MLR

Some Class Notes to Advanced Algebra II (H)

Math

目录

Chapter 0

前言

0.1 闲聊

本笔记针对高等代数第二学期拔尖班课程，参考教材是丘维声《高等代数》，从课程难度的角度讲，与普通班差别不太大（除开期末读书笔记以及后半学期部分习题课涉及的表示论观点，几乎就是普通班难度），因为课上时间有限，课上讲的一些例题由于打字速度问题并没有收录，建议多看看书，本笔记仅供知识点的参考.

从个人角度，我更喜欢复旦的《高等代数学》(你怎么知道我有吴泉水教授的签名？）该书相对于丘维声老师的版本难度稍低一些，而且习题不太出现结论套结论，后面的题目需要用的结论得往前翻两三章的情况（这对于记性差的我来说是很致命的）. 当然不可否认这本书上的知识确实全面，而且内容十分丰富，适合有时间反复翻看.

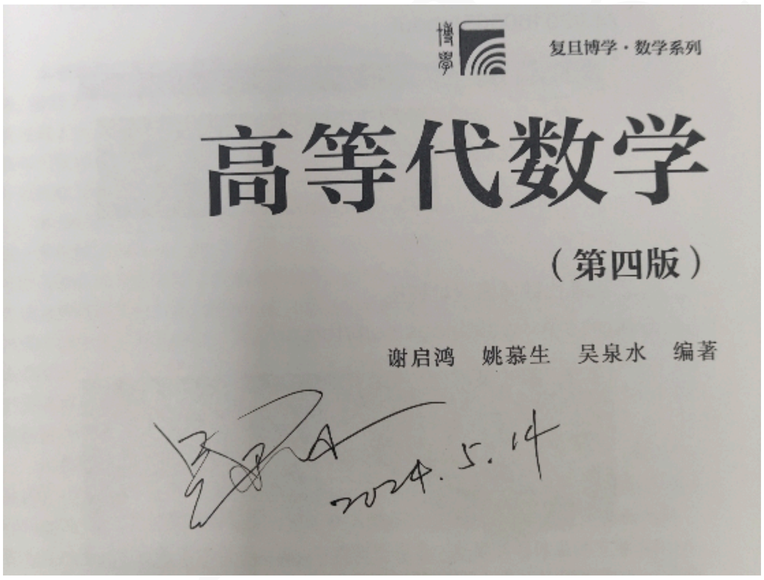

图 1: 吴泉水教授的签名

这本笔记是我练习 LaTeX 用的，可能会有很多小错误，还望大家包容，有什么修改意见随时欢迎提出，QQ:1346484237，或者关注我的公众号：小马同学不在.

0.2 符号说明

大多数符号第一次出现都有写明，这里只记部分较常用的.

$\mathbb{F}$	一般域
$\mathbb{R}$	实数域
$\mathbb{C}$	复数域
$\mathbb{F}[x]$	域 $\mathbb{F}$ 上的多项式环
$V_{\mathbb{F}}$	域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V
$M_{m\times n}(\mathbb{F})$	域 $\mathbb{F}$ 上的 $m \times n$ 矩阵全体
$M_n(\mathbb{F})$	域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵全体
$\mathrm{Hom}(U, V)$	从 U 到 V 的同态全体
$\mathrm{End}(V)$	V 上线性变换全体
$GL_n(\mathbb{F})$	域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶可逆矩阵全体
$SL_n(\mathbb{F})$	$\mathbb{F}$ 上行列式为 1 的 n 阶可逆矩阵全体
$O_n(\mathbb{F})$	$\mathbb{F}$ 上的 n 阶正交矩阵全体
$\dim_{\mathbb{F}}$	作为 $\mathbb{F}$ 上线性空间的维数
$\sum$	求和
$\prod$	求积
$\oplus$	直和
diag	对角矩阵
$\mathrm{rank}(A)/\mathrm{r}(A)$	A 的秩
$\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}$	$\mathscr{A}$ 的核
$\mathrm{Im}\,\mathscr{A}$	$\mathscr{A}$ 的像
χ_A	A 的特征多项式
id_V/Id_V	V 上的恒等映射
V^*	V 的对偶空间

Chapter 1
矩阵

1.1 等价关系

Definition 1.1.1 等价关系

给定集合 S，y 是 S 上的一个关系，称 y 为 S 上的一个**等价关系**，若满足：

(1) 自反性：$aya, \forall a \in S$

(2) 对称性：$ayb \to bya$

(3) 传递性：$ayb, byc \to ayc$

记 $[a] = \{b \in S | ayb\} \subset S$ 为一个等价类，$\{a_i | i \in I\}$ 为代表元集合，则有 $S = \bigcup_{i \in I} [a_i]$

1.2 矩阵的相抵与相似

Definition 1.2.1 矩阵相抵

给定 $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$，若 A 可通过一系列初等变换化为 B，则称 A 与 B 是**相抵的**，记作 $A \overset{\text{相抵}}{\sim} B$

Proposition 1.2.1

$M_{m\times n}(\mathbb{K})$ 上的相抵关系是一个等价关系：

$$\begin{aligned} A \overset{\text{相抵}}{\sim} B &\iff A\text{可通过一系列初等变换化为}B \\ &\iff P_s...P_2P_1AQ_1Q_2...Q_t = B(P_i, Q_i\text{为初等矩阵}) \\ &\iff \text{存在}P \in GL_m(\mathbb{K}), Q \in GL_n(\mathbb{K})\text{使得}PAQ = B \end{aligned}$$

Lemma 1.2.1

已知 $A, B \in M_{m\times n}$，$A \overset{\text{相抵}}{\sim} B \iff Rank(A) = Rank(B)$

• 矩阵的秩是相抵不变量，下证其为相抵**完全不变量**

Proof: 记 $Rank(A) = Rank(B) = r$，通过初等行列变换可得到：

$$A = P_A I_r Q_A, \text{其中：} P_A \in GL_m(\mathbb{K}), Q_A \in GL_n(\mathbb{K}), I_r \in M_{m\times n}.$$

同理有 $B = P_b I_r Q_b$，即得：$A = PBQ, P = P_A P_b^{-1}, Q = Q_b^{-1} Q_A$

Definition 1.2.2 相抵标准型

在刚刚的证明中，将 A, B 都化为了左上都为单位阵的分块矩阵：

$$I_r = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

称为一个**相抵标准型**

于是我们得到一个划分：

$$M_{m\times n}(\mathbb{K}) = \bigcup_{r=0}^{\min\{m,n\}} \{A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}), rank(A) = r\}$$

Definition 1.2.3 矩阵相似

$A, B \in M_n(\mathbb{K})$，若存在 $P \in GL_n(\mathbb{K})$ 使得 $A = P^{-1}BP$，则称 A 与 B 是**相似的**，记作 $A \sim B$

接下来，我们要探讨一些矩阵的相似不变量，引入如下概念.

Definition 1.2.4 矩阵的迹

给定 $A \in M_n(\mathbb{K})$，称对角线元素之和为矩阵的迹（$trace$），记：

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

矩阵的迹有一些很好用的性质，比如下面这条：

Lemma 1.2.2

$\forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$，有 $tr(AB) = tr(BA)$.

Proof:

$$tr(AB) = tr\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = tr\left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}\right) = tr(BA).$$

Proposition 1.2.2

已知 $A, B \in M_n(\mathbb{K})$，相似是一个等价关系：

$$\begin{aligned} A \sim B &\Rightarrow Rank(A) = Rank(B) && \text{(秩是相似不变量，但非相似\textbf{完全不变量})} \\ &\Rightarrow Det(A) = Det(B) && \text{(行列式也仅是相似不变量)} \\ &\Rightarrow tr(A) = tr(B) && \text{(迹也仅是相似不变量)} \end{aligned}$$

1.3 特征值与特征向量

Definition 1.3.1 特征值与特征向量

给定方阵 $A \in M_n\mathbb{K}$，若存在 $\lambda \in \mathbb{K}, 0 \neq \alpha \in \mathbb{K}^n$ 使成立：

$$A\alpha = \lambda\alpha.$$

称 λ 为 A 的**特征值**，α 为 A 的**特征向量**.

step 1: 写出特征多项式

$$\chi_A(\lambda) = |\lambda I - A|.$$

并求出它的根：$\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$.（复数域中）这些即为特征值

step 2: 对每一个特征值 $\lambda = \lambda_i$，求解方程组

$$(\lambda_i - A)X = 0.$$

解空间即为 A 关于特征值 λ_i 的**特征子空间**.

Definition 1.3.2 特征子空间

给定 $A \in M_n(\mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K}$，记：

$$V_\lambda := \{\alpha \in \mathbb{K}^n | A\alpha = \lambda\alpha\}.$$

可验证 V_λ 一定是 $\mathbb{K}$ 的子空间.

$$V_\lambda \neq 0 \iff \lambda\text{是}A\text{的特征值}.$$

此时我们称 V_λ 是 A 关于 λ 的**特征子空间**.

Definition 1.3.3 重数

已知 λ_0 是 A 的一个特征值：

A. λ_0 在 $\chi_A(\lambda)$ 中的重数成为 λ_0 的**代数重数**.

G. $\dim V_{\lambda_0}$ 称为 λ 的**几何重数**.

Proposition 1.3.1

对 A 的任意特征值，其代数重数 $\geq$ 几何重数.

Proof: 记 λ_0 的几何重数为 d，即 $\dim V_{\lambda_0} = d$，任取 V_{λ_0} 的一组基：$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_d$，扩充成 $\mathbb{K}^n$ 一组基.

$$\begin{aligned} A(\eta_1\ \eta_2\ \cdots\ \eta_d\ \eta_{d+1}\ \cdots\ \eta_n) &= (\lambda_0\eta_1\ \lambda_0\eta_2\ \cdots\ \lambda\eta_n) \\ &= (\eta_1\ \eta_2\ \cdots) \begin{pmatrix} \lambda_0 I_d & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \end{aligned}$$

令 $P = (\eta_1\ \eta_2\ \cdots\ \eta_n) \in GL_n(\mathbb{K})$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_0 I_d & B \\ 0 & C \end{pmatrix} := G.$$

于是得到

$$\chi_G(\lambda) = \det\begin{pmatrix} (\lambda-\lambda_0)I_d & -B \\ 0 & \lambda I_{n-d} - C \end{pmatrix} = (\lambda-\lambda_0)^d f(\lambda).$$

其中 λ_0 在 $\chi_G(\lambda)$ 中的重数 $\geq d$，于是：

$$\chi_G(\lambda) = \det(\lambda I - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(\lambda I - A)P) = \chi_A(\lambda).$$

即得结论.

Lemma 1.3.1

若 $A \sim B$，则 $\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)$，即特征多项式是相似不变量，且特征值以及其代数重数也都是.

Example 1.3.1

以下两个矩阵说明上述不是完全不变量：$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Lemma 1.3.2

特征值的几何重数是相似不变量.

Proof: 记 A, B 关于特征值 λ 的子空间分别为 V_λ^A, V_λ^B.，需证 $\dim V_\lambda^A = \dim V_\lambda^B$.
任取 V_λ^A 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_d$

$$A\alpha_i = \lambda\alpha_i \Rightarrow P^{-1}BP\alpha_i = \lambda\alpha_i.$$

即 $P\alpha_1, P\alpha_2, \cdots, P\alpha_d$ 都是 B 关于 λ 的特征向量. 断言其线性无关.

$$\sum_{i=1}^d k_i P\alpha_i = 0 \iff P(\sum_{i=1}^d k_i\alpha_i) = 0.$$

于是得到 $\dim V_\lambda^B \geq \dim V_\lambda^A$，同理有 $\dim V_\lambda^A \geq V_\lambda^B$，于是 A, B 关于 λ 有相同的几何重数.

Proposition 1.3.2

$A \in M_n(\mathbb{C})$，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值，则

$$\det A = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n, \operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

Proof: 考虑 $\chi_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$，则

$(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ 是常数项.

$-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)$ 是 λ^{n-1} 的系数.

令 $\lambda = 0$ 即得结论.

Proposition 1.3.3

$\chi_A(\lambda)$ 中 λ_{n-k} 的系数 $= (-1)^k \sum k$ 阶主子式.（上条可视作本条的特殊情况）

这是很重要的一个命题，具体证明可以看上册书 P266.

Remark 1.3.1

特征向量不是相似不变量.

1.4 矩阵可对角化的条件

Definition 1.4.1 对角化

若方阵 $A \in M_n(\mathbb{K})$ 相似于一个对角阵，则称其可对角化.

由定义，立刻可得如下命题：

Proposition 1.4.1

A 可对角化 $\iff$ 存在 K^n 的一组基为 A 的特征向量.

下面我们有一个比较重要的命题

Proposition 1.4.2

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 是 A 的 s 个特征值，已知：

$$\begin{aligned} &\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_A \text{ 是 } \lambda_1 \text{ 的特征向量} \\ &\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_b \text{ 是 } \lambda_2 \text{ 的特征向量} \\ &\quad \vdots \\ &\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_c \text{ 是 } \lambda_s \text{ 的特征向量} \end{aligned}$$

则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_A, \beta_1, \cdots, \beta_b, \cdots, \gamma_1, \cdots, \gamma_c$ 线性无关.

Proof: 设 $\alpha = \sum_{i=1}^a k_i\alpha_i, \beta = \sum_{i=1}^b l_i\beta_i, \cdots, \gamma = \sum_{i=1}^c m_i\gamma_i$ 有如下等式：

$$\begin{aligned} 0 &= A(\alpha + \beta + \cdots + \gamma) = \lambda_1\alpha + \lambda_2\beta + \cdots + \lambda_s\gamma \\ &= \lambda_s(\alpha + \beta + \cdots + \gamma) \end{aligned}$$

对 s 用数学归纳法易得：$k_i = l_j = \cdots = m_p = 0$

Corollary 1.4.1

$A \in M_n(\mathbb{K})$ 可对角化 $\iff$ $\chi_A(\lambda)$ 在 $\mathbb{K}$ 中有 n 个根 (包括重数)，且每个特征值的几何重数与代数重数相等.

Theorem 1.4.1

对于**可对角化**的矩阵而言，特征值是其相似**完全不变量**，且相似标准型 $\operatorname{diag}\{\lambda_i\}$ 在相差对角线元素置换的意义下是唯一的.

1.5 实对称矩阵的对角化

Proposition 1.5.1

实对称矩阵 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 的特征多项式一定有 n 个实根.

Proof: 由代数学基本定理，$\chi_A(\lambda)$ 有 n 个复根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，对应的复特征向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，即：

$$A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i$$

对其取共轭，得到:

$$\overline{A\alpha_i} = \overline{\lambda_i \alpha_i}.$$

在两侧同时乘以 α_i 的转置，得到：

$$\alpha_i^T A \overline{\alpha_i} = \overline{\lambda_i} \alpha_i^T \overline{\alpha_i} \Rightarrow \left(\lambda_i - \overline{\lambda_i}\right) \alpha_i^T \overline{\alpha_i}.$$

记 $\alpha_i = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n$，于是

$$\alpha_i^T \overline{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0.$$

则得到结论 $\lambda_i = \overline{\lambda_i}$，也即 $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Lemma 1.5.1

实对称矩阵的不同特征值对应的特征向量彼此**正交**.

Proof: 任取实对称矩阵 A 的两个不同特征值 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$，对应特征向量为 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^n$

$$\lambda_1(\alpha_1^T \alpha_2) = (\lambda_1 \alpha_1)^T \lambda_2 = (A\lambda_1)^T \lambda_2 = \alpha_1^T A \alpha_2 = \alpha_1^T (\lambda_2 \alpha_2) = \lambda_2(\alpha_1^T \alpha_2).$$

又因 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，得到结论

$$(\alpha_1, \alpha_2) = 0.$$

Theorem 1.5.1

对任意实对称矩阵，一定能找到正交矩阵 $P \in O_n(\mathbb{R})$ 使得：

$$P^{-1}AP = P^T AP = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}.$$

Proof: 对 A 的阶数 n 用数学归纳法：
当 $n = 1$ 时，$A = (a), (1)^{-1}(a)(1) = (a)$
归纳假设结论对 $n - 1$ 成立，考虑 n 的情况：
任取 A 的特征值 $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, 对应特征向量 $\eta_1 \in \mathbb{R}^n$ 扩充成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 $\{\eta_i\}$
由 $Gram$ 正交化过程得到标准正交基 $\{\xi_i\}$ ，记：

$$T = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \end{pmatrix} \in O_n(\mathbb{R}).$$

用 A 作用 T 得到：

$$\begin{aligned} AT &= \begin{pmatrix} \lambda_1\xi_1 & * & \cdots & * \end{pmatrix} \\ &= T\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \text{B} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \\ \Rightarrow T^{-1}AT &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \text{B} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

由归纳假设，存在 $Q \in O_{n-1}(\mathbb{R})$ 使得

$$Q^{-1}BQ = \mathrm{diag}\{\lambda_2, \cdots, \lambda_n\}.$$

于是结论成立.

Remark 1.5.1

正交化过程实际上是为了使得同一特征值对应的特征向量两两正交.

Proposition 1.5.2

A 有 n 个两两不同的特征值 $\Rightarrow A$ 可对角化.

这是十分强的一个条件，往往我们遇到的矩阵不具有那么好的性质.

Definition 1.5.1 正交相似

$A, B \in M_n(\mathbb{R})$ 若存在正交矩阵 $P \in O_n(\mathbb{R})$ 使得 $A = P^{-1}BP$，则称 **A 正交相似于 B**.

正交相似在实对称矩阵（和二次型相关）部分是很重要的性质：

Lemma 1.5.2

对实对称矩阵 A, B：

$$A \overset{\text{正交相似}}{\sim} B \iff A \overset{\text{相似}}{\sim} B$$

Proof: $(\Leftarrow)$ 首先有：

$$\begin{aligned} A \overset{\text{相似}}{\sim} diag\{\lambda_i\} \overset{\text{相似}}{\sim} B \Rightarrow A &= PQ^{-1}BQP^{-1} \\ &= (QP^{-1})^{-1}B(QP^{-1}). \end{aligned}$$

$$\text{其中：} QP^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$$

$(\Rightarrow)$ 显然.

Lemma 1.5.3

$A \in M_n(\mathbb{R})$ 正交相似于对角矩阵 $\iff A$ 是对称矩阵.

Proof: (⇒)

$$A = P^{-1}diag\{\lambda_i\}P = P^T diag\{\lambda_i\}P$$
$$\Rightarrow A^T = P^T diag\{\lambda_i\}P = A$$

(⇐) 由定义显然.

*1.6 广义逆矩阵

Definition 1.6.1 广义逆矩阵

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$，若 $B \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ 满足 $ABA = A$，则称 B 是 A 的一个**广义逆矩阵**，记 $B = A^-$.

之所以称为广义的，就是把不可逆矩阵和非方阵的矩阵都推广出一个逆.

Proposition 1.6.1

对任意矩阵 A，A^- 一定存在，但不唯一.

Proof: 对 A 做相抵变换：

$$A = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$$

其中 $r = \mathrm{rank}(A), P \in GL_m(\mathbb{K}), Q \in GL_n(\mathbb{K})$.，于是有

$$P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}QBP\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$$

记 $QBP = \widetilde{B} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$，其中分块满足运算法则，满足：

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\widetilde{B}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是一定存在 $B = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$ 满足 $ABA = A$.

Theorem 1.6.1

非齐次线性方程组 $AX = \beta$有解 $\iff$ $\beta = AA^-\beta$.

Proof: (⇐) 取 $X = A^-\beta$，即为 $AX = \beta$ 的解.

(⇒) 任取 $AX = \beta$ 的一组解 X_0

$$AX_0 = \beta \Rightarrow AA^-AX_0 = \beta \Rightarrow AA^-\beta = \beta.$$

Theorem 1.6.2

若非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 有解，则通解为：

$$X = A^{-}B, (A^{-}\text{取遍所有广义逆}).$$

Proof: 见上册书 P252.

Lemma 1.6.1

若 λ 是 A 的一个特征值，对应的特征向量 α，对任意的 $f(x)\in\mathbb{K}[x]$，一定有

$$f(A)\alpha = f(\lambda)\alpha.$$

Proof: 将 f 展开立得结论.

Remark 1.6.1

λ_0 作为 A 的特征值的几何重数与 $\dfrac{1}{\lambda_0}$ 作为 A^{-1} 的几何重数一致.

Proof: 任取 $V_{\lambda_0}^{A}$ 的一个元素 α:

$$A\alpha = \lambda_0\alpha \Rightarrow \frac{1}{\lambda_0}\alpha = A^{-1}\alpha.$$

也即

$$\alpha \in V_{\frac{1}{\lambda_0}}^{A^{-1}} \Rightarrow V_{\lambda_0}^{A} \subset V_{\frac{1}{\lambda_0}}^{A^{-1}}.$$

同理有

$$V_{\frac{1}{\lambda_0}}^{A^{-1}} \subset V_{\lambda_0}^{A}.$$

于是一致性得证.

Chapter 2

二次型

2.1 二次型及其标准型

Definition 2.1.1 二次型

定义在 $\mathbb{K}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 中的**齐二次**多项式称为**二次型**，只含完全平方项的二次型称为**标准型**.

$$f = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + \cdots + a_{nn}x_n^2.$$

记 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T, Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1_n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2_n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{称为度量矩阵.}$$

有 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^TAX$.

若存在 $T \in GL_n(\mathbb{K})$ 使得 $X = TY$，称为从 X 到 Y 的**非退化变量替换**.

Definition 2.1.2 矩阵的相合

$A, B \in M_n(\mathbb{K})$，若存在 $P \in GL_n(\mathbb{K})$ 使得 $A = P^TBP$，则称 A与B 是**相合（合同）**的，记作 $A \overset{\text{相合}}{\sim} B$.

Lemma 2.1.1

对变量 X 作非退化线性变换得到的度量矩阵与原来的度量矩阵**相合**.

Theorem 2.1.1

实二次型 $f = X^TAX$ 一定可以通过非退化线变量替换 $X = TY$ 化为标准型

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

其中 λ_i 是 A 的 n 个特征值.

Proof: 只需证：任意对称矩阵一定相合于某个对角矩阵，见 2.2 证明.

二次型的标准型并不唯一.

Remark 2.1.1

对于有完全平方项的二次型，可以直接进行配方得到某个标准型，无完全平方项可任取两个交错项进行类平方差公式的变量替换，化为前者.

Theorem 2.1.2

任意数域 $\mathbb{K}$ 上的对称矩阵，一定可相合与对角矩阵，即任意数域上的二次型一定可以化为标准型.

Proof: 任取 $A=(a_{ij})$ 为对称矩阵，考虑对 n 进行归纳：

(i) 结论平凡，假设对 $n-1$ 成立：

(ii) 若 $A=0$ 结论平凡，考虑 $A\neq 0$，不妨设 $a_{11}\neq 0$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ \alpha & B \end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix} 1 & -a_{11}\alpha^T \\ 0 & I \end{pmatrix}, P^TAP=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

其中 C 为 $n-1$ 阶对称阵，于是结论成立.

Proposition 2.1.1

同一个二次型可化为不同标准型，但标准型中平方项前的非零系数个数（即度量矩阵的秩）是不变的. 也就是说：秩是矩阵的相合不变量.

2.2 复二次型和实二次型

对于复二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,c_n)=X^TAX$，任取标准型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_1y_1^2+a_2y^2+\cdots+a_ny_n^2$. 其中仅 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 非零，再取非退化线性变化 $z_i=\begin{cases}\sqrt{a_i}y_i & a_i\neq 0\\ y_i & a_i=0\end{cases}$. 可以得到规范型：$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_r^2$.

Proposition 2.2.1

对复对称矩阵而言，矩阵的秩是相合关系下的完全不变量.

$f(x_1,x_2,\cdots,c_n)=X^TAX$,任取标准型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_1y_1^2+a_2y^2+\cdots+a_ny_n^2$. 其中 $a_p,a_{p+1},\cdots,a_{p+q}<0$，于是有非退化线性变换：$z_i=\begin{cases}\sqrt{a_i}y_i & a_i>0\\ \sqrt{-a_i}y_i & a_i<0\\ y_i & a_i=0\end{cases}$，使得 $A\sim\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0\end{pmatrix}, p+q=r=rank(A)$

Definition 2.2.1 惯性指数

在上述标准型中：p 称为正惯性指数，q 称为负惯性指数，记录 $s=p-q$ 称为符号差.

对给定的任意矩阵，正负惯性指数，秩和符号差都是唯一确定的，也就是说 p,q,r,s 中任意两个做组合都是实对称矩阵的相合不变量.

2.3 正定二次型，正定矩阵

Definition 2.3.1 正定

实二次型 $f=X^TAX$ 称为正定的（positive definite）若成立 $\forall\alpha\in\mathbb{R}^n$，都有 $\alpha^TA\alpha>0$.
此时实对称矩阵 A 称为**正定矩阵**.

正定矩阵和正定二次型是等价的概念.

Proposition 2.3.1

给定实二次型 $f = X^TAX$，则如下命题等价.

$$\begin{aligned}\text{实对称矩阵}A \in M_n(\mathbb{R})\text{正定} &\iff \text{正惯性指数为}n;\\ &\iff A \overset{\text{相合}}{\sim} I_n;\\ &\iff A\text{的}n\text{个特征值全为正数};\\ &\iff f\text{的规范型为}f = y_1^2 + \cdots + y_n^2;\\ &\iff f\text{的任意标准型系数均大于 }0.\end{aligned}$$

Proof: 只需证第一条.

$(\Rightarrow)$ 反设正惯性指数 $p < n$，则有规范型 $f = z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_n^2$，取 e_{p+1} 则推出矛盾.

$(\Leftarrow)$ 已知正惯性指数 n，有非退化线性变换 $X = TY$ 使得 $f = y_1^2 + \cdots + y_n^2$，显然成立.

Lemma 2.3.1

实对称矩阵 A 正定，则与其相合的矩阵也是正定的.

Proof: 任取 $B = T^TAT(T \in GL_n(\mathbb{R}))$，则对 $\forall 0 \neq \alpha \in \mathbb{R}^n$，有

$$\alpha^TB\alpha = (T\alpha)^TA(T\alpha) > 0$$

即 B 正定.

Proposition 2.3.2

实对称矩阵 A 正定 $\iff$ A 的所有顺序主子式都为正数 $\iff$ A 的所有主子式都为正数.

Proof: 只证前半部分.

$(\Rightarrow)$ 已知 A 正定，记：

$$A = \begin{pmatrix} A_k & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

其中 A_k 是 A 的顺序主子式，他们是实对称矩阵.

任取 $\alpha_0 \in \mathbb{R}^k$，扩充为 $\alpha = (\alpha_0^T, 0, \cdots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$ ，于是有：

$$\alpha^TA\alpha = \alpha_0^TA_k\alpha_0 > 0 \Rightarrow A_k\text{正定} \Rightarrow |A_k| > 0.$$

$(\Leftarrow)$ 对 n 用数学归纳法:$n = 1$ 显然成立，归纳假设结论对 $n-1$ 成立，考虑 n 的情况.

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

则 A_{n-1} 的所有顺序主子式正定，存在 $T \in GL_{n-1}(\mathbb{R})$ 使得 $T^TA_{n-1}T = I_{n-1}$

$$A \overset{\text{相合}}{\sim} \begin{pmatrix} T^T & \\ & 1 \end{pmatrix} A_{n-1} \begin{pmatrix} T & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^TAT & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & * \\ * & * \end{pmatrix} \overset{\text{相合}}{\sim} \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} := B$$

又 $|A| > 0 \Rightarrow |B| > 0$，即 $b > 0$

Definition 2.3.2 半正定

实对称矩阵 A 称为**半正定矩阵**，若成立 $\forall\alpha\in\mathbb{R}^n$，都有 $\alpha^TA\alpha\geq 0$. 类似的，我们可以定义**负定**与**半负定**；不能归纳进这四种的称为**不定**.

Lemma 2.3.2

A 负定 $\iff -A$ 正定；A 半负定 $\iff -A$ 半正定.

负定与正定的等价条件相差不大，值得注意的是如下这条：

Proposition 2.3.3

A 负定 $\iff A$ 的奇数阶顺序主子式都为负，偶数阶都为正.

造成这一性质与正定差异的原因很简单，就是 $(-1)^n$ 的正负.

2.4 半正定二次型，半正定矩阵

定义已在上面给出，下面讨论其等价条件.

Proposition 2.4.1

给定实二次型 $f=X^TAX$，则如下命题等价.

$$\begin{aligned}\text{实对称矩阵}A\in M_n(\mathbb{R})\text{半正定} &\iff \text{负惯性指数为0;}\\ &\iff A\overset{\text{相合}}{\sim} I_r, r<n;\\ &\iff A\text{的特征值全为非负数;}\\ &\iff f\text{的规范型为}f=y_1^2+\cdots+y_r^2;\\ &\iff f\text{的任意标准型系数均非负;}\\ &\iff A\text{的所有主子式非负.}\end{aligned}$$

Proof: 只证最后一条

($\Rightarrow$) 任取 A 的主子矩阵 $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_s \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_s\end{pmatrix}$ 任取 $\alpha_0\in\mathbb{R}^s$，扩充 $\alpha=(0,\cdots,a_{i_1},0,\cdots,0,a_{i_s},\cdots)\in\mathbb{R}^n$

其余同 4.3.2

($\Leftarrow$) 只需证特征值均为非负数，考虑特征方程.

$$\chi_A(\lambda)=\lambda^n-b_1\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^kb_k\lambda^{n-k}+\cdots+(-1)^nA|$$

其中 $b_k\geq 0$ 是 k 阶主子式之和. 反设有负根 $-c,(c>0)$

$$\begin{aligned}\chi_A(-c)&=(-c)^n-b_1(-c)^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|\\ &=(-1)^n(c^n+b_1c^{n-1}+\cdots+|A|)\neq 0\end{aligned}$$

得到矛盾，于是结论成立.

Chapter 3

线性空间

3.1 有限维线性空间

Definition 3.1.1 过渡矩阵

有限维空间的两组基向量 $\{\xi_i\}\{\eta_i\}$ 满足:

$$\xi_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\eta_i, i = 1, 2, \cdots, n$$

记为：$\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix} A$，其中 $A = (a_{ij})$ 称为从 $\{\eta\}$ 到 $\{\xi\}$ 的**过渡矩阵**.

过渡矩阵实现一组基到一组基的变换，在几何里面用到的过渡矩阵一般是坐标到坐标.

Proposition 3.1.1

(1) 过渡矩阵一定可逆

(2) 可逆矩阵一定可以充当过渡矩阵.

Proof: (1) 考虑 0 向量的线性组合构成方程组，由线性无关推出零解，也即系数矩阵可逆.
(2) 要证明 $\forall A \in GL_n(\mathbb{F})$，对一组基 $\{\eta_i\}$，$\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix} A$ 中的 $\{\xi_i\}$ 也构成一组基，反推 (1) 即可得到.

3.2 子空间及其和与直和

Definition 3.2.1 子空间

$(V, +, \cdot)$ 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，如果 $\varnothing \neq W \subset V$ 在 V 的加法和数乘下也构成一个线性空间，则称 W 是 V 的子（线性）空间.

定义了子空间，我们需要考虑子空间之间的运算，最常见的是并与交，我们有如下命题.

Proposition 3.2.1

任意子空间的交仍是子空间.

Proof: 结论平凡.

子空间的并一般不是子空间，因此我们需要引入一个计算来代替”并”

Definition 3.2.2 子空间的和

W, U 是 V 的子空间，记

$$W + U = \{\alpha + \beta | \alpha \in W, \beta \in U\}$$

可验证其为 V 的子空间，称为两个子空间的**和** (sum).

与无交并类似的，我们可以定义一种“无交的”和.

Definition 3.2.3 子空间的直和

W,U 是 V 的子空间，若 $\forall \alpha \in W+U$ 都只能唯一分解为 $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1 \in W, \alpha_2 \in U$，则称 $W+U$ 是一个**直和** (direct sum)，记为 $W \oplus U$.

Proposition 3.2.2

直和具有如下的性质：

$$\begin{aligned} W+U\text{是直和} &\iff 0 \in W+U\text{唯一分解为}0=0_W+0_U; \\ &\iff W \cap U = 0; \\ &\iff dim(W+U)=dim(W)+dim(U); \\ &\iff W\text{的一组基合并}U\text{的一组基构成}W+U\text{的一组基}. \end{aligned}$$

证明较为容易，读者可自行验证.

Remark 3.2.1 （泛性）

子空间的和是同时包含两个子空间的最小子空间.

Proposition 3.2.3 直和

$\sum\limits_{i=1}^{s} V_i$ 是直和 $\iff 0_1+0_2+\cdots+0_s=0 \in \sum\limits_{i=1}^{s} V_i$，其中 0_i 是 V_i 中的零元.

3.3 线性空间的同构

Definition 3.3.1 同态与同构

给定 V,W 是域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，若 $\mathscr{A}: V \to W$ 保加法和数乘，则称 $\mathscr{A}$ 是 V 到 W 的一个线性映射，也称 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V 到 W 的一个**同态** (homomorphism); 进一步，若 $\mathscr{A}$ 是双射，则称其为 V 到 W 的一个**同构** (isomorphism).

Lemma 3.3.1

若 $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V,W)$, 则 $\mathscr{A}(0)=0$.

Proof: $\mathscr{A}(0)=A(0\cdot\alpha)=0\cdot\mathscr{A}(\alpha)=0.$

Proposition 3.3.1

$\mathscr{A} \in \mathrm{Hom}(V,W)$ 是同构映射 $\iff \exists \mathscr{B} \in \mathrm{Hom}(W,V)$ 使得 $\mathscr{A}\circ\mathscr{B}=id_W, \mathscr{B}\circ\mathscr{A}=id_V$.

Proof: $(\Rightarrow)$ 从基的角度来证. $(\Leftarrow)$ 实际上只需证明 $\mathscr{A}$ 是满射.

Remark 3.3.1

$\mathbb{F}$ 上线性空间的同构是 $\mathbb{F}$ 上线性空间范畴的一个等价关系，$V \simeq W \iff dimV=dimW$，即维数是线性空间同构的**完全不变量**.

Theorem 3.3.1

有限域的元素个数一定是素数的幂次.

Proof: 设 $\mathbb{F}$ 是有限域，断言 $char\mathbb{F} = q$ 为素数.
首先显然 q 非零，否则不是有限域; 下证 q 为素数，反设 $q = mn, 1 < m, n < q$:

$$q \cdot 1_{\mathbb{F}} = 0 \iff (m \cdot 1_{\mathbb{F}})(n \cdot 1_{\mathbb{F}}) = 0$$

得出矛盾，于是 q 为素数；下证元素个数为素数，考虑：

$$\mathbb{F}_q = \{0, 1_{\mathbb{F}}, 2 \cdot 1_{\mathbb{F}}, \cdots, (q-1)1_{\mathbb{F}}\}$$

断言其为一个域，容易验证其对加法与乘法封闭，只需证明非零元均可逆，利用裴蜀等式：

$$\forall 1 < k < q-1, (k, q) = 1, \exists u, v \in \mathbb{Z}, s.t. uk + vq = 1.$$

由特征 q 可使 $u \in (0, q)$，于是 u 为 k 的逆元.
在 $\mathbb{F}$ 中可引入 $\mathbb{F}_q$ 上的线性结构，加法是 $\mathbb{F}$ 自带的加法，数乘由 $\mathbb{F}$ 上的乘法诱导，可验证线性空间公理，即 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上的有限维线性空间，取 $\mathbb{F}$ 作为 $\mathbb{F}_q$ 上线性空间的一组基 $\{\eta_i\}_{i=1}^n$，则：

$$\mathbb{F} = \{k_1\eta_1 + \cdots + k_n\eta_n | k_1, \cdots, k_n \in \mathbb{F}_q\}$$

易得 $\mathbb{F}$ 中有 q^n 个元素.

Definition 3.3.2 外直和

V, W 都是域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，定义外直和：$V \times W = \{(\alpha, \beta) | \alpha \in V, \beta \in W\}$，引入 V, W 的加法和数乘，可验证其为线性空间.

3.4 商空间

Definition 3.4.1 商集

V 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，有子空间 $W \subset V$，在 V 上定义关系：$\alpha \sim \beta \iff \alpha - \beta \in W$，可验证其为 V 上的等价关系，记商集 V/W，引入加法和数乘：$(\alpha + W) + (\beta + W) = (\alpha + \beta) + W, k(\alpha + W) = k\alpha + W$.

商空间的元素也称为**陪集**，在大二的代数学/近世代数/抽象代数课上会进一步研究.

Proposition 3.4.1

子空间 W 在 V 中的**余维数** $\operatorname{co\,dim} W = \dim V/W = \dim V - \dim W$

Definition 3.4.2 典范映射

记映射 $\pi : V \to V/W, \alpha \mapsto \alpha + W$ 为 $V \to V/W$ 的**典范映射** (canonical map).

一个很有趣的说法：典范映射就是你随便去找两个数学家，他们会给出的相同映射构造.

Proposition 3.4.2

任意子空间都有补空间.

Proof: 对线性空间 V 与其子空间 W，商空间 V/W 有一组基 α_i+W，断言 $U=\mathrm{span}\{\alpha_i\}$ 为 W 在 V 中的补空间，也即 $W\oplus U=V$.

Theorem 3.4.1 线性映射的第一同态基本定理

对线性映射 $\mathscr{A}:V\to W$，有 $\mathrm{Im}\,\mathscr{A}\simeq V/\mathrm{Ker}\mathscr{A}$.

Proof: 定义映射：$\varphi:V/\mathrm{Ker}\mathscr{A}\to\mathrm{Im}\,\mathscr{A},\alpha+\mathrm{Ker}\mathscr{A}\mapsto\mathscr{A}(\alpha)$. 容易验证其为线性映射且为双射.

Theorem 3.4.2 线性映射的第二同态基本定理

给定 U,W 为线性空间 V 的子空间，成立：$(U+W)/W\simeq U/(U\cap W)$.

Proof: 构造 $\varphi:U\to(U+W)/W,\alpha\mapsto\alpha+W$, 容易验证线性性，断言 $\mathrm{Ker}\varphi=U\cap W$.
$\forall\alpha\in\mathrm{Ker}\varphi,\varphi(\alpha)=\alpha+W=W\Rightarrow\alpha\in W\Rightarrow\mathrm{Ker}\varphi\subset U\cap W$，反向显然，于是断言成立.
下证 $\mathrm{Im}\,\varphi=(U+W)/W:\forall\alpha\in U,\beta\in W$满足$\alpha+\beta+W\in(U+W)/W$ 有 $\varphi(\alpha)=\alpha+W=\alpha+\beta+W$.
于是 φ 是满射. 最后由第一同态基本定理结论成立.

Theorem 3.4.3 线性映射的第三同态基本定理

给定 $U\subset W$ 为 V 的子空间，成立 $V/W\simeq(V/U)/(W/U)$.

证明类似第二同态定理.

Chapter 4

线性映射

4.1 线性映射及其运算

Definition 4.1.1 线性映射

V,W 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，若映射 $\mathscr{A}:V\to W$ 保加法和数乘，称 $\mathscr{A}$ 为 V 到 W 的**线性映射**.
特别地，当 $W=\mathbb{F}$ 时，称 $\mathscr{A}:V\to\mathbb{F}$ 为**线性函数**; 当 $W=V$ 时，称 $\mathscr{A}:V\to V$ 为**线性变换**.

$V\to W$ 的全体线性映射记为 $\mathrm{Hom}(V,W)$; **对偶空间**：$V^*:=\mathrm{Hom}(V,\mathbb{F})$; **自同态**：$\mathrm{End}(V)=\mathrm{Hom}(V,V)$.
在 $\mathrm{Hom}(V,W)$ 上可以引入自然的加法和数乘.

Proposition 4.1.1

$\dim V=m,\dim W=n$, 则 $\dim\mathrm{Hom}(V,W)=mn$

Proof: 取 V 的一组基 $\{\eta_i\}$，W 的一组基 $\{\xi\}$:
构造 $\psi_{ij}:V\to W,\eta_i\mapsto\xi_j;\eta_k\mapsto 0(\forall k\neq i)$，即 $\psi_{ij}(\eta_k)=\delta_{ik}\xi_j$
断言 $\{\psi_{ij}|i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m\}$ 构成 $\mathrm{Hom}(V,W)$ 的一组基.

(1) 设 $\sum\limits_{i,j}a_{ij}\psi_{ij}=0\Rightarrow\sum\limits_{i,j}a_{ij}\psi_{ij}(\eta_k)=\sum\limits_{j}a_{kj}\xi_j\Rightarrow a_{ki}=0.$

(2) $\forall\mathscr{A}\in\mathrm{Hom}(V,W)$，设 $\mathscr{A}(\eta_i)=\sum\limits_{j}a_{ij}\xi_j$，有 $\mathscr{A}=\sum\limits_{i,j}a_{ij}\xi_{ij}.$

于是断言成立.

考虑线性映射：$\mathscr{A}:V\to W,\mathscr{B}:W\to U$，复合运算 $\circ:\mathscr{A}\circ\mathscr{B}\in\mathrm{Hom}(V,U)$，于是有：

$$\mathrm{End}(V)\circ\mathrm{End}(V)=\mathrm{End}(V)$$

定义其为乘法，有 $\mathrm{End}(V)$ 在加法，数乘，乘法下都封闭，且含有幺元 Id_V，于是 $\mathrm{End}(V)$ 构成**含幺环**.

Definition 4.1.2 代数

给定集合 A，数域 $\mathbb{K}$，若 A 上有三个运算 $+,\times,\circ$ 满足

(1) $(A,+,\times)$ 为线性空间;

(2) $(A,+,\circ)$ 为含幺环;

(3) $\forall k\in\mathbb{K};x,y\in A,k(xy)=(kx)y=x(ky).$

则称 A 是 $\mathbb{K}$ 上的一个（结合）**代数 (Algebra)**.

Definition 4.1.3 投影映射

给定线性空间 $V=U\oplus W$，给定映射 $\mathscr{P}_W:V\to V(W),\alpha\mapsto\alpha_W$. 可验证其为线性变换 (保加法和数乘)，称为平行于 U 在 W 上的**投影映射**.

Proposition 4.1.2

$\mathscr{P}_W = \begin{cases} \alpha & \alpha \in W \\ 0 & \alpha \in U \end{cases}$ 决定了唯一的投影映射.

Proof: 只需证明一组基上的映射即可.

Definition 4.1.4 幂等映射

若 $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$ 满足：$\mathscr{A}^2 = \mathscr{A}$，则称 $\mathscr{A}$ 为一个幂等映射.

不难得到投影映射是幂等映射，反过来有如下命题：

Proposition 4.1.3

任何幂等映射可以视作一个投影映射.

Proof: 给定幂等映射 $\mathscr{A}: V \to V$，断言 $V = \mathrm{Im}\,\mathscr{A} \oplus \mathrm{Ker}\,\mathscr{A}$. 先证明交为 0: $\forall \alpha \in \mathrm{Im}\,\mathscr{A} \cap \mathrm{Ker}\,\mathscr{A}$，$\mathscr{A}(\alpha) = 0$ 由线性性成立.$\dim V = \dim \mathrm{Im}\,\mathscr{A} + \dim \mathrm{Ker}\,\mathscr{A}$ 则 $V / \mathrm{Ker}\,\mathscr{A} = \mathrm{Im}\,\mathscr{A}$. 事实上：$\mathscr{A} = \mathscr{P}_{\mathrm{Im}\,\mathscr{A}}$

Proposition 4.1.4

$V = U \oplus W$，有 $\mathscr{P}_W + \mathscr{P}_V = id_V, \mathscr{P}_W \mathscr{P}_U = \mathscr{P}_U \mathscr{P}_W = 0$.

自行验证即可.

Definition 4.1.5 对合映射

给定映射 $\sigma \in \mathrm{End}(V)$ 满足 $\sigma^2 = id_V$，称为一个**对合映射 (ivolution)**.

给定 $V = W \oplus U$，定义映射 $\mathscr{F}_{W,U}: V \to V, \alpha \mapsto -\alpha(\forall \alpha \in U), \beta \mapsto \beta(\forall \beta \in W)$.

Proposition 4.1.5

任意对和映射可实现为 $\mathscr{F}_{W,U}$.

Proof: $(\sigma + id)(\sigma - id) = 0$ 断言 $V = \mathrm{Ker}(\sigma + id) \oplus \mathrm{Ker}(\sigma - id)$，做分解 $\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \sigma(\alpha)) + \frac{1}{2}(\alpha - \sigma(\alpha))$ 容易验证 $V = \mathrm{Ker}(\sigma + id) + \mathrm{Ker}(\sigma - id)$.

$\forall \alpha \in \mathrm{Ker}(\sigma + id) \cap \mathrm{Ker}(\sigma - id)$ 有 $\begin{cases} (\sigma + id)(\alpha) = 0 \\ (\sigma - id)(\alpha) = 0 \end{cases}$ 作差即得 $id(\alpha) = 0 = \alpha$.

4.2 像与核

Definition 4.2.1

给定 $\mathscr{A}: V \to W$ 定义：

$$\text{像空间}\ \mathrm{Im}\,\mathscr{A} = \{\mathscr{A}(\alpha) | \alpha \in V\} \subset W$$

$$\text{核空间}\ \mathrm{Ker}\,\mathscr{A} = \{\alpha \in V | \mathscr{A}(\alpha) = 0\} \subset V$$

$$\text{余核}\ \mathrm{coker}\,\mathscr{A} = W / \mathrm{Im}\,\mathscr{A}$$

Proposition 4.2.1

$\mathscr{A}$ 是单同态 $\iff$ $\mathrm{Ker}\,\mathscr{A} = 0$；$\mathscr{A}$ 是满同态 $\iff$ $\mathrm{coker}\,\mathscr{A} = 0$.

验证较为容易，读者自行解决.

Proposition 4.2.2

若 $\dim W = \dim V$，则 $\mathscr{A}$ 是单同态 $\iff$ $\mathscr{A}$ 是满同态.

Proof: $(\Rightarrow)$ 考虑 V 的一组基：$\{\eta_i\}$ ，设 $\sum k_i \mathscr{A}(\eta_i) = 0 \Rightarrow \mathscr{A}(\sum k_i \eta_i) = 0 \Rightarrow \sum k_i \eta_i = 0 \Rightarrow k_i = 0 \Rightarrow \mathscr{A}(\eta_i)$ 是一组基 $\Rightarrow \mathscr{A}$ 满.

$(\Leftarrow)$ $\dim \mathrm{Im}\,\mathscr{A} = \dim W = \dim V = \dim V - \dim \mathrm{Ker}\,\mathscr{A} \Rightarrow \dim \mathrm{Ker}\,\mathscr{A} = 0 \Rightarrow \mathscr{A}$ 单.

4.3 线性映射的矩阵表示

给定 $\mathscr{A}: V \to W$，分别取 V, W 的一组基 $\{\eta_i\}_{i=1}^n, \{\xi_j\}_{j=1}^m$，设对 $i = 1, 2, \cdots, n$ 有：

$$\mathscr{A}(\eta_i) = a_{1i}\xi_1 + a_{2i}\xi_2 + \cdots + a_{mi}\xi_m$$

记 $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$，有 $\mathscr{A}\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_m\end{pmatrix} A$ 存在一个自然的线性同构：

$$\varphi: \mathrm{Hom}(V, W) \to M_{m\times n}(\mathbb{F}), \mathscr{A} \mapsto A$$

Remark 4.3.1

这个同构映射取决于基的选取.

接下来，我们考虑线性映射的复合的性质.

Proposition 4.3.1

设 V, W, U 的基分别为 $\{\eta_i\}_{i=1}^n \{\xi_j\}_{j=1}^m \{\zeta_k\}_{k=1}^p$，有线性映射 $\mathscr{A}: W \to U, \mathscr{B}: V \to W$，满足

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\zeta_1 & \zeta_2 & \cdots & \zeta_p\end{pmatrix} A$$

$$\mathscr{B}\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_m\end{pmatrix} B$$

$$\mathscr{A}\circ\mathscr{B}\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\zeta_1 & \zeta_2 & \cdots & \zeta_p\end{pmatrix} C$$

其中，$A \in M_{p\times m}(\mathbb{F}), B \in M_{m\times n}(\mathbb{F}), C \in M_{p\times n}(\mathbb{F})$，则有 $C = AB$.

当 $W=V$ 时，先前提到的线性同构变为

$$\varphi:\mathrm{End}(V)\to M_n(\mathbb{F})$$

Lemma 4.3.1

$\varphi(id_V)=I_n$，$\varphi(0)=0$，且 φ 把幂零变换映成幂零变换.

Definition 4.3.1 过渡矩阵

取 V 中的两组不同的基 $\{\eta_i\},\{\eta_i'\}$，矩阵 P 满足

$$\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_1' & \eta_2' & \cdots & \eta_n'\end{pmatrix}P$$

称 P 为从基 $\{\eta_i\}$ 到 $\{\eta_i'\}$ 的**过渡矩阵**.

我们可定义线性变换 $\mathscr{A}$ 的迹，秩和行列式，也即 A 的迹，秩和行列式，这个定义式合理的，因为迹，秩和行列式都是**相似不变量**.

Lemma 4.3.2

设 $\mathscr{A}$ 在一组基 $\{\eta\}$ 下的矩阵为 A，则 $\operatorname{rank}A=\dim\operatorname{Im}\mathscr{A}$

Proof: $\mathscr{A}\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix}A$，$\forall\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix}X\in\operatorname{Ker}\mathscr{A}$

$$0=\mathscr{A}\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix}AX\iff AX=0$$

由同态基本定理 $\operatorname{Im}\mathscr{A}\simeq V/\operatorname{Ker}\mathscr{A}$,故 $\dim\operatorname{Im}\mathscr{A}=\dim V-\dim\operatorname{Ker}\mathscr{A}$, $\operatorname{rank}A=n-$(AX=0 的解空间维数).

4.4 线性变换的特征值与特征向量

Definition 4.4.1 特征子空间

给定 $\mathscr{A}\in\mathrm{End}(V)$，若 $0\neq\alpha\in V$ 满足存在 $\lambda\in\mathbb{K}$ 使得 $\mathscr{A}(\alpha)=\lambda\alpha$，
则称 α 是 $\mathscr{A}$ 的一个特征向量，λ 是 $\mathscr{A}$ 的一个特征值.

记 $V_\lambda=\{\alpha\in V|\mathscr{A}(\alpha)=\lambda\alpha\}$ 称为 $\mathscr{A}$ 关于 λ 的特征子空间.

Lemma 4.4.1

λ 是 $\mathscr{A}$ 的特征值 $\iff$ λ 是 A 的特征值;
α 是 $\mathscr{A}$ 的特征向量 $\iff$ α 在 $\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix}$ 下的坐标是 A 的特征向量.

同样的，我们也可以定义 $\mathscr{A}$ 的特征多项式，特征值一系列概念.

4.5 不变子空间

Definition 4.5.1 不变子空间

设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，$\mathscr{A}\in\mathrm{End}\,(V)$ 若子空间 $W\subset V$ 满足 $\mathscr{A}(W)\subset W$，则称 W 是 V 关于 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

Example 4.5.1

- 0 和 V 都是 $\mathscr{A}-$ 不变子空间.（平凡情况）
- $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ 和 $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ 都是 $\mathscr{A}-$ 不变子空间

Proposition 4.5.1

不变子空间的交，和都是不变子空间.

Proof: 任取 V 的两个 $\mathscr{A}-$ 不变子空间 U, W

(交) $\forall \alpha \in U \cap W, \mathscr{A}(\alpha) \in U \cap W$

(和) $\forall \alpha = \beta + \gamma \in U + W (\beta \in U, \gamma \in W), \mathscr{A}(\alpha) = \mathscr{A}(\beta) + \mathscr{A}(\gamma) \in U + W.$

Definition 4.5.2 限制映射

$\mathscr{A} \in \operatorname{End}(V)$, W 为 V 的 $\mathscr{A}$-不变子空间。

$$\mathscr{A}|_W : \begin{array}{ccc} W & \to & W \\ \alpha & \mapsto & \mathscr{A}(\alpha) \end{array}$$

称为 $\mathscr{A}$ 在 W 上的**限制映射 (restriction)**，有 $\mathscr{A}|_W \in \operatorname{End}(W)$.

由此，我们可以诱导商空间映射，也称为诱导映射：

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathscr{A}} : V/W &\to V/W \\ \alpha + W &\mapsto \mathscr{A}(\alpha) + W \end{aligned}$$

Proposition 4.5.2

$\chi_{\mathscr{A}}(\lambda) = \chi_{\mathscr{A}|_W}(\lambda)\chi_{\widetilde{\mathscr{A}}}(\lambda).$

Proof: 任取 W 的一组基 $\eta_1, \cdots, \eta_s$ 扩充成 V 的一组基 $\eta_1, \cdots, \eta_n$

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ & A_3 \end{pmatrix}$$

$$\chi_\lambda(\mathscr{A}) = \chi_\lambda(\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ & A_3 \end{pmatrix}) = \chi_\lambda(A_1)\chi_\lambda(A_3)$$

显然 $\mathscr{A}|_W \begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix} A_1$，故

$$\chi_\lambda(\mathscr{A}|_W) = \chi_\lambda(A_1)$$

又 $\eta_{s+1} + W, \cdots, \eta_n + W$ 是 V/W 的一组基：

$$\widetilde{\mathscr{A}}\begin{pmatrix}\eta_{s+1} + W & \eta_{s+2} + W & \cdots & \eta_n + W\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\eta_{s+1} + W & \eta_{s+2} + W & \cdots & \eta_n + W\end{pmatrix} A_3.$$

同样得到

$$\chi_\lambda(\widetilde{\mathscr{A}}) = \chi_\lambda(A_3).$$

Lemma 4.5.1

W 是 V 的不变子空间，W 的基扩充成 V 的基时，$\mathscr{A}$ 在扩充后的基下表示矩阵形如 $\begin{pmatrix} * & * \\ & * \end{pmatrix}$.

Proposition 4.5.3

给定 $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$，$\mathscr{A}$ 可准对角化 $\iff V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$.

证明较为显然，依旧是考虑基就可以.

Proposition 4.5.4

V 是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，$\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$，$f(x) = f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x) \in \mathbb{F}[x]$，其中 f_i 两两互素，则有

$$\mathrm{Ker}\, f(\mathscr{A}) = \mathrm{Ker}\, f_1(\mathscr{A}) \oplus \mathrm{Ker}\, f_2(\mathscr{A}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}\, f_s(\mathscr{A}).$$

Proof: 对 s 用数学归纳法：当 $s = 1$ 时结论平凡
归纳假设结论对 $s-1$ 成立，考虑 s 的情况：记 $g(x) = f_1(x)f_2(x)\cdots f_{s-1}(x)$

$$f(x) = g(x)f_s(x), \exists u(x), v(x), s.t. u(x)g(x) + v(x)f_s(x) = 1.$$

先证明 $\mathrm{Ker}\, f(\mathscr{A}) = \mathrm{Ker}\, g(\mathscr{A}) \oplus \mathrm{Ker}\, f_s(\mathscr{A})$

$$\forall \alpha \in \mathrm{Ker}\, f(\mathscr{A}), \alpha = 1 \cdot \alpha = u(\mathscr{A})g(\mathscr{A})(\alpha) + v(\mathscr{A})f_s(\mathscr{A})(\alpha)$$

于是得到

$$\mathrm{Ker}\, f(\mathscr{A}) = \mathrm{Ker}\, g(\mathscr{A}) + \mathrm{Ker}\, f_s(\mathscr{A}).$$

同样运用裴蜀等式可得直和，于是结论成立.

4.6 零化多项式与 Hamilton-Cayley 定理

Definition 4.6.1 零化多项式

已知 $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$，若 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 满足 $f(\mathscr{A}) = 0$，则称 f 为 $\mathscr{A}$ 的零化多项式.

同样可以定义矩阵 A 的零化多项式，于是得到如下引理：

Lemma 4.6.1

$f(x)$ 是 $\mathscr{A}$ 的零化多项式 $\iff f(x)$ 是任意一组基下对应矩阵的零化多项式.

也就是说，零化多项式是矩阵的**相似不变量**

Proposition 4.6.1

非零零化多项式一定存在.

Proof: 实际上考虑映射 $id, \mathscr{A}, \mathscr{A}^2, \cdots, \mathscr{A}^{n^2} \in \mathrm{End}(V)$，由 $\dim \mathrm{End}(V) = n^2$，显然存在非零多项式 $f(x)$ 使得 $f(\mathscr{A}) = 0$

Proposition 4.6.2

$\mathscr{A}$ 的零化多项式全体集合是 $\mathbb{F}[x]$ 的一个理想.

也即 $\forall$ 零化多项式 $f(x), g(x)$ 和 $\forall h(x) \in \mathbb{F}[x]$,$(f+g)(x), f(x)h(x)$ 都是零化多项式.

Corollary 4.6.1

存在唯一的首一多项式 $m_{\mathscr{A}}(\lambda)$ 使得 $\mathscr{A}$ 的任意零化多项式都能被 $m_{\mathscr{A}}(\lambda)$ 整除，称 $\mathscr{A}$ 的极小多项式.

Theorem 4.6.1 Hamilton-Cayley 定理

特征多项式 $\chi_{\mathscr{A}}(\lambda)$ 一定满足 $\chi_{\mathscr{A}}(\mathscr{A})=0$.

Proof: 先考虑代数闭域上的情况：$\chi_{\mathscr{A}}(\lambda)$ 至少有一个根 $\mu \in \mathbb{K}$，于是可以取特征向量 $0 \neq \alpha_0 \in V$ 满足：$\mathscr{A}(\alpha_0)=\mu\alpha_0$，令 $W=\operatorname{span}\{\alpha\}$ 容易验证其为 $\mathscr{A}-$ 不变子空间.
对 $\dim V$ 用数学归纳法：
$\dim V=1$ 时显然，假设对 $<\dim V$ 成立，因为 $\dim V/W=\dim V-\dim W<\dim V$，有

$$\chi_{\widetilde{\mathscr{A}}}(\widetilde{\mathscr{A}})=0, \chi_{\mathscr{A}|_W}(\mathscr{A}|_W)=0.$$

$\forall \alpha+W \in V/W, \chi_{\widetilde{\mathscr{A}}}(\mathscr{A})(\alpha+W)=W=\chi_{\widetilde{\mathscr{A}}}(\mathscr{A})(\alpha)+W$，于是

$$\chi_{\mathscr{A}}(\mathscr{A})(\alpha)=\chi_{\mathscr{A}|_W}(\mathscr{A})\chi_{\widetilde{\mathscr{A}}}(\mathscr{A})(\alpha)=\chi_{\mathscr{A}|_W}(\mathscr{A})(\beta)=0$$

其中 $\beta=\chi_{\widetilde{\mathscr{A}}}(\mathscr{A})(\alpha)$；若 $\mathbb{K}$ 不是代数闭域，取 $\overline{\mathbb{K}}$ 是 $\mathbb{K}$ 的代数闭包：

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix}\eta_1 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_1 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix}A, A \in M_n(\mathbb{K}) \subset M_n(\overline{\mathbb{K}})$$

只需再说明作为 $\mathbb{K}$ 上矩阵的多项式，$\chi_A(A)=0$，其显然也是 $\overline{\mathbb{K}}$ 上矩阵的多项式，于是同上成立.

Definition 4.6.2 根子空间

给定 $\mathscr{A} \in \operatorname{End}(V)$，记 $\mathscr{A}$ 关于 λ 的根子空间为

$$W_\lambda=\{\alpha \in V | \exists m \in \mathbb{Z}, s.t. (\mathscr{A}-\lambda_i \cdot id)^m(\alpha)=0\}.$$

实际上可取 m 不超过 λ 的代数重数.

Corollary 4.6.2 根子空间分解定理

已知 $\mathscr{A} \in \operatorname{End}(V)$ 的特征多项式

$$\chi_{\mathscr{A}}(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$$

其中特征值各不相同，则有

$$V=\bigoplus_{i=1}^{s}\operatorname{Ker}(\mathscr{A}-\lambda_i \cdot id)^{m_i}$$

其中，每一个 $\operatorname{Ker}(\mathscr{A}-\lambda_i \cdot id)^{m_i}$ 称为 $\mathscr{A}$ 关于 λ_i 的根子空间（广义特征子空间）

4.7 极小多项式

Definition 4.7.1 极小多项式

对 $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$，若 $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ 是使得 $f(\mathscr{A}) = 0$ 的次数最小的非零首一多项式，则称 $f(x)$ 是 $\mathscr{A}$ 的**极小多项式**，记为 $m_{\mathscr{A}}(\lambda)$.

Proposition 4.7.1

对 $\forall \mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$，极小多项式存在且唯一.

Proof: (存在性) 零化多项式一定存在，于是一定可以找到最低次的零化多项式.
(唯一性) 假设 $m_{\mathscr{A}}(\lambda)$ 和 $m'_{\mathscr{A}}(\lambda)$ 都是 $\mathscr{A}$ 的极小多项式，则 $\deg m_{\mathscr{A}}(\lambda) = \deg m'_{\mathscr{A}}(\lambda)$，又因为 $m_{\mathscr{A}} - m'_{\mathscr{A}}$ 也为零化多项式，必须为 0，否则与最小次数矛盾.

Lemma 4.7.1

对 $\mathscr{A}$ 的任意零化多项式 $f(\lambda)$，一定有 $m_{\mathscr{A}}(\lambda)|f(\lambda)$

证明可由带余除法得到次数矛盾，和上一个结论类似，由此，我们得到如下推论.

Corollary 4.7.1

$m_{\mathscr{A}}(\lambda)$ 和 $\chi_{\mathscr{A}}(\lambda)$ 有相同的根（不计重数）.

Proof: 任取 $\mathscr{A}$ 的特征值 λ_0, 对应一个特征向量 α_0

$$\mathscr{A}(\alpha_0) = \lambda_0\alpha_0 \Rightarrow 0 = m_{\mathscr{A}}(\mathscr{A})(\alpha_0) = m_{\mathscr{A}}(\lambda_0)(\alpha_0) \Rightarrow m_{\mathscr{A}}(\lambda_0) = 0$$

Proposition 4.7.2

对每个根子空间 W_{λ_i}，有 m_i 最小可取 $m_{\mathscr{A}}(\lambda)$ 中 $(\lambda_i - \lambda)$ 的重数.

同样的，只要证明若存在更低的次数，则必为零多项式.

Lemma 4.7.2

极小多项式不依赖于域的扩张，即 $\mathbb{K} \subset \mathbb{E}$ 为域扩张，对 $\forall A \in M_n(\mathbb{K}) \subset M_n(\mathbb{E})$，有

$$m_{A,\mathbb{K}}(\lambda) = m_{A,\mathbb{E}}(\lambda).$$

Proof: 记 $m_{A,\mathbb{E}}(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + \cdots + b_{s-1}\lambda^{s-1} + \lambda^s$ 于是

$$m_{A,\mathbb{E}}(A) = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{s} b_k a_{ij}^k = 0, \forall 1 \le i,j \le n$$

于是 $\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}$ 是齐次线性方程组 $x_0 + a_{ij}^1 x_1 + \cdots + a_{ij}^s x_s = 0 (i,j = 1,2,\cdots,n)$ 在 $\mathbb{E}^{s+1}$ 中的非零解.
进而在 $\mathbb{K}^{s+1}$ 中也有非零解，于是 $\deg(m_{A,\mathbb{K}}(\lambda)) \le \deg(m_{A,\mathbb{E}}(\lambda))$，又有 $m_{A,\mathbb{E}}(\lambda)|m_{A,\mathbb{K}}(\lambda)$，结论成立.

Example 4.7.1

幂零变换 $\mathscr{A}^l = 0$ 的极小多项式为 λ^l;
幂等变换 $\mathscr{A}^2 = \mathscr{A}$ 的极小多项式为 $\lambda^2 - \lambda$ 或 λ 或 $\lambda - 1$;
对合变换 $\mathscr{A}^2 = id$ 的极小多项式为 $\lambda^2 - 1$ 或 $\lambda + 1$ 或 $\lambda - 1$;
周期变换 $\mathscr{A}^m = \mathscr{A}$ 的极小多项式为 $\lambda^m - 1$ 或其因式;
$\mathscr{A} = k \cdot id + \mathscr{B}$，其中 $\mathscr{B}$ 幂零，极小多项式为 $(\lambda - k)^l$

最后一个例子的实际意义见下

Remark 4.7.1

在根子空间分解中，$\mathscr{A} - \lambda_i \cdot id\Big|_{w_{\lambda_i}}$ 是幂零指数为 m_i 的幂零变换.

进一步我们有如下推论（定义）：

Definition 4.7.2 Jordan 块

$\mathscr{A} - k \cdot id$ 是 V 上的幂零变换，幂零指数为 $\dim V$，可取 V 的一组合适基 $\{\eta_i\}$ 使得

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix}\eta_1 & \cdots & \eta_l\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\eta_1 & \cdots & \eta_l\end{pmatrix} J_l(k)$$

其中，形如 $J_l(k) = \begin{pmatrix} k & 1 & & & \\ & k & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & k & 1 \\ & & & & k \end{pmatrix}$ 的矩阵称为一个 **Jordan 块**.

Proof: 因为 $\mathscr{A} - \lambda_0 \cdot id = \mathscr{B}$ 幂零，极小多项式 $m_{\mathscr{A}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^l = \chi_{\mathscr{A}}(\lambda)$，可取 $\alpha \in V$ 使得 $\mathscr{B}^{l-1}(\alpha) \neq 0$ 断言 $\alpha, \mathscr{B}(\alpha), \cdots, \mathscr{B}^{l-1}(\alpha)$ 构成 V 的一组基：只需证明其线性无关.
假设 $k_0\alpha + k_1\mathscr{B}(\alpha) + \cdots + k_{l-1}\mathscr{B}^{l-1}(\alpha) = 0$. 两边反复作用 $\mathscr{B}$，易得 $k_0 = 0$，进而 $k_i = 0$ 恒成立.

$$\mathscr{B}\begin{pmatrix}\mathscr{B}^{l-1}(\alpha) & \mathscr{B}^{l-2}(\alpha) & \cdots & \mathscr{B}(\alpha) & \alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathscr{B}^{l-1}(\alpha) & \mathscr{B}^{l-2}(\alpha) & \cdots & \mathscr{B}(\alpha) & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

进而 $\mathscr{A}\begin{pmatrix}\mathscr{B}^{l-1}(\alpha) & \mathscr{B}^{l-2}(\alpha) & \cdots & \mathscr{B}(\alpha) & \alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathscr{B}^{l-1}(\alpha) & \mathscr{B}^{l-2}(\alpha) & \cdots & \mathscr{B}(\alpha) & \alpha\end{pmatrix} J_l(\lambda_0)$

Proposition 4.7.3

若 $V = \bigoplus_{i=1}^s V_i$，其中 V_i 都是 $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$ 的不变子空间，则

$$m_{\mathscr{A}}(\lambda) = [m_{\mathscr{A}|_{V_i}}(\lambda)]_{i=1}^s$$

其中 $[\cdot]$ 表示首一的最小公倍式.

Proof: 首先，$[m_{\mathscr{A}|_{V_i}}(\lambda)]_{i=1}^s$ 显然是零化多项式，于是我们有 $m_{\mathscr{A}}(\lambda)\Big|[m_{\mathscr{A}|_{V_i}}(\lambda)]_{i=1}^s$
同时我们有 $m_{\mathscr{A}|_{V_i}}(\lambda)\Big|m_{\mathscr{A}}(\lambda)$ 恒成立，显然有 $[m_{\mathscr{A}|_{V_i}}(\lambda)]_{i=1}^s\Big|m_{\mathscr{A}}(\lambda)$. 于是等式成立.

Theorem 4.7.1

$\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$ 可对角化 $\iff$ $m_{\mathscr{A}}(\lambda)$ 可分解为一次因式的乘积且无重根.

Proof:

($\Rightarrow$) 已知可对角化，于是存在一组基 $\{\eta_i\}_{i=1}^n$ 使得

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix}\mathrm{diag}\{\lambda_i I_{k_i}\}_{i=1}^s$$

于是 $m_{\mathscr{A}}(\lambda) = [\lambda - \lambda_i]_{i=1}^s = \prod_{i=1}^s(\lambda - \lambda_i)$ 无重根.

($\Leftarrow$) 已知 $m_{\mathscr{A}}(\lambda)$ 无重根，不妨设为 $m_{\mathscr{A}}(\lambda) = \prod_{i=1}^s(\lambda - \lambda_i)$，由根子空间分解定理：

$$V = \bigoplus_{i=1}^s \mathrm{Ker}(\mathscr{A} - \lambda_i \cdot id)$$

在每个根子空间中取一组基，合成 V 的一组基，每个元素都是 $\mathscr{A}$ 的特征向量，从而 $\mathscr{A}$ 可对角化.

Corollary 4.7.2

阶数大于一的 *Jordan* 块一定不可对角化.

Proposition 4.7.4

已知 $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$ 可对角化，则 $V = \bigoplus_{i=1}^s V_{\lambda_i}, \lambda_i$ 两两不同.（特征子空间分解），则对 $\forall \mathscr{A}-$ 不变子空间 $W \subset V$，一定有

$$W = \bigoplus_{i=1}^s (V_{\lambda_i} \cap W)$$

且存在 $\mathscr{A}-$ 不变子空间 U_i 使得 $V_{\lambda_i} = (V_{\lambda_i} \cap W) \oplus U_i$

当可对角化时，根子空间就是特征子空间，所以可以做如上第一个分解.

Proof: $\forall \alpha \in W, \alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_s, \alpha_i \in V_{\lambda_i}$，两边作用 $\mathscr{A}$

$$\mathscr{A}(\alpha) = \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_s\alpha_s.$$

接着反复作用得到

$$\mathscr{A}^k(\alpha) = \lambda_1^k\alpha_1 + \cdots + \lambda_s^k\alpha_s, k = 2, 3, \cdots, s-1$$

于是由 *Vandermonde* 行列式可知：α_i 均可由 $\alpha, \mathscr{A}(\alpha), \cdots, \mathscr{A}^{s-1}(\alpha)$ 线性表出，从而 $\alpha_i \in W$
任取 $V_{\lambda_i} \cap W$ 在 V_{λ_i} 中的一个补空间 U_{λ_i}，要证明 U_{λ_i} 是 $\mathscr{A}-$ 不变的，由于 $\mathscr{A}\Big|_{\lambda_i} = \lambda_i \cdot id_{V_{\lambda_i}}$ 显然成立.

Theorem 4.7.2

$\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$ 可对角化 $\iff$ 对 $\forall \mathscr{A}-$ 不变子空间 W，存在 $\mathscr{A}-$ 不变子空间 U 使得 $V = W \oplus U$.

Proof: ($\Rightarrow$) 取 $U = \bigoplus_{i=1}^s U_i$，其中 U_i 同上命题即得证.

($\Leftarrow$) 对 $\dim V$ 作数学归纳法：$n=1$ 时结论平凡;

假设对 $\dim V=n-1$ 成立，考虑 $\dim V=n$ 情况：任取 λ 为 $\mathscr{A}$ 的一个特征值，及其特征向量 α，令 $W=\mathrm{span}\{\alpha\}$ 为一个 $\mathscr{A}-$ 不变子空间，由条件知存在 $\mathscr{A}-$ 不变子空间 U 使得 $V=U\oplus W$，我们有 $\mathscr{A}\Big|_U\subset\mathrm{End}(U)$，只需证 $\forall\mathscr{A}\Big|_U-$ 不变子空间 $Z\subset U$，存在 $\mathscr{A}\Big|_V-$ 不变子空间 $Y\subset U$.

任取 $\mathscr{A}\Big|_U-$ 不变子空间 $Z\subset U$，存在 $Y'\subset V$s 是 $\mathscr{A}-$ 不变子空间，且 $V=Z\oplus Y'$，令 $Y=Y'\cap U$ 也是 $\mathscr{A}-$ 不变子空间，断言 $U=Z\oplus Y$，实际考虑分解 $\alpha=z+y'$ 断言自然成立，于是结论成立.

4.8 幂零变换的 Jordan 标准型

给定 $\mathscr{A}\in\mathrm{End}(V)$ 为幂零变换，幂零指数 l，$\dim V=n$，$\forall 0\neq\alpha\in V,\mathscr{A}^l(\alpha)$，一定存在 $0<t\leqslant l$，使得 $\mathscr{A}^t(\alpha)=0,\mathscr{A}^{t-1}(\alpha)\neq 0$，断言 $\alpha,\mathscr{A}(\alpha),\cdots,\mathscr{A}^{t-1}(\alpha)$ 线性无关，反复作用 $\mathscr{A}$ 归纳即得.

Definition 4.8.1 循环子空间

令 $W=\mathrm{span}\{\mathscr{A}^{t-1}(\alpha),\cdots,\mathscr{A}(\alpha),\alpha\}$，为 $\mathscr{A}-$ 不变子空间.

$$\mathscr{A}\Big|_W\begin{pmatrix}\mathscr{A}^{t-1}(\alpha) & \mathscr{A}^{t-2}(\alpha) & \cdots & \mathscr{A}(\alpha) & \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathscr{A}^{t-1}(\alpha) & \mathscr{A}^{t-2}(\alpha) & \cdots & \mathscr{A}(\alpha) & \alpha\end{pmatrix}J_t(0)$$

称 W 为一个**循环子空间.**

Proposition 4.8.1 循环子空间分解

任意 $\mathscr{A}\in\mathrm{End}(V)$ 幂零，有 $V=\bigoplus_{i=1}^s W_i$，其中 W_i 为 $\mathscr{A}$ 的循环子空间，s 是特征值 0 的几何重数，且幂零指数 l 满足 $l=\max\{\dim W_i\}$

Proof: 对 $\dim V$ 作数学归纳法，当 $\dim V=1$ 时结论平凡，归纳假设结论对 $<\dim V$ 的空间成立：记 V_0 是 0 特征值对应的特征子空间，考虑 $\widetilde{V}=V/V_0$，可构造诱导变换 $\widetilde{\mathscr{A}}:\widetilde{V}\to\widetilde{V},\alpha+V_0\mapsto\mathscr{A}(\alpha)+V_0$ 断言 $\widetilde{\mathscr{A}}$ 是 $\widetilde{V}$ 上的幂零变换，其幂零指数为 $l-1$:

$\forall\alpha+V_0\in\widetilde{V}$，注意到 $\mathscr{A}^{l-1}(\alpha)\in V_0$，有 $\widetilde{\mathscr{A}}^{l-1}(\alpha+V_0)=\mathscr{A}^{l-1}(\alpha)+V_0=V_0$，于是幂零指数不超过 $l-1$，又 V 中一定存在 $\mathscr{A}$ 的一个循环子空间维数为 l 即存在 $0\neq\beta\in V$，使得 $\mathscr{A}^l(\beta)=0,\mathscr{A}^{l-1}(\beta)\neq 0$，所以 $\widetilde{\mathscr{A}}^{l-2}(\beta+V_0)\neq V_0$.

由归纳假设得到：$\widetilde{V}=\bigoplus_{i=1}^t\widetilde{W_i}$，其中 $\widetilde{W_i}$ 是 $\widetilde{\mathscr{A}}$ 的循环子空间，t 是 $\widetilde{\mathscr{A}}$ 的 0 特征值的几何重数，且存在 $l-1=\max\{\dim\widetilde{W_i}\}$

以 $\widetilde{W_1}$ 为例，作为循环子空间一定存在 $\alpha\in V$ 使得

$$\widetilde{W_i}=\mathrm{span}\{\widetilde{\mathscr{A}}^{p_1}(\alpha_1+V_0),\cdots,\widetilde{\mathscr{A}}(\alpha_1+V_0),\alpha+V_0\}$$

同样作用 $\widetilde{\mathscr{A}}$ 可归纳得出 $W_1=\mathrm{span}\{\mathscr{A}^{p_1+1}(\alpha),\mathscr{A}^{p_1}(\alpha_1),\cdots,\mathscr{A}(\alpha_1),\alpha_1\}$ 是 $\mathscr{A}$ 在 V 中一个循环子空间. 再断言 $W_1+W_2+\cdots+W_s$ 是直和：设 $0=\beta_1+\beta_2+\cdot+\beta_t\in W_1+W_2+\cdots+W_t$，其中 $\beta_i=c_i\mathscr{A}^{p_i+1}(\alpha_i)\in W_i$

$$0=\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_t=\mathscr{A}(c_1\mathscr{A}^{p_1}(\alpha_1)+\cdots+c_t\mathscr{A}^{p_t}(\alpha_t))$$

所以 $c_i=0\Rightarrow\beta_i=0\Rightarrow V=(\bigoplus_{i=1}^t W_i)\oplus(\bigoplus_{j=1}^p\mathrm{span}\{\gamma_j\})$，其中 γ_j 是 $\mathscr{A}^{p_i+1}(\alpha_i)$ 扩充成 V_0 一组基补充的元素，于是 $p=\dim V_0-t=s-t$.

考虑 $\mathscr{A}\big|_{W_i}$ 在合适基下对应矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}_{k_i}, k_i = \dim V_i$$

于是 $\mathscr{A}$ 在这组基下的表示阵为 $\operatorname{diag}\{J_{k_i}(0)\}$，考虑 $J_{k_i}^{k_i}(0) = 0$，记 $N(i)$ 为 i 阶 *Jordan* 块个数，于是有

- $\operatorname{rank}\mathscr{A} - \operatorname{rank}\mathscr{A}^2 = s - N(1)$
- $\operatorname{rank}\mathscr{A}^2 - \operatorname{rank}\mathscr{A}^3 = s - N(1) - N(2)$
- $\operatorname{rank}\mathscr{A}^{i-1} - \operatorname{rank}\mathscr{A}^i = s - N(1) - N(2) - \cdots - N(i-1)$

于是整理可得

- $N(1) = \operatorname{rank}\mathscr{A}^0 + \operatorname{rank}\mathscr{A}^2 - 2\operatorname{rank}\mathscr{A}^1$
- $N(2) = \operatorname{rank}\mathscr{A}^1 + \operatorname{rank}\mathscr{A}^3 - 2\operatorname{rank}\mathscr{A}^2$
- $N(i) = \operatorname{rank}\mathscr{A}^{i-1} + \operatorname{rank}\mathscr{A}^{i+1} - 2\operatorname{rank}\mathscr{A}^i$

Claim 4.8.1

幂零变换 $\mathscr{A}$ 特征值 0 的 k 阶 *Jordan* 块的个数 $N(k) = \operatorname{rank}\mathscr{A}^{k+1} + \operatorname{rank}\mathscr{A}^{k-1} - 2\operatorname{rank}\mathscr{A}^k$.

同样的，我们可以得到矩阵的形式：

Corollary 4.8.1

幂零矩阵 $A \in M_n(\mathbb{K})$ 一定可相似于 $\operatorname{diag}\{J_{k_i}(0)\}$，且满足 $k_i = j$ 的 *Jordan* 块的个数 $N(j) = \operatorname{rank}\mathscr{A}^{j-1} + \operatorname{rank}\mathscr{A}^{j+1} - 2\operatorname{rank}\mathscr{A}^j$

由于基的选取，循环子空间分解可以不唯一，于是我们有:

Remark 4.8.1

Jordan 标准型在相差一个 *Jordan* 块置换下是唯一的.

4.9 线性变换的 Jordan 标准型

本节考虑的线性变换 $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$，其极小多项式可分解为一次因式的乘积，即

$$m_{\mathscr{A}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$$

考虑根子空间分解 $V = \bigoplus_{i=1}^{s} V_{\lambda_i}$，我们知道 $\mathscr{A} - \lambda_i \cdot id\big|_{V_{\lambda_i}}$ 是幂零变换，且幂零指数为 m_i. 结合上节内容，在合适的基下 $\mathscr{A} - \lambda_i \cdot id$ 的表示阵为 $\mathrm{diag}\{J_{k_i}(0)\}$，于是在同一组基下 $\mathscr{A}$ 的表示阵为 $\mathrm{diag}\{J_{k_i}(\lambda_i)\}$，考虑每个根子空间都可以取出一组基构成 V 的基，于是有

Theorem 4.9.1

已知 $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$，$m_{\mathscr{A}}(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda-\lambda_s)^{m_s}$，可取 V 的一组基使得 $\mathscr{A}$ 在这组基下对应矩阵为 *Jordan* 标准型：$\mathrm{diag}\{J_{k_{ij}}(\lambda_i)\}$，$i = 1, \cdots, s; j = 1, \cdots, \dim \mathrm{Ker}(\mathscr{A} - \lambda_i \cdot id)\big|_{V_{\lambda_i}}$，其中 $J_p(\lambda_i)$ 的块数 $N_{\lambda_i}(p) = \mathrm{rank}(\mathscr{A} - \lambda_i \cdot id)^{p+1} + \mathrm{rank}(\mathscr{A} - \lambda_i \cdot id)^{p-1} - 2\,\mathrm{rank}(\mathscr{A} - \lambda_i \cdot id)^p$

同样的，我们可以定义矩阵的 *Jordan* 标准型

Remark 4.9.1

Jordan 标准型是相似的**完全不变量**.

Definition 4.9.1 初等因子

$\mathscr{A}$ 或 A 的 *Jordan* 标准型中每一个 *Jordan* 块的极小多项式称为 $\mathscr{A}$ 或 A 的**初等因子**，初等因子全体称为 $\mathscr{A}$ 或 A 的**初等因子组**，其为相似的**完全不变量**.

Example 4.9.1

下述矩阵的初等因子组为 $\lambda - 1, \lambda - 1, \lambda^2, (\lambda - 1)^2, \lambda$.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Definition 4.9.2 $\lambda-$ 矩阵

对任意的矩阵 $A \in M_n(\mathbb{K})$，它的 $\lambda-$ 矩阵定义为 $A_\lambda = \lambda I - A \in M_n(\mathbb{K}[\lambda])$

$\lambda-$ 矩阵的相抵初等变换如下：

- 交换两行（列）
- 某一行（列）乘 $k \in \mathbb{K}$
- 某一行（列）乘 $f(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ 加到另一行（列）

Definition 4.9.3

- A_λ 可逆 $\iff$ 存在 B_λ 使得 $A_\lambda B_\lambda = I_n \iff 0 \neq \det(A_\lambda) \in \mathbb{K}$.
- A_λ 满秩 $\iff \det(A_\lambda) \neq 0$.

Definition 4.9.4 行列式因子

$A_\lambda \in M_n(\mathbb{K}[\lambda])$ 的第 k 个**行列式因子**：$D_k = A_\lambda$所有k阶子式的最大公因式，其全体称**行列式因子组**

Theorem 4.9.2

$\forall A_\lambda \in M_n(\mathbb{K}[\lambda])$ 一定相抵于如下形式的 $\lambda-$ 矩阵：$\mathrm{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda), 0, \cdots, 0\}$
其中首一多项式 $d_i(\lambda) \big| d_{i+1}(\lambda)$，该矩阵也称为 *Smith* 标准型，唯一确定.

Proof: 令 $d_1(\lambda)$ 为 A_λ 中所有元素的最大公因式，于是

$$A_\lambda \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} d_1(\lambda) & * & \cdots & * \\ * & & & \\ \vdots & & \huge{*} & \\ * & & & \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{pmatrix} d_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \huge{*} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

重复上述操作即得 *Smith* 标准型，下证其唯一性：
考虑 *Smith* 标准型的行列式因子，$D_i(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_i(\lambda)$，只需证明如下引理

Lemma 4.9.1

初等变换不改变 $\lambda-$ 矩阵的行列式因子组.

只需分三类初等变换考虑，验证较为容易.

Definition 4.9.5 不变因子

上述 *Smith* 标准型中的 $d_i(\lambda)$ 称为**不变因子**，它们全体称为**不变因子组**.

Proposition 4.9.1

不变因子组中的不可约因式的幂次全体构成初等因子组.

容易验证此处的初等因子定义同前述.

Example 4.9.2

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$，矩阵 A 的不变因子组为：$1, \lambda - 1, (\lambda - 1)^2, (\lambda - 1)^2(\lambda^2 + \lambda + 1)$
初等因子组为：$\lambda - 1, (\lambda - 1)^2, (\lambda - 1)^2, \lambda^2 + \lambda + 1$

即不变因子组一定可推出初等因子组，但初等因子组一般不能推出不变因子组.

Remark 4.9.2

对于 $A \in M_n(\mathbb{K})$ 的 $\lambda-$ 矩阵，行列式因子组，不变因子组，初等因子组相互确定.

Proposition 4.9.2

对于矩阵 $A, B \in M_n(\mathbb{K})$，$A \overset{\text{相似}}{\sim} B \iff A_\lambda \overset{\text{相抵}}{\sim} B_\lambda$

证明可见课本.

Lemma 4.9.2

若 A 相抵于如下形式的 $\lambda-$ 矩阵：$\operatorname{diag}\{f_1(\lambda), f_2(\lambda), \cdots, f_r(\lambda), 0, \cdots, 0\}$，则 A 的所有初等因子为 $f_i(\lambda)$ 中的不可约因式的幂次.

考虑行列式因子，证明从略. 当我们得到一个矩阵的 $Jordan$ 标准型后，我们该如何求如下:

- 特征值：对角线元素
- 特征多项式：$\prod(\lambda - \lambda_i)$（记重数）
- 特征值的代数重数：λ_i 出现的次数
- 特征值的几何重数：λ_i 对应的 $Jordan$ 块个数
- 行列式：对角线元素乘积
- 矩阵的秩：阶数减去 0 特征值对应的 $Jordan$ 块个数
- 极小多项式：$\prod(\lambda - \lambda_i)^{k_i}$（其中 k_i 是 λ_i 对应 $Jordan$ 块个数.）
- 初等因子组，不变因子组，行列式因子组：见前定义

4.10 对偶空间

Definition 4.10.1 对偶空间

给定 $\mathbb{K}$ 上有限维线性空间 V，其对偶空间定义为：

$$V^* = \operatorname{Hom}(V, \mathbb{K})$$

显然，我们有 $\dim V = \dim V^*$ 任取 V 的一组基 $\{\eta_i\}$，令 $f_i \in V^*$ 满足：$f_i(\eta_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ 容易验证其构成一组 V^* 的基，另外有 $\forall f \in V^*, f = \sum_{i=1}^n f(\eta_i) f_i$.

Definition 4.10.2 对偶基

上述 $\{f_i\} \subset V^*$ 称为 $\{\eta_i\}$ 的对偶基，对偶基取决于原先基的选取.

既然对偶基依赖于基的选取,则需要研究对偶基之间的变换与原基之间的变换关系. 考虑 V 中基 $\{\eta\}, \{\xi_i\}$，对应对偶基 $\{f_i\}, \{g_i\}$ 设 η_i 到 $\{\xi_i\}$ 的过渡阵为 $S = (s_{ij})$，$\{f_i\}$ 到 $\{g_i\}$ 的过渡阵为 $T = (t_{ij})$ 于是我们得到如下表示：

$$\delta_{ij} = f_i(\eta_j) = (\sum_{k=1}^n s_{ki} g_k)(\sum_{k=1}^n t_{kj} \xi_k) = \sum_{k=1}^n s_{ki} t_{ki} \Rightarrow S^T T = I$$

对 $\forall \alpha \in V$，可定义 $\widetilde{\alpha} \in V^{**} : \begin{matrix} V^* & \to & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & f(\alpha) \end{matrix}$

Theorem 4.10.1

V 和 V^{**} 有一个典范的同构：$V \xrightarrow{\sim} V^{**}, \alpha \mapsto \widetilde{\alpha}$.

Proof: $\forall \alpha, \beta \in V; k, l \in \mathbb{K}; f \in V^*$，$f(k\alpha + l\beta) = kf(\alpha) + lf(\beta) = k\widetilde{\alpha}(f) + l\widetilde{\beta}(f) = (k\widetilde{\alpha} + l\widetilde{\beta})(f)$
$\forall \alpha \neq \beta \in V$ 一定存在 $f \in V^*$ 使得 $f(\alpha) \neq f(\beta) \Rightarrow \widetilde{\alpha}(f) \neq \widetilde{\beta}(f)$, 所以是单射；又因为 $\dim V = \dim V^{**}$，所以该映射是同构，下证其典范性：
任取 $\{\eta_i\}, \{\xi_i\}$ 为 V 的两组基，分别对应两组对偶基 $\{f_i\}, \{g_i\}$，进而得到 V^{**} 中的对偶基 $\{\widetilde{\eta_i}\}, \{\widetilde{\xi_i}\}$，要证明 $\theta_1 : \eta_i \mapsto \widetilde{\eta_i}$ 和 $\theta_2 : \xi_i \to \widetilde{\xi_i}$ 是同一个同构映射:
假设 η_i 到 $\{\xi_i\}$ 的过渡矩阵为 S，由先前结论，$\{\widetilde{\eta_i}\}$ 到 $\{\widetilde{\xi_i}\}$ 的过渡矩阵为 $(S^{-T})^{-T} = S$.（此处 $-T$ 指的是逆矩阵的转置）.

*4.11 表示论观点下的线性映射

研究对象：具有某种代数结构的对象（如线性空间，线性空间＋线性映射）

基本思想：分类 $\begin{cases} \text{1. 将其分解为不可分解的对象的和（直和）} \\ \text{2. 刻画所有不可分解的对象} \end{cases}$

1. 域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间

研究对象：$\mathbb{F}$ 上的（有限维）线性空间全体.

Definition 4.11.1

$V_{\mathbb{F}}$ 线性空间称不可分解，即不存在非零的 $\mathbb{F}-$ 空间 U, V 使得 $W \simeq U \oplus V$.

Claim 4.11.1

1.任意线性空间 V 均有分解$V \simeq \bigoplus_{i \in I} V_i, V_i \simeq \mathbb{F}$;

2.V 不可分解当且仅当$V \simeq \mathbb{F}$.

关键事实：任意 $\mathbb{F}-$ 线性空间均有一组基.

2. 域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 ＋ 线性映射

研究对象：所有三元组 $(V, W, \mathscr{A})$ 的全体，V, W 是 $\mathbb{F}-$ 线性空间，$\mathscr{A} : V \to W$ 的线性映射

Definition 4.11.2

三元组 $(V, W, \mathscr{A})$ 到三元组 $(V', W', \mathscr{A}')$ 的态射为一个二元组 (f, g) 其中 $f : V \to V', g : W \to W'$ 为线性映射，使得 $\mathscr{A}' \circ f = g \circ \mathscr{A}$

也就是成立如下交换图

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathscr{A}"] \arrow[d, "f"] & W \arrow[d, "g"] \\ V' \arrow[r, "\mathscr{A}'"] & W' \end{tikzcd}$$

特别的，如果 f, g 为双射，称 (f, g) 为同构；

事实

- (id_V, id_W)为$(V, W, \mathscr{A})$到$(V, W, \mathscr{A})$的态射.
- 若$(f, g) : (V, W, \mathscr{A}) \to (V', W', \mathscr{A}')(f', g') : (V', W', \mathscr{A}') \to (V, W, \mathscr{A})$则$(f' \circ f, g' \circ g)$为$(V, W, \mathscr{A}) \to (V, W, \mathscr{A})$的态射

- 称态射$(f,g):(V,W,\mathscr{A})\to(V',W',\mathscr{A}')$为同构，当且仅当存在态射$(s,t):(V',W',\mathscr{A})\to(V,W,\mathscr{A})$使得$(s\circ f,t\circ g)=(id_V,id_W),(f\circ s,g\circ t)=(id_{V'},id_{W'})$

另外，称 $(V,W,\mathscr{A})$ 为**零对象**，当且仅当 $V=0,W=0,\mathscr{A}=0$，其余称**非零**.

Remark 4.11.1

三元组 $(V,W,\mathscr{A})$ 全体构成一个**范畴**.

Definition 4.11.3

称三元组 $(V,W,\mathscr{A})$ 为可分解对象，如果存在非零三元组 $(V',W',\mathscr{A}')$ 和 $(V'',W'',\mathscr{A}'')$ 使得 $(V,W,\mathscr{A})\xrightarrow{\sim}(V',W',\mathscr{A}')\oplus(V'',W'',\mathscr{A}''):=\left(V'\oplus V'',W'\oplus W'',\begin{pmatrix}\mathscr{A}' & 0\\ 0 & \mathscr{A}''\end{pmatrix}\right)$

目的：在同构意义下分类所有的不可分解三元组.
事实：设 $\dim V=n,\dim W=m$，则存在同构 $(V,W,\mathscr{A})\simeq(V',W',\mathscr{A}')$，其中矩阵 $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathscr{A}"] \arrow[d, "f"] & W \arrow[d, "g"] \\ \mathbb{F}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{F}^m \end{tikzcd}$$

于是在同构意义下只需研究 $(\mathbb{F}^n,\mathbb{F}^m,A)$，可将态射 (f,g) 简化为二元组 (P,Q) 其中 $P\in M_{s\times n}(\mathbb{F}),Q\in M_{t\times m}(\mathbb{F})$ 为 f,g 在标准基下的表示矩阵. $(\mathbb{F}^n,\mathbb{F}^m,A)$ 和 $(\mathbb{F}^s,\mathbb{F}^t,B)$ 存在同构当且仅当 $n=s,m=t$，存在 n 阶可逆阵 P,m 阶可逆阵 Q 使得 $QA=BP$，此时成立如下交换图：

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P"] & \mathbb{F}^m \arrow[d, "Q"] \\ \mathbb{F}^n \arrow[r, "B"] & \mathbb{F}^m \end{tikzcd}$$

对任意的 $A\in M_{m\times n}$，存在可逆阵 $P\in GL_n(\mathbb{F}),Q\in GL_m(\mathbb{F})$ 使得

$$A=Q\begin{pmatrix}I_s & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}$$

于是我们知道

$$(V,W,\mathscr{A})\simeq(\mathbb{F}^n,\mathbb{F}^m,A)\simeq\left(\mathbb{F}^n,\mathbb{F}^m,\begin{pmatrix}I_n & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)\simeq\left(\bigoplus_{i=1}^{s}(\mathbb{F},\mathbb{F},Id_{\mathbb{F}})\right)\oplus\left(\bigoplus_{j=1}^{n-s}(\mathbb{F},0,0)\right)\oplus\left(\bigoplus_{k=1}^{m-s}(0,\mathbb{F},0)\right)$$

Claim 4.11.2

1. 任意 $(V,W,\mathscr{A})$ 均有如上分解;
2. $(V,W,\mathscr{A})$ 不可分解当且仅当其同构于 $(\mathbb{F},0,0),(0,\mathbb{F},0),(\mathbb{F},\mathbb{F},Id_{\mathbb{F}})$ 其中之一.

Remark 4.11.2

令 $R=\begin{pmatrix}\mathbb{F} & \mathbb{F}\\ 0 & \mathbb{F}\end{pmatrix}$，上述就是 R 上的表示理论（$R-$ 模分解理论）.

3. 代数闭域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 + 线性变换

研究对象：所有的二元组 $(V,\mathscr{A})$ 其中 V 有限维线性空间，$\mathscr{A}:V\to V$ 线性变换

Definition 4.11.4

二元组 $(V,\mathscr{A})$ 到二元组 $(V',\mathscr{A}')$ 的态射为一个线性映射 $f:V\to V'$，使得 $f\circ\mathscr{A}=\mathscr{A}\circ f$.

上述定义满足如下交换图

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathscr{A}"] \arrow[d, "f"] & W \arrow[d, "f"] \\ V' \arrow[r, "\mathscr{A}'"] & W' \end{tikzcd}$$

若 f 为同构，称 $(V,\mathscr{A})$ 和 $(V',\mathscr{A}')$ 同构.

Definition 4.11.5

称二元组为**可分解的**，当且仅当存在非零二元组 $(W,\mathscr{B}),(U,\mathscr{C})$ 使得：

$$(V,\mathscr{A})\xrightarrow{\sim}(W,\mathscr{B})\oplus(U,\mathscr{C}):=\left(W\oplus V,\begin{pmatrix}\mathscr{B} & 0\\ 0 & \mathscr{C}\end{pmatrix}\right)$$

目的：在同构意义下分类所有的不可分解二元组.
设 $\dim V=n$ 则存在同构 $(V,\mathscr{A})\xrightarrow{\sim}(\mathbb{F}^n,A),A\in M_n(\mathbb{F})$，成立如下交换图

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathscr{A}"] \arrow[d, "f"] & V \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{F}^n \arrow[r, "A'"] & \mathbb{F}^n \end{tikzcd}$$

若存在同构 $f:(W,\mathscr{B})\oplus(U,\mathscr{C})\to(V,\mathscr{A})$，即成立交换图

$$\begin{tikzcd} W\oplus U \arrow[r, "\mathscr{T}"] \arrow[d, "f"] & W\oplus U \arrow[d, "f"] \\ V \arrow[r, "\mathscr{A}"] & V \end{tikzcd}$$

其中 $\mathscr{T}:=\mathrm{diag}\{\mathscr{B},\mathscr{C}\}$，则有

- $V=f(W)\oplus f(U)$
- $\mathscr{A}(f(W))=f(\mathscr{B}(W))\subseteq f(W),\mathscr{A}(f(U))=f(\mathscr{B}(U))\subseteq f(U)$（W,U 为 $\mathscr{A}-$ 子空间）

反之，若 $V=V_1\oplus V_2$ 且 V_i 为 $\mathscr{A}-$ 子空间，则

$$(V,\mathscr{A})\simeq(V_1,\mathscr{A}\big|_{V_1})\oplus(V_2,\mathscr{A}\big|_{V_2})$$

Claim 4.11.3

$(V,\mathscr{A})$ 可分解 $\iff$ V 可分解为 $\mathscr{A}-$ 子空间的直和.

两个重要结论：

- 定理 1(P291) 给定 $(V,\mathscr{A})$，设 $f(x)\in\mathbb{F}[x]$ 有分解 $f(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)$，其中 f_i 两两互异，则

$$(\mathrm{Ker}\,f(\mathscr{A}),\mathscr{A})=\bigoplus_{i=1}^{s}(\mathrm{Ker}\,f_i(\mathscr{A}),\mathscr{A})$$

  特别地，若 $f(\mathscr{A})=0$，则 $(V,\mathscr{A})=\bigoplus_{i=1}^{s}(\mathrm{Ker}\,f_i(\mathscr{A}),\mathscr{A})$.

- 定理 2(4.6.1 Hamilton-Cayley 定理)

由上述两定理可知

$$(V,\mathscr{A})=\bigoplus_{i=1}^{s}(\operatorname{Ker}(\mathscr{A}-\lambda_i\cdot id)^{r_i},\mathscr{A})$$

故只需研究 $(\operatorname{Ker}(\mathscr{A}-\lambda_i\cdot id)^{r_i},\mathscr{A})$ 的分解

给定对象 $(V,\mathscr{A})$ 不妨假设 $\mathscr{A}$ 的特征多项式为 $\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^n, n=\dim V$，令 $\mathscr{B}=\mathscr{A}-\lambda_0 I$ 为幂零变换，$\mathscr{A}-$ 子空间也为 $\mathscr{B}-$ 子空间

情形 1：$\mathscr{B}=0$，此时显然有

$$(V,\mathscr{A})=\bigoplus_{i=1}^{\dim V}(\mathbb{F},\lambda_0\cdot id)$$

情形 2：$\mathscr{B}\neq 0,\mathscr{B}^2=0$，注意到 $\operatorname{Ker}\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{B}-$ 子空间，$(\operatorname{Ker}\mathscr{B},\mathscr{B})$ 满足情形 1.

令 $V=\operatorname{Ker}(\mathscr{B})\oplus W$，$W$ 作为线性空间.

问题/期望：找到合适的 W，使其为 $\mathscr{B}-$ 子空间.

若 $0\neq w\in W$，则 $\mathscr{B}(W)\neq 0$，但 $\mathscr{B}(\mathscr{B}(W))=0\Rightarrow\mathscr{B}(W)\subseteq\operatorname{Ker}\mathscr{B}$，于是 W 不可能是 $\mathscr{B}-$ 子空间.

令 $\{w_1,\cdots,w_s\}$ 为 W 的一组基，成立事实:$\{w_1,\cdots,w_s,\mathscr{B}(w_1),\cdots,\mathscr{B}(w_s)\}$线性无关，将其扩充成 V 的一组基 $\{w_1,\cdots,w_s,\mathscr{B}(w_1),\cdots,\mathscr{B}(w_s),u_1,\cdots,u_t\}$，容易注意到

- $L(\mathscr{B}(w_i),w_i)$ 为 $\mathscr{B}-$ 子空间
- $\mathscr{A}(\mathscr{B}(w_i),w_i)=(\mathscr{B}(w_i),w_i)\begin{pmatrix}\lambda_0 & 1\\ 0 & \lambda_0\end{pmatrix}=J_2(\lambda_0)$
- $L(u_i)$ 为 $\mathscr{A}-$ 子空间，$\mathscr{A}(u_i)=(\mathscr{A}-\lambda_i)(u_i)+\lambda_i(u_i)=\lambda_i u_i$

于是我们有如下结论

$$\begin{aligned}(V,\mathscr{A})&=\left(\bigoplus_{i=1}^{s}(L(\mathscr{B}(w_i),w_i),\mathscr{A})\right)\oplus\left(\bigoplus_{j=1}^{t}(L(u_j),\mathscr{A})\right)\\&=\left(\bigoplus_{i=1}^{s}(\mathbb{F}^2,J_2(\lambda_0))\right)\oplus\left(\bigoplus_{j=1}^{t}(\mathbb{F},\lambda_0)\right)\end{aligned}$$

> **Remark 4.11.3**
> $(\mathbb{F}^2,J_2(\lambda_0))$ 和 $(\mathbb{F},\lambda_0)$ 在分解中出现次数分别为:
> $$s=\dim W=\dim V/\operatorname{Ker}\mathscr{B}=\dim\operatorname{Im}\mathscr{B}=\operatorname{rank}\mathscr{B}$$
> $$t=\dim\operatorname{Ker}\mathscr{B}-\operatorname{rank}\mathscr{B}=n-\operatorname{rank}\mathscr{B}-\operatorname{rank}\mathscr{B}=n-2\operatorname{rank}\mathscr{B}$$

更一般的情形：$\mathscr{B}=\mathscr{A}-\lambda_0\cdot id$ 取 m 为幂零指数，注意到:

$$0\subseteq\operatorname{Ker}(\mathscr{B})\subseteq\operatorname{Ker}(\mathscr{B}^2)\subseteq\cdots\subseteq\operatorname{Ker}(\mathscr{B}^m)=V$$

有分解 $\operatorname{Ker}(\mathscr{B}^i)=\operatorname{Ker}(\mathscr{B}^{i-1})\oplus W^i$，其中 W^i 为构造的补空间，最终有分解 $V=\bigoplus_{i=1}^m W^i$

注意到 $W_i\subseteq W_{i-1}$，可由 W_i 的一组基 $\{\eta_i\}$ 形成 W_{i-1} 中线性无关向量 $\{\mathscr{B}(\eta_i)\}$，再扩充成 W_{i-1} 的基.

记 $N(i)$ 为 $J_i(\lambda)$ 的数量：有

- $N(m)=\dim V-\dim\operatorname{Ker}\mathscr{B}^{m-1}=\operatorname{rank}\mathscr{B}^{m-1}$
- $N(m-1)=\dim W^{m-1}-N(m)=\operatorname{rank}\mathscr{B}^{m-2}-2\operatorname{rank}\mathscr{B}^{m-1}$

- $N(m-2) = \dim W^{m-2} - N(m-1) - N(m) = \dim \operatorname{Ker}(\mathscr{B}^{m-2}) - \dim \operatorname{Ker}(\mathscr{B}^{m-3}) - \operatorname{rank} \mathscr{B}^{m-1} - \operatorname{Ker} \mathscr{B}^{m-2} + 2 \operatorname{rank} \mathscr{B}^{m-1} = \operatorname{rank} \mathscr{B}^{m-1} + \operatorname{rank} \mathscr{B}^{m-3} - 2 \operatorname{rank} \mathscr{B}^{m-2}$
- $N(i) = \operatorname{rank} \mathscr{B}^{i+1} + \operatorname{rank} \mathscr{B}^{i-1} - 2 \operatorname{rank} \mathscr{B}^{i}$（一般情况）

同前文形式，也就是有分解

$$(V, \mathscr{A}) = \bigoplus_{i=1}^{m} \left(\bigoplus_{k=1}^{N(i)} (\mathbb{F}^i, J_i(\lambda_0)) \right)$$

*4.12 有理标准形

本节作为自学内容，以作业方式提交，此处只记录本人的作业.

问题提出：在代数闭域中，因为非零多项式总能分解为一次多项式的乘积，于是我们容易得到根子空间分解，其中每个根子空间都形如 $\operatorname{Ker}(\mathscr{A} - \lambda_i \cdot id)^{m_i}$，进而可以将 $\mathscr{A}$ 分解成每个根子空间上的**幂零变换**，最终得到 *Jordan* 标准型。但如果线性空间 V 并不定义在代数闭域，比如定义在 $\mathbb{Q}$ 上，我们通常没法保证最简的分解都是一次因式，于是如何将 $\mathscr{C} \in \operatorname{End}(V)$ 在那些非一次因式所对应的不变子空间上的矩阵表示统一化简，找到一个可以"代替"*Jordan* 标准型的**标准型**，成为了一个问题。

Definition 4.12.1 Frobenius 矩阵

称如下矩阵为 **Frobenius** 矩阵，也称为多项式 $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ 的友矩阵，在后文提到时，记作 $F(p)$，在一些其余主流教材中定义为其转置.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{t-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{t-1} \end{pmatrix}$$

参考普通的根子空间分解，考虑 $\mathbb{F}$ 上线性空间 V 中的线性变换 $\mathscr{C}$，其极小多项式的标准分解式

$$m_{\mathscr{C}}(\lambda) = \prod_{i=1}^{s} p_i^{l_i}(\lambda)$$

其中至少有一个 $\deg(p_i) \geq 2$，我们同样可以得到分解：

$$V = \bigoplus_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} p_i^{l_i}(\mathscr{C}).$$

记 $V_j = \operatorname{Ker} p_j^{l_j}(\mathscr{C})$，不难得出 $\mathscr{C}|_{V_j}$ 的极小多项式 $m_{\mathscr{C}|_{V_j}}(\lambda) = p_j^{l_j}(\lambda)$. 我们只需分别研究每个 V_j 上的最简表示 C_j，就可将 $\mathscr{C}$ 化为准对角矩阵的最简形式.

Definition 4.12.2

设 $\mathscr{C}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上有限维线性空间 V 上的线性变换，对 $0 \neq \alpha \in W$，若 $\alpha, \mathscr{C}(\alpha), \cdots, \mathscr{C}^{t-1}(\alpha)$ 线性无关，且 $\mathscr{C}^t$ 可由前述向量线性表出，称 $L(\alpha, \mathscr{C}(\alpha), \cdots, \mathscr{C}^{t-1}(\alpha))$ 为 α 生成的 $\mathscr{C}-$ 循环子空间.

容易得到其为 $\mathscr{C}-$ 不变子空间，$\mathscr{C}$ 在该空间的上限制，在其基 $\{\alpha, \mathscr{C}(\alpha), \cdots, \mathscr{C}^{t-1}(\alpha)\}$ 下的矩阵即为前述的 **Frobenius** 矩阵，其极小多项式与特征多项式相等，都为:

$$\lambda^t + a_{t-1}\lambda^{t-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

我们研究了 $m_\alpha(\lambda)=p(\lambda)$ 的情况，接下来由极小多项式的定义，容易得出 $m_\alpha(\lambda)=p^l(\lambda), l>1$ 时，$L(\alpha,\mathscr{C}(\alpha),\cdots,\mathscr{C}^{t-1}(\alpha))$ 无法直和分解为非平凡 $\mathscr{C}-$ 不变子空间；转化为矩阵语言，也就是无法分块表示成准对角阵，再进一步，至少存在某一个 α_0 的极小多项式的 **Frobenius** 矩阵成为了 $\mathscr{C}$ 限制在 α_0 生成的 $\mathscr{C}-$ 循环子空间上的最简矩阵表达.

> **Proposition 4.12.1**
>
> 在单个的 $V=\operatorname{Ker} p(\mathscr{C})$ 中，$\mathscr{C}|_V$ 的极小多项式即为 $p(\lambda)$，记 $\dim V=m, \deg p(\lambda)=r>1$，则 V 可以直和分解为 m/r 个 r 维数 $\mathscr{C}-$ 循环子空间

Proof: 只需对维数作第二数学归纳法，模掉 $V_1=L(\alpha,\mathscr{C}(\alpha),\cdots,\mathscr{C}^{t-1}(\alpha))$，剩余满足假设，即得.

这样我们得到 W 的直和分解，也就是 $\mathscr{C}|_V$ 的分块准对角阵表示，称为 $\mathscr{C}$ 的**有理标准形**. 和 *Jordan* 标准型相似，除去有理块排列次序后的有理标准形是**唯一**的，针对其唯一性不做展开，考虑极小多项式分解式的唯一性与子空间直和分解的对应性，很好理解，具体证明也大致可照搬 *Jordan* 标准型的唯一性证明.

上述为最简单 $l=1$ 情况，当 $l>1$ 时，由于限制在 V 上的 $p(\mathscr{C})$ 为幂零变换，我们可以仿照求 *Jordan* 块的个数的方式来求出**有理块**的个数，区别就在于我们考虑 *Jordan* 标准型时幂零变换的最简形式是一次因式的幂次，而有理标准形的最简形式至少是二次**不可约因式**，所以在有理块个数与 *Jordan* 块个数上会有因式次数的**倍数差别**，于是，同 4.11，考虑 V 上线性变换 $\mathscr{C}$，$p(\mathscr{C})$ 取 m 为幂零指数，我们先考虑有关所有 j 的 $p^j(\mathscr{C})$ 的有理块个数 N：

类比 *Jordan* 标准型：记 $\deg p(\lambda)=r$，则 $N=\frac{1}{r}\dim\operatorname{Ker} p(\mathscr{C})=\frac{1}{r}(n-\operatorname{rank} p(\mathscr{C}))$

对于每一个 $p^j(\mathscr{C})$，注意到：

$$0\subseteq \operatorname{Ker}(p(\mathscr{C}))\subseteq \operatorname{Ker}(p(\mathscr{C})^2)\subseteq\cdots\subseteq \operatorname{Ker}(p(\mathscr{C})^m)=V$$

有分解 $\operatorname{Ker}(p(\mathscr{C})^i)=\operatorname{Ker}(p(\mathscr{C})^{i-1})\oplus W^i$，其中 W^i 为构造的补空间，最终有分解 $V=\bigoplus_{i=1}^m W^i$

注意到 $W^i\subseteq W^{i-1}$，可由 W^i 的一组基 $\{\eta_i\}$ 形成 W^{i-1} 中线性无关向量 $\{p(\mathscr{C})(\eta_i)\}$，再扩充成 W^{i-1} 的基；记 $N(i)$ 为 $p^i(\mathscr{C})$ 的有理块 C_i 的个数：有

- $N(m)=\frac{1}{r}(\dim V-\dim\operatorname{Ker} p(\mathscr{C})^{m-1})=\frac{1}{r}(\operatorname{rank} p(\mathscr{C})^{m-1})$
- $N(m-1)=\frac{1}{r}(\dim W^{m-1}-N(m))=\frac{1}{r}(\operatorname{rank} p(\mathscr{C})^{m-2}-2\operatorname{rank} p(\mathscr{C})^{m-1})$
- $N(m-2)=\frac{1}{r}(\dim W^{m-2}-N(m-1)-N(m))=\frac{1}{r}(\dim\operatorname{Ker}(p(\mathscr{C})^{m-2})-\dim\operatorname{Ker}(p(\mathscr{C})^{m-3})-\operatorname{rank} p(\mathscr{C})^{m-1}-\dim\operatorname{Ker} p(\mathscr{C})^{m-2}+2\operatorname{rank} p(\mathscr{C})^{m-1})=\frac{1}{r}(\operatorname{rank} p(\mathscr{C})^{m-1}+\operatorname{rank} p(\mathscr{C})^{m-3}-2\operatorname{rank} p(\mathscr{C})^{m-2})$
- $N(i)=\frac{1}{r}(\operatorname{rank} p(\mathscr{C})^{i+1}+\operatorname{rank} p(\mathscr{C})^{i-1}-2\operatorname{rank} p(\mathscr{C})^{i})$（一般情况）

接着，我们就要考虑有理标准形的定义与一般求法

> **Definition 4.12.3 有理标准形（定义 1）**
>
> 对于 $\mathscr{C}$ 在某组基向量下的矩阵 $C\in M_n(\mathbb{F})$，若其初等因子组为 $d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_k(\lambda)$，则成立：$C\sim F=\operatorname{diag}\{F(d_1),F(d_2),\cdots,F(d_k)\}$，这就是 $\mathscr{C}$ 的有理标准型.

由于对于空间的分解有多种形式，我们有另一种定义：

> **Definition 4.12.4 有理标准形（定义 2）**
>
> 对于 $\mathscr{C}$ 在某组基向量下的矩阵 $C\in M_n(\mathbb{F})$，若其不变因子组为 $1,1,\cdots,1,d_1(\lambda),\cdots d_k(\lambda)$，则成立：$C\sim F=\operatorname{diag}\{F(d_1),F(d_2),\cdots,F(d_k)\}$，这就是 $\mathscr{C}$ 的有理标准型.

我们只对第二种定义的合理性进行证明，第一种证明相似.

Proof: 首先由 $C_\lambda = I_n - C$ 相抵于 $\mathrm{diag}\{1,\cdots,1,d_1(\lambda),\cdots,d_k(\lambda)\} \Rightarrow |C_\lambda| = d_1(\lambda)\cdots d_k(\lambda)$，不妨设 $\dim d_i(\lambda) = n_i > 1$，则 $\sum_{i=1}^k n_i = n$，考虑 $\lambda I_{n_i} - F(d_i) \overset{\text{相抵}}{\sim} \mathrm{diag}\{1,\cdots,1,d_i(\lambda)\}$，对准对角矩阵 $\lambda I - F$ 的每个分块进行相抵变换，最终可以得到 $\lambda I_n - C$，也就是说 $C \sim F$.

最后我们对于 **Frobenius** 矩阵的两种定义进行简单分析：
考虑有限维线性空间 $\mathbb{F}_n[\lambda] : \{g(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda] |\deg(g(\lambda)) < n\}$，显然有一组基：$1,\lambda,\cdots,\lambda^{n-1}$；将 F_1 视为线性映射 $\mathscr{C}$ 的在这组基下的表示矩阵，则表示：$\mathscr{C} : \mathbb{F}_n[\lambda] \to \mathbb{F}_n[\lambda], \lambda^i \mapsto \lambda^{i+1}, \lambda^{n-1} \mapsto \lambda^n - f(\lambda)$
我们可以取另一组基 $\{\omega_1,\cdots,\omega_n\}$ 其中 $\omega_1 = 1, \omega_i = \dfrac{f(\lambda) - (a_{i-1}\lambda^{i-1} + \cdots + a_0)}{\lambda^i}$，容易验证：$\mathscr{C}(\omega_i) = \omega_{i-1} - a_i\omega_n, 1 < i \le n, \mathscr{C}(\omega_1) = -a_0\omega_n$，于是 $\mathscr{C}$ 在这组基下的表示阵为

$$F_2 = \begin{pmatrix} \mathscr{C}(\omega_1) & \mathscr{C}(\omega_2) & \cdots & \mathscr{C}(\omega_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} = F_1^T$$

在先前的证明中我们考虑了 $\mathscr{C}$ 的极小多项式只有大于一次因式的情况，而当存在一次因式时：

$$m_{\mathscr{C}}(\lambda) = \prod_{i=1}^s (\lambda - \lambda_i)^{l_i} \prod_{j=1}^v p_j^{k_j}(\lambda)$$

其中 p_i 是不可约因式，我们有空间直和分解：

$$V = \left(\bigoplus_{i=1}^s \mathrm{Ker}(\mathscr{C} - \lambda_i \cdot \mathrm{id})^{l_i} \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^v \mathrm{Ker}\, p_j^{k_j}(\mathscr{C}) \right)$$

也就有**广义有理标准形** $\mathrm{diag}\{J_{l_1}(\lambda_1),\cdots,J_{l_i}(\lambda_s),F(p_1^{k_1}),\cdots,\cdots,F(p_v^{k_v})\}$，此处 $F(p_j^{k_j})$ 为 $\mathrm{Ker}\, p_j^{k_j}$ 上的准对角有理分块.

Chapter 5
具有度量的线性空间

5.1 双线性函数

Definition 5.1.1 双线性函数

给定 V 是 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，若 $f: V\times V \to \mathbb{K}$ 满足 $f(k\alpha+l\beta,\gamma)=kf(\alpha,\gamma)+lf(\beta,\gamma)$，$f(\alpha,k\beta+l\gamma)=kf(\alpha,\beta)+lf(\alpha,\gamma)$，则称 f 是 V 上的双线性函数.

记 $\mathrm{Hom}(V\otimes V,\mathbb{K})$ 为 V 上的双线性函数全体，$\forall f\in \mathrm{Hom}(V\otimes V,\mathbb{K})$ 由下述矩阵确定

$$M_f=\begin{pmatrix} f(\eta_1,\eta_1) & f(\eta_1,\eta_2) & \cdots & f(\eta_1,\eta_n)\\ f(\eta_2,\eta_1) & f(\eta_2,\eta_2) & \cdots & f(\eta_2,\eta_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f(\eta_n,\eta_1) & f(\eta_n,\eta_2) & \cdots & f(\eta_n,\eta_n)\end{pmatrix}$$

也就是说 $f\left(\begin{pmatrix}\eta_1 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix}X,\begin{pmatrix}\eta_1 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix}Y\right)=X'M_fY$

Definition 5.1.2 度量矩阵

上述矩阵 M_f 称为 f 的度量矩阵，依赖于基的选取.

我们考虑另一组基 $\{\xi_i\}$ 满足，得到 f 的另一个度量矩阵：$M_f'=(f(\xi_i,\xi_j))$

$$M_f'=(f(\sum_{k=1}^n p_{ki}\eta_k,\sum_{k=1}^n p_{kj}\eta_k))=(\sum_{k,l=1}^n p_{ki}f(\eta_k,\eta_l)p_{lj})=P^TM_fP$$

于是我们得到结论

Proposition 5.1.1

不同基下的度量矩阵相合.

对于 $f\in\mathrm{Hom}(V\otimes V,\mathbb{K})$，$\forall\alpha\in V,\alpha_L,\alpha_R\in V^*,\alpha_L:V\to\mathbb{K},\beta\mapsto f(\alpha,\beta);\alpha_R:V\to\mathbb{K},\beta\to f(\beta,\alpha)$. 有 $\mathrm{span}\{\alpha_L,\alpha_R|\alpha\in V\}\subset V^*$，称 $\dim\mathrm{span}\{\alpha_L,\alpha_R|\alpha\in V\}$ 为 f 的秩，记为 $\mathrm{rank}\,f$，一般有 $\mathrm{rank}\,f=\mathrm{rank}\,M_f$.

Definition 5.1.3 左根

$\{\alpha\in V|f(\alpha,\beta)=0,\forall\beta\in V\}$ 是 V 的一个子空间，记为 Rad_Lf，称为 f 的**左根**；类似的可定义**右根** Rad_Rf. 特别的，若 f 对称或反对称，$\mathrm{Rad}_Lf=\mathrm{Rad}_Rf$.

若 $\mathrm{Rad}_Lf=\mathrm{Rad}_Rf=0$，则称 f 为**非退化的**

Proposition 5.1.2

f 非退化 $\iff$ M_f 非退化.

Proof: 任取 V 的一组基 $\{\eta_i\}$，对应度量矩阵为 M_f
$\alpha\in\mathrm{Rad}_Lf\iff f(\alpha,\beta)=0(\forall\beta\in V)\iff X^TM_fY=0(\forall Y\in\mathbb{K}^n)\iff X^TM_f=0\iff X$ 是齐次

线性方程组 $M_f^T Z = 0$ 的解

于是 $\mathrm{Rad}_L = 0 \iff M_f^T Z = 0$ 只有零解 $\iff M_f^T$ 可逆.

Remark 5.1.1

从上述证明过程可以得到 $\mathrm{Rad}_L = 0 \iff \mathrm{Rad}_R = 0$.

下面给出一些基本定义

- f 对称 $\iff f(\alpha,\beta) = f(\beta,\alpha) \iff$ 度量矩阵对称
- f 反 (斜) 对称 $\iff f(\alpha,\beta) = -f(\beta,\alpha) \iff$ 度量矩阵反 (斜) 对称.

Theorem 5.1.1

f 是 $\mathbb{K}$ 线性空间 V 上的对称双线性函数 ($\mathrm{char}\mathbb{K} \neq 2$)，一定能找到 V 中一组合适的基使得在这这组基下 f 的度量矩阵 M_f 为对角矩阵.

Proof: 对 $\dim V$ 进行归纳，当 $\dim V = 1$ 时结论一定成立，归纳假设对 $\dim V < n$ 情况都成立，考虑 $\dim V = n$ 的情况：

- 若 $f = 0$ 则结论平凡
- 若 $f \neq 0$，存在 $\alpha, \beta \in V$ 使得 $f(\alpha,\beta) \neq 0$，不妨设 $\alpha = \beta$，则一定可找到 $\alpha \in V, f(\alpha,\alpha) \neq 0$，这是因为 $f(\alpha+\beta,\alpha+\beta) = f(\alpha,\alpha) + f(\beta,\beta) + 2f(\alpha,\beta)$ 至少有一个不为零.
  由 α 扩充成 V 的一组基 $\alpha, \beta_1, \cdots, \beta_{n-1}$，令 $\widetilde{\beta_i} = \beta_i - \frac{f(\beta_i,\alpha)}{f(\alpha,\alpha}\alpha$，使得 $f(\alpha,\widetilde{\beta_i}) = 0$，于是 f 在基 $\alpha, \widetilde{\beta_i} \cdots \widetilde{\beta}_{n-1}$ 下的矩阵为
  $$\begin{pmatrix} f(\alpha,\alpha) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$
  记 W =span$\{\widetilde{\beta}_1, \cdots, \widetilde{\beta}_{n-1}\}$，则 $f|_{W\times W}$ 是 W 上的对称双线性函数，$\dim W = n-1 < n$ 于是由归纳假设，存在 W 的一组基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}\}$ 使得 $f|_{W\times W}$ 的度量矩阵为对角阵，从而 f 在基 $\{\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}\}$ 下的度量矩阵为对角阵.

Proposition 5.1.3

二次型和对称双线性函数一一对应：$f(\alpha,\alpha) = \dfrac{f(\alpha+\beta,\alpha+\beta) - f(\alpha,\alpha) - f(\beta,\beta)}{2}$

联系命题 2.2.1，我们可以得到度量矩阵在对称双线性函数在某组基下的度量矩阵为由二次型的标准型，取决于二次型的正负惯性指数.

$\forall f, g \in V^*$ 定义 $f \otimes g : V \times V \to \mathbb{K}, (\alpha,\beta) \mapsto f(\alpha)g(\beta)$，称为 f *tensor* g，容易验证 $f \otimes g \in T_2(V)$.

取 V^* 的一组基 $f_1, \cdots, f_n$，成立如下命题:

Proposition 5.1.4

$f_i \otimes f_j$ 构成 $T_2(V)$ 的一组基.

Proof: 记 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的对偶基为 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n \in V$，任取 $f \in T_2(V)$，断言 $f = \sum_{i,j=1}^{n} f(\eta_i, \eta_j) f_i \otimes f_j$

只需验证 $\sum_{i,j} f(\eta_i, \eta_j) f_i \otimes f_j = \sum_{i,j} f(\eta_i, \eta_j) f_i(\eta_k) f_j(\eta_l) = f(\eta_k, \eta_l)$，注意到 $\dim T_2(V) = n^2$，成立.

在 $V \times V$ 上定义等价关系：$(k\alpha, \beta) \sim (\alpha, k\beta), \forall 0 \neq k \in \mathbb{K}; (0,0) \sim (0,\beta) \sim (\alpha, 0)$. 记 $V \times V/_\sim = V \otimes V, [(\alpha,\beta)] = \alpha \otimes \beta$，有加法和数乘：$k(\alpha \otimes \beta) = (k\alpha) \otimes \beta = \alpha \otimes (k\beta)$. 于是 $V \otimes V$ 构成线性空间，称为 V 的张量空间. 再取 V 的一组基 $\eta_1, \cdots, \eta_n$，$\eta_i \otimes \eta_j$ 构成 $V \otimes V$ 的一组基.

Lemma 5.1.1

$T_2(V) = V^* \otimes V^* = \mathrm{Hom}(V \otimes V, \mathbb{K})$，即双线性函数可视作张量空间上的线性函数.

Proof: $\forall f \in T_2(V)$，令 $\widetilde{f} : V \otimes V \to \mathbb{K}, \alpha \otimes \beta \mapsto f(\alpha, \beta)$ 容易验证 $\widetilde{f} \in \mathrm{Hom}(V \otimes V, \mathbb{K})$，反之可以找到固定的基，对任意 $\widetilde{f}$，找到 $f \in T_2(V)$.

5.2 实内积空间

Definition 5.2.1 内积

V 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，若对称双线性函数 $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ 满足正定性 $(\alpha,\alpha) \geq 0, \forall \alpha \in V$，并且 $(\alpha,\alpha) = 0 \iff \alpha = 0$，则称为 V 上的一个内积 (inner product)，称 $(V, (\cdot,\cdot))$ 为实内积空间.

内积一定是非退化的；当 $\dim V < \infty$ 时，我们称 V 为欧氏空间；可在实内积空间引入长度和角度：

- 长度：$|\alpha| = \sqrt{(\alpha,\alpha)}$
- 角度：$\langle \alpha, \beta \rangle = \arccos \dfrac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$

我们称 α, β 正交，若 $(\alpha, \beta) = 0$.

Definition 5.2.2 标准正交基

V 的一组基 $\{\eta_i\}, i \in I, (\eta_i, \eta_j) = \delta_{ij}$

由 $Gram - Schmidt$ 正交化过程，欧氏空间的任意一组基都可得到一组标准正交基，对欧氏空间

- 任意两组标准正交基之间的过渡矩阵一定是正交矩阵；
- 正交矩阵把一组正交基化为一组正交基.

Definition 5.2.3

V, W 都是实内积空间，若存在双射 $\varphi : V \to W$: 保加法与数乘，且**保内积**，即 $(\alpha, \beta) = (\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$，则称 φ 是实内积空间 V 到 W 的**同构映射** (isomorphism)，也称 V 和 W 是同构的，记 $V \simeq W$.

实内积空间同构是一个等价关系.

Proposition 5.2.1

实内积空间 $V \simeq W \iff \dim V = \dim W$.

Proof: $(\Rightarrow)$ 显然

($\Leftarrow$) 任取 V, W 的标准正交基 $\{\eta_i\}, \{\xi_i\}$ 取 $\varphi: V \to W, \eta_i \mapsto \xi_i$，考虑内积则成立 $(\varphi(\eta_i), \varphi(\eta_j)) = (\xi_i, \xi_j) = \delta_{ij} = (\eta_i, \eta_j)$，即 φ 是同构映射.

Proposition 5.2.2

已知 V, W 都是实内积空间，若 $\phi: V \to W$ 保内积，则

- φ 保持向量长度；
- φ 是线性的；
- φ 是单射.

Proof:

- $|\varphi(\alpha)| = \sqrt{(\varphi(\alpha), \varphi(\alpha))} = \sqrt{(\alpha, \alpha)} = |\alpha|$
- 要证明 $\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$，即证 $(\varphi(\alpha+\beta) - \varphi(\alpha) - \varphi(\beta), \varphi(\alpha+\beta) - \varphi(\alpha) - \varphi(\beta)) = 0$. 展开后利用保内积性，$(\alpha+\beta, \alpha+\beta) + (\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) - 2(\alpha, \beta), -2(\alpha+\beta, \beta), -2(\alpha+\beta, \alpha)$ 再利用内积的线性性，可直接得到结论.

Definition 5.2.4

非空集合 E，若映射 $d: E \times E \to \mathbb{R}$ 满足

- $d(x, y) = d(y, x)$;
- $d(x, y) \geq 0$ 且 $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

则称 d 是 E 上的一个**度量**，E 称为**度量空间**.

Remark 5.2.1

内积空间一定是度量空间，取 $d(x, y) = |x - y|$ 即可.

典型群：

A 型 $GL(V)$ 一般线性群（V 上的可逆变换全体）
$SL(V)$ 特殊线性群（V 上行列式为 1 的线性变换全体）

B 型 $O(V)$ 正交群（**奇数维**内积空间 V 上正交变换全体）
$SO(V)$ 特殊正交群（**奇数维**内积空间 V 上行列式为 1 的正交变换全体）

C 型 $SP(V)$ 辛群 *Symplectic*（V 是带有非退化反对称双线性函数的偶数维空间，其上的保持反对称双线性函数的线性变换全体）

D 型 同 B 型，**偶数维**

5.3 酉空间

V 是 $\mathbb{C}$ 上的线性空间，则其上的对称双线性函数不满足实内积空间上一般正定性，是因为若 $(\alpha,\alpha)>0$，则 $(i\alpha,i\alpha)=-(\alpha,\alpha)<0$.

Definition 5.3.1

V 是 $\mathbb{C}$ 上的线性空间，若 $(\cdot,\cdot):V\times V\to\mathbb{C}$ 满足：

- （对第一个变量线性）$(k\alpha+l\beta,\gamma)=k(\alpha,\gamma)+l(\beta,\gamma)$;
- (Hermite 性)$(\alpha,\beta)=\overline{(\beta,\alpha)}$
- (正定性)$(\alpha,\alpha)\geq 0$ 且 $(\alpha,\alpha)=0\iff\alpha=0$

则称 V 为**复内积空间**或**酉空间**（Unitary Space）

接下来我们就可以在酉空间上也引入长度和角度：

- 长度：$|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$
- 角度：$\langle\alpha,\beta\rangle=\arccos\dfrac{|(\alpha,\beta)|}{|\alpha||\beta|}$

其余一些基本性质与欧氏空间无太大差异.

Definition 5.3.2 酉变换

保持酉空间内积的变换称为酉变换.

Proposition 5.3.1

$\mathscr{A}:U\to U$ 是酉变换 $\iff$ $\mathscr{A}$ 把 U 的标准正交基变为标准正交基.

Definition 5.3.3 酉矩阵,Hermite 矩阵

复矩阵 A 满足 $\overline{A^T}=A^{-1}$，则称为酉矩阵；$\overline{A^T}=A$，则称为 Hermite 矩阵

Definition 5.3.4 *Hermite* 变换

$\mathscr{A}:U\to U$ 满足 $(\mathscr{A}(\alpha),\beta)=(\alpha,\mathscr{A}(\beta))$，则称 $\mathscr{A}$ 是 U 上的一个 *Hermite* 变换.

在标准正交基下，*Hermite* 变换和酉变换分别对应 *Hermite* 矩阵，酉矩阵.

Definition 5.3.5 伴随变换

内积空间 V,$\mathscr{A},\mathscr{B}\in\mathrm{End}(V)$ 满足 $(\mathscr{A}(\alpha),\beta)=(\alpha,\mathscr{B}(\beta))$,则 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 互为**伴随变换**,可记 $\mathscr{B}=\mathscr{A}^*$.

容易验证：$(\mathscr{A}^*)^*=\mathscr{A}$，且伴随变化唯一.

Remark 5.3.1

实内积空间上的对称变换和复内积空间上的 Hermite 变换都是自伴随的，即 $\mathscr{A}^*=\mathscr{A}$，自伴随 $\Rightarrow$ 可对角化.

Proposition 5.3.2

$\mathscr{A}$ 在标准正交基下对应的矩阵为 A，则 $\mathscr{A}^*$ 对应的矩阵为 $\overline{A^T}$.

Definition 5.3.6 正规变换

内积空间 V 上线性变换 $\mathscr{A}$，若满足 $\mathscr{A}\mathscr{A}^* = \mathscr{A}^*\mathscr{A}$，则称 $\mathscr{A}$ 是一个正规变换.

Theorem 5.3.1

$\mathscr{A}$ 是内积空间上的正规变换 $\iff$ $\mathscr{A}$ 可对角化.

由于课时原因，最后的两节课主要在列定义，具体的证明请多参考教材，并且本章内容不作为考试重点，酌情复习即可.

Chapter 6

后记

现在是 2024/6/30，在数学分析和解析几何期末双双考砸后本人决定把唯一考好的高等代数的期末试卷回忆版整理进笔记中，答案为本人制作，仅供参考.

6.1 期末卷

Question 1: 4*5’

判断下列命题正误，并说明理由：

(1) 两个正交矩阵之和还是正交矩阵;

(2) 两个矩阵的特征值及其代数重数完全相同，则它们相似;

(3) 两个实对称矩阵相似，则它们相合;

(4) 复矩阵 A, B 满足 $A^2 \sim B^2$，则 $A \sim B$.

Question 2: 10’

求三阶实对称矩阵 A，其特征值为 $6, 3, 3$，其中特征值 6 对应的一个特征向量为 $(1, 1, 1)^T$.

Question 3: 15’

定义 $M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 的函数：$f(A, B) = |A + B| - |A| - |B|$.

(1) 证明 f 是对称双线性函数;

(2) 求 f 在 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的度量矩阵，并求 f 的符号差.

Question 4: 10’

已知 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2024 & 6 \\ & 0 & 24 \\ & & 0 \end{pmatrix}$，求证方程 $X^2 = A$ 无解.$(X \in M_3(\mathbb{C}))$

Question 5: 15’

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ 的初等因子，不变因子以及 *Jordan* 标准型.

Question 6: 10’

已知线性空间 V 上的线性函数 $f, f_1, f_2, \cdots, f_k \in \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$ 满足当 $f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = \cdots = f_k(\alpha)$ 时都有 $f(\alpha) = 0$，求证 f 是 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 的线性组合.

Question 7: 10'

已知矩阵 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 有 n 个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，定义变换 $ab_A(B) = AB - BA$

(1) 求证 ab_A 是 $M_n(\mathbb{C})$ 上的线性变换；

(2) 求线性变换 ab_A 的 n^2 个特征值.

Question 8: 10'

定义对角线全为 1 的 m 阶复上三角矩阵全体为 N_m^+，对角线全为 1 的 n 阶复下三角矩阵全体为 N_n^-，定义 $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ 上的关系 $A \sim B : \exists P \in N_m^+, Q \in N_n^-$ 使得 $A = PBQ$.

(1) 求证该关系是 $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ 上的等价关系；

(2) Δ_i 定义为 A 的 i 阶顺序主子式，求证：$\Delta_1, \cdots, \Delta_{min\{m,n\}}$ 是上述等价关系的不变量.

1. 只有 (3) 正确.
2. 考虑实对称函数不同特征值的特征向量两两正交，可以任取两个与已知向量正交的向量，正交化后单位化，即得到了正交阵 C 使得 C^TAC =diag$\{6,3,3\}$，可得到 $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
3. 简单验证即可，表示阵为反对角矩阵，对角线元素为 $1, -1, -1, 1$，符号差为 0.
4. 注意到上三角矩阵在矩阵乘法意义下构成群，考虑上三角矩阵 X 的特征值只能为 0，简单运算即可知 2024, 24 的位置必为 0 得到矛盾.
5. 特征方程 $\chi(\lambda) = (\lambda+1)^4$，仅有特征值 -1，注意到 $\text{rank}(A+I) = 3$，只有 $4-3=1$ 个 $Jordan$ 块，于是标准型为 $J_4(-1)$；初等因子 $(\lambda-1)^4$；不变因子 $1, 1, 1, (\lambda-1)^4$.
6. 不妨设 $f_1, \cdots, f_k$ 线性无关，扩成 V^* 的一组基 $f_1, \cdots, f_k, f_{k+1}, \cdots, f_n$，考虑对偶基 $\alpha_i, \cdots, \alpha_n$，有 $f = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) f_i$，只需证明 $f(\alpha_i) = 0, i = k+1, \cdots, n$. 用反证法即可；另外取 $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ 可知 $f(\alpha) = 0 = \sum_{i=1}^k f(\alpha_i)$.
7. 考虑 $P^{-1}AP$ =diag$\{\lambda_i\} := D$，$ab_A(PE_{ij}P^{-1}) = P(DE_{ij} - E_{ij}D)P^{-1} = P((\lambda_i - \lambda_j)E_{ij})P^{-1} = (\lambda_i - \lambda_j)PE_{ij}P^{-1}$ 所以在基 $PE_{ij}P^{-1}$ 下的表示阵为 diag$\{\lambda_i - \lambda_j\}$，即特征值为 $\lambda_i - \lambda_j$.
8. 证明自反性，传递性，对称性；考虑分块矩阵乘法，题述上下三角阵作用下不改变主子式的值.

6.2 致谢

首先要感谢辛苦一学期教授该课程的主讲罗栗教授，习题课助教宋佳磊老师与晋海波老师；然后是拔尖班的同学们（包括选了拔尖课的同学），因为大家都很优秀，促使我努力在学习；另外还有远在上师大的 xlh 与 cy 同学，带动我卷起来，给了我做这份笔记的动力.

先前看高代的时候不知所云，当系统地去整理，一步一步理解，或者说如老师讲的“去读这个故事”，才真的把知识联系起来，构建起脑中的数学王国.

参考文献

●[1] 丘维声. 高等代数（第二版）（上册）清华大学出版社，2019.
●[2] 丘维声. 高等代数（第二版）（下册）清华大学出版社，2019.
●[3] 谢启鸿，姚慕生，吴泉水. 高等代数学（第四版）复旦大学出版社，2022.
●[4] 李文威. 代数学讲义，2025.
●[5] 陈志杰. 高等代数与解析几何（第二版）（下册）高等教育出版社，2008.