

ساختمان داده‌ها و الگوریتم‌ها

تمرین پنجم - گراف

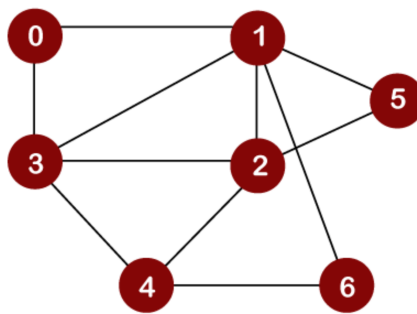
مجید فریدفر

تاریخ تحویل: ۱۴۰۳/۳/۲۴

نمره ۱۵

۱. BFS و DFS

الگوریتم‌های dfs و bfs را روی گراف زیر اجرا کنید. راس صفر را ریشه در نظر بگیرید و فرض کنید هر جا که قابلیت انتخاب بین چند راس وجود داشت، راسی که مقدار آن کم‌تر است اولویت بالاتری دارد.



- الف) زمان ورود و خروج (starting time و finishing time) را برای هر راس مشخص کنید.
- ب) مشخص کنید یال‌های خارج از درخت dfs و bfs از چه نوعی‌اند (cross-edge یا back-edge).
- ج) درخت حاصل از اجرای این الگوریتم‌ها را رسم کنید.

نمره ۱۵

۲. تولید درخت

گرافی با n راس و n یال داریم. الگوریتمی بهینه ارائه دهید که یالی را پیدا کند که با حذف آن، گراف تبدیل به درخت می‌شود (اگر چند یال با این ویژگی وجود داشت، می‌توانید یکی از آن‌ها را به دلخواه انتخاب کنید).

نمره ۱۵

۳. سودوکوی جادویی-سرعتی

فرض کنید یک مربع n در n به شما داده شده است. در ابتدا، در تعدادی از خانه‌های این جدول، عدد صفر نوشته شده است. شما باید تمام این خانه‌های آن را به نحوی پر کنید که:

- * تمام اعداد نوشته شده، صحیح نامنفی باشند.
- * تفاضل اعداد نوشته شده در دو خانه‌ی مجاور (به نحوی که یک ضلع مشترک داشته باشند) حداکثر برابر ۱ باشد.
- * بزرگ‌ترین عدد نوشته شده در جدول، بیشینه شود.

برای مثال، در صورتی که تمام خانه‌های باقی‌مانده را با ۱ پر کنید، شرط اول و دوم رعایت می‌شوند. اما به احتمال زیاد شرط سوم رعایت نخواهد شد. الگوریتمی ارائه دهید که این جدول را در سریع‌ترین زمان ممکن پر کند.

۴. ماموریت نهایی

۱۵ نمره

اخیراً منطقه‌ای عجیب در خلیج فارس کشف شده است که شامل n جزیره و m پل چوبی بین آن‌ها می‌شود که سال‌ها پیش، توسط بومی‌ها احداث شده‌اند (بین هر دو جزیره نهایتاً یک پل داریم). بعد از بازدید وزیر راه و شهرسازی از این مجمع‌الجزایر کوچک، بومیان منطقه از او خواستند که با احداث تعدادی پل جدید، امکان سفر زمینی بین تمام جزایر را برای آن‌ها فراهم سازد، به این علت که جابه‌جایی با قایق برای آن‌ها سخت است. هم‌چنین به علت کمبود منابع، دیگر خودشان امکان ساختن پل جدید را ندارند. وزیر، با توجه به وقت محدودی که دارد، با آن‌ها توافق کرد که k پل جدید احداث خواهد کرد. ممکن است تمامی جزایر به هم متصل نشوند، اما او تعداد جزایری که بین آن‌ها امکان سفر زمینی فراهم باشد را بیشینه خواهد کرد.

به وزیر کمک کنید با الگوریتمی بهینه پیش از شروع کار، محل این پل‌ها را مشخص کند.

۵. راندگی

۲۰ نمره

رایان گاسلینگ در شهر لوس آنجلس اقامت دارد. فرض کنید این شهر متشکل از n منطقه و m خیابان دو طرفه بین آن‌ها است (بین هر دو منطقه، نهایتاً یک خیابان وجود دارد). رایان که علاقه‌ی زیادی به تنهایی راندگی کردن دارد، عادت دارد هر روز از خانه‌اش در منطقه‌ی a تا خانه‌ی دوستش در منطقه‌ی b براند. هم‌چنین فرض کنید او کوتاه‌ترین مسیر ممکن بین دو نقطه را برای راندگی انتخاب می‌کند.

اخیراً شهردار اعلام کرده است که قصد ساختن یک خیابان جدید در شهر را دارد و از مردم خواسته که پیشنهادهای خود را برای محل احداث این خیابان به او بدهند (هرکس می‌تواند لیستی از دوتایی‌های x و y به شهردار بدهد، به این معنی که علاقه‌مند است این خیابان جدید بین مناطق x و y احداث شود). این موضوع، رایان را به شدت نگران کرده است، به این علت که او نمی‌خواهد احداث این خیابان جدید، فاصله‌ی بین خانه‌اش تا خانه‌ی دوستش را کم‌تر کند (او هرچه طولانی‌تر راندگی می‌کند، آرامش بیش‌تری می‌گیرد).

الگوریتمی از مرتبه‌ی زمانی $O(n^2)$ ارائه دهید به طوری که رایان گاسلینگ بتواند این لیست را آماده کرده و برای شهرداری پست کند.

۶. راندگی ۲

۲۰ نمره

فرض کنید نقشه‌ی شهری با n میدان و $n-1$ خیابان بین آن‌ها به شما داده شده است به طوری که گراف حاصل، یک درخت را تشکیل می‌دهد. رایان گاسلینگ طی سفری که به این شهر داشت، به شدت به آن علاقه‌مند شد و حالا قصد دارد خانه‌ای در یکی از میدان‌های آن خریداری کرده و به اینجا نقل مکان کند. اما او مطمئن نیست با توجه به خواسته‌ی جدیدی که دارد، کدام میدان‌ها برایش بهترین گزینه محسوب می‌شوند. خواسته‌ی او به شرح زیر است:

فرض کنید او میدان x را انتخاب کرده است به طوری که اگر آن را ریشه در نظر بگیرید، ارتفاع درخت حاصل برابر h خواهد شد. رایان قصد دارد هر روز از خانه‌اش (در عمق صفر) تا برگ‌ی که در عمق h دارد (مثلاً راس y) راندگی کند. هم‌چنین از آن‌جا که از راندگی‌های طولانی در لوس آنجلس خسته شده، علاقه‌مند است که این فاصله کمینه باشد.

الگوریتمی ارائه دهید که رایان گاسلینگ در کم‌ترین زمان ممکن تمام میدان‌های مناسب را پیدا کند.