# 华东师范大学测验试卷（2）

2024 – 2025 学年第 2 学期（2025-5-15）

课程名称：实分析　　　　学生姓名：________

点名册号：________　　　　学　　号：________

专　　业：数学与应用数学　　　　年级/班级：2023 级（数学拔尖班）

课程性质：专业必修课

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 总分 | 阅卷人签名 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

注意：无论本试卷中是否有答题位置，均应将答案写在答题纸上（写明题号），并请在答题纸首页标明你的点名册对应号码. 共七道大题，总分 100 分.

一、(15 分) 证明：对任何给定的非负可测函数，都存在一列非负的单调递增的简单函数列处处收敛于它.

二、(15 分) 陈述并证明积分的全连续性.

三、(15 分) 陈述并证明 Lebesgue 控制收敛定理.

四、(15 分) 陈述并证明积分的可列可加性.

五、(15 分) 设 $(X, \mathcal{R}\ \mu)$ 是一个 $\sigma$-有限测度空间，$E \in \mathcal{R}$，$f_n$ 是 $E$ 上一列可测函数，且

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_E |f_m - f_n|^2 \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

证明：存在 $E$ 上的可测函数 $f$，使得

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_E |f_m - f|^2 \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

六、(15 分) 设 $f$ 是区间 $[0,1]$ 上的连续函数. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\cdots\int_0^1 f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

七、(10 分) 设 $E$ 是测度空间 $(X,\mathcal{R},\mu)$ 上测度有限的集. 证明: 函数 $f$ 在 $E$ 上可积的充分必要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} n\mu(E_n) < \infty$, 其中 $E_n = E(n \le |f| < n+1)$.

[全部测验题结束]