تجزیه‌های ماتریسی

reference: Matrix Computations, Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, 4th Edition

- [ ] تبدیل‌های پایه — 3.2 , 5.1
- [ ] تجزیه Schur مشابهت — 8.5
- [ ] تجزیه SVD — 8.5
- [ ] تجزیه LU — 3.2
- [ ] تجزیه LDL^T — 4.2
- [ ] تجزیه Cholesky — 4.2
- [ ] تجزیه QR — 5.2

□ تبدیل های پایه ⟵ مزیت کلی: انجام محاسبات (شامل ضرب آن ها در بردار و ماتریس) ساده انجام شده

□ تبدیل Gauss: (یک ماتریس پایین مثلثی واحد)

$$M_k \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

M_k: پایین مثلثی واحد

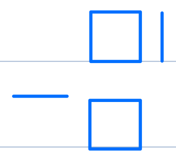
یک طراحی خاص: $M_k \triangleq I_n - \underline{\tau}\, \underline{e}_k^T = \begin{array}{c} \\ \\ \\ k+1 \leftarrow \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & & 0 & & \\ & \ddots & \vdots & & 0 \\ & & 1 & & \\ 0 & & -\tau_{k+1} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ & & -\tau_n & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ستون k)

$\underline{\tau} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \tau_{k+1} \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix}$ $\tau_i \triangleq \dfrac{v_i}{v_k}$, $i = k+1 : n$ if $v_k \neq 0$

یک ماتریس پایین مثلثی خاص که به نحوی طراحی شده که اگر در بردار ضرب شود از جایی به بعد عناصر را صفر کند. (تغییر رتبه ۱ ماتریس I_n است).

* اعمال تبدیل Gauss به ماتریس: $M_k C = \tilde{C}$: سطر اول تا k تغییر نکرده و سطرهای بعدی برابر $\tilde{C}(i,:) = C(i,:) - \tau_i C(k,:)$ است.

یادآوری: بردار در راست یک ماتریس ضرب شود، ستون هایش را ترکیب خطی می کند
〃 〃 چپ 〃 〃 〃 〃 سطر 〃 〃 〃 .



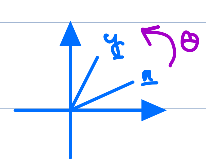
* کاربردهای این تبدیل: تجزیه LU . کاربرد تجزیه LU: حل دستگاه معادلات

سوال ۱) ثابت کنید $M_k^{-1} = I_n + \underline{\tau}\, \underline{e}_k^T$

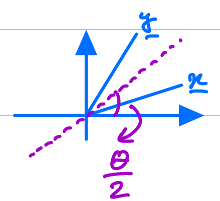
□ تبدیل های متعامد: Householder و Givens

برای ماتریس 2×2: $Q^T Q = I$

دوران: $\underline{y} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^T \underline{x}$



بازتاب: $\underline{y} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \underline{x}$



□ تبدیل Householder (یک ماتریس متقارن)

$v \in \mathbb{R}^n,\ v\neq 0$ ماتریس HH: $P \triangleq I_n - \beta v v^T$ $\qquad \beta = \dfrac{2}{v^T v}$

← تغییر رتبه ۱ ماتریس I است.

* تفسیر هندسی: $Px = y$: x نسبت به ابرصفحه $\text{span}\{v\}^{\perp}$ بازتاب می‌شود.

سوال ۲) ثابت کنید HH (۱ متعامد (۲ متقارن (۳ $n-1$ مقدار ویژه ۱ و یک مقدار ویژه ۱- (۴ دترمینان ۱-

۵) برای تبدیل s به t یک HH بیابید ($Ps = t$) که $\|s\|_2 = \|t\|_2$ و $t \neq s$، می‌توان $v = t - s$ قرار داد.

(به غیر از اثبات جبری، تعبیر این نکته را به کمک تفسیر هندسی که برای HH بیان شد انجام دهید.)

* نکته:

$Q \in \mathbb{R}^{n\times n},\ QQ^T = I,\ x \in \mathbb{R}^n \rightarrow \|Qx\|_2 = \|x\|_2$

$Q \in \mathbb{R}^{n\times n},\ QQ^T = I,\ P \in \mathbb{R}^{m\times m},\ PP^T = I,\ A \in \mathbb{R}^{m\times n} \rightarrow \|PAQ\|_F = \|A\|_F$ و $\|PAQ\|_2 = \|A\|_2$

* یکی از کاربردهای HH برای این است که ماتریس متعامدی را پیدا کنیم که اگر در بردار x ضرب کنیم، همه درایه‌ها جز اولی صفر شود.

$Px = \begin{bmatrix} \pm\|x\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$ طبق سوال ۲ می‌توان قرار داد $\longrightarrow v = x \pm \|x\| e_1 \rightarrow Px = \mp \|x\| e_1$

این کاربرد شبیه کاربرد Gauss است (با تفاوت‌هایی)

* اعمال HH به ماتریس:

$$PA = (I - \beta v v^T)A = A - (\beta v)(v^T A)$$

□ تبدیل Givens (یک ماتریس متعامد)

$$G(i,k,\theta) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & i & k & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & S & 0 \\ 0 & -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \rightarrow i \\ \rightarrow k \\ \\ \end{array}$$

$C = \cos\theta \quad S = \sin\theta$

تغییر رتبه ۲ ماتریس همانی

تفسیر هندسی: $G(i,k,\theta)^T x = y$: دوران θ رادیان بردار x در جهت مثلثاتی در صفحه (i,j).

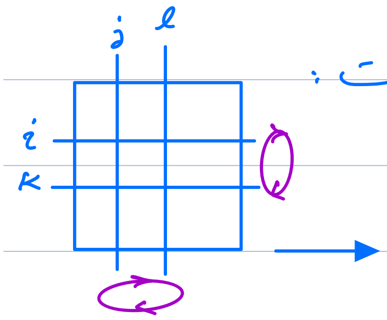
نکته: Givens متعامد است و دترمینان ۱ دارد.

اعمال Givens به بردار: $G(i,k,\theta)^T x = y$ ← همه درایه‌ها ثابت می‌مانند جز درایه y_i و y_k که داریم:

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_i \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_i \\ y_k \end{bmatrix}$$

اعمال Givens به ماتریس: $G(i,k,\theta)^T A = \tilde{A}$ ← همه سطرها ثابت مانده جز سطر i و kام.

$$\tilde{A}([i,k],:) = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}^T A([i,k],:)$$



اعمال دوطرفه Givens به ماتریس: $G(i,k,\theta)^T A \, G(j,l,\alpha) = \tilde{A}$ ← محل تغییرات:

ضمناً داریم: $\begin{bmatrix} c_\theta & s_\theta \\ -s_\theta & c_\theta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_{ij} & a_{il} \\ a_{kj} & a_{kl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\alpha & s_\alpha \\ -s_\alpha & c_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{ij} & a'_{il} \\ a'_{kj} & a'_{kl} \end{bmatrix}$

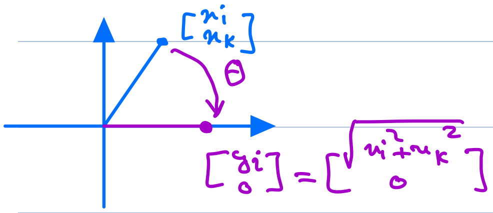
ابزار: ایجاد صفر به کمک Givens (هدف یافتن θ):

$$J(i,j,\theta)^T \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_k \to 0 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

روش ۱)

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_i \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_i \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow c = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2+x_k^2}} \quad , \quad s = \frac{-x_k}{\sqrt{x_i^2+x_k^2}}$$

روش ۲)



$$\longrightarrow \quad \theta = -\tan^{-1}\frac{x_k}{x_i}$$

سؤال 3)

1) ابزار: J_θ ای وجود دارد که $A_{2\times2}$ متقارن را به صورت $J_\theta^T A J_\theta$ قطری کند. J_θ را بیابید.

2) ابزار: J_θ ای وجود دارد که $A_{2\times2}$ غیرمتقارن را به صورت $J_\theta^T A$ متقارن کند. J_θ را بیابید.

3) ابزار: J_θ و J_α ای وجود دارد که $A_{2\times2}$ غیرمتقارن را به صورت $J_\theta^T A J_\alpha$ قطری کند. J_θ و J_α را بیابید.

4) ابزار: J_θ ای وجود دارد که دو ستون $A_{m\times2}$ را به صورت $A J_\alpha$ برهم متعامد کند. J_θ را بیابید. (تمرین P8.6.6 کتاب Golub)

راهنمایی حل ۱): $J_\theta^T A J_\theta = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{bmatrix}$

به مقادیری که منجر به ثبات الگوریتم یا stable نشدن توجه کنید و جواب خاص آن‌ها را بگویید. مثلاً اگر $a_{12}=0$ باشد حالت خاص است و باید جدا $\theta=0$ را بیان کنید.

$$c = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} , \quad s = tc \quad \text{where} \quad t = \begin{cases} \dfrac{1}{\tau+\sqrt{1+\tau^2}} & \tau \geq 0 \\ \dfrac{1}{\tau-\sqrt{1+\tau^2}} & \tau < 0 \end{cases} , \quad \tau = \frac{a_{22}-a_{11}}{2a_{12}}$$

نکته: توجه کنید که برای تبدیل $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ به $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ به کمک یک ماتریس متعامد هم می‌توان از Givens و هم HH استفاده کرد. نکته این جاست که در این جا Givens بسیار efficient تر (از نظر حجم محاسبات) است.

نکته: هر ماتریس متعامد از حاصل ضرب حداکثر n تا HH ساخته شده. به این نکته توجه کنید det هم $+1$ و هم -1 دارد. متقارن در متقارن هم متقارن نمی‌شود. | $\det(\text{Givens}) = 1$ متقارن نیست. | $\det(HH) = -1$ HH متقارن است.

هر ماتریس متعامد با دترمینان $+1$ یک ماتریس Rotation است که حاصل ضرب حداکثر $\frac{n(n-1)}{2}$ تا Givens است. (اثبات فقط برای ماتریس‌های متعامد با دترمینان $+1$ به طوری که درایه‌های آن‌ها $O(1)$ است. با تعریف خاص).

□ تجزیه Schur متقارن

تعمیم: اگر $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ متقارن باشد، آنگاه یک ماتریس متعامد (حقیقی) وجود دارد که $Q^TAQ = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

در واقع این تجزیه مقادیر و بردارهای ویژه که متعامد اند را می‌دهد: (عناصر روی قطر: مقادیر ویژه و ستون‌ها بردار ویژه)

$$Q^TAQ = \Lambda \iff AQ = Q\Lambda \iff A\,Q(:,k) = \lambda_k\, Q(:,k) \quad k = 1:n$$

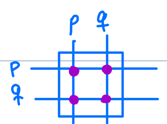
توجه: اگر A مثبت معین باشد تجزیه SVD است $\longrightarrow$ A متقارن $\to Q^TAQ = \Lambda \iff A = Q\Lambda Q^T$

□ الگوریتم عددی محاسبه‌ی تجزیه Schur (ایده‌ی ژاکوبی - Jacobi)

ایده‌ی روش: با یک رشته از آپدیت‌های متعامد $(A \leftarrow Q^TAQ)$ به گونه‌ای عمل می‌کنیم که هر A جدید نسبت به قبلی قطری‌تر شود.

معیار قطری‌تر شدن $\longleftarrow$ $\mathrm{off}(A) \triangleq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} a_{ij}^2}$ $\longleftarrow$ در هر مرحله کاهش یابد

ماتریس‌های متعامد $\longleftarrow$ ماتریس‌های Givens می‌گیریم.



گام‌های اصلی:

1. انتخاب زوج (p,q) که $1 \le p < q \le n$
2. یافتن J_θ مناسب که:

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_{pp} & a_{pq} \\ a_{qp} & a_{qq} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}}_{J_\theta} = \begin{bmatrix} b_{pp} & b_{pq} \\ b_{qp} & b_{qq} \end{bmatrix} \longrightarrow \text{قطری شود}$$

3. جایگزین کردن A: $B = J_\theta^T A J_\theta$

گام ۱ ← مبدأ دقیق‌تر بررسی می‌کنیم که چه (p,q) ای را برداریم

گام ۲ ← یافتن J_θ در section قبلی انجام شد.

گام ۳ ← آیا با این روند ماتریس B نسبت به A قطری‌تر می‌شود؟

$$B = J_\theta^T A J_\theta \Rightarrow \|B\|_F = \|A\|_F \Rightarrow \sum_{ij} a_{ij}^2 = \sum_{ij} b_{ij}^2$$

قطر B همان قطر A است فقط $b_{pp} \leftarrow a_{pp}$ و $b_{qq} \leftarrow a_{qq}$

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_{pp} & a_{pq} \\ a_{qp} & a_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{pp} & 0 \\ 0 & b_{qq} \end{bmatrix}$$

در واقع عناصر غیرقطری روی قطر ریخته شده است

$$a_{pp}^2 + a_{qq}^2 + a_{pq}^2 + a_{qp}^2 = b_{pp}^2 + b_{qq}^2$$

قطر نسبت به مبدأ $a_{qp}^2 + a_{pq}^2$ یا $2a_{pq}^2$ است زیاد شده. پس

$off^2(B) = off^2(A) - 2a_{pq}^2 \Rightarrow$ هر بار قطری‌تر شده $\Rightarrow$ بهتر است برای انتخاب (p,q) بزرگ‌ترین درایه غیرقطری را صفر کنیم

← ممکن است بعداً عناصری که صفر کرده بودیم غیرصفر شوند ولی همواره off کم شده.

* الگوریتم classical Jacobi

نسبت با $\|A\|_F$ دارد که بزرگی اعداد مهم نباشد

از این که هر بار چه قدر کم شود تا کجا بایست کم بشه

```
V ← I_n ,   δ = tol . ||A||_F
while  off(A) > δ
      choose (p,q) so  |a_pq| = max_{i≠j} |a_ij|
      J_θ ← SymSchur2(A, p, q)
      A ← J_θ^T A J_θ
      V ← V J_θ
end
return A, V
```

هر بار $O(n^2)$ است. دفعه اول $O(n^2)$ است ولی دفعه بعد قدم باید تنها سطر و ستون pq را دوباره بگردیم. پس دفعه بعد به بعد $O(n)$ شده.

در ورژن Cyclic بهتر هم می‌شود.

طبق شکل قبل $O(n)$ می‌خواهد داریم سطر و ستون p,q فقط عوض شده.

A همان Λ و V همان Q است

پس هر loop ← $O(n)$ محاسبه نیاز دارد.

سؤال 4) در الگوریتم classical Jacobi، ثابت کنید off-diagonal به صفر همگرا می‌شود. با توجه به نرخ همگرایی ارائه
به‌دست آمده، نشان دهید هزینه محاسبات این الگوریتم $O(n^3)$ است.

* الگوریتم cyclic Jacobi

```
while off(A) > δ
    for p=1:n
        for q=p+1:n
            ===
        end
    end
end
```

$O(1)$ تا sweep نیاز است.

یک sweep می‌گویند

همگرایی این الگوریتم
یعنی بیشتر از درجه دوم نیست cyclic ندارد

☐ تجزیه SVD

$$A_{m\times n} = U_{m\times m}\,\Sigma_{m\times n}\,V^T_{n\times n}$$

☐ ~~ایده اول~~: می‌توان تجزیه SVD را با استفاده از الگوریتم QR بدست آورد: A^TA و AA^T را تجزیه schur کنیم و بردار و مقادیر ویژه یافته. حال U و Σ و V را می‌توان یافت. ولی خوب نیست چون می‌توان A^TA خودش
$O(n^3)$ تا می‌توان دارد که هم اردر کل الگوریتم بوده که برایش کلی تلاش کردیم.

☐ ایده دوم: الگوریتم two-sided

$$A = U\Sigma V^T \iff U^TAV = \Sigma$$ همان قطری کردن

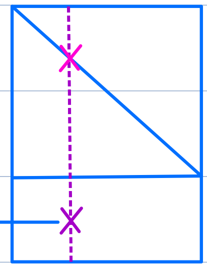
الگوریتمی را ارائه می‌دهیم که $O(n^3)$ است.

* نکته: خیلی از محاسبات مورد نیاز برای محاسبه معکوس و دترمینان $O(n^3)$ است. چون خیلی راحت با کمک تجزیه SVD یافت می‌شوند. (اگرچه راه‌های خیلی بهتر دارند)

$$A = U\Sigma V^T \rightarrow |A| = \pm|\Sigma| \quad , \quad A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$$

الگوریتم: چالش ها ① ماتریس متقارن نیست ② ماتریس لزوماً مربعی نیست.

در section اول گفتیم که $J_\theta \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} J_\alpha$ داریم که قطری کند. ✓



قسمت مربعی حل است

صفر کردن این درایه. ریختن این درایه روی عنصر متناظر در قطر به کمک $J_\theta A$ (دقت سمت چپ) ✓

ورژن cyclic:

$A_{m\times n}$

while ____

  for $q = 1:n$ ← ستون ها

    for $p = q+1:n$ ← سطرها

      بخش مربعی:

      $J_\theta, J_\alpha \leftarrow \begin{bmatrix} a_{pp} & a_{pq} \\ a_{qp} & a_{qq} \end{bmatrix}$ قطری سازی

      $A \leftarrow J_\theta^T A J_\alpha$

    end

    for $p = n+1 : m$

      بخش سطرهای زیر قطر اصلی:

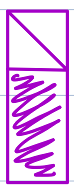
      $J_\theta \leftarrow$ صفر کردن عنصر (p,q) $\quad \begin{bmatrix} a_{qq} \\ a_{pq} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$

      $A \leftarrow J_\theta^T A$

    end

  end

end



□ ایده سوم: الگوریتم one-sided

$$A = U\Sigma V^T \iff AV = \overbrace{U\Sigma}^{\text{ستون های متعامد}}$$

1. در هر گام از سمت راست یک ماتریس Givens در A ضرب کرده ($A \leftarrow AJ_\theta$) طوری که دو ستون را بر هم عمود کند. (section اول را ببینید) 2. یک cost function خوب که معیار تعامد ستون های $A^{(k)}$ را سنجش می کند تعریف کرده. نشان دهید در مرور زمان به صفر میل می کند. 3. پس از این که ستون های A متعامد پیدا کرد از آن U و Σ را استخراج کنید (در شرایطی که A ▭ یا ▯ باشد. با توجه به این که SVD کامل یا thin SVD منجر شود).

سوال 5)

1) نرخ همگرایی الگوریتم two_sided را در حالت غیر Cyclic به دست آورید.

2) الگوریتم one_sided را به دست آورید و برای حالت غیر cyclic همگرایی را نشان دهید.

3) الگوریتم two_sided را پیاده سازی کنید. [my_U,my_S,my_V]=my_svd(A)

ورودی تابع یک ماتریس حقیقی دلخواه و خروجی آن ماتریس های بردارهای تکین چپ، مقادیر تکین و بردارهای تکین راست است.

ملاحظات: 1. الگوریتم شما باید U و Σ و V را به صورتی به دست آورد که مقادیر تکین مثبت و نزولی باشند. با یک تکنیک ساده در انتهای الگوریتم می‌توان به این ویژگی رسید. با این ویژگی خروجی شما تا حدی مثل پاسخ matlab خواهد شد (هنوز ابهام ± در بردارهای تکین غیرقابل رفع است).

2. از فایل main.m برای ارزیابی الگوریتم خود استفاده کنید. برای گزارش از دستور publish('main.m','pdf') و publish('my_svd','pdf') در command window استفاده کنید. خروجی pdf را در گزارش خود قرار دهید. فایل main را تغییر ندهید.

* رویکرد در طراحی الگوریتم ها iterative

کارهایی که در مراحل قبل کرده ایم خراب نمی‌شود و همگرایی را ثابت کنیم

اگر این طور نبود، ثابت کنیم یک cost function کم شود و همگرایی را ثابت کنیم

— با این که عنصرهایی که صفر کرده ایم بعداً احتمالاً ناصفر می‌شوند ولی off کم شده —

□ تجزیه LU LDL^T Cholesky

پایین مثلثی واحد   بالا مثلثی

$$\underset{n\times n}{A} = \underset{n\times n}{L}\,\underset{n\times n}{U} \iff L^{-1}A = U$$

→ فرض کنیم سری ماتریس‌های پایین مثلثی واحد در A ضرب شود تا A بالا مثلثی شود.

L^{-1} وجود دارد و پایین مثلثی واحد است.

از ماتریس تبدیل Gauss استفاده می‌کنیم.

الگوریتم: مثال:

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix} \quad M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^{(1)} = M_1 A^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{bmatrix}$$

صفر کردن بالامثلثی ستون 1 به کمک 1

بالامثلثی کردن ستون 2 به کمک −3

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad A^{(2)} = M_2 M_1 A^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در این الگوریتم کارهای تیمی خراب نمی‌شود. - اگر عنصر کمکی برای صفر کردن عناصر زیرش صفر باشد روش بالا fail می‌شود.

□ تجزیه LU Factorization:

اگر $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و برای $k = 1, \dots, n-1$ داشته باشیم $\det(A(1:k, 1:k)) \neq 0$، آنگاه ماتریس پایین‌مثلثی واحد $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و ماتریس بالامثلثی $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ وجود دارد که $A = LU$.

اگر علاوه بر شروط بالا، A غیرتکین باشد، تجزیه یکتاست و $\det(A) = u_{11} u_{22} \dots u_{nn}$.

سوال 6) 1) تجزیه LU Fact. را ثابت کنید.

راهنمایی: ثابت کنید اگر از الگوریتم پیشنهادی برویم $M_{k-1} \cdots M_1 A = A^{(k-1)}$ که $\det(A(1:k, 1:k)) = a_{11}^{(k-1)} \cdots a_{kk}^{(k-1)}$

□ تجزیه LDL^T Factorization:

اگر $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ متقارن و برای $k = 1, \dots, n$ داشته باشیم $\det(A(1:k, 1:k)) \neq 0$، آنگاه ماتریس پایین‌مثلثی واحد $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و ماتریس قطری $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ وجود دارد که $A = LDL^T$. این تجزیه یکتاست.

سوال 6) 2) تجزیه LDL^T Fact. را ثابت کنید.

□ تجزیه Cholesky Factorization:

اگر $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ مثبت معین و متقارن باشد، آنگاه ماتریس پایین مثلثی یکتای $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ با درایه‌های قطری مثبت

وجود دارد به گونه‌ای که $A=GG^T$. (G: cholesky factor)

سوال 6) 3) قضیه cholesky Fact. را ثابت کنید.

4) کاربرد تجزیه‌ی بالا در حل دستگاه معادلات خطی چیست؟

□ تجزیه QR

□ قضیه QR Factorization:

ماتریس $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ را می‌توان به صورت $A=QR$ تجزیه کرد که $Q\in\mathbb{R}^{m\times m}$ متعامد و $R\in\mathbb{R}^{m\times n}$ بالامثلثی است.

سوال 7) 1) قضیه QR Fact. را ثابت کنید.

2) به کمک ماتریس های Householder الگوریتمی برای محاسبه‌ی تجزیه QR طراحی کنید.

3) به کمک ماتریس های Givens الگوریتمی برای محاسبه‌ی تجزیه QR طراحی کنید.

4) آیا می‌توان با روش Gram-Schmidt تجزیه QR را محاسبه کرد. اگر بله الگوریتم ارائه دهید. از لحاظ عددی این روش را با دو روش بالا مقایسه کنید.

5) به کمک تجزیه QR روشی برای حل The full rank least square problem ارائه دهید.

The full rank least square problem :

ماتریس $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ (که $m\geq n$ و $rank(A)=n$) و بردار $\underline{b}\in\mathbb{R}^m$ را در نظر بگیرید.

هدف بهینه‌سازی $\underset{\underline{x}\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \|A\underline{x}-\underline{b}\|_2$ است که می‌خواهیم مقدار کمینه و نقطه‌ی بهینه x^* را بیابیم.

۱ تبدیل Gauss
در این تبدیل ثابت کنید $M_k^{-1} = I_n + \tau e_k^\top$.

۲ تبدیل Householder
نشان دهید ماتریس‌های این تبدیل:

الف) متقارن است.

ب) متعامد است.

پ) $n-1$ مقدار ویژه ۱ و یک مقدار ویژه ۱- دارد.

ت) دترمینان ۱- دارد.

ث) برای تبدیل بردار s به t به کمک این تبدیل (که $Ps = t$، $\|s\|_2 = \|t\|_2$ و $s \neq t$) می‌توان $v = t - s$ قرار داد. تعبیر هندسی این نکته را نیز بیان کنید.

۳ تبدیل Givens
در این تبدیل‌ها نشان دهید:

الف) J_θ ای وجود دارد که $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ متقارن را به صورت $J_\theta^\top A J_\theta$ قطری کند. J_θ را بیابید.

ب) J_θ ای وجود دارد که $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ نامتقارن را به صورت $J_\theta^\top A$ متقارن کند. J_θ را بیابید.

پ) J_θ و J_α ای وجود دارد که $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ نامتقارن را به صورت $J_\theta^\top A J_\alpha$ قطری کند. J_θ و J_α را بیابید.

ت) J_θ ای وجود دارد که دو ستون $A \in \mathbb{R}^{m\times 2}$ را به صورت AJ_θ بر هم عمود کند. J_θ را بیابید.

۴ تجزیه Schur
در الگوریتم Classical Jacobi ثابت کنید off-diagonal به صفر همگرا می‌شود. نرخ همگرایی را به دست آورید و نشان دهید هزینه محاسباتی این الگوریتم $O(n^3)$ است.

۵ تجزیه SVD
الف) نرخ همگرایی الگوریتم two-sided را در حالت غیر cyclic به دست آورید.

ب) الگوریتم one-sided را به دست آورید و برای حالت غیر cyclic همگرایی را ثابت کنید.

پ) الگوریتم two-sided در حالت cyclic را پیاده‌سازی کنید. [my_U,my_S,my_V] = my_svd(A).

ورودی یک ماتریس حقیقی دلخواه و خروجی ماتریس‌های بردارهای تکین چپ، مقادیر تکین و بردارهای تکین راست است.

ملاحظه ۱. الگوریتم شما باید ماتریس‌های خروجی را به صورتی به دست آورد که مقادیر تکین مثبت و نزولی باشند.

ملاحظه ۲. از تابع main.m برای ارزیابی الگوریتم خود استفاده کنید. برای گزارش از دستور publish('main.m','pdf'); و publish('my_svd.m','pdf'); در Command Window استفاده کنید. pdf های خروجی را در گزارش قرار دهید. فایل main.m را تغییر ندهید.

۶ تجزیه LU، $LDL^\top$ و Cholesky
الف) قضیه LU Factorization را ثابت کنید.

ب) قضیه $LDL^\top$ Factorization را ثابت کنید.

پ) قضیه Cholesky Factorization را ثابت کنید.

ت) کاربرد سه تجزیه‌ی بالا در حل دستگاه معادلات خطی چگونه است؟

۷ تجزیه QR
الف) قضیه QR Factorization را ثابت کنید.

ب) به کمک ماتریس‌های Householder الگوریتمی برای محاسبه تجزیه QR طراحی کنید.

پ) به کمک ماتریس‌های Givens الگوریتمی برای محاسبه تجزیه QR طراحی کنید.

ت) آیا می‌توان با روش گرام-اشمیت تجزیه QR را محاسبه کرد. اگر بله، الگوریتمی ارائه دهید. از لحاظ عددی، این روش را با دو روش قبلی مقایسه کنید.

ث) به کمک تجزیه QR روشی برای حل The Full-rank Linear Least Squares Problem ارائه دهید.