



باسمه تعالی
سیستم‌های کنترل دیجیتال
آزمونک ۱



شماره دانشجویی:

نام خانوادگی:

زمان پاسخ‌گویی: ۲۵ دقیقه

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{x[k]\} &\triangleq \sum x[k]z^{-k} \\ \mathcal{Z}\{a^k u[k]\} &= \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a| \\ \mathcal{Z}\{kx[k]\} &= -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}\{x[k]\}\end{aligned}$$

۱. تبدیل z سیگنال زیر را محاسبه کنید.

$$x[k] = \begin{cases} \frac{1}{k}, & k > 0 \\ 0, & k \leq 0 \end{cases}$$

با تعریف:

$$y[k] = kx[k] = \begin{cases} 1, & k > 0 \\ 0, & k \leq 0 \end{cases} = u[k-1]$$

در ادامه:

$$Y(z) = z^{-1}U(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

استفاده از رابطه سوم از روابط بالای برگه و تعریف y نتیجه می‌شود:

$$Y(z) = -z \frac{dX}{dz} = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

در ادامه

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dz} &= -\frac{1}{z^2 - z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} \\ \Rightarrow X(z) &= \ln(z) - \ln(z-1) + C \Rightarrow X(z) = \ln\left(\frac{z}{z-1}\right) + C\end{aligned}$$

یک راه برای تعیین ثابت انتگرال‌گیری C بررسی مقدار $X(z)$ در $z \rightarrow \infty$ است.

$$C = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x[0] = 0$$

پس:

$$X(z) = \ln\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

۲. بر اساس بند قبل مشخص کنید که حاصل جمع $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ مقداری متناهی است یا خیر. حاصل جمع فوق برابر $\lim_{z \rightarrow 1} X(z)$ با توجه به این که $z = 1$ در ناحیه همگرایی نیست، سری فوق واگرا است و حاصل مقدار فوق نامتناهی است. همچنین از روی $X(z) = \ln\left(\frac{z}{z-1}\right)$ مشخص است نزدیک شدن z به 1 موجب بی‌نهایت شدن X می‌شود.
