

ساختمان داده و الگوریتم ها

پاسخ تمرین ششم - تحلیل سرشکن

ماردین نیچی، علی ممتحن

تاریخ تحویل: ۱۴۰۳/۴/۲

۱. قصاب باشی

۱۵ نمره

علی که دانشگاه را ول کرده، شغل قصابی را برای خود برگزیده است. او دستگاه خاصی دارد که برای تیز کردن چاقوهایش از آن استفاده میکند. هزینه برقی که این دستگاه مصرف میکند یک دلار در روز است. اما مشکل اصلی این است که این دستگاه در بعضی از روزها خراب می شود. بصورت دقیقتر این دستگاه در روزهایی که شماره روز توانی از دو است خراب می شود و هزینه ای به اندازه شماره روز برای علی بجا می گذارد. علی دانشگاه را ول کرده به همین دلیل نمی تواند میانگین هزینه دستگاه را حساب کند. به علی کمک کنید تا میانگین هزینه در هر روز برای دستگاه را حساب کند.

پاسخ:

فرض کنیم تعداد روزها برابر n باشد. حالا مجموع هزینه ها را تا روز n حساب می کنیم. مجموع هزینه برای روزهایی که توانی از ۲ نیستند برابر ۱ است. در نتیجه هزینه آن برابر است با:

$$n - \log n$$

حالا هزینه روزهایی که توانی از ۲ هستند را حساب می کنیم:

$$2 + 4 + 8 + \dots + 2^{\log n} = 2^{\log n + 1} - 2 = 2n - 2$$

مجموع هزینه تا روز n برابر جمع دو این دو خواهد بود. حالا برای آنکه میانگین را بدست بیاوریم باید مجموع را تقسیم بر تعداد روزها کرده؛ سپس n را به بی نهایت میل بدهیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 2 - \log n}{n} = 2$$

پس هزینه میانگین برابر ۲ خواهد بود.

۲. بازی بازی

۲۰ نمره

یک جدول با یک سطر و بی نهایت ستون داریم. در هر مرحله مهره ای بر میداریم و در یکی از خانه های جدول قرار می دهیم. اگر دو خانه مجاور هم تعداد برابر مهره داشته باشند مهره های خانه سمت چپی را برداشته و بر روی مهره های خانه سمت راستی قرار می دهیم. هر عملیات گذاشتن یا برداشتن مهره یک واحد هزینه خواهد داشت. به روش سرشکن تحلیل کنید حداکثر چه مقدار هزینه باید پردازیم؟

برای مثال اگر در خانه ها با شماره ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ به ترتیب ۱, ۲, ۴, ۶, ۱, ۰ مهره داشته باشند، پس از قرار دادن یک مهره در خانه شماره ۱ نحوه چینش مهره ها بشکل ۰, ۰, ۰, ۸, ۶ خواهد بود.

پاسخ:

نکته ای که در این مساله وجود دارد این است که هر مهره حداکثر از $O(\log n)$ بار جابجا میشود. زیرا هر بار که جابجا شود بر روی خانه ای قرار میگرد که تعداد مهره ی آن دو برابر خانه ی قبلی آن است با $\log(n)$ بار جابجا شدن در خانه ای قرار میگیرد که تعداد مهره های آن برابر کل مهره هاست و حرکت دیگری نمیتواند انجام دهد. پس اگر با قرار دادن هر مهره بر روی نوار $O(\log n)$ هزینه ذخیره کنیم. با هر بار جابجایی میتوان یکی از حساب کم میکنیم و چون میدانیم بیش از $\log(n)$ جابجایی نداریم هزینه مورد نیاز هر مهره $\log(n)$ خواهد بود. در کل n مهره داریم پس هزینه ی کل $n \log(n)$ خواهد بود.

۳. گاو صندوق

۲۰ نمره

k گاو صندوق در یک صف قرار دارند که از ۱ تا k شماره گذاری شده اند و در ابتدا همه آنها خالی هستند. ممد قصه‌ی ما دزدی حرفه‌ای است. او هر روز یک شمش طلا می‌دزد و در یک گاو صندوق خالی جاسازی می‌کند. ممد به دلایل امنیتی جنسی که می‌دزد را حتماً داخل گاو صندوق اول می‌گذارد. روش جایگذاری ممد به این شکل است که اگر گاو صندوق اول خالی باشد، طلا را همانجا قرار می‌دهد ولی اگر خالی نباشد، گاو صندوق را باز می‌کند، شمش قدیمی را به گاو صندوق دو انتقال می‌دهد و شمش جدید را در گاو صندوق اول می‌گذارد. توجه کنید که اگر گاو صندوق دوم نیز پر باشد، مانند قبل به دلایل امنیتی ممد باید گاو صندوق را باز کند و طلای داخل گاو صندوق دوم را به گاو صندوق سوم انتقال دهد و این عمل به همین ترتیب ادامه می‌یابد. باز و بسته کردن در گاو صندوق‌ها هزینه دارد. برای مثال باز و بسته کردن در گاو صندوق i ، 2^i تا هزینه دارد. به ممد کمک کنید تا حساب کند اگر تا زمانی که گاو صندوق‌هایش پر شوند به دزدی ادامه دهد، چه مقدار برای باز و بسته کردن گاو صندوق‌ها باید هزینه دهد.

پاسخ:

در روز اول گاو صندوق شماره ۱ استفاده میشود و ۲ واحد هزینه دارد. روز دوم گاو صندوق شماره ۱ و ۲ باز میشوند و $2 + 4$ هزینه دارد به همین ترتیب روز i گاو صندوق های شماره $1, 2, \dots, i$ استفاده میشوند و $2^i - 2 = 2^{i+1} - 2$ هزینه دارد. مجموع n روز دزدی برابر هزینه‌ای برابر با $(n+1) * 2^{n+2} - 2n = \sum_{i=1}^n (2^{i+1} - 2) = \sum_{i=1}^n 2^{i+1} - 2n$ خواهد داشت

۴. شمارنده لعنتی

۲۰ نمره

در شهر بایرنی آباد، مخترع کنبجاوی به نام جواد زندگی می‌کند که یک شمارنده دیجیتالی اختراع کرده است. برخلاف شمارنده‌های معمولی که از ۰ شروع می‌کنند، شمارنده جواد با عددی شروع می‌شود که در نمایش بایرنی خود دارای b عدد ۱ است. هر روز، جواد شمارنده را یک واحد افزایش می‌داد و هزینه انرژی این کار را یادداشت می‌کرد. او متوجه شد که هزینه انرژی برای هر بار زیاد کردن شمارنده ثابت نیست و با تعداد بیت‌هایی که تغییر می‌کنند (تغییز از ۰ به ۱ یا بالعکس) متناسب است. جواد می‌خواست بفهمد که اگر او n عملیات افزایش انجام دهد، هزینه کل انرژی چگونه خواهد بود. او حدس می‌زد که هزینه‌ی n بار انجام عملیات افزایش از $O(n)$ است. اگر $n = \Omega(b)$ باشد، به او در اثبات یا رد این حدس کمک کنید.

پاسخ:

فرض کنید که $cb \geq n$ از انجایی که شمارنده با b عدد یک شروع میشود، هزینه مستهلک سده ما $2 + 1/c$ خواهد بود. سپس هزینه اضافی $1/c$ در طول n عملیات معادل با پرداخت یک مبلغ اضافی n/c است که برابر یا بیشتر از b است که مقدار تاخیری بود که در ابتدا داشتیم. از آنجا که هزینه مستهلک شده هر عملیات $2 + 1/c$ است، این هزینه در $O(1)$ است. بنابراین هزینه کل در $O(n)$ قرار میگیرد.

۵. حالا کمش کن

۲۵ نمره

جواد قصه ما می‌خواهد به شمارنده‌اش دکمه کاهش دهنده اضافه کند. با هر بار فشار این دکمه یک واحد از عدد روی شمارنده کم می‌شود. ابتدا ثابت کنید که اضافه کردن چنین آپشنی به شمارنده امکان دارد هزینه میانگین هر عملیات را به $O(\log(n))$ برساند. حال جواد سیستم جدیدی ابداع کرده که بجز ۰ و ۱ در هر بیت می‌تواند از ۱- نیز استفاده کند. بیت‌ها را در این سیستم جدید تریت می‌نامیم. برای مثال اگر شمارنده $[1, 0, -1]$ را نشان دهد، عدد حاصل $3 = 1 - 1 + 2 * 0 + 4 * 1$ می‌باشد.

فرایند افزایش و کاهش در این حالت نیز بسیار مشابه حالت قبلی است. برای افزایش شمارنده، ۱ را به تریت مرتبه پایین اضافه می‌کنید. اگر نتیجه ۲ باشد، آن را به ۰ تغییر دهید، یک پراپگیشن به تریت بعدی منتشر می‌شود و این روند تا زمانی تکرار می‌شود که هیچ دو بر یکی حاصل نشود. کاهش به طور مشابه عمل می‌کند: ۱ را از تریت مرتبه پایین کم کنید و اگر به ۲- تبدیل شد، آن را با ۰ جایگزین کنید و بر این اساس انتشار دهید. مانند قبل، هزینه افزایش یا کاهش، تعداد تریت‌هایی است که در فرآیند تغییر می‌کنند.

اگر دنباله‌ای n تایی از افزایش‌ها و کاهش‌ها داشته باشیم، نشان دهید که هزینه میانگین در عملیات‌ها از $O(1)$ است.

