



ساختمان‌های داده و الگوریتم

تمرین چهارم - مرتب‌سازی و درهم‌سازی

محمد امانلو، کوروش سجادی
تاریخ تحویل: ۱۴۰۳/۰۳/۰۴

۱۰ نمره

۱. مرتب‌سازی جفتی

فرض کنید A آرایه‌ای از n جفت عدد صحیح مثبت (x, y) که $x_i, y_i < n^2$ برای هر $i \in \{0, \dots, n-1\}$ باشد. توان جفت (x, y) عدد صحیح $x + n^y$ است. یک الگوریتم با مرتبه زمانی $O(n)$ برای مرتب‌سازی جفت‌ها در A به صورت صعودی و بر اساس توان آنها توصیف کنید.

۱۰ نمره

۲. سلام بر فیثاغورث

یک $Quad$ فیثاغورثی از چهار عدد صحیح (a, b, c, d) تشکیل شده است به طوری که $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ باشد. آرایه A حاوی n عدد صحیح مثبت متمایز است. الگوریتمی با مرتبه زمانی متوسط $O(n^2)$ به گونه‌ای توصیف کنید تا تعیین کند آیا چهار عدد صحیح از A یک $Quad$ فیثاغورثی را تشکیل می‌دهند یا خیر. اعداد صحیح از A ممکن است بیش از یک بار در $Quad$ ظاهر شوند.

۱۳ نمره

۳. لقمه حیا

در یک مهمانی، آقای چاق قصد دارد بزرگترین میوه را انتخاب کند. اما چون می‌داند برداشتن بزرگترین میوه به مذاق صاحبخانه خوش نمی‌آید قصد دارد دومین بزرگترین میوه را انتخاب کند. ثابت کنید او در بدترین حالت با انجام $2 + \lceil \lg(n) \rceil$ مقایسه می‌تواند دومین بزرگترین میوه را پیدا کند.

۱۵ نمره

۴. دژ مرموز

فرض کنید قهرمانی به نام کسرا در یک دژ مرموز به دام افتاده است. در هر اتاق این دژ، یک صندوق وجود دارد که فقط زمانی باز می‌شود که کسرا توپ‌های جادویی را در ترتیب صعودی قرار دهد. این توپ‌ها در ابتدا به صورت نامرتب در صندوق قرار دارند. کسرا تنها می‌تواند توپ‌های مجاور را جابجا کند، به شرطی که تفاوت بین دو توپ فقط یک واحد باشد. الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(n)$ ارائه دهید که به کسرا بگوید این کار قابل انجام است یا خیر.

مثال:

ورودی: $arr[] = \{2, 1, 5, 4\}$

خروجی: بله

توضیح: با جابجایی ۲ و ۱ در یک مرحله و ۴ و ۵ در مرحله دیگر آرایه سورت می‌شود.

۵. بازی ترند

نمره ۱۷

در یک بازی جدید که اخیراً محبوب شده است، بازیکنان باید به سرعت یک سلسله از اعداد طبیعی را بازیابی کنند که به هم ربط دارند ولی ممکن است در ترتیب پراکنده‌ای در میان دیگر اعداد قرار گرفته باشند. شما به عنوان یک برنامه‌نویس می‌خواهید ابزاری بسازید که طولانی‌ترین دنباله متوالی از اعداد را در یک لیست معین شناسایی کند.

$$arr[] = 15, 12, 13, 9, 11, 14 : Input$$

$$5 : Output$$

توضیحات: اعداد متوالی در این زیردنباله شامل $\{11, 14, 13, 15, 12\}$ هستند که می‌توانند پشت سر هم قرار گیرند و طول آن ۵ است.

۶. قبیله بازیگوش

نمره ۱۸

فرض کنید در یک جزیره دورافتاده، قبیله‌ای وجود دارد که بازی سنتی خود را دارند. این بازی به این صورت است که شرکت‌کنندگان کارت‌هایی را در یک ردیف قرار می‌دهند و سپس سعی می‌کنند تعداد حرکات لازم برای تبدیل کارت‌ها به یک ردیف کاملاً مرتب شده را حساب کنند. هر حرکت شامل جابجایی دو کارت است. هدف این است که با کمترین تعداد جابجایی، کارت‌ها را مرتب کنند. الگوریتمی ارائه دهید که با مرتبه زمانی $O(n \log n)$ بتواند تعداد این جابجایی‌ها را محاسبه کند. اگر کارت‌ها کاملاً مرتب باشند، خروجی باید ۰ باشد و اگر در جهت عکس مرتب باشند، خروجی باید ماکسیمم باشد.

برای فهم بهتر، بیایید یک مثال عینی از یک آرایه کاملاً برعکس را بررسی کنیم. فرض کنید آرایه ما به صورت زیر باشد: $[5, 4, 3, 2, 1]$. در این حالت، آرایه کاملاً برعکس مرتب شده است و تعداد وارونگی‌ها بیشترین مقدار ممکن خواهد بود.

تعداد وارونگی‌ها در این آرایه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

- بین ۵ و هر عدد دیگری که پس از آن می‌آید (۴، ۳، ۲، ۱)، وارونگی وجود دارد. (۴ وارونگی)

- بین ۴ و هر عدد دیگری که پس از آن می‌آید (۳، ۲، ۱)، وارونگی وجود دارد. (۳ وارونگی)

- بین ۳ و هر عدد دیگری که پس از آن می‌آید (۲، ۱)، وارونگی وجود دارد. (۲ وارونگی)

- بین ۲ و عدد ۱ که پس از آن می‌آید، وارونگی وجود دارد. (۱ وارونگی)

بنابراین، کل تعداد وارونگی‌ها برای این آرایه برابر با $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ است.

۷. راز اعداد قدیمی

نمره ۲۲

تصور کنید در یک دهکده کوچک، صندوقچه‌ای از اعداد قدیمی کشف شده است که شامل یک سری از اعداد صحیح به طول n است. مأموریت شما این است که تنها با یک بار دیدن این اعداد تعادل خیر و شر را بازگردانید. الگوریتمی با پیچیدگی $O(n)$ ارائه دهید که طول بزرگترین زیرآرایه از این آرایه را پیدا کند که جمع اعداد آن زیرآرایه برابر با صفر باشد. این زیرآرایه نماینگر تعادل میان خیر و شر در دهکده‌های باستانی است.