anche  $g(x)$

## 5 Serie

### 5.1 Serie convergente, divergente

Si dice che  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  è convergente, divergente, irregolare se la successione  $\{s_n\}$  delle somme parziali (o ridotte), definita da  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k, \forall k = 1, 2, \dots$ , è convergente, divergente o irregolare. In particolare, se  $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$ , dico che la serie converge e che la somma è  $s$ .

### 5.2 Serie geometrica (\*)

Sia  $a_n = q^n, q \in \mathbb{R}$ . Se  $q \neq 1$ , si ha che

$$s_n = \sum_{k=0}^n a^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Se  $q = 1, s_n = n + 1$  Prendendo il limite per  $n \rightarrow +\infty$ , si ha che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \quad \text{la serie converge} \\ +\infty & q \geq 1 \quad \text{la serie diverge} \\ \nexists & q \leq -1 \quad \text{la serie è irregolare} \end{cases}$$

#### Dimostrazione

Per induzione su  $n$ . Caso base  $n_0 = 1$

$$\sum_{k=0}^1 q^k = 1 + q$$

$$1 + q = \frac{1 - q^2}{1 - q}$$

Supponiamo che sia vera per  $n$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1} + 1}{1 - q}$$

e dimostriamo che sia vero per  $n + 1$ , ossia che

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^n q^k + q^{n+1}$$

per l'ipotesi induttiva

$$= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}$$

### 5.3 Serie di Mengoli (\*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \text{ converge a } 1$$

#### Dimostrazione

Osserviamo che

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

per cui

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

### 5.4 Serie armonica (\*)

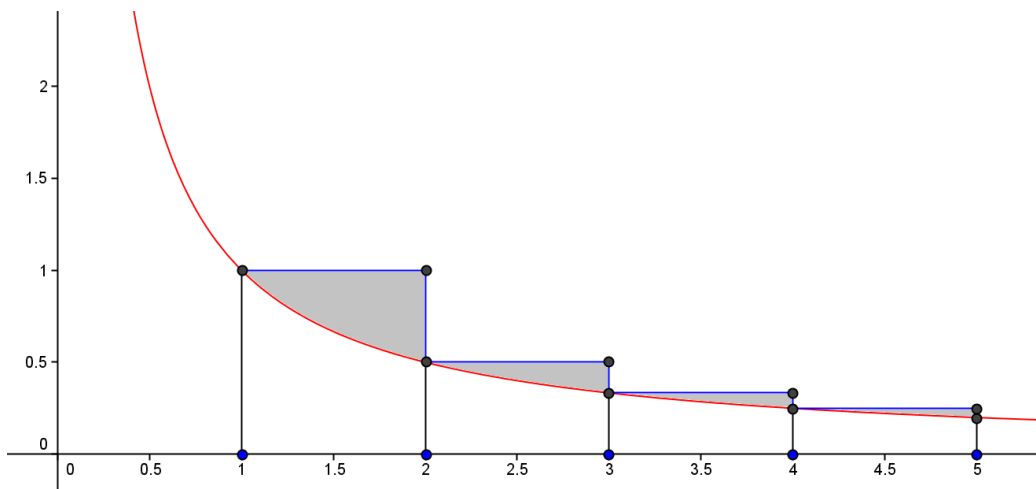
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \rightarrow +\infty$$

#### Dimostrazione

Consideriamo il seguente grafico

$$f(x) = \frac{1}{x}$$





Fissato un  $N$ , intero, vale sempre

$$\int_1^N \frac{1}{x} dx < \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}$$

Poiché

$$\int_1^N \frac{1}{x} dx = \log N \rightarrow +\infty \quad N \rightarrow +\infty$$

anche

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \rightarrow +\infty \quad N \rightarrow +\infty$$

## 5.5 Condizione necessaria per la convergenza

Condizione necessaria affinché una serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  converga è che  $a_n \rightarrow 0$ . Tuttavia non è sufficiente. Esempio: serie armonica  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

## 5.6 Serie a termini non negativi

La successione delle somme parziali è crescente

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$$

Per il teorema sull'esistenza del limite per successioni monotone, esiste

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$$

tale limite sarà finito oppure  $+\infty$ . Perciò avremo che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \quad a_n \geq 0$$

sarà sempre regolare, ossia sarà o convergente o divergente a  $+\infty$

## 5.7 Criteri di conseguenza

### 5.7.1 Criterio del confronto (\*)

Siano  $\{a_n\}, \{b_n\}$  due successioni tali che  $0 \leq a_n \leq b_n$ . Se  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$  converge, al-

lora anche  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  converge. Se  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  diverge, allora diverge anche  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$  **Di-**

**mostrazione**

Siano  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$  e  $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$  con  $A_n \leq B_n \wedge B_n \rightarrow B$  poiché  $A_n \uparrow$

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n \leq B$$

cioè

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A \in \mathbb{R} \quad (A \leq B)$$

per il teorema del confronto per successioni  $A = B$

### 5.7.2 Corollario (confronto asintotico) (\*)

Siano  $\{a_n\}, \{b_n\}$  successioni positive, tali che  $a_n \sim b_n$  per  $n \rightarrow +\infty$  allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \text{ converge}$$

Hanno cioè lo stesso carattere.

### Dimostrazione

Poiché  $a_n \sim b_n$  per  $n \rightarrow +\infty$  si ha che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad 1 - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < 1 + \varepsilon$$

posto  $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}b_n < a_n < \frac{3}{2}b_n$$

per il criterio del confronto, la prima disuguaglianza implica che se  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  converge, anche  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ , mentre la seconda che se  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  diverge anche  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$  diverge

### 5.7.3 Criterio del rapporto

Sia  $\{a_n\}$ ,  $a_n \geq 0$ ,  $a_n \neq 0$  definitivamente. Se esiste

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} l < 1 & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ converge} \\ l = 1 & \text{nulla si può dire} \\ l > 1 & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ diverge} \end{cases}$$

### 5.7.4 Criterio della radice (\*)

Sia  $\{a_n\}$ ,  $a_n \geq 0$ . Se esiste

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} l < 1 & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ converge} \\ l = 1 & \text{nulla si può dire} \\ l > 1 & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ diverge} \end{cases}$$

### Dimostrazione

- $l < 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$$

allora

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \sqrt[n]{a_n} \leq l + \frac{\varepsilon}{2}$$

ma  $l < 1$ , quindi per un opportuno  $\varepsilon > 0$  anche  $l < 1 - \varepsilon$ . Per cui

$$\sqrt[n]{a_n} \leq l + \frac{\varepsilon}{2} < (1 - \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$a_n < \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$$

per il criterio del confronto con la serie geometrica convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$$

la serie di partenza converge.

- $l > 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l > 1$$

analogamente

$$a_n > \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n \quad \varepsilon > 0$$

per il criterio del confronto con la serie geometrica divergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$$

la serie di partenza diverge

## 5.8 Serie a termini di segno qualunque (\*)

Una serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  si dirà assolutamente convergente se converge  $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ .

Se la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  converge assolutamente, allora converge.

**Dimostrazione**

$$a_n^+ = \text{Max}\{a_n, 0\}, \quad a_n^- = \text{Max}\{-a_n, 0\}$$

$$a_n = a_n^+ - a_n^-$$

$$0 \leq a_n^+, \quad a_n^- \leq |a_n|$$

per il teorema del confronto  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^-$  convergono, quindi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n^+ - a_n^-) \quad \text{converge}$$

## 5.9 Serie a termini di segno alterno

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n \quad \text{con} \quad a_n \geq 0 \quad \forall n$$

### 5.10 Criterio di Leibniz

Sia data  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$  tale che  $a_n \geq 0$ . Se

1.  $a_n \downarrow$
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

Allora  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$  converge