MLR's Class Notes

MCN

MLR

Some Class Notes to Analysis III (H)

Math

目录

Chapter 0 前言 Page 1

0.1 符号说明 1

Chapter 1 欧式空间 $\mathbb{R}^n$ Page 2

1.1 引言 2

1.2 距离空间（度量空间） 2

1.3 赋范线性空间 2

1.4 内积空间 3

1.5 度量空间的收敛与完备性 4

1.6 欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中的拓扑 5

1.7 $\mathbb{R}^n$ 中（度量空间中）点和集合的关系 8

1.8 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集 9

1.9 习题 11

Chapter 2 多元映射的连续性 Page 14

2.1 多元映射和多元函数 14

2.2 多元映射的极限 14

2.3 多元映射的连续性 16

2.4 多元映射的整体连续性质 17

2.5 紧集上的连续映射 18

2.6 道路连通性 19

2.7 习题 20

Chapter 3 多元映射的可微性与微分 Page 23

3.1 方向导数和偏导数 23

3.2 多元映射的可微性 23

3.3 增量估计（中值定理） 27

3.4 C^1 映射 29

3.5 习题 34

Chapter 4 逆映射定理，隐函数定理及其应用 Page 37

4.1 C^k 微分同胚 37

4.2 （局部）逆映射定理 38
4.3 局部逆映射定理的运用 39
4.4 其它应用 42
4.5 习题 46

Chapter 5 多元函数积分学 Page 48

5.1 Darboux 积分 48
5.2 Darboux 可积性的判定 49
5.3 Darboux 积分的基本性质 50
5.4 Riemann 可积和积分的原始定义 52
5.5 有界闭立方体上的 Fubini-Tonelli 定理 53
5.6 一般允许集上的 Riemann 积分 55
5.7 多元函数的变量代换 58
5.8 习题 62

Chapter 6 曲线和曲线积分 Page 64

6.1 参数曲线 64
6.2 可求长曲线和曲线长度 65
6.3 第一型曲线积分 68
6.4 第二型曲线积分 69
6.5 平面上单连通区域的 Green-Riemann 公式 72
6.6 G-R 公式的应用 73
6.7 习题 75

Chapter 7 曲面和曲面积分 Page 77

7.1 C^1 正则参数曲面 77
7.2 曲面面积 78
7.3 第一型曲面积分 79
7.4 $\mathbb{R}^3$ 中的可定向曲面 80
7.5 第二型曲面积分 ($\mathbb{R}^3$ 中) 81
7.6 Green 公式和 Stokes 公式 83
7.7 习题 87

Chapter 8 参变量函数族和含参变量积分 Page 90

8.1 参变量函数族 90

8.2 逐点收敛和一致收敛 90
8.3 一致收敛的重要性质 91
8.4 含参变量的（正常）积分 93
8.5 含参变量的广义（反常）积分 96
8.6 含参变量广义积分的内闭一致收敛判定 98
8.7 二重广义积分的 Fubini 定理 101
8.8 积分变换 103
8.9 习题 105

Chapter 0

前言

本笔记（讲义）针对强基拔尖班数学分析课程，主讲为叶东教授，习题课主讲为吴尉迟讲师，由于精力缘故，仅对正课内容进行了整理，习题课仅收录了题目；在此感谢 zzh 同学与 zwj 同学对笔记勘误的帮助，如有勘误或其他疑问可以通过微信联系编者：sftdvf_nztfmg

0.1 符号说明

$\mathbb{R}$	实数域
$\mathbb{C}$	复数域
$\lim$	极限
$\|\cdot\|$	范数
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	内积
$B(a,r)$	以 a 为球心，r 为半径的开球
A^c	A 的余集（补集）
$A^o/\mathring{A}$	A 的内部
∂A	A 的边界
$\overline{A}$	A 的闭包
diam	直径
$\partial_h f$	f 关于 h 的方向偏导
$o(*)$	高阶无穷小
$\operatorname{grad}/\nabla$	梯度
Hess	Hesse 矩阵
$C^k(\Omega)$	Ω 上的 k 阶连续可微函数
$C^\infty(\Omega)$	Ω 上的光滑函数
$\mathrm{d}f$	f 的微分
Isom / Aut	自同构全体
$\sum^\Delta$	Darboux 上和
$\sum_\Delta$	Darboux 下和
$\operatorname{osc}/\omega$	振幅
$\overline{I}_Q$	Darboux 上积分
$\underline{I}_Q$	Darboux 下积分
$R_\Delta(f,\xi)$	Riemann 和
$\chi_\Omega/\mathbb{1}_\Omega$	Ω 的示性函数
$\mathcal{D}(\Omega)$	Ω 上的 Darboux 可积函数全体
$\mathcal{R}(\Omega)$	Ω 上的 Riemann 可积函数全体
$\mathcal{R}_{loc}(\Omega)$	Ω 上局部可积函数全体
$\subset\subset$	紧子集
$\rightrightarrows$	一致收敛

Chapter 1
欧式空间 $\mathbb{R}^n$

1.1 引言

欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 的拓扑，拓扑即用数学的语言描述**空间关系**，空间是一个带有**结构**的集合，在先前有学过的是代数结构，空间结构，序结构，此外还有微分结构等诸多结构，本章学习内容即欧式空间 $\mathbb{R}^n$，赋予了**欧式内积**的 $\mathbb{R}$ 上线性空间 $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$，更一般的，我们遇到在一般数域 $\mathbb{K}$(通常取 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$) 上的线性空间，在本章中均从一般抽象定义开始学习。

1.2 距离空间（度量空间）

Definition 1.2.1 度量空间

设 X 是非空集合，我们称 (X,d) 为一个**度量空间**，若 $d: X\times X\to\mathbb{R}^+=[0,+\infty)$ 满足：

(i) 正定性：$\forall x,y\in X, d(x,y)\geq 0$ 且 $d(x,y)=0 \iff x=y$;

(ii) 对称性：$\forall x,y\in X, d(x,y)=d(y,x)$;

(iii) 三角不等式：$\forall x,y,z\in X, d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$.

称 d 为 X 上的一个**度量**或**距离**.

Example 1.2.1

容易验证：$d_0(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y\end{cases}$ 是一个 X 上的一个度量.

Definition 1.2.2 收敛性

称 (X,d) 中的一个序列 $\{a^k\}$ 收敛到 $l\in X$，若 $\lim\limits_{k\to\infty} d(a^k,l)=0$，记作 $\lim\limits_{k\to\infty} a^k=l$ 或者 $a^k\to l$.

1.3 赋范线性空间

Definition 1.3.1

设 $(E,+,\cdot)$ 是一个线性空间，$(E,\|\cdot\|)$ 称为一个**赋范线性空间**，若 $\|\cdot\|: E\to\mathbb{R}^+$ 满足：

(i) 正定性：$\forall x\in E, \|x\|\geq 0, \|x\|=0 \iff x=0_E$;

(ii) 线性性：$\forall x\in E, \lambda\in\mathbb{K}, \|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$;

(iii) 三角不等式：$\forall x,y\in E, \|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

称 $\|\cdot\|: E\to\mathbb{R}^+$ 为线性空间 E 上的**范数**.

Proposition 1.3.1

任意赋范线性空间都是一个度量空间，若令 $d(x,y)=\|x-y\|$.

Proof: $(\mathrm{i})_d$ 平凡成立;

$(\mathrm{ii})_d$ 取 $\lambda=-1, d(y,x)=\|y-1\|=\|(-1)(y-x)\|=|-1|\cdot\|x-y\|=\|x-y\|=d(x,y)$;

$(\mathrm{iii})_d$ $d(y,z)+d(x,y)=\|y-z\|+\|x-y\|\geq\|(y-z)+(x-y)\|=\|x-z\|=d(x,z)$.

Definition 1.3.2

称 $(E,\|\cdot\|)$ 中的一个序列 $\{a^k\}$ 收敛到 $l\in X$，若 $\lim\limits_{k\to\infty}\|a^k-l\|=0$，此时写作 $\lim\limits_{k\to\infty}a^k=l$

给定单位球 $B(0_E,1)=\{x\in E,\|x\|<1\}$

Example 1.3.1 $\mathbb{R}^n$ **中的几个范数**

- $\|x\|_\infty=\max|x_i|$，在 $\mathbb{R}^2$ 上的单位球图像为 $[-1,1]\times[-1,1]$ 的边界;
- $\|x\|_1=\sum_{i=1}^n|x_i|$，在 $\mathbb{R}^2$ 上的单位球图像为 $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$ 构成的连线.
- $\|x\|_p=(\sum_{i=1}^n|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}, 1\leq p<\infty$ 可证其为 $\mathbb{R}^n$ 上的范数，故 $\mathbb{R}^n$ 上有无穷多个范数.

1.4 内积空间

Definition 1.4.1

E 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，E 上的对称双线性函数 $\langle\cdot,\cdot\rangle:E\times E\to\mathbb{R}$ 称为**内积**，若满足

(i) $\forall x,y,z\in E,\lambda\in\mathbb{R},\langle\lambda x+y,z\rangle=\lambda\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$;

(ii) $\forall x,y\in E,\langle x,y\rangle=\langle y,z\rangle$;

(iii) $\forall x\in E,\langle x,x\rangle\geq 0$ 且 $\langle x,x\rangle=0\iff x=0_E$.

Proposition 1.4.1

若 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是实向量空间 E 上的内积，则 $\|x\|:=\sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ 定义了 E 上的一个范数，即任意一个内积空间是赋范线性空间.

Proof: (i) $\|x\|\geq 0$，且 $\|x\|=0\iff\langle x,x\rangle=0\iff x=0_E$;

(ii) $\|\lambda x\|^2=\langle\lambda x,\lambda x\rangle=\lambda^2\langle x,x\rangle=\lambda^2\|x\|^2$，故 $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$;

(iii) 先证明 $Cauchy-Schwarz$ 不等式：定义辅助函数

$$P(\lambda)=\langle x-\lambda y,x-\lambda y\rangle=\|x\|^2-2\lambda\langle x,y\rangle+\lambda^2\|y\|\geq 0$$

容易验证 $\Delta=(-2\langle x,y\rangle)^2-4\|x\|^2\cdot\|y\|^2\leq 0$ 也即 $|\langle x,y\rangle|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$，取等当且仅当 $\exists\lambda_0\in\mathbb{R},s.t.P(\lambda_0)=0\iff x$ 与 y 线性相关.

回到三角不等式 $\|x+y\|^2=\langle x+y,x+y\rangle=\|x\|^2+2\langle x,y\rangle+\|y\|^2\leq\|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2\Rightarrow\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

Remark 1.4.1

在内积空间中，三角不等式取等当且仅当 x,y 线性相关; 三角不等式可以化为减号形式，例如范数中：$|\|x\|-\|y\||\leq\|x-y\|$. 度量和范数中的证明留作习题.

在代数中，我们有这样的结论：$\mathbb{R}^n$ 中的内积与实对称正定矩阵一一对应：也就有

$$\langle x,y\rangle_M=\sum_{i,j=1}^n m_{ij}x_iy_j.$$

Definition 1.4.2

取特殊的正定阵 $M=I_n$，则有

- $\langle x,y\rangle_{I_n}=\sum\limits_{i=1}^n x_iy_i$，称为欧式 (Euclidean) 内积;
- $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle_{I_n}}=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}$ 称为欧式范数.

Remark 1.4.2

欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 即赋予了欧式内积的 $\mathbb{R}^n$

1.5 度量空间的收敛与完备性

在 def 1.3.2 中我们给出了收敛的定义，下面探讨收敛序列的性质
极限唯一性：若 $a^k\xrightarrow{d}l_1,a^k\xrightarrow{d}l_2$ 则 $l_1=l_2$;

$$0\leqslant d(l_1,l_2)\leqslant d(l_1,a^k)+d(l_2,a^k)\to 0(k\to+\infty)$$

Definition 1.5.1

$A\subset(X,d)$ 称**有界**，若 $\exists M\geq 0,x_0\in X,s.t.d(x_0,y)\leq M,\forall y\in A$.

收敛序列有界性：若 $a^k\xrightarrow{d}l$，则 $\{a^k\}$ 有界;
取 $\varepsilon=1,\exists k_0\in\mathbb{N},s.t.\forall k\geq k_0,d(a^k,l)<\varepsilon$ 再令 $M=\max\limits_{k<k_0}d(a^k,l)+1$，显然成立.

Definition 1.5.2

$\{a^k\} \subset (X,d)$ 称为 *Cauchy* 列，若 $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}, s.t. p,q \geq k_0 \Rightarrow d(a^p,a^q) \leq \varepsilon$，换言之

$$\lim_{p,q\to+\infty} d(a^p,a^q) = 0$$

收敛序列一定是 *Cauchy* 列：（留作练习）

Definition 1.5.3

(X,d) 称为**完备**的，若 X 中的任意 *Cauchy* 列均收敛.

Proposition 1.5.1

欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 是完备的赋范线性空间 (Banach 空间).

Proof: 令 $\{a^k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 *Cauchy* 列，即 $\lim\limits_{p,q\to+\infty} \|a^p - a^q\| = 0$

$$\|a^p - a^q\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i^p - a_i^q)^2} \geq |a_i^p - a_i^q| \geq 0$$

任给 $1 \leq i \leq n$，$\{a_i^k\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 *Cauchy* 列，$\exists l_i \in \mathbb{R}, s.t. \lim\limits_{k\to+\infty} a_i^k = l_i$.

令 $l = (l_i) \in \mathbb{R}^n$，容易看到 $a^k \overset{\|\cdot\|}{\to} l$，即 $\{a^k\}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中收敛，从而 $\mathbb{R}^n$ 中任意 *Cauchy* 列收敛.

Theorem 1.5.1 聚点定理

$\mathbb{R}^n$ 中任意有界序列有收敛子列.

Proposition 1.5.2

$\mathbb{R}^n$ 中的序列 $\{a^k\}$ 收敛当且仅当每个分量序列 $\{a_i^k\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中收敛.

证明留作习题.

1.6 欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中的拓扑

Definition 1.6.1

- $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x-a\| < r\}$ 称为以 a 为球心，$r > 0$ 为半径的**开球**;
- $a \in \mathbb{R}^n$，$V \subset \mathbb{R}^n$ 称为 a 的**邻域**，若 $\exists r_0 > 0, s.t. B(a,r_0) \subset V$. 所有邻域的集合记作 $\mathscr{V}_a$;
- $O \subset \mathbb{R}^n$ 称为**开集**，若 $\forall a \in O, \exists r_a \geq 0, s.t. B(a,r_a) \subset O$ 换言之 O 是开集若 $\forall a \in O, O \in \mathscr{V}_a$.

Example 1.6.1

$\mathbb{R}^n$ 是开集，$\varnothing$ 是开集，开球也是开集.

Proposition 1.6.1

令 $r_x = r - \|x-a\| > 0$，则 $B(x,r_x) \subset B(a,r)$.

下证开球为开集.

Proof: $\forall x \in B(a,r)$ 取 $y \in B(x,r_0)$

$$\|y-a\| \le \|y-x\| + \|x-a\| < r_x + \|x-a\| = r \Rightarrow \|y-a\| < r$$

从而 $y \in B(a,r)$.

Remark 1.6.1

开集的几何形状可以非常复杂，开立方体 $Q = \prod_{i=1}^n (a_i,b_i)$ 是开集;
$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \sin(xy) + y^3 e^{x^2-2024y} < 2023\}$ 也是开集.

(i) $\mathbb{R}^n, \varnothing$ 是开集;

(ii) **任意**开集的并是开集：即给定 $\{O_j\}_{j\in\mathscr{J}}$, 若 O_j 均为开集，则 $\bigcup_{j\in\mathscr{J}} O_j$ 也是开集;

(iii) **有限个**开集的交是开集：即 $O_1, O_2, \cdots, O_m$ 为开集，则 $\bigcap_{i=1}^m O_i$ 也为开集.

Remark 1.6.2

(iii) 中的有限不可去除，$(\mathbb{R}, |\cdot|)$ 中 $I_k = (-\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{k})$, $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} I_k = \{0\}$.

Definition 1.6.2

称 $F \subset \mathbb{R}^n$ 为闭集，若 F 的余集 $F^c (= \mathbb{R}^n \backslash F)$ 是开集.

闭集的基本性质 (由 *De Morgan* 律易得)

- $\mathbb{R}^n, \varnothing$ 是闭集;
- 任意闭集的交是闭集;
- 有限个闭集的并集是闭集.

Theorem 1.6.1

$F \subset \mathbb{R}^n$ 是闭集 $\iff$ 其中收敛序列收敛于 F，即 $\forall \{a^k\} \subset F$ 若 $\lim\limits_{k\to\infty} a^k = l$ 存在，则 $l \in F$.

Theorem 1.6.2 闭集的序列判定

设 $F \subset (X,d)$，F 是闭集 $\iff$ F 中任意收敛序列的极限属于 F，换言之

$$\forall \{a^k\} \subset F, \text{若} \lim_{k\to\infty} a^k = l, \text{则 } l \in F.$$

Proof:

($\Rightarrow$) 反证法，设结论不成立，即有：

$$\exists \{a^k\} \subset F, a^k \xrightarrow{d} l \notin F. (*)$$

故 $l \in F^c$，由 F^c 是开集，故 $\exists r > 0, s.t. B(l,r) \subset F^c$，又 $a^k \xrightarrow{d} l, \exists k_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall k \ge k_0, d(a^k,l) \le r$ 从而 $a^k \in B(l,r) \subset F^c$ 推出矛盾，故原命题成立.

($\Leftarrow$) 证明逆否命题,假设 F 不是闭集 $\Rightarrow (*)$:若 F 非闭,则 F^c 非开,即 $\exists x \in F^c, s.t. \forall r > 0, B(x,r) \not\subset F^c$，也就是 $B(x,r) \cap F^c \ne \varnothing$，取 $r_k = \frac{1}{2^k}$，于是 $B(x,r_k) \cap F^c$ 非空，$\exists a^k \in B(x, \frac{1}{2^k}) \cap F^c$，从而 $\{a^k\} \subset F, 0 \le d(a^k,x) < r_k = \frac{1}{2^k} \to 0$，即 $\{a^k\} \subset F, \lim\limits_{k\to\infty} d(a^k,x) = 0$，但 $x \in F^c$，逆否命题成立.

Example 1.6.2

$\overline{B}(a,r) := \{x \in X, d(x,a) \leq r\}$ 以 a 为球心，r 为半径的闭球是闭集.

Proof: 由定理 $\{x^k\} \subset \overline{B}(a,r)$ 设 $x^k \xrightarrow{d} l$，要证明：$l \in \overline{B}(a,r)$.
由三角不等式 $|d(x^k,a) - d(l,a)| \leq d(x^k,l)$，因为 $d(x^k,a) \leq r$，又 $d(x^k,l) \to 0(k \to \infty)$，容易得出 $d(a,l) \leq r$，结论成立.

Example 1.6.3

$\mathbb{R}^n$ 中的闭立方体 $\overline{Q} = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ 是闭集;
$\Lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \sin(xy) + y^3 \mathrm{e}^{2024\cos(xy^2)} \leq 2023\}$ 是闭集.

Definition 1.6.3 集合的直径

度量空间中的集合 $A \subset (X,d)$，其直径定义为：$\operatorname{diam}(A) := \sup\limits_{x,y \in A} d(x,y)$.

容易得到如下有界的刻画：

Proposition 1.6.2

$A \neq \varnothing$ 有界当且仅当 $\operatorname{diam} A < \infty$.

Theorem 1.6.3 Banach 闭集套定理

设 (X,d) 是一个完备的度量空间，设 $\{F_k\}$ 是 X 中的闭集序列，满足 $F_{k+1} \subset F_k, \forall k \in \mathbb{N}$，且 $\operatorname{diam}(F_k) \to 0(k \to \infty)$，则 $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k = \{a\}, a \in X$.

Proof: F_k 非空，即 $\exists a^k \in F_k$，得到序列 $\{a^k\}$，且 $\{a^k | k \geq p\} \subset F_p$. 当 $q \geq p, 0 \leq d(a^p, a^q) \leq \operatorname{diam}(F_p)$，由 $\operatorname{diam}(F_p) \to 0$ 推出 $\lim\limits_{p,q \to \infty} d(a^p, a^q) = 0$ 从而 $\{a^k\}$ 是 *Cauchy* 列，又因 (X,d) 完备性，$\{a^k\}$ 收敛，$i.e. a^k \xrightarrow{d} a$，由前述定理与 p 的任意性，有 $a \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}} F_p$. 另一方面 $0 \leq \operatorname{diam}(\bigcap_{p \in \mathbb{N}} F_p) \leq \operatorname{diam}(F_p) \to 0$，易得 $\bigcap_{p \in \mathbb{N}} F_p$ 中至多有一个点 a.

Remark 1.6.3

上述定理中去掉 $\operatorname{diam} F_k \to 0(k \to \infty)$ 可能发生 $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k = \varnothing$，例如 $F_k = [k, +\infty)$.

Theorem 1.6.4 Banach 压缩映射定理

(X,d) 是一个完备度量空间，设 $T: X \to X$ 是一个压缩映射，

$$i.e. \exists \lambda \in (0,1), s.t. d(T(x), T(y)) \leq \lambda d(x,y)$$

则映射 T 有且仅有唯一不动点.$i.e. \exists! a \in X, s.t. T(a) = a$. 更进一步，$\forall X_0 \in X$，令

$$x^k = T^k(x_0) = \overbrace{T \circ \cdots \circ T}^{k个}(x_0)$$

则 $\lim\limits_{k \to \infty} x^k = a$.

1.7 $\mathbb{R}^n$ 中（度量空间中）点和集合的关系

Definition 1.7.1

- a 称为 A 的**内点**，若 A 是 a 的邻域，即 $\exists r>0, s.t. B(a,r)\subset A$;
- a 称为 A 的**外点**，若 a 是 A^c 的内点;
- a 称为 A 的**边界点**，若 a 既非 A 的内点又非 A^c 的外点.

下面给出一些记号：

- A 的所有内点的集合称为 A 的**内部**，记为 $\overset{o}{A}$或A^o;
- A 的所有外点的集合称为 A 的**外部**;
- A 的所有边界点的集合称为 A 的**边界**，记为 ∂A.

Proposition 1.7.1

$\overset{o}{A}\subset A$，$\overset{o}{A}$ 是开集，更准确的说，$\overset{o}{A}$ 是包含于 A 的最大开集.

Proof: $\forall a\in\overset{o}{A}, \exists r>0, B(a,r)\subset A, \forall y\in B(a,r)\in\mathscr{V}_y$，从而 $A\in\mathscr{V}_y$，则 $y\in\overset{o}{A}, B(a,r)\subset\overset{o}{A}$, 故 $\overset{o}{A}$ 是开集，同理可证，若开集 $O\subset A$，则 $O\subset\overset{o}{A}$.

Proposition 1.7.2

$a\in\partial A \iff B(a,r)\cap A\neq\varnothing, B(a,r)\cap A^c\neq\varnothing$；$A$ 的内部外部和边界给出 X 的一个分割.

Example 1.7.1

考虑欧式空间 $\mathbb{R}^n, a\in\mathbb{R}^n, r\geq 0, A=B(a,r)$

- $\overset{o}{A}=B(a,r)$;
- A 的外部 $=\overline{B}^c(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^n, \|x-a\|>r\}$;
- $\partial A=S(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^n, \|x-a\|=r\}$.

Example 1.7.2

更“抽象”的例子：$A=\mathbb{Q}\times\mathbb{Z}$

- $\overset{o}{A}=\varnothing$;
- A 的外部 $=\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z})$;
- $\partial A=\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$.

Definition 1.7.2

a 称为 $A\subset X$ 的**极限点**，若 $\exists A$ 中的序列收敛值 A;A 的所有极限点构成的集合称为 A 的**闭包**，记为 $\overline{A}$;a 称为 A 的**聚点**，若 a 是 $A\backslash\{a\}$ 的极限点;A 的所有聚点的集合称为 A 的**导集**，记为 A'.

Proposition 1.7.3

- $\overline{A}$ 是包含 A 的**最小闭集**;
- $\overline{A} = A \cup \partial A = A \cup A'$;
- $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A}^c$;
- A 的外部 $= \overline{A}^c$.

Proof: (i) $\forall F$ 闭集且 $A \subset F$，则 $\overline{A} \subset F$. 任取 $x \in \overline{A}, \exists \{x^k\} \subset A \subset F, x^k \xrightarrow{d} x$，由 F 是闭集，$x \in F$.

(ii) $\overline{A}$ 是闭集，取 $\{y^k\} \subset \overline{A}$ 且 $y^k \xrightarrow{d} y$，由于 $y^k \in \overline{A}, \exists \{x^k\} \subset A, s.t. d(x^k, y^k) \le \frac{1}{2^k}$，故 $x \in A \iff \forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing$. 又有 $x^k \xrightarrow{d} y$，从而 $y \in \overline{A}$，由定义 $\overline{A}$ 是闭集.

其余结论留作练习.

Definition 1.7.3

若 $x \in A \backslash A'$，则称 x 是 A 中的**孤立点**.

Proposition 1.7.4

x 是孤立点 $\iff \exists r > 0, s.t. B(x,r) \cap A = \{x\}$.

Proof: $(\Rightarrow)$ $x \notin \overline{A \backslash \{x\}}$，$\exists r > 0, s.t. B(x,r) \cap (A \backslash \{x\}) = \varnothing$，又 $x \in A$，故 $B(x,r) \cap A = \{x\}$

$(\Leftarrow)$ $\exists r > 0, s.t. B(x,r) \cap (A \backslash \{x\}) = \varnothing$，从而 $x \notin A'$，即 $x \in A \backslash A'$.

1.8 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集

Definition 1.8.1

给定度量空间 (X,d)，$K \subset X$ 称为**（自）列紧集**，若任意 K 中的序列有**收敛于** K 的子列，即

$$\forall \{x^k\} \subset K, \exists \text{子列} \{x^{kp}\}, s.t. x^{kp} \xrightarrow{d} a \in K$$

$K \subset X$ 称为**紧集**，若 K 的任意开覆盖有**有限子覆盖**，也即 $\forall \{O_j\}_{j \in \mathscr{J}}$，若 $K \subset \bigcap_{j \in \mathscr{J}} O_j$，则 $\exists j_1, j_2, \cdots, j_m, s.t. K \subset \bigcup_{i=1}^m O_{j_i}$

Theorem 1.8.1

在欧式空间 $\mathbb{R}^n, n < +\infty$ 中以下性质是等价的

(i) $K \subset \mathbb{R}^n$ 是**列紧的**;

(ii) $K \subset \mathbb{R}^n$ 是**紧的**;

(iii) $K \subset \mathbb{R}^n$ 是**有界闭集**.

Proof: 证明 $(ii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii)$

- $(ii)\Rightarrow(i)$ 用反证法：设 $K\subset\mathbb{R}^n$ 是紧的，但非列紧，即 $\exists S:=\{x^i\}\subset K$ 不存在子列 $\{x^{ip}\}$ 收敛于 K. 显然有 $\#\{x^i,i\in\mathbb{N}\}=+\infty$，不妨设 x^i 两两不同，由假设知 $\forall a\in K,a\notin K'$, 即 $\exists r_a>0,s.t.B(a,r_a)\cap S=\{a\}$, 从而 $\{B(a,r_a)|a\in K\}$ 构成 K 的开覆盖. 由紧性, $\exists a_1,a_2,\cdots,a_m,s.t.K\subset\bigcup_{j=1}^m B(a_j,r_{a_j})$，于是 $S=K\cap S\subset\bigcap_{j=1}^m[B(a_j,r_{a_j})\cap S]\subset\bigcup_{j=1}^m\{a_j\}$ 为有限集，得出矛盾.

- $(i)\Rightarrow(iii)$ 设 $K\subset\mathbb{R}^n$ 列紧，先证 K 为闭集，设 $\{x^i\}\subset K$ 且 $x^i\xrightarrow{d}l$，由列紧性，$\exists\{x^{ip}\}s.t.x^{ip}\xrightarrow{d}a\in K$，由序列极限的唯一性，$l=a\in K$.
  再证 K 的有界性，用反证法，假设 K 无界，取定 $a\in K,\forall m\in\mathbb{N},K\not\subset B(a,m)$，换言之 $\exists x^m\in K$ 且 $d(x^m,a)\geq m$，则 $\{x_n\}$ 无收敛子列，与列紧性矛盾.

- $(iii)\Rightarrow(i)$ 用反证法，设 $K\subset\mathbb{R}^n$ 是有界闭集，存在 K 的开覆盖 $\{O_j\}_{j\in\mathscr{J}}$ 不存在 K 的有限子覆盖. 首先 $\exists M>0$, 使得 $K\in\overline{Q_0}:=[-M,M]^n$，将 $\overline{Q_0}$ 分割得到 2^n 个同样大小的立方体 $\{\overline{Q_{1,p}}\}$，一定存在 $p_1\in\{1,\cdots,2^n\}$，使得 $F_1=K\cap\overline{Q_{1,p_1}}$ 没有有限子覆盖. 再将 $\overline{Q_{1,p_1}}$ 分割得到 2^n 个同样大小的立方体 $\{\overline{Q_{2,p}}\}$，存在 $p_2\in\{1,\cdots,2^n\}$，使得 $F_2=K\cap\overline{Q_{2,p_2}}$ 没有有限子覆盖，于是得到 $F_2\subset F_1,\operatorname{diam}(F_2)\leq\frac{1}{2}\operatorname{diam}(F_1)$；重复上述操作，得到一串闭集列 $F_m=K\cap\overline{Q_{m,p_m}}$ 满足：
  - $F_m\subset F_{m-1}$ 且 $\forall n\in\mathbb{N},F_n$ 没有有限子覆盖;
  - $\operatorname{diam}(F_m)\leq\frac{1}{2}\operatorname{diam}(F_{m-1})$

  由闭集套定理 $\bigcap_{m=1}^\infty F_m=\{a\}\subset K$，故 $\exists O_{j_0}s.t.a\in O_{j_0}$，从而 $\exists r>0,s.t.B(a,r)\subset O_{j_0}$. 取 $m_0\in\mathbb{N}$ 使得 $\operatorname{diam}(F_{m_0})\leq r,a\in F_{m_0}\Rightarrow F_{m_0}\subset B(a,r)\subset O_{j_0}$，与 F_{m_0} 不能被有限覆盖矛盾.

Remark 1.8.1

在上述证明中，仅第三条运用了 $\mathbb{R}^n$ 的完备性，其余均可用在一般拓扑空间.

Remark 1.8.2

在无穷维赋范线性空间中，$\overline{B}(0,1)$ 不是紧集

Definition 1.8.2

度量空间 (X,d) 中 A 称为**相对紧**的，若 $\overline{A}$ 是紧的;A 称为**准紧**的，若 $\forall\varepsilon>0,\exists$ 有限个点 $x^1,\cdots x^{m_\varepsilon}$ 使得 $A\subset\bigcup_{i=1}^{m_\varepsilon}B(x^i,\varepsilon)$

Proposition 1.8.1

$A\in\mathbb{R}^n$ 是相对紧和准紧的，当且仅当 A 是有界的.

Remark 1.8.3

度量空间中 A 是紧的，当且仅当 A 是准紧且完备的.

下面给出一些补充：

Definition 1.8.3

设 $X\neq\varnothing,d_1,d_2$ 是其上两个度量

- 称 d_1,d_2 是**拓扑等价**的，若 x^k 在 (X,d_1) 中收敛当且仅当 x^k 在 (X,d_2) 中收敛.
- 称 d_1,d_2 是 **(度量) 等价**的，若 $\exists C,C'>0$，使得 $Cd_1(x,y)\leq d_2(x,y)\leq C'd_1(x,y)$.

容易得到度量等价 $\Rightarrow$ 拓扑等价，反之一般不成立.

Definition 1.8.4

设 E 是线性空间，$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 是 E 上的两个范数，称 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是等价的，若 $\exists C, C' > 0$，使得 $\forall x \in E, C\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C'\|x\|_1$.

1.9 习题

题 1 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的欧式范数:

(a) 求证 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 正向平行当且仅当 $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$.

(b) 求证 $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x-y\|$.

(c) 若 $\langle x, y\rangle = 0$ ，我们称 x, y 正交。证明下面的 " 勾股定理 " ：若 x, y 正交，则

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

(d) 证明：$\langle x, y\rangle = 0$ 当且仅当对于所有实数 a ，均有 $\|x+ay\| \geqslant \|x\|$.

(e) 证明 " 平行四边形定理 " ：

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

题 2 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的两个范数 $\|\cdot\|', \|\cdot\|''$ ，如果存在 $m, M > 0$ ，使得对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ ，有

$$m\|x\|'' \leqslant \|x\|' \leqslant M\|x\|'',$$

我们称 $\|\cdot\|'$ 与 $\|\cdot\|''$ 等价。

(a)（自反性）对任意范数 $\|\cdot\|'$ ，求证 $\|\cdot\|'$ 与自身等价；

(b)（对称性）若 $\|\cdot\|'$ 与 $\|\cdot\|''$ 等价，求证 $\|\cdot\|''$ 与 $\|\cdot\|'$ 等价；

(c)（传递性）若 $\|\cdot\|'$ 与 $\|\cdot\|''$ 等价，$\|\cdot\|''$ 与 $\|\cdot\|'''$ 等价，求证 $\|\cdot\|'$ 与 $\|\cdot\|'''$ 等价；

(d) 求证：无穷范数 $\|x\|_\infty := \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$ 与 1 －范数 $\|x\|_1 := \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$ 确实是 $\mathbb{R}^n$ 中的范数；

(e) 求证无穷范数 $\|\cdot\|_\infty$, 1-范数 $\|\cdot\|_1$ 与欧式范数两两等价；

(f) 画出 $\mathbb{R}^2$ 中以上三种范数对应的单位球的图像；

(g) 对 $p > 1$ ，定义 p －范数为 $\|x\|_p := \left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|^p\right)^{1/p}$ ，求证 $\|\cdot\|_p$ 确实是一个范数，且此 p －范数与上面三个范数等价；（提示：应用 Minkowski 不等式）

(h) 对任意范数 $\|\cdot\|'$ ，试参考序列收敛的定义给出序列 $\{x_n\}$ 关于范数 $\|\cdot\|'$ 收敛的定义；

(i) 若 $\|\cdot\|'$ 与 $\|\cdot\|''$ 等价，则序列 $\{x_n\}$ 关于范数 $\|\cdot\|'$ 收敛当且仅当序列 $\{x_n\}$ 关于范数 $\|\cdot\|''$ 收敛。

题 3 设 $\|\cdot\|'$ 与 $\|\cdot\|''$ 是 $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^m$ 上的任意两个范数，对任意 $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$ ，定义

$$\|(x,y)\|_a := \sqrt{\|x\|'^2 + \|y\|''^2}, \quad \|(x,y)\|_b := \|x\|' + \|y\|''$$
$$\|(x,y)\|_c := \max\{\|x\|', \|y\|''\}$$

求证 $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b, \|\cdot\|_c$ 都是 $\mathbb{R}^{n+m}$ 上的范数.

题 4 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的具有非空内点的原点中心对称的有界闭凸集，证明

$$\|x\|_K = \min\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 中的范数.

题 5 求证：对于 $\mathbb{R}^n$ 中非空集合 A, A 有界当且仅当 $\operatorname{diam}(A) < +\infty$.

题 6 求证：$\mathbb{R}^n$ 中的 Cauchy 序列有界.

题 7 求证：$\mathbb{R}^n$ 中的序列 $\{x_k\}$ 收敛当且仅当 $\{x_k\}$ 是一个 Cauchy 序列。

题 8 设 X 是 n 维赋范空间，$\|\cdot\|_E$ 是欧氏范数，则任意的范数 $\|\cdot\|$ 和欧氏范数等价。

题 9 对 $\mathbb{R}^n$ 中的序列 $\{x_k\}$ ，求证：若级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_{k+1}-x_k\|$ 收敛，则序列 $\{x_k\}$ 收敛。

题 10 设序列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足 $x_{ki}=(-1)^{k+i}, i=1,\cdots,n$ ，求该序列所有聚点.

题 11 在 $\mathbb{R}^n$ 中，序列 $x_k \to a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 当且仅当 $\forall 1 \leqslant i \leqslant n, x_{ki} \to a_i$.

题 12 设 $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ 是有界序列，则 $\{x_k\}$ 收敛当且仅当 $\{x_k\}$ 的聚点唯一.

题 13 判断下列集合是开集，闭集，既开又闭还是不开不闭。如果没有明确答案，请举例说明。

(a) $\mathbb{R}^n$ 中的有限点集；

(b) $\mathbb{R}^n$ 中的可数点集；

(c) $\{x=(x_1,,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x)=0, f \in \mathbb{R}[x_1,\cdot,x_n]$ 为一实系数多项式 $\}$;

(d) 对 $n \times n$ 方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ ，可将其视为一 n^2 维向量，即 $A \in \mathbb{R}^{n^2}$ 。在这种看法下，考虑集合 $\left\{A \in \mathbb{R}^{n^2} : \det(A) \neq 0\right\}$.

题 14 (a) 构造开集列 $\{G_k\}$ 使得 $\cap_k G_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$;

(b) 构造闭集列 $\{F_k\}$ 使得 $\cup_k F_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$.

题 15 定义投影算子 $P:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ，使得 $P((x,y))=x$ 。求证：P 把开集映为开集。注意：P 不一定把闭集映为闭集。请举例说明。

题 16 For $v=(x_1,\ldots,x_n)$ in $\mathbb{R}^n$, let $\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ and $\|v\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$; these are the usual p-norm and ∞-norm on $\mathbb{R}^n$. For what v does the series

$$\sum_{p=1}^{\infty}\left(\|v\|_p - \|v\|_\infty\right)$$

converge?

题 17 Let $A \subset \mathbb{R}^n$.

(a) Prove that $x \in \partial A$ if and only if for any $\delta > 0, B(x,\delta) \cap A \neq \emptyset$ and $B(x,\delta) \cap A^c \neq \emptyset$.

(b) Prove that $\partial A = \bar{A} \backslash A^o, \partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}$.

(c) Prove that ∂A is a closed set.

题 18 记 A^d 为集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ 的所有聚点的集合。求证：A^d 的所有聚点都在 A^d 中，即 $\left(A^d\right)^d \subset A^d$ 。

题 19 求证：紧集的闭子集是紧集.

题 20 求证：A^o 是 A 中最大的开子集；$\bar{A}$ 是包含 A 的最小闭集.

题 21 计算：$\overline{\mathbb{Q}}=?\quad \mathbb{Q}^o=?\quad \partial\mathbb{Q}=?\quad \overline{\mathbb{Q}^c}=?\quad (\mathbb{Q}^c)^o=?\quad \partial(\mathbb{Q}^c)=?$

题 22 Prove that:

(a) A is closed if and only if $A=\bar{A}$;

(b) $\bar{\bar{A}}=\bar{A}$;

(c) if $A\subset B$, then $\bar{A}\subset\bar{B}$;

(d) $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$ and find an example that $\overline{A\cap B}\neq\bar{A}\cap\bar{B}$.

题 23 Prove that:

(a) A is open if and only if $A^o=A$;

(b) $(A^o)^o=A^o, A^o=\overline{A^c}^c$;

(c) if $A\subset B$ ， then $A^o\subset B^o$;

(d) $(A\cap B)^o=A^o\cap B^o$ and find an example that $(A\cup B)^o\neq A^o\cup B^o$

题 24 Prove that:

(a) $\partial\bar{A}\subset\partial A, \partial(A^o)\subset\partial A, \partial(A\cup B)\subset\partial A\cup\partial B$;

(b) if $\bar{A}\cap\bar{B}=\emptyset$, then $\partial(A\cup B)=\partial A\cup\partial B$;

(c) A is open if and only if $\partial A=\bar{A}\backslash A$.

题 25 请证明下列 " 紧集套 " 定理：设 $\{F_k\}\subset\mathbb{R}^n$ 是一个非空的闭集列，满足

(1) $F_{k+1}\subset F_k$;

(2) $\operatorname{diam}(F_k)\to\ell<\infty$ ，那么 $\bigcap_{k\in\mathbb{N}}F_k$ 非空。

题 26 求证: 对紧集 A 的任一开覆盖 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ，存在 $\beta>0$ ，使得 $\forall x\in A, \exists\lambda\in\Lambda, B(x,\beta)\subset U_\lambda$. 此常数 $\beta>0$ 称为 Lebesgue 数。

题 27 求证：$\mathbb{R}^n$ 中的紧子集存在可数稠密子集，即对紧集 A ，存在可数序列 $\{x_n\}$ ，使得 $\forall x\in A, \forall\varepsilon>0, \exists n\in\mathbb{N}$，使得 $x_n\in B(x,\varepsilon)$. 我们也称紧集具有可分性。

题 28 (a) 对 $\mathbb{R}^n$ 中两点 x_1,x_2 ，求证：存在 x_1,x_2 的两个开邻域 U_1,U_2 ，使得 $U_1\cap U_2=\emptyset$;

(b) 对 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集 S_1,S_2 ，定义 $d(S_1,S_2):=\inf\limits_{\substack{x_1\in S_1\\ x_2\in S_2}}|x_1-x_2|$. 求证：若 $S_1\cap S_2=\emptyset$ ，则 $d(S_1,S_2)>0$;

(c) 对 $\mathbb{R}^n$ 中的两个互不相交的有界闭集 S_1,S_2 ，求证：存在开集 U_1,U_2 ，使得 $S_1\subset U_1$ ，$S_2\subset U_2, U_1\cap U_2=\emptyset$

Chapter 2
多元映射的连续性

2.1 多元映射和多元函数

Definition 2.1.1

多元映射 $f: D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m, x\mapsto f(x), (m,n\in\mathbb{N})$，其中自变量：$x=(x_i)_{1\leq i\leq n}$ 应变量：$f(x)=f_j(x)_{1\leq j\leq m}$，通常当 $m=1$ 时称为**函数**，$m>1$ 时称为**映射**或者**向量值函数**，每个 f_j 称为**分量函数**.

给定一个多元映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，可以考虑：

- 其定义域记为 $\mathscr{D}_f\subset\mathbb{R}^n$，往往我们也考虑 $\Omega\subset\mathscr{D}_f$;
- （限制在 Ω 上的）值域为 $f(\Omega)=\{y\in\mathbb{R}^m|\exists x\in\Omega, y=f(x)\}=\{f(x),x\in\Omega\}$;
- 映射的复合：$f:\Omega\to\mathbb{R}^m, g:\Omega'\to\mathbb{R}^l$，若 $f(\Omega)\subset\Omega'$，定义 $g\circ f:\Omega\to\mathbb{R}^m, g\circ f(x)=g(f(x))$;
- 有界性：f 在 Ω 有界，若 $f(\Omega)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中有界，即 $\exists M>0, s.t.\forall x\in\Omega, \|f(x)\|\leq M$;
- 映射的图像：$\mathrm{Graph}(f)=\{(x,f(x)),x\in\Omega\}$;
- 更特别的，当 $m=1$ 时，可以讨论 l 的上（下）界与非负性.

Example 2.1.1

初等函数的复合：$f(x,y)=(\arcsin(\frac{y}{x}),\sqrt{x^2+3y^2-6y+5})$ 的定义域

$$\mathscr{D}_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\neq 0, \frac{y}{x}\in[-1,1], x^2+3y^2-6y+5\geq 0\}$$

2.2 多元映射的极限

Definition 2.2.1

给定映射 $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，设 $a\in\Omega'$ 即 a 是 Ω 的**聚点**，称 f 在 Ω 上关于 a 有极限 A，若满足 $\forall\varepsilon>0,\exists r>0, s.t.\forall x\in(B(a,r)\backslash\{a\})\cap\Omega, \|f(x)-A\|\leq\varepsilon$，记为 $\lim\limits_{x\to a, x\in\Omega}f(x)=A$.

函数的基本性质：

- 极限的唯一性;
- 局部有界性：若 f 在 Ω 上关于 a 有极限，则 $\exists r>0$ 使得 $f((B(a,r)\backslash\{a\})\cap\Omega)$ 有界;
- 局部保号性 $(m=1)$;
- 代数运算下保持，例如 $f,g:\Omega\to\mathbb{R}^n, \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\Omega}}f(x)=A, \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\Omega}}g(x)=B$

  则 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\Omega}}f(x)+g(x)=A+B.$; 又 $h:\Omega\to\mathbb{R}, \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\Omega}}h(x)=c$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\Omega}}h(x)f(x)=cA$;
- 迫敛性成立

Theorem 2.2.1 极限判定准则

设 $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m, a\in\Omega'\subset\mathbb{R}^m$ 则 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\in\Omega}} f(x)$ 存在当且仅当下列性质之一成立

(1) $\forall 1\le i\le m, \lim\limits_{\substack{x\to a\\x\in\Omega}} f_i(x)$ 存在（即每个分量函数的极限存在）;

(2) *Cauchy* 准则：$\forall\varepsilon>0,\exists r>0, s.t.\forall x,y\in(B(a,r)\backslash\{a\})\cap\Omega, \|f(x)-f(y)\|\le\varepsilon$

(3) 序列刻画：$\forall\{x^k\}\subset(B(a,r)\backslash\{a\})\cap\Omega$，若 $\lim\limits_{k\to\infty}x^k=a$，则 $f(x^k)$ 当 $k\to\infty$ 有极限.

Proof: 证明顺序：极限存在 $(0)\Rightarrow(1)\Rightarrow(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(0)$

- $(0)\Rightarrow(1)$:$\forall 1\le i\le m$ 设 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\in\Omega}} f(x)=A$，则 $0\le\|f_i(x)-A_i\|\le\|f(x)-A\|$，由迫敛性成立.
- $(1)\Rightarrow(2)$:$\forall\varepsilon>0,\exists r_i>0,\forall x\in(B(a,r_i)\backslash\{a\})\cap\Omega, |f_i(x)-A_i|\le\varepsilon\Rightarrow\forall x,y\in(B(a,r_i)\backslash\{a\})\cap\Omega, |f_i(x)-f_i(y)|\le 2\varepsilon$，令 $r=\min(r_i)>0$，则 $\forall x,y\in(B(a,r)\backslash\{a\})\cap\Omega, \|f(x)-f(y)\|\le 2\sqrt{m}\varepsilon$
- $(2)\Rightarrow(3)$: 取 $\{x^k\}\subset\Omega\backslash\{a\}, \lim\limits_{k\to\infty}x^k=a$，考虑 $f(x^k)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的 *Cauchy* 列，从而 $f(x^k)$ 在 $\mathbb{R}^m$ 中收敛.
- $(3)\Rightarrow(0)$：显然 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x^k)$ 不依赖于 $\{x^k\}$ 的选取，记为 A，用反证法证明 $\lim\limits_{x\to a}=A$. 假设结论不成立，即 $\exists\varepsilon>0,\forall r>0,\exists x\in(B(a,r)\backslash\{a\})\cap\Omega, \|f(x)-A\|>\varepsilon$，利用 $r=\frac{1}{2^k}$，得到 $x^k\in(B(a,\frac{1}{2^k})\backslash\{a\})\cap\Omega$，$x^k\in\Omega\backslash\{a\}, \lim\limits_{k\to\infty}x^k=a$，但 $f(x^k)$ 不收敛于 A，矛盾.

Example 2.2.1

多元映射极限与一元映射情况有**本质区别**，详见下例：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\ne 0\\ 2024 & (x,y)=0\end{cases}$$

- $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$，$\lim\limits_{\lambda\to0,\lambda\ne0}f(\lambda a,\lambda b)=0$
- $\lim\limits_{x\to0}\left(\lim\limits_{y\to0}f(x,y)\right)=0, \lim\limits_{y\to0}\left(\lim\limits_{x\to0}f(x,y)\right)=0$

但事实上，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$ 不成立，只需取 $(x,y)=(\frac{1}{k},\frac{1}{k^2})$，有 $f(\frac{1}{k},\frac{1}{k^2})=\frac{1}{2},(\frac{1}{k},\frac{1}{k^2})\to(0,0)$ 而 $\lim\limits_{k\to\infty}f(\frac{1}{k},\frac{1}{k^2})=\frac{1}{2}$. 这是因为 $(x,y)\to(0,0)$ 时只要求 $\|(x,y)\|\to0$，没有要求 (x,y) 的方向.

给定映射 $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m, a\in\Omega'$, 我们关心 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\in\Omega}} f(x)=l$

- 总可以归结为 $a=0_{\mathbb{R}^n}, m=1, l=0_{\mathbb{R}^m}$
- 证明极限存在
  - 通过定义直接证明
  - 估计 $\|f(x)-l\|$ 不等式或 $x\to a\iff\|x-a\|\to0$,$n=2$ 时，$x-a=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ $\|x-a\|=r, x\overset{\mathbb{R}^2}{\to}a\iff r\to0,\forall\theta.$
- 说明极限不存在，通常可以讨论特殊的逼近序列的极限.

Example 2.2.2

对于 $g(x,y) = \dfrac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^4+y^2}$，令 $x^2 = r\cos\theta, y = r\sin\theta, g(x,y) = \dfrac{r^{\frac{\alpha}{2}+\beta}|\cos\theta|^{\frac{\alpha}{2}}|\sin\theta|^\beta}{r^2}$，于是 $\lim\limits_{(x,y)\to 0_{\mathbb{R}^2}} g(x,y) = 0$ 当且仅当 $\frac{\alpha}{2}+\beta > 2$

2.3 多元映射的连续性

Definition 2.3.1

给定映射 $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，我们称 f 在 $a\in\Omega$ 处连续，若 $\forall\varepsilon>0,\exists r>0, s.t. y\in B(a,r)\cap\Omega\Rightarrow \|f(y)-f(a)\|\le\varepsilon$. 我们也记为 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\Omega}} f(x) = f(a)$，称 a 为 f 的**连续点**.

Remark 2.3.1

f 在任意孤立点处是连续的.

Definition 2.3.2

若 a 不是 f 的连续点，我们称 a 为 f 的**间断点**；若 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\Omega}} f(x) = l$ 存在，但 $l\ne f(a)$ 我们称 a 为 f 的可去间断点.

有了单点连续的定义，就可以定义在集合上连续：

Definition 2.3.3

若 f 在 Ω 上每一点都连续，我们称 f 在 Ω 上连续，记为 $f\in C(\Omega)$, 或 $C(\Omega,\mathbb{R}^m)$.

Proposition 2.3.1 连续性的序列刻画

给定映射 $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，$f$ 在 $a\in\Omega$ 处连续当且仅当任给 $\{x^k\}\subset\Omega$, 若 $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = a$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^k) = f(a)$.

Theorem 2.3.1 复合映射的连续性

给定映射 $f:\Omega_1\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m, g:\Omega_2\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^l$, 设 $a\in\Omega_1, b=f(a)$, 设

$$\exists r_1>0, s.t. f(B(a,r_1)\cap\Omega_1)\subset\Omega_2$$

f 在 Ω_1 上于 a 连续，g 在 Ω_2 上于 b 连续，则 $g\circ f$ 在 $B(a,r_1)\cap\Omega_1$ 上于 a 处连续.

Proof: g 在 Ω_2 上于 b 处连续，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0, s.t. y\in B(b,\delta)\cap\Omega_2$ 则 $\|g(b)-g(y)\|\le\varepsilon$
f 于 Ω_1 上于 a 处连续，对于 $\delta>0,\exists r_2>0, s.t. x\in B(a,r_2)\cap\Omega_1$ 则 $\|f(a)-f(x)\|\le\frac{\delta}{2}$
令 $r=\min\{r_1,r_2\}>0, f(x)\in B(b,\delta)\cap\Omega_2,\forall x\in B(a,r)\cap\Omega_1$, 从而 $\|g(f(x))-g(f(a))\|\le\varepsilon$.

Corollary 2.3.1

给定映射 $f:\Omega_1\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m, g:\Omega_2\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^l$, 若 $l\in C(\Omega_1), g\in C(\Omega_2), f(\Omega)\subset\Omega_2$, 则 $g\circ f\in C(\Omega_1)$，**所有初等映射**在定义域上连续.

2.4 多元映射的整体连续性质

给定映射 $f: U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^m$

Theorem 2.4.1

f 在 U 上连续当且仅当任给 V 中的开集 O，则 $f^{-1}(O)$ 是 U 中开集.

Proof:

($\Rightarrow$) 任给 V 中开集 O, 任取 $a \in f^{-1}(O)$, 则 $b = f(a) \in O, \exists r_1 > 0, s.t. B(b,r) \cap V \subset O$, 由 f 在 a 处的连续性，对于 $\varepsilon = \frac{r_1}{2}, \exists r_2 > 0, s.t. y \in B(a,r_2) \cap U \Rightarrow \|f(y) - f(a)\| \leq \varepsilon < r_1$, 从而 $f(y) \in B(b,r_1) \cap V \subset O$, 也即 $y \in f^{-1}(O)$，结论：$B(a,r_2) \cap U \subset f^{-1}(O)$，由定义 $f^{-1}(O)$ 为开集.

($\Leftarrow$) $\forall \varepsilon > 0, b = f(a) \in V$, 取 $O = B(b,\varepsilon) \cap V$ 是 V 中开集，由假设，$f^{-1}(O)$ 是 U 中开集，$a \in f^{-1}(O)$, 从而 $\exists r > 0, s.t. B(a,r) \cap U \subset f^{-1}(O), \forall y \in B(a,r) \cap U, f(y) \in O \subset B(b,\varepsilon)$, 也即 $\|f(y) - b\| < \varepsilon$. 结论：$\forall a \in U, f$ 在 U 上于 a 处连续，从而 $f \in C(U)$.

Corollary 2.4.1

$f \in C(U) \iff \forall V$ 中闭集 $F, f^{-1}(F)$ 是 U 中闭集.

在多元映射中，我们也可以定义一致连续.

Definition 2.4.1

给定映射 $f: U \in \mathbb{R}^n \to V \in \mathbb{R}^m$，称 f 在 Ω 上一致连续，若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得 $\forall x, y \in \Omega$，$\|x - y\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$.

Proposition 2.4.1

f 在 Ω 上一致连续，则 f 在 Ω 上连续，反之不一定成立.

下给出比一致连续更强的 Lipschitz 条件：

Definition 2.4.2

给定映射 $f: U \in \mathbb{R}^n \to V \in \mathbb{R}^m$，称 f 在 Ω 上是 $M - Lipschitz$ 的，若 $\exists M > 0$, 使 $\forall x, y \in \Omega$ $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$.

Proposition 2.4.2

Ω 上的 Lipschitz 映射是一致连续的.

Proof: $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0, \|x - y\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\| \leq \varepsilon$.

Example 2.4.1

$f \in C(I): [a,b] \to \mathbb{R}$ 且在 I^o 内 $M - Lipschitz \iff \forall x \in I^o, |f'(x)| \leq M$;
取 $f(x) = \sqrt{x}, I = [0, 2024]$, 显然一致连续无法推出 $Lipschitz$.

Definition 2.4.3

f 称为 Ω 上的**压缩映射**，若存在 $\lambda \in (0,1)$ 使得 l 在 Ω 上是 $\lambda - Lipschitz$ 的.

容易看出：压缩映射 $\Rightarrow$ $Lipschitz$ $\Rightarrow$ 一致连续 $\Rightarrow$（整体）连续

Definition 2.4.4

Hölder 连续记为 $f \in C^{\alpha}(\Omega), (\alpha \in (0,1])$ 若 $\exists M > 0, s.t. \|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|^{\alpha}$

Remark 2.4.1

Hölder 连续可推出一致连续，但不一定能推出 Lipschitz；我们不考虑 $\alpha > 1$ 的情况是因为满足 $\alpha > 1$ 的函数均为常值函数.

2.5 紧集上的连续映射

我们假设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 上的紧集，$f \in C(K), K \to \mathbb{R}^m$

Theorem 2.5.1

紧集上的连续映射是一致连续的.

Proof: 用反证法:假设 $\exists \varepsilon > 0, s.t. \forall \delta > 0, \exists x, y \in K, s.t. d(x,y) \leq \delta, \|f(x) - f(y)\| \geq \varepsilon$. 取 $\delta = \frac{1}{2^i}(i \in \mathbb{N})$，则 $\exists x^i, y^i \in K, d(x^i, y^i) \leq \frac{1}{2^i}$, 且 $\|f(x^i) - f(y^i) \geq \varepsilon\|$ 由于 K 是紧的，$\exists x^{ip}$ 使得 $x^{ip} \xrightarrow{d} a \in K$，当 $p \to \infty$ 由三角不等式，$y^{ip} \xrightarrow{d} a$，因为 f 在 a 处连续，故 $\left.\begin{array}{l} f(x^{ip}) \overset{p\to\infty}{\to} f(a) \\ f(y^{ip}) \overset{p\to\infty}{\to} f(a) \end{array}\right\}$ 与 $\|f(x^{ip}) - f(y^{ip})\| \geq \varepsilon, \forall p$ 矛盾. 假设错误，即 f 在 K 上是一致连续的.

Theorem 2.5.2

紧集的连续像是紧的，即 $f(K)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的紧集.

Proof: 任取 $\{y^i\} \subset f(K), \exists \{x^i\} \subset K, y^i = f(x^i)$，由 K 的紧性，$\exists$ 子列 $\{x^{ip}\} \overset{\|\cdot\|}{\to} a \in K$, 又 f 在 a 处连续，$y^{ip} = f(x^{ip}) \overset{\|\cdot\|}{\to} f(a) \in K$，于是得到子列 $\{y^{ip}\}$ 收敛于 $f(K)$，由紧集刻画，$f(K)$ 是紧集.
又因为紧集是有界闭的，故有如下推论:

Corollary 2.5.1

连续映射在紧集上是有界的，若 $m = 1$，则 f 在 K 上达到最大（小）值.

Theorem 2.5.3

$\mathbb{R}^n$ 中任意两个范数是等价的.

实际上，范数等价是个等价关系（留作练习）

Example 2.5.1

$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_E$ 等价,$\forall x \in \mathbb{R}^n$, 我们有 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \leq \|x\|_E \leq \|x\|_1$

Proof: 任给 $\mathbb{R}^n$ 上范数 $\|\cdot\|_*$，我们将证明 $\|\cdot\|_*$ 等价于 $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^n |x_i|$ 一方面，令 $e^i = (0,\cdots,1,\cdots,0)'$，即仅第 i 个分量为 1，于是 $x = \sum\limits_{i=1}^n x_ie^i$

$$\|x\|_* = \|\sum_{i=1}^n x_ie^i\|_* \le \sum_{i=1}^n \|x_ie^i\|_* = \sum_{i=1}^n |x_i|\|e^i\|_* \le \left(\max_{1\le i\le n}\|e^i\|_*\right)\sum_{i=1}^n |x_i| = C_1\|x\|_1$$

另一方面，考虑映射 $\varphi : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}, |\cdot|), x \mapsto \|x\|_*$，其为 Lipschitz 映射，得到如下估计

$$\|x\|_* - \|y\|_* \le \|x-y\|_* \le C_1\|x-y\|_1$$

故其为连续映射，考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的紧集 $S = \{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|_1 = 1\}$，故 φ 在 S 上达到最小值 $C_0 := \min_S \varphi = \varphi(a) = \|a\|_* > 0$ 任取 $0 \ne y \in \mathbb{R}^n, x = \dfrac{y}{\|y\|_1} \in S$，从而 $\varphi(x) \ge C_0 > 0$ 也就是 $\|\dfrac{y}{\|y\|_1}\|_* = \dfrac{\|y\|_*}{\|y\|_1} \ge C_0 > 0$ 于是有 $C_0\|x\|_1 \le \|x\|_* \le C_1\|x\|_1$，即得到等价性.

Theorem 2.5.4 代数基本定理

$\mathbb{C}$ 上任意阶数 >1 的多项式有复根.

Proof: 设 $p \in \mathbb{C}[z], p = \sum_{i=1}^m a_iz^i, a_i \in \mathbb{C}, a_m \ne 0, m \ge 1$，目标：证明 $\exists z_0 \in \mathbb{C}, p(z_0) = 0$. 用反证法，即假设 $\forall z \in C, p(z) > 0$，则有连续映射 $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, z \mapsto \dfrac{1}{|p(z)|}$，断言 $\lim_{|z|\to\infty} |p(z)| = +\infty$，这是因为 $p(z) = \sum\limits_{i=1}^m a_mz^m\left(1 + \sum\limits_{i=0}^{m-1}\dfrac{a_i}{a_m}\zeta^{1-m}\right)$，于是 $|p(z)| = |a_m|\cdot|z|^m \times \left|1 + \sum\limits_{i=0}^{m-1}\dfrac{a_i}{a_m}\zeta^{1-m}\right|$，故 $\lim\limits_{|z|\to\infty}\varphi(z) = 0$ 则 $\exists z_0 \in \mathbb{C}, s.t.\varphi(\zeta_0) = \max\limits_{z\in\mathbb{C}}\varphi(z)$，即 $|p(\zeta_0)| = \min\limits_{z\in\mathbb{C}}|p(z)|$

考虑 $h(z) = \dfrac{p(z+z_0)}{p(z_0)} \in \mathbb{C}[z], h(z) = z^m + \sum_{i=0}^{m-1} b_iz^i$，$1 = |h(0)| = \min_{z\in\mathbb{C}}|h(z)|$

令 $k = \min\{i \ge 1, b_i \ne 0\}, h(z) = 1 + b_kz^k + \sum\limits_{i=k+1}^m b_iz^i$，则 $h(\varepsilon e^{i\theta}) = 1 + b_k\varepsilon^k e^{ik\theta} + O(\varepsilon^{k+1})$，取 $\theta \in \mathbb{R}$ 使得 $b_ke^{ik\theta} = -|b_k| < 0$，则

$$\begin{aligned}|h(\varepsilon e^{i\theta})| &= |1 - C\varepsilon^k + O(\varepsilon^{k+1})| \le |1 - C\varepsilon^k| + |O(\varepsilon^{k+1})| \\ &\le 1 - C\varepsilon^k + \frac{C}{2}\varepsilon^k \le 1 - \frac{C}{2}\varepsilon^k < 1\end{aligned}$$

与 $|h(0)| = 1$ 取得最小值矛盾，故假设不成立.

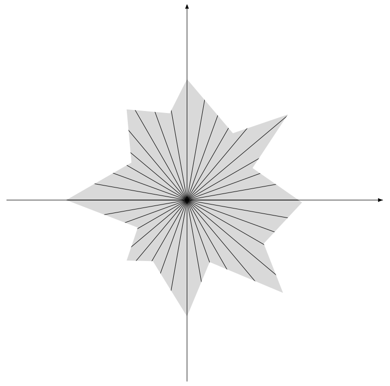
2.6 道路连通性

Example 2.6.1

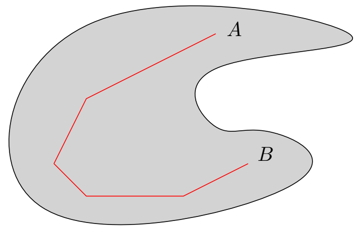
- 从 A 到 B 的线段 $[A;B] = \{tB + (1-t)A, t \in [0,1]\}$;
- $\Omega \subset E$（线性空间），称 Ω 是**凸**的，如果 $\forall A, B \in \Omega, [A;B] \subset \Omega$;
- $\Omega \subset E$ 称为**星形区域**，若 $\exists O \in E, s.t.\forall A \in \Omega, [O;A] \subset \Omega$.

Definition 2.6.1

给定 $\Omega \in \mathbb{R}^n$，称 Ω 是**折线连通**的，若 $\forall A, B \in \Omega, \exists\{a_i\}_{i=1}^n \subset \Omega, s.t.a^1 = A, a^m = B$，且线段 $[a^i; a^{i+1}] \subset \Omega, i = 1,\cdots,m-1$



星形区域



折线连通区域

Definition 2.6.2

给定 $\Omega \in \mathbb{R}^n$，若 $f: I \subset \mathbb{R} \to \Omega$，$I$ 是有界闭区间，f 连续，则 $f(I)$ 称为 Ω 中的**连续道路**.

Definition 2.6.3

给定 $\Omega \in \mathbb{R}^n$，称 Ω 是**道路连通**的，若 $\forall A, B \in \Omega, \exists \Omega$ 中连接 A, B 的连续道路，即 $\forall A, B \in \Omega, \exists f: [0,1] \to \Omega, s.t. f$ 连续，且 $f(0) = A, f(1) = B$

Theorem 2.6.1

设开集 $O \subset \mathbb{R}^n$，则 O 折线连通 $\iff$ O 道路连通 ($\iff$ 连通).

Proof: 折线连通 $\Rightarrow$ 道路连通，平凡；
设开集 $O \subset \mathbb{R}^n$ 是道路连通的，$\forall A, B \in O, \exists h: I = [0,1] \to O$，连续且 $h(0) = A, h(1) = B$; 由连续映射保紧性，则 $h(I) = K$ 是 O 中紧集，由 *Lebesgue* 性质，$\exists \varepsilon > 0, s.t. \forall p \in K, B(p, \varepsilon) \subset K$. 由 H 在 I 上的一致连续性，$\exists \delta > 0, s.t. \forall s, t \in I, |s - t| \le \delta$，则 $\|h(s) - h(t)\| < \varepsilon$，取 N 充分大，使得 $\dfrac{1}{N} \in (0, \delta)$，再令 $t_k = \frac{k}{N}, |t_{k+1} - t_k| < \delta$，从而 $A_{k+1} = h(t_k) \in B(A_k, \varepsilon) \Rightarrow [A_k; A_{k+1}] \subset B(A_k, \varepsilon) \subset O$，从而折线集 $\{[A_k; A_{k+1}]|, k = 0, \cdots, N-1\}$ 连接 A, B.

Theorem 2.6.2

道路连通集的连续像也是道路连通的，即设 $\Omega \in \mathbb{R}^n$ 是道路连通的，设 $f: \Omega \to \mathbb{R}^m \in C(\Omega)$，则 $f(\Omega)$ 是道路连通的.

Corollary 2.6.1

$m = 1, \Omega$ 道路连通，$f \in C(\Omega)$，则 $f(\Omega)$ 是 $\mathbb{R}$ 中区间，也即成立介值性.

2.7 习题

题 1 计算 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$.

题 2 对函数 $f: [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ ，比较 $\inf_{y\in[0,1]} \sup_{x\in[0,1]} f(x,y)$ 与 $\sup_{y\in[0,1]} \inf_{x\in[0,1]} f(x,y)$ 的大小。

题 3 对 $\alpha, \beta > 0$ ，记

$$g(x,y) = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^4 + y^2}$$

请问何时 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ 存在？

题 4 求证：若函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处极限 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 与累次极限 $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ 都存在，则他们一定相等.

题 5 对映射 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ，证明如下条件等价：

(a) f 连续；

(b) 对任意 $\mathbb{R}^m$ 中的开集 U, U 的原像是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集；

(c) 对任意 $\mathbb{R}^m$ 中的闭集 F, F 的原像是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集；

(d) $\forall E \subset \mathbb{R}^n, f(\bar{E}) \subset \overline{f(E)}$.

题 6 请问函数 $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ 在 $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ 上是否连续？是否一致连续？

题 7 设 $f_k : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, k \in \mathbb{N}^*$ 为一列连续映射。求证：若 $\{f_k\}$ 一致收敛到 f ，则极限函数 f 在 D 上连续.

题 8 设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 是紧集，若函数列 $f_m : K \to \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}^*$ 满足 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，使得

$$|f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon, \forall \|x-y\| < \delta, k \geqslant 1.$$

那么若 $\{f_m\}_{m\geqslant 1}$ 逐点收敛到 f ，则 f 连续且 $\{f_m\}_{m\geqslant 1}$ 一致收敛到 f .

题 9（Dini’s Theorem）Let $K \subset \mathbb{R}^m$ be compact. Let $f : K \to \mathbb{R}$ be a continuous function and $f_n : K \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ ，be a sequence of continuous functions. If $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converges pointwise to f and if

$$f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x) \quad \text{for all } x \in K \text{ and all } n \in \mathbb{N},$$

then $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converges uniformly to f.

题 10 设 $f(x,y) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 分别关于 x 和 y 连续，求证：

(a) 若 $f(x,y)$ 关于 x 对 y 一致连续 ($\forall x_0, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,s.t.$\forall y, (x_0,y), (x,y) \in D$,if $|x - x_0| < \delta$,then $|f(x,y) - f(x_0,y)| < \varepsilon$)，则 $f : D \to \mathbb{R}$ 连续；

(b) 若 f 在 D 上对于 x 局部满足关于 y 一致的 Lipschitz 条件 ($\forall (x_0,y_0) \in D, \exists r > 0, L > 0$,s.t. $\forall (x_1,y), (x_2,y) \in D \cap B_r((x_0,y_0)), |f(x_1,y) - f(x_2,y)| < L|x_1 - x_2|$), 则 $f : D \to \mathbb{R}$ 连续；

(c) 若 $f(x,y)$ 关于 y 单调，则 $f : D \to \mathbb{R}$ 连续。

题 11 设 $u = f(x,y,z)$ 在闭立方体 $[a,b]^3$ 上连续，试证

$$g(x,y) = \max_{a\leqslant z\leqslant b} f(x,y,z)$$

在正方形 $[a,b]^2 \subset \mathbf{R}^2$ 上连续.

题 12 对函数 $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, a \in D, \delta > 0$ ，定义 f 在 $D \cap B(a,\delta)$ 上的振幅为

$$\omega_f(a,\delta) := \sup_{x\in D\cap B(a,\delta)} f(x) - \inf_{x\in D\cap B(a,\delta)} f(x).$$

令 $\omega_f(a) = \lim_{\delta\to 0} \omega_f(a,\delta)$ ，称为 f 在 a 点的振幅。求证：

(a) 若 f 在 D 上有界，则对 $\forall a \in D, \omega_f(a)$ 存在;

(b) f 在 a 点连续当且仅当 $\omega_f(a) = 0$.

题 13 对函数 $f:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ ，求证：若 f 在 $\{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]: y=0\}$ 连续，则存在 $\delta>0$ ，使得 f 在 $\{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]: 0\leqslant y\leqslant\delta\}$ 上有界。

题 14 (a) 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 连续，且 $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x)=0$ ，求证：f 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续;

(b) 设 $f: D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 连续，D 为有界开集，求证：f 在 D 上一致连续当且仅当 $\forall x_0\in\partial D, \lim_{x\in D, x\to x_0} f(x)$ 存在.

题 15 设 $f:[a,A]\times[b,B]\to\mathbb{R}$ 连续，函数列 $\{\varphi_n\}$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛且 $\forall n, \forall x\in[a,A], b\leqslant\varphi_n(x)\leqslant B$ ，求证：$\{f(x,\varphi_n(x))\}$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛.

题 16 求证：不存在闭区间到圆周的一对一连续对应.

Chapter 3
多元映射的可微性与微分

3.1 方向导数和偏导数

给定映射 $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，设 $a\in\Omega^o$，即 $\exists r>0, s.t. B(a,r)\subset\Omega$

Definition 3.1.1

取 $h\neq 0_{\mathbb{R}^n}$，若极限

$$\lim_{t\to 0,t\neq 0}\frac{f(a+th)-f(a)}{t}$$

存在，称该极限为 f 在 a 点沿 h 的**方向偏导数**，记 $\partial_h f(a)$.

Definition 3.1.2

记 $\mathbb{R}^n\ni x=(x_i)$，在 $\mathbb{R}^n$ 中 f 关于 x_i 方向的偏导数 $\partial_{x_i}f(a)\left(\text{也记为}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)$ 定义为 $\partial_{e_i}f(a)$.

问题：连续不能推出方向导数的存在性，方向导数的存在性也无法推出连续性

Example 3.1.1

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq 0_{\mathbb{R}^2}\\ 0 & (x,y)=0_{\mathbb{R}^2}\end{cases}$$

$\forall h\neq 0_{\mathbb{R}^2}$

- $h//e_1$ 或 $h//e_2$，$f(th)\neq 0,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow\partial_{e_i}f(0_{\mathbb{R}^2})=0$
- $h_1,h_2\neq 0,\forall t\neq 0$

$$f(th)=\frac{t^3h_1^2h_2}{t^4h_1^4+t^2h_2^2}=\frac{th_1^2h_2}{t^2(h_1^4+h_2^2)}$$

则成立

$$\frac{f(th)-f(0)}{t}\xrightarrow{t\to 0}\frac{h_1^2}{h_1}=h_1$$

我们看到所有方向导数存在，但 f 在 $0_{\mathbb{R}^2}$ 不连续.

3.2 多元映射的可微性

回忆一元函数 $g:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$g'(x)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{g(a+t)-g(a)}{t}$ 存在，则 g 在 a 可导，等价于 g 在 a 点处有一阶 $Taylor$ 展开，即 $g(a+t)=g(a)+c_0t+o(t),t\to 0$. 借此引入多元映射可微性：

Definition 3.2.1

给定 $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，称 f 在 a 处**可微**，若存在 $L\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$，使成立

$$f(a+h)=f(a)+L(h)+o(\|h\|),h\to 0_{\mathbb{R}^n}$$

换言之：$R(h)=f(a+h)-f(a)-L(h)$ 满足 $\lim\limits_{h\to 0_{\mathbb{R}^n}}\dfrac{\|R(h)\|}{\|h\|}=0$ 此时 f 在 a 处的**微分**记为 $\mathrm{d}f(a)$ (或$\mathrm{d}_a f$)

Remark 3.2.1

线性映射均为 Lipschitz 映射，$\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\cong M_{m\times n}(\mathbb{R})$，特别的 $\mathbb{R}^n$ 的对偶空间 $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})\cong\mathbb{R}^n$，$\forall\varphi\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$，成立 $\varphi(x)=\sum\limits_{i=1}^n b_ix_i$ 其中 $b_i=\varphi(e_i)$.

Definition 3.2.2

若 l 在开集 Ω 的每一点处可微，则称 f 在 Ω 上可微.

可微的基本性质：

- $m=n=1$ 时，f 在 a 处可微 $\iff$ f 在 a 点可导；
- 可微性可推出连续性：$f(a+h)-f(a)=L(h)+o(\|h\|)\xrightarrow{h\to 0}0$;
- 可微性可推出所有的方向导数存在：$\dfrac{f(a+th)-f(a)}{t}=\dfrac{L(th)+o(\|h\|)}{t}=L(h)+o(\|h\|)\xrightarrow{t\to 0}L(h)$，从而 $\partial_h f(a)=L(h)\forall h\in\mathbb{R}^n$.
- 可微性可推出偏导数存在，且推出微分的**唯一性**，$L(h)=L(\sum\limits_{i=1}^n h_ie_i)=\sum\limits_{i=1}^n h_iL(e_i)=\sum\limits_{i=1}^n h_i\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

对于可微性的证明：

Step 1 : 求 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

Step 2 : 令 $R(h)=f(a+h)-f(a)-\sum\limits_{i=1}^n h_i\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$，讨论 $R(h)$ 是否是 $o(\|h\|)$，换言之：是否满足 $\lim\limits_{h\to 0_{\mathbb{R}^n}}\dfrac{\|R(h)\|}{\|h\|}=0$

考虑例 3.1.1：

Step 1 :$\dfrac{f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$;

Step 2 :$R(h)=f(h)-f(0)-[h_1\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)+h_2\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)]=f(h)$. 显然不成立 $\lim\limits_{h\to 0_{\mathbb{R}^n}}\dfrac{\|R(h)\|}{\|h\|}=0$，只需取 $h=(\varepsilon,\varepsilon)$，得到结论：$f$ 在 $(0,0)$ 不可微.

Remark 3.2.2

另解：观察到 f 在 $(0,0)$ 不连续，则不可微.

Theorem 3.2.1 复合映射的可微性

$l:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,g:U\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^l,a\in\Omega^o,b=f(a)\in U^o$，设 f 在 a 处可微，g 在 b 处可微，则 $g\circ f$ 在 a 处可微，且 $\mathrm{d}(g\circ f)(a)=\mathrm{d}g(b)\circ\mathrm{d}f(a)$

Proof:

$$f(a+h)=f(a)+L_1(h)+R_1(h), R_1(h)=o(\|h\|), L_1\in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$$

$$g(b+k)=g(b)+L_2(k)+R_2(k), R_2(k)=o(\|k\|), L_2\in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^l)$$

复合得到：

$$\begin{aligned} g\circ f(a+h)=g\left(f(a+h)\right)&=g\left(f(a)+L_1(h)+R_1(h)\right)\\ (\text{令}L_2(k)=L_2(L_1(h)+R_1(h)))&=g(b)+L_2(k)+R_2(k)\\ &=g(b)+L_2(L_1(h))+L_2(R_1(h))+R_2(k)\\ &=g(b)+L_2\circ L_1(h)+R(h)\end{aligned}$$

$R(h)=L_2(R_1(h))+R_2(k)$，其中 $\|L_2(R_1(h))\|\le C\|R_1(h)\|=C\times o(\|h\|), \|R_2(k)\|=o(\|k\|)=o(\|h\|)$.
这是因为 $\dfrac{\|R_2(k)\|}{\|h\|}=\dfrac{\|R_2(k)\|}{\|k\|}\times\dfrac{\|k\|}{\|h\|}$ 且 $\|k\|\le (C+1)\|h\|$.

给定 $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 在 $a\in\Omega^o$ 处可微，若 $f(a+h)=f(a)+\mathrm{d}f(a)(h)+o(\|h\|), h\to 0_{\mathbb{R}^n}$
其中 $\mathrm{d}f(a)=\mathrm{d}_af\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$

$$\mathrm{d}f(a)(h)=\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial f}{\partial h}(a)$$

Example 3.2.1

- $L\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m), \mathrm{d}f(a)=L, \forall a\in\mathbb{R}^n$
- 双线性映射 $T:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m, (a,b)\mapsto T(a,b)$

$$T(a+h_1,b+h_2)=T(a,b)+T(a,h_2)+T(h_1,b)+T(h_1,h_2)$$

  $\mathrm{d}T(A,B)=L:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m, H\mapsto T(A,h_2)+T(h_1,B)$
- $\varphi: M_n(\mathbb{R})\times M_n(\mathbb{R})\to M_n(\mathbb{R}):(A,B)\mapsto AB$，则 $\mathrm{d}\varphi(A,B)(H,K)=AK+BH$

Example 3.2.2

$\psi: M_n(\mathbb{R})\to M_n(\mathbb{R}), A\mapsto A^2, \mathrm{d}\psi(A)(B)=AB+BA$

Sol:

- 方法一：$\psi(A+H)=A^2+AH+HA+H^2$
- 方法二：记 $L(A):A\mapsto(A,A)$，则 $\psi(A)=\varphi(A,A)=\varphi\circ L(A), \mathrm{d}\psi(A)(B)=\mathrm{d}(\varphi\circ L)(A)(B)=\mathrm{d}(\varphi)(L(A))\circ\mathrm{d}L(A)(B)=\mathrm{d}\varphi(A,A)(B,B)=AB+BA$

Example 3.2.3

$\zeta: M_n(\mathbb{R})\to M_n(\mathbb{R}), A\mapsto A^{2024}$

$$\mathrm{d}\zeta(A)(B)=\sum_{i=0}^{2023}A^{2023-i}BA^i$$

自行验证即可.

Definition 3.2.3

一般的，我们得到微分

$$\mathrm{d}f(a)(h)=\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial f}{\partial x}(a)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}$$

其中 $\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\end{pmatrix}\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 称为 f 在 a 点处的 *Jacobi* 矩阵，记为 $Jac_a(f)$

特别的，当 $m=1$ 时，$Jac_a(f)\in M_{1\times n}(\mathbb{R}),\mathrm{d}f(a)(h)=\langle\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}\\ \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\end{pmatrix}(a),\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}\rangle=\langle\operatorname{grad}f(a),h\rangle$

其中 $\operatorname{grad}f(a)=\nabla f(a)$ 称为 f 在 a 处的**梯度**

复合函数的计算需要用到如下链式法则：

Theorem 3.2.2 链式法则

$f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,g:U\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^l,a\in\Omega^o,b=f(a)\in U^o$，设 f 在 a 处可微，g 在 b 处可微，则

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_i}(a)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial g}{\partial y_i}(b)\times\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$$

Proof:

- 证明 1：$\mathrm{d}(g\circ f)(a)(h)=Jac_a(g\circ f)\times h$
  另一方面
  $$\begin{aligned}\mathrm{d}(g\circ f)(a)(h)&=\mathrm{d}g(b)\circ\mathrm{d}f(a)(h)=\mathrm{d}g(b)\left(\mathrm{d}f(a)(h)\right)\\&=\mathrm{d}g(b)\left(Jac_af\times h\right)\\&=Jac_bg\times Jac_af\times h\end{aligned}$$
  从而 $Jac_a(g\circ f)=Jac_bg\times Jac_af$
- 证明 2: $g\circ f(a+\varepsilon e_i)=g\circ f(a)+\varepsilon\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_i}(a)+o(\varepsilon),\varepsilon\to 0$ 令 $f(a)=b$, 则 $g\circ f(a)+\varepsilon\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)+o(\varepsilon)=g(b)+\varepsilon\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial g}{\partial y_j}(b)\times\frac{\partial f_j}{x_i}(a)+o(\varepsilon),\varepsilon\to 0$

Corollary 3.2.1

初等映射在定义域内部是可微的

Theorem 3.2.3 逆映射微分定理

$f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to U\subset\mathbb{R}^m$，设 f 是开集 Ω 到开集 U 的双射，记 f^{-1} 为 f 的逆映射:$U\to\Omega$，$a\in\Omega,b=f(a)$，设 f 在 a 处可微，且 f^{-1} 在 b 处连续，则 f^{-1} 在 b 处可微 $\iff m=n$，$\mathrm{d}f(a)\in\operatorname{Isom}(\mathbb{R}^n)$ 且 $\mathrm{d}f^{-1}(b)=[\mathrm{d}f(a)]^{-1}$.

Proof:

- 设 f^{-1} 在 b 处可微，则 $f^{-1}\circ f = id_\Omega$ 在 a 处可微：

$$id_{\mathbb{R}^n} = \mathrm{d}(f^{-1}\circ f)(a) = \mathrm{d}f^{-1}(b)\circ \mathrm{d}f(a)$$

同理 $\mathrm{d}f(a)\circ \mathrm{d}f^{-1}(b) = id_{\mathbb{R}^m}$，于是推出 $m=n$ 且 $\mathrm{d}f^{-1}(b) = [\mathrm{d}f(a)]^{-1}$

- 设 $\mathrm{d}f(a)\in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n), f^{-1}(b+h) = a+\xi(h)$，其中 $\lim\limits_{h\to 0}\xi = 0$，由 f^{-1} 在 b 点的连续性给到.

$$f(a+\xi) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(\xi) + R(\xi), R(\xi) = o(\|\xi\|)$$

从而 $\mathrm{d}f(a)(\xi) + R(\xi) = h$

$$\xi + [\mathrm{d}f(a)]^{-1}(R(\xi)) = [\mathrm{d}f(a)]^{-1}(h)$$

记 $[\mathrm{d}f(a)]^{-1}(R(\xi)) = R_1$

$$f^{-1}(b+h) = a+\xi = a + [\mathrm{d}f(a)]^{-1}(h) - R_1(h)$$

我们有 $\|R_1(h)\| \le C\|R(\xi)\| = o(\|h\|)$，当 $\|h\|$ 充分小时，$\|\xi\|$ 充分小，使得 $\|R_1(h)\| \le \frac{\|\xi\|}{2}$，又由于三角不等式

$$\frac{\|\xi\|}{2} \le \|\xi + R_1(h)\| = \|[\mathrm{d}f(a)]^{-1}(h)\| \le C\|h\|$$

即成立 $\|\xi\| \le 2C\|h\|$，从而成立 $R_1(h) = o(\|\xi\|) = o(\|h\|)$，由定义：$f^{-1}$ 在 b 点可微，且成立 $\mathrm{d}f^{-1}(b) = [\mathrm{d}f(a)]^{-1}$

Remark 3.2.3 微分的几何意义

$\mathrm{Graph}(f)\in \Omega\times\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{m+n}$ ：$m=1$ 时，图像 $\mathbb{R}\ni y = f(x)$，f 在 $a\in\Omega^o$ 处可微，我们称 $y = b + \mathrm{d}f(a)(x-a)$ 是 f 在 a 处的切平面，可以用梯度写出切平面的**法向量**.

3.3 增量估计（中值定理）

当 $m>1$ 时，等式形式的中值公式**不再成立**

Example 3.3.1

$n=1, m=2$，考虑 $f(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta), \nabla f(\theta) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, 0_{\mathbb{R}^2} = f(2\pi) - f(0)$，但不存在 θ 使得中值公式成立.

Theorem 3.3.1

设 $f:\Omega\in\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 在 Ω 上可微，给定 $A,B\in\Omega$，若 $[A;B]\subset\Omega$，则 $\exists t\in(0,1)$ 使得

$$f(B) - f(A) = \mathrm{d}f(tB + (1-t)A)\cdot(B-A)$$

或者可以写成等价形式：若 $[A;A+H]\subset\Omega$，则 $\exists t\in(0,1)$ 使得

$$f(A+H) - f(A) = \mathrm{d}f(A+tH)\cdot H = \langle\nabla f(A+tH), H\rangle$$

Proof: 考虑 $\varphi(t) = f(tB+(1-t)A), \varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$ 可导，$\varphi(1)-\varphi(0) = \varphi'(t)$，而 $\varphi(0) = f(A), \varphi(1) = f(B), \varphi'(t) = \mathrm{d}f(tB+(1-t)A)\cdot(B-A)$.

Definition 3.3.1 矩阵范数

$\forall A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$，矩阵范数 $\|A\|_*=\sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}=\max\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|$

Proposition 3.3.1

- $\|\cdot\|_*$ 定义了 $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 上的一个范数
- $\|Ax\|\leq\|A\|_*\|x\|,\forall x\in\mathbb{R}^n,m=1$ 或 $n=1$ 时，$\|A\|_*=\|A\|$
- $\forall A\in M_{m\times n}(\mathbb{R}),B\in M_{n\times l}$，$\|AB\|_*\leq\|A\|_*\|B\|_*$
- $\|A\|_*=\sqrt{\rho(A^TA)}$，$\rho(M)$ 代表非负对称矩阵的最大特征值.

Theorem 3.3.2 增量估计公式

$f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，且 f 在 Ω 上可微，若 $[a,a+h]\subset\Omega$，则

$$\|f(a+h)-f(a)\|\leq\left(\sup_{t\in(0,1)}\|Jac(f)(a+th)\|_*\right)\times\|h\|$$

Proof: 任取 $\xi\in\mathbb{R}^m$，考虑 $F(x)=\langle f(x),\xi\rangle_{\mathbb{R}^m}=L_\xi\circ f(x)$，其中 $L_\xi(y)=\langle y,\xi\rangle$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F(x)(h)&=(\mathrm{d}L_\xi\circ f)\circ\mathrm{d}f(x)(h)\\&=L_\xi(\mathrm{d}f(x)(h))=\langle\mathrm{d}f(x)(h),\xi\rangle\end{aligned}$$

对 F 运用中值公式，则 $\exists t\in(0,1)$

$$F(a+h)-F(a)=\mathrm{d}F(a+th)h=\langle\mathrm{d}f(a+th),\xi\rangle$$

运用 $C-S$ 不等式，得到

$$\langle\mathrm{d}f(a+th),\xi\rangle\leq\|\mathrm{d}f(a+th)(h)\|\cdot\|\xi\|\leq\|Jac(f)(a+th)\|_*\cdot\|h\|\|\xi\|$$

取 $\xi=f(a+h)-f(a)$，则有

$$\|\mathrm{d}f(a+h)-f(a),\mathrm{d}f(a+th)-f(a)\|^2\leq\|Jac(f)(a+th)\|_*\cdot\|h\|\cdot\|f(a+h)-f(a)\|$$

最后推出

$$\|f(a+h)-f(a)\|\leq\|Jac(f)(a+th)\|_*\cdot\|h\|\leq\left(\sup_{t\in(0,1)}\|Jac(f)(a+th)\|_*\right)\times\|h\|$$

Theorem 3.3.3

Ω 是一个道路连通的开集，设 $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 可微，则

$$f\text{在}\Omega\text{为常值函数} \iff \mathrm{d}f(x)=0,\forall x\in\Omega$$

Proof: $(\Rightarrow)$ 平凡

$(\Leftarrow)$ $\forall A,B\in\Omega$，由于 Ω 是道路连通的开集，则 Ω 是折线连通的，$\exists a^i(i=1,\cdots,p)$ 使得 $[a^i:a^{i+1}]\subset\Omega$ 且 $a^1=A,a^p=B$，在 $[a^i;a^{i+1}]$ 上运用增量公式，得到 $f(a^i)=f(a^{i+1})$ 从而 $f(A)=f(B)$

类似的，我们可以得到如下推论：

Corollary 3.3.1

设 Ω 关于 x_k 是凸集，设 f 在 Ω 上满足 $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\equiv 0$，则 $f|_\Omega$ 与 x_k 无关，换言之

$$f(x)=h(x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_n)$$

证明概要：不妨设 $m=1$，用一元函数的 *Lagrange* 中值定理.

3.4 C^1 映射

给定映射 $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，$f$ 在 Ω 上可微，考虑其确定的微分映射

$$\mathrm{d}f:\mathbb{R}^n\supset\Omega\ni x\mapsto \mathrm{d}f(x)\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\cong\mathbb{R}^{m\times n}$$

Definition 3.4.1

若上述微分映射 $\mathrm{d}f$ 在 $a\in\Omega$ 处连续，则称 f 在 a 处连续可微，又称 f 在 a 处是 C^1 的；若 $\mathrm{d}f$ 在 Ω 上连续，则称 f 在 Ω 上连续可微或 C^1 的，记为 $f\in C^1(\Omega)$

Theorem 3.4.1 (C^1 判定)

设 $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，$\Omega$ 为开集，则 $f\in C^1(\Omega)\iff f$ 的所有偏导数在 Ω 上存在且连续.

Proof: $(\Rightarrow)$（平凡）若 $f\in C^1(\Omega)$，则 f 在 Ω 上可微，从而任意偏导数存在，于是可以推出：$x\mapsto \mathrm{d}f(x)\in C(\Omega)\Rightarrow x\mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\in C(\Omega)$

$(\Leftarrow)$ 考虑 $f(a+h)-f(a)$，不妨设 $m=1$，考虑折线逼近：

$$a^i=\sum_{k=1}^{i}h_ke_k+a$$

其中 $a^0 = a, a^n = a+h$，于是

$$\begin{aligned}
f(a+h)-f(a) &= \sum_{i=0}^{n-1}\left[f(a^{i+1})-f(a^i)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\left[f(a^i+h_{i+1}e_{i+1})-f(a^i)\right] \\
(\text{中值公式}), \theta_i\in(0,1) &= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial x_{i+1}}\left(a^i+\theta_i h_{i+1}e_{i+1}\right)\cdot h_{i+1} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a+\sum_{i=1}^{j-1}h_k e_k+\theta_{j-1}h_j e_j)\cdot h_j
\end{aligned}$$

记 $\sum\limits_{i=1}^{j-1} h_k e_k + \theta_{j-1}h_j e_j = \widetilde{h_j}$，则 $\|h\|\to 0$ 时 $\widetilde{h}\to 0$

$$\begin{aligned}
R(h) = f(a+h)-f(a)-\sum_{j=1}^{n}h_j\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(a+\widetilde{h_j})-\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right]\times h_j \\
(\text{由偏导连续性}) &= \sum_{j=1}^{n}o(1)\times O(\|h\|) = o(\|h\|), \|h\|\to 0
\end{aligned}$$

由定义得到 f 在 a 处可微，又由于 $\mathrm{d}f$ 分量 $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ 均连续，则 $\mathrm{d}f\in C(\Omega)$，于是 $f\in C^1(\Omega)$

Definition 3.4.2 二阶微分

$f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，$\Omega$ 为开集，设 f 在 Ω 上可微，若 $\mathrm{d}f$ 在 a 处可微，则称 f 在 a 处二阶可微.

Remark 3.4.1 二阶可微的必要条件

- $f\in C^1(\Omega)$;
- 所有二阶偏导数存在.

Definition 3.4.3

二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)$，特别的，当 $i=j$ 时候，记 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

若 $\mathrm{d}f$ 在 a 处二阶可微，则 $\mathrm{d}^2f(a)=\mathrm{d}(\mathrm{d}f)(a)\in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m))\cong\mathrm{Hom}_2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$，

Theorem 3.4.2

记 $\mathrm{Hom}_k(E,F)$ 是从 E^k 到 F 的 k 重线性映射空间，则 $\mathrm{Hom}(E,\mathrm{Hom}_k(E,F))\cong\mathrm{Hom}_{k+1}(E,F)$.

Proof: 考虑如下线性映射，我们将证明它是线性同构：

$$\mathrm{Hom}(E,\mathrm{Hom}_k(E,F))\xrightarrow{T}\mathrm{Hom}_{k+1}(E,F),\varphi:E\to\mathrm{Hom}(E,F)\mapsto\Phi\in\mathrm{Hom}_{k+1}(E,F)$$

其中 $\Phi(x^1,\cdots,x^{k+1}):=\varphi(x^1)(x^2,\cdots,x^{k+1})$

- $\Phi\in\mathrm{Hom}_{k+1}(E,F)$ 是恰当定义的

- $\varphi \mapsto \Phi$ 是线性映射
- $\operatorname{Ker} T = \{0\}$，设 $\Phi = 0_{\mathrm{Hom}_{k+1}} \Rightarrow \varphi(x^1) = 0_{\mathrm{Hom}_k}$，即 $\forall x^1 \in E, \varphi = 0_{\mathrm{Hom}(E,\mathrm{Hom}_k)}$
- T 是满射，任取 $\xi \in \mathrm{Hom}_{k+1}(E,F)$
  定义 $\varphi : E \to \mathrm{Hom}_k, \varphi(x^1)(x^2,\cdots,x^{k+1}) = \xi(x^1,\cdots,x^{k+1})$ 则有
  - $\varphi(x^1) \in \mathrm{Hom}_k, \forall x^1 \in E$;
  - φ 关于 x^1 线性

  于是 $\varphi \in \mathrm{Hom}(E,\mathrm{Hom}_k)$，且 $T(\varphi) = \xi$

Claim 3.4.1

考虑 $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \mathrm{d}f : \Omega \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m), x \mapsto \mathrm{d}f(x)$，若 $\mathrm{d}f$ 在 a 处可微，则有 $\mathrm{d}(\mathrm{d}f)(a) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)) \cong \mathrm{Hom}_2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$，且 $\mathrm{d}^2f(a)$ 可视作 $(\mathbb{R}^n)^2$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的双线性映射，满足

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2f(a)(h,k) &= \mathrm{d}^2f(a)\left(\sum_{i=1}^n h_ie_i, \sum_{j=1}^n k_je_j\right)\\ &= \sum_{i,j=1}^n h_ik_j\mathrm{d}^2f(a)(e_i,e_j)\\ &= \sum_{i,j=1}^n h_ik_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\end{aligned}$$

在此处 (h,k) 的顺序可视作偏导表达式中的顺序，仅作为形式记号.

Definition 3.4.4

特别的，当 $m=1$ 时，$\mathrm{d}^2f(a) \in \mathrm{Hom}_2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ 是双线性型；上述 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)(a) \in M_n(\mathbb{R})$ 称为 *Hesse* 矩阵或 *Hessian* 矩阵，记为 $\mathrm{Hess}_a(f)$，于是有 $\mathrm{d}^2f(a)(h,k) = h^T\,\mathrm{Hess}_a(f)k$.

Theorem 3.4.3 Schwarz 定理

设 $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 在 $a \in \Omega^o$ 处二阶可微，则

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a), \forall i,j$$

即 $\mathrm{d}^2f(a)$ 是对称的双线性映射.

Proof: 记 $A(h,k) = f(a+h+k) - f(a+h) - f(a+k) + f(a), F(y) = f(a+h+y) - f(a+y)$，则有 $A(h,k) = F(k) - F(0)$，不妨设 $m=1$，由于增量公式：

$$\exists\theta \in (0,1), s.t. F(k) - F(0) = \mathrm{d}F(\theta k)(k)$$

由定义得：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F(y) &= \mathrm{d}f(a+h+y) - \mathrm{d}f(a+y)\\ (Taylor) &= [\mathrm{d}f(a) + \mathrm{d}^2f(a)(h+y) + o(\|h+y\|)] - [\mathrm{d}f(a) + \mathrm{d}^2f(a)(y) + o(\|y\|)]\\ &= \mathrm{d}^2f(a)(h) + o(\|h+y\|) + o(\|y\|)\end{aligned}$$

代入增量公式，故有：

$$\begin{aligned}A(h,k) &= [\mathrm{d}^2 f(a)(h) + o(\|h\| + \|\theta k\|) + o(\|\theta k\|)] \cdot k \\ &= [\mathrm{d}^2 f(a)(h)] \cdot k + [o(\|h\| + \|k\|)] \cdot k\end{aligned}$$

固定 $h,k \in \mathbb{R}^n$，考虑 $(\varepsilon h, \varepsilon k)$ 当 $\varepsilon \to 0$：

$$\begin{aligned}A(\varepsilon h,\varepsilon k) &= \mathrm{d}^2 f(a)(\varepsilon k, \varepsilon h) + [o(\|\varepsilon h\| + \|\varepsilon k\|)] \cdot (\varepsilon k) \\ &= \varepsilon^2 \mathrm{d}^2 f(a)(k,h) + \varepsilon^2 [o(\|h\| + \|k\|)] \cdot k\end{aligned}$$

于是有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{A(\varepsilon h,\varepsilon k)}{\varepsilon^2} = \mathrm{d}^2 f(a)(k,h)$$

注意到 $A(h,k) = A(k,h)$，故 $\mathrm{d}^2 f(a)$ 是对称的.

Corollary 3.4.1

二阶偏导的对称性是二阶可微的必要条件.

存在反例

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq 0_{\mathbb{R}^2} \\ 0 & (x,y) = 0_{\mathbb{R}^2} \end{cases}$$

Proposition 3.4.1 二阶 Taylor 公式

若 f 在 h 处二阶可微，则成立

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(h) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(a)(h,h) + R_2(h)$$

并且 $R_2(h) = o(\|h\|^2)$.

Proof: 令 $R_2(h) = f(a+h) - f(a) - \mathrm{d}f(a)(h) - \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(a)(h,h)$，从而

$$\mathrm{d}R_2(h) = \mathrm{d}f(a+h) - 0 - \mathrm{d}f(a) - \mathrm{d}^2 f(a)(h) = o(\|h\|)$$

令 $m=1$，$R_2(h) - R_2(0) = \mathrm{d}R_2(\theta h)(h) = o(\|\theta h\|)(h)$

$$\|R_2(h)\| = \|o(\|\theta h\|)(h)\| \le \|o(\|\theta h\|)\| \cdot \|h\| = o(\|h\|^2)$$

整理可得：

- $\mathrm{d}f(a)(h) = \sum_{i=1}^n h_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\sum_{i=1}^n h_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}\right) f\Big|_{x=a}$
- $\mathrm{d}^2 f(a)(h,h) = \left(\sum_{i=1}^n h_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f\Big|_{x=a}$

Theorem 3.4.4

f 在 a 处是 C^2 的 $\iff$ f 的所有二阶偏导数在 a 点处连续.

Definition 3.4.5 高阶可微性

递归定义：$\mathrm{d}^k f=\mathrm{d}(\mathrm{d}^{k-1}f)$，则有如下性质：

- $\mathrm{d}^k f\in \mathrm{Hom}_k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ 对称，成立 k 阶 *Taylor* 展式：

$$
\begin{aligned}
f(a+h)&=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}\mathrm{d}^i f(a)(h,\cdots,h)+o(\|h\|^k)\\
&=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}\left(\sum_{p=1}^{n}h_p\frac{\partial}{\partial x_p}\right)^i f\Big|_{x=a}+o(\|h\|^k)
\end{aligned}
$$

- f 在 a 处是 C^k 的 $\iff$ 所有 k 阶偏导数在 a 处连续.

Example 3.4.1

有二阶 *Taylor* 展式不一定二阶可导：考虑 $x^3\sin(\frac{1}{x})$ 在 0 处

Definition 3.4.6

若 f 在 Ω 上每一点都是 C^k 的，称 f 在 Ω 上是 C^k 的，记作 $f\in C^k(\Omega)$; 无穷可微的映射空间：$C^\infty(\Omega)=\bigcap_{k=1}^{\infty}C^k(\Omega)$，$f\in C^\infty(\Omega)\iff f$ 在 Ω 上任意点的任意阶偏导皆存在且连续.

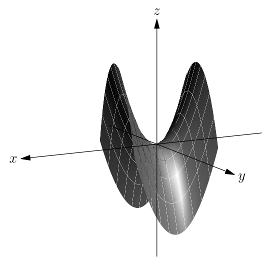
Proposition 3.4.2

若 f 在 Ω 上可微，且 f 在 $a\in\Omega^o$ 处达到局部极值，则 $\mathrm{d}f(a)=0$.

证明只需考虑 $F(t)=f(a+th)\Rightarrow F'(0)=0, i.e. \frac{\partial F}{\partial h}(a)=0$，又若 $\mathrm{d}f(a)=0$ 且 f 在 a 处二阶可微，则由二阶 *Taylor* 展式 $f(a+h)-f(a)=\frac{1}{2}h^T\,\mathrm{Hess}_a(f)h+o(\|h\|^2)$

进而，我们有如下的极值判据：

- 若 $\mathrm{Hess}_a(f)$ 是半正 (负) 定的，则 a 是**局部**极小 (大) 值点
- 若 $\mathrm{Hess}_a(f)$ 是正 (负) 定的，则 a 是**局部严格**极小 (大) 值点.
- 若 $\mathrm{Hess}_a(f)$ 是不定的，则 a 不是局部极值，称为**鞍点**.



$$z=\frac{x^2-y^2}{2}$$

上例中 $(0,0)$ 为鞍点

3.5 习题

题 1 考虑函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

请问 $f(x,y)$ 是否在某个方向存在方向导数？

题 2 试举例说明存在函数在某点满足各个方向的方向导数均存在但不连续.

题 3 对 $f(x)=\|x\|, x\in\mathbb{R}^n$ ，计算 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x), 1\leqslant i\leqslant n$.

题 4 对 $1\leqslant i\leqslant n$ ，考虑第 i 个坐标函数 $x_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},(x_1,\cdots,x_n)\mapsto x_i$ ，对任意 $x_0\in\mathbb{R}^n$ ，计算 $\frac{\partial x_i}{\partial x_j}(x_0)$

题 5 考虑函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x^3y^3\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$$

求证 $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$.

题 6 设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ ，证明：

(a) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续；

(b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ 都存在；

(c) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微.

题 7 考虑函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^p\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

请问：

(a) p 为何值时，f 在原点连续？

(b) p 为何值时，$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在原点存在？

(c) p 为何值时，$f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ ？

题 8 设 $U\subset\mathbb{R}^2$ 为凸开集，$f:U\to\mathbb{R}$ 且 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 U 上有界，求证：f 在 U 上一致连续。

题 9 设 $U\subset\mathbb{R}^2$ 为开集，$f:U\to\mathbb{R}$ ，设 f 关于 x 连续（对每个固定的 y ，关于 x 连续）且 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 U 上有界，求证 f 在 U 上连续.

题 10 若 $f_x(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处存在，$f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，证明 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微.

题 11 设 $z=x^2-xy+y^2$ ，求它在点 $(1,1)$ 处的沿方向 $v=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的方向导数，并指出：

(a) 沿哪个方向的方向导数最大？

(b) 沿哪个方向的方向导数最小？

(c) 沿哪个方向的方向导数为零？

题 12 设映射 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 定义如下

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=(x+y,xy)\text{ 。}$$

试用定义计算 f 在任一点 (x,y) 处的微分 $df(x,y)$.

题 13 求向量值函数

$$f(x,y,z)=\left(x^3+z\mathrm{e}^y, y^3+z\ln x\right)$$

在 $(1,1,1)$ 点的 Jacobi 矩阵.

题 14 设 f 在点 $\boldsymbol{x}^0=(x_0,y_0)$ 处可微，且在 $\boldsymbol{x}^0$ 处给定了 n 个单位向量 $\boldsymbol{l}_i(i=1,2,\cdots,n)$. 相邻两个向量之间的夹角为 $\frac{2\pi}{n}$. 证明：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_i}\left(x^0\right)=0$$

题 15 对函数 $f\in C^1(\mathbb{R})$ ，定义

$$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}, & x\neq y\\ f'(x), & x=y\end{cases}$$

求证：F 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续；

题 16 考虑函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

求证：$f(x,y)$ 的两个偏导数都存在且有界，但在 $(0,0)$ 处不可微.

题 17 考虑函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

求证：f 在原点可微但两个偏导数在原点不连续。（偏导连续推出可微，但反之不对）

题 18 考虑函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2+y^2, & x,y\in\mathbb{Q}\\ 0, & (x,y)\notin\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\end{cases}$$

求证：f 只在 $(0,0)$ 一点连续，但 f 在 $(0,0)$ 点可微.

题 19 设 $D=\mathbb{R}^2\backslash\{(x,0)\in\mathbb{R}^2: x\geqslant 0\}$ 。考虑函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x^3, & x>0, y>0\\ 0, & (x,y)\in D\text{ 其他情形.}\end{cases}$$

求证：f 在 D 上连续可微。注意，此例中 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 D 上恒为 0，但是 f 并非与 y 无关，例如 $f(1,1)=1, f(1,-1)=0$ 。

题 20 考虑函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

求证：$f\in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$.

题 21 设 $f(x,y)=\varphi(|xy|),\varphi(0)=0$ ，在原点附近 $|\varphi(u)|\leqslant u^2$ ，求证 f 在原点可微。

题 22 设函数 $g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微，$g(x_0,y_0)=0$，且 $\exists M>0$，使得 $|g(x,y)|\leqslant M\rho$（在 (x_0,y_0) 的某个邻域内），其中 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_\theta)^2}$，试证：任一函数 $f(x,y)$，若 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 存在，则 $z=f(x,y)g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微.

题 23 设 f_x',f_y' 与 f_{yx}'' 在点 (x_0,y_0) 的某开邻域内存在，f_{yx}'' 在点 (x_0,y_0) 连续．证明：$f_{xy}''(x_0,y_0)$ 也存在，且 $f_{xy}''(x_0,y_0)=f_{yx}''(x_0,y_0)$.

题 24 求函数 $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$ 在 $(1,0)$ 附近带皮亚诺余项的泰勒公式（直到二次项）.

题 25 求函数 $f(x,y)=x\mathrm{e}^{x+y}$ 在原点 $(0,0)$ 处的所有四阶偏导数.

题 26 已知 $u=u(x,y)$ 为可微函数，试求 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ 在极坐标下的表达式.

题 27 设 $u=f(r)$ 二阶连续可导，$r^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ ．证明：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}.$$

题 28 对函数 $f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ，如果对 $\forall t>0,\forall x=(x_1,\cdots,x_n)\in D$ ，有 $f(tx_1,\cdots,tx_n)=t^\alpha f(x_1,\cdots,x_n)$ ，我们称 f 是一个 α 次齐次函数。求证：

(a) 若 $f\in C^1(D),f$ 是一个 α 次齐次函数当且仅当

$$\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=\alpha f(x)$$

(b) 若 $f\in C^m(D),f$ 是一个 α 次齐次函数，则

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^m f=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)f.$$

题 29 设 f 在凸区域 D 上定义并且有连续的一阶偏导数，则 f 在 D 内为凸函数的必要充分条件是：$\forall xy\in D$ 有　$f(y)\geqslant f(x)+(y-x)\nabla f(x)$ 。

题 30 设 $D\subseteq\mathbf{R}^n$ 为凸区域，$f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)$ 在 D 上定义，有连续的二阶偏导数，证明 $f(x)$ 在 D 上为凸函数的充要条件是 Hessian 矩阵

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{i,j=1}^n$$

在 D 上为半正定的.

Chapter 4

逆映射定理，隐函数定理及其应用

4.1 C^k 微分同胚

Definition 4.1.1

给定开集到开集的映射 $f: U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n$，称 f 是 U 到 V 的 C^k **微分同胚**，若成立

- f 是 U 到 V 的双射;
- $f \in C^k(U)$ 且 $f^{-1} \in C^k(V)$.

特别的，当 $k=0$ 时，称 f 为 U 到 V 的**同胚**.

- 由逆映射微分定理：f 在 U 上可微，f 是同胚，f^{-1} 在 V 上可微 $\iff$ $V \in \mathbb{R}, \forall a \in U, \mathrm{d}f(a) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ 或者 $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$ 且成立 $\mathrm{d}f^{-1}(f(a)) = [\mathrm{d}f(a)]^{-1}$，换言之 $\mathrm{d}f^{-1} = [\mathrm{d}f]^{-1} \circ f^{-1}$
- $f: I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$，若 f 是连续双射 $\Rightarrow f$ 是严格单调的 $\Rightarrow f^{-1}$ 是连续的，但在高维不成立.

Example 4.1.1

$\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi) \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}, (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$，则 Φ 是双射，但 Φ^{-1} 在 $\mathbb{R}_+^* \times \{0\}$ 不连续.

Theorem 4.1.1 C^k **微分同胚定理**

设 $C^k(U) \ni f: U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n, k \geq 1$ 且 f 是同胚，则 f 是 U 到 V 的微分同胚当且仅当 $\forall a \in U, \mathrm{d}f(a) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$.

Proof: $(\Rightarrow)$ 平凡

$(\Leftarrow)$ 由逆映射定理，f^{-1} 在 V 上可微，$\mathrm{d}f^{-1} = [\mathrm{d}f]^{-1} \circ f^{-1}$ 只需讨论 $\Phi: \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n), T \mapsto T^{-1}$，在矩阵表示下，则为 $GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}), M \mapsto M^{-1}$，则 $\Phi \in C^\infty$，$k=1$ 时，$\mathrm{d}f^{-1} = [\mathrm{d}f]^{-1} \circ f^{-1} = \Phi(\mathrm{d}f) \circ f^{-1} \in C^0$，故 $f^{-1} \in C^1(V)$；用归纳法，考虑 $f \in C^{k+1}$，$f^{-1} \in C^k$ 则有 $\mathrm{d}f^{-1} = \varphi(\mathrm{d}f) \circ f^{-1} \in C^k$，从而 $f^{-1} \in C^{k+1}$. 由归纳原理结论恒成立.

Claim 4.1.1

$GL_n(\mathbb{R})$ 是 $M_n(\mathbb{R})$ 中开集，这是因为 $GL_n(\mathbb{R})$ 在连续映射 det 下的连续像 $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 为开集.

实际上，考虑上述 $\Phi(M) = M^{-1}$，有

$$\mathrm{d}\Phi(M)(B) = \lim_{t \to 0} \frac{\Phi(M+tB) - \Phi(M)}{t}$$

$$\begin{aligned} \Phi(M+tB) - \Phi(M) &= (M+tB)^{-1} - M^{-1} = [M(I + tM^{-1}B^{-1})]^{-1} - M^{-1} \\ &= (I + tM^{-1}B)^{-1}M^{-1} - M^{-1} = [(I + tM^{-1}B)^{-1} - I]M^{-1} \end{aligned}$$

Proposition 4.1.1

考虑矩阵范数：$\forall\|A\|_* < 1, A \in M_n(\mathbb{R})$，则 $I + A \in GL_n(\mathbb{R})$，于是有

$$(I+A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k A^k$$

由于矩阵范数的完备性收敛，验证平凡.

代入上式，则有

$$\mathrm{d}\Phi(M)(B) = -M^{-1}BM^{-1}$$

进一步推广可以得到

$$\mathrm{d}^2\Phi(M)(B,C) = M^{-1}CM^{-1}BM^{-1} + M^{-1}BM^{-1}CM^{-1}$$

Example 4.1.2

$f : \mathbb{R}^n \to B(0,1), x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+\|x\|^2}}$ 是 C^∞ 的微分同胚.

$$\mathrm{d}f(a) = Jac_a(f) = \left(\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{1+\|x\|^2}} - \frac{1}{2}\frac{x_i \cdot 2x_j}{(1+\|x\|^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\|x\|^2}}Id - \frac{a^T a}{(1+\|a\|^2)^{\frac{3}{2}}}$$

或者 $\mathrm{d}f(a)(h) = \dfrac{h}{\sqrt{1+\|x\|^2}} - \dfrac{\langle a,h\rangle a}{(1+\|a\|^2)^{\frac{3}{2}}}$

同时有 $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{\sqrt{1-\|y\|^2}} \in C^\infty(B(0,1)) \Rightarrow f$ 是 C^∞ 的微分同胚.

Claim 4.1.2

$\Phi : (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ 是 $(0,\infty)\times(0,2\pi)$ 到 $\mathbb{R}^2\backslash(\mathbb{R}_+ \times \{0\})$ 的微分同胚

这是因为

$$\det(Jac(\Phi)) = \det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix} = r \neq 0$$

4.2 （局部）逆映射定理

Theorem 4.2.1

设 $C^k(\Omega) \ni f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, k \geq 1$, 又设 $a \in \Omega^o$ 满足 $\mathrm{d}f(a) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$，则 $\exists$ 开集 U, V 满足

- $\forall a \in U \subset \Omega, b = f(a) \in V$;
- $f|_U$ 是 U 到 V 的 C^k 微分同胚.

在证明上述定理时，运用 *Banach* 压缩映射原理 (Thm 1.6.4)

Proof:

Step 1: 不妨设 $a = b = 0_{\mathbb{R}^n}, \mathrm{d}f(a) = Id$，则 $\mathrm{d}f$ 是连续的，$\exists r > 0, s.t. \forall x \in \overline{B(0,r)}, \|\mathrm{d}f(x) - Id\|_* \leq \frac{1}{2}$，容易得到 $f(\overline{B(0,r)}) \subset \overline{B(0,r)}$，实际上我们将证明 $\forall \|y\| \leq \frac{r}{2}, \exists! x \in \overline{B(0,r)}, s.t. f(x) = y$.

考虑 $\varphi(x) = \Phi(x) + y, x \in \overline{B(0,r)} = F$，其中 $\Phi(x) = x - f(x)$，则有

$$\begin{aligned}\|\varphi(x) - \varphi(x')\| &= \|\Phi(x) - \Phi(x')\| \\ (\text{增量公式}) &\leq \sup_{t\in(0,1)} \|\mathrm{d}\Phi(tx' + (1-t)x)\|_* \cdot \|x - x'\| \\ &= \|\mathrm{d}\Phi(z)\|_* \cdot \|x - x'\| \leq \|Id - \mathrm{d}f(z)\|_* \cdot \|x - x'\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\|\end{aligned}$$

再证明 $\varphi(F) \subset F$

$$\begin{aligned}\|\varphi(x)\| &= \|\Phi(x) + y\| \leq \|\Phi(x)\| + \|y\| \\ (\text{增量公式}) &\leq \frac{1}{2}\|x\| + \|y\| \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r\end{aligned}$$

由压缩映射原理，$\exists! x \in \overline{B(0,r)}, s.t. \varphi(x) = x \iff f(x) = y$

Step 2: 令 $V = B(0, \frac{r}{2}), U = f^{-1}(V) \cap B(0,r)$，我们希望证明 $f: U \to V$ 是 C^k 微分同胚.
$\forall x \in U, \|\mathrm{d}f(x) - Id\|_* \leq \frac{1}{2} < 1$，从而 $\mathrm{d}f(a) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$

- $f(U) \supset V$ 显然成立;
- φ 在 F 上有唯一不动点，保证了 φ 是单射;
- $f(U) \subset V$: $\forall y \in V, \exists! x \in \overline{B(0,r)}, s.t. \varphi(x) = x$，成立 $\|x\| = \|\varphi(x)\| \leq \frac{1}{2}\|x\| + \|y\| < r$，即 $x \in B(0,r)$ 且 $f(x) = y$，于是 $x \in U$
- f^{-1} 在 V 上连续:$\forall y_1, y_2 \in V, \exists x_1, x_2 \in U, s.t. f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$，成立

$$\begin{aligned}\|x_1 - x_2\| &= \|\Phi(x_1) + y_1 - [\Phi(x_2) + y_2]\| \\ &\leq \|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| + \|y_1 - y_2\| \\ (\text{增量公式}) &\leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|\end{aligned}$$

从而 $\|x_1 - x_2\| \leq 2\|y_1 - y_2\|$，也就有 f^{-1} 是 $2 - Lipschitz$，进一步是连续的.

最终得到了 f 是 U 到 V 的 C^k 微分同胚.

Remark 4.2.1

$f \in C^k$ 且 f 在 a 点的线性化映射是微分同胚，则 f 在 a **附近**是微分同胚；即使 $\forall a \in \Omega, \mathrm{d}f(a) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$，一般也无法得到整体微分同胚，因为无法保证单射.

Example 4.2.1

$\rho: (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$，因为 $\det(Jac(\rho)) = r$ 在 $(0,\infty) \times \mathbb{R} > 0$，故极坐标变换在 $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 上任一点附近是微分同胚.

4.3 局部逆映射定理的运用

Definition 4.3.1 开映射

$f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 满足 $\forall$开集$O \subset \Omega, f(O)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中开集，则称 f 是**开映射**.

Theorem 4.3.1 开映射定理

$C^k(\Omega) \ni f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, k \geq 1, \Omega$ 开集，又设 $\forall a \in \Omega, \mathrm{d}f(a) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$，则 f 是开映射.

Proof: 任给 Ω 中开集 O，任给 $b \in f(O), \exists a_0 \in O, s.t. f(a_0) = b, \mathrm{d}f(a_0) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$，由逆映射定理，$\exists U, V$ 开集，使得 $a_0 \in U \subset O, b \in V$，$f|_U$ 是 U 到 V 的 C^k 微分同胚，$b \in V = f(U) \subset f(O)$，由于 b 的任意性，$f(O)$ 是开集.

Theorem 4.3.2 整体逆映射定理

设 $C^k(\Omega) \ni f \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, k \geq 1.$，满足

- $\forall a \in \Omega, \mathrm{d}f(a) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$;
- f 在 Ω 上是单射

则 f 是 Ω 到 $V = f(\Omega)$ 的 C^k 微分同胚.

Proof: 由 C^k 微分同胚定理，只需证明 f 是 Ω 到 $V = f(\Omega)$ 的同胚，由于双射显然，进一步只需证明 f^{-1} 连续，这由开映射定理给到：$\forall$开集$O \subset \Omega, (f^{-1})^{-1}(O) = f(O)$ 是开集，即 $f^{-1} \in C(V)$.

Example 4.3.1

给定映射：$g(x, y) = (x + \lambda \sin y, y + \lambda \sin x), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$. 则 g 是 $\mathbb{R}^2$ 到自身的 C^∞ 微分同胚 $\iff |\lambda| < 1$.

Proof:

- 显然 $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$
- $Jac_g = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \cos y \\ \lambda \cos x & 1 \end{pmatrix}, \det(Jac_g) = 1 - \lambda^2 \cos x \cos y \neq 0 \Rightarrow \lambda^2 < 1$
- 设 $|\lambda| < 1$，若 $g(x_1, y_1) = g(x_2, y_2)$，则
$$\begin{cases} x_1 + \lambda \sin y_1 = x_2 + \lambda \sin y_2 \\ y_1 + \lambda \sin x_1 = y_2 + \lambda \sin x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x_1 - x_2| = |\lambda(\sin y_1 - \sin y_2)| \leq |\lambda||y_1 - y_2| \\ |y_1 - y_2| = |\lambda(\sin x_1 - \sin x_2)| \leq |\lambda||x_1 - x_2| \end{cases}$$
于是 $|x_1 - x_2| \leq \lambda^2 |x_1 - x_2| \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow g$ 是单射
由于整体逆映射定理，g 是 $\mathbb{R}^2$ 到 $g(\mathbb{R}^2)$ 的 C^∞ 微分同胚
- $g(\mathbb{R}^2)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集，令 $g(x, y) = (x, y) + \Phi(x, y), \Phi(x, y) = \Phi(-\lambda \sin y, -\lambda \sin x)$ 是 $|\lambda| - Lipschitz$ 的，故
$$\|g(x_1, y_1) - g(x_2, y_2)\| \geq (1 - \lambda)\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|$$
设 $A_k \in g(\mathbb{R}^n), \lim_{n \to \infty} A_k = A, A_k = g(x_k, y_k)$，于是
$$\|A_k - A_l\| \geq (1 - \lambda)\|(x_k, y_k) - (x_l, y_l)\|$$
从而 (x_k, y_k) 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 $Cauchy$ 列，即 $\lim_{k \to \infty}(x_k, y_k) = B$ 存在，则 $\lim_{k \to \infty} A_k = g(B) \in g(\mathbb{R}^2)$，故 $\varnothing \neq g(\mathbb{R}^2)$ 既开又闭，由于 $\mathbb{R}^2$ 的连通性，$g(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

Theorem 4.3.3 隐函数定理

$C^k(\Omega) \ni F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ 成立

- $F(x_0, y_0) = 0_{\mathbb{R}^m}$
- $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^m)$

则存在开集 U, V 和映射 $\varphi : U \to V$ 满足

- $\varphi \in C^k(U), U \times V \subset \Omega;$
- $(x, y) \in U \times V, F(x, y) = 0 \iff x \in U, y = \varphi(x)$. 特别的，$\varphi(x_0) = y_0$.

Proof: 考虑 $\Phi(x,y) = (x, F(x,y)), \Phi \in C^K(\Omega)$,有 $Jac_{(x,y)}\Phi = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix}$,进一步成立 $\det(Jac_{(x,y)}\Phi) = \det \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$ 由局部逆映射定理知 $\exists (a,b) \in O \subset \Omega$ 开集，使成立 $\Phi : O \to \Phi(O)$ 是 C^k 微分同胚；因 $\Phi(x,y) = (x, F(x, \varphi(x))) = (x, 0_{\mathbb{R}^m})$，有 $(x, \varphi(x)) = \Phi^{-1}(x, 0_{\mathbb{R}^m})$，也即 $\varphi(x) = pr_{\mathbb{R}^m}(\Phi^{-1}(x, 0_{\mathbb{R}^m}))$;

又 $\exists r > 0, B((a,b), r) \subset O$，取 $a \in U_1 \subset \mathbb{R}^n$ 开集，$b \in V_1 \subset \mathbb{R}^m$ 也为开集，则 $U_1 \times V_1 \subset B((a,b), r) \subset O$，由开映射定理，$\Phi(U_1 \times V_1)$ 是 $\mathbb{R}^{n+m}$ 中的开集，进一步，$\exists U_2 \subset \mathbb{R}^n, V_2 \subset \mathbb{R}^m$ 使得 $(a, 0) \in U_2 \times V_2 \subset \Phi(U_1 \times V_1)$，取 $U = U_2 \subset U, V = V_1, \varphi(x) = pr_{\mathbb{R}^m}(\Phi^{-1}(x, 0_{\mathbb{R}^m}))$

- $\varphi : U \to V$ 是恰当定义的，$\varphi \in C^k(U), (a,b) \in U \times V \subset \Omega$
- $x \in U, y = \varphi(x)$，则 $\Phi(x,y) \equiv (x, 0_{\mathbb{R}^m})$，所以 $F(x, \varphi(x)) = 0, \forall x \in U$;
  反之：$(x,y) \in U \times V, F(x,y) = 0_{\mathbb{R}^n}$，则 $\Phi(x,y) = (x, F(x,y)) = (x, 0_{\mathbb{R}^m}) \Rightarrow U \ni (x,y) = \Phi^{-1}(x, 0_{\mathbb{R}^m}) \Rightarrow y = \varphi(x)$

Example 4.3.2

$x^2 + y^2 = 1, y = \pm\sqrt{1 - x^2}$，该表达在 $(\pm 1, 0)$ 的邻域内不成立，这是因为 $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$ 取 0，但可以表达成 $x = \pm\sqrt{1 - y^2}$.

Proposition 4.3.1 隐函数的微分

上述隐函数 $\varphi(x)$ 的微分为

$$d\varphi(x) = -[\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))]^{-1} \circ \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))$$

Proof: 考虑映射 $h(x) = F(x, \varphi(x))$，求微分得到

$$0 = \mathrm{d}h(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x)) \circ \mathrm{d}\varphi(x)$$

整理得：

$$\mathrm{d}\varphi(x) = -[\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))]^{-1} \circ \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))$$

Example 4.3.3

$x^2+y^2=1$ 在 $(1,0)$ 附近定义了一个隐函数 $x=\varphi(y)$，计算 $\varphi'(0)$

方法一 :$\varphi(y)=\sqrt{1-y^2}$ 显式表达

方法二 :$\varphi'(0)=-[\frac{\partial F}{\partial x}(1,0)]^{-1}\circ\frac{\partial F}{\partial y}(1,0)=0$

方法三 :$\varphi^2(y)=y^2\equiv 1$ 在 0 的邻域，对两边求导得到 $2\varphi\varphi'+2y\equiv 0$，整理得 $\varphi'(y)=-\frac{y}{\varphi(y)}$

方法四 :$\varphi(y)=\varphi(0)+\varphi'(0)y+\frac{1}{2}\varphi''(0)y^2+o(y^2)$，于是

$$[1+\alpha y+\beta y^2+o(y^2)]^2+y^2=1$$

比较系数即得到相应的微分.

Example 4.3.4

证明 $x+y+zt=xy-z+t=0$ 在 $(0,1)$ 的小邻域内定义了一个 C^∞ 映射 $(x,y)=\varphi(z,t)$，且 $\varphi_1(0,1)=1$，计算 φ 在 $(0,1)$ 处的微分.

Sol: 考虑 $F(x,y,z,t)=\begin{pmatrix}x+y-zt\\ xy-z+t\end{pmatrix}\in C^\infty(\mathbb{R}^4)$

$$\frac{\partial F}{\partial(x,y)}(1,-1,0,1)=\begin{pmatrix}1&1\\ y&x\end{pmatrix}\Big|_{(1,-1,0,1)}$$

由隐函数定理，题述映射 φ 存在，进一步，微分

$$\mathrm{d}\varphi(0,1)=-(\frac{\partial F}{(\partial(x,y))})^{-1}\circ\frac{\partial F}{\partial(z,t)}=-\begin{pmatrix}1&1\\ y&x\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-t&-z\\ -1&1\end{pmatrix}\Big|_{(1,-1,0,1)}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&1\\ \frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$$

4.4 其它应用

在很多情况下，我们需要考虑极值问题：$\Sigma=\{\Phi:\Omega\subset\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}^m|\Phi(x)=0_{\mathbb{R}^m}\}$，函数 $f:\Omega\to\mathbb{R}$，讨论 $f|_\Sigma$ 的极值，$\Phi(x)=0_{\mathbb{R}^m}$ 是限制条件.

Theorem 4.4.1 Lagrange 乘数法

设 $\Phi:\Omega\subset\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}^m$ 的 C^k 映射，且满足

$$\forall x\in\Sigma=\{x\in\Omega,\Phi(x)=0_{\mathbb{R}^m}\},\mathrm{rank}(Jac_x\Phi)=m$$

设 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 可微，则若 $A\in\Sigma$ 是 $f|_\Sigma$ 上的局部极值点，则存在 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)\in\mathbb{R}^m$ 使

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=\sum_{p=1}^m\lambda_p\frac{\partial\Phi_p}{\partial x_p}(A)$$

换言之：令 $g_\lambda=f-\langle\lambda,\Phi\rangle=f-\sum\limits_{i=1}^m\lambda i\Phi_i$，则 A 是 g_λ 的临界点，λ_i 称为 **Lagrange 乘子**.

Proof: 不妨设 $A=(a,b)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ 是 $f|_\Sigma$ 上的局部极值点，且 $\frac{\partial\Phi}{\partial y}(a,b)=\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^m)$，由隐函数定理，存在 $(a,b)\in U\times V\subset\Omega,p:U\to V$ 使得 $(x,y)\in U\times V,\Phi(x,y)=0\iff x\in U,\varphi(x)=y$，即局部来看，$\Sigma\cap(U\times V)=\{(x,\varphi(x)),x\in U\}$，则 $H(x)=f(x,\varphi(x))$ 在 $x=a$ 处达到局部极值，从而 $\nabla H(a)=0$

$$\mathrm{d}H(x)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))+\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\circ\mathrm{d}\varphi(x)$$

令 $x=a$，则有 $0=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\circ\mathrm{d}\varphi(a)$，于是 $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\times[\frac{\partial\Phi}{\partial y}(a,b)]^{-1}\times\frac{\partial\Phi}{\partial x}(a,b):=\lambda^T\frac{\partial\Phi}{\partial x}(a,b)$，同理可得 $\frac{\partial f}{\partial y}=\lambda^T\frac{\partial\Phi}{\partial y}$，也就得到了

$$\nabla f(a,b)=\sum_{p=1}^m\lambda_p\nabla\Phi_p(a,b)$$

Example 4.4.1

计算 $f(x,y)=2x+3y$ 在 $\Sigma=\{(x,y)|x^2+2y^2=5\}$ 上的最值.

Sol:

- 显然 $f\in C^\infty$，且 $\mathrm{rank}(Jac(\Phi))=\mathrm{rank}((2x,4y))$ 在 Σ 上恒为 1
- 应用 *Lagrange* 乘数法，若 A 是 $f|_\Sigma$ 上的极值点，则存在 $\lambda\in R$ 使得 $\nabla(f-\lambda\Phi)(A)=0$，得到方程组

$$\begin{cases}2-2\lambda a=0\\3-4\lambda b=0\\a^2+2b^2=5\end{cases}$$

得到 $\lambda=\pm\sqrt{\frac{17}{40}}$，代入有 $A_1=(\sqrt{\frac{40}{17}},\frac{3}{4}\sqrt{\frac{40}{17}}),A_2=-A_1$ 必为最大和最小值点.

Corollary 4.4.1

若上述 Φ 和 f 二阶可微，$\mathrm{Hess}_A(g_\lambda)$ 若正 (负) 定，则 A 是 $f|_\Sigma$ 的局部极小 (大) 值.

Proof: 设 A 是 g_λ 的临界点，且 $\mathrm{Hess}_A(g_\lambda)$ 正定，由二阶 *Taylor* 展开，$\exists r>0,s.t.\forall x\in B(A,r)\subset\Omega,x\neq A,g_\lambda(x)>g_\lambda(A)\Rightarrow\forall x\in B(A,r)\cap\Sigma,x\neq A,f(x)=g_\lambda(x)>g_\lambda(A)>f(A)$.

Example 4.4.2

特别的，当 $\mathrm{Hess}_A(g_\lambda)$ 不定时，一般不能确定 A 是 $f|_\Sigma$ 的鞍点. 考虑：

$$f(x,y)=xy,\Sigma=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x+y=0\}$$

令 $g_\lambda(x,y)=xy-\lambda(x+y)$，得到方程，解出 $\lambda=x=y=0$，易得 $(0,0)$ 是 g_λ 的临界点，又有 $\mathrm{Hess}_{(0,0)}(g_\lambda)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ 不定，然而 $f(0,0)$ 显然是 $f|_\Sigma$ 的极大值点.

Remark 4.4.1

条件极值限制在 Σ 上时，不一定能够沿任意方向运动，严格意义上需要 $\mathrm{Hess}_A(g_\lambda)|_{T_A\Sigma\times T_A\Sigma}$.

Example 4.4.3

制作一个无盖立方体包装盒，体积确定为 $32cm^3$，至少需要多少面积的纸板？

Sol: 考虑 $\Omega=(0,+\infty)^3,\Sigma=\{(x,y,z)|xyz-32=0\},f(x,y,z)=2xz+2yz+xy$，希望求 $f|_\Sigma$ 的极小值利用 *Lagrange* 乘数法：$\Phi:\Omega\to\mathbb{R},(x,y,z)\mapsto xyz-32$，显然 $\Phi\in C^\infty(\Omega)$. 再考虑 $\nabla\Phi(x,y,z)=(yz,xz,xy)$ 显然秩恒为 1.
令 $g_\lambda=f-\lambda\Phi$，寻找 $g_\lambda|_\Sigma$ 的临界点

$$\begin{cases}2z+y-\lambda yz=0\\2z+x-\lambda xz=0\\2x+2y-\lambda xy=0\\xyz-32=0\end{cases}$$

- 若 $x=y$ 则 $4x-\lambda x^2=0\Rightarrow x=\frac{4}{\lambda}=y\Rightarrow z=\frac{2}{\lambda}\Rightarrow\lambda=1$，于是有临界点 $(4,4,2)$，$f(4,4,2)=48$;
- 若 $z=\frac{1}{\lambda}$，代入第一个方程，得到 $x=0$ 矛盾.

下考察 $A=(4,4,2)$ 是否为极小值点：$g_1(x,y,z)=2xz+2yz+xy-(xyz-32)$，$\mathrm{Hess}_A(g_1)$ 显然不定，该方法失效；观察 $\lim\limits_{\substack{\|(x,y,z)\|\to\infty\\(x,y,z)\in\Sigma}}f(x,y,z)=+\infty$，这是显然的，而连续函数趋于 $+\infty$，则极小值必取得，故为先前所求唯一临界点.

Theorem 4.4.2 常秩定理

给定映射 $C^k(\Omega)\ni f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，设 $\mathrm{rank}(Jac_xf)\equiv l\leq\min(m,n),\forall x\in\Omega$，则 $\forall a\in\Omega$ 存在 U_i,V_i 开集，其中 U_1 为 a 的邻域，V_1 为 $f(a)$ 的邻域，以及 $\Phi_1:U_1\to U_2\subset\Omega$ 的 C^k 微分同胚，$\Phi_2:V_1\to V_2\subset\mathbb{R}^m$ 的 C^k 微分同胚，使得 $g=\Phi_2\circ f\circ\Phi_1^{-1}$ 满足 $g(x)=(pr_{\mathbb{R}^l}(x),0)$

Proof: 不妨记 $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^{n-l},\mathbb{R}^m=\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^{m-l},x=(z,y),a=(b,c)$，又不妨设 $\mathrm{rank}(\frac{\partial(f_1\cdots f_l)}{\partial z}(a))=l$ 考虑映射 $\Phi:x\mapsto(f_1(x),\cdots f_l(x),y),Jac_a(\Phi)=\begin{pmatrix}\frac{\partial(f_1,\cdots,f_l)}{\partial z}(a)&*\\0&I_{n-l}\end{pmatrix}$，于是 $Jac_a(\Phi)\in\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$.
由局部逆映射定理：$\exists U,W\subset\mathbb{R}^n$ 为开集，使得 Φ 是 U 到 V 的 C^k 微分同胚，考虑 $h=f\circ\Phi^{-1}|_W$: $(f_1(x),\cdots,f_m(x),y)\overset{\Phi^{-1}}{\mapsto}(z,y)\overset{f}{\mapsto}(f_1(x),\cdots,f_l(x),f_{l+1}(x)\cdots f_m(x))$，即 $h(x)=(z,h_{l+1}(x),\cdots,h_m(x))$
观察 $Jac_x(h)=\begin{pmatrix}I_l&0\\\frac{\partial(h_{l+1},\cdots,h_m)}{\partial z}&\frac{\partial(h_{l+1},\cdots,h_m)}{\partial y}\end{pmatrix}$，由于秩为 l，右下分块必为 0，不妨设 W 为凸集，则 $h_{l+1},\cdots,h_m$ 与 y 无关.

考虑映射 $\Phi_2(z,u)=(z,u_{l+1}-h_{l+1}(z),\cdots,u_m-h_m(z))$，有 $Jac_x(\Phi_2)=\begin{pmatrix} I_l & 0 \\ * & I_{m-l}\end{pmatrix}\in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^m)$ 在局部是 C^k 的微分同胚，于是 $\Phi_2\circ f\circ\Phi_1^{-1}(z,y)=(z,0_{\mathbb{R}^{m-l}})$

Definition 4.4.1 最简微分同胚

只改变一个分量的微分同胚，即 $\varphi: x\mapsto(x_1,\cdots,x_{k-1},\varphi_k(x),x_{k+1},\cdots,x_n)$.

Theorem 4.4.3 Morse 引理

任意一个 C^k 的微分同胚可以**局部地**写成最简微分同胚的复合.

Remark 4.4.2

Zorich 书中笔误：n 维微分同胚并不一定可以写成 n 个最简微分同胚的复合；从代数的角度举例 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 1\end{pmatrix}$，但是可以分解为**有限个**.

Example 4.4.4 往年期中考题

设 $G_t(x,y)=x^3-y^3+3xy^2-(6x+3y)\mathrm{e}^t$

(1) 证明 $(1,1)$ 是 G_0 的临界点;

(2) 证明存在 $(1,1)$ 的邻域 $U\subset\mathbb{R}^2$，包含 O 的开区间 I，及 C^∞ 映射 $\varphi:I\to U$，使得 $\forall t\in I,\varphi(t)$ 是 G_t 在 U 中的唯一临界点;

(3) 计算 $\varphi'(0)$.

Sol: 第一小问计算平凡，下记录后两问的两种解法.

解法 1 (by zwj)

(2) 计算 $\nabla G_t(x,y)=0$ 得到 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \\ y=\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\end{cases}$ 或者 $\begin{cases} x=\frac{3\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\end{cases}$ 显然在 $(1,1)$ 的邻域内要保证临界点的唯一性，取前解，令 $\varphi: t\mapsto(\mathrm{e}^{\frac{t}{2}},\mathrm{e}^{\frac{t}{2}})$，取 $m>0$ 足够小，显然存在开区间 $I=(-m,m)$ 使得 $\varphi(I)=U\subset\mathbb{R}^2$ 且 $U\cap\{(x,y)|x=3y\}=\varnothing$，满足唯一性，故 φ 为所求.

(3) 具体映射已知，计算平凡.

解法 2 (by wtl)

(2) 构造映射 $C^\infty\ni F:(x,y,t)\mapsto(\dfrac{\partial G_t}{\partial x},\dfrac{\partial G_t}{\partial y})$，满足 $F(1,1,0)=(0,0)$，又 $\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y}\end{pmatrix}|_{(1,1,0)}=-36\neq 0$，由隐函数定理，存在 $(1,1)$ 的邻域 $U\subset\mathbb{R}^2$ 与包含 0 的开区间 I 与 C^∞ 映射 $\varphi:I\to U$ 成立 $F(\varphi(t),t)=0$，即 $\varphi(t)$ 是 G_t 在 U 的唯一临界点.

(3) 考虑 $F(\varphi_1(t),\varphi_2(t),t)=(0,0)$，对 t 求导得：$\frac{\partial F}{\partial x}\varphi_1'(t)+\frac{\partial F}{\partial y}\varphi_2'(t)+\frac{\partial F}{\partial t}=0$，也即

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1'(0) \\ \varphi_2'(0)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 \\ -3\end{pmatrix}=0$$

解方程即可.

4.5 习题

题 1 设 $u=u(x,y,z), v=v(x,y,z)$ 和 $x=x(s,t), y=y(s,t), z=z(s,t)$ 都有连续的一阶偏导数．证明：

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}+\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}\frac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)}+\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,x)}\frac{\partial(z,x)}{\partial(s,t)}$$

题 2 $\mathbb{R}^n$ 中同一点的 n 维球坐标到 n 维直角坐标的映射 $\Phi:[0,+\infty)\times[0,\pi]^{n-2}\times[0,2\pi)\to\mathbb{R}^n$ 定义为 $(x_1,\cdots,x_n)=\Phi(r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})$，

$$\begin{cases} x_1= & r\cos\theta_1\\ x_2= & r\sin\theta_1\cos\theta_2\\ \cdots & \cdots\\ x_{n-1}= & r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}\\ x_n= & r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}\end{cases}$$

定义

$$\begin{cases} F_1(x_1,\cdots,x_n,r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1}) & =r^2-(x_1^2+\cdots+x_n^2)\\ F_2(x_1,\cdots,x_n,r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1}) & =r^2\sin^2\theta_1-(x_2^2+\cdots+x_n^2)\\ F_3(x_1,\cdots,x_n,r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1}) & =r^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2-(x_3^2+\cdots+x_n^2)\\ \cdots & \cdots\\ F_n(x_1,\cdots,x_n,r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1}) & =r^2\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{n-1}-x_n^2\end{cases}$$

求证：

(a) $F_i(x_1,\cdots,x_n,r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})\equiv 0, i=1,\cdots,m;$

(b) 直角坐标相对于球坐标的 Jacobi 行列式为

$$J_x(r,\theta)=r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}$$

题 3 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $z^5-xz^4+yz^3=1$ 确定，求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}$.

题 4 设 U 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，$\boldsymbol{f}:U\to\mathbb{R}^m$ 为 C^k 映射 $(1\leqslant k\leqslant+\infty), \boldsymbol{f}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$，且 $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{0})\right)=n(n\leqslant m)$ 则存在一个 C^k 微分同胚 $\boldsymbol{g}$，将 $\mathbb{R}^m$ 中 $\mathbf{0}$ 的一个开邻域映成另一个开邻域，且 $\boldsymbol{g}(0)=0$ 及

$$\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n,0,0,\cdots,0).$$

题 5 设 U 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，$\boldsymbol{f}:U\to\mathbb{R}^m$ 为 C^k 映射 $(1\leqslant k\leqslant+\infty), \boldsymbol{f}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$，且 $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\mathbf{0})\right)=m(m\leqslant n)$，则存在一个 C^k 微分同胚 $\boldsymbol{h}$，将 $\mathbb{R}^n$ 中 $\mathbf{0}$ 的一个开邻域映成另一个开邻域，使得 $\boldsymbol{h}(0)=0$ 及

$$\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{h}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$$

题 6 设 U 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，$\boldsymbol{f}:U\to\mathbb{R}^m$ 为 C^k 映射 $(1\leqslant k\leqslant+\infty), \boldsymbol{f}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$，$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\boldsymbol{y})\right)=l(\boldsymbol{y}\in U, l\leqslant\min\{\boldsymbol{m},n\})$，则存在 C^k 微分同胚 $\boldsymbol{h}$ 与 $\boldsymbol{g}$，它们分别将 $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^m$ 的 0 的一个开邻域映成 0 的另一个开邻域，使得 $\boldsymbol{h}(\mathbf{0})=0, g(0)=0$ 及

$$\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{h}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_l,0,0,\cdots,0).$$

题 7 设 E 是维数 $\geqslant 1$ 的欧氏空间．$f:E\to E$ 是 C^1 映射，$\exists\alpha>0$ 使得 $\forall x,u\in E,\langle\,\mathrm{d}_x f(u),u\rangle\geqslant\alpha\|u\|^2$

(a) 证明:$\forall a,b\in E,\langle f(b)-f(a),b-a\rangle\geqslant\alpha\|b-a\|^2$.

(b) 证明:$f(E)=E$ 并证明 f 是 C^1 微分同胚.

题 8 求由方程 $2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 的极值。

题 9 求 $f(x,y)=xy$ 在圆周 $S^1=\{(x,y)\mid(x-1)^2+y^2=1\}$ 上的最值与条件极值点。

题 10 若 x_0 是对称二次型 $f(x)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j, a_{ij}=a_{ji}$ 在 $x_1^2+\cdots+x_n^2=1$ 上的极值，求证：x_0 是矩阵 $A=(a_{ij})$ 的一个特征向量.

题 11 椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, a,b,c\neq 0$ 与过原点的平面 $Ax+By+Cz=0$ 交出一个椭圆。求此椭圆到原点的最大距离和最小距离.

题 12 将长为 l 的铁丝分为三段，分别做成圆，正方形与等边三角形，请问如何分可使围成的总面积最小？

题 13 设 $\triangle ABC$ 为正三角形，边长为 a ，任取 $\triangle ABC$ 内一点 P ，向三边做垂线，分别交于 D,E,F 三点，求 $\triangle DEF$ 面积的最大值。

题 14 (a) 设 $n\in\mathbb{N}^*$ 且 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$. 证明

$$\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}=\min\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\,\middle|\,(\forall i),x_i>0\text{ 且}\prod_{i=1}^{n}x_i=1\right\}.$$

(b) 由此推出若 $b_1,b_2,\cdots,b_n>0$ ，则有：

$$\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\prod_{i=1}^{n}b_i\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\left(\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\right)^{\frac{1}{n}}$$

题 15 设 $n\in\mathbb{N}^*, f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}$ 定义如下：$\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{B}^n, f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1x_2\cdots x_n$. 令

$$\mathcal{V}=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}_+^n\mid\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j\neq i}x_j\right)=1\right\}$$

试找出 f 在 $\mathcal{V}$ 上的所有极值.

题 16 给定 n 阶行列式 $A=|a_{ij}|$.

(a) 求证：在行向量长有限条件下，即 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2=s_i(i=1,\cdots,n)$ 条件下，使 A 达到最大值的列向量两两正交；

(b) 求证：

$$A^2\leqslant\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)$$

请给这个不等式一个直观的几何解释。

Chapter 5
多元函数积分学

5.1 Darboux 积分

令 $Q=\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i](=I_i)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中闭立方体，取 I_i 的一个分割 $\{P_{i,k}\}, a_i=P_{i,1}<P_{i,2}<\cdots<P_{i,m_i}=b_i$，由此得 Q 的一个分割:$\prod_{i=1}^{n}T_i$，利用与坐标轴平行的超平面将 Q 分割成小的闭立方体，记分割为 Δ.

Definition 5.1.1

设 $f:Q\to\mathbb{R}$，其中 Q 为上述有界闭立方体，任给 Q 的一个分割 Δ，定义 **Darboux 上和**

$$\sum^{\Delta}(f)=\sum_{P_J\subset\Delta}\sup_{P_J}f\times\mathrm{Vol}(P_J)\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$$

以及 **Darboux 下和**

$$\sum_{\Delta}(f)=\sum_{P_J\subset\Delta}\inf_{P_J}f\times\mathrm{Vol}(P_J)\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$$

Proposition 5.1.1 Darboux 上下和的基本性质

- 记 $\omega_A(g)=\sup\limits_A g-\inf\limits_A g$(也记为 $\operatorname{osc}_A g$)，由定义，$\forall f,\Delta$，成立

$$0\le\sum^{\Delta}(f)-\sum_{\Delta}(f)=\sum_{P_J\subset\Delta}\omega_A(f)\times\mathrm{Vol}(P_J)$$

- 设 $\Delta=\prod_{i=1}^{n}T_i$ 和 $\Delta'=\prod_{i=1}^{n}T_i'$ 是闭立方体 Q 的两个分割，我们称 Δ' 为 Δ 的**细分**（或**加细**），若 $T_i\subset T_i',\forall 1\le i\le n$，此时成立

$$\sum^{\Delta}(f)\ge\sum^{\Delta'}(f),\sum_{\Delta'}(f)\ge\sum_{\Delta}(f)$$

Proof: 若 Δ' 是 Δ 的细分，则

$$\begin{aligned}\sum^{\Delta'}(f)&=\sum_{P_J\subset\Delta}\left(\sum_{Q_I\subset P_J\cap\Delta'}\sup_{Q_I}(f)\times\mathrm{Vol}(Q_I)\right)\\&\le\sum_{P_J\subset\Delta}\sum_{Q_I\subset P_J\cap\Delta'}\sup_{P_J}(f)\times\mathrm{Vol}(Q_I)\\&=\sum_{P_J\subset\Delta}\sup_{P_J}(f)\,\mathrm{Vol}(P_J)=\sum^{\Delta}(f)\end{aligned}$$

同理有 $\sum_{\Delta}(f)\le\sum_{\Delta'}(f)$.

Corollary 5.1.1

任给立方体 Q 的两个分割 Δ_1,Δ_2，成立

$$\sum_{\Delta_1}(f)\leq\sum^{\Delta_2}(f)$$

Proof: 只需取共同细分 $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$

Definition 5.1.2

任给 $f:Q\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，定义 f 在 Q 上的 **Darboux 上积分**

$$\mathbb{R}\cup\{+\infty\}\ni\overline{I}_Q(f)=\inf_{\Delta\text{为 }Q\text{ 的划分}}\sum^{\Delta}(f)$$

同样定义 **Darboux 下积分**

$$\mathbb{R}\cup\{-\infty\}\ni\underline{I}_Q(f)=\sup_{\Delta\text{为 }Q\text{ 的划分}}\sum_{\Delta}(f)$$

定义 f 在 Q 上 **Darboux 可积**，若 $\overline{I}_Q(f)=\underline{I}_Q(f)\in\mathbb{R}$，且称这个值为 f 在 Q 上的 **Darboux 积分**，记为 $\displaystyle\int_Q f(x)\mathrm{d}x$.

5.2 Darboux 可积性的判定

Proposition 5.2.1

$f:Q\to\mathbb{R}$ 是 *Darboux* 可积的当且仅当：$\forall\varepsilon>0,\exists Q$ 的一个分割 Δ 满足 $\sum^{\Delta}(f)-\sum_{\Delta}(f)\leq\varepsilon$.

Proof:

($\Rightarrow$) $\forall\varepsilon>0,\exists Q$ 的分割 Δ_1 使得 $\sum^{\Delta}(f)\leq\int_Q f(x)\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon}{2}$；$\Delta_2$ 使得 $\sum_{\Delta}(f)\geq\int_Q f(x)\mathrm{d}x-\frac{\varepsilon}{2}$，取共同细分 $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$，则有

$$\left.\begin{array}{l}\sum^{\Delta}(f)\leq\sum^{\Delta_1}(f)\leq\int_Q f(x)\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon}{2}\\ \sum_{\Delta}(f)\geq\sum_{\Delta_2}(f)\geq\int_Q f(x)\mathrm{d}x-\frac{\varepsilon}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\sum^{\Delta}(f)-\sum_{\Delta}(f)\leq\varepsilon$$

($\Leftarrow$) 反之 $\forall\varepsilon>0,\exists$ 分割 Δ 满足

$$0\leq\overline{I}_Q(f)-\underline{I}_Q(f)\leq\sum^{\Delta}(f)-\sum_{\Delta}(f)\leq\varepsilon$$

Corollary 5.2.1

设 Q 是闭立方体，$f\in C(Q)$，则 f 在 Q 上是 *Darboux* 可积的.

Proof: 闭集连续 $\Rightarrow$ 一致连续：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\|x-y\|\leq\delta$ 时，则 $|f(x)-f(y)|\leq\varepsilon$. 取分割 Δ 使得 $\mathrm{diam}\{P_J\}\leq\delta$，则 $\omega_{P_J}(f)\leq\varepsilon$，从而 $\sum^{\Delta}(f)-\sum_{\Delta}(f)\leq\mathrm{Vol}(Q)\times\varepsilon$，由前述命题，$f$ 在 Q 上 *Darboux* 可积.

Corollary 5.2.2

若 f 在有界闭立方体 Q 上 *Darboux* 可积，则 f 在任意闭立方体 $Q' \subset Q$ 上 *Darboux* 可积.

Proof: 由前述命题：$\forall \varepsilon > 0, \exists Q$ 的分割 $\Delta = \prod_{i=1}^{n} T_i$ 使得 $\sum^{\Delta}(f) - \sum_{\Delta}(f) \leq \varepsilon$，又有 $Q' = \prod_{i=1}^{n}[a_i', b_i']$，取 $\Delta' = \prod_{i=1}^{n}(T_i \cup \{a_i', b_i'\})$，从而 $\sum^{\Delta'}(f) - \sum_{\Delta'}(f) = \sum_{P_J \subset \Delta'} \omega_{P_J}(f) \times \mathrm{Vol}(P_J) \leq \varepsilon.$，于是

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\geq \sum_{P_J \subset \Delta'} \omega_{P_J}(f) \times \mathrm{Vol}(P_J) \\
&\geq \sum_{P_J \subset Q'} \omega_{P_J}(f) \times \mathrm{Vol}(P_J) \\
&= \sum\nolimits_{Q'}^{\widetilde{\Delta}}(f) - \sum\nolimits_{\widetilde{\Delta}, Q'}(f)
\end{aligned}$$

其中 $\widetilde{\Delta} = \prod_{i=1}^{n}[(T_i \cup \{a_i', b_i'\}) \cap [a_i', b_i']]$ 是 Q' 的一个分割.

Corollary 5.2.3 区域可加性 (Chasles 公式特例)

若 $\exists Q$ 的分割 $\Delta = \{P_J\}$ 使得 f 在每一个 P_J 上 *Darboux* 可积，则 f 在 Q 上可积，且

$$\int_Q f(x)\mathrm{d}x = \sum_{P_J \subset \Delta} f(x)\mathrm{d}x$$

Proposition 5.2.2

若 f 在有界闭立方体 Q 上 *Darboux* 可积，则 f 在 Q 上有界.

Proof: 用反证法，设 $\sup_Q(f) = +\infty$ 或 $\inf_Q(f) = -\infty$，不妨考虑前者：任给分割 $\Delta, \exists P_J \subset \Delta$ 使得 $\sup_{P_J} f = +\infty$，从而 $\sum^{\Delta}(f) = +\infty$，进一步 $\overline{I}_Q(f) = +\infty$，不满足可积性，从而推出矛盾.

5.3 Darboux 积分的基本性质

Corollary 5.3.1

给定有界闭立方体 Q，其上 *Darboux* 可积的函数构成一个线性空间，记为 $\mathcal{D}(Q)$：

- $\omega_A(\lambda g) = |\lambda|\omega_A g$
- $\omega_A(f+g) \leq \omega_A(f) + \omega_A(g)$

- $f \mapsto \int_Q f(x)\mathrm{d}x$ 是 $\mathcal{D}(Q)$ 到 $\mathbb{R}$ 的**线性映射**
- 单调性：$\forall f, g \in \mathcal{D}(Q)$，若 $f \leq g$ 恒成立，则 $\displaystyle\int_Q f(x)\mathrm{d}x \leq \int_Q g(x)\mathrm{d}x$.

Theorem 5.3.1

给定有界闭立方体 Q，$\forall f_1, \cdots, f_k \in \mathcal{D}(Q)$，任给 $\varphi \in C(\mathbb{R}^k)$，则 $\varphi(f_1, \cdots, f_k) \in \mathcal{D}(Q)$

Proof: $f_i \in \mathcal{D}(Q)$，从而存在 $M>0$ 使得 $|f_i(x)| \le M, \forall x \in Q, i=1,\cdots,k$ 因为 $\varphi \in C(\mathbb{R}^k)$，则 φ 在 $[-M,M]^k = \Lambda_M$ 上一致连续且有界，对任意分割 Δ_0 成立如下等式：

$$\sum\nolimits^{\Delta_0}(\varphi(f_1,\cdots,f_k)) - \sum\nolimits_{\Delta_0}(\varphi(f_1,\cdots,f_k)) = \sum_{P_J\in\Delta_0} \omega_{P_J}(\varphi(f_1,\cdots,f_k)) \times \mathrm{Vol}(P_J)$$

由一致连续性成立：$\forall \varepsilon>0, \exists\delta$ 使得 $\forall x,y \in \Lambda_M, \|x-y\|_\infty \le \delta$ 时 $|\varphi(x)-\varphi(y)| \le \varepsilon$.
对任意分割作分划：$\Delta_j = \{P_J : \forall i, \omega_{P_J}(f_i) \le \delta\} \cup \{P_J : \exists i, \omega_{P_J}(f_i) > \delta\} := A_{j,1} \cup A_{j,2}$，

对任意 $1 \le i \le k$，利用 $f_i \in \mathcal{D}(Q)$，存在合适 Δ_i 使成立：

$$\delta \times \sum_{\substack{P_J\in A_{i,2}\\ \omega_{P_J}(f_i)>\delta}} \mathrm{Vol}(P_J) \le \sum_{\substack{P_J\in A_{i,2}\\ \omega_{P_J}(f_i)>\delta}} \omega_{P_J}(f_i) \times \mathrm{Vol}(P_J) \le \varepsilon\delta.$$

于是有 $\sum\limits_{\substack{P_J\in A_{i,2}\\ \omega_{P_J}(f_i)>\delta}} \mathrm{Vol}(P_J) \le \varepsilon$，进一步令 $\Delta = \bigcup_{i=1}^k \Delta_i := A_1 \cup A_2$，分划定义同上，即得：

$$\sum_{P_J\in A_2} \omega_{P_J}(\varphi) \times \mathrm{Vol}(P_J) \le \sum_{i=1}^k \left(\sum_{P_J\in A_{i,2}} \omega_{P_J}(\varphi) \times \mathrm{Vol}(P_J) \right) \le k\omega_{\Lambda_M}(\varphi) \times \varepsilon$$

同时对 A_1 显然成立：

$$\sum_{P_J\in A_1} \omega_{P_J}(\varphi) \times \mathrm{Vol}(P_J) \le \varepsilon \times \sum_{P_J\in\Delta} \mathrm{Vol}(P_J) = \mathrm{Vol}(Q) \times \varepsilon$$

最终得出：

$$\sum_{P_J\in\Delta} \omega_{P_J}(\varphi) \times \mathrm{Vol}(P_J) \le [\mathrm{Vol}(Q) + k\omega_{\Lambda_M}(\varphi)] \times \varepsilon$$

由前述命题可得出 $\varphi(f_1,\cdots,f_k) \in \mathcal{D}(Q)$.

Proposition 5.3.1 积分不等式

- 若 $f \in \mathcal{D}(Q)$，则 $|\int_Q f\mathrm{d}x| \le \int_Q |f|\mathrm{d}x$，等号成立 $\iff$ f 几乎处处同号 (Lebesgue 测度意义下); 另若 $f \in C(Q)$，等号成立 $\iff$ f 在 Q 上不变号;
- (**Cauchy-Schwarz**) 若 $f,g \in \mathcal{D}(Q)$，则

$$|\int_Q fg\mathrm{d}x| \le \int_Q |fg|\mathrm{d}x \le \sqrt{\int_Q f^2\mathrm{d}x}\sqrt{\int_Q g^2\mathrm{d}x}$$

  等号成立 $\iff$ $\exists\lambda \in \mathbb{R}$，使得 $|f| - \lambda|g|$ 几乎处处为 0;
- (**Hölder**)$\forall p \in [1,+\infty), \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则 $\forall f,g \in \mathcal{D}(Q)$,

$$|\int_Q fg\mathrm{d}x| \le \|f\|_{L^p(Q)}\|g\|_{L^q(Q)}$$

- (**Jensen**)$\mathcal{D}(Q) \ni f : Q \to \mathbb{R}$，若 φ 为 Q 上的凸函数，则

$$\varphi\left(\frac{1}{\mathrm{Vol}(Q)}\int_Q f\mathrm{d}x\right) \le \frac{1}{\mathrm{Vol}(Q)}\int_Q \varphi(f)\mathrm{d}x$$

Proof:

- 考虑 $f_+ = \max\{f,0\}, f_- = (-f)_+$，则 $f = f_+ - f_-, |f| = f_+ + f_-$，由上述定理得到可积性;

- 考虑 $\mathbb{R}_2[x] \ni P(\lambda) = \int_Q (|f| - \lambda|g|)^2 \mathrm{d}x \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 0$（同 prop1.4.1）
- 此处 $\|f\|_{L^p(Q)} = \sqrt[p]{\int_Q |f|^p \mathrm{d}x}$，证明留作习题;
- 记 $\overline{f} = \frac{1}{\mathrm{Vol}(Q)} \int_Q f\mathrm{d}x, \exists l \in \mathbb{R}, s.t. \forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) - \varphi(\overline{f}) \geq l(t - \overline{f})$，于是 $\varphi(f) \geq \varphi(\overline{f}) + l(f - \overline{f})$，对左右两式积分即可.

Proposition 5.3.2

积分平均值：

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(Q)} \int_Q f(x)\mathrm{d}x \in [\inf_Q f, \sup_Q f], \forall f \in \mathcal{D}(Q)$$

更进一步，若 $f \in C(Q), \exists \xi \in Q, s.t. \frac{1}{\mathrm{Vol}(Q)} \int_Q f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)$.

5.4 Riemann 可积和积分的原始定义

设 $f : Q \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, Q$ 为有界闭立方体.

Definition 5.4.1

给定 Q 的一个分割 $\{P_J\}$，称 $\{\xi_J\} \subset Q$ 是适合于 Δ 的，若 $\forall J, \xi_J \in P_J$，定义如下 **Riemann 和**

$$R_\Delta(f, \xi) = \sum_{P_J \in \Delta} f(\xi_J) \times \mathrm{Vol}(P_J)$$

定义 $\|\Delta\| = \max_{P_J}(\mathrm{diam}(P_J))$ 称为分割 Δ 的**细度**，称 f 在 Q 上 **Riemann 可积**，记 $f \in \mathcal{R}(Q)$，若 $\lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} R_\Delta(f, \xi)$ 存在，也即 $\exists l \in \mathbb{R}, s.t. \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 满足：任给分割 $\Delta, \|\Delta\| \leq \delta$，任给适合于 Δ 的点集 ξ，则 $|R_\Delta(f, \xi) - l| \leq \varepsilon.$，此时称 l 为 f 在 Q 上的 **Riemann 积分**.

得到了两种积分的定义形式，下面探讨他们的关系.

Theorem 5.4.1

$f : Q \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，则 $f \in \mathcal{D}(Q) \iff f \in \mathcal{R}(Q)$，且此时两种积分的值相等.

Proof:

($\Leftarrow$) 设 $f \in \mathcal{R}(Q)$，则 $\lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} R_\Delta(f, \xi) = l$ 存在，即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. \forall$ 分割 $\Delta, \|\Delta\| \leq \delta$，$\forall$ 适合于 Δ 的点集 $\xi, |R_\Delta(f, \xi) - l| \leq \varepsilon.$，取定 Δ 满足 $\|\Delta\| \leq \delta$，可取适合于 Δ 的点集 ξ，则 $R_\Delta(f, \xi) \to \sum\limits_{P_J \in \Delta} (\sup\limits_{P_J} f) \times \mathrm{Vol}(P_J)$，从而 $|\sum^\Delta(f) - l| \leq \varepsilon$，同理有 $|\sum_\Delta(f) - l| \leq \varepsilon$，进而 $|\sum^\Delta(f) - \sum_\Delta(f)| \leq 2\varepsilon$，于是 $f \in \mathcal{D}(Q)$ 且 $\int_Q f\mathrm{d}x = l$

($\Rightarrow$) 设 $f \in \mathcal{D}(Q)$，则 $|f| \leq M$，且 $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 分割 Δ_0，使得 $|\sum^{\Delta_0}(f) - \sum_{\Delta_0}(f)| \leq \varepsilon$.
考虑分割 Δ_0 的所有分割超平面 Γ：取其 δ 邻域 V_0，使得 $\mathrm{Vol}(V_0) \leq \varepsilon$，考虑任意分割 Δ，细度 $\|\Delta\| \leq \delta$，$A_1 = \{P_J \in \Delta, P_J^o \cap \Gamma_0 = \varnothing\}; A_2 = A_1^c$ 观察 $\forall P_J \in A_2$，则 $P_J \subset V_0$，从而

$$\sum_{P_J \in A_2} \mathrm{Vol}(P_J) \leq \mathrm{Vol}(V_0) \leq \varepsilon$$

任给适合于 Δ 的点集 $\{\xi_J\}$，即 $\xi_J \in P_J \in \Delta$：

$$|\sum_{P_J\in A_2} f(\xi_J)\,\mathrm{Vol}(P_J)| \le \sum_{P_J\in A_2} |f(\xi_J)| \times \mathrm{Vol}(P_J) \le M\varepsilon$$

再考虑另一部分

$$\begin{aligned}
\sum_{P_J\in A_1} f(\xi_J)\,\mathrm{Vol}(P_J) &= \sum_{Q_I\in\Delta_0}\left(\sum_{P_J\subset Q_I} f(\xi_J)\,\mathrm{Vol}(P_J)\right)\\
&\le \sum_{Q_I\in\Delta_0}\sum_{P_J\subset Q_I}(\sup_{P_J} f)\times \mathrm{Vol}(P_J)\\
&\le \sum_{Q_I\in\Delta_0}(\sup_{Q_I} f)\sum_{P_J\subset Q_I}\mathrm{Vol}(P_J)\\
&= \sum\nolimits^{\Delta_0}(f) - \sum_{Q_I\in\Delta_0}(\sup_{Q_I} f)\times\left(\sum_{\substack{P_J\cap Q_I\neq\varnothing\\ P_J\in A_2}}\mathrm{Vol}(P_J\cap Q_I)\right)\\
&\le \sum\nolimits^{\Delta_0}(f) + M\varepsilon
\end{aligned}$$

同理可得 $R_\Delta(f,\xi) \ge \sum_{\Delta_0}(f) - 2M\varepsilon$，进一步有 $|R_\Delta - \int_Q f\mathrm{d}x| \le (2M+1)\varepsilon$.
由定义：$\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0} R_\Delta(f,\xi) = \int_Q f\mathrm{d}x$. 从而 $f\in\mathcal{R}(Q)$ 且两种积分相等.

Corollary 5.4.1

$\mathcal{R}(Q)$ 享有 $\mathcal{D}(Q)$ 的所有性质.

5.5 有界闭立方体上的 Fubini-Tonelli 定理

Theorem 5.5.1

给定 $Q = V\times W \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, Q, V, W$ 均为有界闭立方体，设 f 在 Q 上可积，令 $g(x) = \overline{I}_W f(x,\cdot), h(x) = \underline{I}_W f(x,\cdot)$ 且设 g, h 在 V 上可积，则

$$\int_Q f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_V g(x)\mathrm{d}x = \int_V h(x)\mathrm{d}x.$$

Proof: $\forall\varepsilon>0$，存在 V 的分割 $\Delta_1 = \{P_I\}, W$ 的分割 $\Delta_2 = \{Q_J\}$ 使得

$$\sum\nolimits^{\Delta_1}(g) - \sum\nolimits_{\Delta_1}(g) \le \varepsilon, \sum\nolimits^{\Delta_1}(h) - \sum\nolimits_{\Delta_1}(h) \le \varepsilon$$

于是取 $\Delta = \Delta_1\times\Delta_2$，有 $\sum^{\Delta}(f) - \sum_{\Delta}(f) \le \varepsilon$，考虑

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits^{\Delta}(f) &= \sum_{\substack{P_I\in\Delta_1\\ Q_J\in\Delta_2}} \sup_{P_I\times Q_J} f(x,y)\times\mathrm{Vol}(P_I\times Q_J)\\
&= \sum_{P_I\in\Delta_1}\left(\sum_{Q_J\in\Delta_2}\sup_{P_I\times Q_J} f(x,y)\times\mathrm{Vol}(Q_J)\right)\times\mathrm{Vol}(P_I)
\end{aligned}$$

另一方面，$\sum^{\Delta_1}(g) = \sum\limits_{P_I\in\Delta_1} \sup\limits_{P_I}(\overline{I}_W f(x,\cdot)) \times \mathrm{Vol}(P_I)$

$\forall x \in P_I, y \in Q_J, f(x,y) \le \sup\limits_{P_I\times Q_J} f(x,y)$，固定 $P_I \in \Delta_1$，成立如下不等式：

$$g(x) = \overline{I}_W f(x,\cdot) \le \sum^{\Delta_2} f(x,\cdot) = \sum_{Q_J\in\Delta_2} \sup_{Q_J} f(x,y) \times \mathrm{Vol}(Q_J)$$

两侧在 P_I 取 sup，也就有：

$$\sup_{P_I} g(x) \le \sum_{Q_J\in\Delta_2} \sup_{P_I\times Q_J} f(x,y) \times \mathrm{Vol}(Q_J)$$

进一步带回得到

$$\sum^{\Delta}(f) \ge \sum^{\Delta_1}(g) \ge \int_V g(x)\mathrm{d}x - \varepsilon \ge \int_V h(x)\mathrm{d}x - \varepsilon.$$

同理可得

$$\sum_{\Delta}(f) \le \sum_{\Delta_1}(h) \le \int_V h(x)\mathrm{d}x + \varepsilon \le \int_V g(x)\mathrm{d}x + \varepsilon.$$

最终

$$\int_Q f(x,y)\mathrm{d}(x,y) \le \sum_{\Delta}(f)+\varepsilon \le \int_V h(x)\mathrm{d}x+\varepsilon \le \int_V g(x)\mathrm{d}x+\varepsilon \le \sum^{\Delta}(f)+2\varepsilon \le \int_Q f(x,y)\mathrm{d}(x,y)+3\varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0^+$ 即得结论.

Corollary 5.5.1

设 f 在有界闭立方体 $Q = V \times W$ 上可积，且 $\forall x \in V, f(x,\cdot)$ 在 W 上可积，则

$$\int_Q f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_V \left(\int_W f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

Proof: 由假设 $\forall x \in V, \int_W f(x,y)\mathrm{d}y = g(x) = h(x)$，由 FT 公式得出结论.

Corollary 5.5.2

设 $Q = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i], f \in C(Q)$，则任给置换 $\sigma \in S_n$ 成立

$$\int_Q f(x)\mathrm{d}x = \int_{a_{\sigma(1)}}^{b_{\sigma(1)}} \left(\int_{a_{\sigma(2)}}^{b_{\sigma(2)}} \left(\cdots \int_{a_{\sigma(n-1)}}^{b_{\sigma(n-1)}} \left(\int_{a_{\sigma(n)}}^{b_{\sigma(n)}} f(x)\mathrm{d}x_{\sigma(n)}\right)\mathrm{d}x_{\sigma(n-1)} \cdots\right)\mathrm{d}x_{\sigma(2)}\right)\mathrm{d}x_{\sigma(1)}$$

Proof: 利用前述推论和数学归纳法，由任意连续函数在有界闭立方体上可积易得结论.

Remark 5.5.1

特别的，当 $f \in C(Q), Q = [a,b] \times [c,d]$ 时，成立：

$$\int_Q f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_c^d f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_2\right)\mathrm{d}x_1 = \int_c^d \left(\int_a^b f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2$$

5.6 一般允许集上的 Riemann 积分

Definition 5.6.1 Jordan 零测集

$A\subset\mathbb{R}^n$ 称为 **Jordan 零测集**，若 $\forall\varepsilon>0$，存在 A 的有限立方体覆盖 $\{Q_J\}$，使得 $A\subset\bigcup_{i=1}^m Q_{J_i}$ 且 $\sum_{i=1}^m \mathrm{Vol}(Q_{J_i})\leq\varepsilon$.

Proposition 5.6.1

Jordan 零测集的子集也为 Jordan 零测集;Jordan 零测集的有限并也是 Jordan 零测集.

Definition 5.6.2

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 称为**允许集** (或称 **Jordan 可测集**)，若 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 是 Jordan 零测集.

Proposition 5.6.2

若 $\Omega_1,\cdots,\Omega_k,k<+\infty$ 是允许集，则 $\bigcap_{i=1}^k\Omega_i$ 和 $\bigcup_{i=1}^k\Omega_i$ 也是允许集.

Proof: 设 Ω_1,Ω_2 是允许集，$\partial(\Omega_1\cup\Omega_2)\subset\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2$，从而 $\partial(\Omega_1\cup\Omega_2)$ 是 Jordan 零测的.

Proposition 5.6.3

设 φ 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中紧集 K 上的连续函数，则 $\mathrm{Graph}(\varphi)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零测集.

Proof: 已知 φ 是 K 上一致连续函数，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\|x-y\|\leq\delta\Rightarrow|\varphi(x)-\varphi(y)|\leq\varepsilon$. 又令 $K\subset Q\subset\mathbb{R}^{n-1}$，其中 Q 为有界闭立方体，将其分割为直径 $\leq\delta$ 的闭立方体 $\{P_I\}$，则若 $K\cap P_I\neq\varnothing$，令 $x_I\in K\cap P_I$，则 $\mathrm{Graph}(\varphi)\cap(P_I\times\mathbb{R})\subset P_I\times[f(x_I)-\varepsilon,f(x_I)+\varepsilon]$. 又因为 $\mathrm{Graph}(\varphi)$ 由有限个立方体覆盖，总体积 $\leq\mathrm{Vol}(Q)\times2\varepsilon$. 于是得到结论.

Example 5.6.1

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2=1\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零测集.

Definition 5.6.3

设 $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界允许集，称 f 在 Ω 上 Riemann 可积，记为 $f\in\mathcal{R}(\Omega)$，若存在有界闭立方体 $Q\supset\Omega$ 满足 $f\mathbb{1}_\Omega\in\mathcal{R}(Q)$，称 $\displaystyle\int_Q f\mathbb{1}_\Omega\mathrm{d}x$ 为 f 在 Ω 上的积分，记为

$$\int_\Omega f(x)\mathrm{d}x.$$

此处 $\mathbb{1}_\Omega(x)=\begin{cases}1 & x\in\Omega\\0 & x\notin\Omega\end{cases}$ 示性函数，也记作 χ_Ω.

Proposition 5.6.4

上述可积性和积分不依赖于立方体 Q 的选取.

Proof: 若 $\Omega\subset Q_1,\Omega\subset Q_2$，$Q_i$ 是有界闭立方体，令 $Q=Q_1\cap Q_2$，则 $\Omega\subset Q$，由题设 $f\mathbb{1}_\Omega\in\mathcal{R}(Q_i)$，则 $f\mathbb{1}_\Omega\in\mathcal{R}(Q)$，从而 $f\mathbb{1}_\Omega\in\mathcal{R}(Q_2)$，另一方面：

$$\int_{Q_1} f\mathbb{1}_\Omega \mathrm{d}x=\int_{Q} f\mathbb{1}_\Omega \mathrm{d}x=\int_{Q_2} f\mathbb{1}_\Omega \mathrm{d}x.$$

Corollary 5.6.1

- 任给有界允许集 Ω，$\mathcal{R}(\Omega)$ 是个线性空间.
- 任给有界集 $\Omega\subset Q$，则 Ω 是允许集 $\iff$ $\mathbb{1}_\Omega\subset\mathcal{R}(Q)$.

Proof: 仅证明第二条

($\Rightarrow$) $\partial\Omega$ 是 Jordan 零测集，$\exists\partial\Omega$ 的有限立方体覆盖 $\{Q_J\}$ 总体积 $\le\varepsilon$，可得到 Q 的分割 Δ，且不妨设 $\{Q_J\}\subset\Delta$，容易得到：

$$\sum\nolimits^{\Delta}(\mathbb{1}_\Omega)-\sum\nolimits_{\Delta}(\mathbb{1}_\Omega)=\sum\omega_{P_I}(\mathbb{1}_\Omega)\times P_I\le 1\times\sum_{Q_I\cap\partial\Omega\neq\varnothing}\mathrm{Vol}(Q_J)\le 2^n\varepsilon$$

从而 $\mathbb{1}_\Omega\in\mathcal{D}(Q)=\mathcal{R}(Q)$;

($\Leftarrow$) $\mathbb{1}_\Omega\in\mathcal{R}(Q)$，则存在分割 Δ 使得

$$\sum_{P_I\cap\partial\Omega\neq\varnothing}\mathrm{Vol}(P_I)\le\sum_{P_I\in\Delta}\omega_{P_I}(\mathbb{1}_\Omega)\times\mathrm{Vol}(P_I)\le\varepsilon$$

自然 $\{P_I|P_I\cap\partial\Omega\neq\varnothing\}$ 成为 $\partial\Omega$ 的一个覆盖且总体积 $\le\varepsilon$，故 Ω 是允许集.

Definition 5.6.4

若 Ω 是有界允许集，则称 $\displaystyle\int_\Omega \mathrm{d}x$ 为 Ω 的**体积**，或称 **Jordan 测度**，记为 $\mathrm{Vol}(\Omega)$.

Proposition 5.6.5

若 Ω 是 Jordan 零测集，又若 f 是 Ω 上的有界函数，则 $f\in\mathcal{R}(\Omega)$ 且 Riemann 积分等于 0.

Proof: 取有界立方体 $Q\supset\Omega,\forall\varepsilon>0,\exists$ 有限个立方体 $\{Q_I\}\subset Q$ 使 $\overline{\Omega}\subset\bigcup_{i=1}^p Q_{I_i}$ 且 $\sum\mathrm{Vol}(Q_{I_i})\le\varepsilon$. 通过细分，不妨设 $\{Q_{I_i}\}\subset Q$ 的分割 Δ 中

$$\begin{aligned}\sum\nolimits^{\Delta}(f\mathbb{1}_\Omega)=\sum_{Q_J\in\Delta}\left(\sup_{Q_J} f\mathbb{1}_\Omega\right)\times\mathrm{Vol}(Q_J)&\le\sum_{Q_J\cap\overline{\Omega}\neq\varnothing}\left(\sup_{Q_J} f\mathbb{1}_\Omega\right)\times\mathrm{Vol}(Q_J)\\&\le 2^n\times\sup_\Omega|f|\times\varepsilon\end{aligned}$$

同理 $\sum_\Delta(f\mathbb{1}_\Omega)\ge -2^n\times\sup_\Omega|f|\times\varepsilon$ 最终 $|\sum^\Delta-\sum_\Delta|\le M\varepsilon$ 从而有 $f\mathbb{1}_\Omega$ 可积，且积分为 0

Proposition 5.6.6

- 允许集上的连续函数是 Riemann 可积的;
- $\mathcal{R}(\Omega)$ 是线性空间：$\mathcal{R}(\Omega)\to\mathbb{R},f\mapsto\int_\Omega f\mathrm{d}x$ 是线性映射;

- 单调性：$f,g\in\mathcal{R}(\Omega)$ 且 $f\geq g$ 恒成立，则 $\int_\Omega f\mathrm{d}x\geq\int_\Omega g\mathrm{d}x$
- 若 $f_1,\cdots,f_m\in\mathcal{R}(\Omega)$，又设 $\varphi\in C(\mathbb{R}^m)$，则 $\varphi(f_1,\cdots,f_m)\in\mathcal{R}(\Omega)$，这是因为 $\varphi(f_1,\cdots,f_m)\mathbb{1}_\Omega=\varphi(f_1\mathbb{1}_\Omega,\cdots,f_m\mathbb{1}_\Omega)-\varphi(0)\mathbb{1}_{Q\setminus\Omega}\in\mathcal{R}(Q)$
- 积分不等式成立（同 prop5.3.1）
- Chasles 公式（区域可加性）成立（同 Cor 5.2.3），证明可考虑

$$\mathbb{1}_{\Omega_1\cup\Omega_2}=\mathbb{1}_{\Omega_1}+\mathbb{1}_{\Omega_2}-\mathbb{1}_{\Omega_1\cap\Omega_2};\mathbb{1}_{\Omega_1\cap\Omega_2}=\mathbb{1}_{\Omega_1}\cdot\mathbb{1}_{\Omega_2}$$

下面我们给出一般允许集上的 TF 定理：

Theorem 5.6.1 Fubini-Tonelli 定理

给定 $\Omega\subset V\times W\subset\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R},V,W$ 均为有界闭立方体，设 $f\in\mathcal{R}(\Omega),F_x=\{y\in W|(x,y)\in\Omega\}$ 是 $\mathbb{R}^k$ 中的允许集，且 $f(x,\cdot)\in\mathcal{R}(F_x)$

$$\int_\Omega f(x,y)\mathrm{d}(x,y)=\int_V\left(\int_{F_x}f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

Proof: 因为 $\forall x\in V,f\mathbb{1}_\Omega(x,y)=f(x,\cdot)\mathbb{1}_{F_x}(y)\in\mathcal{R}(W)$ 成立下列等式：

$$\int_Q f\mathbb{1}_\Omega\mathrm{d}(x,y)=\int_V\left(\int_U f\mathbb{1}_\Omega\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

由定义，该定理成立.

Remark 5.6.1

在一般情况下，多元函数的积分可以通过 FT 公式降维转化为一元函数的累次积分；
特别的，若 $\Omega=\{(x,y)\in V\times\mathbb{R},\varphi_1(x)\leq y\leq\varphi_2(x),\varphi_i\in C(V)\}$ 是有界允许集，又 $f\in C(\overline{\Omega})$，则

$$\int_\Omega f(x,y)\mathrm{d}(x,y)=\int_V\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

Example 5.6.2

设 $\Omega_1=\{(x,y)|x\geq0,y\geq0,x+y\leq1\},f(x,y)=xy^2$

$$\int_{\Omega_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\int_0^{1-y}xy^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}xy^2\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

又设 $\Omega_2=\{(x,y)|x+y\leq1,x\geq y\geq0\}$

$$\int_{\Omega_2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\int_y^{1-y}xy^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\int_x^{\min(x,1-x)}xy^2\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

考虑 $\Omega_3=\{(x,y,z)|x,y,z\geq0,x+y+z\leq1\},f(x,y,z)=xy^2$

$$\int_{\Omega_3}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\left(\int_{\substack{\{x\geq0,y\geq0\\x+y\leq1-z\}}}f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z=\int_0^1\left(\int_0^{1-z}\left(\int_0^{1-z-y}xy^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$$

Example 5.6.3 $\mathbb{R}^n$ **中单位球体积**

$B^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \|x\| \le 1\}$

$$\mathrm{Vol}(B^3) = \int_B^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-1}^1 \left(\int_{x_1^2+x_2^2 \le 1-x_3^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z = \int_{-1}^1 \pi(1-x_3^2)\mathrm{d}x_3 = \frac{4\pi}{3}$$

$$\mathrm{Vol}(B^4) = \int_{-1}^1 \left(\int_{\|(x_1,x_2,x_3)\| \le \sqrt{1-x_4^2}} \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\right)\mathrm{d}x_4 = \int_{-1}^1 \frac{4\pi}{3}(1-x_4^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x_4$$

高维单位球的体积可通过递推得到，Γ 函数见 (ex 8.5.2)

$$\mathrm{Vol}(B^n) = \frac{\sqrt{\pi^n}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

Example 5.6.4

给定 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 1 \le x \le 2, 0 \le xy \le 2\}, f(x,y) = \cos(xy)$

$$\int_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\int_0^{\frac{2}{x}} \cos(xy)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \ln(2)\sin(2)$$

5.7 多元函数的变量代换

目的：简化被积函数表达式或简化积分区域的几何形状.

Theorem 5.7.1

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n, E \subset \Omega$ 是紧的允许集，又设 $C^1(\Omega) \ni \varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 满足

- $\det(Jac_x) \ne 0, \forall x \in E^o$;
- φ 在 E^o 是单射.

则 $\varphi(E)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的允许集，且 $\forall f \in \mathcal{R}(\varphi(E))$，成立:

$$\int_{\varphi(E)} f(y)\mathrm{d}y = \int_E f \circ \varphi(x)|\det(Jac_x\varphi)|\mathrm{d}x.$$

在证明过程中，需要用到如下引理：

Lemma 5.7.1

若 $\varphi \in C^1(\Omega)$，$K \subset \Omega$ 是紧集，则 $\varphi|_K$ 是 Lipschitz 的.

Proof:

Step 1：考虑 $E=Q:=\prod_{k=1}^{n}[a_k,b_k]$ 为闭立方体，φ 是最简微分同胚 (见 def 4.4.1)，则

$$Jac_x\varphi=\begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_i} & \cdots & \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_n} \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}$$

显然有 $\det|Jac_x\varphi|=|\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial y_i}|\neq 0$,故 $\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial y_i}$ 保号,$\widetilde{x_i}$ 表示去掉第 i 个分量,记 $\varphi_i(x_1,\cdots,x_{i-1},a_i,\cdots,x_n)=\xi_1(\widetilde{x_i}),\varphi_i(x_1,\cdots,x_{i-1},b_i,\cdots,x_n)=\xi_2(\widetilde{x_i})$，不妨设 $\xi_1(\widetilde{x_i})<\xi_2(\widetilde{x_i})$

考虑 $\varphi(E)=\{x\in\mathbb{R}^n,x_k\in[a_k,b_k],k\neq i,x_i\in[\xi_1(\widetilde{x_i}),\xi_2(\widetilde{x_i})]\}$，则有

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(E)}f\mathrm{d}x&=\int_{\substack{\widetilde{x_i}\in\prod_{k\neq i}[a_k,b_k]\\ x_i\in[\xi_1(\widetilde{x_i}),\xi_2(\widetilde{x_i})]}}f\mathrm{d}x\\ (Fubini)&=\int_{\widetilde{x_i}\in\widetilde{Q_i}}\left(\int_{\xi_1}^{\xi_2}f\mathrm{d}x_i\right)\mathrm{d}\widetilde{x_i}\\ (\text{利用一元函数的变量替换})&=\int_Q f\circ\varphi|\det(Jac_y\varphi)|dy\end{aligned}$$

Step 2：证明上述引理,用反证法,假设不成立,则 $\forall m\in\mathbb{N},\exists x^m,y^m\in K,\|\varphi(x^m)-\varphi(y^m)\|\geq m\|x^m-y^m\|$,则存在子列 x^{m_p} 收敛于 $x^0\in K$，同时 y^{n_p} 收敛于 x^0，这是因为 $\|x^m-y^m\|\leq\dfrac{M_k}{m}$，则 $\exists r>0$, $\overline{B(x^0,r)}\subset\Omega$，由于 $\varphi\in C^1(\Omega)$，则 $\varphi|_{\overline{B(x^0,r)}}$ 是 Lipschitz 的（这是由于闭球是凸集，由增量公式易得)，与上述子列选取矛盾.

Step 3：设 $\det(Jac_x\varphi)\neq 0,\forall x\in\Omega$，证明：若 $E\subset\Omega$ 是紧允许集，则 $\varphi(E)$ 是允许集，且 $\partial\varphi(E)\subset\varphi(\partial E)$. $\forall x\in\varphi(E^o)$，由开映射定理，$x\in\varphi(E)^o$，从而 $\partial\varphi(E)\subset\varphi(\partial E)$，因上一步骤，$\varphi|_{\partial E}$ 是 Lipschitz 的；由于 ∂E 是 *Jordan* 零测集，则 $\varphi(\partial E)$ 是零测集，从而 $\partial\varphi(E)$ 零测，$\varphi(E)$ 是紧允许集.

Step 4：考虑 f 连续，φ 是最简微分同胚且 $\det(Jac_x\varphi)\neq 0,\forall x\in\Omega$，则变量替换公式成立：$\forall E\subset\Omega$ 是紧允许集，故

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{\varphi(E)}f\mathrm{d}x\\ \displaystyle\int_E f\circ\varphi|\det(Jac_y\varphi)|\mathrm{d}y\end{cases}$$

其中 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$ 均有意义，由第一步骤，公式成立.

Step 5：利用 Morse 引理 (Thm 4.4.3)，可将上述步骤推广至任意 C^k 微分同胚的变换.

Claim 5.7.1

一元情况不写绝对值，但与定理不矛盾：

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f\circ\varphi(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

这是因为：若 $\varphi'(x)\le 0$，则 $\varphi(E)=[\varphi(\beta),\varphi(\alpha)]$

Remark 5.7.1

公式的几何含义：

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+\mathrm{d}\varphi(x)\cdot h+o(\|h\|)$$

此处 $\mathrm{d}\varphi(x)\cdot h = Jac_x\varphi\times h$，体积微元 $=|\det Jac_x(\varphi)|\times\Delta h_1\cdots\Delta h_n+o(\|h\|^n)$

极坐标的变量替换：

$$\begin{cases} x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$$

其中 $r\ge 0,\theta\in[0,2\pi)$ 或位于一个周期，于是有体积微元：

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=|\det(Jac_{(r,\theta)}\varphi)|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

Example 5.7.1

利用极坐标替换 φ 计算：

$$\iint_{x^2+y^2\le 1,x\le y}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+1)^2}$$

Sol: 通过计算不难得到 $E=\{(r,\theta),r\in[0,1],\theta\in[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]\}$，原式化为

$$\iint_E\frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{(r^2+1)^2}=\int_0^1\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\frac{r}{(r^2+1)^2}\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}r=\pi\int_0^1\frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+1)^2}=-\frac{\pi}{2}\frac{1}{r^2+1}\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

球坐标的变量替换：

$$\begin{cases} x=r\cos\theta\cos\varphi\\ y=r\cos\theta\sin\varphi\\ z=r\sin\theta\end{cases}$$

其中 $r\ge 0,\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\varphi\in[0,2\pi)$，于是有体积微元

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=r^2\cos\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

Example 5.7.2

令 $D_a=\{a\le x+y\le\frac{1}{a},x,y\ge 0\},a\in(0,1)$，计算

$$K=\iint_{D_a}\frac{1}{x+y}\mathrm{e}^{\frac{x}{x+y}-(x+y)}$$

Sol: 考虑变量替换

$$\begin{cases} u=x+y\\ v=\dfrac{x}{x+y}\end{cases}$$

简单计算可得:

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = u\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

下一步确定积分区域:

$$(x, y) \in D_a \iff u \in [a, \frac{1}{a}], uv \geq 0, u(1-v) =\geq 0 \iff u \in [a, \frac{1}{a}], v \in [0,1]$$

原式可化为

$$\iint_{\{u\in[a,\frac{1}{a}],v\in[0,1]\}} \frac{1}{u}\mathrm{e}^{v-u}u\mathrm{d}u\mathrm{d}v = (e-1)(\mathrm{e}^{\frac{1}{a}} - \mathrm{e}^{a})$$

变量替换改为 $v = x$ 作为练习.

Example 5.7.3

计算

$$I = \iiint_{\{x^2+y^2+z^2\leq 1\}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+(z-2)^2}$$

Sol: 利用极坐标变换:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

则有 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$，积分区间化为 $E = \{r^2+z^2 \leq 1, \theta \in [0, 2\pi)\}$

$$\begin{aligned}
\int_E \frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z}{r^2+(z-2)^2} &= 2\pi \int_{r^2+z^2\leq 1} \frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}z}{r^2+(z-2)^2} \\
&= 2\pi \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{\sqrt{1-z^2}} \frac{r}{r^2+(z-2)^2}\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}z \\
&= 2\pi \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}[\ln(r^2+(z-2)^2)]_0^{\sqrt{1-z^2}}\mathrm{d}z = 2\pi - \frac{3\pi}{2}\ln(3)
\end{aligned}$$

Example 5.7.4

计算下述区域的面积:

$$\Omega = \{x, y > 0, x \leq y \leq 2y, 1 \leq xy \leq 3\}$$

Sol: 作变量代换:

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases}, \text{即} \begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) \end{cases}$$

则积分区域变为 $E = \{1 \leq u \leq 3, 1 \leq v \leq 2\}$，考虑体积微元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \dfrac{1}{2v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 求体积即为

$$\int_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_E \frac{1}{2v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{3}{2}\ln(2)$$

Example 5.7.5 往年期末考题

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2-y\le 0, y^2-x\le 0\}$，利用变量替换 $u=\dfrac{x^2}{y}, v=\dfrac{y^2}{x}$ 计算积分

$$\int_D \mathrm{e}^{\frac{x^3+y^3}{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Sol: 重写变量代换：

$$\begin{cases} x=u^{\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}} \\ y=u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

计算得：$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，积分区域 $E=[0,1]^2$，故积分为

$$\int_E \mathrm{e}^{u+v}\frac{1}{3}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\int_0^1\left(\int_0^1\mathrm{e}^{u+v}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v=\frac{1}{3}(e-1)^2$$

5.8 习题

题 1 设 $f(x,y)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上可积，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{u=1}^{n}\prod_{v=1}^{n}\left[1+\frac{1}{n^2}f(\frac{u}{n},\frac{v}{n})\right]=\exp\left(\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$

题 2 设闭区间 $I\subset\mathbb{R}^2$ 上的连续函数列 $\{f_n\}$ 满足 $f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant\cdots$，$\lim_{n\to+\infty}f_n=f$ 且 f 连续. 证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n=\int_I f$$

题 3 计算二重积分

$$\iint_{[0,\pi]\times[0,1]} y\sin(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

题 4 计算

$$\iint_{\substack{-1\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1}} x\mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

题 5 证明下列积分不等式：

(1) $\displaystyle\int_0^a e^{-\frac{x^2}{2}}dx<\left[\frac{\pi}{2}\left(1-e^{\frac{2a^2}{\pi}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$;

(2) $\displaystyle\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{a^2}}<\int_0^a e^{-x^2}dx<\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-\frac{1}{\pi}a^2}}$;

(3) $\displaystyle\left(\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}e^{x^2+y^2}dxdy\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sqrt{\pi}\int_0^1 e^{\frac{\pi^2 t}{4}}dt.$

题 6 计算积分

$$I=\int_0^1\frac{x-1}{\ln x}dx$$

题 7 计算积分

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

题 8 求由马鞍面 $z=xy$，平面 $x+y+z=1$ 与 $z=0$ 所围成立体的体积 V.

题 9 计算二重积分

$$\iint_{\Omega} \frac{x-y+1}{x+y+2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 Ω 是以 $(-1,0),(0,-1),(1,0),(0,1)$ 为顶点的正方形区域.

题 10 设 Ω 为由 $x=0, y=0$ 与 $x+y=1$ 所围成的图形，求二重积分

$$\iint_{\Omega} e^{\frac{x-y}{x+y}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

题 11（二维极坐标换元公式）设 $\boldsymbol{F} \in C^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\right), \Omega=(0,+\infty) \times (0,2\pi), \Delta \subset \bar{\Omega}$ 为有面积集，证明 $\boldsymbol{F}(\Delta)$ 也为有面积集。若 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续，证明

$$\iint_{\boldsymbol{F}(\Delta)} f(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Delta} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$

Chapter 6

曲线和曲线积分

6.1 参数曲线

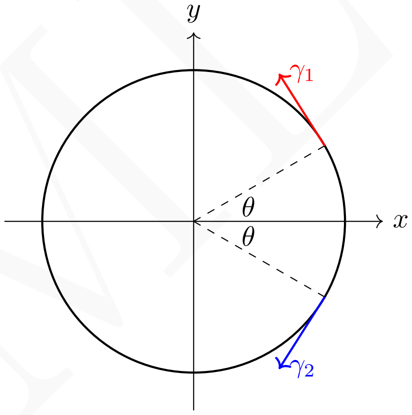
Definition 6.1.1 参数曲线

设 $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$，映射 $\gamma: I\to\mathbb{R}^n$，若 $\gamma\in C(I)$，则称 γ 是一条连续的**参数曲线**；其像集 $\Gamma=\gamma(I)$ 称为 γ 的**几何图形或几何形态**，更确切地说，(γ,Γ) 称为一条连续的参数曲线；上述连续条件可改为更强的条件（如 Lipschitz 或连续可微）.

不要将 γ 和 Γ 混淆，例如

$$\begin{cases}\gamma_1(t)=(\cos t,\sin t) & t\in[0,2\pi]\\ \gamma_2(t)=(\cos t,-\sin t) & t\in[0,2\pi]\\ \gamma_3(t)=(\cos 5t,-\sin 5t) & t\in[0,2\pi]\\ \gamma_4(t)=(\cos \pi t,-\sin \pi t) & t\in[0,2\pi]\end{cases}$$

上述曲线的几何图形均为 $\mathbb{R}^2$ 中的单位圆周，但不等同.



Remark 6.1.1

参数曲线有运动方向：例如 $\gamma_0=\gamma(a+b-t)$ 与 γ 反向.

Definition 6.1.2 简单参数曲线

若 γ 在 I^o 上是单射，则称 γ 是**简单参数曲线**.

Definition 6.1.3 闭 (合) 曲线

若参数曲线满足 $I(a)=I(b)$，则称为**闭 (合) 曲线**.

Theorem 6.1.1 Jordan 闭曲线定理

任给 $\mathbb{R}^2$ 上一条**简单闭曲线** Γ，则 $\mathbb{R}^2\backslash\Gamma$ 恰好有两个连通分支，一个有界，一个无界.

Definition 6.1.4 分段 C^k 曲线

给定 $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$，称为分段 C^k 曲线，若存在 I 的一个分割 $\{a_i\}$，使得 $\gamma|_{(a_i,a_{i+1})}$ 上有一个 C^k 延拓至 $[a_i, a_{i+1}]$.

Proposition 6.1.1 由方程 (组) 确定的曲线

设 $C^1(\Omega) \ni F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$，其中 Ω 是开集，定义 $\Sigma = \{x \in \Omega, F(x) = 0_{\mathbb{R}^{n-1}}\}$，若 $\mathrm{rank}(Jac_x F) = n-1, \forall x \in \Omega$，则 $\forall x_0 \in \Sigma, \Sigma$ 在 x_0 的邻域内是一条 C^k 的参数曲线.（Σ 是一条 C^k 参数曲线）.

Proposition 6.1.2

给定 $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ 是可微参数曲线，曲线经过 $\gamma(t_0)$ 时的切线方向为 $\gamma'(t_0)$，若 $\gamma'(t_0) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

6.2 可求长曲线和曲线长度

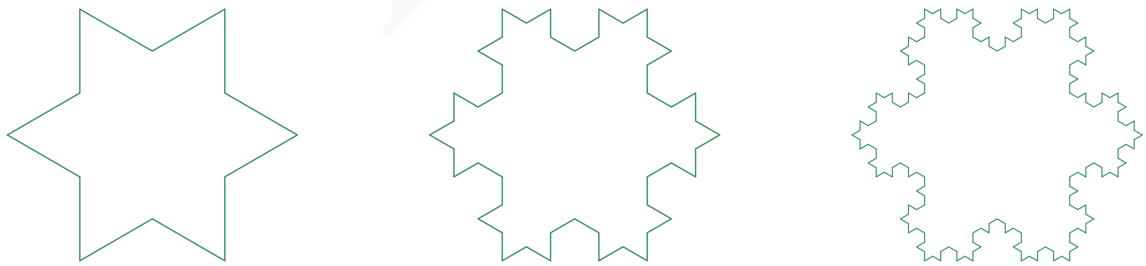
给定 $[a, b] = I \to \mathbb{R}^n$ 是一条连续参数曲线:

Definition 6.2.1 可求长曲线

任给 I 的一个分割 $\Delta = \{t_i, 1 \leq i \leq m\}$ 定义**折线长度**：$l_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|$（此处取欧式范数）. 若 $\lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} l_\Delta = L$ 存在，则称 γ 是**可求长**参数曲线，且定义 L 为曲线 γ 的**长度**.

Example 6.2.1 不可求长的曲线

- Peano 曲线：$[0, 1] \to [0, 1]^2$ 的满射;
- Koch 雪花;
- $\gamma(t) = (t, t^2 \sin \frac{1}{t^2}), t \in [0, 1]$.



n=1 n=2 n=3

Koch 雪花

Remark 6.2.1

考虑 $\gamma_n : I \to \mathbb{R}^2$，为第 n 个 Koch 雪花的曲线，$\|\gamma_{n+1} - \gamma_n\| = \frac{c}{3^n}$，故一致收敛于 $\gamma \in C(I)$.

Theorem 6.2.1

设 $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ 是一条参数曲线，则 γ 可求长 $\iff \sup\limits_{\Delta} l_\Delta < +\infty$，且此时 $\sup\limits_{\Delta} l_\Delta = \gamma$ 的长度.

Proof: 简单观察：若分割 $\Delta_1 \subset \Delta_2$，则 $l_{\Delta_1} \le l_{\Delta_2}$

$(\Rightarrow)$：设 γ 是可求长的，取定 $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. \|\Delta\| \le \Delta, l_\Delta \le L + \varepsilon$，固定一个分割 Δ_0，$\|\Delta_0\| \le \delta$，则任给分割 Δ，$l_\Delta \le l_{\Delta \cup \Delta_0} \le L + \varepsilon$;

$(\Leftarrow)$：设 $A = \sup_\Delta l_\Delta < +\infty$，$\forall \varepsilon > 0, \exists \Delta_1 = \{t_i, 1 \le i \le m_1\}$ 使得 $l_{\Delta_1} \ge A - \varepsilon$，任给分割 Δ，考虑 $A - \varepsilon \le l_{\Delta_1} \le l_{\Delta \cup \Delta_1}$，因为 $\gamma \in C(I)$，则 γ 在 I 上一致连续，于是 $\exists \delta > 0$ 使得 $|t - s| \le \delta$，则 $\|\gamma(t) - \gamma(s)\| \le \dfrac{\varepsilon}{m_1}$，于是又有

$$l_{\Delta \cup \Delta_1} \le l_\Delta + 2(m_1 - 1)\frac{\varepsilon}{m_1} \le l_\Delta + 2\varepsilon$$

于是 $A \ge l_\Delta \ge A - 3\varepsilon$，由定义可得结论.

Theorem 6.2.2

进一步，若 $\gamma \in C^1(I)$，则

$$\gamma\text{的长度} = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \mathrm{d}t$$

Proof: 任给分割 Δ，由一阶 *Taylor* 展式

$$\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) = \gamma'(t_{i+1})(t_{i+1} - t_i) + o(|t_{i+1} - t_i|)$$

也就有 (Roughly)

$$l_\Delta \sim \sum_{i=1}^n \|\gamma'(t_i)\|(t_{i+1} - t_i) + o(1) = R_\Delta(\|\gamma'(t)\|, \{t_i\}) + o(1)$$

严格证明考虑：

$$\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) = (\gamma^1(t_{i+1}) - \gamma^1(t_i), \cdots, \gamma^n(t_{i+1}) - \gamma^n(t_i))$$

由 *Lagrange* 中值定理，

$$\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) = ((\gamma^1)'(\xi_{i,1}), \cdots, (\gamma^n)'(\xi_{i,n}))(t_{i+1} - t_i)$$

也就得到

$$\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) - (t_{i+1} - t_i)\gamma'(t_i) = (t_{i+1} - t_i)((r^k)'(\xi_{i,k}) - (r^k)'(t_i))$$

由 γ 的一致连续性，$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得 $|((r^k)'(s) - (r^k)'(t))| \le \dfrac{\varepsilon}{n}, \forall |s - t| \le \delta.$

$$\|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) - (t_{i+1} - t_i)\gamma'(t_i)\| \le (t_{i+1} - t_i)\varepsilon, \forall \|\Delta\| \le \delta$$

也就得到

$$|l_\Delta - R_\Delta(\|\gamma'(t)\|, \{t_i\})| \le (b - a)\varepsilon$$

取极限 $\delta \to 0$，得到公式.

再考虑上述不可求长曲线的第三例，代入公式可得到反常积分发散.

Corollary 6.2.1

闭区间上的 Lipschitz 曲线是可求长的.

Definition 6.2.2 弧长

给点可求长曲线 $C^1(I) \ni \gamma : I \to \mathbb{R}^n$，则 $\forall P_i = \gamma(t_i), t_1 < t_2$，沿着 γ 从 P_1 到 P_2 的弧长记为

$$l(\widehat{P_1P_2}) = \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(\sigma)\| \mathrm{d}\sigma$$

另记 γ 的长度为 L_γ.

Definition 6.2.3 等价参数表达

设 $\gamma_i : I_i \to \mathbb{R}^n$ 是两个参数表达 $\Gamma = \gamma_i(I_i)$，我们称 γ_i 是 Γ 的 C^k 的等价参数表达，若 $\exists$ **严格增**的 C^k 微分同胚 $\varphi : I_1 \to I_2$ 满足 $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$.

Definition 6.2.4 弧长参数

考虑**正则**参数曲线，即 $\gamma \in C^1(I), \gamma'(t) \neq 0, \forall t \in I = [a, b]$ 考虑

$$s = \int_a^t \|\gamma'(\sigma)\| \mathrm{d}\sigma = \varphi(t)$$

有 $\varphi'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0, \forall t \in I$，则 φ 是 I 到 $[0, L_\gamma]$ 的 C^1 微分同胚，s 代表 $\gamma(a)$ 到 $\gamma(t)$ 沿曲线 γ 运动的弧长，称为**弧长参数**，记

$$\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi^{-1} : [0, L_\gamma] \to \gamma(I)$$

是曲线 γ 的**弧长参数表达**.

Proposition 6.2.1

弧长参数表达满足 $\|\widetilde{\gamma}'(s)\| = 1, \forall s \in [0, L_\gamma]$.

Proof: $\widetilde{\gamma}' = (\gamma' \circ \varphi^{-1})(\varphi^{-1})' = \gamma' \circ \varphi^{-1} \dfrac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}} = \dfrac{\gamma'}{\|\gamma'\|} \circ \varphi^{-1}$

弧长参数表达是正则参数曲线“最自然”的一个参数表达.

Example 6.2.2

平面曲线的 *Gauss* 曲率 $K_g = \|\widetilde{\gamma}''(s)\|$ 代表曲线的弯曲程度，即切方向相对弧长的变化速度.

$$\widetilde{\gamma}' = (\cos\theta(s), \sin\theta(s)), \widetilde{\gamma}'' = \theta'(s)(-\sin\theta(s), \cos\theta(s))$$

故有 $\|\widetilde{\gamma}''(s)\| = |\theta'(s)|$，考虑 $\gamma(t) = (R\cos t + x_0, R\sin\theta + y_0)$ 满足 $\|\gamma'(t)\| = R$, 则有

$$\widetilde{\gamma}(t) = \left(R\cos(\frac{t}{R}), R\sin(\frac{t}{R})\right) \Rightarrow K_g = \frac{1}{R}$$

此时曲率半径 $R_g = \dfrac{1}{K_g} = R$.

Remark 6.2.2

某点的曲率圆代表了曲线在该点处的二阶逼近.

6.3 第一型曲线积分

标量函数在可求长曲线 $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ 上的积分

Definition 6.3.1 第一型曲线积分

给定函数 $f: \Gamma = \gamma(I) \to \mathbb{R}$，任给 I 的分割 $\Delta = \{t_i\}$，得到曲线上的点集 $\{P_i, P_i = \gamma(t_i)\}$，设点集 ξ 与 Δ 匹配，则

$$R_{\Delta,\gamma}(f,\xi) = \sum_{i=0}^{m-1} f \circ \gamma(\xi_i) \times l(\widehat{P_iP_{i+1}})$$

若 $\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0} R_{\Delta,\gamma}(f,\xi)$ 存在，则称 f 在 $\Gamma = \gamma(I)$ 上可积，极限称为 f 在 γ 上的**第一型曲线积分**，记

$$\int_\gamma f\mathrm{d}s = \int_0^{L_\gamma} f \circ \widetilde{\gamma}\mathrm{d}s$$

基本性质:

- 在 γ 上的可积函数组成一个线性空间;
- $f \mapsto \displaystyle\int_\gamma f\mathrm{d}s$ 是线性映射;
- 第一型曲线积分与曲线定向（运动方向）**无关**，例如 $\gamma_1 = \gamma(a+b-t)$，则 $\displaystyle\int_\gamma f\mathrm{d}s = \int_{\gamma_1} f\mathrm{d}s$.
- 若 $\gamma \in C^1(I)$，成立
$$\int_\gamma f\mathrm{d}s = \int_a^b f \circ \gamma\|\gamma'(t)\|\mathrm{d}t$$
- 单调性 $f \geq g \Rightarrow \displaystyle\int_\gamma f\mathrm{d}s \geq \int_\gamma g\mathrm{d}s$;
- 若 f 在 γ 上可积，$\Gamma = \gamma(I) \subset \Omega, \Phi \in C(\Omega)$，则 $f \circ \Phi$ 在 γ 上可积;
- $\displaystyle|\int_\gamma f\mathrm{d}s| \leq \int_\gamma |f|\mathrm{d}s$，以及各种积分不等式;
- 积分中值公式
$$\frac{1}{L_\gamma}\int_\gamma f\mathrm{d}s \in [\inf_{\gamma(I)} f, \sup_{\gamma(I)} f]$$
若 $f \in C(\gamma)$，则 $\exists p \in \Gamma$ 使得 $\displaystyle\frac{1}{L_\gamma}\int_\gamma f\mathrm{d}s = f(p)$;
- 区域叠加性：若 γ_1, γ_2 首尾相接，则 $\displaystyle\int_{\gamma_1} f\mathrm{d}s + \int_{\gamma_2} f\mathrm{d}s = \int_{\gamma_1\cup\gamma_2} f\mathrm{d}s$.

Remark 6.3.1

总而言之，第一型曲线积分与一元函数的 Riemann 积分几乎**完全一致**.

在实际计算时会遇到如下两种情况：

- 已知参数表达 $\to$ 直接用公式计算;
- 给出曲线的定义 $\to$ 先给出相应的参数表达.

下面给出几个计算例子：

> **Example 6.3.1**
> 计算 $J=\int_\Gamma \ln(x+y+z)\mathrm{d}s$，$\Gamma$ 是 $(1,1,1)$ 到 $(2,3,4)$ 的直线段.

Sol: 考虑参数表达：$\gamma(t)=(1-t)(1,1,1)+t(2,3,4)=(1+t,1+2t,1+3t),t\in[0,1]$，故

$$J=\int_0^1 \ln(3+6t)\sqrt{14}\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{7}{2}}(5\ln(3)-2)$$

> **Example 6.3.2**
> 计算沿抛物线 $y=x^2$ 从 $(0,0)$ 到 $(2,4)$ 的弧长.

Sol: 考虑参数表达：$\gamma(x)=(x,x^2),x\in[0,2],\|\gamma'(x)\|=\sqrt{1+4x^2}$

$$l(\widehat{AB})=\int_0^2 1\times\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x\overset{(2x=\sinh t)}{=}\int_0^{\sinh^{-1}(1)}\cosh t\cdot\frac{\cosh t}{2}\mathrm{d}t=\sqrt{17}+\frac{1}{4}\sinh^{-1}(4)$$

> **Example 6.3.3**
> 令 $\Gamma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,x^2+y^2+z^2=a^2,x+y+z=0\}$，计算 $\int_\Gamma xy\mathrm{d}s$.

Sol: 取 $\vec{e_1}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ 为平面 $x+y+z=0$ 的单位法向量，在平面内取一组单位基向量 $\vec{e_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),\vec{e_3}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$，有参数表达

$$\gamma(\theta)=a\cos\theta\cdot\vec{e_2}+a\sin\theta\cdot\vec{e_3}=a\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta\\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\sin\theta\end{pmatrix},\theta\in[0,2\pi]$$

易得 $\|\gamma'(\theta)\|=a$，原积分化为

$$a^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{6}\sin^2\theta-\frac{1}{2}\cos^2\theta a\mathrm{d}\theta=-\frac{1}{3}\pi a^3.$$

另解：由对称性

$$\text{原积分}=\int_\Gamma\frac{1}{6}[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)]\mathrm{d}s=\frac{1}{6}\int_\Gamma(-a^2)\mathrm{d}s=\frac{1}{6}(-a^2)(2a\pi)=-\frac{1}{3}\pi a^3.$$

6.4 第二型曲线积分

向量场沿着可求长曲线 $\gamma:I\to\mathbb{R}^n$ 运动的积分（作功）

> **Definition 6.4.1 向量场**
> 给定 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$，其上一个向量场是向量值映射：$\vec{v}:\Omega\to\mathbb{R}^n$.

下面给出第二型曲线积分的定义：

Definition 6.4.2 第二型曲线积分

设 $\gamma \in C^1(I)$ 且正则，给定向量场 $\vec{v}:\Gamma=\gamma(I)\to\mathbb{R}^n$，任给 I 的分割 $\Delta=\{t_i\}$，得到曲线上的点集 $\{P_i, P_i=\gamma(t_i)\}$，设点集 ξ 与 Δ 匹配，则

$$R_{\Delta,\gamma}(\vec{v},\xi)=\sum_{i=0}^{m-1}\langle\vec{v}(\gamma(\xi_i)),\gamma(t_{i+1})-\gamma(t_i)\rangle$$

若 $\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0} R_{\Delta,\gamma}(\vec{v},\xi)$ 存在，则称 $\vec{v}$ 在 $\Gamma=\gamma(I)$ 上可积，极限称为 $\vec{v}$ 沿 γ 运动时的积分，即**第二型曲线积分**，记为

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{\gamma}$$

Theorem 6.4.1

曲线积分的存在性和数值在等价的参数表达下保持不变.

Proof: 以第一型曲线积分为例：设 $\gamma_i: I_i\to\mathbb{R}^n$ 是可求长曲线 Γ 的两个等价参数表达，$\exists\varphi: I_1\to I_2$ 的单增同胚使得 $\gamma_1=\gamma_2\circ\varphi$，设 f 是 Γ 上的标量函数，由定义，$\forall I_2$ 的分割 Δ_2 及与之匹配的 $\{\xi\}$ 满足

$$R_{\Delta_2,\gamma_2}(f,\xi)=R_{\varphi^{-1}(\Delta_2),\gamma_1}(f,\varphi^{-1}(\xi))$$

事实上，我们有 $\varphi^{-1}(\Delta_2)$ 是 I_1 的一个分割，$\varphi^{-1}(\xi)$ 与其匹配，并且

$$\|\Delta_2\|\to 0 \iff \|\varphi^{-1}(\Delta_2)\|\to 0$$

从而 $\lim\limits_{\|\Delta_2\|\to 0} R_{\Delta_2,\gamma_2}(f,\xi)$ 存在 $\iff \lim\limits_{\|\Delta_1\|\to 0} R_{\Delta_1,\gamma_1}(f,\varphi^{-1}(\xi))$ 存在，并且两者极限相同.
在第二型曲线积分的情况，考虑对 $\mathbb{R}^n$ 作**刚性**变换 $T(x)=Ox+x_0, O\in O_n(\mathbb{R}), x_0\in\mathbb{R}^n$，也不改变曲线积分的可积性和数值.

Proposition 6.4.1

若 $\vec{v}\in C(\Omega)$，γ 为分段 C^1 的 (正则) 参数曲线，则 $\vec{v}$ 沿 γ 运动的第二型曲线积分存在，且

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{\gamma}=\int_a^b\langle\vec{v}\circ\gamma(t),\gamma'(t)\rangle\mathrm{d}t=\int_0^{L_\gamma}\langle\vec{v}\circ\tilde{\gamma}(t),\tilde{\gamma}'(t)\rangle\mathrm{d}t$$

Proof: 证明同第一型曲线积分情形，第二型曲线积分由此转化为第一型曲线积分的计算.

基本性质：

- 线性性;
- **有方向性**：$\gamma_-(t)=\gamma(a+b-t)$，则若 $\vec{v}$ 可积沿 γ，则 $\vec{v}$ 沿 γ_- 可积，且 $\int_\gamma \vec{v}\cdot\mathrm{d}\gamma=-\int_{\gamma_-}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{\gamma}_-$
- 区域叠加性：若 γ_1,γ_2 首尾相接，$\vec{v}$ 沿 γ_i 均可积，则 $\vec{v}$ 沿 $\bigcup\gamma_i$ 可积，且积分值等于分别积分之和.

Theorem 6.4.2 曲线积分的基本定理

若 $\vec{v}$ 是函数 F 的**梯度场**，即 $\vec{v}=\nabla F=\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_{1\leq i\leq n}$，设 $F\in C^1(\Omega)$，又若 $\vec{v}$ 沿 γ 可积，则

$$\int_\gamma \vec{v}\mathrm{d}\vec{\gamma}=[F\circ\gamma]_a^b=F(\gamma(b))-F(\gamma(a)).$$

Proof: 不妨设 γ 为分段 C^1 的参数曲线

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{\gamma}&=\int_a^b\langle\vec{v}\circ\gamma(t),\gamma'(t)\rangle\mathrm{d}t=\int_a^b\langle\nabla F\circ\gamma(t),\gamma'(t)\rangle\mathrm{d}t\\ (\text{链式法则})&=\int_a^b(F\circ\gamma)'(t)\mathrm{d}t=[F\circ\gamma]_a^b=F(\gamma(b))-F(\gamma(a)).\end{aligned}$$

另一种理解方式和表达形式：
给定向量场 $\vec{v}=(v_1,\cdots,v_n)$

$$\begin{aligned}R_{\Delta,\gamma}(\vec{v},\xi)&=\sum_{k=0}^{m-1}\langle v(\vec{\gamma}(\xi_k)),\gamma(t_{k+1}-t_k)\rangle\\&=\sum_{k=0}^{m-1}\left(\sum_{i=1}^n v_i(\gamma(\xi_k))\times[\gamma_i(t_{k+1})-\gamma_i(t_k)]\right)\\&=\sum_{k=0}^{m-1}\left(\sum_{i=1}^n v_i(\gamma(\xi_k))\Delta x_{i,k}\right)=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{k=0}^{m-1}v_i(\gamma(\xi_k))\Delta x_{i,k}\right)\end{aligned}$$

于是

$$\int_\gamma\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{\gamma}=\sum_{i=1}^n\int_\gamma v_i\mathrm{d}x_i=\int_\gamma\omega$$

此处 $\omega=\sum_{i=1}^n v_i\mathrm{d}x_i$ 是一个 **1-微分形式**.（完整定义见 Def 7.5.2）
特别的：在 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 时，$\omega=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\ P,Q\in C(\Omega)$；$\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 时，$\omega=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\ P,Q,R\in C(\Omega)$.

Definition 6.4.3

若存在 $F\in C^1(\Omega)$ 使得 $\omega=\mathrm{d}F=\sum_{i=1}^n\frac{\partial F}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i$ 在 Ω 上成立，则称 ω 在 Ω 上是**恰当**的.

Proposition 6.4.2

若 $F\in C^2$ 或二阶可微，又若 $\omega=\sum\frac{\partial F}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i=\sum P_i\mathrm{d}x_i$，则在 Ω 上成立

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j}=\frac{\partial P_j}{\partial x_i},\forall i\neq j$$

Claim 6.4.1

若 $\omega=\sum_{i=1}^n P_i\mathrm{d}x_i\in C^1(\Omega),\forall i$，则 ω 是恰当的.

Definition 6.4.4

满足 prop 6.4.2 的 1-微分形式称为**闭的** 1-微分形式

易见：恰当 $\Rightarrow$ 闭，但反之不然，下例留作习题：

Example 6.4.1

给定 $\omega_0 = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$，证明：

- Ω 在 $\mathbb{R}^2\backslash\{0_{\mathbb{R}^2}\}$ 上是闭的;
- 运用极坐标，证明 $\omega_0 = \mathrm{d}\theta$，从而 ω_0 在 $\mathbb{R}^2\backslash\{0_{\mathbb{R}^2}\}$ 上不存在原函数，即 ω_0 在 $\mathbb{R}^2\backslash\{0_{\mathbb{R}^2}\}$ 上不是恰当的.

6.5 平面上单连通区域的 Green-Riemann 公式

Definition 6.5.1

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个有界区域，Ω 称为单连通的，若 $\partial\Omega$ 是一条简单闭曲线.

Remark 6.5.1

$\mathbb{R}^2$ 中的单连通区域可理解为 $\mathbb{R}^2$ 的" 无洞" 区域，例如前述 $\mathbb{R}^2\backslash\{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

Definition 6.5.2

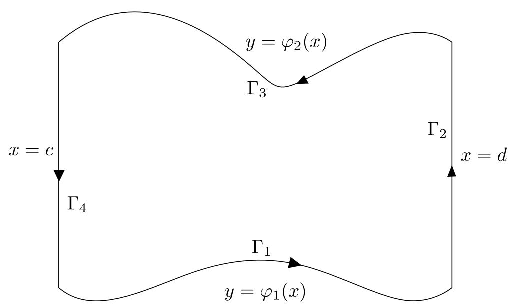
给定有界单连通区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$，则其边界的**正定向** $\partial\Omega_+$ 是 $\partial\Omega$ 的定向，使得沿该方向运动时，Ω **局部**的来看永远在运动方向的左侧，又称 $\partial\Omega$ 的**逆时针方向**.

Theorem 6.5.1 Green-Riemann 公式

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个分段 C^1 的有界单连通区域，设 $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 是 $\overline{\Omega}$ 上的 C^1 微分形式，成立

$$\int_{\partial\Omega_+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Proof: 公式关于 Ω 是线性的，不妨考虑 $\omega = P\mathrm{d}x$：
设 Ω 可以切割成第一型区域，即 $\{x \in [c,d], \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$(如下图)



第一型区域及其正定向

先考虑等式右侧：

$$\begin{aligned}\int_\Omega -\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} -\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_c^d \left[P(x,\varphi_1(x)) - P(x,\varphi_2(x))\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

考虑 $\gamma_1 = (x, \varphi_1(x)), x \in [c, d]$ 为 φ_1 确定的曲线 Γ_1，则有

$$\int_{\Gamma_1} P\mathrm{d}x = \int_c^d P(x, \varphi_1(x))\mathrm{d}x$$

其余 Γ_i 同图示，容易得到

$$\int_{\Gamma_2} P\mathrm{d}x = 0 \int_{\Gamma_4} \mathrm{d}x; \int_{\Gamma_3} P\mathrm{d}x = -\int_c^d P(x, \varphi_2(x))\mathrm{d}x.$$

将其求和即得公式. 同理，若 $\omega = Q\mathrm{d}y$，且若 Ω 可划分成第二型区域 $\{y \in [c, d], \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)\}$，公式成立.

Remark 6.5.2

若 Ω 可以划分成 Ω_i，每一个即是第一型又是第二型区域，则恒成立，**可惜一般无法成立**，例如 $y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \sin(\frac{1}{x}), x \in [0, \pi]$，故在**更加严格**的证明中，我们考虑：

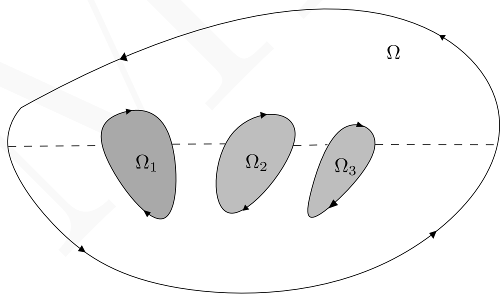
- 需要用多边形逼近
- 需要适当延拓到 $\overline{\Omega}$ 的一个邻域

考虑例 6.4.1，容易发现在非单连通区域的情况 $G-R$ 公式可能不成立.

Proposition 6.5.1 一般多连通区域的 Green-Riemann 公式

设 Ω 是 $\Omega_0 \backslash \bigcup_{k=1}^m \overline{\Omega_k}$，其中每个 Ω_i 是分段 C^1 的单连通区域，且 $\overline{\Omega_k} \subset \Omega_0$. 设 $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \in C^1(\Omega)$，则 $G-R$ 公式依旧成立.

关键：$\partial\Omega_+$ 为 $\partial\Omega_0$ 的逆时针，$\partial\Omega_k, k = 1, \cdots, m$ 的顺时针定向.



多连通区域及其正定向

6.6 G-R 公式的应用

第二型曲线积分和重积分的转换：

- 重积分转化为第二型曲线积分

$$\Omega\text{面积：}\quad \mathrm{Area}(\Omega) = \int_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega_+} x\mathrm{d}y = -\int_{\partial\Omega_+} y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_+} (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x).$$

在极坐标 $r = \rho(\theta), \theta \in [0, 2\pi]$ 下给出的简单闭曲线：

$$\mathrm{Area}(\Omega) = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_+} (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$

- 第二型曲线积分转化为重积分
  $\omega(x,y)=(\arctan(\frac{y}{x})+y)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\mathrm{d}y$，$\Gamma$ 是 $(6,36)$ 到 $(8,36)$ 的上半圆周，则可以补充 $(8,36)$ 到 $(6,36)$ 的直线段 Γ'，得到 $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,(x-7)^2+(y-36)^2<1,y>36\}$，在其上有 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-1$，因而
  $$J_0=\int_{\partial\Omega_+}\omega=\int_{\Omega}(-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{2}$$
  原积分即为
  $$\int_6^8[\arctan(\frac{36}{x})+36]\mathrm{d}x-J_0$$

Remark 6.6.1 另一观察

上述 $\omega=\omega_1+y\mathrm{d}x$，其中 ω_1 为 $\Omega_0=\{x>0\}$ 闭的微分形式，计算 ω_1 在 Ω_0 上的原函数

Theorem 6.6.1 Poincaré 定理

若 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 上的**单连通区域**，且 ω 是 Ω 上的闭的 C^1 微分形式，则 ω 在 Ω 上是恰当的.

Proof: Ω 是连通的 $\Rightarrow$ Ω 折线连通. 固定点 $A\in\Omega$，任给 $x\in\Omega$，考虑从 A 到 x 的折线 Γ_x，定义
$$F(x)=\int_{\Gamma_x}\omega$$
由于 ω 闭，利用 G-R 公式可知，F 的定义与折线 Γ_x 的选取无关，任意两条折线 Γ_1,Γ_2，有
$$\int_{\Gamma_1}\omega-\int_{\Gamma_2}\omega=0$$
不难得到：若 $\omega=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，则满足 $\frac{\partial F}{\partial x}=P,\frac{\partial F}{\partial y}=Q$，这是因为
$$\frac{F(x+te_1)-F(x)}{t}=\frac{1}{t}\int_{[x;x+te_1]}\omega=\frac{1}{t}\int_0^t P(x+se_1)\mathrm{d}s$$
取极限即得，故 F 是 ω 在 Ω 上的原函数.

下述公式在一般教材中不太提到，但在实际使用中十分有效：

Theorem 6.6.2 重积分的分部积分公式

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 有界分段 C^1，$u,w\in C^1(\overline{\Omega})$, 则
$$\int_{\Omega}(\partial_x u)w\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_{\Omega}(\partial_x w)u\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\partial\Omega_+}uw\mathbf{n}_x\mathrm{d}s$$
其中 $\mathbf{n}_x$ 是 $\partial\Omega_+$ 上的单位外法向量的 x 分量.

Proof: 只需证明 $\int_{\Omega}\partial_x(uw)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\partial\Omega_+}uw\mathbf{n}_x\mathrm{d}s$ 也就是证明 $\forall Q\in C^1(\overline{\Omega})$
$$\int_{\Omega}\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\partial\Omega_+}Q\mathbf{n}_x\mathrm{d}s$$
考虑曲线的弧长参数表达 (def 6.2.4)：$\gamma(s)=(x(s),y(s))$，其正向单位切向量 $\tau(s)=\gamma'(s)=(x'(s),y'(s))$ 则单位外法向量为：$\mathbf{n}(s)=(y'(s),-x'(s))$ 于是有 $\mathbf{n}_x\mathrm{d}s=y'(s)\mathrm{d}s=\mathrm{d}y$，代入可得上式.

6.7 习题

题 1 计算 $I=\oint_L \dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ ，其中 L 为任一不包含原点的闭区域的边界线.

题 2 计算第一型曲线积分 $I=\int_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s, L: x^2+y^2=ax$.

题 3 计算第一型曲线积分 $\int_C \dfrac{z^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}s$ ，其中 C 为圆柱螺线

$$(x,y,z)=(a\cos t, a\sin t, bt),\quad t\in[0,2\pi].$$

题 4 计算第一型曲线积分 $\int_C xy\mathrm{d}s$ ，其中 C 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 交成的圆周。

题 5 计算第二型曲线积分

$$I=\oint_{\vec{C}} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+y^2}[(x\sin y-y\cos y)\mathrm{d}x+(x\cos y+y\sin y)\mathrm{d}y]$$

其中 $\vec{C}$ 是包含原点在其内部的分段 C^1 闭曲线，以逆时针方向为定向.

题 6 设 $f(x,y)$ 在 $\boldsymbol{R}^2$ 上连续，r 为定数，记 D 是以 (x,y) 点为心，以 r 为半径的圆，即 $(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\leqslant r^2$, L 为 D 的边界沿逆时针方向。令

$$F(x,y)=\iint_D f(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

证明:

(1) $F(x,y)$ 的偏导数存在，且

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\int_L f(\xi,\eta)\mathrm{d}\eta,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=-\int_L f(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi$$

(2) 上述偏导数是 x,y 的连续函数.

题 7 设 D 为平面区域，$u(x,y)\in C^2(D)$. 证明：$u(x,y)$ 是调和函数，即 u 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\equiv 0$ 的充要条件是：对 D 内任一圆周 L ，且 L 所围圆属于 D ，都有

$$\int_L \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=0$$

题 8 在上题的条件下，证明 $u(x,y)$ 在 D 上是调和函数的充要条件为：$\forall P_0(x_0,y_0)\in \mathrm{D}$，

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0+r\cos\theta, y_0+r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$0<r<d=\rho(P_0,\partial D)$$

题 9 举例说明对第二型曲线积分 " 积分中值定理不再成立 " 。

题 10 设 $\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)i+Q(x,y)j$ 在开区域 D 内处处连续可微，在 D 内任一圆周 C 上，有

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s=0 \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是圆周外法线单位向量. 试证在 D 内恒有

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=0 \tag{2}$$

题 11 设 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在全平面上有连续偏导数，而且对以任意点 (x_0,y_0) 为中心，以任意正数 r 为半径的上半圆 $C: x=x_0+r\cos\theta, y=y_0+r\sin\theta(0\leqslant\theta<\pi)$ 恒有

$$\int_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{1}$$

求证：$P(x,y)\equiv 0, \frac{\partial Q}{\partial x}\equiv 0$.

题 12 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 有连续偏导数，则 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 的充要条件是

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} Q\left(x_0,y\right)\mathrm{d}y=\int_{x_0}^{x} P\left(x,y_0\right)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

题 13 计算第二型曲线积分

$$\oint_{\vec{C}} \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{4x^2+y^2}$$

其中 $\vec{C}$ 为递时针方向的圆周 $(x-1)^2+y^2=R^2, R\neq 1$.

题 14 计算积分

$$I=\int_L x\ln\left(x^2+y^2-1\right)\mathrm{d}x+y\ln\left(x^2+y^2-1\right)\mathrm{d}y$$

其中 L 是被积函数的定义域内从点 $(2,0)$ 至 $(0,2)$ 的逐段光滑曲线.

题 15 计算积分

$$I=\int_{L^+}\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2} \tag{1}$$

其中 L^+ 是从点 $A(-1,0)$ 到 $B(1,0)$ 的一条不通过原点的光滑曲线，它的方程是 $y=f(x)(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

题 16 计算积分

$$I=\int_{L^+}\frac{\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)}{x^2+y^2}.$$

其中 L^+ 是不通过原点，从点 $A(1,0)$ ，到 $B(0,2)$ 的分段光滑曲线.

Chapter 7

曲面和曲面积分

7.1 C^1 正则参数曲面

Definition 7.1.1

给定 $\gamma : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n (n \geq 2), (u,v) \mapsto \gamma(u,v)$ ，其中 U 为开集，满足 $\dfrac{\partial \gamma}{\partial u}, \dfrac{\partial \gamma}{\partial v}$ 线性无关，也即 $\operatorname{rank}(Jac_{(u,v)}\gamma) = 2$，我们称 $\Sigma = \gamma(U)$ 是一个正则的 C^1 参数曲面，Σ 是曲面的几何形态.

Example 7.1.1

若 $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m, f \in C^1(U)$，

$$\operatorname{Graph}(f) = \{(u, v, f(u,v)) \in \mathbb{R}^{m+2}, (u,v) \in U\}$$

是一个 C^1 的正则参数曲面.

Example 7.1.2 由方程 (组) 定义的曲面

给定多元映射 $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-2}, (n \geq 3)$，设 $f \in C^1$，记 $\Sigma = \{x \in U, F(x) = 0_{\mathbb{R}^{n-2}}\}$，若 $\forall x \in \Sigma$，$\operatorname{rank}(Jac_x F) = n-2$，由隐函数定理，任给 $a \in \Sigma, \exists a$ 的一个邻域 V_a，使得 $V_a \cap \Sigma$ 成为一个 C^1 的正则参数曲面.

Proposition 7.1.1

$\gamma_i \in \mathbb{R}^3, \|\gamma_1 \wedge \gamma_2\| =$ 由 γ_1 和 γ_2 张成的平行四边形的面积, 另有面积表达

$$\|\gamma_1\| \cdot \|\gamma_2\| \sin(\theta) = \sqrt{\|\gamma_1\|^2 \|\gamma_2\|^2 - (\|\gamma_1\|^2 \cdot \|\gamma_2\|^2 \cos^2(\theta))} = \sqrt{\|\gamma_1\|^2 \|\gamma_2\|^2 - \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle^2}$$

Remark 7.1.1

此处 $\wedge$ 表示向量积，也称外积，形式的外积是向量积的推广.

Example 7.1.3

$\gamma : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$，确定了一个 C^1 正则参数曲面，则其上的一个连续的法向量场如下：

$$\vec{n} = \frac{\partial_u \gamma \wedge \partial_v \gamma}{\|\partial_u \gamma \wedge \partial_v \gamma\|}$$

下题留作练习:

Example 7.1.4

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$，且 $\nabla F \neq 0, \forall x$ 满足 $F(x) = 0$，在 $\Sigma = \{F(x) = 0\}$ 的每一点附近定义了一个 C^1 的正则参数曲面，$a \in \Sigma$，求 a 点的单位法向量.

Definition 7.1.2 切平面

设 $\gamma : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ 是一个 C^1 的正则参数曲面，$\forall a \in \gamma(u,v) \subset \Sigma = \gamma(U)$，我们称经过 a，由 $\dfrac{\partial \gamma}{\partial u}, \dfrac{\partial \gamma}{\partial v}$ 张成的平面称为 a 处的**切平面**.

7.2 曲面面积

首先尝试用**三角形**逼近曲面来定义曲面的面积.

Example 7.2.1 Schwarz 灯笼

考虑圆柱的面积，将圆柱分为 p 份，每份用三角形进行逼近，得到 $2bp$ 个三角形，每个三角形的面积为 $\frac{1}{2} \times 2\sin(\frac{\pi}{p}) \times \sqrt{\frac{1}{b^2} + (1-\cos(\frac{\pi}{p}))^2}$，于是总面积即为：

$$2bp \times \sin(\frac{\pi}{p}) \times \sqrt{\frac{1}{b^2} + (1-\cos(\frac{\pi}{p}))^2}$$

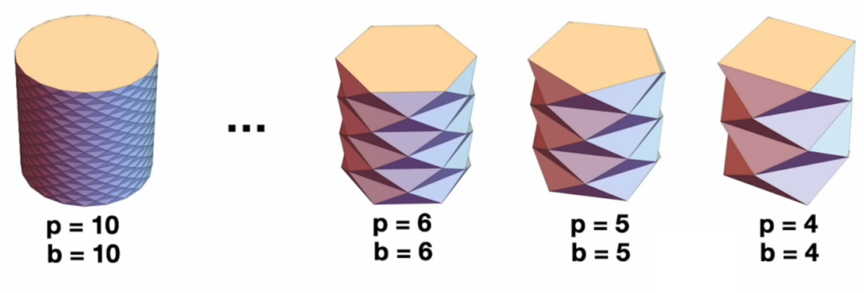
若选取 $\lim \dfrac{b^2}{p^4} = l$，则

$$\frac{1}{b^2} + \frac{\pi^4}{4p^4} \sim \frac{1}{b^2}(1 + \frac{\pi^4}{4}\frac{b^2}{p^4}) \sim \frac{1}{b^2}(1 + \frac{\pi^4}{4}l)$$

进而得到极限值为

$$2\pi(1 + \frac{\pi^4}{4}l)^{\frac{1}{2}}$$

得不出确定的结果，说明无法随意地用三角形逼近计算面积.



Schwarz 灯笼

实际上，一种" 正确" 的逼近方法是使用**平行四边形**，考虑 $a = (u_0, v_0)$ 出发，由 $\gamma(a) + \dfrac{\partial \gamma}{\partial u}(a)\Delta u$ 和 $\gamma(a) + \dfrac{\partial \gamma}{\partial v}(a)\Delta v$ 张成的平行四边形面积，则有

$$\mathrm{d}S = \sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \sqrt{\det(Jac^T\gamma Jac\gamma)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

此处 $E = \|\dfrac{\partial \gamma}{\partial u}\|^2, F = \langle\dfrac{\partial \gamma}{\partial u}, \dfrac{\partial \gamma}{\partial v}\rangle, G = \|\dfrac{\partial \gamma}{\partial v}\|^2$，我们得到曲面面积的定义如下

Definition 7.2.1

设 $\gamma : U \to \mathbb{R}^n$ 是 C^1 正则的参数曲面，且 γ 是单射，则其面积

$$\mathscr{A}(\Sigma) = \int_U \sqrt{EG - F^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_U \sqrt{\det(Jac^T\gamma Jac\gamma)} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

特别的，若 $n = 3$，公式可表达为

$$\mathscr{A}(\Sigma) = \int_U \|\frac{\partial \gamma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \gamma}{\partial v}\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Proposition 7.2.1

面积公式在等价参数表达下保持不变，即设 φ 是 V 到 U 的微分同胚，$\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi, \Sigma = \gamma(U) = \widetilde{\gamma}(V)$，则两者计算面积相等.

Proof: 考虑 $Jac\widetilde{\gamma} = Jac(\gamma \circ \varphi) = (Jac\gamma) \circ \varphi$，于是有

$$\mathscr{A}(\Sigma) = \int_V \det(Jac^T\widetilde{\gamma}Jac\widetilde{\gamma})^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\tilde{u}\mathrm{d}\tilde{v} = \int_V \sqrt{\det(Jac^T\gamma Jac\gamma)} \circ \varphi |\det(Jac\varphi)| \mathrm{d}\tilde{u}\mathrm{d}\tilde{v} = \int_U \sqrt{\det(Jac^T\gamma Jac\gamma)} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Example 7.2.2

$\mathrm{Graph}(f), f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m, \gamma(u, v) = (u, v, f(u, v))^T$，容易得到

$$\frac{\partial \gamma}{\partial u} = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial u})^T, \frac{\partial \gamma}{\partial v} = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial v})^T$$

进而得到

$$E = 1 + \|\frac{\partial f}{\partial u}\|^2, G = 1 + \|\frac{\partial f}{\partial v}\|^2, F = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle$$

于是我们得到

Corollary 7.2.1

给定 $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，则

$$\mathscr{A}(\mathrm{Graph}(f)) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

7.3 第一型曲面积分

曲面上**数量函数**的积分

Definition 7.3.1

给定 $\gamma : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ 是 C^1 的正则参数曲面，$f : \Sigma = \gamma(K) \to \mathbb{R}$，其中 $K \subset U$ 是紧允许集，当 f 在 Σ 上连续时，f 在 Σ 上可积，且积分值为

$$\int_\Sigma f \mathrm{d}S = \int_K f \circ \gamma \sqrt{EG - F^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

基本性质 (基本同重积分性质)

- 线性性
- 积分中值定理：若 $f \in C(\Sigma)$，则 $\exists p \in \Sigma, s.t. \frac{1}{\mathscr{A}(\Sigma)} \int_{\Sigma} f \mathrm{d}S = f(p)$
- 积分不等式
- 与曲面是否可定向无关
- 区域叠加性

7.4 $\mathbb{R}^3$ 中的可定向曲面

Definition 7.4.1

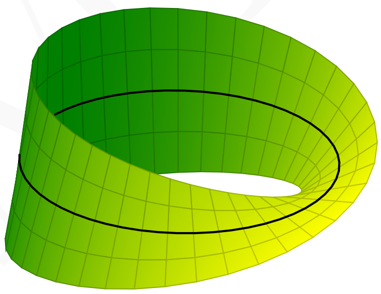
$\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 为连续的参数曲面，我们称 Σ 是**可定向的**，若存在 Σ 上的连续单位法向量场.

Example 7.4.1

- （显式表达）C^1 正则参数曲面：$\gamma : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \vec{n} = \frac{\partial_u \gamma \wedge \partial_v \gamma}{\|\partial_u \gamma \wedge \partial_v \gamma\|}$;
- （隐式表达）$\Sigma = \{F(x, y, z) = 0\}$，其中 $F \in C^1(U)$，$U \subset \Sigma$ 为开集. 且 $\forall a \in \Sigma, \nabla F(a) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$，此时 $\vec{n} = \frac{\nabla F(a)}{\|\nabla F(a)\|}$.

Example 7.4.2 不可定向曲面

Möbius 带



一般的，我们有如下命题（几何直观十分显然）

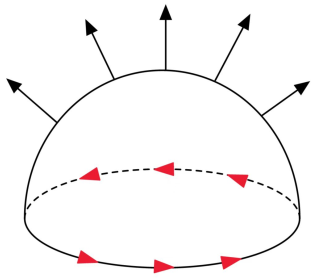
Proposition 7.4.1

$\mathbb{R}^3$ 中的简单闭曲面与 S^2 同胚.

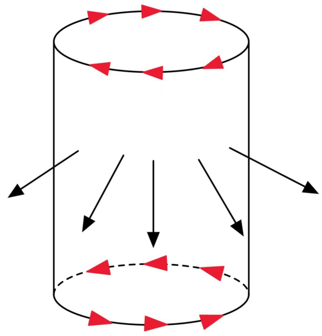
在 $\mathbb{R}^n$ 中的曲面可以严格定义可定向的问题.

Definition 7.4.2 带边可定向曲面的边界定向

设 Σ 是一个 $\mathbb{R}^3$ 中的可定向曲面，且 $\partial\Sigma \neq \varnothing$，则 $\partial\Sigma$ 可以定向为在 $a \in \partial\Sigma$ 局部沿着 $\partial\Sigma$ 运动时，Σ 永远在**左侧**，固定下来的 $\partial\Sigma$ 的定向称为与 Σ 定向**相容**的正向，记为 $\partial^+\Sigma$ 或者 $\partial\Sigma_+$.



半球面



圆柱面

Definition 7.4.3 分片 C^1 的正则参数曲面

若 $\Sigma=\bigcup_{i=1}^m \Sigma_i$，其中每个 Σ 都是 C^1 的参数曲面，满足：

- 若 $\overline{\Sigma}_i\cap\overline{\Sigma}_j\neq\varnothing$ 则，$\overline{\Sigma}_i\cap\overline{\Sigma}_j$ 为一条 C^1 的参数曲线;
- 若 $\overline{\Sigma}_i\cap\overline{\Sigma}_j\cap\overline{\Sigma}_k\neq\varnothing$，则交集是一个点；换言之，任意三片的交集至多是一个点.

Definition 7.4.4

- 若存在 Σ_i,Σ_j 的定向，使得 $\overline{\Sigma}_i\cap\overline{\Sigma}_j=\gamma_{ij}\neq\varnothing$，则 Σ_i 和 Σ_j 上诱导的定向正好相反，此时称 Σ_i 和 Σ_j 的定向是**相容的**;
- 分片 C^1 正则的参数曲面 $\Sigma=\bigcup_{i=1}^m \Sigma_i$ 称为**可定向的**，若存在 Σ_i 的定向，使得任意两片的定向是相容的，$(\Sigma_i,\vec{n}_i)$ 的并集称为 Σ 的一个**定向**.

Proposition 7.4.2

可定向曲面有且仅有两个相反的定向，形成曲面的两侧 (朝上和朝下，闭曲面中内侧和外侧).

7.5 第二型曲面积分 ($\mathbb{R}^3$ 中)

向量场 $\vec{F}$ 穿过可定向曲面 Σ 时的通量.

Definition 7.5.1

Σ 可定向，存在 Σ 上的连续单位向量场 $\pm\vec{n}$，确认一个定向 $\vec{n}$，则 $\vec{F}$ 穿过 Σ 的通量定义为 $\langle\vec{F},\vec{n}\rangle$ 在 Σ 上的第一型曲面积分，记为

$$\oint_\Sigma \langle\vec{F},\vec{n}\rangle\mathrm{d}S$$

基本性质：

- 线性性;
- 有方向性：若选取 $-\vec{n}$ 为 Σ 的定向，得到相反的通量;
- 区域叠加性;
- $|\oint_\Sigma \langle\vec{F},\vec{n}\rangle\mathrm{d}S|\leq\oint_\Sigma |\langle\vec{F},\vec{n}\rangle|\mathrm{d}S\leq\int_\Sigma \|\vec{F}\|\mathrm{d}S.$

Example 7.5.1

给定 $\gamma:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$

$$\oint_\Sigma\langle\vec{F},\vec{n}\rangle\mathrm{d}S=\int_\Omega\langle\vec{F}\circ\gamma,\partial_u\gamma\wedge\partial_v\gamma\rangle\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Proof: $\langle\vec{F},\vec{n}\rangle=\left\langle\vec{F},\dfrac{\partial_u\gamma\wedge\partial_v\gamma}{\|\partial_u\gamma\wedge\partial_v\gamma\|}\right\rangle\Rightarrow\mathrm{d}S=\|\partial_u\gamma\wedge\partial_v\gamma\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

Remark 7.5.1

$\left\langle\vec{F},\dfrac{\partial_u\gamma\wedge\partial_v\gamma}{\|\partial_u\gamma\wedge\partial_v\gamma\|}\right\rangle=\det(\vec{F}\circ\gamma,\partial_u\gamma,\partial_v\gamma).$

另一种表达方法：视作 2-微分形式在定向曲面上的积分：$\mathbb{R}^3$ 中，$\vec{F}=(P,Q,R)^T$，则 F 在 Σ 上的第二型曲面积分写作

$$\int_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$（形式外积）

Definition 7.5.2 $\mathbb{R}^n$ 中的外微分与微分形式

给定 $\Omega\subset\mathbb{R}^n,\Lambda^m(\Omega)$ 表示 m-微分形式的集合

- $f:\Omega\to\mathbb{R}\in\Lambda^0(\Omega)$;
- $\mathrm{d}f=\sum_{i=1}^n\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\in\Lambda^1(\Omega)$

外微分 $\mathrm{d}:\Lambda^m(\Omega)\to\Lambda^{m+1}(\Omega),m\in\mathbb{N}$ 满足如下性质

- $\mathrm{d}(\omega_1+\lambda\omega_2)=\mathrm{d}\omega+\lambda\mathrm{d}\omega_2,\forall\omega_1,\omega_2\in\Lambda^m(\Omega)$ 且 $\mathrm{d}\omega\in\Lambda^{m+1}(\Omega)$，若 $\omega\in\Lambda^m(\Omega)$
- $\mathrm{d}(\omega_1\wedge\omega_2)=\mathrm{d}\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^k\omega_1\wedge\mathrm{d}\omega_2$，若 $\omega_1\in\Lambda^k(\Omega),\omega_2\in\Lambda^l(\Omega)$
- $\mathrm{d}\mathrm{d}\omega=0,\forall\omega\in\Lambda^m(\Omega)$

$\mathbb{R}^3$ 中的微分形式：

- 1-微分形式：$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$
- 2-微分形式：$P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$
- 3-微分形式：$F\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$

Remark 7.5.2

微分形式是微分流形上定义的反对称协变张量场.

Example 7.5.2

考虑 $\vec{F}=(0,0,R)$，设 $\Sigma=\gamma(\Omega),\gamma:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,(x,y)\mapsto(x,y,\varphi(x,y))$ 取正定向，则

$$\oint_\Sigma\langle\vec{F},\vec{n}\rangle\mathrm{d}S=\int_\Omega\begin{vmatrix}0&1&0\\0&0&1\\R\circ\gamma&\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}&\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\Omega R\circ\gamma\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

更一般的，取参数表达 $\gamma(u,v)$ 时，成立 $\begin{vmatrix} 0 & \partial_u\gamma_1 & \partial_v\gamma_1 \\ 0 & \partial_u\gamma_2 & \partial_v\gamma_2 \\ R\circ\gamma & \partial_u\gamma_3 & \partial_v\gamma_3 \end{vmatrix} = R\circ\gamma\dfrac{\partial(\gamma_1,\gamma_2)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = R\circ\gamma\mathrm{d}\gamma_1\wedge\mathrm{d}\gamma_2$

也就有

$$\int_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\Omega \left[P\circ\gamma\frac{\partial(\gamma_2,\gamma_3)}{\partial(u,v)} + Q\circ\gamma\frac{\partial(\gamma_3,\gamma_1)}{\partial(u,v)} + R\circ\gamma\frac{\partial(\gamma_1,\gamma_2)}{\partial(u,v)}\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

7.6 Green 公式和 Stokes 公式

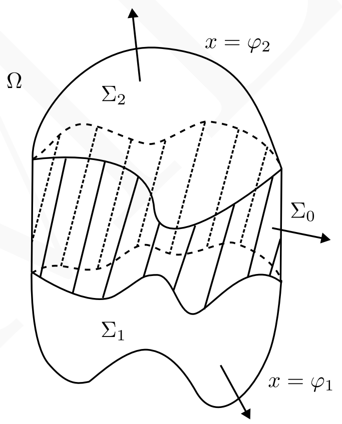
Theorem 7.6.1 Green 公式

设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 中的光滑有界区域（$\partial\Omega$ 是分片 C^1 正则参数曲面），则 $\partial\Omega$ 永远是可定向的，通常选取单位外法向量为 $\partial\Omega$ 的正向；又设 $\omega = P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \in C^1(\overline{\Omega})$，则成立

$$\int_{\partial\Omega_+}\omega = \int_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Proof: 由于公式对于 (P,Q,R) 线性，不妨考虑 $(P,0,0)$，即 $\omega = P\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，Green 公式等价于分部积分公式

$$\int_\Omega \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \overset{(1)}{=} \int_{\partial\Omega} P\mathbf{n}_x\mathrm{d}S \overset{(2)}{=} \int_{\partial\Omega_+}\omega$$



第一型区域

- 等式 (1): 设第一型区域：$\Omega = \{(y,z)\in D\subset\mathbb{R}^2, \varphi_1(y,z)\le x\le\varphi_2(y,z)\}$，将 $\partial\Omega$ 分为三片，由 *Fubini* 公式

$$\int_\Omega \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_D \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_D [P(\varphi_2,y,z) - P(\varphi_1,y,z)]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

  – 在 Σ_2 上用 (y,z) 作参量，$\gamma(y,z) = (\varphi_2(y,z),y,z), (y,z)\in D$，此时有 $\mathbf{n}_x = \dfrac{1}{\sqrt{1+|\nabla\varphi_2|^2}}$，$\mathrm{d}S = \sqrt{1+|\nabla\varphi_2|^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. 于是

$$\int_{\Sigma_2} P\mathbf{n}_x\mathrm{d}S = \int_D P(\varphi_2,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

– 同理，在 Σ_1 上有

$$\int_{\Sigma_1} P\mathbf{n}_x \mathrm{d}S = \int_D -P(\varphi_1, y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

– 在 Σ_0 上 $\mathbf{n}_x$ 恒为 0，故

$$\int_{\Sigma_0} P\mathbf{n}_x \mathrm{d}S = 0$$

一般的区域可以利用局部化或者逼近的方法证明.

- 等式 (2)：不妨设 $\partial\Omega$ 的参数表达由 $\gamma(u,v) = (x,y,z)$ 给出，设 γ 是正向的参数表达：外法向量 $\vec{n} = \dfrac{\partial_u\gamma \wedge \partial_v\gamma}{\|\partial_u\gamma \wedge \partial_v\gamma\|}$，$\mathrm{d}S = \|\partial_u\gamma \wedge \partial_v\gamma\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，则 $\mathbf{n}_x\mathrm{d}S = \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$

Corollary 7.6.1 体积公式

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 有界且分片光滑，则

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \int_{\partial\Omega_+} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{\partial\Omega_+} y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega_+} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\int_{\partial\Omega_+} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Example 7.6.1

设 $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3_+, x+y+z=1\}$，定向朝 x,y,z 的正向，计算

$$\int_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- **方法一**：直接由定义计算：$\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \vec{F} = (x,y,z)$

$$\oint_\Sigma \langle \vec{F}, \vec{n}\rangle \mathrm{d}S = \int_\Sigma \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{d}S = \frac{1}{2}$$

- **方法二**: 考虑 xoy 平面投影 $\gamma : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \Sigma \subset \mathbb{R}^3, (x,y) \mapsto (x,y,1-x-y), \Omega = \{x,y \geq 0, x+y \leq 1\}$

$$\oint_\Sigma \langle \vec{F}, \vec{n}\rangle \mathrm{d}S = \int_\Omega \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ 1-x-y & -1 & -1 \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}$$

- **方法三**：由对称性，原积分可化为

$$3\int_\Sigma z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\int_\Omega \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1-x-y & -1 & -1 \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\int_\Omega (1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}$$

- **方法四**：考虑 $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3_+, x+y+z \leq 1\}, \partial\Omega$ 由四片三角形构成，则

$$\int_{\Sigma_1} \omega = \int_{\Sigma_2} \omega = \int_{\Sigma_3} \omega = 0$$

而 $\partial\Omega_+$ 在 Σ 上的定向是 x,y,z 的正向，于是

$$\int_\Sigma \omega = \int_{\partial\Omega_+} \omega = 3\,\mathrm{Vol}(\Omega) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Theorem 7.6.2 Stokes 公式

设 Σ 是 $\mathbb{R}^3$ 中可定向的有界分片 C^1 正则参数曲面，设 $\partial\Sigma \neq \varnothing$，在 $\partial\Sigma$ 上选取与 Σ 定向相容的方向，记为 $\partial\Sigma_+$，设 $\vec{F} = (P, Q, R)^T$ 或 $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z \in C^1(\Omega), \overline{\Sigma} \subset \Omega$，则成立

$$\int_{\partial\Sigma_+} \vec{F}\mathrm{d}\vec{\gamma} = \int_{\Sigma} \langle \mathrm{rot}\,\vec{F}, \vec{n}\rangle \mathrm{d}S$$

其中 $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \frac{\partial}{\partial x} & P \\ \vec{j} & \frac{\partial}{\partial y} & P \\ \vec{k} & \frac{\partial}{\partial z} & R \end{vmatrix} = \nabla \wedge \vec{F}$，上式也可写为

$$\int_{\partial\Sigma_+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_{\Sigma} (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

又或

$$\int_{\partial\Sigma_+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathbf{n}_x & \frac{\partial}{\partial x} & P \\ \mathbf{n}_y & \frac{\partial}{\partial y} & Q \\ \mathbf{n}_z & \frac{\partial}{\partial z} & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

Proof: 由于公式的线性性，不妨设 $\vec{F} = (0, Q, 0)^T$，则左式 $= \int_{\partial\Sigma_+} Q\mathrm{d}y$ 不妨设 Σ 可以参数表达 (沿正向)，$\gamma(u, v) = (x, y, z), (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma_+} Q\mathrm{d}y &= \int_{\partial D_+} Q(\frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v) = \int_{\partial D_+} Q\frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u + Q\frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v \\ &= \int_D \left[\frac{\partial}{\partial u}(Q\frac{\partial y}{\partial v}) - \frac{\partial}{\partial v}(Q\frac{\partial y}{\partial u})\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_D \frac{\partial(Q, y)}{\partial(u, v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \end{aligned}$$

此时右式

$$\int_{\Sigma} -\frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_D -\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

由链式法则，公式成立.

Theorem 7.6.3 一般的 Stokes 公式

设 $M \subset \mathbb{R}^n$ 是一个 m 维可定向 *Riemann* 流形，$\omega \in \Lambda^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ 是一个 (m-1)-微分形式，则成立

$$\int_{\partial M_+} \omega = \int_M \mathrm{d}\omega$$

- Newton-Leibniz 公式：$m = n = 1, M = [a, b], \omega = f \in \Lambda^0(\mathbb{R})$

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

- Green-Riemann 公式：$m = n = 2, M \subset \mathbb{R}^2, \omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$

$$\int_{\partial M_+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_M (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- Green 公式：$m = n = 3, M \subset \mathbb{R}^3, \omega = P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$
- Stokes 公式 $(\mathbb{R}^3)$：$m = 2, n = 3, M$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中曲面，$\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$

Example 7.6.2

$\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3_+,x+y+z=1\}$，定向朝 x,y,z 正向，考虑向量场 $\vec{F}=(z^2,x^2,y^2)^T$ 沿着 $\partial\Sigma$ 运动一周做的功.

Sol: 由 *Stokes* 公式:

$$\int_{\partial\Sigma_+}\vec{F}\mathrm{d}\vec{\gamma}=\int_\Sigma\langle\mathrm{rot}\,\vec{F},\vec{n}\rangle\mathrm{d}S$$

此处 $\vec{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$，简单计算可得

$$\langle\mathrm{rot}\,\vec{F},\vec{n}\rangle=\begin{vmatrix}1 & \frac{\partial}{\partial x} & z^2\\ 1 & \frac{\partial}{\partial y} & x^2\\ 1 & \frac{\partial}{\partial z} & y^2\end{vmatrix}=\frac{2}{\sqrt{3}}(x+y+z)$$

于是原式化为

$$\int_\Sigma\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{d}S=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathscr{A}(\Sigma)=1$$

Example 7.6.3

给定曲面 $\Gamma=\{x^2+y^2+z^2=2x,x^2+y^2=x,z\geq 0\}$，沿球面 $x^2+y^2+z^2=2x$ 的外法向诱导定向运动，计算

$$\int_\Gamma(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$$

Sol: 结果为 $\dfrac{\pi}{2}$，自行计算即可.

7.7 习题

题 1 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被柱面 $x^2+y^2=ax$ 截下部分的面积.

题 2 求 $n-1$ 维单位球面 S^{n-1} 的面积（$n-1$ 维体积）.

题 3 计算第一型曲面积分

$$I=\iint_S (x+y+z)\mathrm{d}S,\quad S: x^2+y^2+z^2=a^2,\quad z\geqslant 0$$

题 4 (1) 求积分

$$I=\iint_{x^2+y^2+z^2=R^2}\frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}}\quad (h\neq R)$$

(2) 求积分

$$u(a,b,c)=\iint_{x^2+y^2+z^2=R^2}\frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$
$$\left(a^2+b^2+c^2\neq R^2\right).$$

题 5 计算第二型曲面积分，取外侧

$$I=\iint_{x^2+y^2+z^2=R^2}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}.$$

题 6 设 $f(x)\in C[0,1]$，证明：

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi f(\sin\theta\sin\varphi)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi f(\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi$；

(2) 计算重积分 $I=\displaystyle\iint_{[0\frac{\pi}{2}]^2}\sin\varphi \mathrm{e}^{\sin\theta\sin\varphi}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$.

题 7 计算第一型曲面积分

$$I=\iint_S\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

(1) $S: x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$;

(2) S 是不含原点在其内部的光滑闭曲面

(3) S 是含原点在其内部的光滑闭曲面.

题 8 计算曲面积分

$$I=\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 S 为锥面 $x^2+y^2=z^2(0\leqslant z\leqslant h)$ 所示那部分的外侧.

题 9 求积分

$$I=\iint_\Sigma 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(1-z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 Σ 是曲线 $z=\mathrm{e}^y(0\leqslant y\leqslant a)$ 绕 z 轴旋转生成的旋转面，取下侧.

题 10 设 $\vec{\Sigma}$ 为曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 的外表面．计算第二型曲面积分

$$\iint_{\vec{\Sigma}}(x+y-z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+[2y+\sin(z+x)]\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\left(3z+\mathrm{e}^{x+y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

题 11 设 $\vec{\Sigma}$ 为 $1-\frac{z}{7}=\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}(z\geqslant 0)$ 的上侧．证明：第二型曲面积分

$$\iint_{\vec{\Sigma}} \frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}=2\pi$$

题 12 求 $\iint_{\Sigma+} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 是 $x^2+y^2=R^2$ 及 $z=R$ 与 $z=-R$ 所围成的几何体表面。

题 13 求

$$I=\oint_C \left(y^2-z^2\right)\mathrm{d}x+\left(z^2-x^2\right)\mathrm{d}y+\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}z$$

其中 C 是立方体 $\{0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant a,0\leqslant z\leqslant a\}$ 的表面与平面 $x+y+z=\frac{3}{2}a$ 的交线，取向从 z 轴正向看去是逆时针方向。

题 14 计算

$$I=\oint_C \left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x+\left(z^2+x^2\right)\mathrm{d}y+\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}z$$

其中 C 为 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 与 $x^2+y^2=2rx$ 的交线 $(0<r<R,z>0)$, C 的定向使得 C 所包围的球面上较小区域保持在左边。

题 15 设 $\boldsymbol{p}=(x,y,z),p=\|\boldsymbol{p}\|,\boldsymbol{F}=\frac{\boldsymbol{p}}{p^3},\Sigma$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中 C^1 正则（即具有处处非零的连续法向量场）的封闭曲面．证明：

$$\iint_\Sigma \frac{\cos\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{n}_0\right)}{p^2}\mathrm{d}\sigma=\iint_\Sigma \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_0\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}0, & \text{当原点在曲面}\Sigma\text{ 的外部时},\\ 4\pi, & \text{当原点在曲面}\Sigma\text{ 的内部时},\\ 2\pi, & \text{当原点在曲面}\Sigma\text{ 上时},\end{cases}$$

其中 n_0 为方向朝外的连续单位法向量场，$\vec{\Sigma}$ 为相应的定向曲面．

题 16 设 Σ 为包围区域 V 的闭光滑曲面，$F(x,y,z)$ 在区域 V 内直到边界 Σ 上有连续的一阶偏导数，$G(x,y,z)$ 有连续的二阶偏导数，n 是 Σ 的外法线单位向量．证明 Green 第一公式

$$\iiint_V F\Delta G\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_\Sigma F_2\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}S-\iiint_V \operatorname{grad}F\cdot\operatorname{grad}G\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

题 17 设 Σ 为包围区域 V 的闭光滑曲面，$u=u(x,y,z),v=v(x,y,z)$，在 V 内直到边界 Σ 上有连续的二阶偏导数。试证

$$\iint_\Sigma (u\nabla v-v\nabla u)\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\iiint_V \left(u\nabla^2 v-v\nabla^2 u\right)\mathrm{d}V$$

其中 $\vec{n}$ 为单位外法向量。

题 18 证明 Possion 公式

$$I=\iint_S f(ax+by+cz)\mathrm{d}S=2\pi\int_{-1}^1 f\left(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)\mathrm{d}u$$

其中 S 为球面，方程为

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

题 19 设 $f(x)$ 连续，证明普阿松公式

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^\pi f(a\sin\varphi\cos\theta+b\sin\varphi\sin\theta+c\cos\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\\&=2\pi\int_{-1}^1 f(kz)\mathrm{d}z\left(k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)\end{aligned}$$

题 20 设 $f(x)$ 在 $|x| \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2}, (a^2+b^2+c^2 \neq 0)$ 上连续．证明：

$$\iiint_{\Omega} f\left(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{2\pi}{3}\int_{-1}^{1} f\left(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right) \mathrm{d}u$$

其中 Ω 为单位球体 $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$ ．

题 21 设 $f(t)$ 在 $|t| \leqslant 1$ 内连续可导，$f(-1)=f(1)=0, M=\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}\{|f'(t)|\}, S^2(1)$ 是中心在原点半径为 1 的球面．证明：

$$\left|\iint_{S^2(1)} f(mx+ny+pz)\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant 2\pi M,$$

其中 $m^2+n^2+p^2=1, m, n, p$ 为常数．

题 21 (a) 假设 Ω 是以 z 轴作中轴的有界旋转体被 $z=0$ 平面切下的上半部分，Ω 的体积为 V ，边界光滑或分片光滑（记为 S, S^+ 表示外侧），试证：

$$V = \iint_{S^+} x^2yz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z - xy^2z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z(1+xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(b) 设 $f(x,y,z)$ 为 $n(\geqslant 1)$ 次齐次函数：试证：若 f 有连续二阶偏导数，对任意球面 S 有

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S = 0$$

则 $\Delta f = 0$ ．

Chapter 8
参变量函数族和含参变量积分

8.1 参变量函数族

Definition 8.1.1

$x \in \Omega \subset \mathbb{R}^p, t \in \Lambda$ 是参变量，$\Lambda \subset \mathbb{R}^q$（也可以是更抽象的指标集）考虑函数:$\Lambda \times \Omega \to \mathbb{R}^m, (t, x) \mapsto f(t, x)$，将 $\{f(t, \cdot), t \in \Lambda\}$ 视作一族映射，其中 t 是参变量，x 是自变量，通常也记为 $f_t(x)$

我们关心 $t \to t_0 \in \overline{\mathbb{R}^q} = \mathbb{R}^q \cup \{\infty\}$，用邻域来定义 $t \to t_0$，则可统一处理无穷远的情况，称 U 为无穷远的邻域，若 $\exists M > 0, B(0, M)^c \subset U$

8.2 逐点收敛和一致收敛

Definition 8.2.1 逐点收敛

考虑参变量映射族 $\{f_t(x), t \in \Lambda \subset \mathbb{R}^q\}$，设 $t_0 \subset \overline{\mathbb{R}^q}$（或 t_0 是 Λ 在 $\overline{\mathbb{R}^q}$ 中的聚点），我们称 f_t 在 Ω 上逐点收敛，若 $\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in \Lambda}} f_t(x) = f_x \in \mathbb{R}^m$ 存在，也即 $\forall \varepsilon > 0, \exists t_0$ 的邻域 U 使得 $\forall t \in U \cap \Lambda, \|f_t(x) - f_x\| \leq \varepsilon$，此时若定义 $f(x) = f_x, \forall x \in \Omega$，则记 $f_t \to_\Omega f, (t \to t_0, t \in \Lambda)$.

Definition 8.2.2 一致收敛

考虑参变量映射族 $\{f_t(x), t \in \Lambda \subset \mathbb{R}^q\}$，称其在 Ω 上一致收敛于 $f : \Omega \to \mathbb{R}^m, (t \to t_0)$，若

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in \Lambda}} \sup_{x \in \Omega} \|f_t(x) - f(x)\| = 0$$

也即 $\forall \varepsilon > 0, \exists t_0$ 的邻域 U 使得 $\forall t \in U \cap \Lambda, \forall x \in \Omega, \|f_t(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$，此时记为 $f_t \rightrightarrows_\Omega f$.

Remark 8.2.1

$\sup_{x \in \Omega} \|f_t(x) - f(x)\|$ 常记为 $\|f_t - f\|_\infty$，则有 $f_t \rightrightarrows_\Omega f \iff \|f_t - f\|_\infty = 0$.

Proposition 8.2.1

一致收敛蕴含点态收敛.

逐点收敛下保持的性质

(1) 周期性，对称性，凸性 (m=1);

(2) 单调性 (m=p=1);

(3) 若 $f_{t,1} \cdots f_{t,m}$ 逐点收敛，又若 $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ 是连续映射，则 $\varphi(f_{t,1}, \cdots, f_{t,m})$ 逐点收敛.

Example 8.2.1

$f_n(x)=x^n, x\in[0,1]$ 点态收敛，但极限函数 $f(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,1)\\ 1 & x=1\end{cases}$ 不连续

8.3 一致收敛的重要性质

Theorem 8.3.1 一致收敛的 Cauchy 准则

给定 $\{f_t(x)\}_{t\in\Lambda}$ 定义在 $x\in\Omega$ 上，$f_t\rightrightarrows_\Omega f,(t\to t_0,t\in\Lambda) \iff \forall\varepsilon>0,\exists t_0$ 的邻域 U，满足 $\forall t_1,t_2\in U\cap\Lambda,\forall x\in\Omega,\|f_{t_1}(x)-f_{t_2}(x)\|\le\varepsilon$

Proposition 8.3.1

f_t 在 Ω 不一致收敛于 f 当且仅当存在序列 $t_k\to t_0$ 和 $x_0\in\Omega$，使得 $\lim_{k\to\infty}\|f_{t_k}(x_0)-f(x_0)\|\ne 0$，又等价于存在序列 $t_k\to t_0,t'_k\to t_0$ 和 $x_0\in\Omega$，使得 $\lim_{k\to\infty}\|f_{t_k}(x_0)-f_{t'_k}(x_0)\|\ne 0$

Remark 8.3.1

逐点收敛的性质 (3) 改为一致收敛并不成立，考虑 $f_k(x)=(x+\dfrac{1}{2^k})\rightrightarrows_{\mathbb{R}} f(x)=x,\varphi(x)=x^2$；要令命题成立需要加上 φ 的**一致连续性**.

Theorem 8.3.2 极限交换定理

设 $f_t\rightrightarrows_\Omega f,(t\to t_0,t\in\Lambda)$，设 x_0 是 Ω 的聚点，假设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in\Omega}} f_t(x)=a_t\in\mathbb{R}^m$ 存在，$\forall t\in\Lambda$，则 $a=\lim\limits_{\substack{t\to t_0\\t\in\Lambda}} a_k$ 存在，且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in\Omega}} f(x)=a$，换言之，成立

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\x\in\Omega}}\left(\lim_{\substack{t\to t_0\\t\in\Lambda}} f_t(x)\right)=\lim_{\substack{t\to t_0\\t\in\Lambda}}\left(\lim_{\substack{x\to x_0\\x\in\Omega}} f_t(x)\right).$$

Proof: $\forall\varepsilon>0,\exists t_0$ 的邻域 U，满足 $\forall x\in\Omega,\forall t_1,t_2\in U\cap\Lambda,\|f_{t_1}(x)-f_{t_2}(x)\|\le\varepsilon$，此时取 $x\to x_0$，得到 $\forall t_1,t_2\in U\cap\Lambda,\|a_{t_1}-a_{t_2}\|\le\varepsilon$，于是 $\{a_t\}$ 当 $t\to t_0$ 时是 *Cauchy* 列，由 $\mathbb{R}^m$ 的完备性，则 $a=\lim\limits_{\substack{t\to t_0\\t\in\Lambda}} a_k$ 存在，又在 $\|a_{t_1}-a_{t_2}\|\le\varepsilon$ 中令 $t_2\to t_0$，则 $\forall t_1\in U\cap\Lambda,\|a_{t_1}-a\|\le\varepsilon$. 同理，$\|f_{t_1}(x)-f(x)\|\le\varepsilon$，于是

$$\|f(x)-a\|\le\|f(x)-f_{t_1}(x)\|+\|f_{t_1}(x)-a_{t_1}\|+\|a_{t_1}-a\|$$

固定 $t_1\in U\cap\Lambda$，由于 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in\Omega}} f_{t_1}(x)=a_{t_1}$，存在 x_0 的邻域 V 使得 $x\in V\cap\Omega$ 时，$\|f_{t_1}(x)-a_{t_1}\|\le\varepsilon$，也就得到了 $\forall x\in V\cap\Omega$，$\|f(x)-a\|\le 3\varepsilon$，结论成立.

Remark 8.3.2

上述证明对 $x_0=\infty$ 均成立.

Theorem 8.3.3 连续性定理

设 $f_t\in C(\Omega),\forall t\in\Lambda$，又 $f_t\rightrightarrows_\Omega f,(t\to t_0,t\in\Lambda)$，则 $f\in C(\Omega)$.

Proof: 运用极限交换定理，$x_0 \in \Omega, a_t = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} f_t(x) = f_t(x_0)$，进而

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} f(x) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in \Lambda}} a_t = f(x_0)$$

由 x_0 的任意性，则 $f \in C(\Omega)$.

Theorem 8.3.4 可积性定理

设 Ω 是有界允许集，又设 $f_t \in \mathcal{R}(\Omega), \forall t \in \Lambda$，又 $f_t \rightrightarrows_\Omega f, (t \to t_0, t \in \Lambda)$，则 $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ 且

$$\int_\Omega \left(\lim_{\substack{t \to \infty \\ t \in \Lambda}} f_t(x) \right) \mathrm{d}x = \lim_{\substack{t \to \infty \\ t \in \Lambda}} \int_\Omega f_t(x) \mathrm{d}x$$

Proof: 取有界立方体 $Q \supset \Omega, f_t \in \mathcal{R}(\Omega) \iff f_t \mathbb{1}_\Omega \in \mathcal{R}(Q)$，$f_t \mathbb{1}_\Omega \rightrightarrows_Q f \mathbb{1}_\Omega$，则 $\forall \varepsilon > 0, \exists t_1 \in \Lambda, \|f_{t_1} \mathbb{1}_\Omega - f \mathbb{1}_\Omega\|_\infty \le \varepsilon$，存在 Q 的分割 Δ，使得 $\sum_{P \in \Delta} \omega_P(f \mathbb{1}_\Omega) \times \mathrm{Vol}(P) \le \varepsilon$

$$\sum_{P \in \Delta} \omega_P(f \mathbb{1}_\Omega) \times \mathrm{Vol}(P) \le \sum_{P \in \Delta} [\omega_P(f_t \mathbb{1}_\Omega) + 2\varepsilon] \times \mathrm{Vol}(P) \le (1 + 2\,\mathrm{Vol}(Q)) \times \varepsilon$$

由定义，则 $f \mathbb{1}_\Omega$ 在 Q 上 Darboux 可积，也即 $f \in \mathcal{R}(\Omega)$；进一步

$$|\int_\Omega f_t \mathrm{d}x - \int_\Omega f \mathrm{d}x| \le \int_\Omega |f_t - f| \mathrm{d}x \le \|f_t - f\|_\infty \times \mathrm{Vol}(\Omega)$$

取 $t \to t_0, t \in \Lambda$ 即得结论.

Theorem 8.3.5 C^1 可微性定理

设 Ω 是连通开集，$f_t \in C^1(\Omega), \forall t \in \Lambda$，且 $f_t(x_0)$ 收敛于 $f(x_0), x_0 \in \Omega$，又 $\nabla f_t \rightrightarrows_\Omega g, (t \to t_0, t \in \Lambda)$，则 f_t 在 Ω 上内闭一致收敛，记其极限为 f，则 $f \in C^1(\Omega)$ 且 $\nabla f = g$ 在 Ω 上成立，也即

$$\nabla \left(\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in \Lambda}} f_t \right) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in \Lambda}} \nabla f_t$$

Proof: 设 $\overline{B(x_0, r)} \subset \Omega, r > 0$，由增量公式

$$f_t(x) = f_t(x_0) + \int_0^1 \nabla f_t(\theta x + (1-\theta) x_0) \cdot (x - x_0) \mathrm{d}x$$

由假设于可积性定理，则 f_t 在 $\overline{B(x_0, r)}$ 上一致收敛，且极限 f 满足

$$f(x) = f(x_0) + \int_0^1 g(\theta x + (1-\theta) x_0)(x - x_0) \mathrm{d}x$$

于是 f 在 $B(x_0, r)$ 上是 C^1 的，结论成立，进而可以利用折线进行逼近最后达到整个区域；内闭一致收敛由有限覆盖定理推出，这是因为 $f_k \to_\Omega f$.

- 前述结论在**内闭一致收敛**下成立;
- 内闭一致收敛是上述结论成立的**充分非必要**条件;
- 用归纳法可证明 C^m 可微性定理.
  $\{f_t, t \in \Lambda\}$ 是连通开集 Ω 上的 C^m 映射族，设 $\exists x_0 \in \Omega$ 使得 $\mathrm{d}^l f(x_0)$ 收敛，$\forall 0 \le l \le m-1$，设 $\mathrm{d}^m f_t(x_0)$ 在 Ω 上内闭一致收敛，则 $\forall 0 \le l \le m$，$\mathrm{d}^l f_t$ 在 Ω 上内闭一致收敛，记 $f = \lim\limits_{t \to t_0} f_t$，则 $f \in C^m(\Omega)$，且 $\mathrm{d}^l f_t$ 在 Ω 上内闭一致收敛于 $\mathrm{d}^l f$
- 一些特殊的收敛性定理

Theorem 8.3.6 Dini 定理

设 $f_t \in C(\Omega), t \in I = [a,b] \subset \mathbb{R}$，设 f_t 关于 t 单调，比如 $f_{t_1} \le f_{t_2}$ 若 $t_1 \le t_2$，又设 $f_t \to_\Omega f, (t \to b)$，且 $f \in C(\Omega)$，则 f_t 在 Ω 上内闭一致收敛于 f.

Proof: 不妨设 f_t 关于 t 单调不减，则 $f \ge f_t, \forall t \in [a,b]$，取 K 是 Ω 中紧集，$\forall \varepsilon > 0$，令 $F_t = \{x \in K, f(x) - f_t(x) \ge \varepsilon\}$，显然有 $t_1 \le t_2$ 时，$F_{t_1} \subset F_{t_2}$，则 F_t 构成紧集套，且 $\bigcap_{t\in I} F_t = \varnothing$，由紧集套定理，$\exists t_1 \in I$，使得 $F_{t_1} = \varnothing$，故 $\|f - f_{t_1}\|_\infty \le \varepsilon$，进而结论成立.

Theorem 8.3.7 $\mathbb{R}$ 上的 Dini 定理

设 $\Omega = I$(区间) $\subset \mathbb{R}, f_t \in C(I)$ 且关于 x 单调，$t \in J = [a,b] \subset \mathbb{R}$，又设 $f_t \to_I f \in C(I), (t \to b)$，则 f_t 在 I 上内闭一致收敛于 $f, (t \to b)$.

证明从略.

8.4 含参变量的（正常）积分

Definition 8.4.1 含参变量积分

设 K 是紧的允许集，设 $\Lambda \subset \mathbb{R}^q$ 中的开或闭域，给定函数族 $f : \Lambda \times K \to \mathbb{R}$，记 $F(t) = \displaystyle\int_K f(t,x)\mathrm{d}x$ 是由 f_t 定义的积分，设 $f_t \in \mathcal{R}(K), \forall t \in \Lambda$，得到 Λ 上的函数 F，称 F 为**含参变量积分**.

我们希望了解 F 的性质:

Theorem 8.4.1 连续性定理

设 $f \in C(\Lambda \times K)$，则 $F \in C(\Lambda)$.

Proof: 因 $F(t) = \displaystyle\int_K f(t,x)\mathrm{d}x$，当 $t \to t_0 \in \Lambda$ 时，由于 f 在紧集上的一致连续性，$f_t \rightrightarrows_K f_{t_0}$，则 $\lim\limits_{t \to t_0} F(t) = F(t_0)$

Theorem 8.4.2 可积性定理

设 $f \in C(\overline{\Lambda} \times K)$，又设 A 是 Λ 中的紧允许集，则

$$\int_A F(t)\mathrm{d}t = \int_K \left(\int_A f(t,x)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

Proof: 由 $Fubini$ 定理，直接可得：

$$\int_A F(t)\mathrm{d}t = \int_{A\times K} f(t,x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x = \int_K \left(\int_A f(t,x)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

Theorem 8.4.3 C^1 可微性定理

不妨设 Λ 是开集，$f \in C(\Lambda \times K), \dfrac{\partial f}{\partial t} \in C(\Lambda \times K)$，则 $F \in C^1(\Lambda)$，且

$$\nabla F(t) = \int_K \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}x$$

Proof: 设 $t_0 \in \Lambda$，考虑

$$F(t_0+\lambda e_i) - F(t_0) = \int_K \frac{f(t_0+\lambda e_i, x) - f(t_0,x)}{\lambda}\mathrm{d}x = \int_K \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t_i}(t_0 + s\lambda e_i, x)\mathrm{d}s\mathrm{d}x$$

由题设连续性，令 $\lambda \to 0$，右式：

$$\int_K \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t_i}(t_0,x)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x = \int_K \frac{\partial f}{\partial t_i}(t_0,x)\mathrm{d}x$$

进一步可以得到

$$\nabla F(t) = \int_K \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\mathrm{d}x$$

再由假设，$\nabla F \in C(\Lambda) \Rightarrow F \in C^1(\Lambda)$

Theorem 8.4.4 C^m 可微性定理

若 K 是紧的允许集，若 $f \in C^m(\Lambda \times K)$（此处 m 可取 ∞），则 $F \in C^m(\Lambda)$，且

$$\partial^\alpha F(t) = \int_K \frac{\partial f}{\partial t^\alpha}\mathrm{d}x, \forall |\alpha| \le m$$

Corollary 8.4.1

设 $\Omega = J(\text{区间}) \subset \mathbb{R}$，令 $G(t,u,v) = \displaystyle\int_u^v f(t,x)\mathrm{d}x$，若 $f \in C(\Lambda \times J)$，则 $G \in C(\Lambda \times J \times J)$；若 $f \in C^1(\Lambda \times J)$，则 $C \in C^1(\Lambda \times J \times J)$，且成立

- $\dfrac{\partial G}{\partial u}(t,u,v) = -f(t,u), \dfrac{\partial G}{\partial v}(t,u,v) = f(t,v)$;
- $\dfrac{\partial G}{\partial t}(t,u,v) = \displaystyle\int_u^v \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\mathrm{d}x$

进一步，可得到如下推论：

Corollary 8.4.2

若 $f\in C^m(\Lambda\times J),\alpha,\beta\in C^m(J)$，则

$$\widetilde{F}(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(t,x)\mathrm{d}x\in C^m(\Lambda)$$

Proof: $\widetilde{F}(t)=G(t,\alpha(t),\beta(t))\in C^m(\Lambda)$

类似一元变限积分求导，我们有如下公式:

$$\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial t_i}=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,x)\mathrm{d}x-f(t,\alpha(t))\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial t_i}+f(t,\beta(t))\cdot\frac{\partial\beta}{\partial t_i}$$

Example 8.4.1 Gauss 积分

计算 $G_0=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$

Sol: 令 $F(x)=\left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2,G(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$

- 证明 $F,G\in C^\infty(G)$
  考虑 $H(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\in C^\infty,F=H^2\in C^\infty$，再考虑 $K(x,t)=\dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2},I=[0,1]$，则 $G(x)=\displaystyle\int_I K(x,t)\mathrm{d}t\in C^\infty$
- 证明 $F'+G'=0,\forall x\in\mathbb{R}$
  由含参变量积分的可微性定理:
  $$F'(t)=2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$$
  另一方面，有
  $$G'(x)=\int_0^1\frac{\partial K}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t=\int_0^1(-2x)e^{-x^2(1+t^2)}\mathrm{d}t=-2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\mathrm{d}t=-2e^x\int_0^x e^{-s^2}\mathrm{d}s$$
  最后一步用到换元 $s=xt$，于是得到 $F(x)+G(x)=C_0,\forall x\in\mathbb{R}$
- 考虑 0 处取值，有 $C_0=\dfrac{\pi}{4}$
  又有 $G_0=\lim\limits_{x\to\infty}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$，于是 $\lim\limits_{x\to\infty}F=G_0^2$，同时由于 $0\le G\le e^{-x^2}$，故 $\lim\limits_{x\to\infty}G(x)=0$，进而 $G_0^2=\dfrac{\pi}{4}$，也就得到 $G_0=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Example 8.4.2

记 $H(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos^2t+x^2\sin^2t)\mathrm{d}t,\forall x\in\mathbb{R}$

- 证明 $H\in C^\infty(\mathbb{R}^+)$;
- 计算 $H'(x),H'(0)$;
- 求出 H 的解析表达式.

Sol: 记 $f(x,t)=\ln(\cos^2t+x^2\sin^2t)\in C^\infty((\mathbb{R}\backslash\{0\})\times\mathbb{R}),I=[0,\dfrac{\pi}{2}]$

- $H(x)=\int_I f(x,t)\mathrm{d}t\in C^\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\})$;
- $H'(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2x\sin^2 t}{\cos^2 t+x^2\sin^2 t}\mathrm{d}t=2x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{x^2+\cot^2 t}=\frac{\pi}{1+x}$;
- 注意到 $H(1)=0$, 积分得到 $H(x)=\int_1^x H'(t)\mathrm{d}t+H(1)=\pi\ln\frac{1+x}{2}$

8.5 含参变量的广义（反常）积分

给定 $f:\Omega\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$，或者 Ω 无界，或者 $f\notin C(\overline{\Omega})$，则 $\int_\Omega f(x)\mathrm{d}x$ 需要更**谨慎**的定义，本节中主要考虑一维的情况，即 $p=1,\Omega=J=(a,b]$ 或 $[a,b)$，其中开区间端点为奇点；本节中**内闭一致收敛**的判定在下一节中.

Definition 8.5.1

假设 $\{f_t,t\in\Lambda\}$ 满足 $\forall t,f_t\in\mathcal{R}_{loc}(J)$，即 $\forall K\subset\subset J,f_t\in\mathcal{R}(K)$，我们称 f_t 在 J 上**广义可积**，若存在极限 $\lim\limits_{\substack{u\to a\\u\in J}}\int_u^b f_t(x)\mathrm{d}x$，记为 $\int_a^b f_t(x)\mathrm{d}x$.

Example 8.5.1

$\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x,\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

若 $\forall t\in\Lambda,f_t$ 在 J 上广义可积，定义 $F(t)=\int_a^b f_t(x)\mathrm{d}x$，我们关心 F 的性质

Definition 8.5.2 广义积分的一致收敛

设 $\{f_t,t\in\Lambda\subset\mathbb{R}^q\}$ 是函数族，满足 $\forall t\in\Lambda,f_t$ 在 J 上广义可积，定义

$$L_u(t)=\int_u^b f_t(x)\mathrm{d}x=\int_u^b f(t,x)\mathrm{d}x,\forall t\in\Lambda,u\in J$$

我们称广义积分 $\int_J f_t(x)\mathrm{d}x$ 在 Λ 上一致收敛，若 $J\ni u\to a$ 时：

$$L_u(t)\rightrightarrows_\Lambda F(t)=\int_a^b f_t(x)\mathrm{d}x$$

Remark 8.5.1

在广义积分的一致收敛中，t 成为自变量.

Theorem 8.5.1 连续性定理

设 $f\in C(\Lambda\times J)$，又设广义积分 $f(t)=\int_J f(t,x)\mathrm{d}x$ 在 Λ 上一致收敛，则 $F\in C(\Lambda)$

Proof: 由 $f\in C(\Lambda\times J)$ 和含参变量（正常）积分的连续性，$\forall u\in J,L_u(t)\in C(\Lambda)$，又 $L_u(t)\rightrightarrows_K F(t),\forall K\subset\subset\Lambda$，则 $F\in C(K)$

其余可积性定理可微性定理均与上节类似.

Theorem 8.5.2 可积性定理

设 $f \in C(\Lambda \times J)$，又设积分 $F(t) = \int_J f(t,x)\mathrm{d}x$ 在 Λ 上内闭一致收敛，则 $\forall K \subset \Lambda$ 是紧的允许集，则

$$\int_K F(t)\mathrm{d}t = \int_J \left(\int_K f(t,x)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x$$

暗指 $\displaystyle\int_K f(t,x)\mathrm{d}t$ 在 J 上广义可积.

Proof: 由 Fubini 定理：

$$\int_K L_u(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\int_K f(t,x)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x \tag{8.1}$$

由假设 $L_u(t) \rightrightarrows_K F(t), (J \ni u \to a)$

$$\lim_{J \ni u \to a} \int_K L_u(t)\mathrm{d}t = \int_K F(t)\mathrm{d}t$$

从而 (8.1) 右式当 $J \ni u \to a$ 时极限存在，也即 $\int_K f(t,x)\mathrm{d}t$ 在 J 上广义可积，且

$$\int_J \left(\int_K f(t,x)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = \int_K F(t)\mathrm{d}t$$

Theorem 8.5.3 C^m 可微性定理

设 $f: \Lambda \times J \to \mathbb{R}$ 满足 $\partial^\alpha f \in C(\Lambda \times J), \forall |\alpha| \le m$，又设 $\forall t \in \Lambda, |\alpha| \le m$ 成立

$$F_\alpha(t) = \int_J \frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha}(t,x)\mathrm{d}x$$

且当 $|\alpha| = m, F_\alpha$ 在 Λ 上内闭一致收敛，则

$$F(t) = \int_J f(t,x)\mathrm{d}x \in C^m(\Lambda)$$

且 $F_\alpha = \partial^\alpha F, \forall |\alpha| \le m$.

Example 8.5.2 Gamma 函数

$\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$，且 $\Gamma^{(k)}(x) = \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}\mathrm{d}t, \forall k \in \mathbb{N}, x > 0$

Proof: 此处 $x \in \Lambda = \mathbb{R}^+ = (0,\infty) = J \ni t$

取函数 $H(x,t) \in C^\infty(\Lambda \times J)$

$$\Rightarrow \frac{\partial^k H}{\partial x^k} = t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}, \forall k \in \mathbb{N}, (x,t) \in \Lambda \times J$$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}\mathrm{d}t$ 在 Λ 上内闭一致收敛（见 ex 8.6.1），$\forall k \in \mathbb{N}$

由可微性定理，$\Gamma \in C^\infty(\Lambda)$ 且 $\Gamma^{(k)}(x) = \displaystyle\int_J \frac{\partial^k H}{\partial x^k}(x,t)\mathrm{d}t$

8.6 含参变量广义积分的内闭一致收敛判定

$$L_u(t) = \int_u^b f(t,x)\mathrm{d}x \rightrightarrows_K F(t) = \int_a^b f(t,x)\mathrm{d}x$$

F 在 $K \subset\subset \Lambda$ 上一致收敛的常规判定：

- **余项判定**：$\forall \varepsilon > 0, \exists a$ 的邻域 $\mathscr{V}$ 使得 $\forall u \in (\mathscr{V} \backslash \{a\}) \cap J$
$$|\int_a^u f(t,x)\mathrm{d}x| \le \varepsilon, \forall t \in K$$
- **Cauchy 判定**：$\forall \varepsilon > 0, \exists a$ 的邻域 $\mathscr{V}$，使得 $\forall u, v \in (\mathscr{V} \backslash \{a\}) \cap J$,
$$|\int_v^u f(t,x)\mathrm{d}x| \le \varepsilon$$
- **序列判定**：任取序列 $\{u_k\} \subset J$，满足 $\lim_{k\to\infty} u_k = a$，则
$$L_{u_k}(t) = \int_{u_k}^b f(t,x)\mathrm{d}t \rightrightarrows_K F(t)$$
- **级数判定**：任取**单调**序列 $\{u_i\} \subset J$，满足 $\lim_{k\to\infty} u_k = a$，则
$$G_i(t) = \int_{u_{i+1}}^{u_i} f(t,x)\mathrm{d}x$$
成立 $\sum_i G_i(t)$ 在 K 上一致收敛.

一些特殊判定：考虑 $f : \Lambda \times J \to \mathbb{R}, \Lambda \subset \mathbb{R}^q$

- **Weierstrass 判定**：设 f 满足 $\forall t \in \Lambda, f_t \in \mathcal{R}_{loc}(J)$，且存在 $\varphi(x)$ 满足
  - $|f(t,x)| \le \varphi(x), \forall (t,x) \in \Lambda \times J$
  - $\int_J \varphi(x)\mathrm{d}x \le \infty$

  则 F 在 Λ 上一致收敛.

Proof: 若 u 在 a 的某个邻域中，成立
$$\left|\int_a^u f(t,x)\right| \le \int_a^u \varphi(x)\mathrm{d}x \le \varepsilon$$

Example 8.6.1
$\int_0^\infty t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}\mathrm{d}t$ 在 Λ 上内闭一致收敛，$\forall k \in \mathbb{N}$

Proof: 考虑 $x \in K = [A,B] \subset (0,\infty)$，则当 $t \in [0,1]$ 时，
$$\left|t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}\right| \le t^{A-1}|\ln t|^k e^{-t} := \varphi_1(t)$$
显然 $\int_0^1 \varphi_1(t)\mathrm{d}t < \infty$，又当 $t \in [1,\infty)$ 时
$$\left|t^{x-1}(\ln t)^k e^{-t}\right| \le t^{B-1}|\ln t|^k e^{-t} := \varphi_2(t)$$
$\int_1^\infty \varphi_2(t)\mathrm{d}t < \infty$ 也成立. 由 Weierstrass 判定知在 $(0,\infty)$ 内闭一致收敛.

- **Dini 判定**：设 f 满足 f_t 在 J 上广义可积，且 $f(t,x)>0,\forall(t,x)\in\Lambda\times J$，若

$$F(t)=\int_J f(t,x)\mathrm{d}x\in C(\Lambda)$$

  则在 Λ 上内闭一致收敛;

- **Dirichlet 判定**：给定 $F(t)=\displaystyle\int_J f(t,x)g(t,x)\mathrm{d}x$
  - 设 $\forall t\in\Lambda, f(t,x)$ 关于 x 单调
  - 设 $f_t\rightrightarrows_\Lambda 0,\Lambda\ni x\to a$
  - 记 $G(t,u)=\displaystyle\int_u^b g(t,x)\mathrm{d}x$ 满足 $\exists M\geq 0,|G(t,u)|\leq M,\forall(t,u)\in\Lambda\times J$（即一致有界）

Proof: 利用第二中值定理，$\forall u,v\in J,\exists\xi$ 在 u,v 之间，使得

$$\int_u^v f_tg_t\mathrm{d}x=f_t(u)\int_u^\xi g_t\mathrm{d}x+f_t(v)\int_\xi^v g_t\mathrm{d}x$$

由于单调性

$$\left|\int_u^v f_tg_t\mathrm{d}x\right|=|f_t(u)|\left|\int_u^\xi g_t\mathrm{d}x\right|+|f_t(v)|\left|\int_\xi^v g_t\mathrm{d}x\right|$$

$\forall\varepsilon>0,\exists a$ 的邻域 $\mathscr{V}$，使得 $\forall u,v\in(\mathscr{V}\backslash\{a\})\cap J,\forall t\in\Lambda$，成立 $|f_t(u)|,|f_t(v)|\leq\varepsilon$，同时成立

$$\left|\int_u^\xi g_t\mathrm{d}x\right|\leq|G(t,u)-G(t,\xi)|\leq 2M,|\int_\xi^v g_t\mathrm{d}x|\leq 2M$$

于是成立 $\left|\displaystyle\int_u^v f_tg_t\mathrm{d}x\right|\leq 4M\varepsilon$，由 Cauchy 准则，$F$ 在 Λ 上一致收敛. ✡

- **Abel 判定**：给定 $F(t)=\displaystyle\int_J f(t,x)g(t,x)\mathrm{d}x$
  - 设 $\forall t\in\Lambda, f(t,x)$ 关于 x 单调;
  - $\exists M>0$, 使得 $|f(t,x)|\leq M,\forall(t,x)\in\Lambda\times J$;
  - 设积分 $G(t)=\displaystyle\int_J g(t,x)\mathrm{d}x$ 在 Λ 上一致收敛.

  则 F 在 Λ 上一致收敛

Proof: 利用第二中值定理，$\forall u,v\in J,\exists\xi$ 在 u,v 之间，使得

$$\int_u^v f_tg_t\mathrm{d}x=f_t(u)\int_u^\xi g_t\mathrm{d}x+f_t(v)\int_\xi^v g_t\mathrm{d}x$$

$\forall\varepsilon>0,\exists a$ 的邻域 $\mathscr{V}$ 使得 $\forall u,v\in\mathscr{V}\backslash\{a\}$，$|\displaystyle\int_u^v g_t\mathrm{d}x|\leq\varepsilon$，于是 $\forall t\in\Lambda$，

$$\int_u^v f_tg_t\mathrm{d}x\leq M\varepsilon+M\varepsilon=2M\varepsilon$$

由 Cauchy 准则，F 在 Λ 上一致收敛. ✡

Example 8.6.2

取 $J=[b,\infty)$，由 Abel 判定知，若 $g(x)$ 在 J 上广义可积，则

$$F(t)=\int_b^{\infty} e^{-xt}g(x)\mathrm{d}x$$

在 $\mathbb{R}_+$ 上一致收敛，且 $F\in C(\mathbb{R}_+)$，若 $b\geq 0$，则 $\lim_{t\to\infty}F(t)=0$

Example 8.6.3 Dirichlet 积分
$I=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

- Dirichlet 积分收敛（0 点可连续延拓，无穷限由 Dirichlet 判定给出）；
- 令 $H(x,t)=e^{-xt}\frac{\sin x}{x}$，则 $F(t)=\int_0^{\infty}H(x,t)\mathrm{d}x\in C(\mathbb{R}_+)$，且满足 $\lim_{t\to\infty}F(t)=0$（由 Abel 判定）
- $F\in C^1(\mathbb{R}_+)$ 且
$$F'(t)=\int_0^{\infty}\frac{\partial H}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}-e^{-xt}\sin x\mathrm{d}x=-\frac{1}{1+t^2}$$
考虑 $F(\infty)=0$，又因为 $F\in C(\mathbb{R}_+)$ 有如下等式
$$I=\lim_{t\to 0^+}F(t)=F(\infty)-\lim_{t\to 0^+}\int_t^{\infty}F'(t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$$

下面我们给出 $F\in C^1(\mathbb{R}_+)$ 的证明：

Proof:
- $F(t)=\int_0^{\infty}H(x,t)\mathrm{d}x$ 在 $t\in(0,\infty)$ 一致收敛
- $\int_0^{\infty}\frac{\partial H}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}-e^{-xt}\sin x\mathrm{d}x$ 在 $t\in(0,\infty)$ 上内闭一致收敛：

方法 1： Weierstrass 判定，考虑 $|\frac{\partial H}{\partial t}|\leq e^{-xt}\leq e^{-cx}$，若 $t\geq c, x\in\mathbb{R}_+$;

方法 2： Dirichlet 判定，考虑
$$\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x$$
而 e^{-xt} 在 $(0,\infty)$ 上一致收敛于 0，且关于 x 单调;

方法 3： 利用 $e^{-xt}\sin x\mathrm{d}x$ 的原函数

由 C^1 可微性定理 (Thm 8.5.3)，成立 $F\in C^1([c,\infty]),\forall c>0$ 且 $F'(t)=\int_0^{\infty}\frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}x.$

Example 8.6.4 Laplace 积分
$L(\beta)=\int_0^{\infty}\frac{\cos(\beta x)}{1+x^2}\mathrm{d}x.$

- L 在 $\mathbb{R}$ 上恰当定义，是偶函数且 $L(0)=\frac{\pi}{2}$;
- $L\in C(\mathbb{R})$; 令 $H(x,\beta)=\frac{\cos(\beta x)}{1+x^2}\in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$，成立 $|H(x,\beta)|\leq\frac{1}{1+x^2}$，于是 L 收敛
- $L'(\beta)=\int_0^{\infty}\frac{\partial H}{\partial\beta}(x,\beta)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}-\frac{x\sin\beta x}{1+x^2}\mathrm{d}x$
由 Dirichlet 判定得到 $\int_0^{\infty}\frac{\partial H}{\partial\beta}(x,\beta)\mathrm{d}x$ 在 $[c,\infty),\forall c>0$ 上一致收敛，又 $\int_0^{\infty}H(\beta,y)\mathrm{d}x$ 运用 C^1 可微性定理，在 $[c,\infty)$ 上等式成立.

- 考虑二阶导 $\int_0^\infty -\frac{x^2\cos(\beta x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$，但它与 $L''(\beta)$ 的关系完全不显然;
  注意到 $\frac{x\sin(\beta x)}{1+x^2}\sim\frac{\sin(\beta x)}{x}, x\to\infty$，作估计

$$\widetilde{H}(x,\beta):=-\frac{x\sin(\beta x)}{1+x^2}+\frac{\sin(\beta x)}{x}=\frac{\sin(\beta x)}{x(1+x^2)}$$

容易得到等式

$$L'(\beta)+\int_0^\infty\frac{\sin(\beta x)}{x}\mathrm{d}x=\int_0^\infty\frac{\sin(\beta x)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x:=G(\beta)$$

又因为 $|\sin(\beta x)|\le\beta|x|$，于是 $G(\beta)$ 在 $[0\ \infty)$ 上内闭一致收敛；又有 $\int_0^\infty\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial\beta}\mathrm{d}x=\int_0^\infty\frac{\cos(\beta x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 一致收敛，由 C^1 可微性定理，得到二阶常微分方程

$$L''(\beta)=G'(\beta)=L(\beta)$$

其通解为 $L(\beta)=Ae^{\beta}+Be^{-\beta}$，又有初值条件

$$\begin{cases}L(0)=A+B=\frac{\pi}{2}\\ L'(0)=A-B=-\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

容易得到 $A=0,B=\frac{\pi}{2}$ 于是 $\forall\beta\ge0, L(\beta)=\frac{\pi}{2}e^{-\beta}$，可延拓到 $\beta\in\mathbb{R}$ 上，有 $L(\beta)=\frac{\pi}{2}e^{-|\beta|}$

下题留作练习

Example 8.6.5

给定：$\varphi(a)=\int_0^\infty\frac{e^{-ax^2}-1}{x^2}\mathrm{d}x$，求 φ 的显式表达 (a>0).

8.7 二重广义积分的 Fubini 定理

Theorem 8.7.1

设 $f\in\mathcal{R}_{loc}(\mathbb{R}^2_+)$ 满足

- $\int_0^\infty f(x,y)\mathrm{d}y$ 关于 $x\in\mathbb{R}_+$ 内闭一致收敛; $\int_0^\infty f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 $y\in\mathbb{R}_+$ 内闭一致收敛;
- $\int_0^\infty\int_0^\infty|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty$ 或 $\int_0^\infty\int_0^\infty|f(x,y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}x<\infty$

则有 $\int_0^\infty\int_0^\infty|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\int_0^\infty\int_0^\infty|f(x,y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ 均存在，且二者相等.

Proof: 不妨设 $\int_0^\infty\int_0^\infty|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty$，令 $H(y)=\int_0^\infty f(x,y)\mathrm{d}x,\widetilde{H}(y)=\int_0^\infty|f(x,y)|\mathrm{d}x$，则有 $|H(y)|\le\widetilde{H}(y)$，且 $J=\int_0^\infty H(y)\mathrm{d}y$ 收敛，考虑

$$\begin{aligned}\int_0^A\int_0^\infty f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x-J&=\int_0^\infty\left(\int_0^A f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y-J=-\int_0^\infty\left(\int_A^\infty f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\&=(\int_0^B+\int_B^\infty)\left(\int_A^\infty f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y:=R_1+R_2\end{aligned}$$

我们有

$$|R_2| \le \int_0^\infty \left(\int_A^\infty |f(x,y)|\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \le \int_0^\infty \widetilde{H}(y)\mathrm{d}y$$

于是 $\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0$ 使得 $\displaystyle\int_B^\infty \widetilde{H}(y)\mathrm{d}y \le \varepsilon \Rightarrow |R_2| \le \varepsilon$

固定 B，考虑 R_1，因为 $\displaystyle\int_0^\infty f(x,y)$ 在 $[0,B]$ 上一致收敛，存在 A_0 充分大，使得 $\forall y \in [0,B], A \ge A_0, |\displaystyle\int_A^\infty f(x,y)| \le \frac{\varepsilon}{B} \Rightarrow |R_1| \le \int_0^B \frac{\varepsilon}{B}\mathrm{d}y = \varepsilon$

结论：$\forall A \ge A_0, |R_1 + R_2| \le 2\varepsilon$，也即

$$\lim_{A \to +\infty} \int_0^A \left(\int_0^\infty f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = J$$

Corollary 8.7.1

设 $f \in \mathcal{R}_{loc}(\mathbb{R}_+^2)$ 且 $f \ge 0$，又设

$$\int_0^\infty f(x,y)\mathrm{d}x = \varphi(y), \int_0^\infty f(x,y)\mathrm{d}y = \psi(x)$$

满足 $\varphi, \psi \in C(\mathbb{R}_+)$，则成立

$$\int_0^\infty \varphi(y)\mathrm{d}y = \int_0^\infty \psi(x)\mathrm{d}x$$

Proof: 由 Dini 定理，$\displaystyle\int_0^\infty f(x,y)\mathrm{d}y$ 和 $\displaystyle\int_0^\infty f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上内闭一致收敛，从而或者两积分发散至 $+\infty$，或者其中一者有限，进而两者相等.

Example 8.7.1 Gauss 积分

$G = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$

Sol: 令 $x = ut$，则原积分化为 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-u^2t^2}u\mathrm{d}t$，于是有

$$G^2 = \int_0^\infty e^{-u^2t^2}u\mathrm{d}t \int_0^\infty e^{-u^2}\mathrm{d}u = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u^2(t^2+1)}u\mathrm{d}u\mathrm{d}t$$

令 $f(u,t) = e^{-u^2(t^2+1)}u$

- $f \ge 0$ 显然;
- $\displaystyle\int_0^\infty f(u,t)\mathrm{d}t = \left(\int_0^\infty e^{-u^2t^2}\mathrm{d}t \right) e^{u^2} = Ge^{u^2} \in C(\mathbb{R}_+)$;
- $\displaystyle\int_0^\infty f(u,t)\mathrm{d}u = \int_0^\infty ue^{-u^2(t^2+1)}\mathrm{d}u = \left[\frac{-e^{-u^2(t^2+1)}}{2(t^2+1)} \right]_0^\infty = \frac{1}{2(t^2+1)} \in C(\mathbb{R}_+)$

由二重广义积分的 Fubini 定理：

$$G^2 = \int_0^\infty Ge^{-u^2}\mathrm{d}u = \int_0^\infty \frac{1}{2(t^2+1)\mathrm{d}t} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow G = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Remark 8.7.1

含参变量（广义）积分在积分计算中用处广泛，并且定义了许多特殊函数，比如 Gamma 函数，Beta 函数.

8.8 积分变换

Definition 8.8.1 Laplace 变换

给定 $f \in \mathcal{R}_{loc}(\mathbb{R}_+)$，其拉氏变换定义为：(若积分收敛)

$$\mathscr{L}_f(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\mathrm{d}t$$

- $\displaystyle\int_0^{\infty} |f(t)|\mathrm{d}t < \infty$(即 $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$)，用 Abel 判定知 $\mathscr{L}_p \in C(\mathbb{R}_+)$，并且 $\lim\limits_{p\to\infty} \mathscr{L}_f(p) = 0$
- 由归纳法易得 $\mathscr{L}_p \in C^{\infty}(\mathbb{R}_+)$，即 $\mathscr{L}_p$ 有很好的光滑性，并且
$$\mathscr{L}_f^{(k)}(p) = \int_0^{\infty} (-t)^k e^{-pt} f(t)\mathrm{d}t, \forall k \in \mathbb{N}, p > 0$$
- 扩大 Lapace 变换的定义范围：$CP(x) := \{f \in C(\mathbb{R}_+), \exists c, m > 0, s.t. |f(t)| \leq C(1+t)^m, \forall t > 0\}$，容易得到 $CP(x)$ 是一个线性空间，并且 $\mathbb{R}[x] \subset CP(x)$，运用 Weierstrass 判定知拉氏变换公式依旧成立，并且保有光滑性；
- $CE_{\alpha}(x) = \{f \in C(\mathbb{R}_+), \exists c > 0, s.t. |f(t)| \leq ce^{\alpha t}, \forall t > 0\}$，则 $CE_{\alpha}(x)$ 也是一个线性空间，并且 $\mathscr{L}_f(p)$ 在 (α, ∞) 上恰当定义，也保有光滑性.

Theorem 8.8.1

$\mathscr{L}_f(p)$ 在 $CP(x)$ 上是一个线性单射.

$\mathscr{L}_f : CP(x) \to C^{\infty}(\mathbb{R}_+)$ 是线性映射，设 $\mathscr{L}_f \equiv 0$，即 $\mathscr{L}_f(p) = 0, \forall p > 0$，定义

$$g(t) = \int_0^t f(s)e^{-s}\mathrm{d}s \in CP(x)$$

满足 $g(0) = 0, \lim\limits_{t\to\infty} g(t) = \displaystyle\int_0^{\infty} f(s)e^{-s}\mathrm{d}s = \mathscr{L}_f(1) = 0$，考虑 $\varphi(x) = g(-\ln x) \in C([0,1])$，只需证明 $\varphi \equiv 0$，用到如下定理以及推论.

Theorem 8.8.2 Weierstrass 定理

$\forall \varphi \in C([0,1]), \exists$ 一列多项式 $P_k(x)$，使得 P_k 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 φ.

进而有推论

Corollary 8.8.1

$$\forall \varphi \in C([0,1]), \varphi \equiv 0 \iff \forall k \in \mathbb{N}, \int_0^1 x^k \varphi(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Proof: $(\Rightarrow)$ 平凡

$(\Leftarrow)$ $\forall P \in \mathbb{R}[x], \displaystyle\int_0^1 P(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$，取 $P_k \in \mathbb{R}[x]$ 使得 $P_k \rightrightarrows_{[0,1]} \varphi$，则 $P_k\varphi \rightrightarrows \varphi^2$，又有

$$\int_0^1 P_k(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$$

令 $k \to \infty$ 则有 $\int_0^1 \varphi^2(x)\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \varphi^2 \equiv 0 \Rightarrow \varphi \equiv 0$

下面回到定理证明

Proof: 只需证 $\forall k\in\mathbb{N},\int_0^1 x^k\varphi(x)\mathrm{d}x=0$，做换元 $x=e^{-t}$，

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^k g(-\ln x)\mathrm{d}x&=\int_0^\infty e^{-(k+1)t}g(t)\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{k+1}e^{-(k+1)t}g\right]_0^\infty+\int_0^\infty\frac{e^{-(k+1)t}}{k+1}g'(t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^\infty\frac{1}{k+1}f(t)e^{-(k+2)t}\mathrm{d}t=\frac{1}{k+1}\mathscr{L}_f(k+2)=0,\forall k\geq 0\end{aligned}$$

进而在 $[0,1]$ 上 $\varphi\equiv 0\Rightarrow g\equiv 0\Rightarrow f\equiv 0$，即 $\mathscr{L}_p$ 是单射.

Example 8.8.1

利用拉氏变换解常微分方程 $f''-f=0,f(0)=A,f'(0)=B$

我们有 $\mathscr{L}_{f''-f}(p)=0\Rightarrow\mathscr{L}_{f''}-\mathscr{L}_f=0$，考虑

$$\mathscr{L}_{f'}(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f'(t)\mathrm{d}t=\left[e^{-pt}f\right]_0^\infty-\int_0^\infty(-p)e^{-pt}f(t)\mathrm{d}t=-f(0^+)+p\mathscr{L}_f(p)$$

于是有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{f''}&=-f'(0^+)+p\mathscr{L}_{f'}(p)\\&=-f'(0^+)+p\left(f(0^+)+p\mathscr{L}_f\right)\\&=-f'(0^+)+pf(0^+)+p^2\mathscr{L}_f\end{aligned}$$

进而

$$0=\mathscr{L}_{f''}-\mathscr{L}_f=-B+Ap+p^2\mathscr{L}_f-\mathscr{L}_f$$

有 $(p^2-1)\mathscr{L}_f=B-Ap\Rightarrow\mathscr{L}_f=\dfrac{C}{p+1}+\dfrac{D}{p-1}$ 注意到

$$\mathscr{L}_{e^{-t}}(p)=\frac{1}{p+1},(p>-1),\mathscr{L}_{e^t}(p)=\frac{1}{p-1},(p>1)$$

于是得到 $f(t)=Ce^t+De^{-t}$

Definition 8.8.2 Fourier 变换

设 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$，即 $\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\mathrm{d}x<\infty$，有 Fourier 变换

$$\widehat{f}(\xi)=\mathcal{F}(f)(\xi)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\langle x,\xi\rangle}f(x)\mathrm{d}x$$

- $\forall f\in L^1(\mathbb{R}^n)$，则 $\widehat{f}\in C(\mathbb{R}^n)$，且 Riemann-Lebesgue 性质成立，$\lim\limits_{|\xi|\to\infty}\widehat{f}(\xi)=0$
- 若 $|x|f(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)$，可证明 $\widehat{f}\in C^1(\mathbb{R}^n)$，并且

$$\frac{\partial\widehat{f}}{\partial\xi_k}=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}}\int_{\mathbb{R}^n}(-ix_k)e^{-i\langle x,\xi\rangle}f(x)\mathrm{d}x=\widehat{(-ix_k)f}(\xi)$$

Example 8.8.2

考虑高斯分布函数 $g(x)=e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ 的 Fourier 变换 $\widehat{g}(\xi)$

- n=1 时

$$g(x)=e^{\frac{x^2}{2}},\widehat{g}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-ix\xi}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x,\xi\in\mathbb{R}$$

利用 C^1 可微性定理，$\widehat{g}\in C^1(\mathbb{R})$ 且

$$\begin{aligned}\widehat{g}'&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-ix\xi}(-ix)e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-ix\xi}xe^{-\frac{x^2}{2}}\\(\text{分部积分})&=\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[e^{-ix\xi}e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}-\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{x^2}{2}}(-i\xi)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\xi\int_{\mathbb{R}}e^{-ix\xi}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=-\xi\widehat{g}\end{aligned}$$

于是得到 $\widehat{g}'=\xi\widehat{g}$，解常微分方程得到 $\widehat{g}(\xi)=Ce^{-\frac{\xi^2}{2}}$，考虑 $g(0)=1$(利用 Gauss 积分)，可知 $\widehat{g}=g$

- $n\geq 1$ 时

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i\langle x,\xi\rangle}e^{-\frac{|x|^2}{2}}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{k=1}^{n}e^{-ix_k\xi_k}e^{-\frac{x_k^2}{2}}=\prod_{k=1}^{n}e^{-\frac{\xi_k^2}{2}}=e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$$

由此可以推出 Fourier 反变换公式：

Theorem 8.8.3

若 $f\in C(\mathbb{R}^n)\cap L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$，则

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}\mathrm{d}\xi$$

8.9 习题

题 1 计算积分

$$I(r)=\int_0^\pi\ln\left(1-2r\cos x+r^2\right)\mathrm{d}x,\quad |r|<1.$$

题 2 证明：（1）$\displaystyle\int_1^\infty\frac{\sin ux}{x^2}\mathrm{d}x$；（2）$\displaystyle\int_0^\infty\frac{\cos ux}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 在 $u\in(-\infty,+\infty)$ 中一致收敛.

题 3 证明：无穷积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(u^2+\alpha\right)t}\sin t\mathrm{d}t\quad(\alpha>0\text{ 为固定常数})$$

在 $u\in[0,+\infty)$ 中一致收敛.

题 4 证明：无穷积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(u^2+\alpha\right)t}\sin t\mathrm{d}u\quad(\alpha\geqslant 0\text{ 为固定常数})$$

在 $t\in[0,+\infty)$ 中一致收敛.

题 5 证明：无穷积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xu}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 在 $u\in[0,+\infty)$ 上一致收敛

题 6 证明：无穷积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ux}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$ 在 $[\delta,+\infty)$ 中一致收敛，其中 $a,\delta>0$ 为常数。

题 7 证明：瑕积分

$$\int_0^1\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\mathrm{d}x$$

(1) 当 $p<1$ 时绝对收敛；当 $1\leqslant p<2$ 时条件收敛；当 $2\leqslant p<+\infty$ 时发散.

(2) 关于 $p\in(0,2-\delta]$ 一致收敛，其中 $\delta>0$.

(3) 关于 $p\in(0,2)$ 非一致收敛.

题 8 证明：n 阶 Bessel 函数

$$\mathrm{J}_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

满足 Bessel 方程

$$x^2\mathrm{J}_n''(x)+x\mathrm{J}_n'(x)+\left(x^2-n^2\right)\mathrm{J}_n(x)=0.$$

题 9 利用对参数的求导法，计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x\right)\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x$.

题 10 用下面两种方法证明：

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

(1) $\displaystyle I(\alpha)=\int_0^1\frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 关于参数 α 求导

(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\tan\theta)\mathrm{d}\theta.$

题 11 参变量广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin ux}{x}\mathrm{d}x$ 在任何不包含 $u=0$ 的闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛；在包含 $u=0$ 的闭区间上非一致收敛。

题 12 证明：参变量广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin 3x}{x+u}\mathrm{e}^{-ux}\mathrm{d}x$ 在 $u\in[0,+\infty)$ 上一致收敛.

题 13 设 $f(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续．如果对 $\forall u\in[\alpha,\beta)$ ，参变量广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 都收敛．但广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x,\beta)\mathrm{d}x$ 发散．证明：$\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta)$ 上非一致收敛.

题 14 证明：参变量广义积分 $\displaystyle\int_u^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $u\in[\alpha,\beta]$ 上一致收敛 $\Longleftrightarrow$ 对任一单调增加趋于 $+\infty$ 的数列 $\{A_n\}\,(A_1=a)$ ，函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x,u)\mathrm{d}x$$

在 $u\in[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.