MLR's Class Notes

MCN

MLR

Some Class Notes to Analysis on Manifolds

Math

目录

前言

本笔记为 2025 春季学期限制性选修《流形上的分析》课程笔记，主讲老师为周林峰副教授. 由于是随堂记录 + 课后略微修改，typos 在所难免，如有勘误或其他疑问可以通过微信联系编者：sftdvf_nztfmg；另外因课时缘故，部分定理未深入展开证明，在笔记中以“*”记录.

参考书目：

- 《黎曼几何引论》陈维桓 李兴校, 2002
- 《黎曼几何初步》伍鸿熙 沈纯理 虞言林, 2014
- 《Riemannian Geometry》 M.P.do Carmo, 1992
- 《Compraison theorems in Riemnnian Geometry》 J.Cheager & D.G.Ebin, 1975
- 《Morse Theory》 J.Milnor, 1969

Chapter 1

流形 (Manifold)

1.1 流形的例子

Definition 1.1.1 拓扑流形

$(M,\mathcal{T})$ 是一个 Hausdorff 拓扑空间，有可数的拓扑基，若 M 满足：$\exists\ m\in\mathbb{N},\forall p\in M,\exists\ U\ni p, s.t.\exists\ x:U\to\mathbb{R}^m$ 为 U 到 $x(U)$ 的一个同胚，其中 $x(U)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的开子集，则称 M 为一个**拓扑流形**，其中 (U,x) 称为**坐标卡（局部坐标）**，m 称为 M 的**维数**.

Definition 1.1.2 C^r-坐标图册

设 M 是一个拓扑流形，一个 C^r-坐标图册是指一些坐标图卡的集合：$\mathcal{A}=\{(U_\alpha,x_\alpha)|\alpha\in I\}$ 使得 $\mathcal{A}$ 覆盖整个 M，i.e. $M=\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$，且 $\forall\alpha,\beta\in I$, 相应的**转移映射**是 C^r 的，定义如下：

$$x_\beta\circ x_\alpha^{-1}\Big|_{x_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)}:x_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\mathbb{R}^m$$

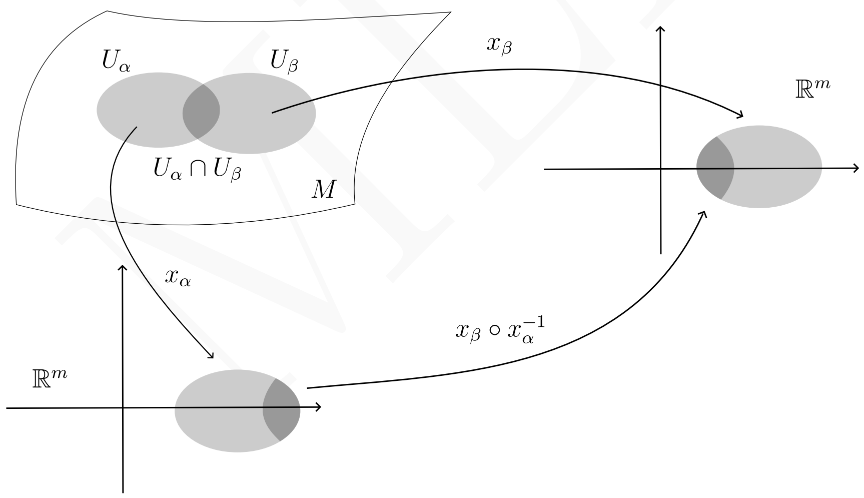

图 1.1: 转移映射

Definition 1.1.3 微分流形

M 上的一个图卡 (U,x) 称为与 $\mathcal{A}$ **相容**，若 $\mathcal{A}\cup\{(U,x)\}$ 仍为一个 C^r 图册，一个 C^r 图册称为**极大的**，若它包含所有与之相容的坐标图卡，一个极大图册 $\widehat{\mathcal{A}}$ 称为 M 上的一个 C^r **微分结构**，$(M,\widehat{\mathcal{A}})$ 称为一个 C^r 流形.

Remark 1.1.1

(1) 若 $r=\infty$，此时 $(M,\widehat{\mathcal{A}})$ 称为光滑流形；

(2) 若 $r=\omega$（转移映射为一个解析映射），此时 $(M,\widehat{\mathcal{A}})$ 称为解析流形.

(3) 给定一个 C^r 图册 $\mathcal{A},\exists!$ 包含 $\mathcal{A}$ 的极大坐标图册 $\widehat{\mathcal{A}}$

Example 1.1.1

$(\mathbb{R}^m, \mathcal{T})$，其中 $\mathcal{T}$ 取经典拓扑，我们有平凡 C^ω-图册

$$\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^m, x) | x : p \to p\}$$

由 $\mathcal{A}$ 生成的一个极大图册 $\widehat{\mathcal{A}}$ 称为 $\mathbb{R}^m$ 上的一个 C^ω-结构.

Example 1.1.2

m 维球体

$$S^m = \{p = (x_1, \cdots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} | x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$$

赋予子空间拓扑，考虑球极投影：

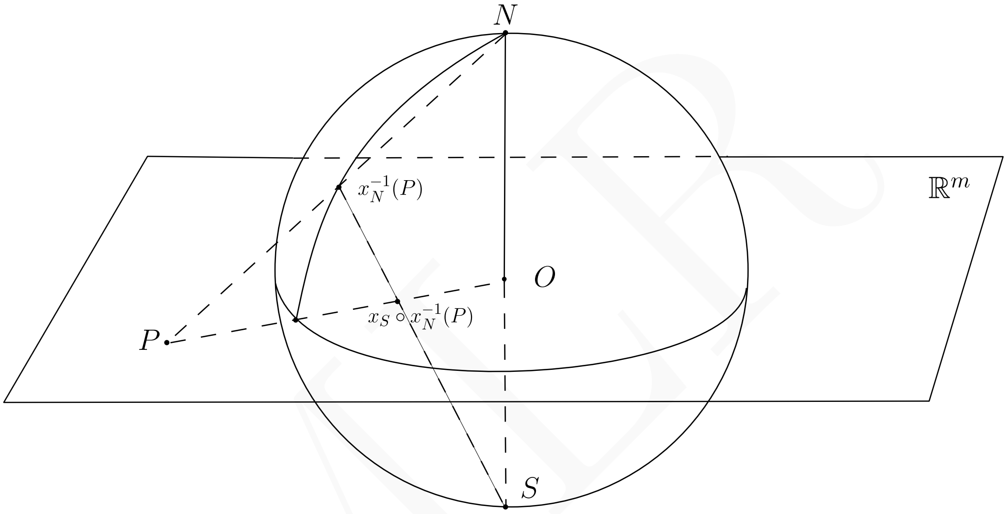

图 1.2: 球极投影

令 $N = (1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, S = (-1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$，$U_N = S^m - \{N\}, U_S = S^m - \{S\}$，定义

$$\begin{cases} x_N : U_N \to \mathbb{R}^m : (p_1, \cdots, p_{m+1}) \mapsto \dfrac{1}{1 - p_1}(p_2, \cdots, p_{m+1}) \\ x_S : U_S \to \mathbb{R}^m : (p_1, \cdots, p_{m+1}) \mapsto \dfrac{1}{1 + p_1}(p_2, \cdots, p_{m+1}) \end{cases}$$

考虑转移映射：$x_S \circ x_N^{-1} : \mathbb{R}^m - \{0\} \to \mathbb{R}^m - \{0\}, P \mapsto \dfrac{P}{|P|^2}$ $x_N \circ x_S^{-1} : \mathbb{R}^m - \{0\} \to \mathbb{R}^m - \{0\}, P \mapsto \dfrac{P}{|P|^2}$ 均为 C^∞ 可微映射，从而 $\mathcal{A} = \{(U_N, x_N), (U_S, x_S)\}$ 为一个 S^m 上的 C^∞ 图册，它确定了 S^m 上一个 C^∞ 光滑结构 $\widehat{\mathcal{A}}, (S^m, \widehat{\mathcal{A}})$ 称为标准的 m 维球面.

Example 1.1.3 $\mathbb{R}P^m$

在 $\mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$ 中，定义等价关系 $\sim$: $p \sim q \iff \exists\, 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}, p = \lambda q$，令 $\mathbb{R}P^m = \mathbb{R}^{m+1} - \{0\}/\sim$，且 $\pi : \mathbb{R}^{m+1} - \{0\} \to \mathbb{R}P^m, p \mapsto [p]$ 为自然投影，在 $\mathbb{R}P^m$ 中赋予商拓扑（由 π 和 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的拓扑诱导）.

$\forall k \in \{1, \cdots, m+1\}$，令 $U_k = \{[P] = [(p_1, \cdots, p_{m+1})] \in \mathbb{R}P^m | p_k \neq 0\}$，定义坐标图卡：

$$x_k : U_k \to \mathbb{R}^m, [p] \mapsto (\frac{p_1}{p_k}, \cdots, \frac{p_{k-1}}{p_k}, \hat{1}, \frac{p_{k+1}}{p_k}, \cdots, \frac{p_{m+1}}{p_k})$$

若 $[p]=[q]$，则 $\exists\, 0\neq\lambda\in\mathbb{R}, p=\lambda q$，从而 $x_k([p])=x_k([q])$，故上述定义良定，再考虑转移映射:

$$x_k\circ x_l^{-1}\Big|_{x_l(U_l\cap U_k)}: x_l(U_l\cap U_k)\to\mathbb{R}^m, (\frac{p_1}{p_l},\cdots,\frac{p_{l-1}}{p_l},\widehat{1},\frac{p_{l+1}}{p_l},\cdots,\frac{p_{m+1}}{p_l})\mapsto(\frac{p_1}{p_k},\cdots,\frac{p_{k-1}}{p_k},\widehat{1},\frac{p_{k+1}}{p_k},\cdots,\frac{p_{m+1}}{p_k})$$

易知其为 C^ω 映射，从而 $\mathcal{A}=\{(U_k,x_k)|k=1,\cdots,m+1\}$ 为 $\mathbb{R}P^m$ 上的一个 C^ω 图册，$(\mathbb{R}P^m,\widehat{\mathcal{A}})$ 称为 m 维实射影空间.

Example 1.1.4

$\widehat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 为延拓的复平面，定义 $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}, U_0=\mathbb{C}, U_\infty=\widehat{\mathbb{C}}-\{0\}$.

令 $x_0:U_0\to\mathbb{C}, z\mapsto z, x_\infty:U_\infty\to\mathbb{C}, w\mapsto 1/w$，考虑转移映射 $x_\infty\circ x_0^{-1}$ 和 $x_0\circ x_\infty^{-1}:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}^*, z\mapsto 1/z$ 为解析的，故 $\mathcal{A}=\{(U_0,x_0),(U_\infty,x_\infty)\}$ 为 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的一个 C^ω 图册，从而 $(\widehat{\mathbb{C}},\widehat{\mathcal{A}})$ 称为 Riemann 球面.

Proposition 1.1.1 乘积流形

$(M_1,\widehat{\mathcal{A}}_1)$ 和 $(M_2,\widehat{\mathcal{A}}_2)$ 为两个可微流形，令 $M=M_1\times M_2=\{(p_1,p_2)|p_1\in M_1,p_2\in M_2\}$ 其上赋予乘积拓扑，则

- M 上存在可微图册 $\mathcal{A}, s.t.(M,\widehat{\mathcal{A}})$ 为一个可微流形;
- $\dim M=\dim M_1+\dim M_2$.

证明留作习题.

Definition 1.1.4 子流形

设 m,n 为两个自然数，$n>m, n\geq 2$，且 $(N^n,\widehat{\mathcal{B}})$ 为一个可微流形，N^n 的一个子集 M 称为一个**子流形**，若满足 $\forall p\in M,\exists$ 图卡 $(U_p,x_p)\in\widehat{\mathcal{B}}, s.t. p\in U_p$ 且 $x_p:U_p\to\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{n-m}$，使得

$$x_p(U_p\cap M)=x_p(U_p)\cap(\mathbb{R}^m\times\{0\})$$

M 的维数为 m，$n-m$ 称为 M 在 N 中的**余维数**.

Remark 1.1.2

此处 N^n 表示 N 是 n 维流形.

Question: N 的子流形 M 是否为一个流形?

Proposition 1.1.2

$(N^n,\widehat{\mathcal{B}})$ 为一个流形，M 是 N^n 的一个子流形，则 M 上赋予子空间拓扑，取 $\pi:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{n-m}\to\mathbb{R}^m$ 为自然投影，则

$$\mathcal{A}=\{(U_p\cap M,\pi\circ x_p)|p\in M\}$$

为 M 上的一个图册，特别的,$(M,\widehat{\mathcal{A}})$ 为一个 m 维流形，$\widehat{\mathcal{A}}$ 称为由 N 诱导的微分结构.

证明留作练习.

Theorem 1.1.1 反函数定理

$U\subset\mathbb{R}^n$ 为一个开集，$F:U\to\mathbb{R}^n,(x_1,\cdots,x_n)\mapsto(F_1,\cdots,F_n)$ 为一个 C^r 映射, 其中 $F_i:U\to\mathbb{R}$，若 $\exists\, p\in U$ 且 $DF_p=(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p)):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 在点 p 处可逆，则 $\exists\, p$ 点处的开邻域 U_p 以及 $q=F(p)$ 的开邻域 V_q，使得 $\widehat{F}:F|_{U_p}:U_p\to V_q$ 为一个双射，且逆映射 $(\widehat{F})^{-1}:V_q\to U_p$ 为 C^r 映射，i.e. $\widehat{F}$ 为 C^r 微分同胚；同时切映射 $D(\widehat{F})^{-1}{}_q$ 满足 $D(\widehat{F})^{-1}{}_q=(D\widehat{F}_p)^{-1}$.

Definition 1.1.5 正则值

$U \subset \mathbb{R}^n, F: U \to \mathbb{R}^m$ 为 C^r 映射，若 $p \in U$ 处切映射 $DF_p = (\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(p))_{m\times n}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 满足 $\operatorname{rank}(DF_p) = m$，则称 p 为 F 的一个**正则点**，又若 $\operatorname{rank}(DF_p) < m$，则称 p 为 F 的一个**临界点**；一个点 $q \in F(U)$ 称为**正则值**，若 $F^{-1}(q)$ 中的每一个点都是正则点，否则 q 点称为**临界值**.

Remark 1.1.3

(1) 若 p 为 F 的正则点，则 $n \geq m$;

(2) p 为正则点 $\iff$ DF_p 为一个满射;

(3) p 为正则点 $\iff$ ∇F_i 线性无关 $\iff$ $\det\left((DF_p)_{m\times n}(DF_p)^t_{n\times m}\right) > 0$.

Example 1.1.5

$F: \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}, (x_1, \cdots, x_{m+1}) \mapsto \sum x_i^2$.

由 $(DF_p) = \operatorname{diag}(2x_1, \cdots, 2x_{m+1})(p) = 2p_i$，易知 1 为 F 的一个正则值，$F^{-1}(1) = S^m(1) = \{(x_1, \cdots, x_{m+1}) | x_1^2 + \cdots + x_{m+1}^2 = 1\}$ 为一个 m 维流形.

Example 1.1.6

$F: \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^2, (p, v) \mapsto \left(\dfrac{|p|^2 - 1}{2}, \langle p, v\rangle\right)$.

考虑切映射：

$$DF_{(p,v)} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ v & p \end{pmatrix}_{2\times(2m+2)}$$

从而

$$\det(DF\cdot(DF)^t) = \det\begin{pmatrix} p & 0 \\ v & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p^t & v^t \\ 0 & p^t \end{pmatrix} = |p|^2(|v|^2 + |p|^2) - \langle p, v\rangle^2$$

考虑 $F^{-1}(0) = \{(p, v) | |p|^2 = 1, \langle p, v\rangle = 1\}$（为 S^m 的切丛，实际为一个 2m 维流形）上，有

$$\det(DF\cdot(DF)^t) = 1 + |v|^2$$

则 0 为 F 的一个正则值.

Question: 正则值的原像是否为一个流形？

Theorem 1.1.2 隐函数定理

给定 $m < n, F: U \to \mathbb{R}^m$ 为 C^r 映射，U 为 $\mathbb{R}^n$ 的开子集，若 $q \in F(U)$ 为 F 的正则值，则 $F^{-1}(q)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 一个 $(n-m)$ 维子流形.

证明留作练习（由经典隐函数定理 + 子流形定义）.

1.2 流形间的映射

Definition 1.2.1 流形之间的可微映射

$(M^m, \widehat{\mathcal{A}})$ 和 $(N^n, \widehat{\mathcal{B}})$ 为两个 C^r 流形，一个映射 $\phi : M \to N$ 称为 C^k **可微映射** $(k \leq r)$，若对图卡 $(U, x) \in \widehat{\mathcal{A}}, (V, y) \in \widehat{\mathcal{B}}$，映射

$$y \circ \phi \circ x^{-1}|_{x(U \cap \phi^{-1}(V))} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

是 C^r 的；特别的，可微映射 $\nu : I = (0,1) \to M$ 称为 M 中的**可微曲线**，可微映射 $f : M \to \mathbb{R}$ 称为 M 上的**可微函数**，光滑流形 M 上的全体光滑函数记为 $C^\infty(M)$.

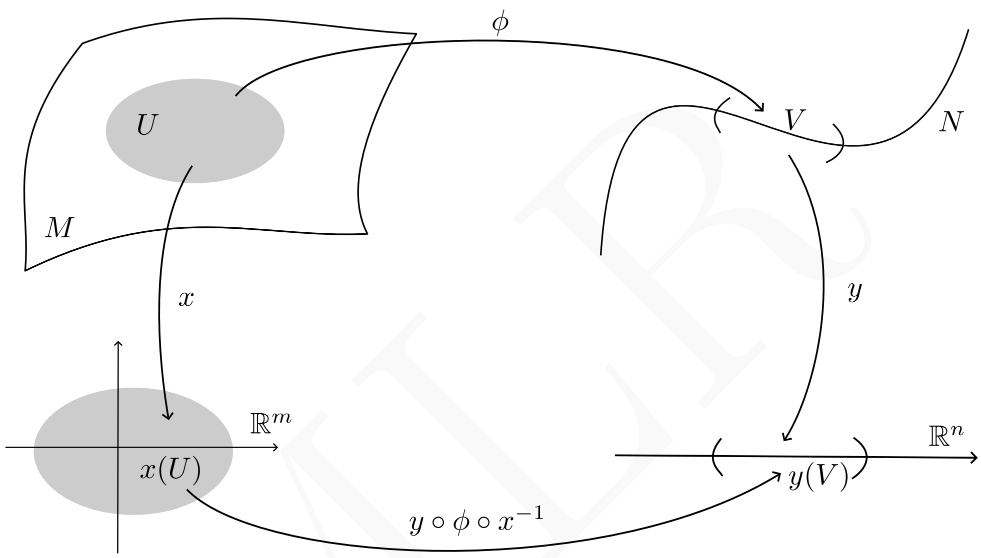

图 1.3: 可微映射

Proposition 1.2.1 复合映射的可微性

$(M_1, \widehat{\mathcal{A}}_1), (M_2, \widehat{\mathcal{A}}_2)$ 和 $(M_3, \widehat{\mathcal{A}}_3)$ 为 C^r 流形，$\phi : M_1 \to M_2, \psi : M_2 \to M_3$ 均为 C^k 映射 $(k \leq r)$，则 $\psi \circ \phi : M_1 \to M_3$ 也为 C^k 映射.

证明留作练习.

Definition 1.2.2 微分同胚

$(M_1, \widehat{\mathcal{A}}_1)$ 和 $(M_2, \widehat{\mathcal{A}}_2)$ 为两个 C^r 微分流形，若 $\exists$ 一个 C^r 可微映射 $\phi : M_1 \to M_2$ 为双射，且 $\phi^{-1} : M_2 \to M_1$ 也是 C^r 的，则称 ϕ 为 M_1 与 M_2 的一个**微分同胚**，此时 M_1, M_2 是**微分同胚的**.

Definition 1.2.3 不同的微分结构

$(M, \mathcal{T})$ 上有两个 C^r 可微结构 $\widehat{\mathcal{A}}$ 和 $\widehat{\mathcal{B}}$，若 $id_M : (M, \widehat{\mathcal{A}}) \to (M, \widehat{\mathcal{B}}), p \mapsto p$ 不是微分同胚，则称 $\widehat{\mathcal{A}}$ 和 $\widehat{\mathcal{B}}$ 是不同的微分结构.

Remark 1.2.1

$\mathbb{R}^1$ 有不同的微分结构，如 $(\mathbb{R}^1, \widehat{\mathcal{A}}), (\mathbb{R}^1, \widehat{\mathcal{B}})$，其中 $\widehat{\mathcal{A}} = \{(\mathbb{R}^1, \mathrm{id})\}$，$\widehat{\mathcal{B}} = \{(\mathbb{R}^1, f) | f : x \mapsto x^3\}$，但两者是微分同胚的.

- $\widehat{\mathcal{A}}$ 和 $\widehat{\mathcal{B}}$ 是不相容的，$\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ 不是一个微分同胚.
- $\exists$ 微分同胚 $\phi:(\mathbb{R}^1,\widehat{\mathcal{A}})\to(\mathbb{R}^1,\widehat{\mathcal{B}}), x\mapsto x^{1/3}, s.t. f\circ\phi\circ\mathrm{id}^{-1}=\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Theorem 1.2.1

$(M_1^m,\widehat{\mathcal{A}}_1),(M_2^m,\widehat{\mathcal{B}})$ 都为 m 维流形，若 M_1^m, M_2^m 为同胚的拓扑空间，且 $m\leq 3$，则 $(M_1^m,\widehat{\mathcal{A}}_1)$ 和 $(M_2^m,\widehat{\mathcal{A}}_2)$ 为微分同胚的.

Theorem 1.2.2 (Milnor,1959)

S^7 有 28 种互不微分同胚的微分结构.

Proposition 1.2.2

$M_1\subset N_1$ 为子流形，$M_2\subset N_2$ 为子流形，$\phi:N_1\to N_2$，且 $\phi(M_1)\subset M_2$，则 $\phi|_{M_1}:M_1\to M_2$ 也为一个 C^r 可微映射.

证明留作练习.

Example 1.2.1

- $\phi_1: S^2\subset\mathbb{R}^3\to S^3\subset\mathbb{R}^4, (x,y,z)\mapsto(x,y,z,0)$;
- （Hopf 映射）$\phi_2: S^3\subset\mathbb{C}^2\to S^2\subset\mathbb{C}\times\mathbb{R}, (z_1,z_2)\mapsto(2z_1\overline{z}_2, |z_1|^2-|z_2|^2)$;
- (万有覆盖映射）$\phi_3:\mathbb{R}^1\to S^1\subset\mathbb{C}, t\mapsto e^{it}$;
- $\phi_4:\mathbb{R}^{m+1}-\{0\}\to S^m\subset\mathbb{R}^{m+1}, x\mapsto\dfrac{x}{|x|}$;
- $\phi_5: S^m\subset\mathbb{R}^{m+1}\to\mathbb{R}P^m\subset\mathbb{R}^{m+1}, x\mapsto[x]$.

1.3 Lie 群

Definition 1.3.1 Lie 群

G 是一个光滑流形，且 G 为一个群（乘积为 $\cdot$），映射 $\rho: G\times G\to G, (p,q)\mapsto p\cdot q^{-1}$ 是光滑的，则称 G 为一个 **Lie 群 (Lie Group)**；左作用 $L_p: G\to G, q\mapsto p\cdot q$ 为光滑的.

Example 1.3.1

$(\mathbb{R}^m,+)$ 为加法群，$f:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m, (x,y)\mapsto x-y$ 为光滑映射，故 $(\mathbb{R}^m,+)$ 为一个 Lie 群.

Proposition 1.3.1

$(G,\cdot)$ 为一个 Lie 群，K 作为 G 的一个子流形，且 K 为 G 的一个子群，则 $(K,\cdot)$ 也为一个 Lie 群，称为 $(G,\cdot)$ 的一个 **Lie 子群**.

Proof: 显然（由 Prop 1.2.2）.

Example 1.3.2

- $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ 为一个 Lie 群，考虑映射 $f : (z_1, z_2) \mapsto \frac{z_1}{z_2}$;
- $(S^1, \cdot) \subset (\mathbb{C}^*, \cdot)$ 为一个 Lie 子群（紧的）.

Example 1.3.3

- 四元数体 $\mathbb{H} = \{z + wj | z, w \in \mathbb{C}\}, (\mathbb{H}^*, \cdot)$ 是一个 Lie 群，维数为 4；考虑数量积 $* : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}, (p, q) \mapsto p \cdot \overline{q}$，且 $p * p = (z + wj) \cdot (\overline{z} - wj) = z \cdot \overline{z} + w \cdot \overline{w} = |z|^2 + |w|^2 \in \mathbb{R}^+$
- $S^3 = \{z + wj | (z + wj) * (z + wj) = 1\}$ 是 $(\mathbb{H}^*, \cdot)$ 的一个紧的 Lie 子群.

在四元数体上有共轭运算 $\overline{*}$，加法 $+$，乘法 $\cdot$ 满足

- $\overline{z + wj} = \overline{z} - wj$
- $(z_1 + w_1 j) \cdot (z_2 + w_2 j) = (z_1 z_2 - w_1 \overline{w}_2) + (z_1 w_2 + w_1 \overline{z}_2) j$

Example 1.3.4

- 一般线性群：$GL_m(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | \det(A) \neq 0\}$，考虑 $(GL_m(\mathbb{R}), \cdot)$ 是非交换群，其中 $\cdot$ 为矩阵乘法，$GL_m(\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}^{m \times m}$ 的一个开子流形，$\dim(GL_m(\mathbb{R})) = m^2$，映射 $\rho : GL_m(\mathbb{R}) \times Gl_m(\mathbb{R}) \to GL_m(\mathbb{R}), (A, B) \mapsto A \cdot B^{-1}$ 为光滑的，于是 $(GL_m(\mathbb{R}), \cdot)$ 为一个 Lie 群;
- 特殊线性群：$SL_m(\mathbb{R}) = \{A \in GL_m(\mathbb{R}) | \det(A) = 1\}$ 为 $GL_m(\mathbb{R})$ 的一个 Lie 子群，且 $\dim(SL_m(\mathbb{R})) = m^2 - 1$;
- 正交群 $O(m) = \{A \in GL_m(\mathbb{R}) | A \cdot A^t = E_m\}$ 为 $GL_m(\mathbb{R})$ 的一个 Lie 子群，且 $\dim(O(m)) = m(m-1)/2$;
- 特殊正交群 $SO(m) = \{A \in O(m) | \det(A) = 1\} = SL_m(\mathbb{R}) \cap O(m)$，是 $O(m)$ 的一个 Lie 子群，且 $\dim(SO_m) = m(m-1)/2$.

Chapter 2

切空间 (Tangent Space)

2.1 欧式空间中的切向量与切空间

回顾 $\mathbb{R}^m$ 中的切空间结构，切向量可通过两种等价方式定义：

(1) **几何定义**：通过过点 p 的可微曲线定义，设 $\gamma : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ 满足 $\gamma(0) = p$，则切向量为

$$\gamma'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t}$$

(2) **代数定义**：通过方向导数定义，对向量 $v \in \mathbb{R}^m$ 和函数 $f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^m)$，方向导数算子定义为

$$\partial_v f := \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t} = \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_p$$

方向导数算子满足以下基本性质：

- **线性性**：$\partial_v(\lambda f + \mu g) = \lambda \partial_v f + \mu \partial_v g,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- **Leibniz 律**：$\partial_v(f \cdot g)(p) = \partial_v f \cdot g(p) + f(p) \cdot \partial_v g$
- **线性组合**：$\partial_{(\lambda v + \mu w)} f = \lambda \partial_v f + \mu \partial_w f$

本课程先采用第二种抽象定义方法引入切空间概念.

Definition 2.1.1 $\mathbb{R}^m$ 上的切空间

对任意点 $p \in \mathbb{R}^m$，其**切空间** $T_p\mathbb{R}^m$ 定义为满足以下条件的**切向量**集合：

$$T_p\mathbb{R}^m = \left\{\alpha : C_p^\infty(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R} | \alpha \text{ 满足下述公理}\right\}$$

- $\alpha(\lambda f + \mu g) = \lambda \alpha(f) + \mu \alpha(g)$;
- $\alpha(f \cdot g) = \alpha(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot \alpha(g)$
- $\alpha(c) = 0, c$ 为 $\mathbb{R}^m$ 上的常值函数.

在此定义下，$T_p\mathbb{R}^m$ 通过自然的加法和数乘运算构成一个 m 维实线性空间.

Theorem 2.1.1

$\forall p \in \mathbb{R}^m, \Phi : \mathbb{R}^m \to T_p\mathbb{R}^m, v \mapsto \partial_v$ 为向量空间之间的同构.

为证明该定理，需要如下引理：

Lemma 2.1.1 光滑函数分解

设 $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 为光滑函数，$p \in U$，则对任意 $x \in U$，存在光滑函数 $\psi_k : U \to \mathbb{R}$ 使得：

$$f(x) = f(p) + \sum_{k=1}^m (x_k - p_k)\psi_k(x),\ \text{且}\ \psi_k(p) := \partial_k f(p)$$

Proof: 考虑

$$
\begin{aligned}
f(x)-f(p) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(p+t(x-p))\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=1}^m (x_k-p_k)\frac{\partial f}{\partial x_k}(p+t(x-p))\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^m (x_k-p_k)\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_k}(p+t(x-p))\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

取 $\psi_k(x)=\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_k}(p+t(x-p))\mathrm{d}t$ 即为所求.

下面回到 Thm 2.1.1的证明：

Proof: 显然是 Φ 线性映射

1. 先证 Φ 为单射：$\forall v\neq w\in\mathbb{R}^m$，则 $\exists\, u\in\mathbb{R}^m, s.t. \langle u,v\rangle\neq\langle u,w\rangle$，定义 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}, x\mapsto\langle u,x\rangle$ $\Rightarrow \partial_v f=\langle u,v\rangle, \partial_w f=\langle u,w\rangle$，从而是单射；
2. 证明 Φ 是满射，利用上述引理：

$$
\begin{aligned}
\alpha(f) &= \alpha(f(p)+\sum_{k=1}^m (x_k-p_k)\psi_k(x)) \\
&= \alpha(f(p)) + \sum_{i=1}^m \alpha(x_k-p_k) + \sum_{k=1}^m (x_k-p_k)|_{x=p}\alpha(\psi_k(x)) \\
&= 0+\sum_{k=1}^m \alpha(x_k)\frac{\partial f}{x_k}(p)+0 = \sum_{k=1}^m \alpha(x_k)\frac{\partial f}{x_k}(p)
\end{aligned}
$$

取 $v=\alpha(i_k), i_k:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}, (x_1,\cdots,x_m)\mapsto x_k$ 即有 $\Phi(v)=\alpha$.

Corollary 2.1.1

$\forall p\in\mathbb{R}^m$，若 $\{v_i\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一组基，则 $\{\partial_{v_i}\}$ 是 $T_p\mathbb{R}^m$ 的一组基（$\dim T_p\mathbb{R}^m=m$）.

2.2 流形上的切空间与切映射

Definition 2.2.1 流形上的切空间

M 为一个可微流形，$p\in M$ 处的**切向量**定义为：$X_p: C_p^\infty(M)\to\mathbb{R}$ 使得

- $X_p(\lambda f+\mu g)=\lambda X_p(f)+\mu X_p(g)$;
- $X_p(f\cdot g)=X_p(f)g(p)+f(p)X_p(g)$.

则 p 处的**切空间** $T_pM := \{X_p | X_p : C_p^\infty(M)\to\mathbb{R}$满足上述性质$\}$. 在 T_pM 上定义加法和数乘：$\forall\alpha,\beta\in T_pM,\lambda,\mu\in\mathbb{R},(\lambda\alpha+\mu\beta)(f)=\lambda\alpha(f)+\mu\beta(f)$，构成线性空间.

Definition 2.2.2 切映射

$\phi: M\to N$ 为光滑映射，$\phi(p)=q$ 其在 p 处的**切映射**定义为

$$
\mathrm{d}\phi_p : T_pM\to T_qN, X_p\mapsto \mathrm{d}\phi_p(X_p)=Y_q
$$

且对 $\forall f\in C_q^\infty(N), Y_q(f)=\mathrm{d}\phi_p(X_p)(f)=X_p(f\circ\phi)$.

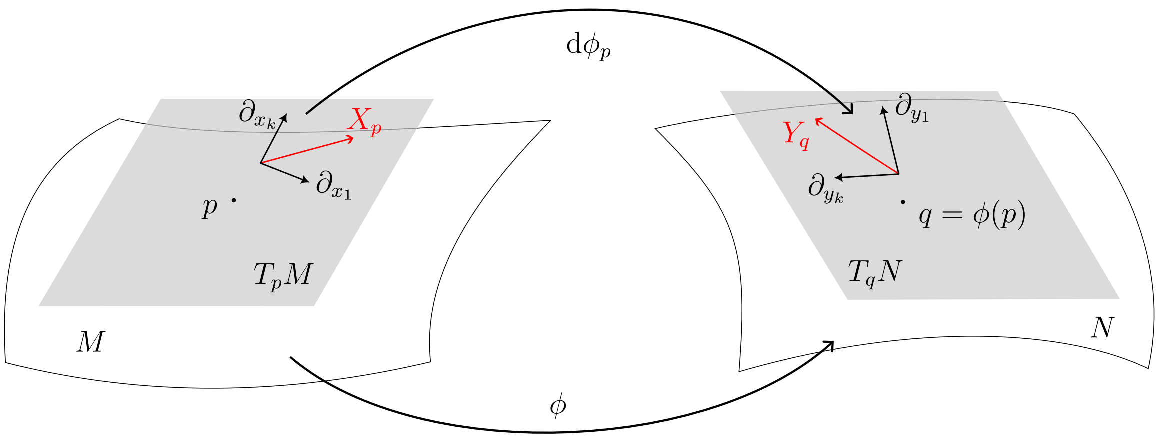

图 2.1: 切空间与切映射

Proposition 2.2.1

给定可微映射 $\phi: M \to N, \psi: N \to \bar{N}$，则

(1) $\mathrm{d}\phi_p: T_pM \to T_{\phi(p)}N$ 为线性的;

(2) $\mathrm{id}_M: M \to M, \mathrm{d}(\mathrm{id}_M)_p: T_pM \to T_pM$ 为 id_{T_pM};

(3) $\mathrm{d}(\psi \circ \phi)_p = \mathrm{d}\psi_{\phi(p)} \circ \mathrm{d}\phi_p$.

Proof: (1)(2) 显然，下证 (3):

$$\forall X_p \in T_pM, f \in C^\infty_{\psi\circ\phi(p)}(\bar{N}), \mathrm{d}(\psi \circ \phi)_p(X_p)(f) = X_p(f \circ \psi \circ \phi)$$

同时我们有：

$$\mathrm{d}\psi_{\phi(p)}\left(\mathrm{d}\phi_p(X_p)\right)(f) = \mathrm{d}\phi_p(X_p) \cdot (f \circ \psi) = X_p(f \circ \psi \circ \varphi)$$

故等式成立.

Corollary 2.2.1

$\phi: M \to N$ 为微分同胚，$\psi = \phi^{-1}: N \to M$，则 $\mathrm{d}\phi_p: T_pM \to T_{\phi(p)}N$ 为双射，且 $(\mathrm{d}\phi_p)^{-1} = \mathrm{d}\psi_{\phi(p)}$.

Proof:

$$\begin{cases} \mathrm{d}\psi_{\phi(p)} \circ \mathrm{d}\phi_p = \mathrm{d}(\psi \circ \phi)_p = \mathrm{d}(\mathrm{id}_M)_p = \mathrm{id}_{T_pM} \\ \mathrm{d}\phi_p \circ \mathrm{d}\psi_{\phi(p)} = \mathrm{d}(\phi \circ \psi)_{\phi(p)} = \mathrm{d}(\mathrm{id}_N)_{\phi(p)} = \mathrm{id}_{T_{\phi(p)}N} \end{cases}$$

Theorem 2.2.1

M^m 为一个 m 维可微流形，$\forall p \in M, T_pM$ 是一个 m 维实向量空间.

Proof: (U, x) 为 M 上包含 p 的一个局部坐标图卡，则 $\mathrm{d}x_p: T_pM \to T_{x(p)}\mathbb{R}^m$ 为一个向量空间同胚，由上述推论知结论成立.

T_pM 的**另一种观点**：取局部坐标图卡 (U,x)，考虑线性同构 $\mathrm{d}x_p : T_pM \to T_{x(p)}\mathbb{R}^m$，满足

$$\forall X_p \in T_pM,\ \exists v \in T_{x(p)}\mathbb{R}^m \text{ 使得} \mathrm{d}x_p(X_p) = v$$

存在可微曲线 $c : (-\varepsilon,\varepsilon) \to x(U)$ 满足 $c(0) = x(p)$ 且 $\dot{c}(0) = v$, 令 $\gamma = x^{-1} \circ c : (-\varepsilon,\varepsilon) \to U$ 为流形上过点 p 的可微曲线，满足 $\gamma(0) = p$.

Definition 2.2.3 切空间的另一种定义

定义曲线 $\gamma(t)$ 在 p 处的**切向量**为 $\dot{\gamma}(0) = \mathrm{d}x^{-1}_{x(p)}(v)$，则 $\dot{\gamma}(0) = X_p$ 由˙ 此可将切空间 T_pM 定义为过 p 点所有可微曲线切向量的集合.

对任意函数 $f : U \to \mathbb{R}$，按定义有

$$X_p(f) = \mathrm{d}x^{-1}_{x(p)}(v)(f) = v(f \circ x^{-1}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \circ x^{-1} \circ c(t)\bigg|_{t=0}$$

Remark 2.2.1

可以证明 $X_p(f)$ 与 (U,x) 以及 $c : (-\varepsilon,\varepsilon) \to x(U)$ 的选取无关.

Proposition 2.2.2

M^m 为可微流形，(U,x) 为局部坐标图卡，在 $\mathbb{R}^m$ 中取一组基底 $\{e_1,\cdots,e_m\}, \forall p \in M^m, p \in U$，定义 $\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p \in T_pM$ 如下：

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}, f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) := \partial_{e_k}(f \circ x^{-1})(x(p))$$

则 $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p\right\}$ 为 T_pM 的一组基底.

Proof: 由 $\mathrm{d}x_p : T_pM \to T_{x(p)}\mathbb{R}^m$ 为线性空间同构可知成立.

Example 2.2.1

考虑 $\gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \to S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ 为球面上一条可微曲线.

$\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$，则 $\gamma(t) \in S^m \iff \gamma(t)\cdot\gamma(t) = 1 \Rightarrow \dot{\gamma}(t)\cdot\gamma(t) = 0$ 从而

$$T_pM \subseteq \{v \in \mathbb{R}^{m+1} | \langle p, v\rangle = 0\}$$

由于维数相等，故两者相同.

Proposition 2.2.3

- $T_eGL_m(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{m\times m}$;
- $T_eSL_m(\mathbb{R}) = \{X_{m\times m} | trace(X) = 0\}$
- $T_eO(m) = \{X_{m\times m} | X^t + X = 0\}$

Definition 2.2.4 浸入，嵌入

$\phi : M \to N$ 为可微映射，$\forall p \in M, \mathrm{d}\phi_p : T_pM \to T_{\phi(p)}N$ 为单射，则称 ϕ 是一个**浸入**，若 ϕ 是浸入，且 $\phi : M \to \phi(M) \subset N$ 为同胚，则称 ϕ 是**嵌入**.

Example 2.2.2

- $\phi:[0,b]\to S^1:t\mapsto e^{2\pi it},b<1$ 为嵌入;
- $\phi_k:S^1\to\mathbb{C}(\mathbb{R}^2),z\mapsto z^k$ 是浸入，且 ϕ_k 为嵌入 $\iff k=\pm1$.

令 $\gamma_\omega:\mathbb{R}\to S^1,t\mapsto\omega e^{it}$ 为过 ω 的一条曲线，则

$$\dot{\gamma}_\omega(0)=i\omega\Rightarrow(\mathrm{d}\phi_k)_\omega(\dot{\gamma}_\omega(0))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi_k\circ\gamma_\omega(t))\Big|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega^ke^{ikt}\Big|_{t=0}=ki\omega^k$$

从而 $(\mathrm{d}\phi_k)_\omega:T_\omega S^1\to T_{\omega^k}\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2,i\omega\mapsto ki\omega^k$ 为单射.

Theorem 2.2.2 *Whitney 嵌入定理

给定 $1\le r\le\infty,\forall C^r$ 的 m 维可微流形 M，则 $\exists$ C^r 嵌入 $\phi:M\to\mathbb{R}^{2m+1}$，且 $2m+1$ 为最优.

Theorem 2.2.3 逆映射定理

给定可微映射 $\phi:M\to N,\dim M=\dim N$，$\phi(p)=q$，若 $\mathrm{d}\phi_p:T_pM\to T_qN$ 为线性同构，则 $\exists$ U_p 和 V_q 为两个开邻域，$s.t.$ $\psi=\phi|_{U_p}:U_p\to V_q$ 为微分同胚.

Definition 2.2.5 正则值

$\phi:M^m\to N^n,p\in M$，若 $\mathrm{d}\phi_p:T_pM\to T_{\phi(p)}N$ 不是满射，则称 p 为 ϕ 的一个**临界点**，若 $q\in\phi(M)$ 满足 $\forall p\in\phi^{-1}(q),p$ 都不为 ϕ 的临界点，则称 q 为 ϕ 的**正则值**，否则称为 ϕ 的**临界值**.

Theorem 2.2.4 正则值原像定理

映射 $\phi:M\to N(\dim M=m>\dim N=n)$，若 $q\in N$ 为 ϕ 的正则值，则 $\phi^{-1}(q)$ 为 $(m-n)$ 维子流形，且 $T_p\phi^{-1}(q)=\mathrm{Ker}(\mathrm{d}\phi_p)$.

Proof: 考虑 $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\phi^{-1}(q)$ 为一条可微曲线，$\gamma(0)=p$，则 $(\mathrm{d}\phi)_p(\dot{\gamma}(0))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi\circ\gamma(t))\Big|_{t=0}=0$ $\Rightarrow T_p\phi^{-1}(q)\subset\mathrm{Ker}(\mathrm{d}\phi_p)$，又因为维数相同，结论自然成立.

Remark 2.2.2

Def 2.2.5, Thm 2.2.3和2.2.4分别为 Def 1.1.5, Thm 1.1.1和1.1.2在流形上的推广，Thm 2.2.3进一步推广可以得到**秩定理** (Lemma ??) ，参考 GTM218.

Definition 2.2.6 淹没

给定映射 $\phi:M^m\to N^n,m>n$，若 $\forall p\in M^m,\mathrm{d}\phi_p:T_pM\to T_{\phi(p)}N$ 为满射，则称 ϕ 为**淹没**.

Example 2.2.3

- 投影映射 $\Pi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n,(x_1,\cdots,x_n,\cdots,x_m)\mapsto(x,\cdots,x_n)$ 为淹没;
- Hopf 映射为淹没（见 Ex 1.2.1）

Chapter 3

切丛 (Tangent Bundle)

3.1 向量丛

Definition 3.1.1 拓扑向量丛

拓扑向量丛为三元组 (E, M, π)，其中 E, M 为两个拓扑流形，$\pi : E \to M$ 为连续满射，并且满足

- $\forall p \in M, \pi^{-1}(p)$ 为一个 n 维实向量空间;
- （局部平凡化）$\forall p \in M, \exists$ 丛图卡 $(\pi^{-1}(U), \psi)$，使得 $p \in U$ 为开邻域，$\pi^{-1}(U)$ 为 E 中的开邻域，且 $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ 为一个同胚，$\forall q \in U, \psi_q = \psi|_{E_q=\pi^{-1}(q)} : E_q \to \{q\} \times \mathbb{R}^n$ 为向量空间的同构.

其中 M 称为**底流形** (/**基流形**)，$E_p = \pi^{-1}(p)$ 称为向量丛在 p 处的 n 维**纤维**.

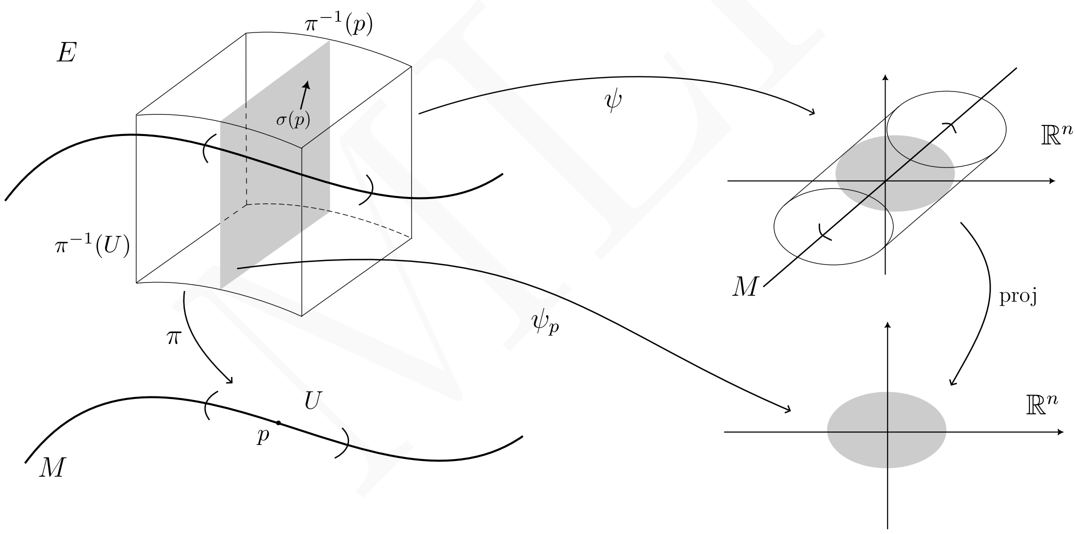

图 3.1: 向量丛与截面

Definition 3.1.2 平凡向量丛

M 上的 n 维拓扑向量丛称为**平凡的**，若 $\exists$ 整体（全局）的丛图卡 $\psi : E \to M \times \mathbb{R}^n$.

Definition 3.1.3 截面

$\sigma : M \to E$ 为连续映射，称为 (E, M, π) 的**截面**，若满足:$\pi \circ \sigma(p) = p, \forall p \in M$.

Example 3.1.1

$(M \times \mathbb{R}^n, M, \pi), \pi : M \times \mathbb{R}^n \to M, (x, v) \mapsto x, \psi : M \times \mathbb{R}^n \to M \times \mathbb{R}^n, (x, v) \mapsto (x, v)$（恒同映射）为一个整体坐标图卡 $\Rightarrow (M \times \mathbb{R}^n, M, \pi)$ 为 M 上平凡的拓扑向量丛.

Definition 3.1.4 丛坐标图册

(E,M,π) 为 M 上的 n 维拓扑向量丛

$$\mathcal{B}=\{(\pi^{-1}(U_\alpha),\psi_\alpha)|\alpha\in I\}$$

满足 $M=\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha$ 且 $\forall\alpha,\beta\in I$，若 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$，有映射：

$$A_{\alpha,\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\to GL_n(\mathbb{R})$$

成立：

$$\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}\Big|_{(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^n}:(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^n\to(U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^n,(p,v)\mapsto(p,A_{\alpha,\beta}(v))$$

将 $\{A_{\alpha,\beta}|\alpha,\beta\in I\}$ 称为 $\mathcal{B}$ 的**转移映射**，$\mathcal{B}$ 称为**丛图册**.

Definition 3.1.5 可微向量丛

(E,M,π) 为 M 上的 n 维拓扑向量丛，丛图册 $\mathcal{B}=\{(\pi^{-1}(U_\alpha),\psi_\alpha)|\alpha\in I\}$ 称为**可微的**，若转移映射 $A_{\alpha,\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\to GL_n(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 为可微的;(E,M,π) 称为**一个可微向量丛**，若其上存在一个极大可微图册 $\widehat{\mathcal{B}}$.

Definition 3.1.6 向量场

$\sigma:M\to E$ 为一个截面，且 σ 为可微的，则称 σ 是一个**向量场**. 特别的，若 (E,M,π) 为一个光滑向量丛，σ 为**光滑向量场**，令 $C^\infty(E)=\{\sigma|\sigma光滑\}$.

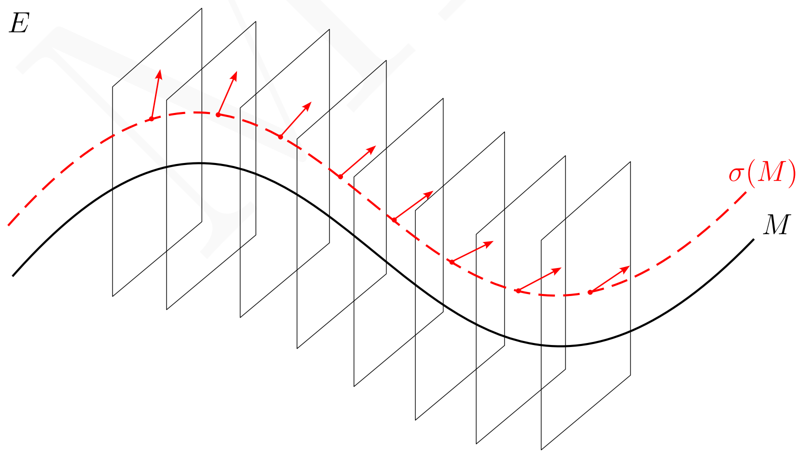

图 3.2: 向量场

Definition 3.1.7 局部标架

(E, M, π) 为 M 上的光滑向量丛，在 $C^\infty(E)$ 上定义

- $(+) : (v+w)_p = v_p + w_p, \forall v, w \in C^\infty(E)$
- $(\cdot) : (f \cdot v)_p = f(p) \cdot v(p), \forall v \in C^\infty(E), \forall f \in C^\infty(M)$

若 U 为 M 的一个开集，$\{v_1, \cdots, v_n\}$ 为 U 上的向量场（n 为纤维空间的维数），也即 $v_i : U \to E$，又若 $\forall p \in U, \{(v_i)_p\}$ 均线性无关，则称 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 为 E 的一个**局部标架**.

Remark 3.1.1

$C^\infty(E)$ 为交换环 $C^\infty(M)$ 上的一个模，且为 $\mathbb{R}^*$ 上的一个向量空间.

Example 3.1.2

$(M^n \times \mathbb{R}^n, M^n, \pi)$ 是一个平凡的可微向量丛，当 M 为可微流形.

Definition 3.1.8 切丛

给定 $(M, \widehat{\mathcal{A}})$ 为可微流形，以其为底流形的**切丛** (TM, M, π) 定义如下：

$$TM = \{(p, v) | p \in M, v \in T_pM\} = \bigsqcup_{p \in M} T_pM$$

$\pi : TM \to M, (p, v) \mapsto p$ 为满射, 且 $\pi^{-1}(p) = T_pM$ 为 n 维向量空间.

- TM 上的拓扑：对于 M 上图卡 $x : U \to \mathbb{R}^m$，定义

$$x^* : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \left(p, \sum_{k=1}^m v_k \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p\right) \mapsto (x(p), (v_1, \cdots, v_m))$$

考虑 $\{{x^*}^{-1}(W) \subset TM | (v, x) \in \widehat{\mathcal{A}}, W \subset x(U) \times \mathbb{R}^m \text{为开集}\}$ 是 TM 上的一个拓扑基，由它生成 TM 上的一个拓扑，且 $(\pi^{-1}(U), x^*)$ 为 TM 上的一个 $2m$ 维拓扑流形，记为 $(TM, \mathscr{T}_{TM})$

- TM 为 $2m$ 维微分流形：若 $(U, x), (V, y) \in \widehat{\mathcal{A}}$，且 $p \in U \times V$，则有转移映射

$$(y^*) \circ (x^*)^{-1} : x^*(\pi^{-1}(U \cap V)) \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$$

$$(a, b) \mapsto \left(y \circ x^{-1}(a), \sum_{k=1}^m \frac{\partial y_1}{\partial x_k}(x^{-1}(a)) b_k, \cdots, \sum_{k=1}^m \frac{\partial y_m}{\partial x_k}(x^{-1}(a)) b_k\right)$$

由于 $y \circ x^{-1}$ 为可微的，从而 $(y^*) \circ (x^*)^{-1}$ 也是可微的，也就有

$$\mathcal{A}^* = \{(\pi^{-1}(U), x^*) | (U, x) \in \widehat{\mathcal{A}}\}$$

为 TM 上的一个 C^{r-r} 可微图册，此时 $\pi : TM \to M$ 为可微的.

- 丛图册：$(U, x) \in \widehat{\mathcal{A}}$，定义

$$\overline{x} : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^m, \left(p, \sum_{k=1}^m v_k \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p\right) \mapsto (p, (v_1, \cdots, v_m))$$

则有 $\overline{x}_p = \overline{x}|_{T_pM} : T_pM \to \{p\} \times \mathbb{R}^m, \sum_{k=1}^m v_k \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p \mapsto (v_1, \cdots, v_m)$，导出：

$$\mathcal{B} = \{(\pi^{-1}(U), \overline{x}) | (U, x) \in \widehat{\mathcal{A}}\}$$

为一个丛图册，又由于转移映射

$$A_{\alpha,\beta}: U\cap V \to GL_n(\mathbb{R}), a \mapsto \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x^{-1}(a))\right)$$

是 C^{r-1} 的，综上，TM 为一个可微向量丛.

Definition 3.1.9 光滑切向量场

$C^\infty(TM) := \{TM$上的所有光滑截面$X: M\to TM\}$（经典微分几何符号习惯可记作 $\mathfrak{X}(M)$，纤维丛理论符号习惯可记作 $\Gamma(TM)$），此时 X 称为 M 上的一个**光滑切向量场**.

3.2 Lie 括号与 Lie 代数

Definition 3.2.1 Lie 括号

M 为光滑流形，$\forall X, Y \in C^\infty(TM)$，定义 Lie 括号：

$$[X,Y]_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}, f \mapsto X_p(Y(f)) - Y_p(X(f))$$

Proposition 3.2.1

- $[X,Y]_p(\lambda f + \mu g) = \lambda[X,Y]_p(f) + \mu[X,Y]_p(g)$
- $[X,Y]_p(f\cdot g) = [X,Y]_p(f)\cdot g(p) + f(p)\cdot[X,Y]_p(g)$

Proof:

$$\begin{aligned}
[X,Y]_p(\lambda f+\mu g) &= X_p\left(Y(\lambda f+\mu g)\right) - Y_p(X(\lambda f+\mu g))\\
&= X_p(\lambda Y(f)+\mu Y(g)) - Y_p(\lambda X(f) - \mu X(g))\\
&= \lambda X_p(Y(f)) + \mu X_p(Y(g)) - \lambda Y_p(X(f)) - \mu Y_p(X(g))\\
&= \lambda[X,Y]_p(f) + \mu[X,Y]_p(g)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[X,Y]_p(f\cdot g) =& X_p(Y(f\cdot g)) - Y_p(X(f\cdot g))\\
=& X_p(f\cdot Y(g) + g\cdot Y(f)) - Y_p(f\cdot X(g) + g\cdot X(f))\\
=& X_p(f)\cdot Y(g)(p) + X_p\cdot (Y(g))\cdot f(p) + X_p(g)\cdot Y(f)(p) + X_p(Y(f))\cdot g(p)\\
&- Y_p(f)\cdot X(g)(p) - f(p)\cdot Y_p(X(g)) - Y_p(g)\cdot X(f)(p) - g(p)\cdot Y_p(X(f))\\
=& f(p)\cdot [X,Y]_p(g) + g(p)\cdot[X,Y]_p(f)
\end{aligned}$$

Remark 3.2.1

$[X,Y]_p \in T_pM$.

Question: $X: M\to TM$ 的光滑性如何判断?

Lemma 3.2.1

给定 $X : M \to TM$ 为（切）向量场，则如下三条等价:

(1) X 为光滑向量场;

(2) (U, x) 为 M 的坐标图卡，$X|_U = \sum_{k=1}^{m} a_k(p) \frac{\partial}{\partial x_k}$，则 $a_1, \cdots, a_m : U \to \mathbb{R}$ 为光滑的;

(3) $f : V \to \mathbb{R}$ 为光滑函数，则 $X(f) : V \to \mathbb{R}$ 为光滑的，$X(f)(p) = X_p(f)$.

Proof:

- $(1) \Rightarrow (2)$：考虑如下复合映射：

$$x^* \circ X|_U : U(\to TM) \to x(U) \times \mathbb{R}^m, p \mapsto (p, \sum a_k \frac{\partial}{\partial x_k}) \mapsto (x(p), (a_1, \cdots, a_n))$$

  再复合投影 $\Pi_{m+k} \circ x^* \circ X|_U : U \to \mathbb{R}$，则 $a_k = \Pi_{m+k} \circ x^* \circ X|_U$ 为光滑映射.

- $(2) \Rightarrow (3)$：任取 (U, x), $s.t.\ U \subset V$，由 (2) 知

$$X(f|_U) = \sum_{k=1}^{m} a_k \frac{\partial}{\partial x_k}(f)$$

  为光滑的，从而 (3) 成立.

- $(3) \Rightarrow (1)$：要证 $X : M \to TM$ 为光滑的，也即证明：(U, x) 为 M 的局部坐标图卡，$x^* \circ X|_U : U \to \mathbb{R}^{2m} = x(U) \times \mathbb{R}^m$ 为光滑映射，只需考虑各个分量：

$$x_k^* := \Pi_k \circ x^* \circ X|_U : U \to \mathbb{R}$$

  显然为光滑函数（$\Pi_k \circ x^* \circ X|_U \circ x^{-1}$ 为恒同映射），以及

$$x_{m+k}^* := \Pi_{m+k} \circ x^* \circ X|_U : U \to \mathbb{R}, p \mapsto a_k(p)$$

  注意到 $a_k(p) = X_p(x_k)$，从而由条件知 a_k 是光滑的，进一步 $X_p = \sum_{k=1}^{m} a_k(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p$ 为光滑的.

Proposition 3.2.2

$X, Y \in C^\infty(TM), [X, Y] : M \to TM, p \mapsto [X, Y]_p$ 是光滑的.

Proof: $\forall f \in C^\infty(M), [X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$ 为光滑的，由上述引理 (3) 知 $[X, Y]$ 是一个光滑向量场.

Lemma 3.2.2

(1) $[X, fY] = X(f)Y + f[X, Y]$

(2) $[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)[X]$

Proof: 只需证明 (1)：$\forall g \in C^\infty(M)$，则

$$\begin{aligned}[X, fY](g) &= X(fY(g)) - fY(X(g)) = X(f)Y(g) + fXY(g) - fYX(g) \\ &= X(f)Y(g) + f[X,Y](g) = (X(f)Y + [X,Y])(g)\end{aligned}$$

Definition 3.2.2 Lie 代数

在向量空间 $(V, +, \cdot)$ 上，存在 Lie 括号运算 $[\cdot,\cdot]: V \times V \to V$，满足

- $[\lambda X + \mu Y, Z] = \lambda[X, Z] + \mu[Y, z], \forall X, Y, Z \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
- $[X, Y] = -[Y, X]$;
- $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

则称 $(V, [\cdot,\cdot])$ 为一个 **Lie 代数**.

Example 3.2.1

$(\mathbb{R}^3, \times)$，其中 $\times$ 表示外积，是一个 Lie 代数.

Theorem 3.2.1

向量空间 $C^\infty(TM)$ 配上 Lie 括号 $[\cdot,\cdot]: C^\infty(TM) \times C^\infty(TM) \to C^\infty(TM)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的 Lie 代数.

Definition 3.2.3 ϕ-相关向量场

$\phi: M \to N$ 为光滑满射，$X \in C^\infty(TM)$ 以及 $Y \in C^\infty(TN)$，若 $\mathrm{d}\phi_p(X_p) = Y_{\phi(p)}, \forall p \in M$，则称 Y 和 X 是 ϕ-相关的，此时我们记 $Y = \mathrm{d}\phi(X)$.

Proposition 3.2.3

$\phi: M \to N$ 为光滑满射，且 $\overline{X} = \mathrm{d}\phi(X), \overline{Y} = \mathrm{d}\phi(Y)$，则 $[\overline{X}, \overline{Y}] = \mathrm{d}\phi([X,Y])$，换言之：切映射与 Lie 括号可交换.

为证明该命题，需要如下 Claim：

Claim 3.2.1

$d\phi(Y)(f) \circ \phi = \overline{Y}(f) \circ Y(f \circ \phi)$

Proof: $\overline{Y}(f) \circ \phi(p) = \overline{Y}_{\phi(p)}(f) = \mathrm{d}\phi_p(Y)(f) = Y_p(f \circ \phi) = Y(f \circ \phi)(p)$

下面回到 Prop 3.2.3的证明

Proof: $f: N \to \mathbb{R}$ 为光滑函数，则

$$\begin{aligned}[\overline{X}, \overline{Y}](f) &= \mathrm{d}\phi(X)(\mathrm{d}\phi(Y)(f)) - \mathrm{d}\phi(Y)(\mathrm{d}\phi(X)(f)) \\ &= X(\mathrm{d}\phi(Y)(f) \circ \phi) - Y(\mathrm{d}\phi(X)(f) \circ \phi) \\ &= X(Y(f \circ \phi)) - Y(X(f \circ \phi)) \\ &= [X, Y](f \circ \phi) = \mathrm{d}\phi([X,Y])(f)\end{aligned}$$

Proposition 3.2.4

$\phi: M \to N$ 为光滑满射，$X, Y \in C^\infty(TM)$，则

(1) $\mathrm{d}\phi(X) \in C^\infty(TM)$;

(2) $\mathrm{d}\phi: C^\infty(TM) \to C^\infty(TN)$ 为 Lie 代数同态（线性且保 Lie 括号运算）

Definition 3.2.4 向量场的交换性

$X, Y \in C^\infty(TM)$，若 $[X, Y] = 0$，则称 X, Y 是**交换的**.

Example 3.2.2

令 (U, x) 为 M 的一个局部坐标图卡，$\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right\}_{i=1}^m$ 为一个局部标架.

简单计算可得：

$$\mathrm{d}x\left(\left[\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right]\right) = \left[\mathrm{d}x\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right), \mathrm{d}x\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right)\right] = [e_k, e_l] = 0 \Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right] = 0$$

Definition 3.2.5 Lie 群的 Lie 代数

G 为 Lie 群，$\forall p \in G, L_p: G \to G, g \mapsto p \cdot g$，一个向量场 $X \in C^\infty(TG)$，若满足**左不变性** (即 $\mathrm{d}L_p(X) = X, \forall p \in G \iff (\mathrm{d}L_p)_q(X_q) = X_{p\cdot q}, \forall p, q \in G$) 则称 X 为 G 的**左不变向量场**；

$$\mathfrak{g} = \{X | X\text{为}G\text{的左不变向量场}\}$$

称为 Lie 群 G 的 **Lie 代数**.

Proposition 3.2.5

$\mathfrak{g}$ 为 $C^\infty(TM)$ 的一个 **Lie 子代数**，也即 $\forall X, Y \in \mathfrak{g}, [X, Y] \in \mathfrak{g}$.

Proof: $(\mathrm{d}L_p)[X, Y] = [(\mathrm{d}L_p)(X), (\mathrm{d}L_p)(Y)] = [X, Y]$，从而 $[X, Y] \in \mathfrak{g}$.

Proposition 3.2.6

- $\mathfrak{g}$ 与 T_eG 同构由 $*: T_eG \to \mathfrak{g}, X \mapsto X^*: p \mapsto (\mathrm{d}L_p)_e(X)$ 给出，且

$$[\cdot\,,\,\cdot]: T_eG \times T_eG \to T_eG, [X, Y] = [X^*, Y^*]_e;$$

- 特别的，考虑 $G = GL_m(\mathbb{C})$ 或 $GL_m(\mathbb{R})$ 的 Lie 子群，则 T_eG 处的 Lie 括号由 $[X_e, Y_e] = X_eY_e - Y_eX_e$ 给出；
- $TG \cong G \times \mathbb{R}^n$.

Chapter 4
黎曼度量 (Riemannian Metric)

4.1 引言

回顾古典微分几何中，曲面的两种基本形式

$$I = \mathrm{d}s^2 = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2; II = -\mathrm{d}\mathbf{n} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2$$

分别对应主曲率 κ_1, κ_2.

Definition 4.1.1 曲率（Gauss 曲率）

给定曲面 S，考虑 Gauss 映射:

$$g : S \to S^2 \subset \mathbb{R}^3, p \mapsto \vec{n}_p$$

其切映射形如 $\mathrm{d}g_p : T_pS \to T_{g(p)}S^2$，则**曲率**定义如下：

$$K(p) = \det(\mathrm{d}g_p) = \kappa_1 \cdot \kappa_2$$

下面记录一些主要发展历史

(1) Gauss (1827.*General Investigation of Curved Surfaces*) 提出了曲面的曲率概念，标志了微分几何的成型. 并证明了 **Gauss 绝妙定理 (Gauss theorem egregium)**：$K(p)$ 只依赖于第一基本形式.

(2) Riemann (1854.*On the Hypotheses Which Lie at the Foundation of Geometry*) 提出了 Riemann 曲率的概念以及一些公式

   (i) 介绍了流形的概念和锥形

   (ii) 在每一点处赋予了一个二次型的度量.

   (iii) 将 Gauss 曲率推广到 n 维流形.

(3) H.Weyl (1913.*The Concept of a Riemann Surface*) 严格给出了流形的定义

(4) Ricci, Levi-Civita, Einstein, E.Cartan, S.S.Chern, S.T.Yau

4.2 黎曼度量

Definition 4.2.1 Riemann 度量

设 M 是一个 n 维可微（光滑）流形，若 $\forall p \in M$，在 p 点处的切空间 T_pM 上赋予内积（对称，双线性，正定的二次型）

$$g := \langle \cdot , \cdot \rangle_p$$

且此内积可微（光滑）依赖于 $p \iff (U, x)$ 为 M 的局部坐标图卡，则 $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right\rangle_p = g_{ij}(p)$ 为可微（光滑）的，此时称 (M, g) 为一个 m 维的**黎曼流形**，g 称为 M 上的一个**黎曼度量**.

Remark 4.2.1

(1) 上述定义不依赖于局部坐标系的选取.

(2) $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}, (X, Y) \mapsto g_p(X, Y)$ 为一个 $(0, 2)$ 型张量.

Definition 4.2.2 等距

M, N 为两个 Riemann 流形，$\phi : M \to N$ 是微分同胚，若 $\forall p \in M, \forall X, Y \in T_pM$，均满足

$$\langle X, Y\rangle_p = \langle(\mathrm{d}\phi)_pX, (\mathrm{d}\phi)_pY\rangle_{\phi(p)} \tag{$*$}$$

则称 ϕ 为一个等距.

Definition 4.2.3 局部等距

$\phi : M \to N$ 可微，$\forall p \in M, \exists\ p$ 的邻域 $U \subset M$，使得

$$\phi|_U : U \to \phi(U)$$

是微分同胚，且 $\forall X, Y \in T_pM$ 满足 $(*)$，则称 M 与 N 为局部等距的.

Example 4.2.1

$M = \mathbb{R}^n, \dfrac{\partial}{\partial x_i} = e_i, g$ 由 $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ 给出，则 $\mathbb{E}^n = (\mathbb{R}^n, g)$ 称为 n 维欧氏空间.

Example 4.2.2 浸入流形

$f : M^n \to N^{n+k}$ 为浸入，若 N^{n+k} 上有 Riemann 度量，则 f 可以诱导 M 上的 Riemann 度量，也即 $\forall p \in M, \forall X, Y \in T_pM$

$$\langle X, Y\rangle_p := \langle(\mathrm{d}f)_pX, (\mathrm{d}f)_pY\rangle_{f(p)}$$

则称 f 为等距浸入.

Proof: $\langle X, X\rangle_p = \langle(\mathrm{d}f)_pX, (\mathrm{d}f)_pX\rangle = 0 \iff (\mathrm{d}f)_pX = 0$，又因为 f 是浸入，从而 $(\mathrm{d}f)_p$ 是单射，也即 $(\mathrm{d}f)_pX = 0 \iff X = 0$，从而正定性得证.

Remark 4.2.2

特别的，$h : M^{n+k} \to N^k$ 为可微映射，$q \in N^k$，且 q 为 h 的正则值，则 $\mathrm{d}h_p : T_pM \to T_{h(p)}N, (p \in h^{-1}(q))$ 是满射，故 $h^{-1}(q)$ 为 M^{n+k} 的一个 n 维子流形，可以将 M 上的度量诱导到 $h^{-1}(q)$ 上.

Example 4.2.3

$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_i) \mapsto \sum x_i^2$，1 为 h 的一个正则值，且 $h^{-1}(1)$ 为 $n-1$ 维单位球面，将 $\mathbb{R}^n$ 中的度量诱导到 S^{n-1}，称为 S^{n-1} 的标准度量.

Example 4.2.4 Lie 群

G 为一个 Lie 群，有黎曼度量 g，若满足 $\forall x \in G$

$$\langle X, Y\rangle_y = \langle (\mathrm{d}L_x)_y X, (\mathrm{d}L_x)_y Y\rangle_{L_x(y)}$$

则称为 g 是 G 的一个**左不变度量** (i.e. L_x 为一个等距)，类似的可以定义**右不变度量**，若 g 既是左不变又是又不变度量，则称为一个**双不变度量**. 若 G 为紧李群（或 Abel 李群），则 G 上一定存在双不变度量.（项武义《李群讲义》）

Definition 4.2.4 乘积度量

设 $(M_1, g_1), (M_2, g_2)$ 为两个黎曼流形，

$$\pi_1 : M_1 \times M_2 \to M_1, \pi_2 : M_1 \times M_2 \to M_2$$

为两个自然投影，则在 $M_1 \times M_2$ 上考虑度量如下：

$$\langle X, Y\rangle_{(p,q)} = \langle \mathrm{d}\pi_1(X), \mathrm{d}\pi_1(Y)\rangle_p + \langle \mathrm{d}\pi_2(X), \mathrm{d}\pi_2(Y)\rangle_q$$

上述度量称为**乘积度量**.

Example 4.2.5

$T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$(共 n 个)，在每一个 S^1 上赋予 $\mathbb{R}^2$ 上的诱导度量，在 T^n 上取乘积度量，则 T^n 加此度量称为**平环**.

Example 4.2.6 双曲空间

令 $B_1^m(O) = \{x \in \mathbb{R}^m | |x| < 1\}$，在其上赋予 Riemann 度量

$$g_x(X, Y) = \frac{4}{(1 - |x|^2)^2}\langle X, Y\rangle(\text{欧氏标准内积})$$

则 $(B_1^m(O), g)$ 称为 m 维**双曲空间**，当 $m = 2$ 时，它为著名的 Poincaré 度量.

Question：给定一个流形 M，其上是否存在 Riemann 度量？

Proposition 4.2.1

M 为一个微分流形 (Hausdorff, 可数拓扑基)，则其上一定存在 Riemann 度量.

Definition 4.2.5 局部有限覆盖

$V_\alpha \subset M$ 为一族开集，且 $\bigcup_\alpha V_\alpha = M$，若 $\forall p \in M, \exists\, p$ 点的一个邻域 W，使得 $W \cap V_\alpha \neq \varnothing$ 对于有限个 α 成立，则称 $\{V_\alpha\}$ 是 M 的**局部有限覆盖**.

$f : M \to \mathbb{R}$ 为可微函数，其**支集**记为：$\operatorname{supp} f = \overline{\{p \in M | f(p) \neq 0\}}$.

Definition 4.2.6 单位分解

给定 $\{f_\alpha\}$ 为可微函数族，$f_\alpha : M \to \mathbb{R}$，若它满足：

- $f_\alpha \geq 0, \operatorname{supp} f_\alpha \subset U_\alpha, (U_\alpha, x)$ 为 M 的图册；
- $\{U_\alpha\}$ 为局部有限覆盖
- $\sum_\alpha f_\alpha(p) = 1, \forall p \in M$

则称 $\{f_\alpha\}$ 为从属于 (U_α, x) 的一个单位分解.

Lemma 4.2.1

对任意的可微流形 M 存在单位分解.

Proposition 4.2.2

M 为一个可微（光滑）流形，则 M 上存在一个 Riemann 度量.

Proof: 由上述引理，M 上存在一个单位分解 $\{f_\alpha\}$，且 f_α 从属于局部有限的坐标图卡 (U_α, x_α) 对于每一个 U_α，由于 $x_\alpha : U_\alpha \to x_\alpha(U_\alpha)$ 是微分同胚，$\forall p \in M; X, Y \in T_pM$，定义：

$$\langle X, Y\rangle_p^\alpha := \langle (\mathrm{d}x_\alpha)_p(X), (\mathrm{d}x_\alpha)_p(Y)\rangle_{x_\alpha(p)}$$

右边取经典欧式内积，再令：

$$\langle X, Y\rangle_p = \sum_\alpha f_\alpha(p)\langle X, Y\rangle_p^\alpha$$

易知 $\langle X, Y\rangle_p$ 是 M 上一个 Riemann 度量.

Definition 4.2.7 曲线的长度

给定 $\gamma : I = [a, b] \to M$ 是 M 上一条可微曲线，则 γ 的长度定义为：

$$L(\gamma) = \int_a^b \left\langle \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} \right\rangle_{\gamma(t)}^{1/2} \mathrm{d}t$$

Definition 4.2.8 距离

$\forall p_1, p_2 \in M$，定义他们的距离：

$$d(p_1, p_2) = \inf_\gamma L(\gamma)$$

其中 γ 为连接 p_1, p_2 的分段可微曲线.

Remark 4.2.3

可以证明上述定义的 d 是 M 上的一个距离，从而 (M, d) 成为一个度量空间.

Question: 如何定义 Riemann 流形上的体积（面积）?
类似一般参数曲面 $\Omega = \gamma(U)$ 由 $\gamma : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ 决定的情况

$$A(\Omega) = \int_U \sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

将其推广到流形上：

给定黎曼流形 M，$\forall p \in M$，(U,x) 为包含 p 点的局部坐标图卡，考虑 T_pM 上的一组单位正交基 $\{e_1,\cdots,e_m\}$，且记

$$X_i(p)=\frac{\partial}{\partial x}(p)=\sum_j a_{ij}e_j$$

则得到

$$g_{ik}(p)=\langle X_i,X_k\rangle_p=\left\langle\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_k}\right\rangle_p=\sum_{j,l}\langle a_{ij}e_j,a_{kl}e_l\rangle=\sum_j a_{ij}a_{kj}$$

考虑由 $X_i(p)$ 张成的平行多面体体积

$$\mathrm{Vol}(X_1(p),\cdots,X_m(p))=\det(a_{ij})\,\mathrm{Vol}(e_1,\cdots,e_m)=\sqrt{\det(g_{ij}(p))}$$

Definition 4.2.9 黎曼流形上的体积

令 $R\subset M$，且 $R\subset U$ 为 M 上的一个区域（连通开集），定义其体积

$$\mathrm{Vol}(R)=\int_{x(R)}\sqrt{\det(g_{ij}\circ x^{-1})}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_m.$$

Claim 4.2.1

上述体积是良定的，即不依赖于 (U,x) 的选取

（证明留作习题）

Remark 4.2.4

若 R 不包含在 U 中，则可由单位分解办法给出体积的定义，具体地：取一个从属于 (U_α,x_α) 的单位分解 $\{\varphi_\alpha\}$，定义

$$\mathrm{Vol}(R)=\sum_\alpha\int_{x_\alpha(R)}\varphi_\alpha\sqrt{\det(g_{ij}\circ x^{-1})}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_m$$

Chapter 5

联络 (Connection)

5.1 仿射联络

1917 年，Levi Civita 引入了 Levi-Civita 平行移动.

本节中默认 M 为光滑流形.

Definition 5.1.1 联络

(E, M, π) 为 M 上的一个光滑向量丛，定义

$$\nabla : C^\infty(TM) \times C^\infty(E) \to C^\infty(E)$$

满足如下性质：$\forall X, Y \in C^\infty(TM); \lambda, \mu \in \mathbb{R}; v, w \in C^\infty(E); f, g \in C^\infty(M)$

- $\nabla_X(\lambda v + \mu w) = \lambda \nabla_X v + \mu \nabla_X w$;
- $\nabla_X(fv) = X(f)v + f\nabla_X(v)$;
- $\nabla_{(fX+gY)} v = f\nabla_X v + g\nabla_Y v$.

则其称为 (E, M, π) 上的一个 **(Koszul) 联络**，当 $E = TM$ 时，称为**仿射联络 (Affine Connection)**，特别地，$v \in C^\infty(E)$ 且 $\nabla_X v = 0$，则称 v 沿着 X 是平行的.

Remark 5.1.1

在部分文献中 ∇ 也记为 D；(E, M, π) 上的联络一般是不唯一的.

有了联络，可以对向量场求导：

Proposition 5.1.1

设 (TM, M, π) 上给定仿射联络 ∇，则对任意沿光滑曲线 $c : I \to M$ 的向量场 V，存在唯一的**协变导数** $\dfrac{DV}{\mathrm{d}t}$（称为 V 沿 $c(t)$ 的**协变导数**），满足：

(a) 线性性：$\dfrac{D}{\mathrm{d}t}(V + W) = \dfrac{DV}{\mathrm{d}t} + \dfrac{DW}{\mathrm{d}t}$;

(b) Leibniz 律：$\dfrac{D}{\mathrm{d}t}(fV) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}V + f\dfrac{DV}{\mathrm{d}t}$，其中 $f \in C^\infty(I)$;

(c) 局部表达式：当 $V(t) = Y(c(t))$ 且 $Y \in C^\infty(TM)$ 时，$\dfrac{DV}{\mathrm{d}t} = \nabla_{\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}} Y$

Remark 5.1.2

考虑局部坐标 (U, x)，设向量场

$$X = \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{j=1}^{m} Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

则有：

- $\nabla_X Y(p)$ 的值依赖于：$X^i(p), Y^j(p)$ 与 $X(Y^l) := X^i \dfrac{\partial Y^l}{\partial x^i}$
- $\nabla_X Y = \nabla_{\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}} Y = \dfrac{DV}{\mathrm{d}t}$ 依赖于 $X(P)$，Y 沿着曲线的值，以及 Y 沿着曲线的求导.

引入 Christoffel 符号 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \dfrac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^l \dfrac{\partial}{\partial x^l}$，可得局部表达式：

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \sum_{i=1}^m X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\sum_{j=1}^m Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
&= \sum_{i=1}^m X^i \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{j=1}^m Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
&= \sum_{i,j} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{i,j} X^i Y^j \Gamma_{ij}^l \frac{\partial}{\partial x^l} \\
&= \sum_l \left(\sum_i X^i \frac{\partial Y^l}{\partial x^i} + \sum_{i,j} X^i Y^j \Gamma_{ij}^l \right) \frac{\partial}{\partial x^l}
\end{aligned}$$

回到 Prop 5.1.1 的证明：

Proof: **唯一性**：取局部坐标 (U, x)，设曲线 $c(t)$ 的坐标表示为 $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$，向量场

$$V = \sum_{j=1}^n v^j(t) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

由条件 (a)(b) 可得：

$$\frac{DV}{\mathrm{d}t} = \sum_j \frac{\mathrm{d}v^j}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_j v^j \frac{D}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

根据条件 (c) 和联络定义：

$$\frac{D}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_{\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_i \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

因此协变导数表达式为：

$$\frac{DV}{\mathrm{d}t} = \sum_j \frac{\mathrm{d}v^j}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{i,j} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} v^j \Gamma_{ij}^l \frac{\partial}{\partial x^l}$$

这表明 $\dfrac{DV}{\mathrm{d}t}$ 由 V、$c(t)$ 和 ∇ 唯一确定.

存在性：定义协变导数为

$$\frac{DV}{\mathrm{d}t} := \sum_j \frac{\mathrm{d}v^j}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{i,j} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} v^j \Gamma_{ij}^l \frac{\partial}{\partial x^l} \tag{$*$}$$

可直接验证此定义满足 (a)(b)(c)，若 (W, y) 为另一个局部坐标图卡，且 $W \cap U \neq \varnothing$，也可以由 $(*)$ 来定义，由前述唯一性知 $\frac{DV}{\mathrm{d}t}$ 是良定的.

Definition 5.1.2 平行向量场

设 ∇ 为 TM 上的一个仿射联络，$c: I \to M$ 为可微曲线，其上的一个向量场 V，若

$$\frac{DV}{\mathrm{d}t} = 0 \quad (\forall t \in I)$$

则称 V 为沿着 c 的一个**平行向量场**.

Remark 5.1.3

设 $(\mathbb{R}^2,\nabla),V=V_0$ 为常向量场，容易验证其为平行向量场.

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k}=0$$

Proposition 5.1.2

∇ 是 M 上的仿射联络，设 $c:I\to M$ 为 M 上的一条可微曲线，V_0 为 M 上在 $c(t_0)$ 处的一个切向量（$t_0\in I,V_0\in T_{c(t_0)}M$），则存在唯一沿着 $c(t)$ 的平行向量场 V，使得 $V(t_0)=V_0$.

Proof: 由于 I 为闭区间，从而 $c(I)$ 为 M 中紧集，由紧性定义，只需在某一个局部坐标图卡中证明上述命题即可.

设 (U,x) 为 M 上的局部坐标图卡，且 $c(t_0)\in U$，令

$$x\circ c(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t)),V_0=\sum_{j=1}^n v_0^j\frac{\partial}{\partial x^j}$$

若 U 中向量场 V 沿着 c 平行，且 $V(t_0)=V_0,V=\sum_j v^j(t)\dfrac{\partial}{\partial x^j}$，则

$$0=\frac{DV}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^n\frac{\mathrm{d}v^j}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x^j}+\sum_{i,j=1}^n v^j(t)\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$$

若记 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\dfrac{\partial}{\partial x^j}=\Gamma_{ij}^k\dfrac{\partial}{\partial x^k}$，则上式为

$$\frac{DV}{\mathrm{d}t}=\sum\left[\frac{\mathrm{d}v^k}{\mathrm{d}t}+\sum_{i,j=1}^n v^j(t)\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\Gamma_{ij}^k\right]\frac{\partial}{\partial x^k}=0$$

从而得到方程组

$$\frac{\mathrm{d}v^k}{\mathrm{d}t}+\sum_{i,j=1}^n v^j\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\Gamma_{ij}^k=0,(k=1,\cdots,n)$$

且有初值 $v^k(t_0)=v_0^k$，由 ODE 理论知，上述方程的组的解由初值唯一确定.

5.2 Riemann 联络 (Levi-Civita 联络)

Definition 5.2.1 相容联络 (Compatible Connection)

(M,g) 为一个 Riemann 流形，∇ 为 M 上的一个仿射联络，且满足：$\forall$ 可微曲线 $c(t)$，以及沿着 $c(t)$ 的平行向量场 $p(t)$ 和 $q(t)$，有 $\langle p(t),q(t)\rangle$ 与 t 无关，则称该联络 ∇ 与 g 相容.

Proposition 5.2.1

设 $c(t)$ 是 (M,g) 上的可微曲线，则 ∇ 与 g 相容等价于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle V,W\rangle=\left\langle\frac{DV}{\mathrm{d}t},W\right\rangle+\left\langle V,\frac{DW}{\mathrm{d}t}\right\rangle$$

Proof: $(\Leftarrow)$：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle p,q\rangle=\left\langle\frac{D}{\mathrm{d}t}p,q\right\rangle+\left\langle p,\frac{D}{\mathrm{d}t}q\right\rangle$$

$(\Rightarrow)$ 取 $\{p_1(t),\cdots,p_n(t)\}$ 为单位正交的平行向量场，$\forall V=\sum_i v^ip_i(t),W=\sum_j w^jp_j(t)$，从而有

$$\frac{DV}{\mathrm{d}t}=\frac{D}{\mathrm{d}t}(\sum_i v^ip_i(t))=\sum(v^i)'(t)p_i(t)+\sum_i v^i\frac{D}{\mathrm{d}t}p_i(t)=\sum(v^i)'(t)p_i(t)$$

同理 $\dfrac{DW}{\mathrm{d}t}=\sum_j(w^j)'(t)p_j(t)$ 于是

$$\left\langle\frac{DV}{\mathrm{d}t},W\right\rangle+\left\langle V,\frac{DW}{\mathrm{d}t}\right\rangle=\sum_i(v^i)'(t)w^i(t)+\sum_j(w^j)'(t)v^j(t)$$

而 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle V,W\rangle=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v^i(t)w^i(t))$

Corollary 5.2.1

联络 ∇ 与 (M,g) 相容等价于

$$X\langle Y,Z\rangle=\langle\nabla_XY,Z\rangle+\langle Y,\nabla_XZ\rangle$$

Proof: $(\Leftarrow)$ 由命题5.2.1以及 $\dfrac{D}{\mathrm{d}t}$ 与 $\nabla_{\dot{c}(t)}$ 的关系得到，$(\Rightarrow)$ 留作习题.

Definition 5.2.2 无挠 (Torsion Free)

若 M 上的仿射联络 ∇ 满足

$$\nabla_XY-\nabla_YX=[X,Y]$$

则称 ∇ 为**无挠 (对称) 联络**

Remark 5.2.1

在 (U,x) 中，令 $X=\dfrac{\partial}{\partial x^i},Y=\dfrac{\partial}{\partial x^j}$，则

$$\nabla_XY=\sum_k\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k},\nabla_YX=\sum_k\Gamma^k_{ji}\frac{\partial}{\partial x^k}$$

从而

$$\nabla_XY-\nabla_YX=\sum_k(\Gamma^k_{ij}-\Gamma^k_{ji})\frac{\partial}{\partial x^k}$$

由 $[X,Y]=0$，故无挠 $\iff\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji},\forall i,j,k.$

Theorem 5.2.1 (Levi-Civita)

设 (M,g) 为 Riemann 流形，则 $\exists$ 唯一的仿射联络 ∇，满足 ∇ 无挠且与 g 相容.

Proof: 先设 ∇ 存在，则

$$\begin{cases}X\langle Y,Z\rangle=\langle\nabla_XY,Z\rangle+\langle Y,\nabla_XZ\rangle\\Y\langle Z,X\rangle=\langle\nabla_YZ,X\rangle+\langle Z,\nabla_YX\rangle\\Z\langle X,Y\rangle=\langle\nabla_ZX,Y\rangle+\langle X,\nabla_ZY\rangle\end{cases}$$

①+②−③，有

$$
\begin{aligned}
&X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle+Z\langle X,Y\rangle\\
=&\langle\nabla_XY+\nabla_YX,Z\rangle+\langle\nabla_XZ-\nabla_ZX,Y\rangle+\langle\nabla_YZ-\nabla_ZY,X\rangle\\
=&\langle 2\nabla_XY,Z\rangle-\langle[X,Y],Z\rangle+\langle[X,Z],Y\rangle+\langle[Y,Z],X\rangle
\end{aligned}
$$

从而得到 $Koszul$ 公式

$$\langle\nabla_XY,Z\rangle=\frac{1}{2}(X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle+\langle[X,Y],Z\rangle-\langle[X,Z],Y\rangle-\langle[Y,Z],X\rangle)$$

上式表明 ∇_XY 由度量以及 Lie 括号运算确定，唯一性得证. 再由 Koszul 公式直接定义一个仿射联络即得存在性.（验证留作习题）

Definition 5.2.3 Levi-Civita 联络

上述定理中的与度量相容且无挠的联络称为 (M,g) 上的 **Riemann 联络**或 **Levi-Civita 联络**.

Remark 5.2.2 Riemann 联络具体表达式

(U,x) 为局部坐标图卡，令

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\sum_l\Gamma_{ij}^l\frac{\partial}{\partial x^l}$$

为对应的 Riemann 联络，由 Koszul 公式，有

$$\left\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^k}\right\rangle=\left\langle\sum_l\Gamma_{ij}^l\frac{\partial}{\partial x^l},\frac{\partial}{\partial x^k}\right\rangle=\sum_l\Gamma_{ij}^lg_{lk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

记 $g^{kl}=(g^{-1})_{kl}$，从而有

$$\Gamma_{ij}^l=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^ng^{kl}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

Remark 5.2.3

经典曲面论中 Christoffell 记号与上式相同，从而曲面的协变导数（联络）就是由 Riemann 联络所定义的.

Remark 5.2.4

对欧氏空间 $\mathbb{R}^n$（取标准内积），有 $\Gamma_{ij}^k=0$，从而

$$\frac{DV}{\mathrm{d}t}=\sum_k\frac{\mathrm{d}v^k}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x^k}$$

Chapter 6

测地线 (Geodesic)

6.1 引言

在 $\mathbb{R}^3$ 中考虑曲面 S 上以弧长参数 s 参数化的曲线 $c(s)$，设沿曲线的标架由 $\vec{e}_1 = c'(s)$、$\vec{e}_2$ 和 $\vec{e}_3 = \vec{n}$ 构成，其中 $\vec{n}$ 为曲面的单位法向量场，该标架满足微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & K_g & K_n\\ -K_g & 0 & T_g\\ -K_n & -T_g & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{pmatrix}$$

此处 K_g 为测地曲率，K_n 为法曲率，T_g 为测地挠率，系数矩阵的反对称性反映了标架的刚性运动条件下面记录一些主要发展历史：

- 1697 J.Bernoulli 利用变分法求得测地线方程
- 1732 Euler 给出 K_g 的表达，求出 $f(x,y,z)=0$ 形式的测地线方程
- 1827 Gauss 给出了 Gauss-Bonnet 公式（建立了测地曲率与 Gauss 曲率之间的关系）.

6.2 测地线的定义

Definition 6.2.1 测地线

给定黎曼流形 (M,g), $\dfrac{D}{\mathrm{d}t}$ 是由 Levi-Civita 定义的协变导数. 设 $\gamma : I \to M$ 为光滑曲线，若

$$\frac{D}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right) = 0$$

则称 γ 为区间 I 上的**测地线**；若对 M 上的两个点 A,B，存在

$$\widetilde{\gamma} : I \to M,\ \ s.t.\ \widetilde{\gamma}(a) = A, \widetilde{\gamma}(b) = B$$

且 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b, \widetilde{\gamma}|_{[t_i,t_{i+1}]}$ 均为光滑测地线，则称 $\widetilde{\gamma}$ 为测地线段.

Proposition 6.2.1

$\gamma : I \to M$ 为光滑测地线，则 $\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$ 的长度为常值.

Proof:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right\rangle = \left\langle\frac{D}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right\rangle + \left\langle\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}, \frac{D}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right\rangle = 0$$

从而结论成立

Remark 6.2.1

- 对于一般联络，上述命题不一定成立；

- 若 γ 为测地线，则 $L(t)=\int_{t_0}^{t}\left|\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t=c(t-t_0)$;
- 若 $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=1$，也即 t 为弧长时，测地线的长度正比于参数 t，称为**正规化（单位化）**测地线.

Question: 测地线的方程是什么？其存在唯一性如何？
设 (U,x) 为局部坐标系，γ 为 $\gamma(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))$，$\gamma$ 为测地线等价于

$$\begin{aligned} 0=\frac{D}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right)&=\frac{D}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\\ &=\sum_k\frac{\mathrm{d}^2x_k}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial}{\partial x_k}+\sum_k\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}D_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}\frac{\partial}{\partial x_k}\\ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\dot\gamma(t)=\sum_i\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\quad&=\sum_k\frac{\mathrm{d}^2x_k}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial}{\partial x_k}+\sum_{k,j}\Gamma_{ik}^{j}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x_j}\\ &=\sum_k\left(\frac{\mathrm{d}^2x_k}{\mathrm{d}t^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^{k}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned}$$

也就等价于二阶常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}^2x_k}{\mathrm{d}t^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^{k}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}=0,\quad (k=1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

为讨论方程组 (1)，令 $y_i=\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t},i=1,2,\cdots,n$，则转化为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}=y_k\\ \frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}t}=-\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^{k}y_iy_j\end{cases}\qquad (k=1,2,\cdots,n) \tag{$1'$}$$

也即考虑 $TU\cong U\times\mathbb{R}^n$，一条光滑曲线 $\gamma:t\mapsto\gamma(t)$ 可以确定 TM 上的一条曲线 $t\mapsto\left(\gamma(t),\frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t}\right)$，从而 γ 为 TU 中的一条测地线等价于 TU 中的曲线满足方程 $(1')$

Theorem 6.2.1

若 X 为 V 上的光滑向量场，$V\subset M$ 为开集，令 $p\in V$，存在开集 $V_0\subset V,p\in V_0$ 以及 $\delta>0$，$C^\infty\ni\varphi:(-\delta,\delta)\times V_0\to V$，使得曲线 $t\mapsto\varphi(t,p)$ 为唯一的一条轨迹（积分曲线），成立

$$\varphi(0,p)=p,\forall p\in V_0,\quad 且\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t,p)|_{t=0}=X_p.$$

Remark 6.2.2

映射 $\varphi_t:V_0\to V$ 定义为 $\varphi_t(p)=\varphi(t,p)$，称为 X 的局部流.

Lemma 6.2.1

在 TM 上存在唯一的向量 G，使得 G 的轨迹为 $t\mapsto(\gamma(t),\gamma'(t))$，其中 γ 为 M 的测地线.

Proof: 直接由测地线方程 (1) 和 $(1')$ 可得.

Definition 6.2.2 测地流

上述引理中的 G 称为 TM 上的**测地向量场**，G 的流称为 TM 上的**测地流**.

Lemma 6.2.2 测地线的齐次性

若 $\gamma(t,q,v)$ 为定义在 $(-\delta,\delta)$ 的测地线，则 $\forall a\in\mathbb{R}^+$，测地线 $\gamma(t,q,av)$ 定义在 $\left(-\frac{\delta}{a},\frac{\delta}{a}\right)$ 上，且

$$\gamma(t,q,av)=\gamma(at,q,v)$$

Proof: 令 $h:(-\frac{\delta}{a},\frac{\delta}{a})\to M,t\mapsto\gamma(at,q,v)$，则 $h(0)=\gamma(0,q,v)=q$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(at,q,v)|_{t=0}=av$$

且 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(at,q,v)=a\gamma'(at,q,v)$，

$$\frac{D}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)=\nabla_{h'(t)}h'(t)=\nabla_{a\gamma'(at,q,v)}a\gamma'(at,q,v)=a^2\nabla_{\gamma'(at,q,v)}\gamma'(at,q,v)=0$$

从而 $h(t)$ 为一条测地线 $\Rightarrow h(t)=\gamma(t,q,av)$.

Proposition 6.2.2

$\forall p\in M$，存在开集 $V\subset M,p\in V,\varepsilon>0$ 和一个 C^∞ 映射

$$\gamma:(-2,2)\times\mathcal{U}\to M,\mathcal{U}=\{(q,w)|q\in V,v\in T_qM,|w|<\varepsilon\}$$

使得曲线 $t\mapsto\gamma(t,q,w),t\in(-2,2)$ 为 M 上的唯一一条测地线，满足

$$\gamma(0,q,w)=q\quad(q,w)\in\mathcal{U}$$

且 γ 在 0 处的切向量（初始速度）为 w.

Proof: 由定理 6.2.1，存在测地线 $\gamma(t,q,v)$ 定义在 $|t|<\delta$ 且 $|v|<\varepsilon_1$，由上述引理，$\gamma(t,q,\frac{\delta v}{2})$ 定义在 $(-2,2)$，令 $\varepsilon<\frac{\delta}{2}\varepsilon_1$，则 $\gamma(t,q,\frac{\delta v}{2})$ 为所求测地线.

Definition 6.2.3 指数映射

令 $\mathcal{U}\subset TM$ 为上述命题中的 $\mathcal{U}$，定义映射

$$\exp:\mathcal{U}\to M,(q,v)\mapsto\gamma(1,q,v)=\gamma(|v|,q,\frac{v}{|v|})$$

上述映射称为**指数映射**，大多数情形，我们将指数映射限制在一个开集 $B_q(0)\subset T_qM$，得到

$$\exp_q:B_q(0)\to M,v\mapsto\gamma(1,q,v)$$

Remark 6.2.3

- $\exp_q(v)$ 为测地线，$\gamma(t,q,v)$ 上到 q 的长度定义为 $|v|$ 的点.
- exp 是可微的.

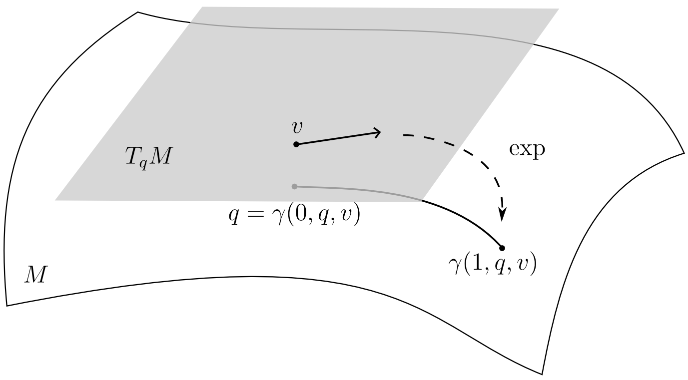

图 6.1: 指数映射

Proposition 6.2.3

$\forall q \in M, \exists \varepsilon > 0$，使得 $\exp_q : B_\varepsilon(0_q) \subset T_qM \to M$ 为 $B_\varepsilon(0)$ 到 $\exp_q(B_\varepsilon(0))$ 的微分同胚.

Proof: 考虑

$$(\mathrm{d}\exp_q)_0 : T_0B_\varepsilon(0) \to T_qM,\ v \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp_q(tv)\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(1, q, tv)\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t, q, v)\Big|_{t=0} = v$$

从而 $(\mathrm{d}\exp_q)_0$ 为恒同映射，由反函数定理知：$\exp_q$ 在 0（原点）附近为微分同胚.

Example 6.2.1

$M = \mathbb{R}^n$，考虑 $\exp_q : T_q\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, v \mapsto v$ 为恒同映射.

Example 6.2.2

$M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}, \forall (p, v) \in TM, \exp_p v \in M$ 为 S^n 中大圆弧 $\gamma(t, q, \frac{v}{|v|})$ 上到 p 点距离为 $|v|$ 的点.

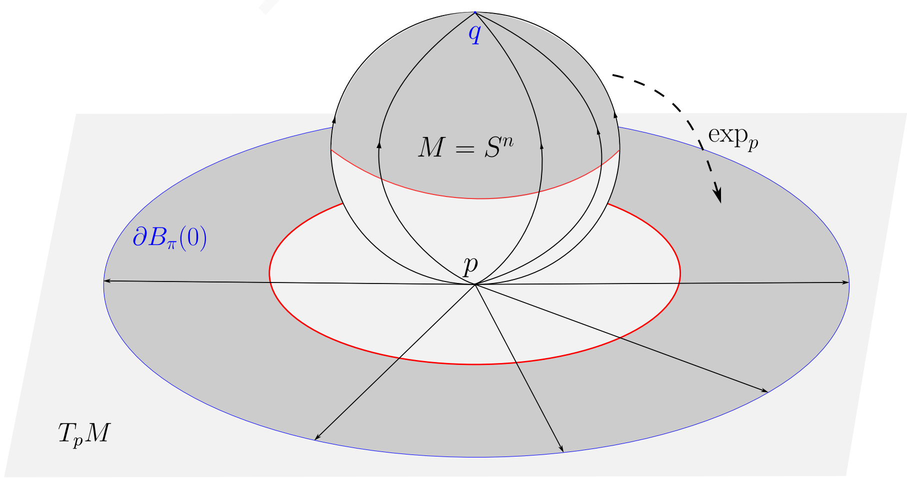

图 6.2: S^n 的指数映射

见上图，易知

- $\exp_p$ 将 $B_\pi(0)$ 一一映到 $S^n-\{q\}$
- $\exp_p$ 将圆环 $B_{k\pi}(0)\backslash\overline{B_{(k-1)\pi}(0)}$ 一一映到 $S^n-\{p,q\}$
- $\exp_p$ 将 $\partial B_\pi(0)$ 映为 q 点，$\partial B_{2\pi}(0)$ 映为 p 点.
- 若考虑 $\widetilde{M}=S^n-\{q\}$，度量不变，则可知 $\exp_p$ 只能定义在 $B_\pi(0)\subset T_p\widetilde{M}$.

6.3 测地线的几何性质

Lemma 6.3.1

$S: A=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\}\to M$ 为一个参数化曲面，M 上有一个无挠联络，则

$$\frac{D}{\partial v}\frac{\partial S}{\partial u}=\frac{D}{\partial u}\frac{\partial S}{\partial v}$$

Proof: 设 (U,x) 为 M 的一个局部坐标图卡，且 $U\cap S(A)$ 非空，则

$$x\circ S(u,v)=(x^1(u,v),\cdots,x^n(u,v))$$

计算得

$$\begin{aligned}
\frac{D}{\partial v}\frac{\partial S}{\partial u}&=\frac{D}{\partial v}\left(\sum_i\frac{\partial x^i}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\\
&=\sum_i\frac{\partial^2x^i}{\partial v\partial u}\frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_i\frac{\partial x^i}{\partial u}\nabla_{\sum_j\frac{\partial x^j}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}\\
&=\sum_i\frac{\partial^2x^i}{\partial v\partial u}\frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_{i,j}\frac{\partial x^i}{\partial u}\frac{\partial x^j}{\partial v}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}\\
&=\sum_i\frac{\partial^2x^i}{\partial v\partial u}\frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_{i,j}\frac{\partial x^i}{\partial u}\frac{\partial x^j}{\partial v}\Gamma_{ji}^k\frac{\partial}{\partial x^k}\\
\text{（偏导可交换，联络对称）}&=\sum_i\frac{\partial^2x^i}{\partial u\partial v}\frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_{i,j}\frac{\partial x^i}{\partial v}\frac{\partial x^j}{\partial u}\Gamma_{ji}^k\frac{\partial}{\partial x^k}=\frac{D}{\partial u}\frac{\partial S}{\partial v}
\end{aligned}$$

Lemma 6.3.2 (Gauss 引理)

对于 $\exp_p: T_pM\to M$，有 $(\mathrm{d}\exp_p)_v: T_v(T_pM)\to T_qM$ 满足

$$\left\langle(\mathrm{d}\exp_p)_v(v),(\mathrm{d}\exp_p)_v(w)\right\rangle_{T_qM}=\langle v,w\rangle,\ \forall w\in T_v(T_pM)$$

此处 v 为径向切向量，$T_v(T_pM)$ 与 T_pM 等同.

Proof: 将 w 分解为：$w=w_T+w_N$，其中 w_T 为与 v 平行的分量，w_N 为与 v 垂直的分量. 只需分别在径向和法向方向验证等式：

- （径向方向）令 $w_T=\lambda v$，则

$$\left\langle(\mathrm{d}\exp_p)_v(v),(\mathrm{d}\exp_p)_v(\lambda v)\right\rangle=\lambda\left\langle(\mathrm{d}\exp_p)_v(v),(\mathrm{d}\exp_p)_v(v)\right\rangle$$

只需证明

$$\left\langle (\mathrm{d}\exp_p)_v(v), (\mathrm{d}\exp_p)_v(v) \right\rangle = \langle v, v \rangle \tag{$*$}$$

计算可得：

$$(\mathrm{d}\exp_p)_v(v) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\exp_p(v+sv)\Big|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\gamma(1,p,(1+s)v)\Big|_{s=0} = \gamma'(1,p,v)$$

由测地线的常数速性质：

$$(*)\ \text{左端} = \langle \gamma'(1,p,v), \gamma'(1,p,v) \rangle = \langle \gamma'(0,p,v), \gamma'(0,p,v) \rangle = (*)\ \text{右端}$$

- （法向方向）取参数曲面

$$f: A \to M,\ (t,s) \mapsto \exp_p(tv(s)), \quad A = \{(t,s) \mid 0 \leqslant t \leqslant 1,\ -\varepsilon < s < \varepsilon\}$$

其中 $v(s)$ 为 T_pM 中满足 $v(0) = v$，$v'(0) = w_N$ 且 $|v(s)| = C$ 的曲线. 对固定 $s = s_0$，曲线 $t \mapsto f(t, s_0)$ 为测地线. 计算：

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle_{(1,0)} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial s}\exp_p(tv(s)), \frac{\partial}{\partial t}\exp_p(tv(s)) \right\rangle\Big|_{(1,0)} \\ &= \left\langle (\mathrm{d}\exp_p)_v(v), (\mathrm{d}\exp_p)_v(w_N) \right\rangle\end{aligned}$$

只需证 $\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle_{(1,0)} = 0$. 考虑导数：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle$$

另一方面，由径向方向结果：

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \left\langle (\mathrm{d}\exp_p)_{tv(s)}(v(s)), (\mathrm{d}\exp_p)_{tv(s)}(v(s)) \right\rangle = \langle v(s), v(s) \rangle = C^2$$

故 $\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle$ 与 t 无关. 由边界条件：

$$\lim_{t\to 0}\frac{\partial f}{\partial s}(t,0) = \lim_{t\to 0}(\mathrm{d}\exp_p)_{tv}(tw_N) = 0 \implies \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle_{(1,0)} = 0$$

Definition 6.3.1 法邻域

若 $\exp_p$ 在 0 点的邻域 V 上位微分同胚，称 $U = \exp_p(V)$ 为 p 的**法邻域**；若 $B_\varepsilon(0)$ 满足 $\overline{B_\varepsilon(0)} \subset V$，则称 $\exp_p(B_\varepsilon(0)) = B_\varepsilon(p)$ 为 p 处的一个**法球体 (测地球体)**；其边界 $S_\varepsilon(p) = \partial B_\varepsilon(0)$ 称为一个**法球面 (测地球面)**.

Proposition 6.3.1 测地线的局部极小性

设 (M,g) 为 Riemann 流形，$p \in M$，U 为 p 的一个法邻域，$B \subset U$ 为以 p 为中心的法球体. 取测地线 $\gamma: [0,1] \to B$ 满足 $\gamma(0) = p$ 和 $\gamma(1) \in B$. 若 $c: [0,1] \to M$ 为分段光滑曲线，使得 $c(0) = \gamma(0) = p$，$c(1) = \gamma(1)$，且 $c([0,1]) \subset B$，则长度满足 $l(\gamma) \leqslant l(c)$. 等号成立当且仅当 $c([0,1]) = \gamma([0,1])$（即曲线像集相同）.

Proof: 设 $\gamma(t)=\exp_p(tu)$，其中 $u=\dot\gamma(0)$. 由于 $\exp_p$ 在 $\exp_p^{-1}(U)$ 上是微分同胚，曲线 $c(t)$ 可表示为 $c(t)=\exp_p(r(t)\cdot\vec v(t))$，其中 $r:[0,1]\to\mathbb{R}$ 满足 $r(0)=0$，$r(1)=|u|$，且 $|\vec v(t)|=1$. 计算速度：

$$\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}=(\mathrm{d}\exp_p)_{r(t)\cdot\vec v(t)}(r'\vec v+r\vec v').$$

由 Gauss 引理，该速度可分解为径向和切向分量：

$$\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}=r'(\mathrm{d}\exp_p)(\vec v)+r(\mathrm{d}\exp_p)(\vec v'),$$

且分量正交，故

$$\left|\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}\right|^2=|r'|^2+|r(\mathrm{d}\exp_p)(\vec v')|^2\geqslant|r'|^2.$$

考虑曲线长度)：

$$l(c)=\int_0^1\left|\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t\geqslant\int_0^1|r'|\mathrm{d}t\geqslant|r(1)-r(0)|=|u|=l(\gamma),$$

其中 $|r(1)-r(0)|=|u|$ 是因为 $r(1)=|u|$，$r(0)=0$，且 $l(\gamma)=\int_0^1|u|\mathrm{d}t=|u|$（测地线速度恒定）.

等号成立时需 $|r(\mathrm{d}\exp_p)(\vec v')|=0$ 且 $\int_0^1|r'|\mathrm{d}t=|r(1)-r(0)|$. 由前者得 $\vec v'=0$,故 $\vec v(t)=\vec v(1)=u/|u|$（因 $c(1)=\gamma(1)$）. 此时 $c(t)=\exp_p(r(t)u/|u|)$ 为测地线. 由测地线唯一性，$c([0,1])=\gamma([0,1])$. 反之，若 $c([0,1])=\gamma([0,1])$，则 c 是 γ 的重参数化，故 $l(c)=l(\gamma)$.

Theorem 6.3.1 全法邻域的存在性

设 (M,g) 为 Riemann 流形，则对任意点 $p\in M$，存在 p 的邻域 $W\subset M$ 及常数 $\delta>0$，使得：

1. $\forall q\in W$，指数映射 $\exp_q$ 在球 $B_\delta(0)\subset T_qM$ 上是微分同胚；
2. $W\subset\exp_q(B_\delta(0))$（此时称 W 为**全法邻域**）.

Proof: 设 $\mathcal{U}\subset TM$ 为命题 (?) 中定义的开集（包含 $\{(q,0)\mid q\in V\}$）. 定义映射：

$$F:\mathcal{U}\to M\times M,\quad (q,v)\mapsto(q,\exp_q v).$$

在 $(p,0)\in\mathcal{U}$ 处，取 M 的局部坐标系 (U,x) 诱导 $M\times M$ 的坐标系 $(U\times U,(x,x))$. 计算微分：

$$\mathrm{d}F_{(p,0)}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial q}{\partial q} & \dfrac{\partial q}{\partial v}\\ \dfrac{\partial\exp_q v}{\partial q} & \dfrac{\partial\exp_q v}{\partial v}\end{pmatrix}_{(p,0)}=\begin{pmatrix}I_n & 0\\ I_n & I_n\end{pmatrix}.$$

故由反函数定理，存在 $(p,0)$ 的邻域 $\mathcal{U}'\subset\mathcal{U}$ 和 (p,p) 的邻域 $W'\subset M\times M$，使得 $F:\mathcal{U}'\to W'$ 是微分同胚. 取 p 的邻域 $V'\subset M$ 和 $\delta>0$，使得：

$$\mathcal{U}'\supset\{(q,v)\mid q\in V',\,v\in T_qM,\,|v|<\delta\}.$$

再取 p 的邻域 $W\subset V'$ 满足 $W\times W\subset W'$. 对任意 $q\in W$ 和 $r\in W$，有 $(q,r)\in W\times W\subset W'$. 因 F 在 $\mathcal{U}'$ 上双射，存在 $v\in T_qM$ 满足 $|v|<\delta$ 且 $F(q,v)=(q,r)$，即 $r=\exp_q v$. 故 $W\subset\exp_q(B_\delta(0))$. 又因 F 限制在 $\{q\}\times B_\delta(0)$ 上是单射，$\exp_q$ 在 $B_\delta(0)$ 上是微分同胚.

Remark 6.3.1

由上述定理知 $\forall p,q\in W,\exists!$ 极小测地线 γ 连接两点，且 $l(\gamma)<\delta$.

Corollary 6.3.1 最短线必为测地线

设 (M,g) 为 Riemann 流形，$\gamma:[a,b]\to M$，其参数正比于弧长，且 γ 为连接 $\gamma(a)$ 和 $\gamma(b)$ 的分段光滑曲线中最短的，则 γ 一定为测地线.（从而它一定是正则的）

Proof: γ 也是局部最短线，由全法邻域的存在性知道局部最短线是测地线，由唯一性知 γ 是测地线.

先前一直在局部考虑测地线，下面是一个关于测地线的整体的定理.

Theorem 6.3.2 *Hopf-Rinow 定理

对于 Riemann 流形 (M,g)，下列命题等价：

- 对固定点 p，$\exp_p$ 可以定义整个 T_pM(M 在 p 点处测地完备);
- 有界闭子集必为 M 上的紧集;
- M 是一个完备的度量空间;
- M 在每一个点都是测地完备的（$\forall q\in M,\exp_q$ 在 T_qM 都有定义）;
- $\forall p,q\in M$，存在跳一跳测地线 γ 连接 p,q，且 $d(p,q)=l(\gamma)$.

Example 6.3.1 双曲平面上的测地线

$G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y>0\}$，其上赋予黎曼度量：$(g_{ij})=\dfrac{1}{y^2}E_2$，则 $\gamma:\{x=0,y>0\}$ 为一条测地线.
事实上，任取 $c:[a,b]\to G,t\mapsto(x(t),y(t)),c(0)=(0,a),c(b)=(0,b)$ 有

$$l(c)=\int_a^b\left|\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\frac{\mathrm{d}t}{y(t)}\geq\int_a^b\left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|\frac{\mathrm{d}t}{y}=\int_a^b\frac{\mathrm{d}y}{y}=l(\gamma)$$

此外：G 的等距群是 $z\mapsto\dfrac{az+b}{cz+d},ad-bc=1$，该等距把 $x=0$ 变为半圆.

Chapter 7
曲率 (Curvature)

7.1 曲率算子

Definition 7.1.1 曲率算子

(M, g) 是一个 Riemann 流形，定义**曲率算子** R 为：$\forall X, Y \in C^\infty(TM)$:

$$R(X,Y) : C^\infty(TM) \to C^\infty(TM), Z \mapsto \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

其中 ∇ 为 M 上的 Levi-Civita 联络.

Remark 7.1.1

上述的定义可以推广到一般的联络.

Example 7.1.1

当 $M = \mathbb{R}^n$，则 $R(X,Y)Z \equiv 0$，事实上，任取 $Z = (z_1, \cdots, z_n) \in C^\infty(TM)$，有

$$\nabla_X Z = (X(z_1), \cdots, X(z_n)) = X(Z)$$

进一步有

$$\nabla_X \nabla_Y Z = XY(Z), \nabla_Y \nabla_X Z = YX(Z)$$

显然为 0；从而，我们将 R 看做衡量 M 偏离欧氏空间的程度.

Remark 7.1.2

在局部坐标 (U, x) 下 $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0 \Rightarrow$

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_k} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}$$

R 可以衡量二次协变导数的交换性.

Proposition 7.1.1

曲率算子 R 有如下性质：

- R 为 $C^\infty(TM) \times C^\infty(TM)$ 上双线性算子，也即 $\forall X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in C^\infty(TM)$

$$R(fX_1 + gX_2, Y) = fR(X_1, Y) + gR(X_2, Y), \forall f, g \in C^\infty(M)$$

$$R(X, fY_1 + gY_2) = fR(X, Y_1) + gR(X, Y_2), \forall f, g \in C^\infty(M)$$

- $R(X,Y) : C^\infty(TM) \to C^\infty(TM)$ 为线性的，也即 $\forall X, Y, Z, W \in C^\infty(TM)$

$$R(X,Y)(fZ + gW) = fR(X,Y)(Z) + gR(X,Y)(W), \forall f, g \in C^\infty(M)$$

Proof:

- $\forall X_1, X_2, X, Y, Z \in C^\infty(TM), f \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned} R(X_1+X_2,Y)Z &= \nabla_{X_1+X_2}\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_{X_1+X_2}Z - \nabla_{[X_1+X_2,Y]}Z \\ &= (\nabla_{X_1}\nabla_Y + \nabla_{X_2}\nabla_Y)Z - (\nabla_Y\nabla_{X_1} + \nabla_Y\nabla_{X_2})Z - (\nabla_{[X_1,Y]} + \nabla_{[X_2,Y]})Z \\ &= R(X_1,Y)Z + R(X_2,Y)Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(fX,Y)Z &= \nabla_{fX}\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[fX,Y]}Z \\ &= f\nabla_X\nabla_Y Z - Y(f)\nabla_X Z - f\nabla_Y\nabla_X Z - f\nabla_{X,Y}Z + \nabla_{Y(f)X}Z \\ &= fR(X,Y)Z \end{aligned}$$

- $\forall X, Y, Z, W \in C^\infty(TM)$，显然成立 $R(X,Y)(Z+W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W$

$$\begin{aligned} R(X,Y)(fZ) &= \nabla_X\nabla_Y fZ - \nabla_Y\nabla_X fZ - \nabla_{[X,Y]}fZ \\ &= \nabla_X(Y(f)Z + f\nabla_Y Z) - \nabla_Y(X(f)Z + f\nabla_X Z) - ([X,Y](f)Z + f\nabla_{[X,Y]}Z) \\ &= XY(f)Z + Y(f)\nabla_X Z + f\nabla_X\nabla_Y Z + X(f)\nabla_Y Z - YX(f)Z - X(f)\nabla_Y Z \\ &\quad - Y(f)\nabla_X Z - f\nabla_Y\nabla_X Z - [X,Y]fZ - f\nabla_{[X,Y]}Z = fR(X,Y)Z. \end{aligned}$$

> **Remark 7.1.3**
>
> 由上述命题可知 $\nabla_{[X,Y]}Z$ 是曲率算子定义中不可缺少的一项，否则 R 没有如此好的性质.

> **Proposition 7.1.2** Bianchi 恒等式
>
> $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$

Proof: $\forall X, Y, Z \in C^\infty(TM)$

$$\begin{aligned} & R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y \\ =& \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X \\ & - \nabla_{[Y,Z]}X + \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]}Y \\ \text{（由无挠性）} =& \nabla_X[Y,Z] + \nabla_Y[Z,X] + \nabla_Z[X,Y] - \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}Y \\ =& [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0 \end{aligned}$$

> **Remark 7.1.4**
>
> Bianchi 恒等式对于一般无挠联络也成立.

为了进一步得到更多的对称性，引入记号 $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = (X,Y,Z,T) \in C^\infty(M)$

> **Proposition 7.1.3**
>
> 在上述记号下，成立：
>
> (1) $(X,Y,Z,T) + (Y,Z,X,T) + (Z,X,Y,T) = 0$

(2) $(X,Y,Z,T)=-(Y,X,Z,T)$

(3) $(X,Y,Z,T)=-(X,Y,T,Z)$

(4) $(X,Y,Z,T)=(Z,T,X,Y)$

Proof: (1),(2) 显然

(3) 67 首先证明 $(X,Y,Z,Z)=0$

$$(X,Y,Z,Z)=\langle R(X,Y)Z,Z\rangle=\langle\nabla_X\nabla_YZ-\nabla_Y\nabla_XZ-\nabla_{[X,Y]}Z,Z\rangle$$

由相容性，$\langle\nabla_X\nabla_YZ,Z\rangle=X\langle\nabla_YZ,Z\rangle-\langle\nabla_YZ,\nabla_XZ\rangle$，且

$$\langle\nabla_{[X,Y]}Z,Z\rangle=\frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle$$

整理得到

$$(X,Y,Z,Z)=X\langle\nabla_YZ,Z\rangle-\langle\nabla_YZ,\nabla_XZ\rangle-Y\langle\nabla_XZ,Z\rangle+\langle\nabla_XZ,\nabla_YZ\rangle-\frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle$$

又由相容性：$X\langle\nabla_YZ,Z\rangle=\frac{1}{2}XY\langle Z,Z\rangle$，从而 $(X,Y,Z,Z)=0.$；再考虑

$$\begin{aligned}0&=(X,Y,Z+T,Z+T)\\&=(X,Y,Z,Z)+(X,Y,Z,T)+(X,Y,T,Z)+(X,Y,T,T)\\&=(X,Y,Z,T)+(X,Y,T,Z)\end{aligned}$$

(4) 由于 Bianchi 恒等式

$$\begin{cases}(X,Y,Z,T)+(Y,Z,X,T)+(Z,X,Y,T)=0\\(Y,Z,T,X)+(Z,T,Y,X)+(T,Y,Z,X)=0\\(Z,T,X,Y)+(T,X,Z,Y)+(X,Z,T,Y)=0\\(T,X,Y,Z)+(X,Y,T,Z)+(Y,T,X,Z)=0\end{cases}$$

四个等式相加（利用前三条相消），得到

$$2(Z,X,Y,T)+2(T,Y,Z,X)=0$$

又由于 $(Z,X,Y,T)=-(T,Y,Z,X)=(Y,T,Z,X)$，直接得到结果.

Remark 7.1.5

具体计算时，在局部坐标系 (U,x) 中，令 $X_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$，且

$$R(X_i,X_j)X_k=R_{ijk}^lX_l,$$

R_{ijk}^l 为 R 在 (U,x) 中的分量，取 $X=\sum_iu^iX_i$, $Y=\sum_jv^jX_j$, $Z=\sum_kw^kX_k$，则

$$R(X,Y)Z=\sum_{i,j,k}u^iv^jw^kR_{ijk}^lX_l.$$

下面求 R_{ijk}^l：

$$\begin{aligned}R(X_i,X_j)X_k = R_{ijk}^l X_l &= \nabla_{X_i}\nabla_{X_j}X_k - \nabla_{X_j}\nabla_{X_i}X_k - \nabla_{[X_i,X_j]}X_k \\ &= \nabla_{X_i}\left(\sum_m \Gamma_{jk}^m X_m\right) - \nabla_{X_j}\left(\sum_m \Gamma_{ik}^m X_m\right) \quad （因为[X_i,X_j]=0） \\ &= \sum_m\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma_{jk}^m X_m + \Gamma_{jk}^m\nabla_{X_i}X_m\right) - \sum_m\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma_{ik}^m X_m + \Gamma_{ik}^m\nabla_{X_j}X_m\right) \\ &= \sum_m \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma_{jk}^m X_m + \sum_{m,n}\Gamma_{jk}^m\Gamma_{im}^n X_n - \sum_m\frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma_{ik}^m X_m - \sum_{m,p}\Gamma_{ik}^m\Gamma_{jm}^p X_p.\end{aligned}$$

整理后得到（比较系数）：

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma_{jk}^l - \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma_{ik}^l + \sum_m\left(\Gamma_{jk}^m\Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m\Gamma_{jm}^l\right).$$

记：$\langle R(X_i,X_j)X_k, X_s\rangle = \sum_l R_{ijk}^l g_{ls} = R_{ijks}$，也即：

$$R_{ijks} = \sum_l g_{ls}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma_{jk}^l - \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma_{ik}^l + \sum_m\left(\Gamma_{jk}^m\Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m\Gamma_{jm}^l\right)\right).$$

则 Bianchi 恒等式和对称性反映在 R_{ijks}：

- $R_{ijks} + R_{jkis} + R_{kijs} = 0$;
- $R_{ijks} = -R_{jiks}$,$R_{ijks} = -R_{ijsk}$, $R_{ijks} = R_{ksij}$.

Remark 7.1.6

(1) 在曲面论中，R_{ijkl} 只有一项 R_{1212} 为 Gauss 曲率.

(2) $(R(X,Y)Z)_p$ 由 X,Y,Z 在 p 点处的值决定，这与 $\nabla_X Y$ 不一样.

7.2 截面曲率，Ricci 曲率和数量曲率

对于一个线性空间 $V, \forall x,y \in V$，定义

$$|x\wedge y| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2} = |x||y|\sin\langle x,y\rangle$$

易知：$|x\wedge y|$ 为由 x 和 y 张成的平行四边形的面积

Proposition 7.2.1

给定 $\sigma \subset T_pM$ 为一个二维子空间（截面），$\forall x,y\in\sigma$ 线性无关，定义

$$K(p,x,y) = -\frac{(x,y,x,y)}{|x\wedge y|^2}$$

不依赖于 x,y 的选取，只由 σ 决定.

Proof: 留作习题（hint: 考虑不同的两组基）

Definition 7.2.1 截面曲率

(M,g) 为一个 Riemann 流形，$\forall p \in M, \sigma \subset T_pM; \forall x, y \in \sigma$ 线性无关

$$K(p,\sigma) := K(p,x,y)$$

称为 M 在 p 点处以 σ 为截面的**截面曲率**.

Remark 7.2.1

截面曲率是由曲率算子所定义的，事实上，曲率算子也可以由截面曲率所确定.

Lemma 7.2.1

设 V 为一个 n 维线性空间 $(n>2)$，其上定义了一个内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，设三重线性映射 $R_i: V\times V\times V \to V, i=1,2$，使得 R_1, R_2 满足 Prop 7.1.3

$$(x,y,z,t)_i = \langle R_i(x,y)z, t\rangle \ , \ i=1,2$$

若 $x,y\in\sigma$ 为两个线性无关的向量，记

$$K_i(\sigma) = \frac{(x,y,y,x)_i}{|x\wedge y|^2} \ , \ i=1,2$$

若 $\forall\sigma, K_1(\sigma)=K_2(\sigma)$，则 $R_1=R_2$.

Proof: 要证 $R_1=R_2$，只需证明

$$(x,y,z,t)_1 = (x,y,z,t)_2, \forall x,y,z,t\in V$$

由条件 $K_1(\sigma)=K_2(\sigma)$，

$$(x,y,x,y)_1 = (x,y,x,y)_2 \Rightarrow (x+z,y,x+z,y)_2 = (x+z,y,x+z,y)_2$$

利用 Prop 7.1.3的 (4)，得到

$$(x,y,x,y)_1 + 2(x,y,z,y)_1 + (z,y,z,y)_1 = (x,y,x,y)_2 + 2(x,y,z,y)_2 + (z,y,z,y)_2$$

也就得到了

$$(x,y,z,y)_1 = (x,y,z,y)_2$$

类似的，令 $y=z+t$

$$(x,y+t,z,y+t)_1 = (x,y+t,z,y+t)_2$$

展开得到

$$(x,y,z,t)_1 + {\color{red}(x,y,z,y)_1} + (x,t,z,y)_1 + {\color{blue}(x,t,z,t)_1} = (x,y,z,t)_2 + {\color{red}(x,y,z,y)_2} + (x,t,z,y)_2 + {\color{blue}(x,t,z,t)_2}$$

进一步

$$(x,y,z,t)_1 - (x,y,z,t)_2 = (y,z,x,t)_1 - (y,z,x,t)_2$$

再由 Prop 7.1.3的 (1) (Bianchi 恒等式)：

$$(x,y,z,t)_1 - (x,y,z,t)_2 + (y,z,x,t)_1 - (y,z,x,t)_2 - (z,x,y,t)_1 - (z,x,y,t)_2$$

也就得到

$$3((x,y,z,t)_1 - (x,y,z,t)_2) = 0$$

Remark 7.2.2

由课时原因，以下内容作拓展

- **Schur 引理**：若 $K(p,\sigma)$ 与 σ 无关，则 $K(p,\sigma)$ 是常数;
- 常截面曲率的 Riemann 流形的空间形式有：$S^n(1), \mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$.
- 截面曲率 $K>0, K<0, K=0$，此时流形的拓扑如何？这是目前几何中仍在关心的问题.

Lemma 7.2.2

M 有常截面曲率 $K_0 \iff R=-K_0R'$，其中

$$R': T_pM\times T_pM\to T_pM, \langle R'(X,Y,W),Z\rangle = \langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle-\langle Y,W\rangle\langle X,Z\rangle$$

Proof: 由条件知，$K(p,\sigma)=K_0, \forall p\in M, \sigma\subset T_pM$，令

$$\langle R'(X,Y)W,Z\rangle = (X,Y,W,Z)'$$

观察到 R' 满足 Prop 7.1.3，且 $(X,Y,X,Y)=-K_0(|X|^2|Y|^2-\langle X,Y\rangle^2)=-K_0(X,Y,X,Y)'$ 则

$$(X,Y,W,Z)=-K_0(X,Y,W,Z)'\Rightarrow R=-K_0R'$$

Corollary 7.2.1

M 有常截面曲率 $\iff R_{ijkl}=-K_0(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk})$（在局部坐标下）

Remark 7.2.3

上述推论在验证度量有常截面曲率中用到.

Definition 7.2.2 Ricci 曲率

对于 $T_pM, \forall x\in T_pM$（单位向量），将其扩充为 T_pM 的一组单位正交基 $\{z_1,\cdots,z_{n-1},z_n=x\}$，$x$ 方向的 **Ricci 曲率**定义为：

$$Ric_p(x)=-\sum_{i=1}^{n-1}\langle R(x,z_i)x,z_i\rangle=\sum_{i=1}^{n}\langle R(x,z_i)z_i,x\rangle$$

在 p 点的**数量曲率**定义为：

$$K(p)=\sum_{j=1}^{n}Ric_p(z_j)=\sum_{i,j}-\langle R(z_i,z_j)z_i,z_j\rangle$$

Proposition 7.2.2

Ricci 曲率与数量曲率不依赖于单位正交基的选取.

Proof: 考虑线性映射：$z\mapsto -R(x,z)y, \forall x,y\in T_pM$，其迹 $Q(x,y)$ 为一个双线性型，令 x 为 T_pM 中的一个单位向量，扩充成单位正交基 $\{z_1,\cdots,z_{n-1},z_n=x\}$，有

$$Q(x,y)=-\sum_i\langle R(x,z_i)y,z_i\rangle=-\sum_i\langle R(y,z_i)x,z_i\rangle=Q(y,x)$$

故 $Q(x,y)$ 为对称双线性型，且 $Q(x,x) = Ric_p(x)$，从而 $Ric_p(x)$ 不依赖于基的选取. 另一方面，Q 可以定义线性映射:$H : x \mapsto T_pM$，

$$\langle H(x), y\rangle = Q(x,y)$$

不难求出，上述线性映射的迹为

$$\sum_j \langle H(z_j), z_j\rangle = \sum_j Q(z_j, z_j) = \sum_j Ric_p(z_j) = K(p)$$

Definition 7.2.3 Einstein 度量流形

$Ric_p(x) = \lambda(p), \lambda \in C^\infty(M)$，则 (M,g) 为 Einstein 度量.

Remark 7.2.4

常截面曲率空间一定是 Einstein 度量，存在许多非常截面曲率的 Einstein 度量.

Remark 7.2.5

在 $n \geq 3$ 时可证明 $\lambda(p)$ 一定为常数.

Remark 7.2.6

在局部坐标系下

$$R_{ij} = \sum_k R^k_{ikj}, \quad K = g^{ij} R_{ij}$$

特别当 $g_{ij} = \delta_{ij}$ 时，$K = \sum_{i,k} R^k_{iki}$