

## TRABALHO FINAL DE ANÁLISE – BALANCEADOR DE MASSAS

MAURÍCIO F. SOARES

*Laboratório de Sinais e Sistemas, Depto. de Engenharia Mecatrônica, CEFET-MG Campus V*  
fsoares.mauricio@gmail.com

**Abstract—** This project, involving the areas: mechanics, electronics, programming and control, of the Mechatronics Engineering course, aims to develop and design a mass balance system - second-order dynamic system and non-linear characteristics - as well as its control with the aid of a proportional controller. The choice was based on the attempt to implement a system close to a ball and beam, widely used in the academic field, with characteristics that make it unique. With this in mind, it was defined that the project will be developed using an electromechanical system to control the angular momentum generated by the acting mass, together with a potentiometer sensor, in order to realize the control of the angle of the beam, from the position of the actuator .

**Keywords—** Mass Balancer, Analysis of Linear Systems, Mechatronics Engineering, Proportional Controller.

**Resumo—** Este projeto, envolvendo as áreas: mecânica, eletrônica, programação e controle, do curso de Engenharia Mecatrônica, tem como objetivo desenvolver e projetar um sistema balanceador de massas – sistema dinâmico de segunda ordem e de características não-lineares –, além de seu controle com o auxílio de um controlador proporcional. A escolha se deu em função da tentativa de implementar um sistema próximo à um calha-bola, amplamente utilizado no âmbito acadêmico, com características que o torne único. Com isto em mente, definiu-se que o projeto será desenvolvido utilizando um sistema eletromecânico para controle do momento angular gerado pela massa atuante, juntamente com um sensor potenciômetro, a fim de realizar o controle do ângulo da calha, a partir da posição do atuador.

**Palavras-chave—** Balanceador de massas, Análise de sistemas lineares, Engenharia Mecatrônica, Controlador proporcional.

## 1. Introdução

Segundo Bolivar-Vincenty et al.(2014), o calha e bola é um sistema bem comum no meio acadêmico, pois tem como objetivo expor estudantes ao projeto de um controlador.

Com isso em mente, viu-se a oportunidade de adaptar um sistema desses em algo fora dos padrões acadêmicos. Assim, com uma idéia obtida à partir de uma atividade realizada na própria disciplina, considerou-se realizar um sistema “calha bola” onde o controle é feito através da posição de uma massa atuante, de forma que o momento angular proporcionado pela mesma se equipare com o momento angular gerado por uma outra massa posicionada na outra extremidade da calha.

Assim, surgiu-se a ideia de um balanceador de massas que, além de se adaptar à massa imposta ao sistema, deve ser capaz de se estabilizar, através de um controlador – mais rapidamente que sua resposta natural e, além disso, com uma medição indireta do momento angular propiciado pela massa a ser atuada.

Desta forma, o objetivo deste projeto é construir, modelar e controlar, com o auxílio de um controlador proporcional, este sistema balanceador de massas.

Onde o relatório em questão é disposto da seguinte forma: introdução, em que há uma breve contextualização, bem como a motivação; objetivos gerais e específicos; metodologia, em que são descritos os passos para realização do mesmo; fundamentação teórica, que apresenta a modelagem teórica do sistema; projeto, que apresenta, detalhadamente, as decisões tomadas durante todo o projeto, além de suas motivações; resultados e discussões, espaço onde há a apresentação dos dados obtidos, bem como suas validações e discussões sobre os mesmos; e considerações finais.

## 2. Objetivos

Para a execução do presente projeto, foram estipulados objetivos a serem cumpridos, descritos logo abaixo.

### 2.1 Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho é aplicar um controlador, inicialmente, proporcional a um sistema dinâmico de segunda ordem.

### 2.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos aplicados a este projeto são listados a seguir:

- Modelar o sistema de forma teórica;
- Dimensionar e modelar os componentes mecânicos;

- Dimensionar e elaborar o circuito eletrônico;
- Adquirir os componentes dimensionados;
- Montar o sistema real;
- Calibrar os componentes de instrumentação;
- Validar o modelo teórico proposto;
- Projetar um controlador proporcional; e
- Validar o modelo em malha fechada.

## 3. Metodologia

O seguinte projeto foi dividido em três etapas: modelagem, montagem (mecânica e eletrônica) e controle.

Onde a primeira etapa foi realizada utilizando-se do princípio fundamental da dinâmica – segunda lei de Newton – para sistemas em movimento circular.

Em um segundo momento, elaborou-se, inicialmente, o projeto mecânico da planta, com o auxílio de um *software* CAD 3D, de modo à atender o dimensionamento proposto. Logo em seguida, elaborou-se o projeto eletrônico da planta, com o auxílio de um *software* para simulações e capturas esquemáticas, de modo a atender o dimensionamento proposto. Por fim, houve a aquisição dos componentes e a devida anexação dos mesmos aos projetos implementados.

Sequencialmente, deu-se início à parte de controle. Onde, a princípio, ocorreu-se a calibração do sensor de aquisição de dados, feita com o auxílio de um código em MatLab. Em um outro momento, realizou-se o levantamento da curva de velocidade do motor – controlado por PWM (Pulse Width Modulation) – e seus “pontos mortos”.

Assim, deu-se início aos testes com o sistema. Onde, inicialmente, foi realizada a validação do modelo em malha aberta – sem atuação do motor – para uma entrada degrau; em seguida, utilizando da ferramenta de controle LGR (Lugar Geométrico das Raízes), projetou-se um controlador  $K$ , de modo a determinar um Overshoot que não ultrapassasse a saturação física do sistema real.

Por fim, após a escolha do controlador  $K$ , foram realizados testes para validação do modelo em malha fechada. Contudo, caso o controlador não fosse satisfatório, estudou-se a possibilidade de mudança do controlador, para um do tipo PD (Proporcional Derivativo).

## 4. Fundamentação teórica

Baseando-se na segunda lei de Sir Isaac Newton, tem-se a descrição do princípio fundamental da dinâmica, que diz “Lex II: Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.” (Newton, 1871)<sup>1</sup>, descrita pela seguinte equação:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad (1)$$

<sup>1</sup> “Lei II: A mudança de movimento é proporcional à força motora imprimida, e é produzida na direção de linha reta na qual aquela força é aplicada.”

Como a velocidade linear da partícula é dada por  $v = \omega R$ , temos:

$$\vec{F} = m \frac{d\omega R}{dt} \quad (2)$$

Multiplicando ambos os lados por R, tem-se:

$$FR = mR^2\alpha \quad (3)$$

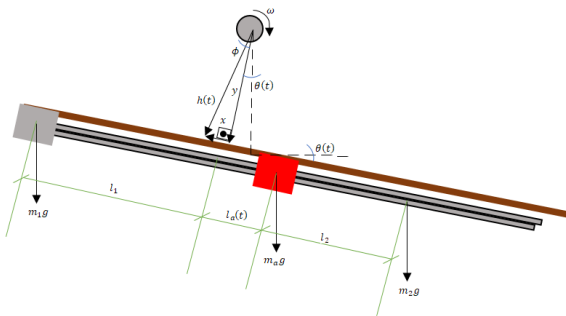
$$\tau = I\alpha \quad (4)$$

Onde:

- $F$  representa a força resultante sobre a partícula;
- $p$  representa o momento linear da partícula;
- $v$  representa a velocidade linear da partícula;
- $a$  representa a aceleração linear da partícula;
- $R$  representa o raio da trajetória;
- $\omega$  representa a velocidade angular da partícula;
- $\alpha$  representa a aceleração angular da partícula;
- $\tau$  representa o torque resultante sobre a partícula; e
- $I$  representa o momento de inércia atuante sobre a partícula.

A Figura 1, logo abaixo, descreve um esquemático do funcionamento físico do sistema proposto.

Figura 1: Esquemático do funcionamento físico do sistema apresentado.



Fonte: Autor.

Como a coordenada  $y$  do centro de gravidade tem um valor fixo (devido sua construção mecânica), temos que apenas a componente  $x$  varia de acordo com a posição do atuador, contudo, mantendo-se sempre sobre o eixo paralelo à calha. Onde, por somatório de momento angular, a mesma é dada por:

$$x(t) = \frac{m_1 l_1 - (m_a l_a(t) + m_2 l_2)}{m_1 + m_a + m_2} \quad (5)$$

Aplicando trigonometria em relação às coordenadas do centro de gravidade total do sistema, temos que:

$$\phi(t) = \tan^{-1} \left( \frac{x(t)}{y} \right) \quad (6)$$

Além disso, aplicando o teorema de Pitágoras na decomposição de eixos das coordenadas do CG do sistema, tem-se:

$$h(t) = \sqrt{x(t)^2 + y^2} \quad (7)$$

Por fim, aplicando a segunda lei de Newton para movimentos circulares, Equação 4, no sistema em questão, temos:

$$J\ddot{\theta} = g \sin(\theta + \phi) (m_1 + m_a + m_2)h - b\dot{\theta} \quad (8)$$

Onde:

- $g$  representa a aceleração gravitacional;
- $b$  representa o coeficiente viscoso de amortecimento do sistema;
- $m_1$  representa a massa do contra peso;
- $m_a$  representa a massa do atuador;
- $m_2$  representa a massa restante do sistema;
- $l_1$  representa a distância, em relação ao eixo paralelo, do contra peso ao eixo de rotação;
- $l_a$  representa a distância, em relação ao eixo paralelo, do atuador ao eixo de rotação;
- $l_2$  representa a distância, em relação ao eixo paralelo, da massa restante do sistema em relação ao eixo de rotação;
- $\theta$  representa o ângulo feito pela calha do sistema;
- $\phi$  representa o ângulo feito entre a resultante do centro de gravidade e sua componente  $y$ ;
- $J$  representa o momento de inércia polar do sistema;
- $\dot{\theta}$  representa a velocidade angular do sistema;
- $\ddot{\theta}$  representa a aceleração angular do sistema.

Com isso, por conter termos trigonométricos e raízes quadradas, tem-se que a EDO que descreve o sistema é não-linear. Assim, vê-se necessária a linearização do sistema em torno de um ponto de operação, no caso  $0^\circ$ , sua devida transformação em Laplace (domínio da frequência) e aplicando-se os devidos valores das constantes, resulta-se na seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{L_a(s)} = \frac{2931}{s^2 + 13,03s + 500.8} \quad (9)$$

## 5. Projeto

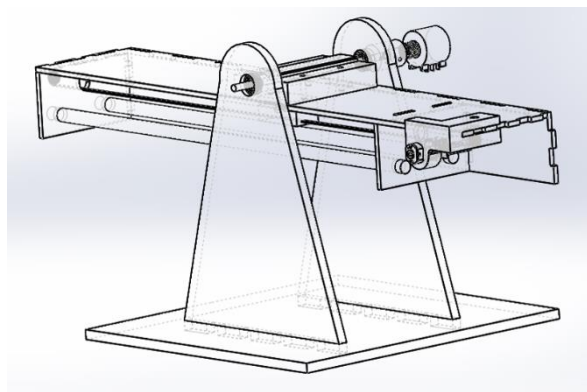
Para a execução deste projeto, realizou-se a separação e classificação de três etapas em três áreas: mecânica, eletrônica e controle.

### 5.1 Mecânica

Para a montagem mecânica, foram utilizados os seguintes componentes, conforme a Figura 2:

- 1 base para o sistema;
- 2 mancais para suporte do eixo principal;
- 2 paredes para montagem da calha;
- 2 paredes para suporte dos eixos guias;
- 1 suporte para o potenciômetro;
- 1 suporte para o motor;
- 1 suporte para o eixo principal e a calha;
- 1 acoplador correia dentada e massa do atuador;
- 1 acoplador 4-10mm (eixo principal e potenciômetro);
- 1 acoplador 3-3mm (eixo do motor e eixo da polia);
- 1 suporte para polia e calha;
- 2 polias GT2 – 3mm;
- 1 correia dentada GT2 – 3mm;
- 2 rolamentos de esfera (4mm);
- 1 barra lisa 4mm (eixo principal);
- 2 rolamentos lineares (8mm);
- 2 barras lisas 8mm (eixos guias);

Figura 2: Vista, detalhada, em perspectiva da planta real.



Fonte: Autor.

Inicialmente, para o dimensionamento da estrutura, foram selecionadas medidas que maximizassem a faixa de trabalho da planta (aumento dos ângulos de saturação), sem comprometimento de sua robustez, chegando-se em uma base de 200x200mm e mancais de 181mm de altura, onde, em ambos os casos, utilizou-se uma espessura de 6mm para aumento da robustez; além disso, obteve-se uma calha com 386mm de comprimento e 3mm de espessura, uma vez que o esforço mecânico sobre a mesma não é tão elevado. Em todos estes casos, foram utilizadas chapas de MDF feitas por corte à laser, por sua relação resistência/acesso x custo, uma vez que este

tipo de processo pode ser facilmente encontrado, por um preço acessível, na região próxima a instituição.

Quanto aos suportes acoplados ao sistema, dimensionou-se os mesmos de tal forma que os componentes adquiridos fossem anexados ao projeto sem maiores complicações e adaptações. Onde, salienta-se a espessura dos mesmos, uma vez que, por serem construídos a partir de uma impressão 3D por extrusão (em ABS), tem-se uma certa fragilidade no sentido radial. Contudo, decidiu-se utilizar este método para construção dos suportes, devido sua fácil prototipagem e seu fácil acesso dentro da instituição.

No que tange os demais componentes mecânicos, utilizou-se de materiais reaproveitados de, principalmente, impressoras antigas: eixos guias, eixo principal, correia dentada e rolamentos lineares e de esferas; além de peças de drones danificados: polias e suporte - em alumínio - entre a calha e a polia direita.

### 5.2 Eletrônica

Para a montagem eletrônica, foram utilizados os seguintes componentes:

- 1 Arduino Nano V3.0;
- 1 driver L298N;
- 1 potenciômetro 10K;
- 1 fonte de alimentação 9V – 0.8A; e
- 1 motor de corrente contínua 100:1, 400RPM;

Onde, para a interface entre o controle e a execução do sistema, utilizou-se do microcontrolador Arduino Nano V3.0, devido a posse do mesmo pelo autor e suas dimensões reduzidas, que resultam em um dimensionamento minimalista da parte eletrônica; além do cumprimento de todos os pré requisitos necessários pelo mesmo – portas analógicas, portas com controle PWM, portas digitais e portas de alimentação.

Já o uso do potenciômetro se deu, principalmente, pela proposta de controle do autor, onde a mensuração do sinal de entrada (distância do atuador) é feita através do sinal de saída (ângulo da calha). Além disso, tem-se que o mesmo é um sensor analógico – com tempo de amostragem limitado apenas pelo microcontrolador – de fácil utilização e aplicabilidade, uma vez que o mesmo é extremamente linear em relação à suas leituras e necessita apenas de dois canais de alimentação ( $V_{CC}$  e  $GND$ ) e um canal para emissão dos dados em questão.

Para o controle do sentido de rotação do motor, utilizou-se um driver L298N por se tratar de uma placa comercial, completa, de preço comparável a confecção de uma placa de circuito impresso – feita pelo autor – com os componentes necessários; gerando, assim, um tempo extra no cronograma de execução do projeto.

Por fim, a escolha do motor de corrente contínua engrenado se deu, mais uma vez, pela proposta de controle do autor, uma vez que, com a utilização de um servo motor, teria-se a posição da massa atuante em cada instante de tempo, o que fugia da proposta inicial. Assim, as especificações do motor se deram pelo esforço necessário para atuação do sistema de

movimento da massa atune e sua velocidade de execução, além de seu aspecto minimalista, o que induz menos carga aplicada sobre um dos lados do sistema.

### 5.3 Controle

Com relação ao controle do sistema, para que fossem iniciados os testes, viu-se necessária a realização da calibração do sensor proposto e o levantamento da curva de velocidade do motor.

Para o primeiro caso, foram realizadas medições do sinal de saída, em onze ângulos distintos, construindo assim a Tabela 1 e resultando na seguinte curva linear:

$$\theta = -0.174 * ADC + 136.269 \quad (10)$$

Tabela 1: Valores obtidos para calibração do potenciômetro.

Ângulo (°)	Leitura analógica
20	673
15	697
10	722
5	752
0	778
-5	810
-10	842
-15	868
-20	902
-25	928
-30	952

Fonte: Autor.

Onde:

- $\theta$  representa a saída do potenciômetro convertida para ângulo; e
- $ADC$  representa a saída do potenciômetro propriamente dita, sem conversão.

Em seguida, para o levantamento da curva de velocidade do motor por PWM – tensão contínua aplicada sobre os terminais do mesmo –, foram decididos alguns parâmetros de antemão: testes com 2 segundos de duração, ângulo da calha constante em 0° e fonte de alimentação constante em 12V. Assim, a Tabela 2 demonstra os dados coletados, chegou-se na seguinte curva quadrática:

$$PWM = 9600v^2 + 860v + 42 \quad (11)$$

Tabela 2: Valores obtidos para levantamento da curva de velocidade do motor.

PWM	Distância percorrida (mm)
65	41
84	74
103	88
122	121
141	129
160	146
179	163
198	182

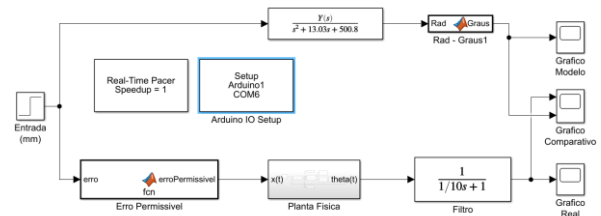
Fonte: Autor.

Onde:

- $PWM$  representa o sinal de tensão aplicada sobre os terminais do motor, onde a conversão é dada por  $V_{motor} = 12 \left( \frac{PWM}{255} \right)$ ; e
- $v$  representa a velocidade da massa do atuador para determinado PWM.

Com estes dados levantados, deu-se início ao controle propriamente dito. Assim, inicialmente, foi realizada a validação do modelo teórico – mostrado na Figura 3 – comparando, para uma entrada degrau de 11mm, a resposta simulada com a resposta experimental do sistema; onde, houve um ajuste fino nos parâmetros de certa dificuldade de mensuração – momento de inércia e coeficiente viscoso de amortecimento – até que a resposta fosse satisfatória.

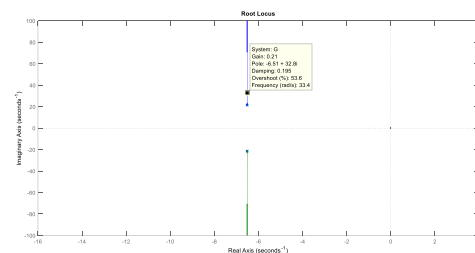
Figura 3: Diagrama de blocos para validação do sistema em malha aberta.



Fonte: Autor.

Em seguida, utilizou-se do lugar geométrico das raízes – utilizando a função `rlocus(G)` disposta pelo MatLab –, de forma que o gráfico obtido pode ser visualizado na Figura 4.

Figura 4: Lugar geométrico das raízes do sistema proposto.

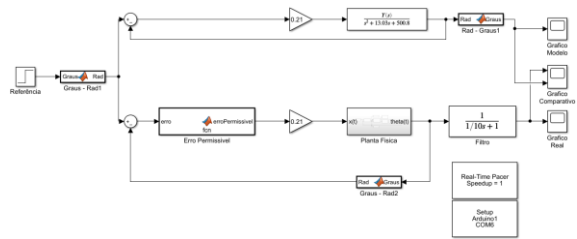


Fonte: Autor.

A partir do LGR, limitado pela saturação do sistema real ( $Overshoot < 60\%$ ), escolheu-se um ganho  $K_P = 0.21$ .

Sequencialmente, com o ganho  $K_P$  estipulado, fechou-se a malha do sistema – conforme a Figura 5 – e realizou-se mais uma etapa de validação; onde, a condição inicial do sistema era de 15° e seu ponto de equilíbrio era dado em 0°.

Figura 5: Diagrama de blocos para validação do sistema em malha fechada.



Fonte: Autor.

## 6. Resultados e discussões

Quanto à montagem, vista na Figura 6, mecânica do sistema real, confirmou-se que a mesma foi satisfatória, uma vez que sua manutenção (montagem e desmontagem) foi de fácil acesso, em conjunto com sua relativa robustez, sem oscilações durante o funcionamento da mesma. Contudo, quanto à montagem eletrônica, notou-se uma certa complicação, uma vez que, por utilizar componentes extremamente suscetíveis a ruídos – como o potenciômetro –, qualquer distúrbio em sua fiação acarretava em um distúrbio na leitura do mesmo e, por conseguinte, um distúrbio no próprio controle.

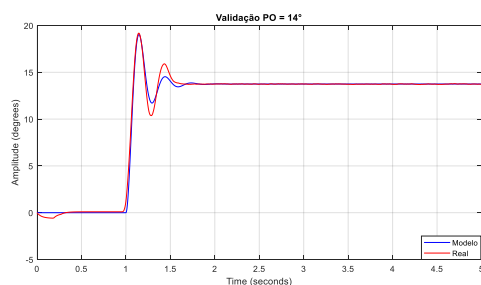
Figura 6: Foto do sistema real após sua construção e implementação.



Fonte: Autor.

Em relação à modelagem teórica, notou-se que o modelo proposto correspondia bem ao sistema real, conforme a validação – para um ponto de operação de  $\theta = 14^\circ$  e sua entrada degrau correspondente  $L_a = 0,011m$  – feita em malha aberta, visualizada na Figura 7, uma vez que a mesma foi realizada desconsiderando-se a atuação do motor.

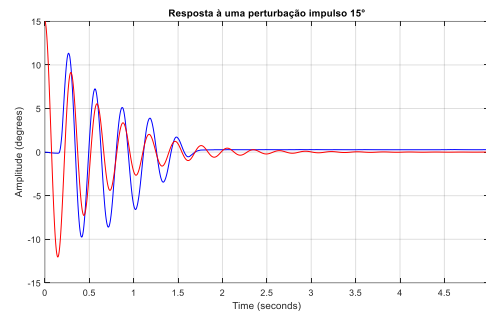
Figura 7: Validação do modelo em malha aberta.



Fonte: Autor.

Contudo, constatou-se que, através dos primeiros testes em malha fechada, apesar do mesmo se mostrar satisfatório com o sistema em malha aberta (desconsiderando a interferência do atuador) que o sistema não era compatível com a planta real, uma vez que o mesmo não levava em consideração a velocidade linear do próprio atuador. Além disso, percebeu-se que a variável mensurada pelo sistema era, de fato, a velocidade da massa do atuador. Com isto, cogitou-se utilizar um integrador anterior à entrada da função de transferência proposta inicialmente – Equação 9 –, para que a velocidade mensurada fosse convertida em distância ( $\int v dt = d$ ). Com isso, visualizou-se uma relativa aproximação do sistema real, utilizando um controlador PD – utilizando  $K_p = 0.25$  e  $K_D = 0.05$  –, uma vez que a existência de uma zona morta do motor de corrente contínua impediu o controle do sistema apenas com um controlador P, conforme a Figura 8.

Figura 8: Validação do modelo em malha fechada, com controlador PD.



Fonte: Autor.

## 7. Considerações finais

Neste projeto, foi realizada a construção (mecânica e eletrônica) de um sistema balanceador de massas, bem como o desenvolvimento, e análise, de um controlador proporcional, bem como um controlador PD. Para tal, utilizou-se de um sistema eletromecânico, motor, correia e polias, para movimentação da massa atuadora, bem como a utilização de um sensor potenciômetro para medição – indireta – da posição da mesma.

Utilizando a ferramenta do lugar das raízes para a escolha do controlador proporcional, foi possível estimar um valor, teórico, que não extrapolasse as condições propostas ( $Overshoot < 60\%$  para que não houvesse saturação no sistema real). Contudo, na prática, isto se tornou intangível, uma vez que interferências como a zona morta do motor e sua alta velocidade de atuação. Assim, viu-se necessária a adoção de um controlador proporcional e derivativo para que houvesse, de fato, um controle do sistema real. Contudo, ainda há uma discrepância entre o modelo proposto e o sistema real, de forma que uma perspectiva futura é a de melhorar os ganhos propostos e a inserção da velocidade linear da massa do atuador na modelagem do sistema.

Assim, os objetivos propostos para projeto foram cumpridos, uma vez que foi apreender os conteúdos vistos na disciplina de Análise de Sistemas Lineares através do projeto de um controlador proporcional para o sistema proposto.

#### **Referências Bibliográficas**

- Newton, I. (1871), *Philosophiae naturalis principia mathematica*, reimpressão 1. ed, James MacLehose, Glasgow, UK, pp. 13.
- Dorf, R. C and Bishop, R. H (2008), *Modern Control Systems*, 11th ed., Prentice-Hall, California, CA, pp. 149-154.
- Bolivar, V. and Beauchamp, B (2014), *Modelling the Ball-and-Beam System From Newtonian Mechanics and from Lagrange Methods*.