华东师范大学测验试卷（1）

2023 – 2024 学年第 2 学期（2024-4-2）

课程名称：实 分 析　　　　学生姓名：________

点名册号：________　　　　学　　号：________

专　　业：数学科学学院　　　　年级/班级：2022 级本科生 (非师范)

课程性质：专业必修课

1	2	3	4	5	6	7	8	总分	阅卷人签名

注意: 无论本试卷中是否有答题位置, 均应将答案写在答题纸上 (写明题号), 并请在答题纸首页标明你的点名册对应号码. 共七道大题, 总分 100 分.

……………………………………………………………………

一、(10 分) 请叙述并证明 Borel-Cantelli 定理.

二、(10 分) 设 $X=\mathbb{R}$, 定义 2^X 上的集函数 $\mu(A)=\begin{cases}1, & 若\ 0\in A,\\ 0, & 若\ 0\notin A.\end{cases}$

证明: μ 是一个测度.

三、(10 分) 设 $\mathcal{R}$ 是基本空间 X 上的 σ-环, μ 是 $\mathcal{R}$ 上非负的满足有限可加性和次可列可加性的集函数, 且 $\mu(\emptyset)=0$. 证明: μ 是一个测度.

四、(10 分) 设集 E 上的实函数列 f_n 有极限 f, 证明: 对任意实数 c, 成立

$$E(f\le c)=\bigcap_{k=1}^{\infty}\liminf_{n\to\infty}E(f_n\le c+\frac{1}{k}).$$

五、(15 分) 设 $X=\mathbb{R}$, 定义 2^X 上的集函数 μ_* 使得 $\mu_*(\emptyset)=0$, 而当 $A\neq\emptyset$ 时 $\mu_*(A)=1$.

(1) 证明: μ_* 是次可列可加的;

(2) 写出 μ_* 可测集的 Caratheodory 条件;

(3) 证明: μ_* 可测集构成的 σ-代数是 $\{\emptyset, X\}$.

六、(15 分) 证明: 任意可列集的有限子集的全体仍然是可列集.

七、(30 分) (1) 定义: 设 X 是基本空间, $\mathcal{P} \subset 2^X, \mathcal{P} \neq \emptyset$. 如果由 $A, B \in \mathcal{P}$ 可知 $A \cap B \in \mathcal{P}$, 就称 $\mathcal{P}$ 是一个 π-系.

(2) $\mathcal{L}$ 称为是 λ-系, 若具有如下性质: (i) $X \in \mathcal{L}$; (ii) 若 $A, B \in \mathcal{L}$ 且 $A \subset B$, 则 $B - A \in \mathcal{L}$; (iii) 若 $A_k \in \mathcal{L}$, $k = 1, 2, \ldots$, 且 $A_k \subset A_{k+1}$, 则 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{L}$.

(3) 请按以下步骤证明如下$\underline{\pi - \lambda \text{ 定理}}$: 设 $\mathcal{P}$ 是 π-系, $\mathcal{L}$ 是 λ-系, 且 $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$, 则 $S(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$. 这里 $S(\mathcal{P})$ 是 $\mathcal{P}$ 生成的 σ-代数.

(4) 定义 $\mathcal{S} = \bigcap_{\mathcal{L}' \supset \mathcal{P}} \mathcal{L}'$, 其中 $\mathcal{L}'$ 是 λ-系. 证明 $\mathcal{S}$ 是包含 $\mathcal{P}$ 的最小的 λ-系.

(5) 下面证明 $\mathcal{S}$ 是 π-系. 为此, 作 $\mathcal{A} = \{C \subset X : A \cap C \in \mathcal{S}\}$. 证明: 当 $A \in \mathcal{P}$ 时, 成立 $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$.

(6) 请进一步证明: 当 $A \in \mathcal{S}$ 时, $\mathcal{A}$ 是 λ-系.

(7) 由此证明: $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$, 并证明 $\mathcal{S}$ 是 π-系.

(8) 证明 $\mathcal{S}$ 是 σ-代数.

(9) 证明 $S(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$.

[全部测验题结束]