

ساختمان داده و الگوریتم ها

تمرین ششم - تحلیل سرشکن

ماردین نیچی، علی ممتحن

تاریخ تحویل: ۱۴۰۳/۴/۲

۱. قصاب باشی

نمره ۱۵

علی که دانشگاه را ول کرده، شغل قصابی را برای خود برگزیده است. او دستگاه خاصی دارد که برای تیز کردن چاقوهایش از آن استفاده میکند. هزینه‌ی برقی که این دستگاه مصرف میکند یک دلار در روز است. اما مشکل اصلی این است که این دستگاه در بعضی از روزها خراب می‌شود. بصورت دقیقتر این دستگاه در روزهایی که شماره روز توانی از دو است خراب می‌شود و هزینه‌ای به اندازه شماره روز برای علی بجا می‌گذارد. علی دانشگاه را ول کرده به همین دلیل نمی‌تواند میانگین هزینه دستگاه را حساب کند. به علی کمک کنید تا میانگین هزینه در هر روز برای دستگاه را حساب کند.

۲. بازی بازی

نمره ۲۰

یک جدول با یک سطر و بی‌نهایت ستون داریم. در هر مرحله مهره‌ای برمی‌داریم و در یکی از خانه‌های جدول قرار می‌دهیم. اگر دو خانه مجاور هم تعداد برابری مهره داشته باشند مهره‌های خانه سمت چپی را برداشته و بر روی مهره‌های خانه سمت راستی قرار می‌دهیم. هر عملیات گذاشتن یا برداشتن مهره یک واحد هزینه خواهد داشت. به روش سرشکن تحلیل کنید حداکثر چه مقدار هزینه باید پردازیم؟ برای مثال اگر در خانه‌ها با شماره ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ به ترتیب ۶، ۴، ۲، ۱، ۰ مهره داشته باشند، پس از قرار دادن یک مهره در خانه شماره ۱ نحوه چینش مهره‌ها بشکل ۶، ۸، ۰، ۰، ۰ خواهد بود.

۳. گاوصندوق

نمره ۲۰

k گاوصندوق در یک صف قرار دارند که از ۱ تا k شماره گذاری شده‌اند و در ابتدا همه آنها خالی هستند. ممد قصه‌ی ما دزدی حرفه‌ای است. او هر روز یک شمش طلا می‌دزد و در یک گاوصندوق خالی جاسازی می‌کند. ممد به دلایل امنیتی جنسی که می‌دزد را حتما داخل گاوصندوق اول می‌گذارد. روش جایگذاری ممد به این شکل است که اگر گاوصندوق اول خالی باشد، طلا را همانجا قرار می‌دهد ولی اگر خالی نباشد، گاوصندوق را باز می‌کند، شمش قدیمی را به گاوصندوق دو انتقال می‌دهد و شمش جدید را در گاوصندوق اول می‌گذارد. توجه کنید که اگر گاوصندوق دوم نیز پر باشد، مانند قبل به دلایل امنیتی ممد باید گاوصندوق را باز کند و طلای داخل گاوصندوق دوم را به گاوصندوق سوم انتقال دهد و این عمل به همین ترتیب ادامه می‌یابد. باز و بسته کردن در گاوصندوق‌ها هزینه دارد. برای مثال باز و بسته کردن در گاوصندوق i ، 2^i تا هزینه دارد. به ممد کمک کنید تا حساب کند اگر تا زمانی که گاوصندوق‌هایش پر شوند به دزدی ادامه دهد، چه مقدار برای باز و بسته کردن گاوصندوق‌ها باید هزینه دهد.

۴. شمارنده لعنتی

نمره ۲۰

در شهر بایرنی آباد، مخترع کنجکاوی به نام جواد زندگی می‌کند که یک شمارنده دیجیتال اختراع کرده است. برخلاف شمارنده‌های معمولی که از ۰ شروع می‌کنند، شمارنده جواد با عددی شروع می‌شود که در نمایش بایرنی خود دارای b عدد ۱ است. هر روز، جواد شمارنده را یک واحد افزایش می‌داد و هزینه انرژی این کار را یادداشت می‌کرد. او متوجه شد که هزینه انرژی برای هر بار زیاد کردن شمارنده ثابت نیست و با تعداد بیت‌هایی که تغییر می‌کنند (تغییز از ۰ به ۱ یا بالعکس) متناسب است. جواد می‌خواست بفهمد که اگر n عملیات افزایش انجام دهد، هزینه کل انرژی چگونه خواهد بود. او حدس می‌زد که هزینه‌ی n بار انجام عملیات افزایش از $O(n)$ است. اگر $n = \Omega(b)$ باشد، به او در اثبات یا رد این حدس کمک کنید.

۵. حالا کمش کن

۲۵ نمره

جواد قصه ما می خواهد به شمارنده اش دکمه کاهش دهنده اضافه کند. با هر بار فشار این دکمه یک واحد از عدد روی شمارنده کم می شود. ابتدا ثابت کنید که اضافه کردن چنین آپشنی به شمارنده امکان دارد هزینه میانگین هر عملیات را به $O(\log(n))$ برساند. حال جواد سیستم جدیدی ابداع کرده که بجز ۰ و ۱ در هر بیت می تواند از ۱- نیز استفاده کند. بیت ها را در این سیستم جدید تریت می نامیم. برای مثال اگر شمارنده $[1, 0, -1]$ را نشان دهد، عدد حاصل $3 = 1 - 1 + 0 * 2 + 1 * 4$ می باشد.

فرایند افزایش و کاهش در این حالت نیز بسیار مشابه حالت قبلی است. برای افزایش شمارنده، ۱ را به تریت مرتبه پایین اضافه می کنید. اگر نتیجه ۲ باشد، آن را به ۰ تغییر دهید، یک پراپگیشن به تریت بعدی منتشر می شود و این روند تا زمانی تکرار می شود که هیچ دو بر یکی حاصل نشود. کاهش به طور مشابه عمل می کند: ۱ را از تریت مرتبه پایین کم کنید و اگر به ۲- تبدیل شد، آن را با ۰ جایگزین کنید و بر این اساس انتشار دهید. مانند قبل، هزینه افزایش یا کاهش، تعداد تریت هایی است که در فرایند تغییر می کند.

اگر دنباله ای n تایی از افزایش ها و کاهش ها داشته باشیم، نشان دهید که هزینه میانگین در عملیات ها از $O(1)$ است.