باسمه تعالی

سیستم‌های کنترل دیجیتال

امتحان پایان‌ترم

تاریخ برگزاری ۱۱ تیر ۱۴۰۲ - زمان امتحان: ۲ ساعت

۱. تابع تبدیل زیر در مسیر پیشرو یک حلقه کنترلی با فیدبک واحد منفی مورد استفاده قرار گرفته است.

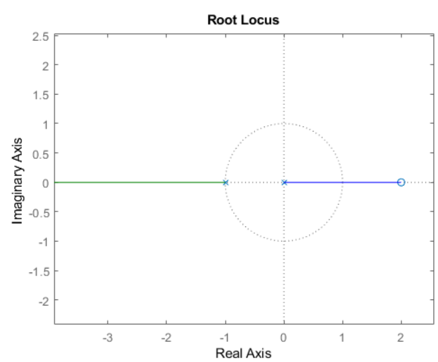
$$G(z) = k\frac{1-0.5z}{z^2+z} \tag{1}$$

با استفاده از مکان هندسی ریشه‌ها نشان دهید برای هیچ مقدار $k \leq 0$ سیستم حلقه بسته پایدار نمی‌شود. به همین صورت نشان دهید برای برخی از مقدار $k \geq 0$ سیستم حلقه بسته می‌تواند پایدار باشد.

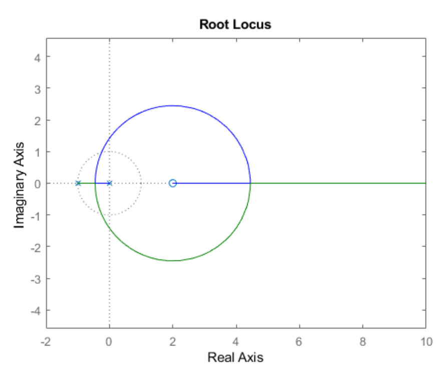
فرم استاندارد تابع تبدیل:

$$G(z) = -0.5k\frac{z-2}{z^2+z} = \bar{k}\frac{z-2}{z^2+z} \qquad \bar{k} \triangleq -0.5k$$

مکان ریشه برای $k \geq 0 \equiv \bar{k} \leq 0$:



مکان ریشه برای $k \leq 0 \equiv \bar{k} \geq 0$:



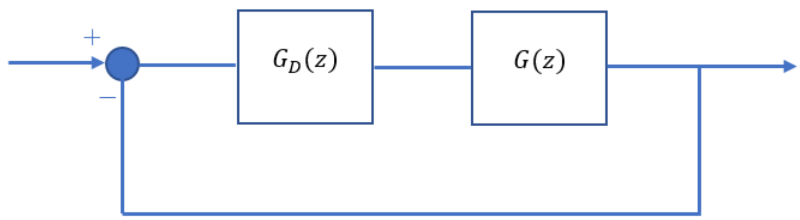
برای $k \geq 0 \equiv \bar{k} \leq 0$ یک شاخه از مکان ریشه (سبز رنگ) همواره خارج از دایره واحد است (برای $k = 0$ روی دایره است). بنابراین سیستم حلقه بسته برای همه مقادیر $k \leq 0$ ناپایدار است. برای بخشی از مقادیر $k \geq 0 \equiv \bar{k} \leq 0$

هر دو قطب سیستم حلقه بسته داخل دایره واحد قرار می‌گیرند. در واقع بازه $0 < k < 1$ هر دو قطب سیستم حلقه داخل دایره واحد و سیستم حلقه بسته پایدار است.

۲. (آ) اگر در شکل ۱ سیستم حلقه بسته پایدار باشد و ورودی یک سیگنال سینوسی با فرکانس Ω باشد یعنی $r[k] = \sin(k\Omega T)$، خطای حالت ماندگار (تفاوت ورودی و خروجی برای زمان‌های به اندازه کافی بزرگ) به چه صورت است؟

(ب) حداکثر مقدار این خطا را برای $T = 1$، $\Omega = \frac{\pi}{2}$، $G_D(z) = 1$ و $G(z)$ برابر با رابطه (۱) با $k = \frac{1}{2}$ محاسبه کنید.

(ج) Ω ای وجود دارد که حاصل بند قبل صفر شود؟



شکل ۱: بلوک دیاگرام یک سیسم زمان گسسته

(آ) تابع تبدیل از $R(z)$ به $E(z)$:

$$E(z) = \frac{1}{1 + G_D(z)G(z)} R(z)$$

قسمت ماندگار پاسخ E به ورودی سینوسی، یک سینوسی است که دامنه و فاز آن تغییر کرده است (پاسخ فرکانسی):

$$E_{ss}[k] = A\sin(k\Omega T + \phi), \quad A = \left|\frac{1}{1 + G_D(e^{j\Omega T})G(e^{j\Omega T})}\right|, \quad \phi = -\angle(1 + G_D(e^{j\Omega T})G(e^{j\Omega T}))$$

(ب) حداکثر خطا کمتر از دامنه سینوسی به دست آمده در بند قبل است:

$$A = \left|\frac{1}{1 + G_D(e^{j\Omega T})G(e^{j\Omega T})}\right| = \left|\frac{1}{1 + G(e^{j\Omega T})}\right| = \left|\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\frac{1-0.5e^{j\pi/2}}{e^{j\pi}+e^{j\pi/2}}}\right| = \left|\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\frac{1-0.5j}{-1+j}}\right|$$
$$= |\frac{1}{\frac{5}{8} - j\frac{1}{8}}| = \frac{8}{\sqrt{26}} \approx 1.5689, \qquad \phi \approx 11.3^\circ$$

مقدار دقیق حداکثر خطا برابر $\max\{A|\sin(\phi)|, A|\cos(\phi)|\} = A|\cos(\phi)| = 1.5384$ است.

(ج) اگر به ازای Ωای مخرج $G(e^{j\Omega T})$ صفر شود، باعث می‌شود مخرج عبارت A بی‌نهایت می‌شود و حاصل A صفر می‌شود. این اتفاق در $\Omega = \pi$ رخ می‌دهد. (البته در این حالت خود ورودی $\sin(k\pi T)$ صفر خواهد بود. ولی مثلا خطا برای ورودی غیر صفر $\sin(k\pi T + 0.1)$ نیز صفر خواهد بود.)

۳. برای یک سیستم زمان پیوسته، کنترل کننده PI زیر طراحی شده است که زمان صعود پاسخ پله برابر ۱ ثانیه باشد.

$$G_c(s) = 10\frac{s+1}{s}$$

(آ) با انتخاب مناسب دوره نمونه برداری T، نسخه گسسته کنترل کننده را با روش تبدیل دوخطی به دست آورید.

(ب) نسخه گسسته به دست آمده در بند قبل می‌تواند ناپایدار باشد؟

(ج) گسسته سازی کنترل کننده می‌تواند باعث ناپایداری سیستم حلقه بسته بشود؟

(آ) یک رابطه برای محاسبه دوره نمونه برداری بر اساس زمان صعود:

$$2 \leq \frac{t_r}{T} \leq 10 \quad \Rightarrow \quad 0.1 \leq T \leq 0.5$$

$T = 0.1$ انتخاب می‌کنیم. گسسته سازی با استفاده از تبدیل دو خطی:

$$s \to \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

بنابراین:

$$G_d(z) = 10\frac{\dfrac{2}{T}\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+1}{\dfrac{2}{T}\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = 10\frac{1-z^{-1}+\frac{T}{2}(1+z^{-1})}{1-z^{-1}} = 10\frac{1.05-0.95z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

(ب) تبدیل دوخطی ویژگی پایداری فیلتر (تابع تبدیل تحت گسسته سازی) را حفظ می‌کند. بنابراین با توجه به اینکه G_c پایدار مرزی است (پایدار BIBO نیست) گسسته آن G_d نیز پایداری مرزی است (پایدار BIBO نیست).

(ج) بله. گسسته سازی کنترل‌کننده می‌تواند باعث ناپایداری سیستم حلقه بسته شود. پایداری سیستم حلقه بسته با کنترل کننده گسسته شده باید مستقلا بررسی شود.

۴. معادله تفاضلی زیر را در نظر بگیرید:

$$y[k+2]-\frac{1}{4}y[k]=u[k+1]+au[k]$$

(آ) یک نمایش فضای حالت برای این معادله تفاضلی بنویسید.

(ب) کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری این نمایش را بررسی نمایید. برای چه مقادیری از a این نمایش هم کنترل‌پذیر و هم رویت‌پذیر است؟

(ج) $u[k]$ را (برحسب حالت‌های نمایش بند اول) به نحوی طراحی کنید که پس از دوگام حالت‌ها به مبدا برسند و در آن‌جا مستقر شوند. در صورت نیاز مقدار مناسبی برای پارامتر a در نظر بگیرید.

(د) $u[k]$ به دست آمده در بند قبل را به صورت تابعی از $y[k]$ و $y[k-1]$ بنویسید. در صورت نیاز مقدار مناسبی برای پارامتر a در نظر بگیرید.

(آ) با تعریف :

$$x_1[k]\triangleq y[k],$$
$$x_2[k]\triangleq y[k+1]+cu[k]$$

در نتیجه:

$$\left.\begin{aligned}x_1[k+1]&=x_2[k]-cu[k]\\ x_2[k+1]&=y[k+1]+cu[k+1]=\frac{1}{4}y[k]+u[k+1]+au[k]+cu[k+1]\end{aligned}\right.\Rightarrow c=-1$$

$$\Rightarrow\begin{aligned}x_1[k+1]&=x_2[k]+u[k]\\ x_2[k+1]&=\frac{1}{4}x_1[k]+au[k]\end{aligned}\Rightarrow x[k+1]=\begin{bmatrix}0&1\\ \frac{1}{4}&0\end{bmatrix}x[k]+\begin{bmatrix}1\\ a\end{bmatrix},y[k]=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}x[k]$$

(ب)

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\ \frac{1}{4}&0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1\\ a\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}$$

کنترل‌پذیری:

$$\mathcal{C}=\begin{bmatrix}B&AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&a\\ a&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

بنابراین نمایش فوق کنترل‌پذیر است اگر $a\neq\pm\frac{1}{2}$

رویت‌پذیری:

$$\mathcal{O}=\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\ 0&1\end{bmatrix}$$

این نمایش همواره رویت‌پذیر است.

برای $a\neq\pm\frac{1}{2}$ هم رویت‌پذیر و هم کنترل‌پذیر است.

(ج) قرار دادن هر دو مقدار ویژه مطلوب در مبدا (کنترل کننده مرده نوش) $\phi(\lambda)=\lambda^2$ ، استفاده از رابطه آکرمن(در نظر گرفتن $a=0$):

$$K=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}\mathcal{C}^{-1}A^2=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\ 0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&0\\ 0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}\Rightarrow u[k]=-\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}x[k]$$

(د) $u[k]$ به دست آمده در قسمت قبل برابر است با (در نظر گرفتن $a = 0$):

$$u[k] = -x_2[x] = -\frac{1}{4}x_1[k-1] = -\frac{1}{4}y[k-1]$$

که تساوی دوم از دینامیک سیستم به دست آمده است.

۵. در شکل ۱ اگر

$$G(z) = \frac{z-1}{z^2}$$

باشد، آیا می‌توان جبران‌کننده $G_D(z)$ را به گونه‌ای طراحی کرد که سیستم حلقه بسته پایدار باشد و خطای حالت ماندگار به ورودی پله صفر باشد؟ اگر این امر امکان‌پذیر است کنترل کننده را طراحی کنید در غیر این صورت علت را توضیح دهید.

خیر. برای آنکه خطای حالت ماندگار به ورودی پله صفر باشد تابع تبدیل حلقه باید نوع ۱ باشد یا به عبارتی قطب $z-1$ در حاصل $G_D(z)G(z)$ دیده شود. که این امر مستلزم آن است که $G_D(z)$ دو قطب در $z=1$ داشته باشد. در این صورت بین $G(z)$ و $G_D(z)$ حذف صفر و قطب ناپایدار اتفاق می‌افتد. در صورت وجود دو قطب $z=1$ در $G_D(z)$ با اعمال پله به عنوان سیگنال مرجع، سیگنال خروجی کنترل کننده (ورودی به پلنت) بی‌کران خواهد شد و پایداری کل حلقه برقرار نخواهد بود.