Subject:
Date

به نام خدا

جلسه اول کنترل دیجیتال

چرا دیجیتال؟

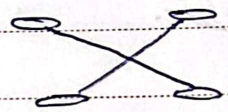
T (دوره نمونه برداری) هر چقدر $T \downarrow$ ⇐ رفتار سیستم زمان پیوسته و گسسته نزدیک اند به هم

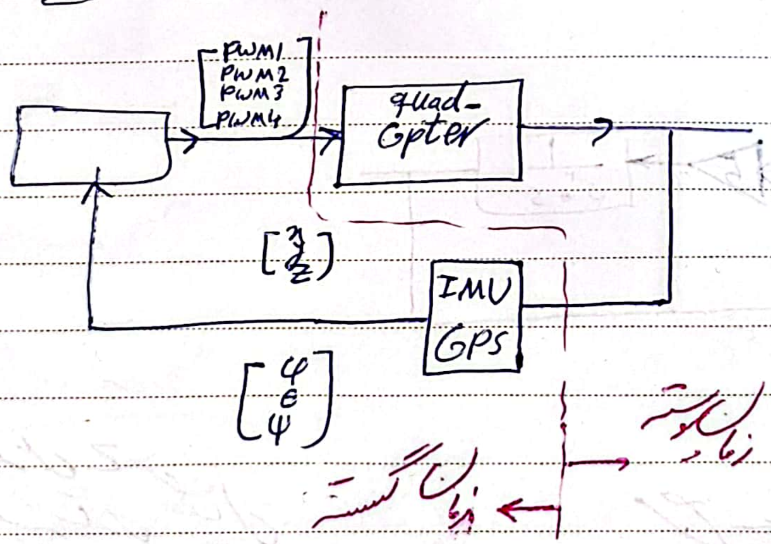
با بالا بردن فرکانس برداری ($\frac{1}{T}$) محدودیت داریم یکی از این محدودیت ها هزینه است.

مثلا یک پردازنده قوی نمی توانیم بذاریم. محدودیت بعدی ویژگی خود سنسور است

فرکانس بالاتر ⇐ مصرف انرژی بیشتر

quadcopter

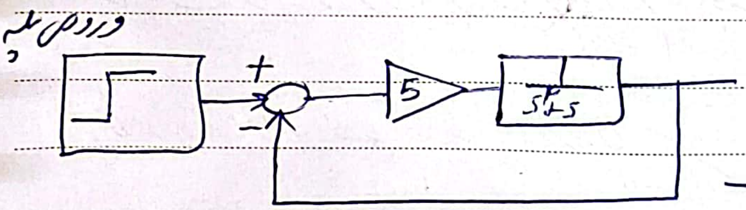




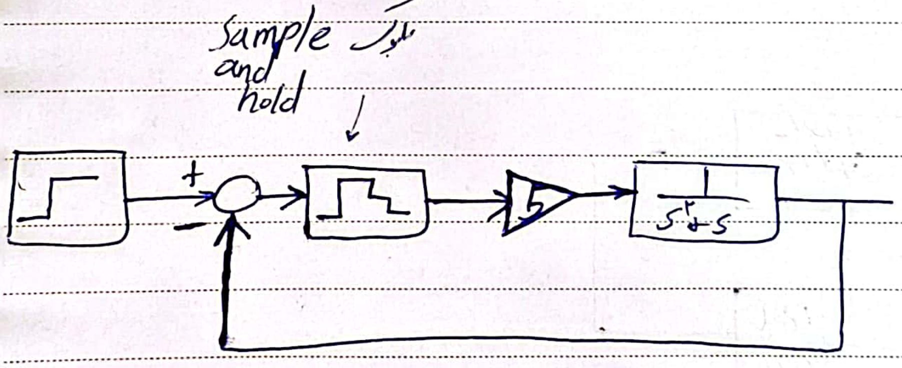
سوال: اگر کنترل کننده‌ها در حوزه زمان پیوسته کار کرد آیا در زمان گسسته نیز کار می‌کند

پاسخ: خیر

مثال حلقه بسته کلاسیک. با بالا بردن بهره یا زیاد کردن زمان نمونه برداری باعث ناپایداری سیستم گسسته شد.



رفتار پیوسته
به ازای هر بهره‌ای پایدار است
و خطای حالت ماندگارش صفر است



- تبدیل Z
- گسسته سازی سیگنال
- گسسته سازی سیستم
- همان چیزهای کم

دیگر خطی و کنترل مدرن سیستم شتی گسسته اش

مرجع ← اوگاتا

میان‌ترم پنج شنبه ۶ اردیبهشت ۶٫۵ نمره

پایان‌ترم ۱۳ تیر ۶٫۵ نمره

میان‌ترم و پایان‌ترم حذفی است

Subject:
Date ۱۴۰۲/۱۱/۲۸

سیگنال: تابعی از زمان

$f: I \to \mathbb{R}^n$

$I \subseteq \mathbb{R}$ پیوسته

زیرمجموعه گسسته از $\mathbb{R}$ باشد

$\Downarrow$

سیگنال زمان گسسته

$I \subseteq \mathbb{R}$ گسسته است اگر : $\forall t \in I$ یک همسایگی حول t مانند B وجود داشته باشد بطوریکه $B \cap I = \{t\}$

معمولا سیگنال زمان گسسته را بصورت

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^n$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$

$f: \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^n$

سیگنال $f: I \to \mathbb{R}$ را مقدار پیوسته یا آنالوگ می‌نامیم اگر خروجی تابع f بتواند مقادیر پیوسته $\mathbb{R}$ را به خود اختصاص دهد

سیگنال $f: I \to \mathbb{R}$ را یک سیگنال کوانتیزه می‌نامند اگر خروجی f مقادیر گسسته از $\mathbb{R}$ باشد.

PAPCO

Subject:
Date

$f: A \to B$

A \ B	پیوسته	گسسته
پیوسته	آنالوگ	نمونه برداری شده / زمان گسسته
گسسته	کوانتیزه	دیجیتال

مثال:

دمای اتاق : $t \to \mathbb{R}$

سنسور دما (کوانتیزه) : $t \to$ — — —

سیگنال دمای اتاق وارد شده داخل میکرو (دیجیتال) : $k \to$ — — —

زمان نمونه برداری

$x(t) \xrightarrow{T} x(kT) \Rightarrow x[k] \triangleq x(kT)$

سیگنال زمان پیوسته

$x(0), x(T), x(2T), \ldots, x(kT)$

سیگنال‌های مهم:

۱- سیگنال ضربه واحد گسسته :

$$\delta[k] = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

۲- پله واحد گسسته :

$$u[k] = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

PAPCO

Subject:
Date

تبدیل Z (دوطرفه):

دلیل استفاده از تبدیل لاپلاس: تبدیل معادلات دیفرانسیل و انتگرال کانولوشن به معادلات جبری (انجام کارهای جبری ساده‌تر است)

دلیل استفاده از تبدیل Z: " " تفاضلی به جبری

$x[k]$

$$Z\{x[k]\} = X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] z^{-k}$$

$z \in \mathbb{C}$

$X: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

یادآوری: تبدیل لاپلاس

$x(t)$

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st}\, dt$$ → تبدیل لاپلاس دوطرفه

منظور همان سیگنال است

تبدیل Z دنباله $x[k]$ در z_0 تعریف می‌شود اگر سری تعریف تبدیل Z به صورت مطلق همگرا باشد یعنی:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| x[k] z_0^{-k} \right| < M$$

ناحیه همگرایی تبدیل Z دنباله $x[k]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ROC = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| x[k] z^{-k} \right| < M \right\}$$

از ریاضیات دبیرستان داریم (دنباله هندسی):

$$1 + u + u^2 + \dots u^N = \frac{1 - u^{N+1}}{1 - u} \qquad \forall u \in \mathbb{C} - \{1\}$$

اثبات: طرفین وسطین: $(1-u)(1+u+u^2+\dots+u^N) = (1+u+\dots+u^N) - (u+u^2+\dots+u^{N+1}) = 1 - u^{N+1}$

تبدیل z های مهم :

$$\checkmark\ Z\{\delta[k]\} = 1$$

$$\checkmark\ Z\{u[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k] z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} z^{-k}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1-(z^{-1})^{N+1}}{1-z^{-1}} \ (*) = \boxed{\frac{1}{1-z^{-1}}}$$

$(*)\ |z^{-1}| < 1$

ROC : $|z| > 1$

$$\checkmark\ x[k] = a^k u[k] \quad a \neq 0 \Rightarrow X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k z^{-k}$$

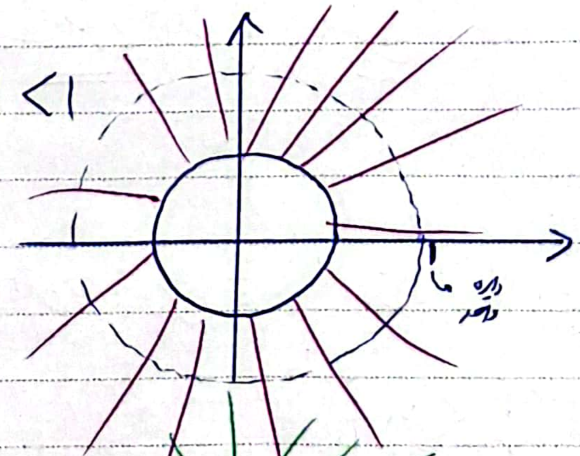
$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} a^k z^{-k} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^{-k} = \lim_{N\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{a}{z}\right)^{N+1}}{1-\frac{a}{z}}$$

$$\Rightarrow \boxed{X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}}$$

$$\boxed{\text{ROC: } \left|\frac{a}{z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > |a|}$$

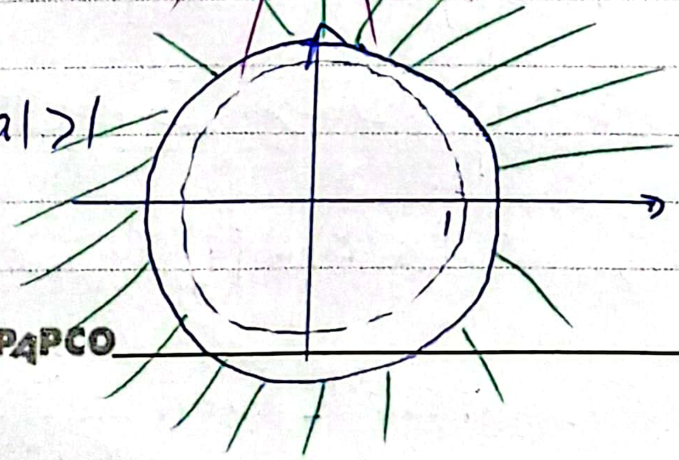
خارج از یک دایره

$|a| < 1$



* نکته: دایره واحد در بررسی پایداری
ارائه می‌شود.

$|a| > 1$



Subject:
Date

✓ $x[k] = \left(\frac{1}{۲}\right)^k u[k] \longrightarrow X(z) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{۲} z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{۲}$

✓ $x[k] = -a^k u[-k-1] \longrightarrow X(z) = ?$

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -a^k u[-k-1] z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{-1} -a^k z^{-k} \qquad k' = k+1 \rightarrow k = k'-1$$

$$= \sum_{k'=-\infty}^{0} -a^{k'-1} z^{-(k'-1)} = \sum_{k''=0}^{+\infty} -a^{-k''-1} z^{k''+1}$$

$$= -\frac{z}{a} \sum_{k''=0}^{\infty} \frac{z^{k''}}{a^{k''}} = -\frac{z}{a} \, \frac{1 - \left(\frac{z}{a}\right)^{N+1}}{1 - \frac{z}{a}} \xrightarrow{|z|<|a|}$$

$$X(z) = \frac{-\frac{z}{a}}{1 - \frac{z}{a}} \times \frac{-a/z}{-a/z} \Longrightarrow X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad ✓$$

راه دوم

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{-1} -a^k z^{-k} + 1 - 1$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{0} -a^k z^{-k} + 1 \overset{k' = -k}{=\!=} -\sum_{k'=0}^{+\infty} a^{-k'} z^{k'} + 1$$

$$= -\left(\lim_{N \to \infty} \frac{1 - \left(\frac{z}{a}\right)^{N+1}}{1 - \frac{z}{a}} \right) + 1 = 1 - \frac{1}{1 - \frac{z}{a}}$$

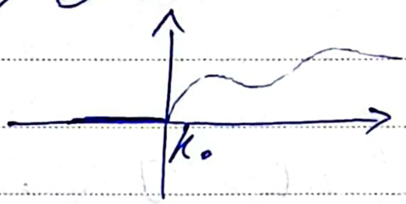
$$= \frac{-\frac{z}{a}}{1 - \frac{z}{a}} \times \frac{-\frac{a}{z}}{-\frac{a}{z}} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$\Longrightarrow X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad ✓$$

Subject:
Date

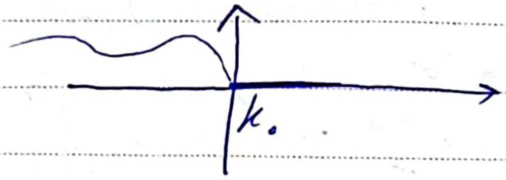
✓ سیگنال $x[k]$ را سمت راستی می‌نامند اگر k_0 ای وجود داشته باشد که

$$\forall k<k_0 \quad x[k]=0$$



✓ سیگنال سمت چپی، $x[k]$ را سمت چپی می‌نامند اگر k_0 ای وجود داشته باشد که

$$\forall k>k_0 \quad x[k]=0$$



✓ سیگنال $x[k]$ دوطرفه است اگر نه سمت چپی باشد و نه سمت راستی

✓ سیگنال $x[k]$ محدود در زمان است اگر هم سمت چپی باشد و هم سمت راستی

✓ اگر سیگنال سمت راستی باشد ← اگر z_0 داخل ناحیه همگرایی تبدیل Z آن باشد آنگاه

$|z|\geq|z_0|$ نیز داخل RoC است

✓ اگر سیگنال سمت چپی باشد ← اگر z_0 داخل ناحیه همگرایی تبدیل Z آن باشد آنگاه

$|z|\leq|z_0|$ نیز داخل RoC است

Subject:
Date

Roc

① Roc برای $x[k]$ ناحیه‌های دایره‌ای شکل

$|z_1| = |z_2| \qquad z_1 \in Roc \iff z_2 \in Roc$

به جز $|z|=\infty$

② $x[k]$ سمت راستی باشد $z_0 \in Roc$ آنگاه همه $|z|>|z_0|$ عضو Roc هستند

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]\, z^{-k}| = \sum_{k=0}^{+\infty} |x[k]\, z^{-k}| + \underline{\quad\quad} \qquad ⊛$$

↓ $x[k]$ سمت راستی است

تعداد جمله محدود برای $k<0$ هایی که $x[k] \neq 0$ است

$$|z| > |z_0| \rightarrow |z^{-1}| < |z_0^{-1}| \xrightarrow{\text{به توان } k} |z^{-k}| < |z_0^{-k}|$$

ادامه ⊛

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} |x[k]|\,|z^{-k}| + \underbrace{\quad\quad}_{\text{مقدار محدود}}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{+\infty} |x[k]|\,|z_0^{-k}| \leq M + \text{مقدار محدود} \ \checkmark$$

③ اگر $x[k]$ سمت چپی باشد و $z_0 \in Roc$ آنگاه همه zهایی که $|z|<|z_0|$

به جز $z=0$ عضو Roc هستند

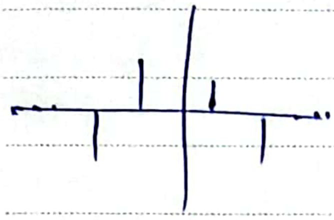
④ اگر $x[k]$ دوطرفه باشد (تهی است) Roc ناحیه حلقوی در صفحه z است (یا کلاً تهی است)

حلقوی

مثال: $x[k] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^k & k \geq 0 \\ 3^k & k < 0 \end{cases} \qquad x[k] = \begin{cases} (2)^k & k \geq 0 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^k & k < 0 \end{cases}$

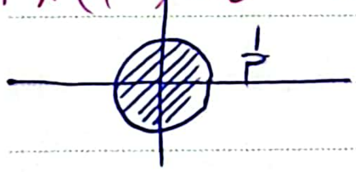
Subject:
Date

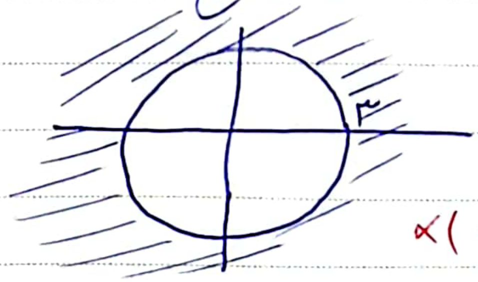
⑤ اگر $x[k]$ محدود در زمان باشد ROC کل صفحه است بجز احتمالاً $z=0$ ، $z=\infty$



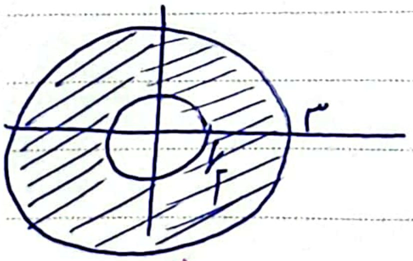
④ ROC شامل هیچ قطبی (ریشه‌های مخرج) از $X(z)$ نخواهد بود. معمولاً در این درس $X(z)$ یک تابع گویا از z است.

$\gamma(\frac{1}{2})^k u[-k-1] + \lambda(3^k) u[-k-1]$





$\alpha(\frac{1}{2})^k u[k] + \beta(3)^k u[k]$



$\theta(\frac{1}{2})^k u[k] + \zeta(3^k) u[-k-1]$

(در این درس معمولاً با سیگنال‌های سمت راستی و تبدیل z یک طرفه مواجهیم)

$$Z\{x[k]\} = \sum_{k=0}^{+\infty} x[k] z^{-k}$$

تبدیل z یک طرفه

* برای تبدیل z یک طرفه فرض می‌کنیم $x[k]$ برای $k<0$ صفر است.

PAPCO

Subject:
Date

ویژگی های تبدیل Z :

- خطی بودن

$x[k]$, $y[k]$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$ $\quad \in \mathbb{C}$

Ω_1 ناحیه همگرایی $\quad \Omega_2$ ناحیه همگرایی

$$\checkmark\ Z\{a x[k] + b y[k]\} = a Z\{x[k]\} + b Z\{y[k]\}$$

$$RoC = \Omega_1 \cap \Omega_2$$ ← حداقل ناحیه همگرایی

مثال

$x[k] = (\frac{1}{2})^k u[k]$ $\quad x[k] - y[k] = 0$ هیچ همگرایی ای در کل صفحه است

$y[k] = (\frac{1}{2})^k u[k] = x[k]$

RoC خارج دایره ای به شعاع $\frac{1}{2}$

اشتراک خارج دایره ای به شعاع $\frac{1}{2}$

- انتقال مختلط

$$X(z) = Z\{x[k]\} \qquad RoC: |z| > c$$

$a \neq 0$

$$\checkmark\ Z\{a^k x[k]\} = \sum a^k x[k] z^{-k} = \sum x[k] \left(\frac{z}{a}\right)^{-k}$$

$$= X\left(\frac{z}{a}\right) \qquad \left|\frac{z}{a}\right| > c \ : RoC$$

Subject:
Date

ـ انتقال حقیقی

$$Z(x[k]) = X(z)$$

$$Z\{x[k \pm m]\} \qquad (m>0)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k \pm m]\, z^{-k}$$

یا داریم،

$$y[k] = x[k \pm m]$$

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y[k]\, z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k \pm m]\, z^{-k} \quad \circledast$$

تعریف می‌کنیم: $h \triangleq k \pm m \longrightarrow -k = -h \pm m$

ادامه

$$\circledast = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} x[h]\, z^{-h \pm m} = z^{\pm m} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} x[h]\, z^{-h} = z^{\pm m} X(z)$$

ـ انتقال حقیقی برای تبدیل Z یک طرفه،

$(m>0)$

$h = k - m$
$\rightarrow -k = -h - m$

$$Z\{x[k]\} = X(z)$$

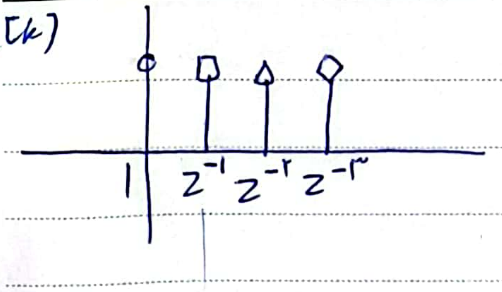
$$Z\{x[k-m]\} = \sum_{k=0}^{+\infty} x[k-m]\, z^{-k} = \sum_{h=-m}^{+\infty} x[h]\, z^{-h-m}$$

x[زمان منفی] = 0

$$= \sum_{h=-m}^{-1} x[h]\, z^{-h-m} + \sum_{h=0}^{+\infty} x[h]\, z^{-h-m} = z^{-m} X(z)$$

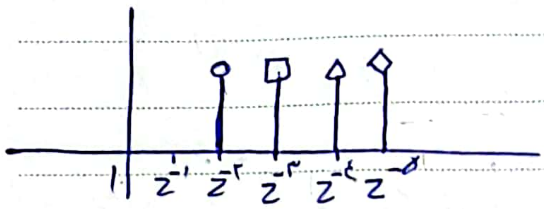
PAPCO

$x[k]$



$m=۲$

$x[k-۲]$



$m>0$ تک طرفه

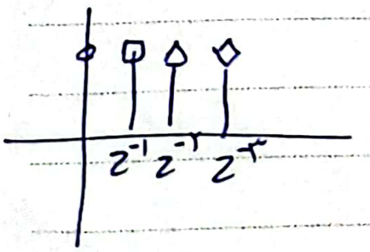
$$Z\{x[k]\} = X(z)$$

$$Z\{x[k+m]\} = \sum_{k=0}^{+\infty} x[k+m]\, z^{-k} \qquad h = k+m \rightarrow -k = -h+m$$

$$= \sum_{h=m}^{+\infty} x[h]\, z^{-h+m} + \sum_{h=0}^{m-1} x[h]\, z^{-h+m} - \sum_{h=0}^{m-1} x[h]\, z^{-h+m}$$

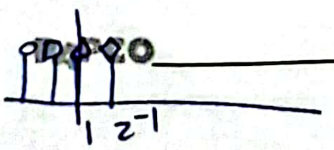
$$= \sum_{h=0}^{+\infty} x[h]\, z^{-h+m} - \sum_{h=0}^{m-1} x[h]\, z^{-h+m}$$

$$= z^{m} X(z) - \left(x[0]z^{m} + x[1]z^{m-1} + \dots + x[m-1]z\right)$$



$x[k]$

$x[k+۲]$



$Z\{x[k]\} = X(z)$ مشتق مختلط

$Z\{k\,x[k]\}$

$= \sum k\,x[k]\, z^{-k}$

$\overset{*}{=} -z \dfrac{d}{dz} X(z)$

$\dfrac{d}{dz} Z\{x[k]\}$

$= \dfrac{d}{dz} \sum x[k]\, z^{-k}$

$= \sum \dfrac{d}{dz}\left(x[k]\, z^{-k}\right)$

$= \sum -k\,x[k]\, z^{-(k+1)}$

$= -z^{-1} \sum k\,x[k]\, z^{-k}$ *

$Z\{k^2 x[k]\} = Z\{k\,(k\,x[k])\} = -z\dfrac{d}{dz}\left(-z\dfrac{d}{dz} X(z)\right)$

مثال

$-z\dfrac{d}{dz}\left\{-z\dfrac{d}{dz}\left[-z\dfrac{d}{dz}(F(z))\right]\right\}$

$= \left(-z\dfrac{d}{dz}\right)^3 F(z)$

✓ $Z\{k^m x[k]\} = \left(-z\dfrac{d}{dz}\right)^m X(z)$

مثال

✓ $Z\{u[k]\} = \dfrac{1}{1-z^{-1}} \times \dfrac{z}{z} = \dfrac{z}{z-1}$

[illegible] $Z\{k\,u[k]\} = -z\left(\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{z}{z-1}\right)\right) = -z\left(\dfrac{z-1-z}{(z-1)^2}\right)$

$= \dfrac{z}{(z-1)^2}$

تفاضل

$$Z\{x[k]\} = X(z)$$

✓ $\nabla x[k] = x[k] - x[k-1]$

✓ $\Delta x[k] = x[k+1] - x[k]$

✓ $Z\{x[k] - x[k-1]\} = X(z) - z^{-1}X(z) = (1 - z^{-1})X(z)$

✓ $Z\{x[k+1] - x[k]\} = zX(z) - z\,x[0] - X(z)$

$m=1$

شیفت زمان در تبدیل Z یک طرفه

$$= (z-1)X(z) - z\,x[0]$$

$$Z\{x[k] - x[k-1]\} = (1 - z^{-1})X(z)$$

✓ $y[k] = \sum_{h=0}^{k} x[h] \qquad Z\{x[k]\} = X(z)$

$Z\{y[k]\} = ?$

$$y[k] - y[k-1] = \sum_{h=0}^{k} x[h] - \sum_{h=0}^{k-1} x[h] = x[k]$$

$$(1 - z^{-1})Y(z) = X(z) \Rightarrow Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} X(z)$$

قضیه جمع جزئی (پایه‌ای)

Subject:
Date

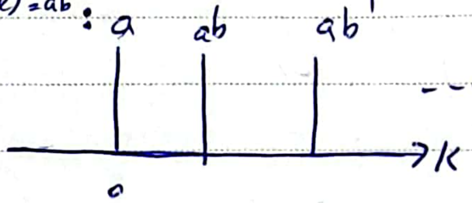
$$\left.\begin{array}{l} x[k] = ab^k \\ x[k] = a^k \\ x[k] = \sin(ak) \end{array}\right\} x_a[k]$$

تبدیل زمان گسسته تابع پارامتر $\underline{a}$ باشد $x_a[k]$

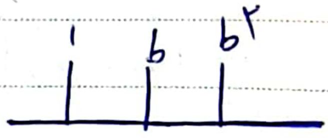
$$\checkmark\ Z\{x_a[k]\} = X(z,a)$$

$$\hookrightarrow Z\left\{\frac{\partial}{\partial a}(x_a[k])\right\} = \frac{\partial}{\partial a}X(z,a) \quad \text{(خطی است)}$$

$x[k]=ab^k$:



$$\Longrightarrow \frac{\partial x_a[k]}{\partial a}$$



$$Z\{a^k u[k]\} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$\Big\downarrow \frac{\partial}{\partial a}$$

$$Z\{k a^{k-1} u[k]\} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right) = \frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$$

$$\checkmark\ Z\{k a^k u[k]\} = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$$

- قضیه مقدار اولیه (برای تبدیل Z یک طرفه یا $\left(\begin{array}{l} x[k]=0 \\ k<0 \end{array}\right.$

$$\checkmark\ x[0] = \lim_{z\to+\infty} X(z)$$

اثبات:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x[k]z^{-k} = x[0] \underbrace{+ x[1]z^{-1} + \cdots}$$

وقتی $z \to$ بی نهایت میل کند این ترم ها صفر شود و تنها $x[0]$ باقی می ماند

Subject:
Date

• قضیه مقدار نهایی تبدیل z یک طرفه: اگر $z=1$ در RoC $X(z)$ باشد یا $|z|>1$ RoC $X(z)$ باشد و $X(z)$ حداکثر یک قطب ساده در $z=1$ داشته باشد آنگاه داریم:

علّی $x[k]$
$x[k]=0$ for $k<0$

$$\lim_{k\to\infty} x[k] = \lim_{z\to 1} (1-z^{-1})X(z)$$

* عبارت دیگری برای قضیه مقدار نهایی:

$|z|>1 \subseteq RoC$

$|z|>1 \subseteq RoC$ و در $|z|=1$ حداکثر یک قطب ساده در $z=1$ دارد و قطب دیگری در $|z|=1$ ندارد.

* عبارت دیگری برای قضیه مقدار نهایی:

همه ی قطب های $X(z)$ داخل دایره واحد باشند حداکثر یک قطب روی $z=1$

اثبات:

تعریف می کنیم $y[k] = x[k] - x[k-1] \rightarrow x[k] = \sum_{h=0}^{k} y[h]$

$$= \cancel{x[0]} - \cancel{x[-1]} + \cancel{x[1]} - \cancel{x[0]} + \cancel{\dots} + x[k] - \cancel{x[k-1]}$$

$$= x[k]$$

$$\Rightarrow Y(z) = (1-z^{-1})X(z)$$

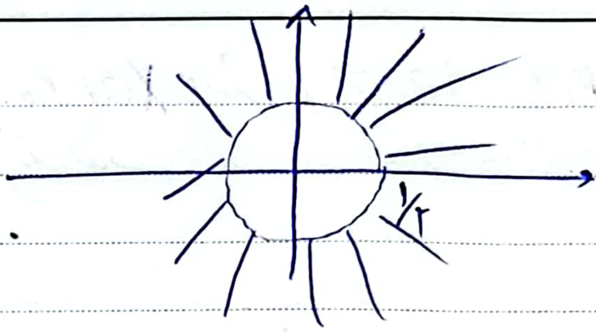
$\sum_{h=0}^{+\infty} y[h] z^{-h}$ وقتی z به سمت یک میل کند

$$\lim_{k\to\infty} x[k] = \lim_{k\to\infty} \sum_{h=0}^{k} y[h] = \sum_{h=0}^{\infty} y[h]$$

$$= \lim_{z\to 1} Y(z) = \lim_{z\to 1} (1-z^{-1})X(z)$$ → اثبات شد ✓

Subject:
Date

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

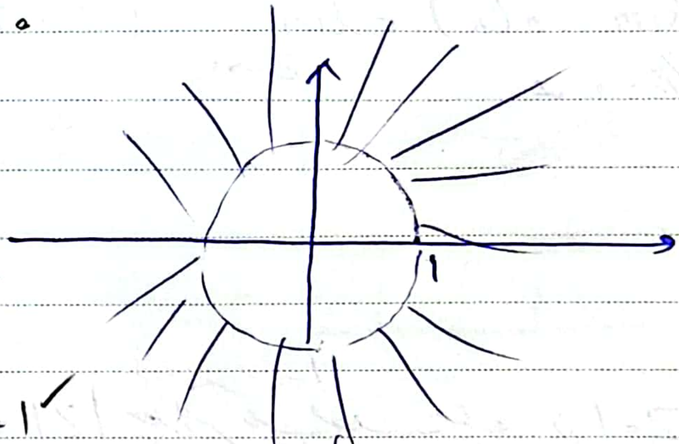


✓

$$\Rightarrow x[k] = \left(\frac{1}{2}\right)^k u[k] \rightarrow x[\infty] = 0$$

طبق قضیه مقدار نهایی $x[\infty] = \lim_{z\to 1} \frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = 0$

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

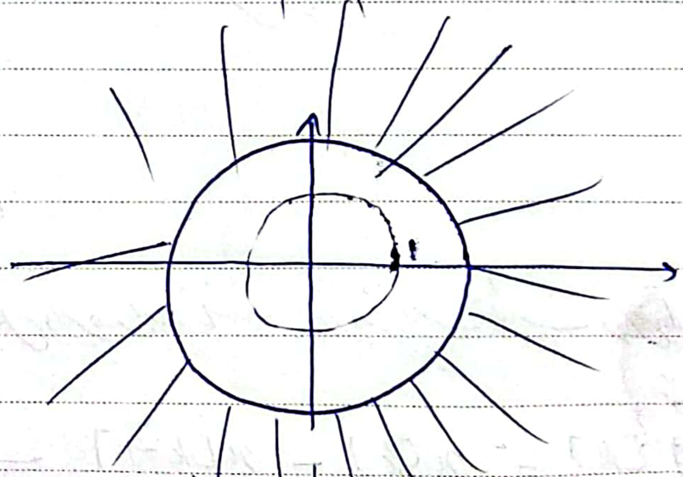


✓

$$\Rightarrow x[k] = u[k] \rightarrow x[\infty] = 1 \ \checkmark$$

طبق قضیه مقدار نهایی $x[\infty] = \lim_{z\to 1} \frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}} = 1 \ \checkmark$

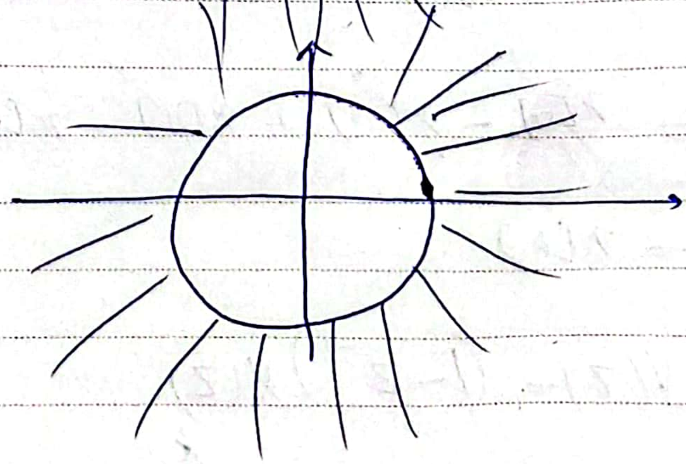
$$X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}$$



X

$$\Rightarrow x[k] = 2^k u[k]$$

$$X(z) = \frac{1}{1+z^{-1}}$$



X

$$\Rightarrow x[k] = (-1)^k u[k]$$

Subject:
Date

اگر $(\text{for } k\leq 0)\ x[k]=0$

$$\int_{z}^{+\infty} \frac{X(\bar{z})}{\bar{z}}\, d\bar{z} = Z\left\{\frac{x[k]}{k}\right\}$$

اثباتش در جلسه بعد گفته می‌شود.

مثال:

① $x(t) = e^{at}u(t) \xrightarrow{T} x[k] = e^{akT}u[k]$

$= (e^{aT})^k u[k]$

می‌دانیم: $b^k u[k] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1-bz^{-1}}$

$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{1-e^{aT}z^{-1}}$

$x[k] \triangleq x(kT)$

② $x(t) = \sin(\omega t)u(t) \xrightarrow{T} x[k] = \sin(k\omega T)u[k]$

$u[kT]$ یا $u[k]$ فرقی ندارد!

$$x[k] = \frac{e^{jk\omega T} - e^{-jk\omega T}}{2j} u[k]$$

$$X(z) = \frac{1}{2j}\left[Z\left\{e^{jk\omega T}u[k]\right\} - Z\left\{e^{-jk\omega T}u[k]\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1-e^{j\omega T}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-j\omega T}z^{-1}}\right]$$

$$X(z) = \frac{1}{2j}\left(\frac{\cancel{1} - e^{-j\omega T}z^{-1} - \cancel{1} + e^{j\omega T}z^{-1}}{1-(e^{j\omega T}+e^{-j\omega T})z^{-1}+z^{-2}}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{2j}(e^{j\omega T}-e^{-j\omega T})\, z^{-1}}{1-2\cos(\omega T)z^{-1}+z^{-2}}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{\sin(\omega T)\, z^{-1}}{1-2\cos(\omega T)z^{-1}+z^{-2}} \quad \circledast \qquad |z|>1$$

- $x(t) = e^{-at}\sin(\omega t)\,u(t) \xrightarrow{T}$

$$x[k] = \underbrace{e^{-akT}}_{(e^{-aT})^k}\sin(\omega kT)\,u[k]$$

می‌دانیم: $\begin{cases} Z\{a^k y[k]\} = Y(\frac{z}{a}) \\ Z\{y[k]\} = Y(z) \end{cases}$

$\circledast$ با توجه به

$$X(z) = \frac{\sin(\omega T)(ze^{aT})^{-1}}{1-2\cos(\omega T)(ze^{aT})^{-1}+(ze^{aT})^{-2}}$$

$$|ze^{aT}|>1 \rightarrow |z|>\frac{1}{|e^{aT}|}$$

- $x(t) = te^{at}u(t) \xrightarrow{T} ?\!: x[k] = kTe^{akT}u[k]$

$$= Tk(e^{aT})^k u[k]$$

$\frac{\partial}{\partial a}\Big\downarrow \; y[k] = e^{akT}u[k] \rightarrow Y(z) = \frac{1}{1-e^{aT}z^{-1}}$

$x[k] = kTe^{akT}u[k] \qquad X(z) = \frac{\partial}{\partial a}Y(z,a) = \frac{Te^{aT}z^{-1}}{(1-e^{aT}z^{-1})^2}$

Subject:
Date

اثبات رابطه جلسه پیش:

$$\int_{z}^{+\infty} \frac{X(\bar{z})}{\bar{z}}\, d\bar{z} \qquad X(z) = \mathcal{Z}\{x[k]\} \qquad x[k]=0,\ k\leq 0$$

$$= \int_{z}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} x[k]\, \bar{z}^{-(k+1)}\, d\bar{z}$$

$$= \int_{z}^{+\infty} \left(x[1]\,\bar{z}^{-2} + x[2]\,\bar{z}^{-3} + \dots \right) d\bar{z}$$

$$= -\frac{1}{1} x[1]\,\bar{z}^{-1} - \frac{1}{2} x[2]\,\bar{z}^{-2} + \dots \Big|_{z}^{+\infty}$$

$$= x[1]\, z^{-1} + \frac{1}{2} x[2]\, z^{-2} + \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x[k]}{k} z^{-k} = \mathcal{Z}\left\{ \frac{x[k]}{k} \right\} \checkmark$$

● کانولوشن حقیقی ، $x_1[k]$, $x_2[k]$

(اتراج)

$$\checkmark\ y[k] = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} x_1[h]\, x_2[k-h] = x_1 * x_2 = x_1[k] * x_2[k]$$

تبدیل z کانولوشن ← برابر است با حاصلضرب تبدیل z هر کدام از سیگنالها

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y[k]\, z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} x_1[h]\, x_2[k-h] \right) z^{-k}$$

تعریف می‌کنیم $\quad l \triangleq k-h \rightarrow -k = -l-h$

$$= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} x_1[h]\, x_2[l]\, z^{-h} z^{-l}$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(z^{-l} x_2[l] \underbrace{\sum_{h=-\infty}^{+\infty} x_1[h] z^{-h}}_{X_1(z)} \right)$$

$$= X_1(z) X_2(z) \rightarrow \boxed{Y(z) = X_1(z) X_2(z)}$$

$\forall k < 0 \rightarrow x_1[k] = 0$

$\forall k < 0 \rightarrow x_2[k] = 0$

$$y[k] = \sum_{h=0}^{k} x_1[h] x_2[k-h]$$

$$\overbrace{y[0] z^0 \quad x_1[0] x_2[0] z^0}^{x_2[0] X_1(z)}$$

$$\overbrace{y[1] z^{-1} \quad x_1[0] x_2[1] z^{-1}}^{x_2[1] X_1(z) z^{-1}} + x_1[1] x_2[0] z^{-1}$$

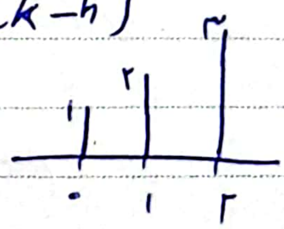
$$y[2] z^{-2} \quad x_1[0] x_2[2] z^{-2} + x_1[1] x_2[1] z^{-2} + x_1[2] x_2[0] z^{-2}$$

مثال،

$$x[k] = u[k] * u[k] = \sum_{h=0}^{k} u[h] u[k-h]$$

طبق بالا

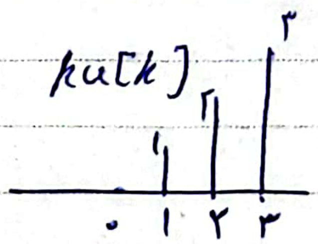
$$\doteq (k+1) u[k] = (k+1) u[k+1]$$



$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{1}{(1-z^{-1})^2} \quad (*)$$

$$Z\{k u[k]\} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$k u[k]$



$$k u[k] = x[k-1]$$

$$\hookrightarrow Z\{k u[k]\} = z^{-1} X(z) \overset{(*)}{=} \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

Subject:
Date

عکس تبدیل Z

گسترش به کسرهای جزئی

$$X(z) = \underbrace{\frac{z+\cdots}{z+\cdots}}_{z^{-1}\downarrow} + \cdots + \underbrace{\frac{z+\cdots}{z+\cdots}}_{z^{-1}\downarrow}$$

$x[k]$ ✓

مثال

$$X(z) = \frac{az^2}{(z-b)(z-c)} = \alpha\frac{z+d}{z-b} + \beta\frac{z+e}{z-c}$$

$$Z\{u[k]\} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

$$Z\{a^k u[k]\} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \qquad |z|>|a|$$

$$Z\{-a^k u[-k-1]\} = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|<|a|$$

$$Z\{k u[k]\} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

$$= \prod_{i,j}(z+\alpha_i)^{n_i}(z^2+\beta_j z+\gamma_j)^{m_j} \qquad \alpha_i,\beta_j,\gamma_j \in \mathbb{R}$$

$$= \prod_i (z+c_i)^{l_i} \qquad c_i \in \mathbb{C}$$

PAPCO

Subject:
Date

$$X(z) = \frac{5z}{(z-1)^2(z-3)} = \frac{c_1}{(z-1)^2} + \frac{c_2}{z-1} + \frac{c_3}{z-3}$$

در تبدیل z دوطرفه به ROC توجه کنیم

* معمولاً استفاده از گسترش $\frac{X(z)}{z}$ به محاسبات کمتری نیاز دارد

مثال:

$$X(z) = \frac{5z^2}{(z-\frac{1}{2})(z-3)} = \frac{5}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-3z^{-1})}$$

یا می‌توانیم به روش زیر تجزیه کنیم

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{5z}{(z-\frac{1}{2})(z-3)} = \frac{\frac{5/2}{-5/2}}{z-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{15}{5/2}}{z-3}$$

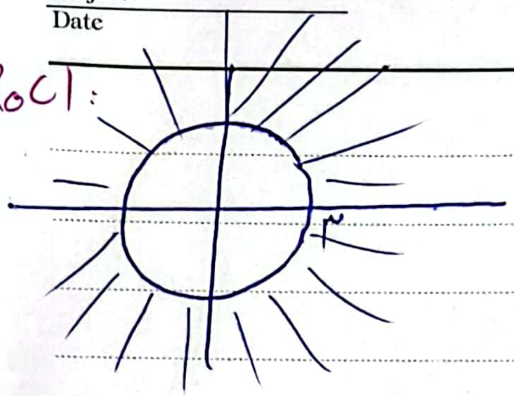
$$= \frac{-1}{z-\frac{1}{2}} + \frac{6}{z-3}$$

$$\rightarrow X(z) = \frac{-z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{6z}{z-3} = \frac{-1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{6}{1-3z^{-1}}$$

۳ تا ROC می‌توانیم برای این X(z) متصور شویم

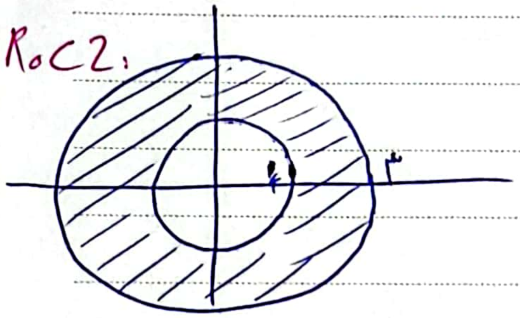
Subject:
Date

RoC1:



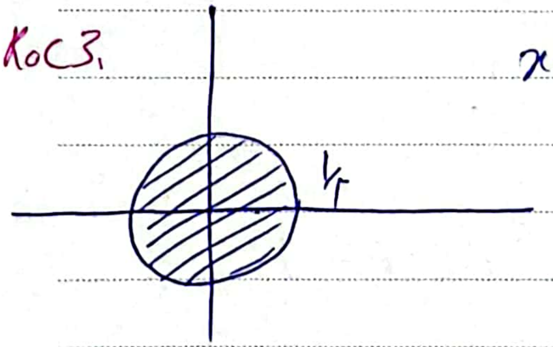
$$x[k] = -\left(\tfrac{1}{2}\right)^k u[k] + 4(3)^k u[k]$$

RoC2:



$$x[k] = -\left(\tfrac{1}{2}\right)^k u[k] - 4(3^k)u[-k-1]$$

RoC3:



$$x[k] = +\left(\tfrac{1}{2}\right)^k u[-k-1] - 4(3^k)u[-k-1]$$

۲) استفاده از انتگرال عکس تبدیل

۳) استفاده از تقسیم

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

برای سیگنال سمت راستی صورت و مخرج را بر حسب z^{-1}

$x[k]=0$, $k<0$

می‌نویسیم در هر مرحله از تقسیم باقیمانده جملات مرتبه پایین‌تر

از z^{-1} را از دست می‌دهد

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1-az^{-1} \\ \hline -(1-az^{-1}) & 1+az^{-1} \\ \hline az^{-1} & \\ -(az^{-1}-a^2z^{-2}) & \\ \hline a^2z^{-2} & \\ \vdots & \end{array}$$

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \cdots$$

Subject:
Date

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x[k] z^{-k}$$

$$x[0] = 1$$
$$x[1] = a \quad \Rightarrow \quad x[k] = a^k u[k]$$
$$x[2] = a^2$$
$$\vdots$$

$$X(z) = \frac{z}{z-a}$$

$$\begin{array}{l|l} z & z-a \\ \hline -\left(-\frac{z^2}{a} + z\right) & -\frac{z}{a} - \frac{z^2}{a^2} - \cdots \\ \hline \frac{z^2}{a} & \\ -\left(-\frac{z^3}{a^2} + \frac{z^2}{a}\right) & \\ \hline \frac{z^3}{a^2} & \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x[0] = 0 \\ x[-1] = -\frac{1}{a} \\ x[-2] = -\frac{1}{a^2} \\ \vdots \end{cases}$$

تحلیل دست چپ

$$x[k] = -a^k u[-k-1]$$

۲) استفاده از رابطه‌ی بازگشتی

$$X(z) = \frac{5z^2}{(z-\frac{1}{2})(z-3)}$$

$$\delta[k] \xrightarrow{\Delta(z)} \boxed{X(z)} \xrightarrow{Y(z)} y[k]$$

$$Y(z) = X(z)$$

$$Y(z) = X(z)\, U(z)$$

$$Y(z) = \frac{5z^2}{(z-\frac{1}{2})(z-3)} U(z)$$

PAPCO

$$Y(z) = \frac{5}{1 - \frac{7}{2}z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2}} U(z)$$

CamScanner

$$\left(1 - \frac{7}{2} z^{-1} + \frac{3}{2} z^{-2}\right) Y(z) = 5U(z)$$

$$y[k] - \frac{7}{2} y[k-1] + \frac{3}{2} y[k-2] = 5u[k]$$

y علی است

$$y[k] = \frac{7}{2} y[k-1] - \frac{3}{2} y[k-2] + 5\delta[k]$$

رابطه بازگشتی

② استفاده از انتگرال عکس تبدیل z

$$x[k] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{k-1} X(z)\, dz$$

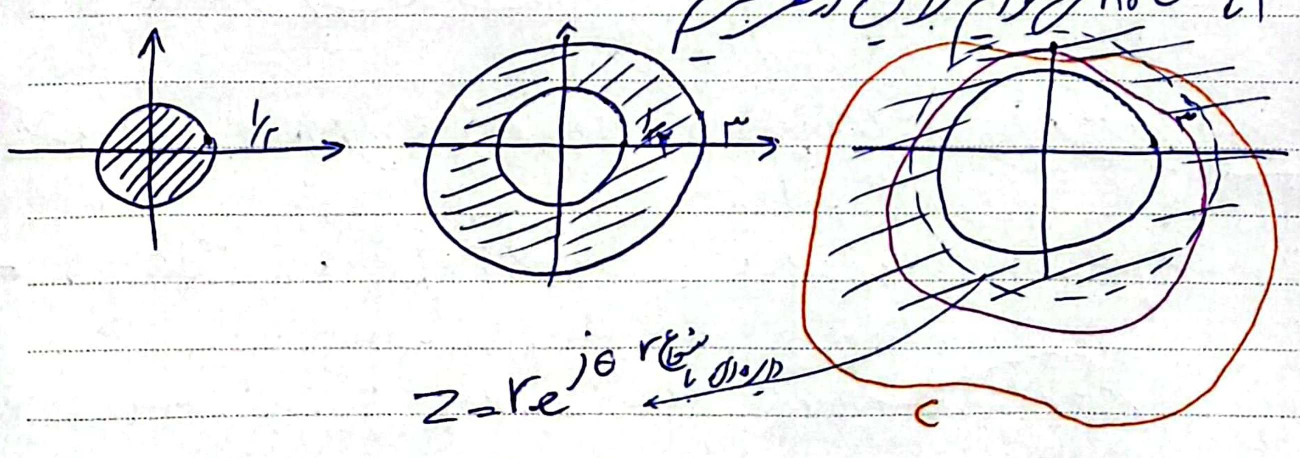
C: داخل ناحیه همگرایی X(z)

C ⟶ مسیر بسته ساده خلاف جهت عقربه ساعت

مثال،

$$X(z) = \frac{5z^2}{(z-\frac{1}{2})(z-3)}$$

۳ تا ROC می‌توانیم برایش در نظر بگیریم



$z = re^{j\theta}$ ⟵ دایره با شعاع r

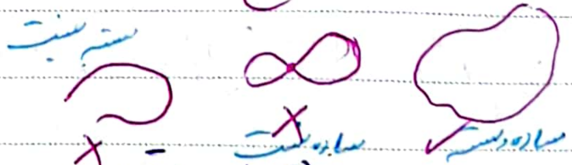
$0 \le \theta < 2\pi$

Subject:
Date

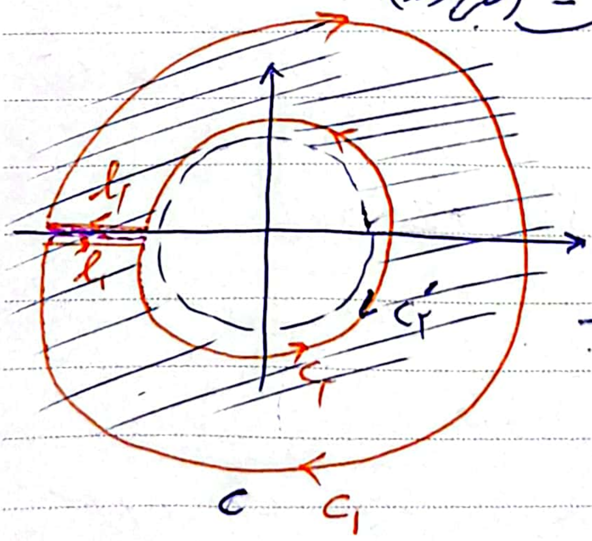
● اصل آگوستن کوشی: اگر تابع $f(z)$ در ناحیه $D \subseteq \mathbb{C}$ تحلیلی باشد
نقطه تکین نداشته باشد
و C یک خم ساده بسته در D باشد آنگاه،

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

خودش را قطع نکند



* مثلاً، f روی ناحیه هاشور خورده تحلیلی است (قطب ندارد)



$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

$$\to \oint_{C_1} + \oint_{C_2} + \oint_{l_1} + \oint_{l_2} = 0 \quad (1)$$

l_1 و l_2 را از نزدیک به هم می‌کنیم $\Leftarrow$

$$\oint_{l_1} + \oint_{l_2} = 0$$

$$\underline{(1)} \Rightarrow \oint_{C_1} = -\oint_{C_2} = \oint_{C_2'}$$

(C_2' خلاف جهت C_2 است)

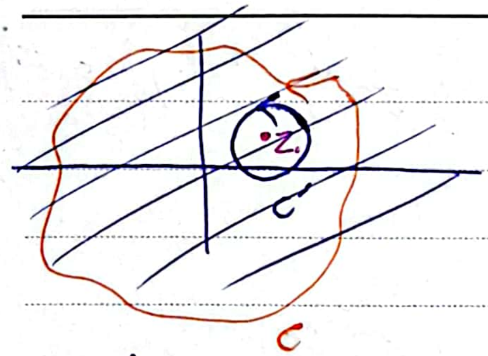
نکته: مادامی که داخل ناحیه تحلیلی بودن هستیم می‌توانیم مسیر انتگرال‌گیری را دفورمه کنیم

* تابع $\psi(z)$ در ناحیه D تحلیلی است و C یک خم ساده بسته در D است. z_0 داخل C است جهت C هم خلاف جهت عقربه‌های ساعت در نظر می‌گیریم

$$\oint_C \frac{\psi(z)}{z-z_0}\,dz = ?$$

$\psi \quad \psi$

Subject:
Date



c' دایره‌ای به شعاع ε حول z_0 است

$$\oint_C \frac{\psi(z)}{z-z_0}\,dz = \oint_{c'} \frac{\psi(z)}{z-z_0}\,dz$$

$z = z_0+\varepsilon e^{j\theta} \rightarrow dz = j\varepsilon e^{j\theta}\,d\theta$

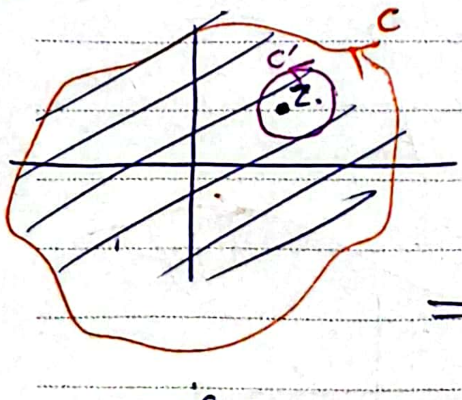
$0<\theta<2\pi$

$$\Rightarrow \oint_{c'} \frac{\psi(z)}{z-z_0}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{\psi(z_0+\varepsilon e^{j\theta})}{z_0+\varepsilon e^{j\theta}-z_0}\, j\varepsilon e^{j\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\psi(z_0+\varepsilon e^{j\theta})}{\cancel{\varepsilon e^{j\theta}}}\, j\cancel{\varepsilon e^{j\theta}}\,d\theta = j\int_0^{2\pi} \psi(z_0+\varepsilon e^{j\theta})\,d\theta$$

$$= 2\pi j\,\psi(z_0)$$

* تابع ψ در D تحلیلی است c خم ساده بسته CCW در D و z_0 داخل خم



$$\oint_C \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^2}\,dz$$ c است

$$= \oint_{c'} \frac{\psi(z)\,dz}{(z-z_0)^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\psi(z_0+\varepsilon e^{j\theta})}{(z_0+\varepsilon e^{j\theta}-z_0)^2}$$

$\times j\varepsilon e^{j\theta}\,d\theta$

$$= j\int_0^{2\pi} \frac{\psi(z_0+\varepsilon e^{j\theta})}{(\varepsilon e^{j\theta})^{\cancel{2}}}\,d\theta$$

Subject:
Date

$$= j\int_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon e^{j\theta}}\left(\psi(z_0) + \frac{d}{dz}\psi(z)\Big|_{z_0}\varepsilon e^{j\theta} + \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\psi(z)\Big|_{z_0}(\varepsilon e^{j\theta})^2 + \dots\right.$$

$$= \frac{j}{\varepsilon}\psi(z_0)\int_0^{2\pi} e^{-j\theta}\,d\theta + j\frac{d}{dz}\psi(z)\Big|_{z_0}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$+\varepsilon\left(\quad\right) = \frac{j}{\varepsilon}\psi(z_0)\times\frac{-1}{j}\left(\cancel{e^{-j2\pi}-e^{-j0}}\right) + j2\pi\frac{d}{dz}\psi(z)\Big|_{z_0} + 0$$

بسمت صفر میل میکند

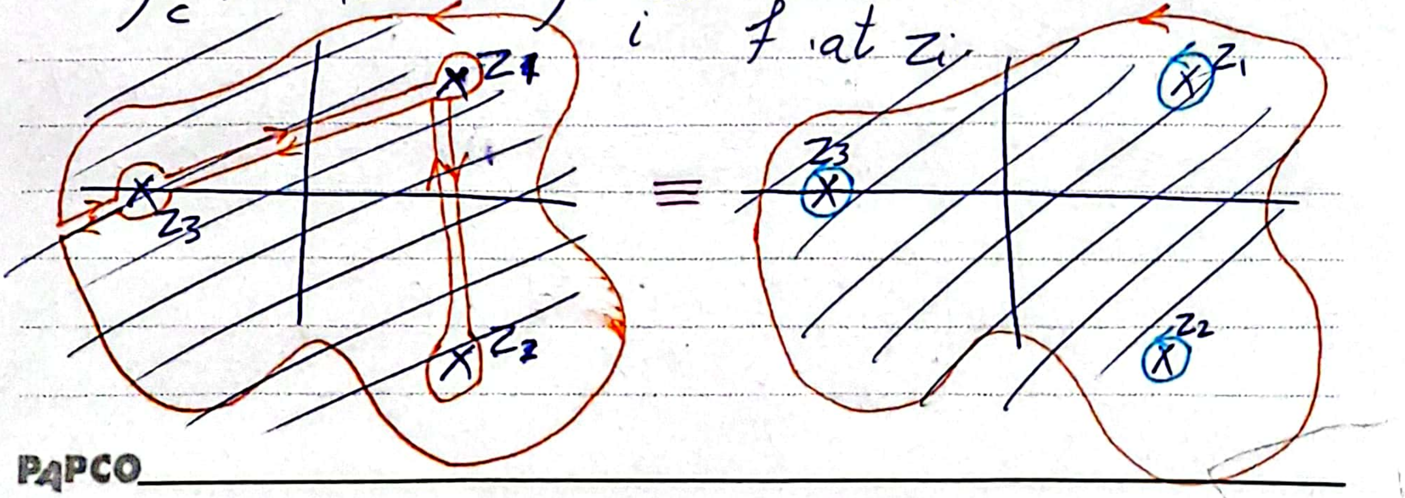
$$= 2\pi j\,\frac{d}{dz}\psi(z)\Big|_{z_0} \rightarrow$$ مانده Residue

$$\oint_C \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}dz = 2\pi j\,\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\psi(z)\Big|_{z_0}$$ رابطه مهم *

CCW درجهت

اگر $f(z)$ در تعدادی نقطه نا/غیر تحلیل باشد (در نقاط z_i داخل مسیر بسته ساده غیر تحلیل باشد.

$$* \oint_C f(z)\,dz = 2\pi j\sum_i \text{Residue of } f \text{ at } z_i$$

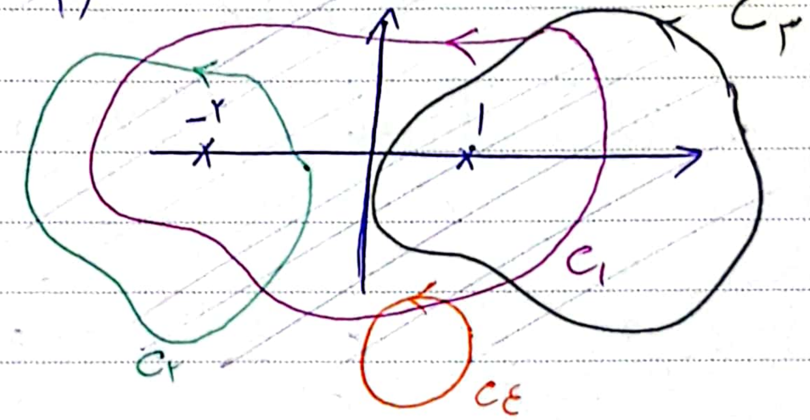


PAPCO

اینا که cw هستند؟!

$$\cancel{x[-1] = \frac{1}{j2\pi}\oint \frac{1}{(z-\frac{1}{2})}}$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)}$$



$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z+2} \qquad \varphi(z) = \frac{1}{z-1}$$

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{z-1} \qquad \psi(z) = \frac{1}{z+2}$$

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = 2\pi j\,\psi(1) + j2\pi\,\varphi(-2)$$

$$\oint_{C_2} f(z)\,dz = 2\pi j\,\varphi(-2)$$

$$\oint_{C_3} f(z)\,dz = j2\pi\,\psi(1)$$

$$\oint_{C_4} f(z)\,dz = 0$$

X(z) داخل ناحیه همگرایی
مسیر بسته ساده
در جهت ccw

نکته:

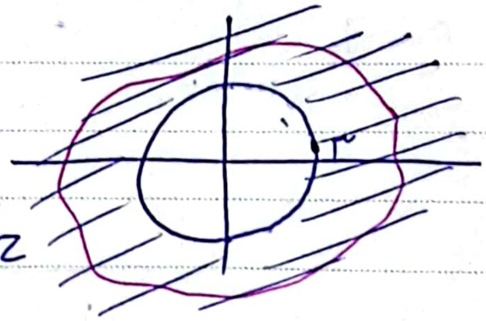
مرجع $$x[k] = \frac{1}{j2\pi}\oint_{C} z^{k-1} X(z)\,dz$$

$$= \frac{1}{\cancel{2\pi j}}\left(\cancel{2\pi j}\sum \mathrm{Res}\, z^{k-1} X(z)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{x[k] = \sum \text{Res of } z^{k-1} X(z)}$$

Subject:
Date

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-\frac{1}{2})(z-3)}$$



$$x[k] = \frac{1}{j2\pi} \oint_c z^{k-1} X(z)\, dz$$

$$x[0] = \frac{1}{j2\pi} \oint_c z^{-1} X(z)\, dz$$

$$= \frac{1}{j2\pi} \oint_c \frac{z}{(z-\frac{1}{2})(z-3)}\, dz$$

نقاط غیر تحلیلی

$$\begin{cases} z = \frac{1}{2} \\ z = 3 \end{cases}$$

$$x[0] = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-3} + \frac{3}{3-\frac{1}{2}} = 1$$

$$x[1] = \frac{(\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{2}-3} + \frac{3^2}{3-\frac{1}{2}} \qquad \frac{1}{j2\pi} \oint \frac{z^2}{(z-\frac{1}{2})(z-3)}$$

$$x[2] = \frac{(\frac{1}{2})^3}{\frac{1}{2}-3} + \frac{3^3}{3-\frac{1}{2}} \qquad \frac{1}{j2\pi} \oint \frac{z^3}{(z-\frac{1}{2})(z-3)}$$

$$x[k] = \frac{(\frac{1}{2})^{k+1}}{(\frac{1}{2}-3)} + \frac{3^{k+1}}{3-\frac{1}{2}} \qquad \frac{1}{j2\pi} \oint \frac{z^{k+1}}{(z-\frac{1}{2})(z-3)}$$

Subject:
Date

$$x[-1] = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z-3)}\, dz$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}-3} + \frac{1}{3-\frac{1}{2}} = 0$$

$$x[-2] = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1}{z(z-\frac{1}{2})(z-3)}\, dz$$

$$= \frac{1}{(-\frac{1}{2})(-3)} + \frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-3)} + \frac{1}{3(3-\frac{1}{2})} = 0$$

$$x[-3] = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1}{z^2(z-\frac{1}{2})(z-3)}\, dz$$

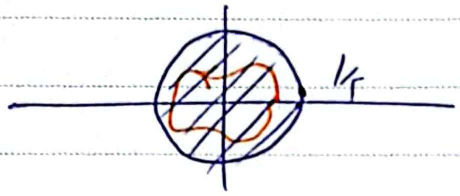
$$x[-3] = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z-3)}\right)\Bigg|_{z=0} + \frac{1}{\frac{1}{4}(\frac{1}{2}-3)}$$

$$+ \frac{1}{9(3-\frac{1}{2})} = \frac{-(2z-\frac{7}{2})}{(z-\frac{1}{2})^2(z-3)^2}\Bigg|_0 - \frac{8}{5} + \frac{2}{45}$$

$$= \frac{14}{9} - \frac{8}{5} + \frac{2}{45} = \frac{14\times5 - 8\times9 + 2}{45} = 0$$

PAPCO

از ناحیه همگرایی به صورت زیر بود نتایج به چه صورت تغییر می‌کرد؟



$$x[0] = \frac{1}{2\pi j}\oint_c z^{-1}X(z)\,dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{z}{(z-\frac{1}{2})(z-3)}\,dz = 0$$

$$x[1] = \frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{z^2}{(z-\frac{1}{2})(z-3)}\,dz = 0$$

به همین ترتیب $x[2] = 0$

$\vdots$

$x[k] = 0$

$$x[-1] = \frac{1}{j2\pi}\oint_c \frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z-3)}\,dz = 0$$

$$x[-2] = \frac{1}{(-\frac{1}{2})(-3)}$$

$$x[-3] = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z-\frac{1}{2})(z-3)}\right)\Bigg|_{z=0} = \frac{-(2z-\frac{7}{2})}{(z-\frac{1}{2})^2(z-3)^2}\Bigg|_{0} = \frac{14}{9}$$

* نکته: اگر $X(z)$ یک تابع گویا و درجه صورت کمتر مساوی درجه مخرج باشد

$$\frac{1}{j2\pi}\oint_{c} z^{k-1}X(z)\,dz$$

$$= -\left(\text{مجموع مانده های } z^{k-1}X(z) \text{ خارج از مسیر } c\right)$$

Subject:
Date

استفاده از تبدیل z برای حل معادلات تفاضلی:

مثال:

$$y[k] + a_1 y[k-1] + a_2 y[k-2] = b_1 u[k-1] + b_2 u[k-2]$$

$$\xrightarrow{z} Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) = b_1 z^{-1} U(z) + b_2 z^{-2} U(z)$$

$$\rightarrow (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) Y(z) = (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) U(z)$$

$$Y(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} U(z)$$

برای بدست آوردن پاسخ یکتا باید شرایط اولیه داشته باشیم (به تعداد کافی) مانند معادلات دیفرانسیل

در این مثال کافیست ۲ مقدار از $y[k]$ را داشته باشیم

$$y[k+2] + y[k-1] = u[k] \xrightarrow{z} z^2 Y(z) + z^{-1} Y(z) - z^2 y[0] - z y[1] = U(z)$$

یا می‌توانیم تغییر متغیر دهیم

$$k+2 = k' \Rightarrow y[k'] + y[k'-3] = u[k'-2]$$

مثال:

$$y[k] - 2y[k-1] = e[k-1] \qquad e[k] = 4^k u[k]$$

$$\cancel{y[-1] = \tfrac{1}{2}} \quad y[0] = 1$$

نیاز به یک شرط اولیه داریم (بیشترین فاصله زمانی)

Subject:
Date

پاسخ مسئله

$$y_h[k] = A a^k$$

$$A a^k - 2A a^{k-1} = 0 \Rightarrow a^{k-1}(Aa - 2A) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{a = 2}}$$

$$y_p[k] = B 4^k \to B 4^k - 2B 4^{k-1} = 4^{k-1} \Rightarrow 4B - 2B = 1 \to B = \frac{1}{2}$$

$$y[k] = y_p[k] + y_h[k] \Rightarrow \overset{\frac{1}{2}}{\cancel{B}}\, 4^k + A 2^k$$

$$\cancel{y[0] = 1 \Rightarrow B + A = 1}$$

$$\cancel{y[-1] = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{B}{4} + \frac{A}{2} = \frac{1}{2}}$$

$$\cancel{\Rightarrow A = 1,\ B = 0}$$

$$y[0] = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$y[k] = \frac{1}{2} 4^k + \frac{1}{2} 2^k$$

روش دیگر:

$$y[k+1] - 2y[k] = e[k]$$

$$\xrightarrow{Z} zY(z) - zy[0] - 2Y(z) = E(z) \qquad y[0] = 1,\quad E(z) = \frac{1}{1-4z^{-1}}$$

$$(z-2)Y(z) = E(z) + zy[0] \Rightarrow Y(z) = \frac{1}{z-2}E(z) + \frac{z}{z-2}y[0]$$

$$\to y[k] = Z^{-1}\left\{\frac{1}{(z-2)(1-4z^{-1})}\right\} + Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-2z^{-1}}\right\}$$

PAPCO

Subject:
Date

معادلات تفاضلی خطی با ضرایب متغیر به صورت کلی قابل حل با استفاده از تبدیل z نیستند

در مثال زیر استثنائاً می‌شود حل کرد.

مثال:

$$(k+1)\,x[k+1] - x[k] = 0 \qquad \begin{cases} k<0 & x[k]=0 \\ x[0]=1 \end{cases}$$

$$m = k+1$$

$$m\,x[m] - x[m-1] = 0 \xrightarrow{z} -z\frac{dX(z)}{dz} - z^{-1}X(z) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dX}{dz} = \frac{-X}{z^2} \Rightarrow \frac{dX}{X} = \frac{-dz}{z^2} \rightarrow \ln X = \frac{1}{z} + c$$

$$\Rightarrow X(z) = e^{\frac{1}{z}+c} = \bar{C}e^{z^{-1}} \qquad e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots$$

$$\Rightarrow X(z) = \bar{c}\Big(\underbrace{1}_{x[0]} + \underbrace{z^{-1}}_{x[1]} + \frac{z^{-2}}{2} + \frac{z^{-3}}{3!} + \cdots\Big)$$

با توجه به شرایط اولیه $x[0]=1$ ، $\boxed{\bar{c} = 1}$

سیستم‌های زمان گسسته:

$$u[k] \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow y[k]$$

۱) معادلات تفاضلی
۲) تبدیل z
۳) فضای حالت

PAPCO

خطی بودن Linear

$$y_1[k] = S\{u_1[k]\}$$

$$y_2[k] = S\{u_2[k]\}$$

با فرض شرایط اولیه صفر رابطه ی زیر برقرار است

$$\alpha_1 y_1[k] + \alpha_2 y_2[k] = S\{\alpha_1 u_1[k] + \alpha_2 u_2[k]\}$$

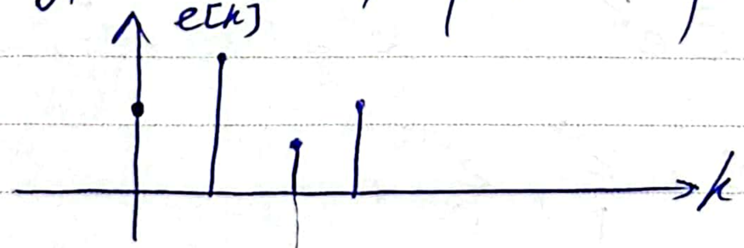
زیرا شرایط اولیه صفر ۲ بار در خروجی ظاهر نمی‌شود.

نامتغیر با زمان بودن Time invarient (TI)

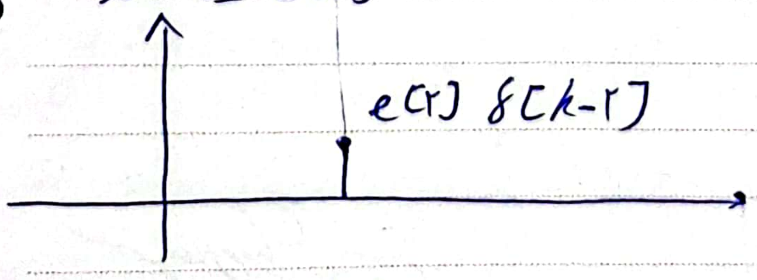
(شرایط اولیه صفر)

$$y_1[k] = S\{u_1[k]\}$$

$$y_1[k-m] = S\{u_1[k-m]\}$$

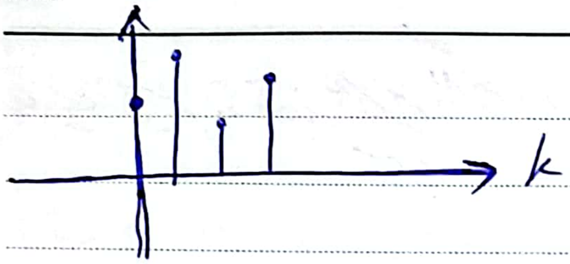


$e[m]$ مقدار $= e[k]\,\delta[k-m]$

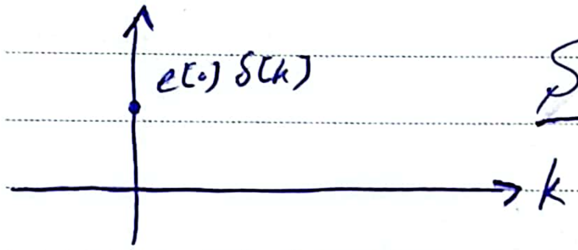


$$e[k] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e[m]\,\delta[k-m]$$

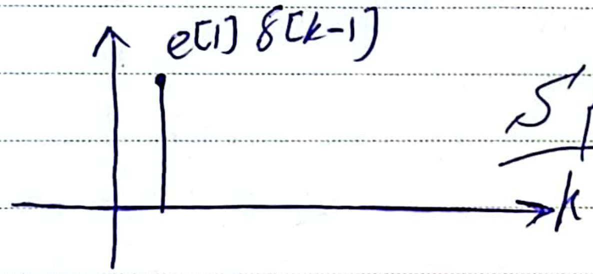
Subject:
Date



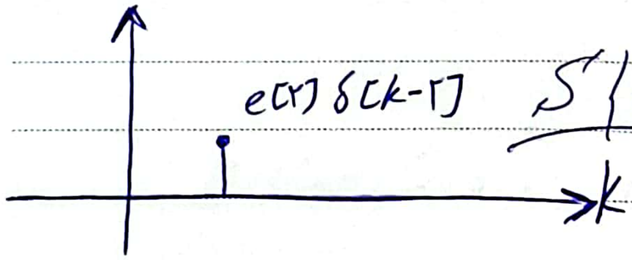
LTI



$$S'\{e[0]\delta[k]\} \longrightarrow e[0]\,h[k]$$



$$S'\{e[1]\delta[k-1]\} \longrightarrow e[1]\,h[k-1]$$



$$S'\{e[2]\delta[k-2]\} \longrightarrow e[2]\,h[k-2]$$

$$S'\{e[k]\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e[m]\,h[k-m]$$

پاسخ ضربه $S'\{\delta[k]\}$

$$y[k] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e[m]\,h[k-m]$$

کانولوشن (آمیزش)

$$Y(z) = E(z)\,H(z)$$

سیستم علی است اگر خروجی در زمان k به ورودی های زمان های بعد از k ارتباط

نداشته باشند ← $y[k]$ به $e[k+1]$, $e[k+2]$, ...

ارتباط نداشتن یعنی باید $h[-1]$, $h[-2]$, ... صفر باشند

Subject:
Date

یک سیستم LTI علی اگر و فقط اگر
$$\begin{cases} h[k]=0 \\ k<0 \end{cases}$$

Subject:
Date

$$y[k+n] + a_{n-1}\,y[k+n-1] + a_{n-2}\,y[k+n-2] + \dots + a_0\,y[k]$$

$$= b_n\,e[k+n] + b_{n-1}\,e[k+n-1] + \dots + b_0\,e[k]$$

$e[k] \rightarrow \boxed{\quad} \rightarrow y[k]$

$\boxed{k \geq 0}$ $y[0], y[1], \dots, y[n-1]$ مشخص باشند ✓ لازم است

یافتن پاسخ بصورت $y[k] = y_p[k] + y_h[k]$

y_p ← پاسخ خصوصی: یک پاسخ که در رابطه صدق کند (ناشی از شرایط اولیه)

y_h ← پاسخ همگن: پاسخی که در رابطه

$$y[k+n] + a_{n-1}\,y[k+n-1] + \dots + a_0\,y[k] = 0$$

• پاسخ خصوصی: اگر $e[k] = a^k u[k]$ باشد و a ریشه چندجمله‌ای

چندجمله‌ای مشخصه $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$

نباشد یک پاسخ خصوصی بصورت $y_p[k] = \alpha a^k u[k]$ وجود دارد

اگر a ریشه ساده این چندجمله‌ای باشد $\alpha k a^k$

• پاسخ عمومی: اگر a_i ریشه ساده چندجمله‌ای مشخصه باشد a_i^k بخشی از پاسخ همگن

$$y_h[k] = \sum \alpha_i a_i^k$$

اگر a_i ریشه مرتبه ۲ معادله مشخصه باشد

$$\alpha_{i0}\,a_i^k + \alpha_{i1}\,k a_i^k$$

بخشی از پاسخ همگن را تشکیل می‌دهد

Subject:
Date

با در نظر گرفتن پاسخ کل به صورت $y[k]=y_p[k]+y_h[k]$ و از شرط اولیه

α_i های پاسخ همگن مشخص می شوند

مثال:

$$\begin{cases} y[k+1]+2y[k]=e[k] \\ y[0]=2 \\ e[k]=3^k u[k] \end{cases}$$

$x+2=0 \qquad y_p[k]=\alpha 3^k$

$k\geq 0 \quad \alpha 3^{k+1}+2\alpha 3^k=3^k \to \alpha(3+2)3^k=3^k \to \alpha=\frac{1}{5}$

$\Rightarrow y_p[k]=\frac{1}{5}3^k$

$y_h[k]=\beta(-2)^k$

$k\geq 0 \quad \left.\begin{matrix} y[k]=\beta(-2)^k+\frac{1}{5}3^k \\ y[0]=2 \end{matrix}\right\} \to \beta+\frac{1}{5}=2 \to \beta=\frac{9}{5}$

حل معادلات تفاضلی با استفاده از تبدیل Z (یک طرفه)، به شکل ⊛ تبدیل

کنیم از طرفین تبدیل Z می گیریم

توجه: $Z\{y[k+n]\}=z^n Y(z)-z^n y[0]-z^{n-1}y[1]\dots$

$Y(z)$ را می یابیم با عکس تبدیل Z از $Y(z)$ پاسخ $y[k]$ را محاسبه می کنیم

PAPCO

Subject:
Date

حل مثال قبل با استفاده از تبدیل z :

$$zY(z) - zy[0] + 2Y(z) = E(z)$$

$$\rightarrow Y(z) = \frac{1}{z+2}\underbrace{E(z)}_{\frac{1}{1-3z^{-1}}} + \frac{zy[0]}{z+2}$$

در معادله ⊛ اگر شرایط اولیه صفر باشد

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0}{\underbrace{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}}$$

تابع تبدیل (پالس) سیستم

=

تبدیل z تابع ضربه سیستم

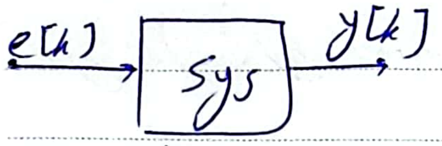
اگر سیستم خطی باشد ،
(شرایط اولیه صفر باشد)

$$Y_1(z) = \frac{1}{z+2}E_1(z) + \frac{zy[0]}{z+2}$$

$$Y_2(z) = \frac{1}{z+2}E_2(z) + \frac{zy[0]}{z+2}$$

$$Y(z) = \frac{1}{z+2}\left(E_1(z) + E_2(z)\right) + \frac{zy[0]}{z+2}$$

PAPCO



$$S\{e_1[k]+e_2[k]\} = S\{e_1[k]\} + S\{e_2[k]\}$$

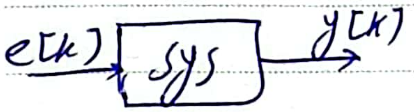
$$S\{a e_1[k]\} = a\, S\{e_1[k]\}$$

$$e[k] = \sum e[j]\,\delta[k-j]$$

آتراج (کانولوشن)

$$y[k] = S\{e[k]\} = \sum_{j=0}^{k} e[j]\,h[k-j] = e*h$$

ورودی — پاسخ ضربه



● پایداری

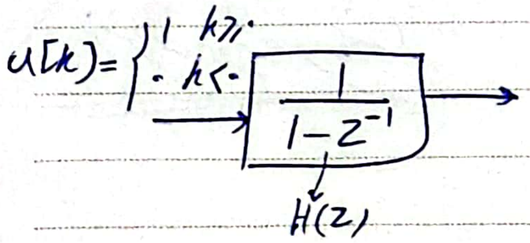
سیستم خطی تغییرناپذیر BIBO پایدار است اگر:

$$\forall k:\ |e[k]| < M$$

آنگاه بتوان نتیجه گرفت که یک N ای وجود دارد که:

$$\forall k,\ |y[k]| < N$$

مثال:



$$h[k] = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

$$y[k] = S\{u[k]\} = (k+1)\,u[k]$$

$$|y[k]| = \left|\sum e[j]h[k-j]\right|$$
$$= \left|\sum e[k-j]h[j]\right|$$
$$\leq \sum |e[k-j]h[j]| \leq \sum |e[k-j]||h[j]|$$
$$\leq M \sum |h[j]|$$

اگر $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |h[j]|$ کرانلدار باشد آنگاه BIBO است

یعنی $z=1$ در RoC تبدیل z پاسخ ضربه ($h[k]$) باشد

یادآوری

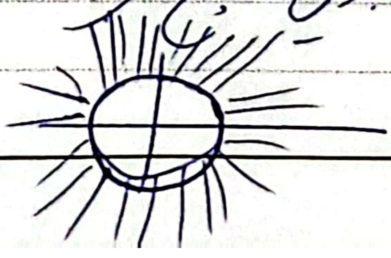
$$H(z) = \sum h[j] z^{-j}$$

$e[k] \rightarrow \boxed{sys} \rightarrow y[k]$ پاسخ ضربه سیستم $h[k]$

① سیستم فوق علی است اگر $h[k]=0$, $k<0$

② " " پایدار BIBO است $\Longleftrightarrow$ $z=1$ در RoC تبدیل z پاسخ ضربه باشد

✓ اگر سیستم علی و BIBO باشد RoC تبدیل z پاسخ ضربه به صورت زیر است

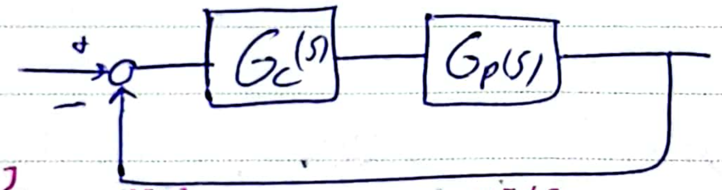


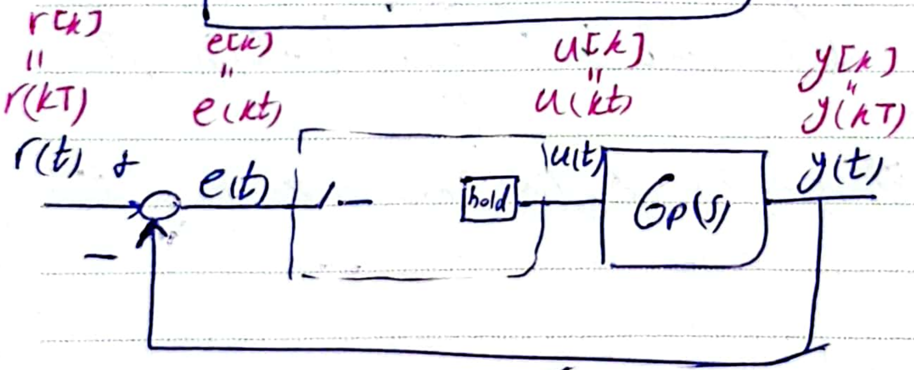
Subject:
Date

ROC هیچ کدام از قطب های تبدیل z یک سیگنال را در بر نمی گیرد

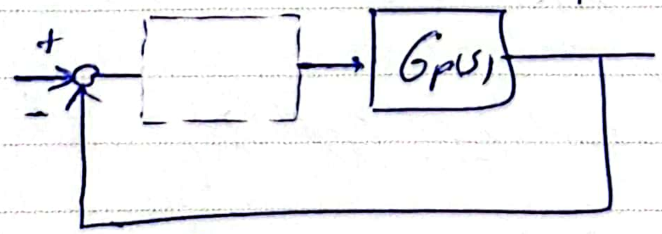
یک سیستم LTI علی و BIBO است اگر همه ی قطب های تبدیل z تابع

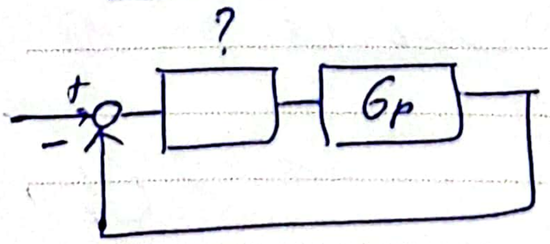
تبدیل سیستم داخل دایره واحد باشند

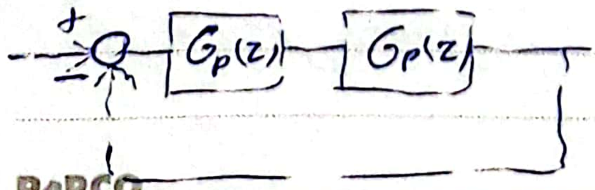




می توانیم کلا در حوزه پیوسته یا گسسته یک سیستم را تحلیل کنیم

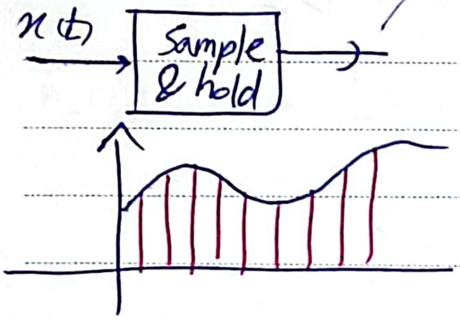


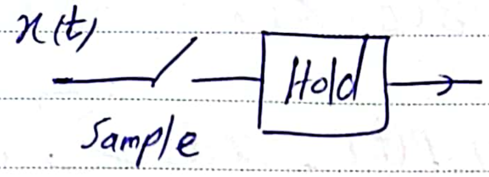




$h(t) =$ برازش نمونه‌های $x(kT)$ را از زمان‌ها

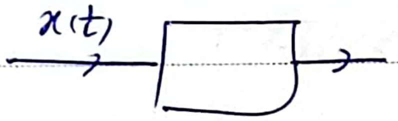
$kT \leq \tau < (k+1)T$





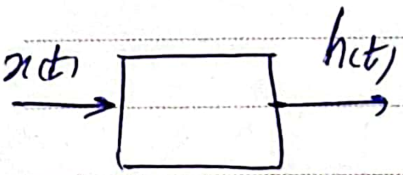
$$h(\tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + \cdots$$
$$kT \leq \tau < (k+1)T$$

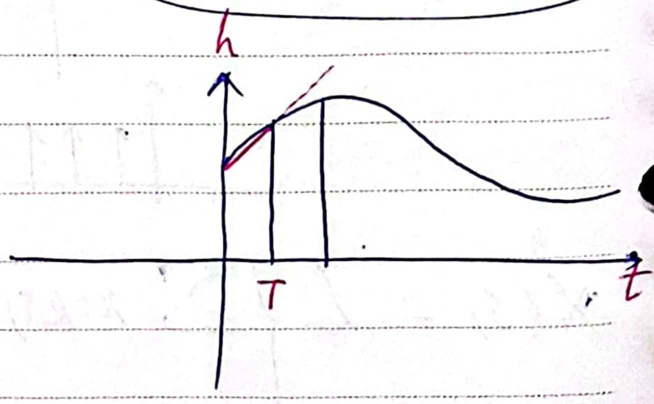
مرتبه‌ی نگهدار را درجه‌ی چند جمله‌ای فوق تعریف می‌کند



$$h_0(\tau) = x(kT) \qquad h_0(\tau) = a_0$$
$$kT \leq \tau < (k+1)T$$

$$h_1(\tau) = a_0 + a_1\tau$$





$$h_0(t) = \begin{cases} x(0) & 0 \leq t < T \\ x(T) & T \leq t < 2T \\ \vdots \end{cases}$$

$$h_1(t) = \begin{cases} x(0) + \dfrac{x(0) - x(-T)}{T}\, t & 0 \leq t < T \\ x(T) + \dfrac{x(T) - x(0)}{T}\,(t - T) & T \leq t < 2T \\ \vdots \end{cases}$$

Subject:
Date

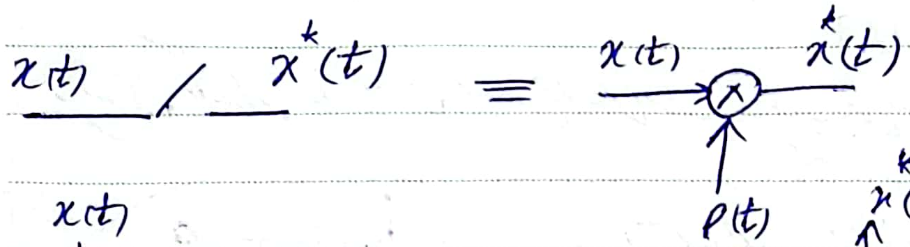
$x(t)$ —/— $x^*(t)$

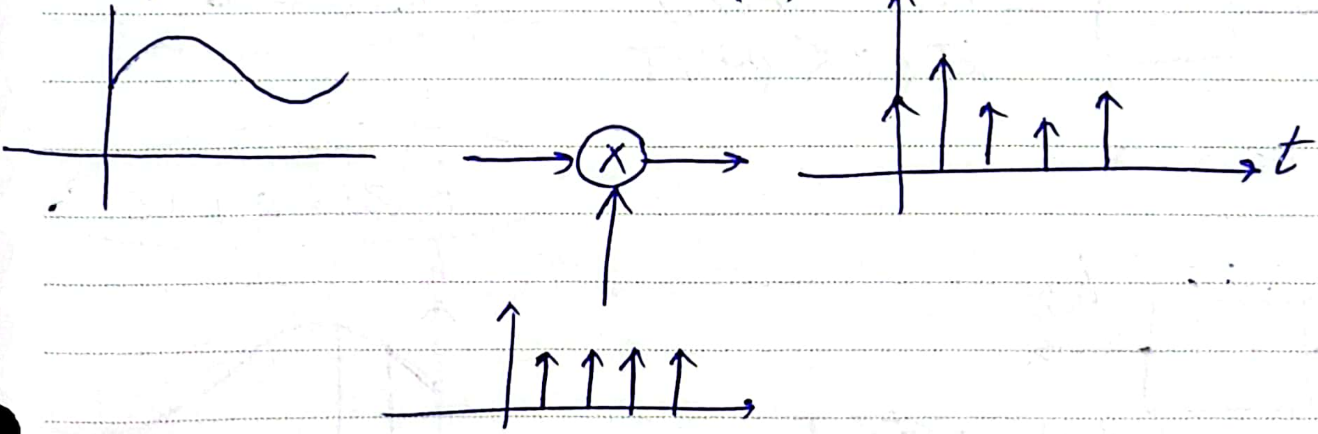
$x^*(T)$ سیگنال نمونه برداری شده از $x(t)$ با قطار ضربه است.

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$$

$$x^*(t) = x(t).p(t) = x(t) \sum \delta(t-kT)$$

$$= \sum x(kT)\, \delta(t-kT)$$



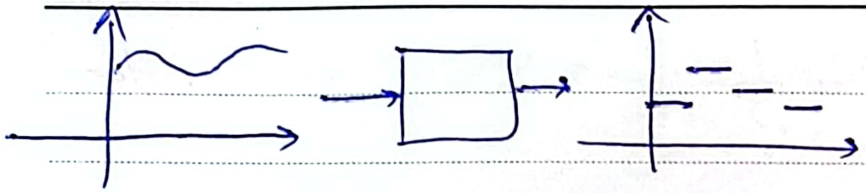


$$X^*(s) = \mathcal{L}\left\{\sum x(kT)\, \delta(t-kT)\right\}$$

$$= \sum x(kT)\, \mathcal{L}\left\{\delta(t-kT)\right\}$$

$$= \sum x(kT) \left[\underbrace{e^{-Ts}}_{z}\right]^{k}$$

Subject:
Date



تابع تبدیل نگهدار مرتبه صفر:

$$h_0(t) = x(0)\left[u(t) - u(t-T)\right] + x(T)\left[u(t-T) - u(t-2T)\right] + \cdots$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} H_0(s) = x(0)\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s}\right) + x(T)\left(\frac{e^{-Ts}}{s} - \frac{e^{-2Ts}}{s}\right) + \cdots$$

$$= \sum x(kT)\,\frac{\left(e^{-kTs} - e^{-(k+1)Ts}\right)}{s}$$

$$= \sum x(kT)\, e^{-kTs}\left(\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\right)$$

$$= \left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}\right)\underbrace{\sum x(kT)\, e^{-kTs}}_{X^*(s)} = \left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}\right) X^*(s)$$

$$x(t) \;\big/\; x^*(t) \rightarrow \boxed{\frac{1-e^{-Ts}}{s}} \rightarrow h_0(t)$$

$$X(s) \qquad X^*(s) \qquad\qquad H_0(s)$$

نمونه بردار نگهدار مرتبه صفر

$$x(t) \;\big/\; \boxed{\left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}\right)^2 \frac{Ts+1}{T}} \rightarrow h_1(t)$$

" " مرتبه یک

$$x(t) \;\big/\; x^*(t) \qquad X^*(s) = \sum x(kT)\, e^{-kTs}$$

$$s = \frac{1}{T}\ln z \qquad z = e^{Ts}$$

$$x[k] \triangleq x(kT) \qquad X(z) = \sum x[k]\, z^{-k}$$

Subject:
Date

مثال:
$$x(t) = u(t) \qquad X(s) = \frac{1}{s}$$
$$\downarrow$$
$$\overset{*}{X}(s) = ?$$

$$x(t) = u(t) \rightarrow x[k] = u[k] \rightarrow X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$
$$\xrightarrow{z=e^{Ts}} \overset{*}{X}(s) = \frac{1}{1-e^{-Ts}}$$

بدست آوردن $\overset{*}{X}(s)$ از روی $X(s)$:

$$\overset{*}{x}(t) = x(t)\,p(t)$$ قطار ضربه

یادآوری:
$$\mathcal{L}\{f(t)g(t)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)\,G(s-p)\,dp$$

خط $Re(s)=c$ باید در ناحیه همگرایی $F(s)$ باشد

انتگرال کانولوشن
$$\overset{*}{X}(s) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p)\,W(s-p)\,dp$$

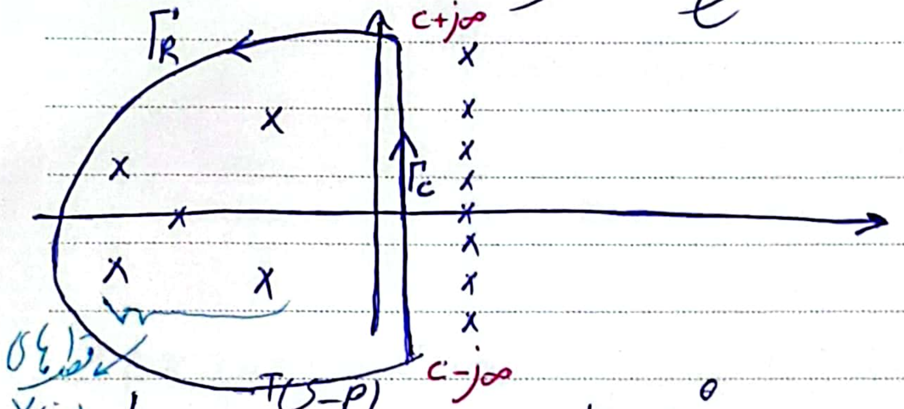
$$w(t) = \sum \delta(t-kT) \rightarrow W(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kTs} = \frac{1}{1-e^{-Ts}}$$

$$\overset{*}{X}(s) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p)\,\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}\,dp$$

PAPCO

Subject:
Date

فرض: Ⅰ همه‌ی قطب‌های $X(s)$ سمت چپ محور موهومی هستند
Ⅱ درجه صورت $X(s)$ از مخرج آن کمتر است



$X(p)$ $1-e^{-T(s-p)}=0 \Rightarrow 1-e^{\theta}=0 \Rightarrow \theta=j2k\pi$

$$-T(s-p)=j2k\pi \Rightarrow p=s+j\frac{2k\pi}{T}$$

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \text{——} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma_c+\Gamma_R} - \frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma_R} \text{——}$$

$$= \text{مانده‌های}\left(\frac{X(p)}{1-e^{-T(s-p)}}\right)$$
در قطب‌های $X(p)$

Subject:
Date

جلسه بیست و دوم

برخی از خواص تبدیل Z — قضیه کانولوشن مختلط

$$X(z) \rightsquigarrow x[k] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{k-1} X(z)\, dz$$

$$Z\{x_1[k]\} = X_1(z) \quad |z|>R_1$$
$$Z\{x_2[k]\} = X_2(z) \quad |z|>R_2$$
$$\rightarrow Z^{-1}\{X_1(z)X_2(z)\} = ?$$
$$Z\{x_1[k]x_2[k]\} = ?$$

$$Z\{x_1[k]x_2[k]\} = ?$$

$$x_2[k] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \zeta^{k-1} X_2(\zeta)\, d\zeta$$

$$Z\{x_1[k]x_2[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} x_1[k]x_2[k] z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x_1[k]\left(\frac{1}{2\pi j}\oint_C \zeta^{k-1} X_2(\zeta)\, d\zeta\right) z^{-k} \qquad \text{I} \quad |\zeta|>R_2$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint_C \zeta^{k-1} X_2(\zeta) \sum_{k=0}^{\infty} x_1[k] z^{-k}\, d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint_C \zeta^{-1} X_2(\zeta) \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} x_1[k]\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{-k}}_{X_1\left(\frac{z}{\zeta}\right)} d\zeta$$

P4PCO

Subject:
Date

$$\Rightarrow Z\{x_1[k]x_2[k]\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \zeta^{-1} X_2(\zeta) X_1(\zeta^{-1}z)\, d\zeta$$

$$|\zeta^{-1}z| > R_1 \rightarrow |\zeta| < \frac{|z|}{R_1} \quad \text{II}$$

$$\text{I},\text{II} \rightarrow \quad R_2 < |\zeta| < \frac{|z|}{R_1}$$

باید مسیر انتگرال به گونه‌ای باشد که شرایط بالا برقرار باشد.

یکی از نتایج قضیه کانولوشن مختلط، قضیه پارسوال است.

$$z \text{ تبدیل } X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k}$$

اگر $z=1$ عضو ناحیه همگرایی سیگنال $x[k]$ باشد داریم:

$$X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]$$

قضیه پارسوال:

$$Z\{x_1[k]\} = X_1(z) \quad |z| > R_1 \qquad Z\{x_2[k]\} = X_2(z) \quad |z| > R_2$$

می‌خواهیم حاصل $\sum_{k=0}^{\infty} x_1[k]\, x_2[k]$ را بدست بیاوریم:

$$y[k] = x_1[k]x_2[k]$$

$$\xrightarrow{Z} Y(z) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \zeta^{-1} X_2(\zeta) X_1(\zeta^{-1}z)\, d\zeta$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x_1[k]x_2[k] z^{-k}$$

PAPCO

$$z=1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x_1[k]\,x_2[k] = \frac{1}{2\pi j}\oint_c z^{-1} X_2(z)\, X_1(z^{-1})\, dz$$

$$R_2 < |z| < \frac{1}{R_1}$$

حال شرایطی را در نظر بگیرید که $x[k]=x_1[k]=x_2[k]$ داریم ،

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} x^2[k] = \frac{1}{2\pi j}\oint_c z^{-1} X(z)\, X(z^{-1})\, dz}$$

به رابطه بالا ، رابطه پارسوال می‌گویند

مثال از رابطه پارسوال ،

$$x[k] = \begin{cases} e^{-ak} & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} x^2[k] = ?$$

روش اول : $y[k] = x^2[k] = \begin{cases} e^{-2ak} & k \geq 0 \\ 0 & k<0 \end{cases}$

$$Y(z) = \frac{1}{1-e^{-2a}z^{-1}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^2[k] = \sum_{k=0}^{\infty} y[k] = Y(1) = \frac{1}{1-e^{-2a}}$$

Subject:
Date

روش دوم: استفاده از رابطه‌ی پارسوال،

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^2[k] = \frac{1}{2\pi j}\oint_c z^{-1} X(z)\, X(z^{-1})\, dz \quad ⊛$$

ابتدا تبدیل z سیگنال $x[k]$ $(X(z))$ را بدست می‌آوریم.

$$X(z) = \frac{1}{1-e^{-a}z^{-1}} \qquad |z| > |e^{-a}| = e^{-a} = R$$

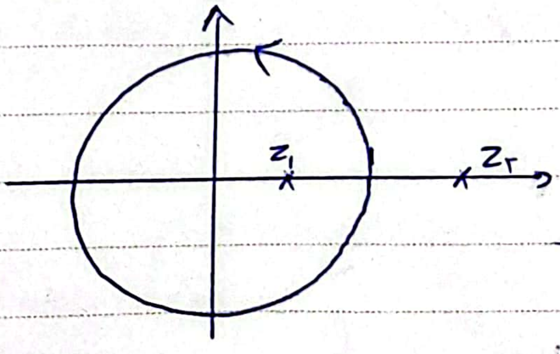
$$⊛ = \frac{1}{2\pi j}\oint_c z^{-1}\,\frac{1}{1-e^{-a}z^{-1}}\,\frac{1}{1-e^{-a}z}\,dz \qquad R<|z|<\frac{1}{R} \rightarrow e^{-a}<|z|<e^{a}$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{1}{z-e^{-a}}\,\frac{1}{1-e^{-a}z}\,dz = \frac{1}{2\pi j}\,2\pi j \operatorname*{Res}_{z_i} \square \quad ⊛⊛$$

$z_1 = ?\;:\; z_1 - e^{-a} = 0 \Rightarrow z_1 = e^{-a}$

$z_2 = ?\;:\; 1 - e^{-a}z_2 = 0 \Rightarrow z_2 = e^{a}$

مقادیر مثبت و حقیقی



یکی از مسیرهایی که می‌توانیم استفاده کنیم

دایره واحد است ← تنها نقطه singular

z_1 است

$$⊛⊛ \quad \operatorname*{Res}_{z_1} \square = \frac{1}{1-e^{-a}e^{-a}} = \frac{1}{1-e^{-2a}}$$

← دقیقاً همان نتیجه بالا شد ✓

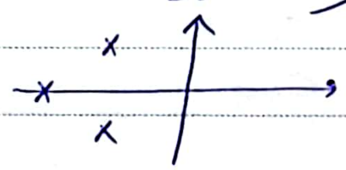
PAPCO

معیارهای پایداری برای سیستم های خطی زمان گسسته

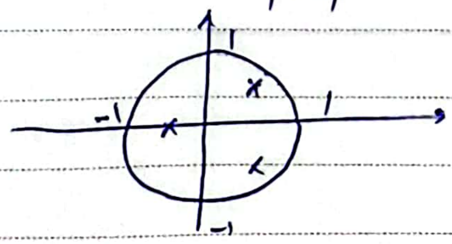
● پایداری تابع تبدیل پالس

$G(s)$

✓ از کنترل خطی به یاد داریم سیستم $G(s)$ از نظر BIBO پایدار است اگر تمام قطب های آن سمت چپ محور موهومی باشند.



✓ برای سیستم با تابع تبدیل پالس $G(z)$ می توانیم بگوییم پایدار BIBO است اگر تمام قطب های آن داخل دایره واحد باشند.



✓ اگر روی دایره واحد قطبی داشته باشیم می گوییم حالت پایداری بحرانی داریم.

● معیار پایداری Jury

چگونه از یک چندجمله ای متوجه بشویم ریشه هایش داخل دایره واحد هستند یا نه (بدون حل کردن آن) ـ شبیه معیار پایداری روث که مشخص می کرد چندجمله ای ما ریشه ای سمت چپ محور موهومی دارد یا خیر

Subject:
Date

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

	z^0	z^1	----	z^{n-1}	z^n
۱	a_n	a_{n-1}	---	a_1	a_0
۲	a_0	a_1	---	a_{n-1}	a_n
۳	b_{n-1}	b_{n-2}		b_0	
۴	b_0	b_1	---	b_{n-1}	
۵	c_{n-2}	c_{n-3}	---	c_0	
۶	c_0	c_1	---	c_{n-2}	
$\vdots$	$\vdots$				
۲n-۳	q_2	q_1	q_0		
۲n-۲	q_0	q_1	q_2		

$$b_{n-1} = \begin{vmatrix} a_n & a_0 \\ a_0 & a_n \end{vmatrix} \qquad b_{n-2} = \begin{vmatrix} a_n & a_1 \\ a_0 & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} \qquad c_{n-2} = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_0 \\ b_0 & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

Subject:
Date

چند جمله‌ای $P(z)$ ریشه‌ای خارج و روی دایره واحد ندارد اگر:

- $a_0 > 0$
- $a_0 > |a_n|$
- $P(z)\big|_{1} > 0$
- $P(z)\big|_{-1} = \begin{cases} > 0 & n \text{ زوج} \\ < 0 & n \text{ فرد} \end{cases}$
- $|b_{n-1}| > |b_0|$
- $|c_{n-2}| > |c_0|$

$\vdots$

- $|q_2| > |q_0|$

مثال:

$$P(z) = \underset{a_0}{z^4} - \underset{a_1}{1.2 z^3} + \underset{a_2}{0.07 z^2} + \underset{a_3}{0.3 z} - \underset{a_4}{0.08}$$

ابتدا ۴ شرط اول را چک می‌کنیم سپس جدول را تشکیل می‌دهیم.

$a_0 = 1 > 0$ ✓

$a_0 = 1 > |a_4| = 0.08$ ✓

$P(z)\big|_{1} > 0$ ✓

$P(z)\big|_{-1} > 0$ ✓

۴ شرط برقرار است حال جدول را تشکیل می‌دهیم

PAPCO

Subject:
Date

	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
1	-0.08	0.3	0.072	-1.2	1
2	1	-1.2	0.072	0.3	-0.08
3	b_3	b_2	b_1	b_0	
4	b_0	b_1	b_2	b_3	
5	c_2	c_1	c_0		
6	c_0	c_1	c_2		

$$b_3 = \begin{vmatrix} -0.08 & 1 \\ 1 & -0.08 \end{vmatrix} = -0.994$$

$$b_2 = \begin{vmatrix} -0.08 & -1.2 \\ 1 & 0.3 \end{vmatrix} = 1.176$$

$$b_1 = \begin{vmatrix} -0.08 & 0.072 \\ 1 & 0.072 \end{vmatrix} = -0.0756$$

$$b_0 = \begin{vmatrix} -0.08 & 0.3 \\ 1 & -1.2 \end{vmatrix} = -0.204$$

$$c_2 = \begin{vmatrix} b_3 & b_0 \\ b_0 & b_3 \end{vmatrix} = 0.946$$

$|b_3| > |b_0|$ ✓

$c_1 = -1.184$

$c_0 = 0.315$

$|c_2| > |c_0|$ ✓

همه‌ی قیود برقرارند بنابراین همه‌ی ریشه‌های $P(z)$ داخل دایره واحد هستند

Subject:
Date

با دستور زیر در متلب می‌توانیم چک کنیم این موضوع را:

```
>> roots([1  -1.2  0.07  0.3  -0.08])

ans =  -0.5
        0.8
        0.5
        0.4
```

می‌بینیم که همه ریشه‌های $P(z)$ داخل دایره واحد هستند ✓

مثال:

$$P(z) = \underset{a_0}{z^3} - \underset{a_1}{1.1 z^2} - \underset{a_2}{0.1 z} + \underset{a_3}{0.2}$$

	z^0	z^1	z^2	z^3
1	0.2	-0.1	-1.1	1
2	1	-1.1	-0.1	0.2
	b_2	b_1	b_0	
3	-0.96	1.98	-0.12	
	b_0	b_1	b_2	
4	-0.12	1.98	-0.96	

$a_0 > 0$ ✓

$a_0 > |a_3|$ ✓

$P(z)\big|_{z=1} > 0$ ✗

$P(z)\big|_{z=1}$ برابر صفر است. حال اگر بقیه شرایط برقرار باشد همه ریشه‌های $P(z)$ روی دایره واحد در داخل دایره واحد خواهد بود.

$P(z)\big|_{z=-1} < 0$ ✓

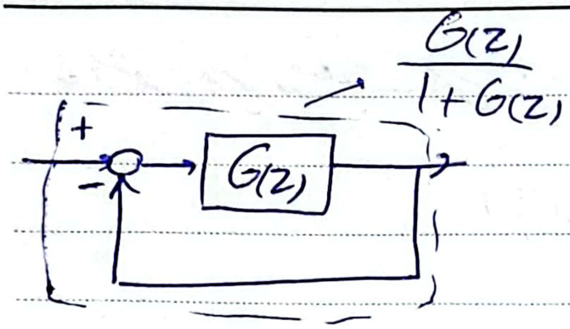
$|b_2| > |b_0|$ ✓

ریشه‌های $P(z)$: $z = 1, -0.4, 0.5$ ✓

PAPCO

Subject:
Date

مثال: بازه k که سیستم حلقه بسته پایدار باشد؟



$$G(z)=\frac{k(0.3679z+0.2642)}{(z-0.3679)(z-1)}$$

معادله مشخصه: $(z-0.3679)(z-1)+k(0.3679z+0.2642)=0$

$$\to \underbrace{z^2}_{a_0=1}+\underbrace{(-1.3679+0.3679k)}_{a_1}z+\underbrace{0.3679+0.2642k}_{a_2}=0$$

- $a_0>0$ ✓
- $a_0>|a_2| \to |0.3679+0.2642k|<1 \to -5.3992<k<2.3925$
- $P(z)|_{z=1}=P(1)>0 \to (0.3679+0.2642)k>0 \to k>0$
- $P(z)|_{z=-1}=P(-1)>0 \to 2.7358-0.4037k>0 \to k<26.38$

$$\Longrightarrow \quad 0<k<2.3925$$

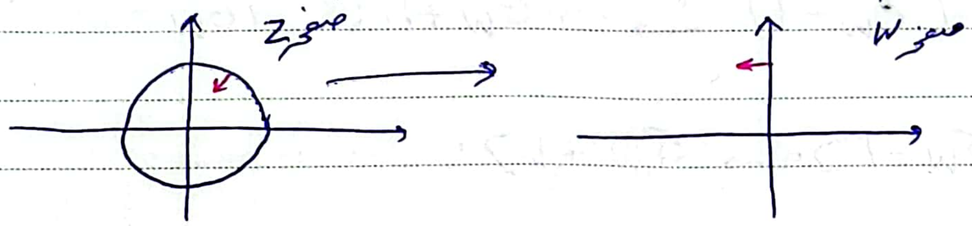
✓ در واقع این مثال نشان داد که می‌توان با استفاده از معیار پایداری Jury پارامترهای کنترل کننده را تعیین کرد (کنترل کننده طراحی کرد).

Subject:
Date

تبدیل دوخطی

همچنین محیط دایره واحد به محور موهومی نگاشته شود

اگر داخل دایره واحد به سمت چپ محور موهومی نگاشته شود، آن موقع می‌توانیم از جدول روث استفاده کنیم. بنابراین باید نگاشتی را پیدا کنیم که این امر را برای ما فراهم کند



$$z = \frac{w+1}{w-1}$$

$$w = \frac{z+1}{z-1}$$

نگاشت روی و معکوس پذیر است
یک به یک و پوشا است

$$\underbrace{zw}- z = w+1$$

به خاطر وجود این ترم، به این تبدیل، تبدیل دوخطی می‌گویند

در این تبدیل

$$|z| < 1 \longleftrightarrow Re\{w\} < 0$$

می‌خواهیم رابطه بالا را نشان بدهیم:

$$w = \sigma_w + j\omega_w$$

$$z = \frac{w+1}{w-1} \rightarrow |z| = \frac{|w+1|}{|w-1|} = \frac{|\sigma_w + j\omega_w + 1|}{|\sigma_w + j\omega_w - 1|}$$

$$= \sqrt{\frac{(\sigma_w+1)^2+\omega_w^2}{(\sigma_w-1)^2+\omega_w^2}}$$

$$|z|<1 \rightarrow (\sigma_w+1)^2+\cancel{\omega_w^2} < (\sigma_w-1)^2+\cancel{\omega_w^2}$$

$$\rightarrow (\sigma_w+1)^2 < (\sigma_w-1)^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} |\sigma_w+1| < |\sigma_w-1| \quad (*)$$

دو حالت داریم:

$$\mathrm{I}: \sigma_w - 1 > 0 \rightarrow \sigma_w + 1 > 0$$

$$\stackrel{(*)}{\Longrightarrow} \cancel{\sigma_w}+1 < \cancel{\sigma_w}-1 \rightarrow -1>1 \quad \times$$

$$\mathrm{II}: \sigma_w - 1 < 0 \xrightarrow{(*)} |\sigma_w+1| < 1-\sigma_w$$

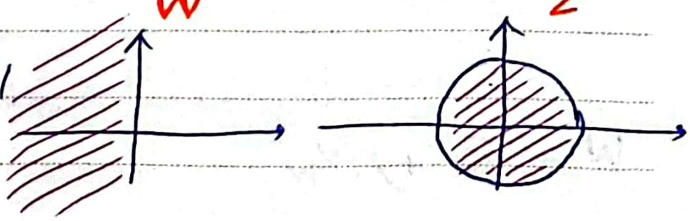
$$\rightarrow \sigma_w - 1 < \sigma_w + 1 < 1 - \sigma_w$$

$$1 > -1 \checkmark \qquad \sigma_w < -\sigma_w \rightarrow \sigma_w < 0$$

$$\Longrightarrow |z|<1 \Longrightarrow \sigma_w < 0$$

توجه شود که روابط بالا برگشت پذیر است بنابراین داریم،

$$\sigma_w < 0 \Longrightarrow |z|<1$$



$$\Longrightarrow |z|<1 \Longleftrightarrow \sigma_w < 0$$

? توجه شود تبدیل e^{st} تبدیل یک به یک نیست

$$P(z) = a_0 z^n + \cdots + a_n = 0, \quad z = \frac{w+1}{w-1} \Rightarrow a_0\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^n + \cdots + a_n = 0$$

دو طرف معادله بالا را در $(w-1)^n$ ضرب می‌کنیم تا به یک چندجمله‌ای برسیم

$$\Rightarrow Q(w) = b_0 w^n + b_1 w^{n-1} + \cdots + b_n = 0$$

حال با استفاده از معیار روث می‌توانیم تعیین کنیم معادله بالا چند ریشه سمت راست محور موهومی (یا به عبارتی معادله $P(z)=0$ چند ریشه خارج دایره واحد دارد)

مرور معیار پایداری روث

$$Q(w) = b_0 w^n + b_1 w^{n-1} + \cdots + b_n$$

$$\begin{array}{c|cccc} w^n & b_0 & b_2 & b_4 & \cdots \\ w^{n-1} & b_1 & b_3 & b_5 & \cdots \\ & A & B & & \\ & X & & & \end{array}$$

$$A = \frac{b_1 b_2 - b_0 b_3}{b_1}$$

$$B = \frac{b_1 b_4 - b_0 b_5}{b_1}$$

$$X = \frac{A b_3 - b_1 B}{A}$$

* به تعداد تغییر علامت های ستون اول ریشه در نیم صفحه راست داریم

Subject:
Date

مثال:

$$z^3 - 1{,}3z^2 - 0{,}08z + 0{,}24 = 0$$

$$z = \frac{w+1}{w-1} \Rightarrow \left(\frac{w+1}{w-1}\right)^3 - 1{,}3\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 - 0{,}08\left(\frac{w+1}{w-1}\right) + 0{,}24 = 0$$

$$\xrightarrow{\times (w-1)^3} -0{,}14w^3 + 1{,}06w^2 + 5{,}1w + 1{,}98 = 0$$

$$\xrightarrow{\div(-0{,}14)} w^3 - 7{,}571w^2 - 36{,}43w - 14{,}14 = 0$$

حال از معیار روث کمک می‌گیریم.

w^3	1	$-36{,}43$
w^2	$-7{,}571$	$-14{,}14$
w^1	$-38{,}3$	0
w^0	-14	

یک بار تغییر علامت داریم در نتیجه

یک ریشه سمت راست صفحه w داریم و بنابراین

یک ریشه خارج دایره واحد در صفحه z

خواهیم داشت

• صورت دیگری از معیار پایداری Jury

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

a_0	a_1	---	a_n
a_n	a_{n-1}	---	a_0
$a_0 - \alpha_n a_n$	$a_1 - \alpha_n a_{n-1}$	---	$a_n - \alpha_n a_0$

$\alpha_n = \frac{a_n}{a_0}$ تقسیم دو درایه آخر سطر

* سطرهای فرد یک درایه کمتر از سطر قبلی خود خواهند داشت

Subject:
Date

$$P(Z) = a_0 Z^n + a_1 Z^{n-1} + \cdots + a_n$$

$a_0^{(n)}$	$a_1^{(n)}$	$\cdots$	$a_n^{(n)}$
$a_n^{(n)}$	$a_{n-1}^{(n)}$	$\cdots$	$a_0^{(n)}$
$a_0^{(n-1)}$	$a_1^{(n-1)}$	$\cdots$	$a_{n-1}^{(n-1)}$
$a_{n-1}^{(n-1)}$	$\cdots$	$a_0^{(n-1)}$	
$\vdots$			
$a_0^{(0)}$			

$$\alpha_n = \frac{a_n^{(n)}}{a_0^{(n)}}$$

رابطه بازگشتی

$$a_i^{(k-1)} = a_i^{(k)} - \alpha_k a_{k-i}^{(k)}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n$$

قضیه: اگر $a_0 > 0$ همه ی ریشه های چندجمله ای $P(Z)$ داخل دایره واحد هستند $\Longleftrightarrow a_0^k > 0$

نتیجه: اگر همه ی $a_0^k \neq 0$ باشد در این صورت به تعداد a_0^k های منفی ریشه خارج از دایره واحد داریم.

$$P(Z) = Z^{2 \to n} + a_1 Z + a_2$$

$1 > 0$	a_1	a_2
a_2	a_1	1
$1 - a_2^2 > 0$	$a_1 - a_1 a_2$	
$a_1 - a_1 a_2$	$1 - a_2^2$	
$1 - a_2^2 - \left(\frac{a_1 - a_1 a_2}{1 - a_2^2}\right)(a_1 - a_1 a_2) > 0$		

$$\alpha_2 = \frac{a_2}{1} = a_2$$

$$\alpha_1 = \frac{a_1 - a_1 a_2}{1 - a_2^2}$$

PAPCO

Subject:
Date

$1>0$ ✓

$1-a_2^2>0 \to a_2^2<1 \to -1<a_2<1$

$$1-a_2^2-\frac{a_1^2}{1+a_2}(1-a_2)>0 \to (1-a_2)\left[\frac{(1+a_2)^2-a_1^2}{(1+a_2)}\right]>0$$

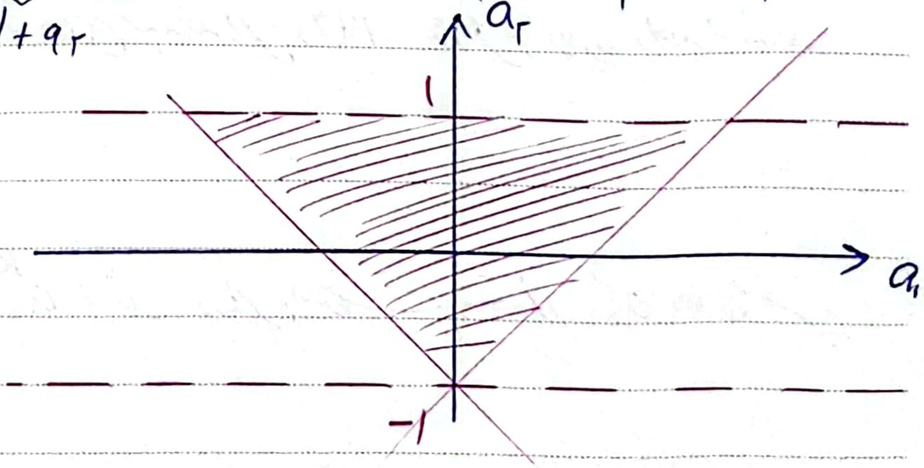
طبق شرط بالا حتماً مثبت خواهد بود

طبق شرط بالا مثبت است

$$\Rightarrow (1+a_2)^2-a_1^2>0 \to a_1^2<(1+a_2)^2$$

$$\to |a_1|<\underbrace{\overbrace{|1+a_2|}^{\text{مثبت}}}_{1+a_2} \to -(1+a_2)<a_1<1+a_2$$

$$\to \begin{cases} a_2>a_1-1 \\ a_2>-1-a_1 \end{cases}$$



اگر از صورت اول معیار Jury استفاده می‌کردیم نتایج چگونه می‌شد؟

$a_0=1>0$

$a_0>|a_2| \to |a_2|<1 \to -1<a_2<1$

$P(1)>0 \to 1+a_1+a_2>0 \to a_2>-1-a_1$

$P(-1)>0 \to 1-a_1+a_2>0 \to a_2>a_1-1$

دقیقاً به همان نتایج قبل رسیدیم ✓

انتگرال کانولوشن

تبدیل لاپلاس سیگنال زمان پیوسته

سوال: چگونه می توان از $X(s)$ به $X^*(s)$ رسید؟

$x(t)$ —/— $x^*(t)$

$\delta_T(t)$

T: قطار ضربه

دوره نمونه برداری

$$X^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln(z)} \longrightarrow X_0(z)$$

تبدیل z سیگنال زمان گسسته

$$\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT)$$

$$x^*(t) = x(t)\,\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\,\delta(t-kT)$$

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} \xrightarrow{?} X^*(s) = \mathcal{L}\{x^*(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{x^*(t)\} = \mathcal{L}\{x(t)\,\delta_T(t)\} \overset{?}{=} F(X(s), \Delta_T(s))$$

پاسخ: تبدیل لاپلاس از حاصل ضرب $x(t)$ و $\delta_T(t)$

$$\mathcal{L}(\delta_T(t)\,x(t)) = \int_0^{\infty} x(t)\,\delta_T(t)\,e^{-st}\,dt = F(X(s), \Delta_T(s))$$

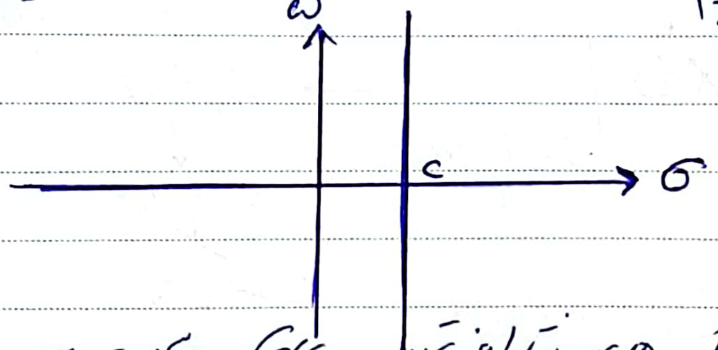
سوال: به صورت کلی تبدیل لاپلاس حاصلضرب $f(t)$ و $g(t)$ برحسب $F(s)$ و $G(s)$ چگونه محاسبه می شود؟

پاسخ: استفاده از انتگرال عکس تبدیل لاپلاس یکی از توابع در تعریف تبدیل لاپلاس.

Subject:
Date

$$\mathcal{L}(f(t)g(t)) = \int_0^\infty f(t)g(t)e^{-st}dt \quad ⊛$$

میدانیم: $g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} G(s)e^{st}ds$



نکته: c باید جایی باشد که همه‌ی نقاط غیرتحلیلی $G(s)$ در سمت چپ خط $Re(s) = c$ واقع شده باشد!

$$⊛ \quad \int_0^\infty f(t)\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} G(p)e^{pt}dp\; e^{-st}dt$$

میتوانیم انتگرالها را جابجا کنیم

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} G(p)\underbrace{\int_0^\infty \overbrace{f(t)e^{pt}e^{-st}}^{f(t)e^{-(s-p)t}}dt}_{F(s-p)}\,dp$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} G(p)F(s-p)dp = \frac{1}{2\pi j}\int_{\bar{c}-j\infty}^{\bar{c}+j\infty} G(s-p)F(p)dp$$

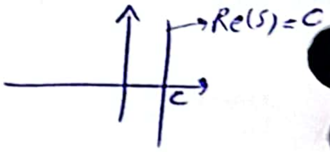
• یافتن رابطه‌ای برای $X^*(s)$ برحسب $X(s)$

$$x(t)\xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$$

$$\delta_T(t)\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{L}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)\right) = \sum_{k=0}^{\infty}e^{-kTs} = \frac{1}{1-e^{-Ts}}$$

Subject: یادآوری : $\mathcal{L}(f(t)\,g(t)) = \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)\,G(s-p)\,dp$

Date



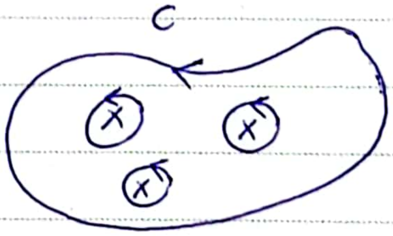
$$\mathcal{L}(x^*(t)) = \mathcal{L}(x(t)\,\delta_T(t)) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p)\,\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}\,dp$$

چگونه این انتگرال را حساب کنیم؟ ← استفاده از قضیه مانده‌های کوشی

- مرور قضیه مانده‌ها

$$\oint_C f(s)\,ds = 2\pi j \sum_{s_i} \underset{s_i}{\text{Res}}\, f(s)$$

نقاط غیر تحلیلی



محاسبه مانده‌ها: ✓ اگر s_i قطب ساده f باشند،

$$\underset{s_i}{\text{Res}}\, f(s) = \lim_{s\to s_i} (s-s_i)\,f(s)$$

✓ اگر s_i قطب مکرر مرتبه m ام f باشد،

$$\underset{s_i}{\text{Res}}\, f(s) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{s\to s_i}\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\left[(s-s_i)^m f(s)\right]$$

• محاسبه انتگرال کانولوشن با استفاده از قضیه مانده‌ها

$$\mathcal{L}(x^*(t)) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p)\,\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}\,dp$$

دو فرض زیر را در نظر می‌گیریم:

Subject:
Date

① فرض I: نقاط غیر تحلیلی $X(p)$ در سمت چپ (یا روی) محور موهومی قرار دارد.

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma_c+\Gamma_R} X(p)\,\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}\,dp=\frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma_c}\cdots+\underbrace{\frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma_R}\cdots}_{0}$$

$$=\sum_{p_i} Res\left(X(p)\,\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}\right)$$

② فرض II: $\lim_{p\to\infty} X(p)=0$

با فرض II حاصل انتگرال $\int_{\Gamma_R}\cdots$ را برابر صفر خواهد شد

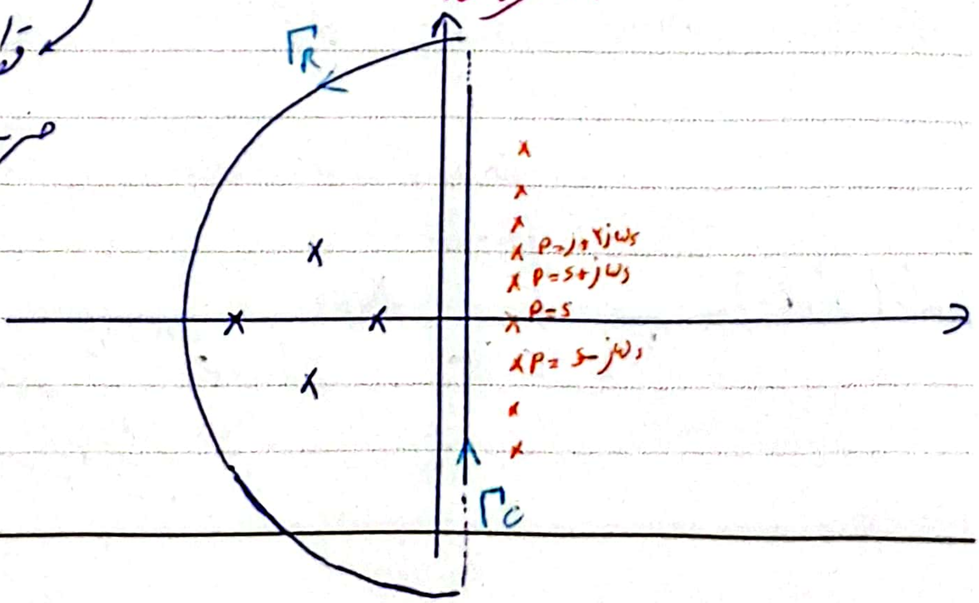
$$\left.\begin{array}{l} 1-e^{-T(s-p)}=0 \to e^{-T(s-p)}=1 \\ e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta=1 \to \theta=2k\pi \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$-T(s-p)=j\,2\overset{\in Z}{k}\pi \Rightarrow p=s-j\frac{2k\pi}{T} \Rightarrow p=s\pm j\overset{\omega_s}{\frac{2\pi}{T}}k$$

اگر k را محدود کنیم به اعداد مثبت

$$\Rightarrow p=s\pm j\omega_s k$$

قطب‌های تبدیل لاپلاس تکرار ضربه‌ها

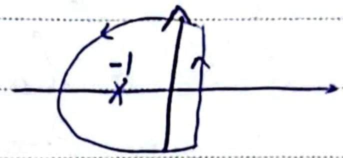


PAPCO

Subject:
Date

مثال: برای توابع $X(s)$ زیر $X(z)$ متناظر را بیابید.

$$X(s) = \frac{1}{s+1}$$



$$\lim_{p \to \infty} X(p) = \lim_{p \to \infty} \frac{1}{p+1} = 0$$

قطب های $X(p)$ هم سمت چپ محور موهومی قرار دارد

تنها قطب غیر تحلیلی

$P_1 = -1$

بنابراین ۲ تا فرض ما برقرار است

$$X^*(s) = \mathcal{L}\{x^*(t)\} = \sum_{P_i} \operatorname{Res}\left(X(p) \frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}\right)$$

$$= \lim_{p \to -1} (p+1) \frac{1}{(p+1)} \frac{1}{1-e^{-T(s-p)}} = \frac{1}{1-e^{-T(s+1)}}$$

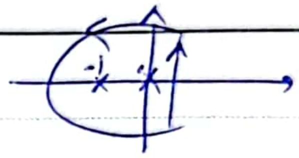
$$X_0(z) = X^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = \frac{1}{1-e^{-T(\frac{1}{T}\ln z+1)}} = \frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}$$

برای اینکه چک کنیم جوابی که بدست آوردیم جواب درست است یا خیر:

$$\mathcal{L}^{-1}(X(s)) = x(t) = e^{-t} \Rightarrow x(kT) = x[k] = e^{-kT}$$

$$\rightarrow X_0(z) = \frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}$$

Subject:
Date



✓ $X(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$

$$X^*(s) = \lim_{p\to 0} \cancel{p} \frac{1}{\cancel{p}(p+1)} \frac{1}{1-e^{-T(s-p)}} + \lim_{p\to -1} (p+1) \frac{1}{p(p+1)} \frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}$$

$$= \frac{1}{1-e^{-Ts}} - \frac{1}{1-e^{-T(s+1)}}$$

حال کافیست بجای s ، $\frac{1}{T}\ln(z)$ بگذاریم تا به $X_D(z)$ برسیم

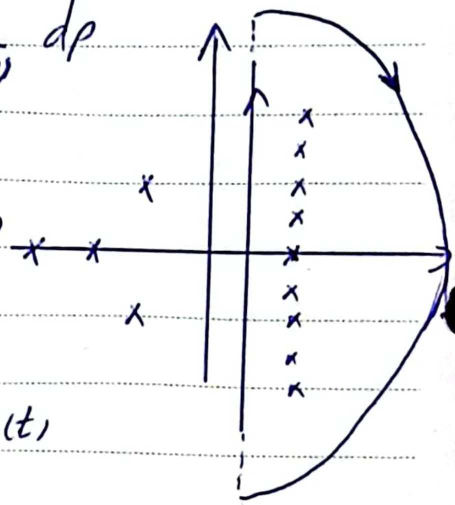
تمرین ✓ $X(s) = \dfrac{1}{s^2(s+1)} \longrightarrow ?$

Subject:
Date

$$\mathcal{L}\{x^*(t)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p)\,\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}\,dp$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma_c+\Gamma_R} X(p)\,\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}\,dp$$

$$\underbrace{-\frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma_R} X(p)\,\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}\,dp}_{-\frac{1}{2}x(0^+)}$$



$$x(0^+) = \lim_{t\to 0^+} x(t)$$

$$= -\sum_{p_k = s\pm j\omega_s k} \mathrm{Res}\; X(p)\,\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}} + \frac{1}{2}x(0^+) \quad ⊛$$

$$\mathop{\mathrm{Res}}_{p=s+j\omega_s k} X(p)\,\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}} = \lim_{p\to s+j\omega_s k} (p-s-j\omega_s k)\,X(p)\,\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}$$

قاعده هوپیتال ←

$$\overset{\text{Hop}}{=} \frac{X(s+j\omega_s k)}{-T}$$

$$\Rightarrow X^*(s) \overset{⊛}{=} \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(s+j\omega_s k) + \frac{1}{2}x(0^+)$$

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$$

PAPCO

Subject:
Date

تابع تبدیل پالسی

هدف این بخش ارتباط بین سیستم‌ها و سیگنال های زمان گسسته با زمان پیوسته است

مقدمه:

سوال: چه ارتباطی بین تابع تبدیل زمان پیوسته ی یک سیستم و معادل زمان گسسته آن وجود دارد؟

$$x(t) \xrightarrow{\delta_T(t)} x^*(t) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y(t) \xrightarrow{\delta_T(t)} y^*(t)$$

شکل I

فقط جهت بازورشدن

از $y(t)$ در زمان ها نمونه برداری

در جلسه قبل: $X(s) \longrightarrow X^*(s) \xrightarrow{s=\frac{1}{T}\ln z} X_D(z)$

مجموع کانولوشن

هدف: بدست آوردن y^* برحسب x^* و g

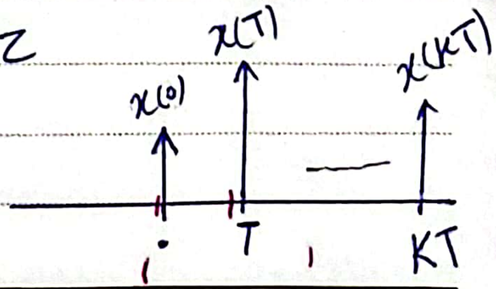
$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\,\delta(t-kT)$$

$$u(t) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y(t) \qquad Y(s) = G(s)\,U(s)$$

$$y(t) = u(t) * g(t) = \int_0^t g(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t u(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$$

حال در شکل I داریم: $y(t) = \int_0^t g(t-\tau)\,x^*(\tau)\,d\tau$

$$= \int_0^t g(t-\tau) \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\,\delta(\tau-kT)\,d\tau$$



Subject:
Date

$$y(t)=\begin{cases}\int_0^t g(t-\tau)x(0)\delta(\tau)d\tau = g(t)x(0) & 0<t<T\\ g(t)x(0)+g(t-T)x(T) & T<t<2T\\ g(t)x(0)+g(t-T)x(T)+g(t-2T)x(2T) & 2T<t<3T\\ \vdots \end{cases}$$

فرض می کنیم $g(t)=0$ for $t<0$

(شاید اسم باشه؟) نمی فهمم

$$\Rightarrow y(t)=\sum_{h=0}^{k} g(t-hT)\,x(hT) \circledast \qquad 0<t<kT$$

$$y(kT)=\sum_{h=0}^{\cancel{k}\ \infty} g(kT-hT)\,x(hT)=\sum_{h=0}^{\cancel{k}\ \infty} g(hT)\,x(kT-hT)$$

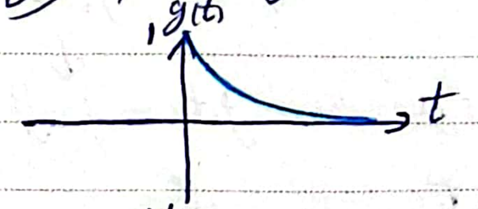
مجموع کانولوشن

$\circledast$ $g(t)x(0)+g(t-T)x(T)+g(t-2T)x(2T)+\dots$

مجموع یک سری پاسخ ضربه $(g(t))$ است

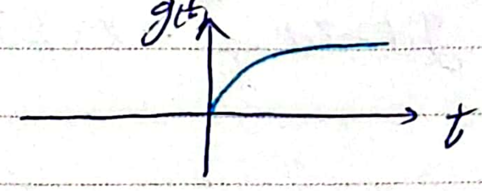
$g(t)$ در لحظه صفر می تواند پیوسته باشد یا نباشد

مثال، $G(s)=\dfrac{1}{s+1}\rightarrow g(t)$



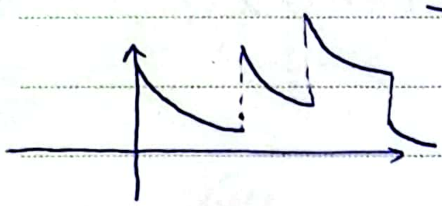
I

$G(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}\rightarrow g(t)$



II

در حالت I : احتمال وجود پرش در $y(t)$ زیاد است



در حالت II : پاسخی که برای $y(t)$ بدست می آوریم پاسخ پیوسته ای است

بنابراین نتیجه می گیریم اگر پاسخ ضربه سیستم در $t=0$ دارای پرش باشد، این جهش را در خروجی یعنی $y(t)$ نشان می دهد

در این حالت اگر می خواهیم $y(kT)$ را محاسبه کنیم باید $y(kT^+)$ را محاسبه کنیم یعنی

$$\lim_{t\to kT^+} y(t)$$

$$\underbrace{\lim_{s\to\infty} sG(s)}_{\text{درجه مخرج حداقل ۲ مرتبه بزرگتر از درجه صورت باشد}} = 0 \to g(0^+) = 0 \to \text{پرش نداریم}$$

تابع تبدیل پالسی = تبدیل z دنباله وزنی $(g(kT))$

دنباله وزنی = سیگنال زمان گسسته ناشی از نمونه برداری از پاسخ ضربه سیستم

$$y(kT) = \sum_{h=0}^{\infty} g(kT-hT)\,x(hT)$$

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} g(kT-hT)\, x(hT)\, z^{-k} \quad (*)$$

تغییر متغیر می‌دهیم : $m \triangleq k-h \rightarrow k = m+h$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{m=-h}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} g(mT)\, x(hT)\, z^{-(m+h)}$$

?

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \Big[g(mT)\, z^{-m} \underbrace{\sum_{h=0}^{\infty} x(hT)\, z^{-h}}_{X(z)} \Big]$$

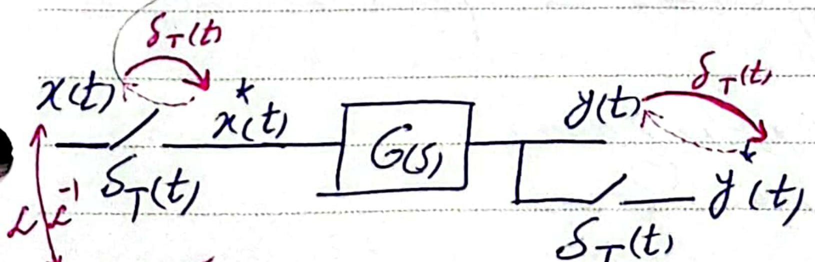
$$= \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} g(mT)\, z^{-m}}_{G(z)} X(z) = G(z)\, X(z) \Rightarrow Y(z) = G(z)\, X(z)$$

تبدیل z خروجی سیستم برای زمان‌های نمونه‌برداری (تبدیل $y(kT)$ z)

تابع تبدیل پالس (تبدیل $g(kT)$ z)

تبدیل z ورودی سیستم نمونه‌برداری شده (تبدیل $x(kT)$ z)

(در صورت وجود شرایط (نرخ نایکوئیست))



$$\begin{cases} Y^*(s) = G^*(s)\, X^*(s) \\ Y(z) = \underbrace{G(z)}_{\mathcal{Z}\{g(kT)\}} X(z) \end{cases}$$

$X(s) \xrightarrow{\text{انتگرال کانولوشن}} X^*(s)$ $\qquad$ $Y(s) \xrightarrow{\text{انتگرال کانولوشن}} Y^*(s)$

$s = \frac{1}{T} \ln z$ $\qquad$ $s = \frac{1}{T} \ln z$

$x(kT) \underset{z^{-1}}{\overset{z}{\updownarrow}} X(z)$ $\qquad$ $y(kT) \underset{z^{-1}}{\overset{z}{\updownarrow}} Y(z)$

$$X^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = X(z) \quad ; \quad X(z)\Big|_{z=e^{sT}} = X^*(s)$$

$$Y(z) = G(z)\,X(z) \xrightarrow{z=e^{sT}} Y^*(s) = \underbrace{G^*(s)}_{\mathcal{L}(g(t)\,\delta_T(t))}\,X^*(s)$$

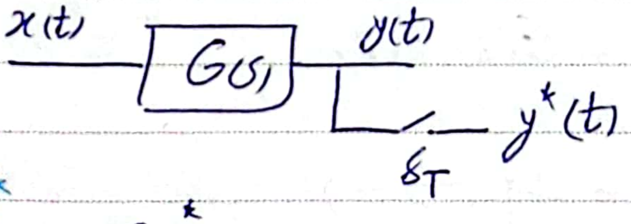
با به * به مانند یک اپراتور نگاه می‌کنیم

برای این معادلست که در حوزه s ها در یک قطار ضربه ضرب می‌شود

$$Y^*(s) = [G(s)\,X^*(s)]^* = G^*(s)\,X^*(s)$$

از اپراتور * می‌آورمش بیرون

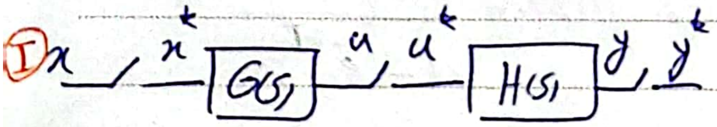
سوال: اگر * نداشته باشد چه اتفاق می‌افتد؟ $X(s)$ $\rightarrow$



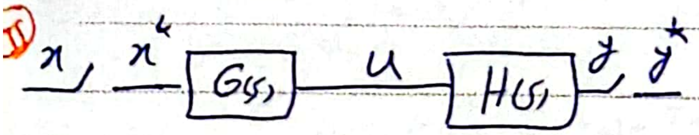
$$[Y(s)]^* = [G(s)X(s)]^* = \underbrace{GX^*(s)}_{\text{نادر}}$$

تابع تبدیل پالس عنصر پشت سرهم

I



II



I. $Y(s) = H(s)\,U^*(s)$

$U(s) = G(s)\,X^*(s) \rightarrow U^*(s) = G^*(s)\,X^*(s)$ $\Big\} \rightarrow Y(s) = H(s)\,G^*(s)\,X^*(s)$

$$\rightarrow Y^*(s) = [H(s)\,G^*(s)\,X^*(s)]^* = H^*(s)\,G^*(s)\,X^*(s) \rightarrow Y(z) = H(z)\,G(z)\,X(z)$$

Subject:
Date

II. $$\left.\begin{aligned} Y(s) &= H(s)\,U(s) \\ U(s) &= G(s)\,X^*(s) \end{aligned}\right\} \Rightarrow Y(s) = H(s)\,G(s)\,X^*(s)$$

$$\rightarrow Y^*(s) = \left[H(s)\,G(s)\,X^*(s)\right]^* = \left[H(s)\,G(s)\right]^* X^*(s)$$

$$\rightarrow Y(z) = HG(z)\,X(z)$$

مثال، بلوک دیاگرام های صفحه قبل را در نظر بگیرید.

$$G(s) = \frac{1}{s+a}$$

برای هر دو حالت $\frac{Y(z)}{X(z)}$ را بدست بیاورید

$$H(s) = \frac{1}{s+b}$$

I. $$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z)\,H(z)$$

$$G(z) = Z\left\{\frac{1}{s+a}\right\} \quad G(s)$$

$$\xrightarrow[\text{حوزه زمان}]{\mathcal{L}^{-1}} e^{-at} \xrightarrow{\text{نمونه برداری}} e^{-akT} \xrightarrow{Z} \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{1}{1-e^{-a}z^{-1}} \xrightarrow{\text{به همین ترتیب}} H(z) = \frac{1}{1-e^{-b}z^{-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}} \times \frac{1}{1-e^{-bT}z^{-1}}$$

Subject:
Date

$$\underbrace{\frac{1}{s+a}\cdot\frac{1}{s+b}}_{} \longrightarrow \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}\right)$$

II: $$\frac{Y(z)}{X(z)} = Z\left\{\frac{1}{s+a}\,\frac{1}{s+b}\right\}$$

حوزه زمان $$\xrightarrow{L^{-1}} \frac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$$

$\downarrow$ نمونه برداری

$$\frac{1}{b-a}\left(e^{-akT}-e^{-bkT}\right)$$

$$\downarrow Z$$

$$\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-bT}z^{-1}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-bT}z^{-1}}\right)$$

همانطور که مشخص است حاصل I با II یکسان نشد.

روش های کلی محاسبه تابع تبدیل پالسی

• محاسبه تابع تبدیل پالسی $G(z)$ از روی تابع تبدیل $G(s)$:

- $G(z)=\sum_{k=0}^{\infty} g(kT)\,z^{-k} \leftarrow g(kT) \leftarrow g(t)=L^{-1}(G(s))$
- گسترش $G(s)$ به کسرهای جزئی و محاسبه تبدیل z هر کدام از کسرها
- با استفاده از انتگرال کانولوشن $G^*(s)$ محاسبه شود

$$G(z)=G^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}$$

Subject:
Date

مثال ،

$$G(s) = \underbrace{\frac{1-e^{-Ts}}{s}}_{\text{نگهدار مرتبه صفر}} \, \frac{1}{s(s+1)}$$

$$G(z) = Z(G(s)) = Z\left[(1-e^{-Ts})\frac{1}{s^2(s+1)}\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s+1)}\right) = h(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left((1-e^{-Ts})\frac{1}{s^2(s+1)}\right) = h(t) - h(t-T)$$

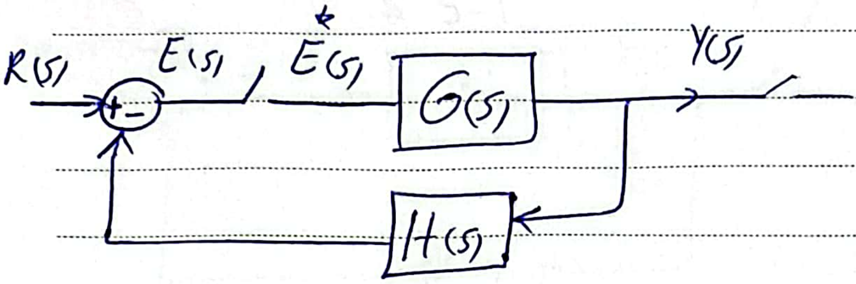
$$\xrightarrow{\text{نمونه برداری}} h(kT) - h((k-1)T) \xrightarrow{Z} H(z) - z^{-1}H(z)$$
$$= (1-z^{-1})H(z)$$

$$\Rightarrow G(z) = (1-z^{-1})\, \underbrace{Z\left\{\frac{1}{s^2(s+1)}\right\}}_{\text{در تمرین داده شده بود!}}$$

PAPCO

Subject:
Date

تابع تبدیل پالس سیستم حلقه بسته



$$Y(s) = G(s)E^*(s) \longrightarrow Y^*(s) = G^*(s)E^*(s) \qquad ①$$

$$E(s) = R(s) - H(s)Y(s) = R(s) - H(s)G(s)E^*(s)$$

$$\longrightarrow E^*(s) = R^*(s) - HG^*(s)E^*(s)$$

$$\longrightarrow \left[1 + HG^*(s)\right]E^*(s) = R^*(s) \longrightarrow E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1+HG^*(s)} \qquad ②$$

$$①,② \Rightarrow Y^*(s) = \frac{G^*(s)R^*(s)}{1+HG^*(s)}$$

$$Y(z) = \frac{G(z)R(z)}{1+HG(z)}$$

$$H(s) = 1$$

$$G(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}\,\frac{k}{s+1} = (1-e^{-Ts})\frac{k}{s(s+1)}$$

$$Z\{G(s)\} = (1-z^{-1})\,Z\Big\{\underbrace{\frac{k}{s(s+1)}}\Big\}$$

$$k\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) \longrightarrow k\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}\right)$$

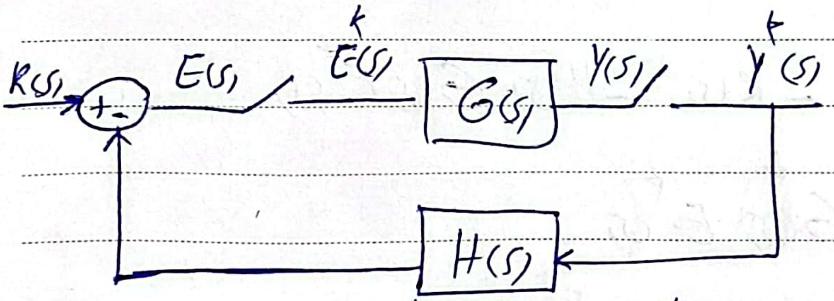
PAPCO

Subject:
Date

$$\frac{Y(z)}{R(s)} = k(1-z^{-1})\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}\right) \quad ?$$

غلط نیست؟

تابع تبدیل پالس سیستم حلقه بسته



$$Y(s) = G(s)E^*(s) \longrightarrow Y^*(s) = G^*(s)E^*(s)$$

$$E(s) = R(s) - H(s)Y^*(s) = R(s) - H(s)G^*(s)E^*(s)$$

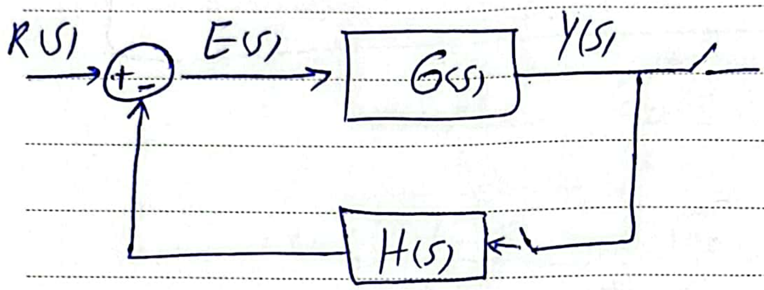
$$\xrightarrow{*} E^*(s) = R^*(s) - H^*(s)G^*(s)E^*(s)$$

$$\longrightarrow E^*(s) = \frac{1}{1+H^*(s)G^*(s)}R^*(s)$$

$$Y^*(s) = \frac{G^*(s)}{1+H^*(s)G^*(s)}R^*(s) \longrightarrow \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+H(z)G(z)}$$

PAPCO

تابع تبدیل پالس سیستم حلقه بسته



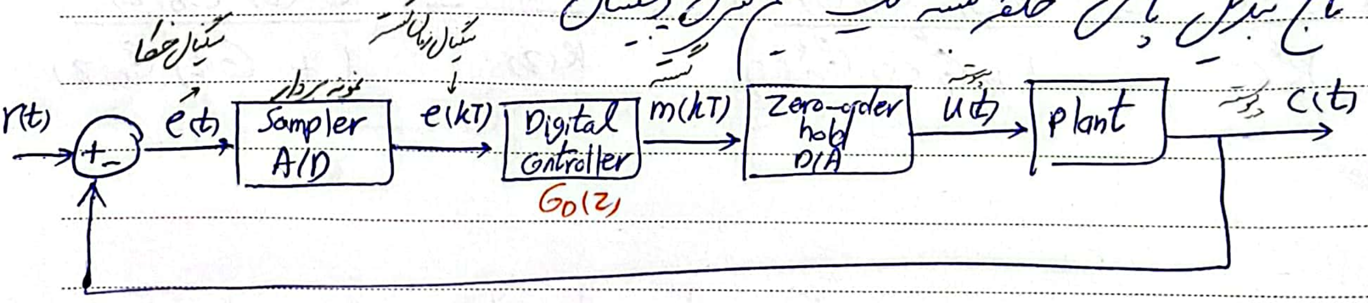
$$Y(s) = G(s)E(s)$$
$$E(s) = R(s) - H(s)Y^*(s)$$

$$Y(s) = G(s)E(s) = G(s)R(s) - G(s)H(s)Y^*(s)$$

$$\to Y^*(s) = GR^*(s) - GH^*(s)Y^*(s) \to Y^*(s) = \frac{GR^*(s)}{1+GH^*(s)}$$

$$\to Y(z) = \frac{GR(z)}{1+GH(z)} \quad \nrightarrow \quad \frac{Y(z)}{R(z)}$$

تابع تبدیل پالس حلقه بسته یک سیستم کنترل دیجیتال

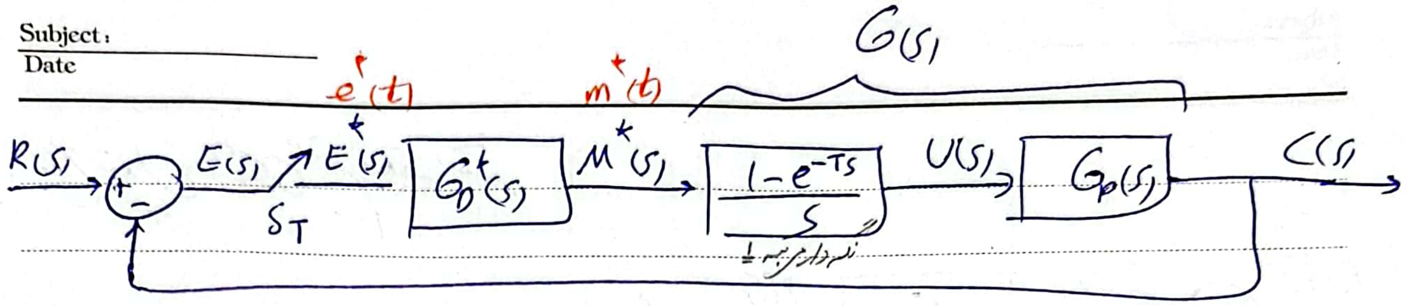


$$m(k) + a_1 m(k-1) + \dots + a_n m(k-n)$$ معادله تفاضلی
$$= b_0 e(k) + b_1 e(k-1) + \dots + b_n e(k-n)$$

$$\Rightarrow M(z) + a_1 z^{-1} M(z) + \dots + a_n z^{-n} M(z)$$
$$= b_0 E(z) + b_1 z^{-1} E(z) + \dots + b_n z^{-n} E(z)$$

تابع تبدیل پالس
$$\Rightarrow G_D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

Subject:
Date



$$C(s) = G(s)\, M^*(s)$$
$$M^*(s) = G_D^*(s)\, E^*(s)$$

$$E(s) = R(s) - C(s) \longrightarrow E^*(s) = R^*(s) - C^*(s)$$

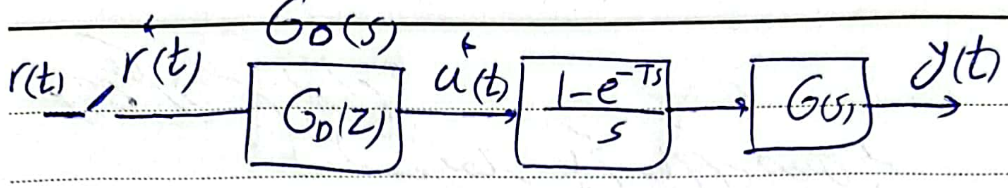
با استفاده از روابط بالا $\longrightarrow C(s) = G(s)\, G_D^*(s)\left(R^*(s) - C^*(s)\right)$

$$\longrightarrow C^*(s) = G^*(s)\, G_D^*(s)\left(R^*(s) - C^*(s)\right)$$

$$\longrightarrow C^*(s) = \frac{G^*(s)\, G_D^*(s)\, R^*(s)}{1 + G^*(s)\, G_p^*(s)}$$

$$\longrightarrow \frac{C^*(s)}{R^*(s)} = \frac{G^*(s)\, G_D^*(s)}{1 + G^*(s)\, G_p^*(s)} \longrightarrow \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)\, G_D(z)}{1 + G(z)\, G_D(z)}$$

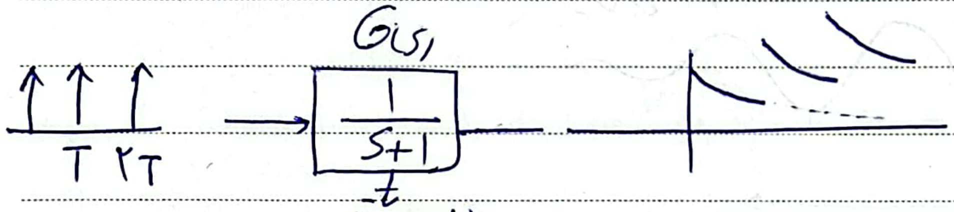
Subject:
Date



$$Y(s) = G(s)\,\frac{1-e^{-Ts}}{s}\,G_D^*(s)\,R^*(s)$$

$$Y^*(s) = \left[G(s)\,\frac{1-e^{-Ts}}{s}\right]^* G_D^*(s)\,R^*(s)$$

$$Y(z) = \left(G(s)\,\frac{1-e^{-Ts}}{s}\right)^*_{s=\frac{1}{T}\ln z} G_D(z)\,R(z)$$



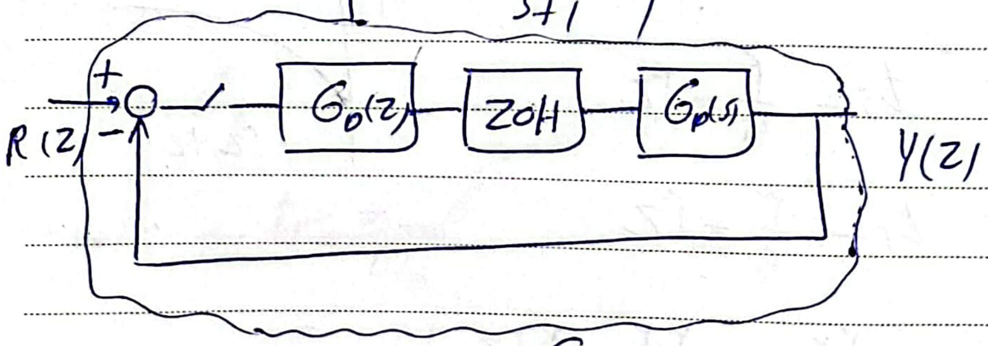
$e^{-t}u(t)$

نمونه‌برداری ↓

$$e^{-Tk} = (e^{-T})^k$$

$$Z\left\{\frac{1-e^{-2Ts}}{s}\,G(s)\right\} = (1-z^{-2})\,Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

$$T=1\ ,\ Z\left\{e^{-2s}\,\frac{1}{s+1}\right\} = ?$$



$\equiv G(z)$

PAPCO

مرور عملکرد سیستم کنترل

← معیار پاسخ زمانی به ورودی پله

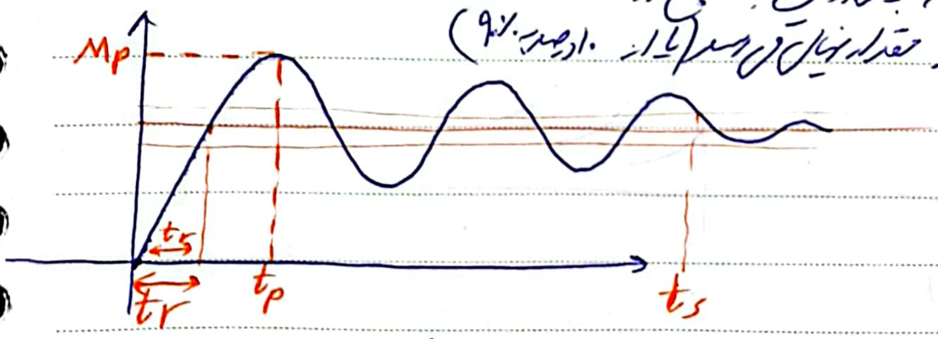
- فراجهش M_p و $O.S.$
- زمان فراجهش t_p
- زمان صعود t_r : $0\% \to 100\%$ ، $10\% \to 90\%$
- زمان نشست t_s : 5% یا 2%

فراجهش ← حداکثر مقدار پاسخ پله ← M_p

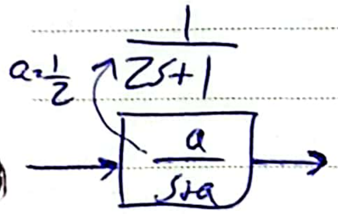
$$O.S. = \frac{M_p - y(\infty)}{y(\infty)} \%$$

زمان فراجهش t_p ، زمانی که حداکثر پاسخ پله رخ می‌دهد

زمان صعود t_r ← زمانی که برای اولین بار پاسخ از مقدار ۰ درصد ۱۰۰ درصد مقدار نهایی می‌رسد (یا از ۱۰ درصد به ۹۰٪)



زمان نشست t_s ← ۲٪ یا ۵٪ : زمان ورود مقدار پاسخ به باند ۲ درصد یا ۵ درصد مقدار نهایی پاسخ

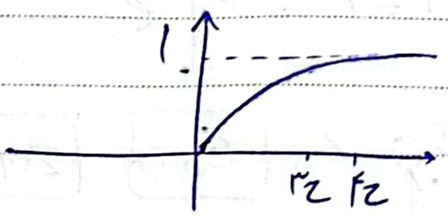


$(1-e^{-at})u(t) \to$ پاسخ پله ، فراجهش ندارد ✓

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-at}$$

$3\tau \Rightarrow$ برابر با 0.05

$4\tau \Rightarrow$ برابر با 0.02



2% : $t_s = \frac{4}{a} = 4\tau$

5% : $t_s = \frac{3}{a} = 3\tau$

$t_r \simeq \frac{2.2}{\omega_b} = \frac{2.2}{a} = 2.2\tau$

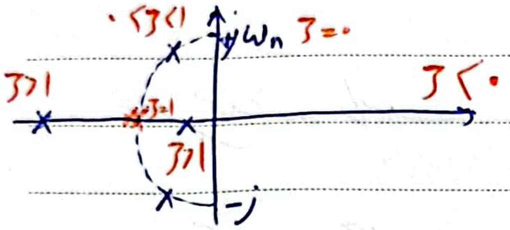
Subject:
Date

$$\longrightarrow \boxed{\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}} \longrightarrow y(t)$$

$0<\zeta<1$

$\zeta<0 \rightarrow$ ناپایدار

$\zeta=0 \rightarrow$ نوسانی



$$\begin{cases} \sigma = \zeta\omega_n \\ \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \end{cases}$$ فرکانس نوسانات میرا شونده

قطب‌ها $\{\; s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma \pm j\omega_d \qquad 0<\zeta<1$

جملات $e^{s_1 t}, e^{s_2 t}$ در پاسخ زمانی حضور دارند.

سیستم استاندارد مرتبه ۲

$$t_s = \begin{cases} \dfrac{4}{\zeta\omega_n} & 2\% \\ \dfrac{3}{\zeta\omega_n} & 5\% \end{cases} \qquad 0<\zeta<1$$

$$O.S. = \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \rightarrow \begin{cases} \zeta = 0.7 \rightarrow 5\% \\ \zeta = 0.6 \rightarrow 10\% \\ \zeta = 0.5 \rightarrow 15\% \\ \zeta = 0.45 \rightarrow 20\% \end{cases}$$

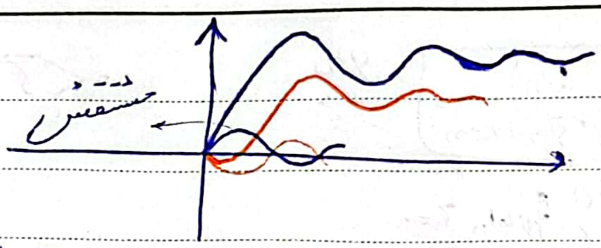
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$0-100 \leftarrow t_r = \dfrac{\pi-\beta}{\omega_d}$, $\beta \rightarrow \cos^{-1}(\zeta)$

$10-90 \leftarrow t_r = \dfrac{2.2}{\omega_b}$

Subject:
Date

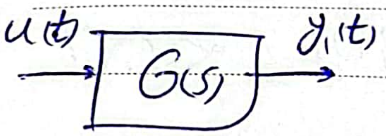
$$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}(1+T_0 s)$$

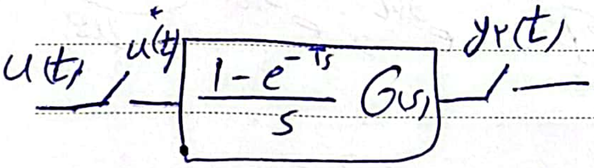


صفر سمت راست ← undershoot خواهیم داشت

، سمت چپ ← overshoot عوض می‌شود ولی زمان نشست عوض نمی‌شود

(*) در لحظات نمونه برداری، $y_1(kT)=y_2(kT)$





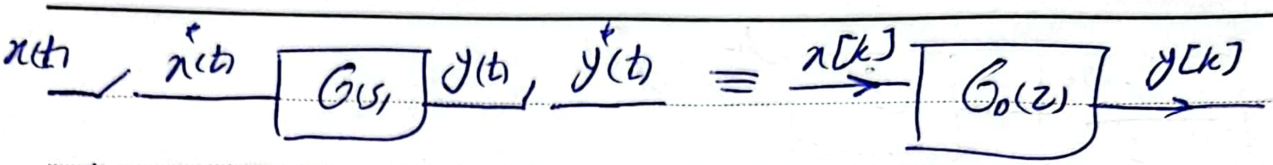
$$G_0(z)=Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}G(s)\right\}$$

(**) اگر s^* قطب $G(s)$ باشد، e^{Ts^*} قطب $G_0(z)$ است

(*) (**) ← از ناحیه‌ای در صفحه s به عنوان محل قطب‌های مطلوب سیستم حلقه بسته چنین ویژگی‌هایی برای پاسخ زمانی داشته باشد تبدیل آن ناحیه توسط نگاشت e^{Ts} در صفحه z

چنین همان ویژگی‌ها است.

Subject:
Date



$$x^*(t) = \sum_h x(hT)\,\delta(t-hT)$$

$$y(t) = \sum x(hT)\,g(t-hT) \xRightarrow{t=kT} y(kT) = \sum_h x(hT)\,g(kT-hT) \quad (*)$$

پاسخ ضربه $G(s)$

$$y^*(t) = \sum_k y(kT)\,\delta(t-kT)$$

$$\begin{cases} y[k] \triangleq y(kT) \\ x[k] \triangleq x(kT) \\ g[k] \triangleq g(kT) \end{cases}$$

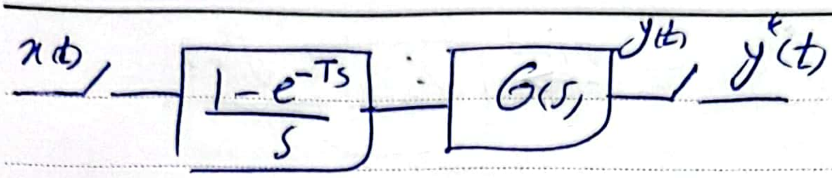
$$(*) \rightarrow y[k] = \sum_h x[h]\,g[k-h]$$

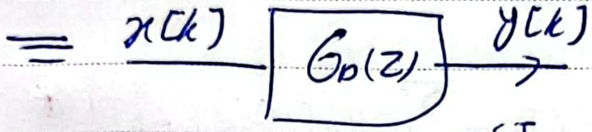
پاسخ ضربه $G_D(z)$

پاسخ ضربه $G(s)$ در لحظات نمونه‌برداری برابر پاسخ ضربه $Z\{G(s)\}$ است

$$Z\{G(s)\} = G^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}$$

Subject:
Date:





$$G_D(z) = Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}G(s)\right\}$$

پاسخ پله ی $G(s)$ در لحظات نمونه برداری برابر با پاسخ پله $Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}G(s)\right\}$ است

پاسخ پله : $G_D(z)\frac{1}{1-z^{-1}} = \cancel{(1-z^{-1})}\, Z\left\{\frac{G(s)}{s}\cancel{\frac{1}{(1-z^{-1})}}\right\}$

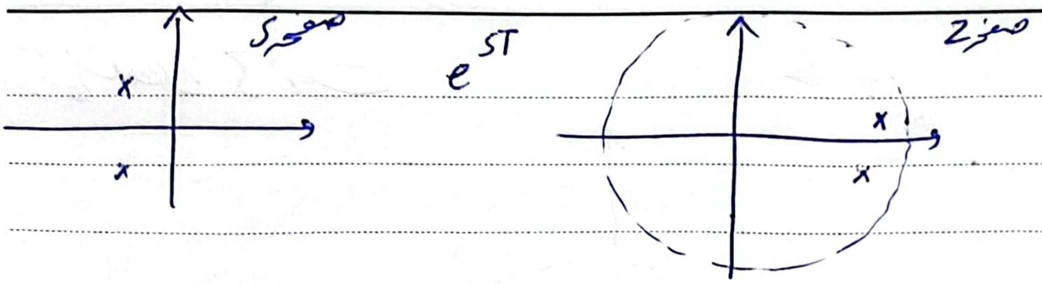
$= Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$ → پاسخ پله ی $G(s)$

- پاسخ پله $G_D(z) = Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}G(s)\right\}$ ، ی $G(s)$ در لحظات نمونه برداری یکسان است.

- پاسخ پله ی $G(s)$ به محل قطب های آن بستگی دارد.

- اگر s^* یک قطب ی $G(s)$ باشد e^{s^*t} یک قطب $G_D(z)$ است

(نگاشت $z = e^{s^*t}$ (ارتباط صفحه s و z) برای بررسی خواص محل قطب ها را مشخص می کند)



ارتباط صفحه s و z

تضعیف ثابت، σ ثابت

نسبت میرایی

$\sigma = \zeta \omega_n$

$e^{\sigma T}$ شعاع دایره است

$$S = \{ \sigma + j\omega_d \mid \omega_d \in \mathbb{R} \}$$

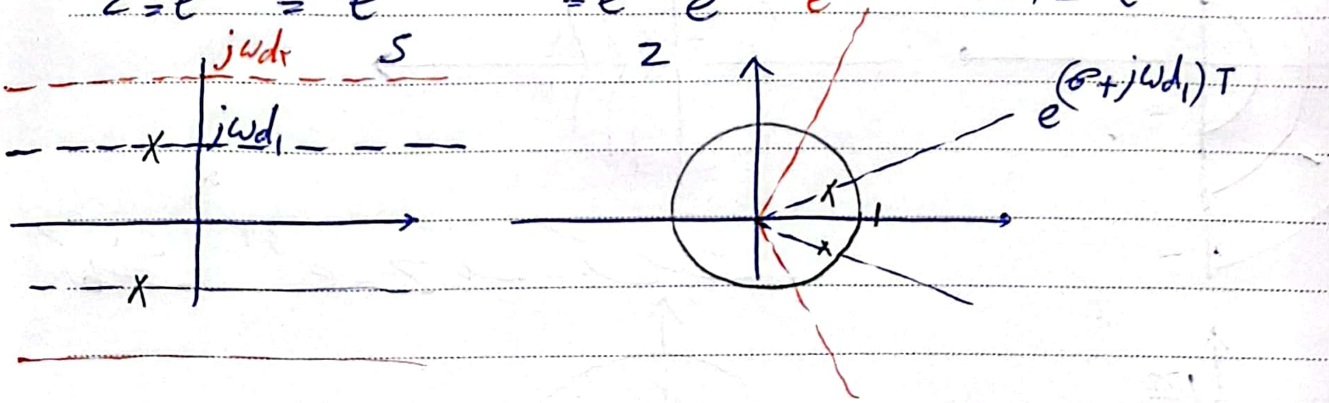
$$Z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega_d)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega_d T} = e^{\sigma T}\left(\cos(\omega_d T) + j \sin(\omega_d T) \right)$$

محل های ω_d ثابت.

$$S = \{ \sigma + j\omega_d \mid \sigma \in \mathbb{R} \}$$

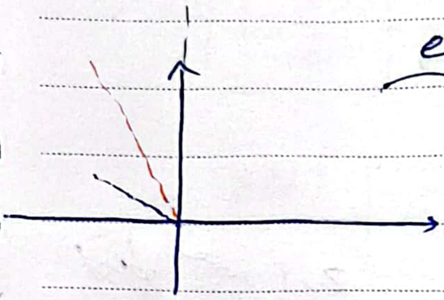
$$\measuredangle Z = \omega_d T$$

$$Z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega_d)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega_d T} \qquad |Z| = e^{\sigma T}$$

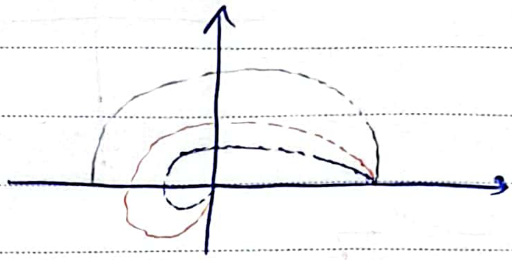


سیستم پایدار

مکان های ζ ثابت



$\xrightarrow{e^{sT}}$



$$S = \left\{ -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \;\middle|\; \omega_n \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}$$

$$Z = e^{sT} = e^{(-\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})T}$$

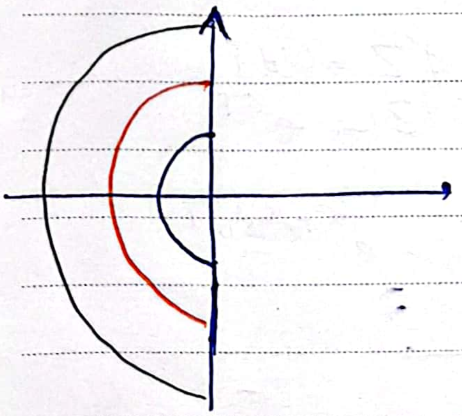
$$|Z| = e^{-\zeta\omega_n T}$$

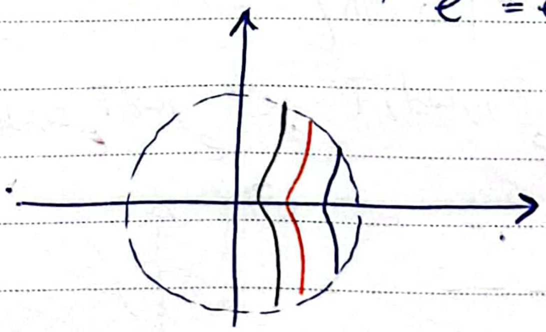
$$\measuredangle Z = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\, T$$

مکان های ω_n ثابت

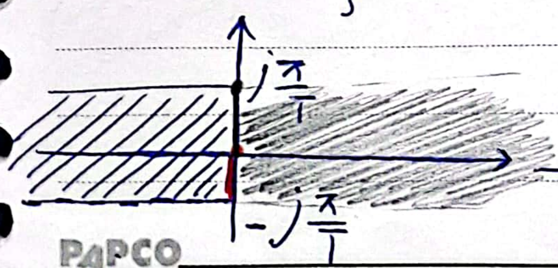
$$S = \left\{ -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \;\middle|\; 0 \leq \zeta \leq 1 \right\}$$

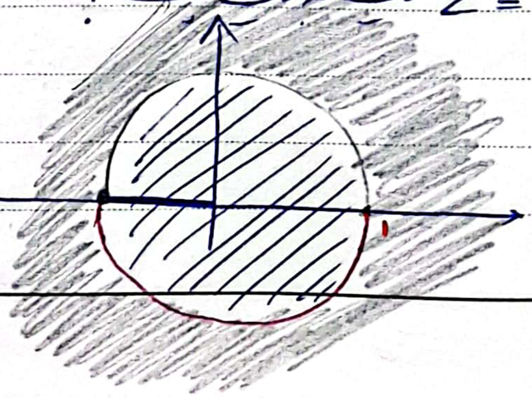
$$e^{sT} = e^{-\zeta\omega_n T + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\, T}$$





نگاشت $Z = e^{sT}$ یک به یک نیست!





$$e^{j\frac{\pi}{T}T} = e^{-j\frac{\pi}{T}T}$$

Subject:
Date

در یک سیستم کنترل لازم است:

$T = 0.02$

$O.S. \leqslant 10\%$

$t_s \leqslant 0.5$

$t_r \leqslant 0.2$

محل مطلوب قطب‌های غالب سیستم حلقه‌بسته در صفحه z را مشخص کنید که این خواسته‌ها برآورده شود

صفحه s

$$O.S \leqslant 10\% \longrightarrow \boxed{\zeta \geqslant 0.6}$$

$$t_s \leqslant 0.5 \longrightarrow \frac{4}{\zeta\omega_n} \leqslant 0.5 \longrightarrow \boxed{\zeta\omega_n \geqslant 8}$$

$$t_r \leqslant 0.2$$

$$\frac{\pi-\beta}{\omega_d} = \frac{2.2}{\omega_n} = \frac{2.2}{\omega_n} \leqslant 0.2 \longrightarrow \boxed{\omega_n \geqslant 11}$$

$$\exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \leqslant 0.1 \longrightarrow \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \geqslant \frac{-\ln(0.1)}{\pi}$$

$$\downarrow$$

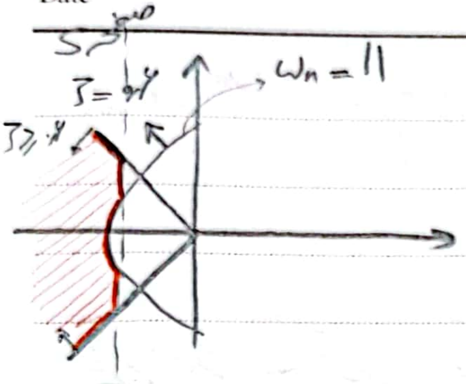
$$\frac{\zeta^2}{1-\zeta^2} \geqslant \left(\frac{-\ln(0.1)}{\pi}\right)^2 = a^2$$

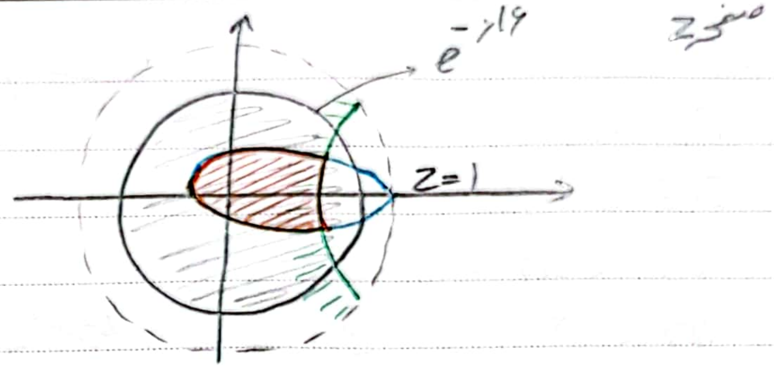
$$\downarrow$$

$$\zeta^2 \geqslant \frac{a^2}{1+a^2} \longrightarrow \zeta \geqslant \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$

PAPCO

Subject:
Date





$\zeta\omega_n = ۸$

$\zeta\omega_n \geq ۸$

ناحیه‌ای که خواسته
مسئله را ارائه
می‌کند

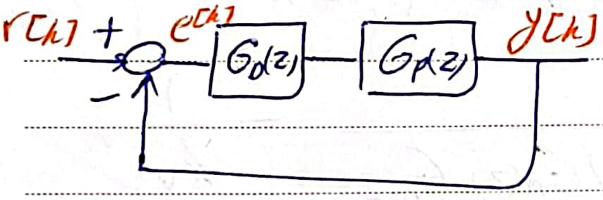
$$e^{sT} \longrightarrow e^{\overset{۰/۰۲}{T}(-\overset{۸}{\zeta\omega_n})} = e^{-۰/۱۶}$$

PAPCO

Subject:
Date

ویژگی های پاسخ حالت گذرا وابسته به محل قطب ها و صفرهای سیستم حلقه بسته

$$z = e^{sT}$$



$$\lim_{k\to\infty} x[k] = \lim_{z\to 1} (1-z^{-1})X(z)$$

$$\frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1+G_D(z)G(z)}$$

$$\lim_{k\to\infty} e[k] = \lim_{z\to 1} (1-z^{-1}) \frac{1}{1+G_D(z)G_P(z)} R(z)$$

$$R(z) \text{ پله واحد} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$\lim_{k\to\infty} e[k] = \lim_{z\to 1} \cancel{(1-z^{-1})} \frac{1}{1+G_D(z)G_P(z)} \frac{1}{\cancel{1-z^{-1}}}$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{1}{1+G_D(z)G_P(z)} = \frac{1}{1+\lim_{z\to 1} G_D(z)G_P(z)}$$

$$K_p \triangleq \lim_{z\to 1} G_D(z)\,G_P(z)$$

ثابت موقعیت استاتیکی

خطای حالت ماندگار به ورودی پله : $\frac{1}{1+K_p}$

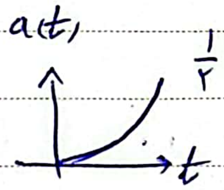
PAPCO

اگر $R(z)=\dfrac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$ شیب باشد

$$\lim_{k\to\infty} e[k]=\lim_{z\to1}(1-z^{-1})\frac{1}{1+G_D(z)G_p(z)}\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$=\lim_{z\to1}\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})+(1-z^{-1})G_p(z)G_D(z)}=\frac{1}{k_v}$$

$$k_v\triangleq\lim_{z\to1}\frac{(1-z^{-1})}{T}G_D(z)\,G_p(z)$$



اگر $R(z)=\dfrac{T^2(1+z^{-1})z^{-1}}{2(1-z^{-1})^3}$ شتاب باشد

$$\lim_{k\to\infty} e[k]=\lim_{z\to1}(1-z^{-1})\frac{1}{1+G_D(z)G_p(z)}\frac{T^2(1+z^{-1})z^{-1}}{2(1-z^{-1})^3}$$

$$=\lim_{z\to1}\frac{T^2(1+z^{-1})z^{-1}}{2(1-z^{-1})^2+2(1-z^{-1})^2G_D(z)G_p(z)}=\frac{1}{k_a}$$

$$k_a\triangleq\lim_{z\to1}\frac{(1-z^{-1})^2}{T^2}G_D(z)\,G_p(z)$$

نوع سیستم:

$$G_D(z)\,G_p(z)=\frac{1}{(1-z^{-1})^N}\frac{A(z)}{B(z)}$$

اگر $A(1)\neq0$ و $B(1)\neq0$ آنگاه نوع سیستم را برابر با N تعریف می‌کنند.

ثابت خطا \ N	0	1	2	3
K_p	محدود	∞	∞	∞
K_v	0	محدود	∞	∞
K_a	0	0	محدود	∞

ورودی \ N	0	1	2	3
پله	$\frac{1}{1+K_p}$	0	0	0
شیب	∞	$\frac{1}{K_v}$	0	0
شتاب	∞	∞	$\frac{1}{K_a}$	0

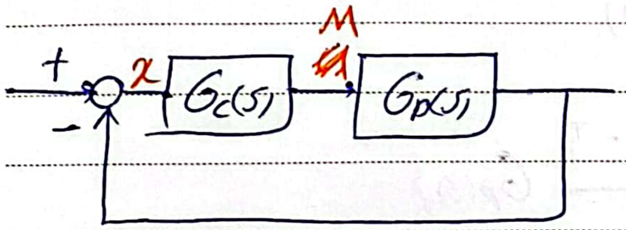
✓ اگر ورودی پله باشد باید یک انتگرالگیر در تابع تبدیل حلقه باز داشته باشیم

✓ « « شیب « « « « ۲ « « « « « «

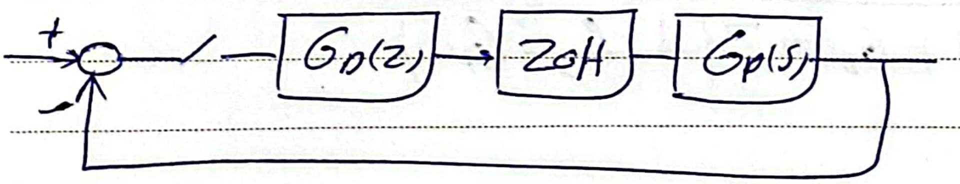
✓ « « شتاب « « « « ۳ « « « « « «

✓ اصل مدل داخلی ← IMP دینامیک ورودی اگر در دینامیک تابع تبدیل حلقه باشد خطای حالت ماندگار صفر خواهد شد

✓ اگر اغتشاش از نوع پله باشد و تابع تبدیل حلقه انتگرالگیر داشته باشد، اغتشاش حذف می‌شود. در غیر این صورت اثر آن در خطای حالت ماندگار خواهد داشت.



چگونه کنترل کننده را بصورت گسسته پیاده سازی کنیم؟



Subject:
Date

$$G_c(s) = k\,\frac{s+a}{s+b}$$

$$G_c(s) = \frac{a}{s+a} \longrightarrow \frac{M(s)}{X(s)} = \frac{a}{s+a}$$

$$\dot m(t) + a m(t) = a x(t) \longrightarrow \dot m(t) = -a m(t) + a x(t)$$

$$\frac{m[k]-m[k-1]}{T} = -a m[k-1] + a x[k-1]$$

$$m[k] = m[k-1] - aT m[k-1] + aT x[k-1]$$

$$\longrightarrow M(z) = (z^{-1} - aT z^{-1}) M(z) + aT z^{-1} X(z)$$

$$G_D(z) = \frac{M(z)}{X(z)} = \frac{aTz^{-1}}{1 + aTz^{-1} - z^{-1}} = \frac{a}{\frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}} + a}$$

$$s \rightarrow \frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}} = \frac{z-1}{T}$$ روش تفاضل مستقیم

$$G_D(z) = Z\{G_c(s)\} \longrightarrow$$ حفظ پاسخ ضربه

$$Y(s) = \frac{G_c(s)\,G_p(s)}{1 + G_c(s)\,G_p(s)} R(s)$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)\, Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s} G_p(s)\right\}}{1 + G_D(z)\, Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s} G_p(s)\right\}}$$

PAPCO

$$G_D(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s} G_c(s)\right\}$$ حفظ پاسخ پله فیلتر

گسسته سازی تابع تبدیل پیوسته

$$s \rightarrow \frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}}$$ تفاضل مستقیم

$$s \rightarrow \frac{1-z^{-1}}{T}$$ معکوس

$$\frac{M(s)}{X(s)} = G_c(s) = \frac{a}{s+a} \rightarrow \dot{m}(t) + a m(t) = a x(t)$$

$$\rightarrow \dot{m}(t) = -a m(t) + a x(t)$$

$$\frac{m(kT) - m((k-1)T)}{T} = -a m((k-1)T) + a x((k-1)T)$$

$$\frac{m(kT) - m((k-1)T)}{T} = -a m(kT) + a x(kT)$$

$$\frac{m(kT) - m((k-1)T)}{T} = \frac{-a}{۲}\left(m(kT) + m((k-1)T)\right)$$

$$+ \frac{a}{۲}\left(x(kT) + x((k-1)T)\right)$$

$$\frac{M(z) - z^{-1}M(z)}{T} = \frac{-a}{۲}\left(M(z) + z^{-1}M(z)\right)$$

$$+ \frac{a}{۲}\left(X(z) + z^{-1}X(z)\right)$$

$$M(z)\left[\frac{1}{T} + \frac{a}{۲} + \left(\frac{a}{۲} - \frac{1}{T}\right)z^{-1}\right] = \frac{a}{۲}\left(1 + z^{-1}\right)X(z)$$

Subject:
Date

$$\frac{M(z)}{X(z)} = \frac{\frac{a}{2}(1+z^{-1})}{\frac{1}{T}+\frac{a}{2}+\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{T}\right)z^{-1}} = \frac{\frac{a}{2}(1+z^{-1})}{\frac{a}{2}(1+z^{-1})+\frac{1}{T}(1-z^{-1})}$$

$$\frac{M(z)}{X(z)} = \frac{a}{a+\boxed{\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}}$$

روش ذوزنقه
ذوزنقه
Tustin

$$s \rightarrow \frac{2}{T}\frac{(1-z^{-1})}{1+z^{-1}}$$

(impulse) روش حفظ پاسخ ضربه $\quad G(s) \rightarrow Z\{G(s)\}$

(zoh) 〃 〃 〃 پله $\quad G(s) \rightarrow Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}G(s)\right\}$

روش صفر و قطب تطبیق یافته (matched)

$$G(s) = K\frac{\prod_{i=1}^{nz}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{np}(s-p_i)}$$

برای هر صفر متناهی $G(s)$ در $s=z_i$ یک صفر در $z=e^{Tz_i}$

〃 قطب 〃 〃 $s=p_i$ 〃 قطب 〃 $z=e^{Tp_i}$

برای صفر و قطب های نامتناهی $G(s)$ صفر یا قطب در $z=-1$ در نظر می گیریم

PAPCO

بهره: تابع تبدیل گسسته به این صورت انتخاب می‌شود که

$$\lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{z\to 1} G_D(z)$$

$$G(s) = \frac{a}{s+a} \qquad G_D(z) = k_D \frac{z+1}{z-e^{-aT}}$$

صفر در بی‌نهایت — قطب در $s=-a$

$$\lim_{s\to 0} G(s) = 1 \Rightarrow \lim_{z\to 1} G_D(z) = \frac{2k_D}{1-e^{-aT}} = 1 \to k_D = \frac{1-e^{-aT}}{2}$$

$$G(s) = \frac{1}{s} \qquad G_D(z) = k_D \frac{z+1}{z-1} \qquad k_D \times 2 = 1 \to k_D = \frac{1}{2}$$

اگر $G(s)$ تعداد n قطب در مبدا داشته باشد متناظرا $G_D(z)$ تعداد n قطب در $z=1$ دارد. این قطب‌ها را صرف نظر کرده و بهره را از رابطه فوق حساب می‌کنیم

$$G_D = k_D (z+1)^{n_p-n_z-1} \frac{\prod_{i=1}^{n_z}(z-e^{z_iT})}{\prod_{i=1}^{n_p}(z-e^{p_iT})} = 0 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + \cdots$$

از این جمله صرف نظر می‌کنیم زیرا منطقی نیست در سیستم‌های واقعی به محض دادن ورودی در خروجی پاسخ را ببینیم

Subject:
Date

$G_D = c2d(G, T, method)$ دستور متلب

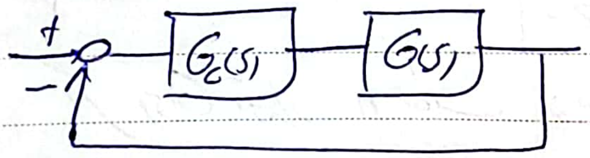
method = 'zoh'
'impulse'
'Tustin'
'Matched'

$$S \rightarrow \frac{\omega_0}{\tan\left(\frac{\omega_0 T}{2}\right)} \; \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

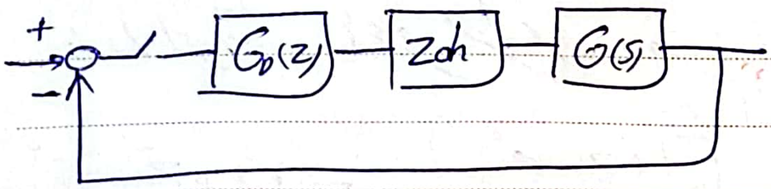
تبدیل دو خطی با پیش پیچش فرکانسی

پاسخ فرکانسی تابع تبدیل پیوسته و گسسته را در فرکانس ω_0 برابر می‌کند

c2d(G, T, 'prewarp', ω_0)

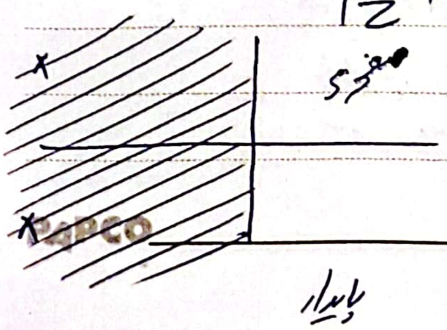


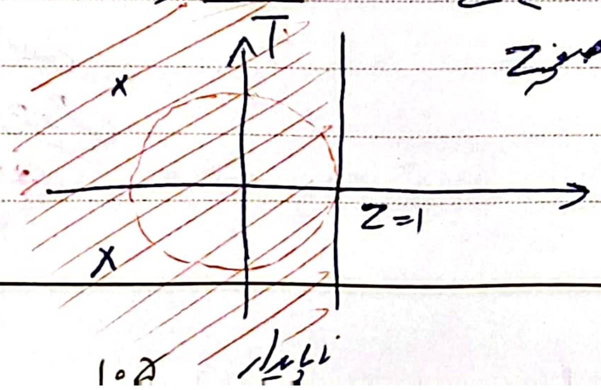
! تضمینی بر پایداری سیستم حلقه بسته پایینی وجود ندارد



$G_c(s) \rightarrow G_D(z)$

$$S \rightarrow \frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}} \qquad S \rightarrow \frac{z-1}{T} \qquad z \leftrightarrow sT+1$$





Subject:
Date

$$G_c(s) = \frac{a}{s+a} \qquad G_D(z) = \frac{a}{\frac{z-1}{T}+a} = \frac{aT}{z-1+aT}$$

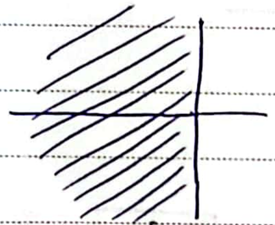
بنابراین به مقادیر a و T بستگی دارد $\qquad |1-aT|<1$

مثال

$\begin{cases} T=1 \\ a=3 \end{cases} \longrightarrow$ ناپایدار

در حالیکه $G_c(s)$ به ازای همه مقادیر مثبت a پایدار است

$$s \to \frac{1-z^{-1}}{T}$$



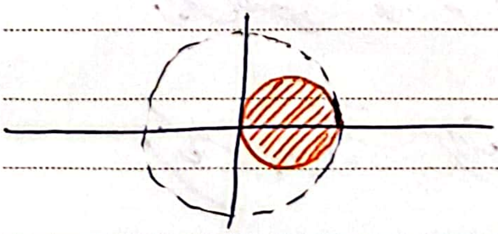
$$Re(s)<0 \longrightarrow Re\left(\frac{z-1}{Tz}\right)<0 \qquad z=\sigma_z+j\omega_z$$

$$Re\left(\frac{\sigma_z+j\omega_z-1}{\sigma_z+j\omega_z}\right)<0$$

صورت و مخرج را در $\sigma_z-j\omega_z$ ضرب می‌کنیم

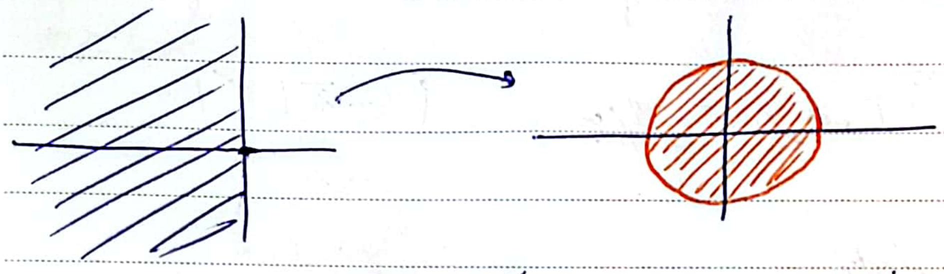
$$Re\left\{\frac{\sigma_z^2+\omega_z^2-(\sigma_z-j\omega_z)}{\sigma_z^2+\omega_z^2}\right\}<0$$

$$\Rightarrow \sigma_z^2+\omega_z^2-\sigma_z<0 \to \left(\sigma_z-\frac{1}{2}\right)^2+\omega_z^2<\frac{1}{4}$$

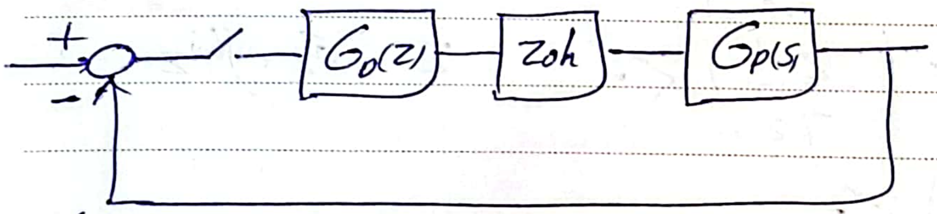


PAPCO

$$s \to \frac{2}{T}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$



معیارهای سرانگشتی برای انتخاب T : $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$



با استفاده از ویژگی های سیستم حلقه بسته زمان پیوسته یا با استفاده از خواسته های طراحی و محل مطلوب قطب های غالب سیستم حلقه بسته

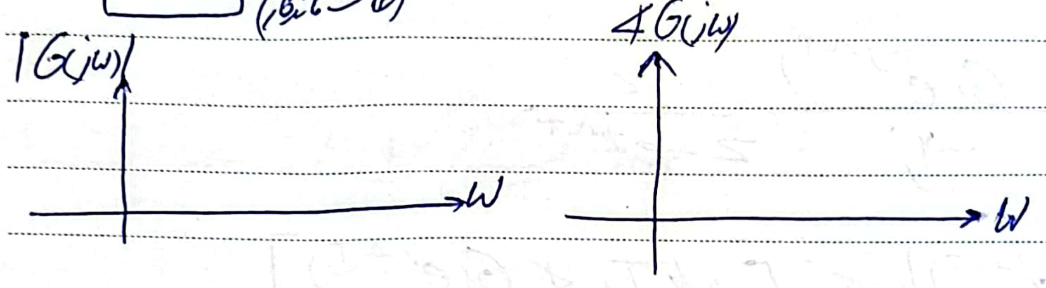
پهنای باند سیستم حلقه بسته ω_b $\qquad 5 < \frac{\omega_s}{\omega_b} <$ [illegible]

زمان صعود " " " t_r $\qquad 2 < \frac{T_r}{T} < 10$

فرکانس نوسانات میرا شده سیستم حلقه بسته ω_d $\qquad 10 < \frac{\omega_s}{\omega_d} < 50$

پاسخ فرکانسی

$$A\sin(\omega t) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow \text{خروجی}_{(\text{حالت ماندگار})} = A\,|G(j\omega)|\,\sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$



نمودار بود

: $\sin(k\Omega T)$

$$x[k] \longrightarrow \boxed{G(z)} \longrightarrow y[k]$$

$x[k] = \sin(k\Omega T)$

$$X(z) = \frac{\sin(\Omega T)\,z}{z^{2} - 2\cos(\Omega T)\,z + 1} = \frac{\sin(\Omega T)\,z}{(z - e^{j\Omega T})(z - e^{-j\Omega T})}$$

$$Y(z) = G(z)X(z) = \frac{\sin(\Omega T)\,z\,G(z)}{(z - e^{j\Omega T})(z - e^{-j\Omega T})}$$

$$\rightarrow \frac{Y(z)}{z} = \frac{\sin(\Omega T)\,G(z)}{(z - e^{j\Omega T})(z - e^{-j\Omega T})} = \frac{\alpha}{z - e^{j\Omega T}} + \frac{\beta}{z - e^{-j\Omega T}} + \underbrace{\sim\sim\sim}_{\text{ناشی از قطب های } G(z)}$$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\sin(\Omega T)\,G(e^{j\Omega T})}{e^{j\Omega T} - e^{-j\Omega T}} = \dfrac{G(e^{j\Omega T})}{2j} \\[2ex] \beta = \dfrac{\sin(\Omega T)\,G(e^{-j\Omega T})}{e^{-j\Omega T} - e^{j\Omega T}} = \dfrac{G(e^{-j\Omega T})}{-2j} \end{cases}$$

$$\text{تبدیل z قسمت } y[k] \text{ باقی} = \frac{G(e^{j\Omega T})}{2j}\,\frac{z}{z-e^{j\Omega T}} + \frac{G(e^{-j\Omega T})}{-2j}\,\frac{z}{z-e^{-j\Omega T}}$$

$$y[k] = |G(e^{j\Omega T})| \sin[\Omega k T + \measuredangle G(e^{j\Omega T})]$$

$$\begin{cases} G(j\omega) = G(s)\big|_{s=j\omega} \\ G(e^{j\Omega T}) = G(z)\big|_{z=e^{j\Omega T}} \end{cases}$$

$$A\sin(\Omega k T) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{1-az^{-1}}} \longrightarrow A\left|\frac{1}{1-ae^{-j\Omega T}}\right| \sin\left(k\Omega T + \measuredangle \frac{1}{1-ae^{-j\Omega T}}\right)$$

$$G(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \rightarrow G(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{1-ae^{-j\Omega T}}$$

$$|G(e^{j\Omega T})| = \left|\frac{1}{1-a(\cos(\Omega T) - j\sin(\Omega T))}\right| = \frac{1}{\sqrt{(1-a\cos(\Omega T))^2 + a^2\sin^2(\Omega T)}}$$

برای پیوسته

$$G(s) = \frac{a}{s+a} \qquad G(j\omega) = \frac{a}{j\omega + a}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{a}{\sqrt{\omega^2 + a^2}}$$

پاسخ فرکانسی یک سیستم زمان پیوسته $G(j\omega)$ یک تابع گویا (کسری که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای است) از ω است.

پاسخ فرکانسی یک سیستم گسسته $G(e^{j\omega T})$ یک تابع گویا از ω نیست؟

راه حل چیست؟ ← تغییر متغیر $\quad \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\boxed{W = \frac{2}{T}\,\frac{z-1}{z+1}} \to Wz + W = \frac{2}{T}(z-1) \to \left(W - \frac{2}{T}\right)z = -W - \frac{2}{T}$$

$$\to z = \frac{-W - \frac{2}{T}}{W - \frac{2}{T}} = \frac{W + \frac{2}{T}}{\frac{2}{T} - W} \Rightarrow z = \frac{1 + \frac{WT}{2}}{1 - \frac{WT}{2}}$$

$$\boxed{z = \frac{1 + \frac{T}{2}W}{1 - \frac{T}{2}W}}$$

$$G_W(W) \triangleq G(z)\Big|_{z = \frac{1 + \frac{T}{2}W}{1 - \frac{T}{2}W}} \qquad W = \sigma_W + jv$$

پاسخ فرکانسی در صفحه W:

$$G_W(jv) = G(z)\Big|_{z = \frac{1 + \frac{T}{2}W}{1 - \frac{T}{2}W}}\Bigg|_{W = jv} = G(z)\Big|_{z = \frac{1 + \frac{T}{2}jv}{1 - \frac{T}{2}jv}}$$

Subject:
Date

پاسخ فرکانسی $\quad G(z)\Big|_{z=e^{j\Omega T}} = G_w(w)\Big|_{w=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}\Big|_{z=e^{j\Omega T}}$ ⊛

$$w=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\Big|_{z=e^{j\Omega T}} = \frac{2}{T}\frac{e^{j\Omega T}-1}{e^{j\Omega T}+1} = \frac{2}{T}\frac{e^{j\frac{\Omega T}{2}}-e^{-j\frac{\Omega T}{2}}}{e^{j\frac{\Omega T}{2}}+e^{-j\frac{\Omega T}{2}}}$$

$$= \frac{2}{T}\frac{2j\sin(\frac{\Omega T}{2})}{2\cos(\frac{\Omega T}{2})} = j\frac{2}{T}\tan\left(\frac{\Omega T}{2}\right)$$

$$⊛ = G_w(w)\Big|_{w=j\underbrace{\frac{2}{T}\tan(\frac{\Omega T}{2})}_{\nu}}$$

* پاسخ فرکانسی $G(z)$ در Ω برابر با پاسخ فرکانسی $G_w(w)$ در فرکانس $\frac{2}{T}\tan\left(\frac{\Omega T}{2}\right)$ است.

$G_w(j\nu)$ یک تابع گویا از ν است، زیرا اگر $G(z)$ یک تابع گویا از z باشد $G_w(w)$ هم یک تابع گویا از w خواهد بود و چون بجای w، $j\nu$ می‌گذاریم بنابراین $G_w(j\nu)$ یک تابع گویا از ν است

$$G(z)=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad G_w(w)=\frac{1}{1-a\frac{(1-\frac{T}{2}w)}{(1+\frac{T}{2}w)}} = \frac{1+\frac{T}{2}w}{1+\frac{T}{2}w-a+a\frac{T}{2}w}$$

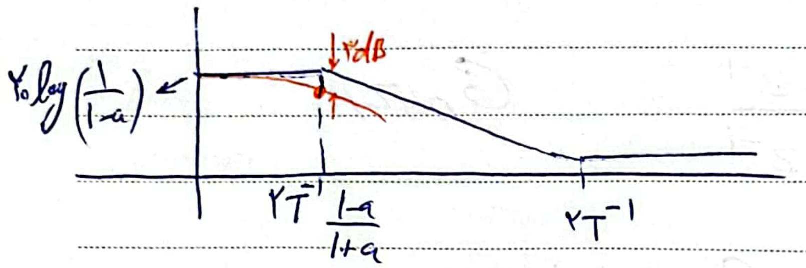
PAPCO

Subject:
Date

$$G_w(w) = \frac{1+\frac{T}{2}w}{\left(\frac{T}{2}+a\frac{T}{2}\right)w + 1-a} = \frac{1}{1-a}\,\frac{\frac{T}{2}w+1}{\frac{T}{2}\left(\frac{1+a}{1-a}\right)w+1}$$

$$(0<a<1)$$

$$= \frac{1}{\frac{T}{2}+a\frac{T}{2}}\;\frac{1+\frac{T}{2}w}{w+\frac{2}{T}\frac{(1-a)}{(1+a)}}$$



$$20\log\left|G_w\left(j\,\frac{2}{T}\frac{1-a}{1+a}\right)\right| = 20\log\left(\frac{1}{1-a}\right) - 3\,dB$$

در چه Ω اندازه $G(e^{j\Omega T})$ برابر با $20\log\left(\frac{1}{1-a}\right) - 3dB$ می‌شود؟

$$v = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\Omega T}{2}\right)$$

$$\hookrightarrow \Omega = \frac{2}{T}\tan^{-1}\left(\frac{Tv}{2}\right)$$

در فرکانس $\Omega = \frac{2}{T}\tan^{-1}\left(\cancel{\frac{T}{2}}\,\cancel{\frac{2}{T}}\,\frac{1-a}{1+a}\right)$ اندازه $G(e^{j\Omega T})$ برابر با

$$20\log\left(\frac{1}{1-a}\right) - 3dB$$

است.

PAPCO

$$\sin(\Omega kT)\Big|_{\Omega=\frac{\pi}{T}+\bar{\Omega}} = \sin\left(\left(\frac{\pi}{T}+\bar{\Omega}\right)kT\right) \qquad 0<\bar{\Omega}<\frac{\pi}{T}$$

$$=\sin\left(\left(\frac{\pi}{T}+\bar{\Omega}\right)kT\right)=\sin(k\pi+\bar{\Omega}kT)=\sin(-\bar{\Omega}kT)$$

در مورد روش گسسته سازی با پیشتاب فرکانس

$$G(s) \quad s\to\frac{\omega_0}{\tan\left(\frac{\omega_0 T}{2}\right)}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad G_D(z)$$

$$G(j\omega_0)=G(s)\Big|_{s=j\omega_0}$$

$$G_D(e^{j\omega_0 T})=G_D(z)\Big|_{z=e^{j\omega_0 T}}=G(s)\Big|_{s=\frac{\omega_0}{\tan\left(\frac{\omega_0 T}{2}\right)}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\Big|_{z=e^{j\omega_0 T}}} \quad \circledast$$

$$s=\frac{\omega_0}{\tan\left(\frac{\omega_0 T}{2}\right)}\,\frac{1-e^{-j\omega_0 T}}{1+e^{-j\omega_0 T}}=\frac{\omega_0}{\tan\left(\frac{\omega_0 T}{2}\right)}\,\frac{e^{\frac{j\omega_0 T}{2}}-e^{-j\frac{\omega_0 T}{2}}}{e^{\frac{j\omega_0 T}{2}}+e^{-j\frac{\omega_0 T}{2}}}$$

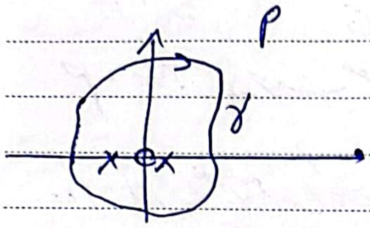
$$=\frac{\omega_0}{\tan\left(\frac{\omega_0 T}{2}\right)}\,\frac{\cancel{2}j\sin\left(\frac{\omega_0 T}{2}\right)}{\cancel{2}\cos\left(\frac{\omega_0 T}{2}\right)}=j\omega_0$$

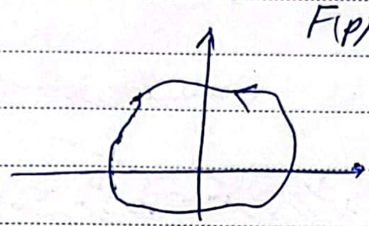
$$\circledast = G(s)\Big|_{s=j\omega_0}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اصل آرگومان کوشی

$F(p): \mathbb{C} \to \mathbb{C}$





γ یک خم ساده بسته باشد در جهت عقربه‌های ساعت

و γ از هیچ کدام از صفرها و قطب‌های F عبور نمی‌کند!

تصویر γ تحت نگاشت F مبدا را به تعداد $\boxed{N=Z-P}$

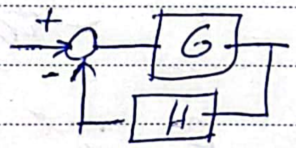
در جهت عقربه‌های ساعت دور می‌زند

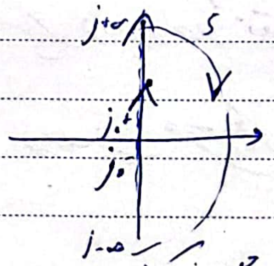
Z: تعداد صفرهای F داخل γ

P: تعداد قطب‌های F داخل γ

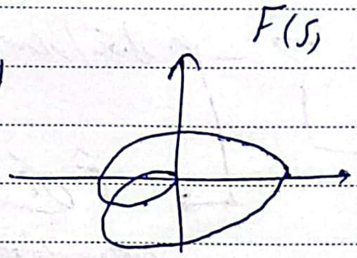
برای شکل بالا ، $N=1-2=-1$ ← عقربه ساعت -1 بار در جهت ← 1 بار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت

$\dfrac{G}{1+GH}$





$\xrightarrow{F=1+GH}$



تصویر مسیر نایکوئیست تحت نگاشت $F=1+G(s)H(s)$ مبدا را در صفحه $F(s)$ به تعداد

نقطه $(-1,0)$ ، $F=G(s)H(s)$

در جهت عقربه‌های ساعت دور می‌زند

$N = Z - P$

Z: تعداد صفرهای $1+G(s)H(s)$ داخل مسیر نایکوئیست = قطب‌های سیستم حلقه بسته است

P: تعداد قطب‌های $1+G(s)H(s)$ داخل مسیر نایکوئیست = قطب‌های $G(s)H(s)$ ، قطب‌های حلقه باز

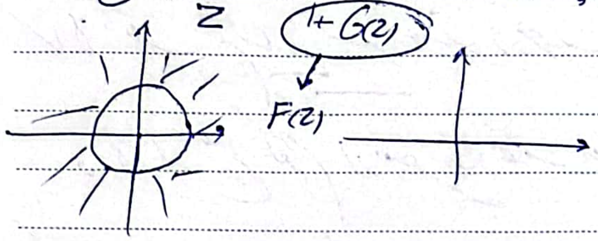
PAPCO

سیستم حلقه بسته $\frac{G}{1+G}$ پایدار است اگر نمودار نایکوئیست G نقطه -1 را به تعداد

$N=-P$ در جهت عقربه‌های ساعت دور بزند

حال اگر بخواهیم همین کار را در سیستم گسسته بررسی کنیم چگونه می‌شود؟ $\frac{G(z)}{1+G(z)}$ چند تا قطب خارج دایره واحد دارد

$\underbrace{1+G(z)}_{F(z)}$

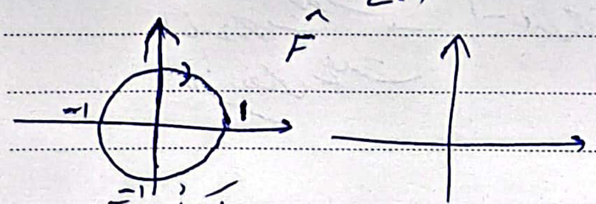


$F(z)=1+G(z) \qquad W \triangleq \frac{1}{z}$

$\hat{F}(W) \triangleq F\left(\frac{1}{W}\right)$

اگر z_0 صفر (قطب) F باشد $\frac{1}{z_0}$ صفر (قطب) $\hat{F}$ است.

$F(z_0)=\hat{F}\left(\frac{1}{z_0}\right)$



مسیر نایکوئیست = دایره واحد در جهت عقربه ساعت

در جهت عقربه‌های ساعت

تصویر دایره واحد تحت نگاشت $\hat{F}$ مبدا را به تعداد $N=Z-P$

در جهت عقربه‌ها دور می‌زند

Z: صفرهای $\hat{F}$ داخل دایره واحد = صفرهای F خارج دایره واحد

P: قطب‌های $\hat{F}$ داخل دایره واحد = قطب‌های F خارج دایره واحد

تصویر دایره واحد در جهت عقربه‌های ساعت تحت نگاشت $\hat{F}$ برابر است با تصویر دایره واحد

جهت خلاف عقربه‌های ساعت تحت نگاشت F

$1e^{j\theta} \quad \theta[0 \to -2\pi]$

$\hat{F}(e^{j\theta})=F\left(\frac{1}{e^{j\theta}}\right)=F(e^{-j\theta})=F(e^{j\gamma})$

$\gamma[0 \to 2\pi]$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{G}{1+G}$$

تصویر دایره واحد در خلاف جهت عقربه‌های ساعت تحت نگاشت $1+G$

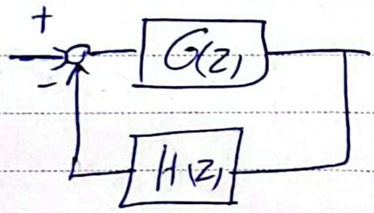
(G نقطه -1)

مبدا را به تعداد $N = Z - P$ در جهت عقربه‌های ساعت دور می‌زند.

صفرهای $1+G$ خارج از دایره واحد ← قطب‌های ناپایدار سیستم حلقه بسته

قطب‌های $1+G$ 〃 〃 〃 ← قطب‌های ناپایدار سیستم حلقه باز

جلسه جدید:



قضیه جبری نایکوئیست: دایره واحد در خلاف جهت عقربه‌های ساعت

نمودار نایکوئیست (تصویر مسیر نایکوئیست) نقطه -1 را به

تحت نگاشت $G(z)H(z)$

تعداد $N = Z - P$ در جهت عقربه‌ها دور خواهد زد.

تعداد صفرهای $1+G(z)H(z)$ خارج از دایره واحد

تعداد قطب‌های ناپایدار سیستم حلقه بسته

تعداد قطب‌های $G(z)H(z)$ خارج از دایره واحد

تعداد قطب‌های ناپایدار سیستم حلقه باز

مثال: $G(z) = \dfrac{k}{1-0.2z^{-1}}$ تحلیل پایداری

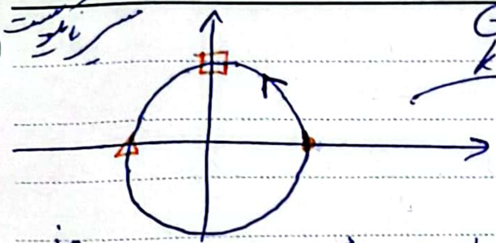
$$T(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{k}{1-0.2z^{-1}+k} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{0.2}{k+1}z^{-1}}$$

قطب سیستم حلقه بسته $\dfrac{0.2}{k+1}$ قرار دارد ← $k>0$ پایدار

$$G(e^{j\Omega}) = \frac{k}{1-0.2e^{-j\Omega}} \qquad \Omega\ 0 \to 2\pi$$

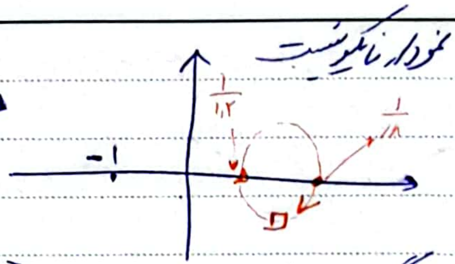
Subject :
Year. Month. Date. ( )

مسیر نایکوییست



$\xrightarrow[k=1]{G(z)}$

نمودار نایکوییست



حذف
$\Omega:[0,2\pi]$

اگر k مقدار مثبت دیگری داشته باشد در راستای شعاع منبسط خواهد شد

بنابراین -1 را دور نخواهد زد.

$1+kG(z)=0 \to \frac{1}{k}+G(z)=0$ چندبار $-\frac{1}{k}$ را دور زده؟

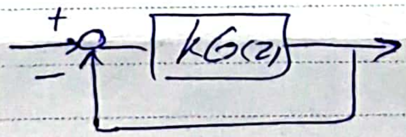
برای k های منفی:

$0<-\frac{1}{k}<\frac{1}{1.2}$ ✓ پایدار $\to \frac{1}{k}>-\frac{1}{1.2} \to k<-1.2$

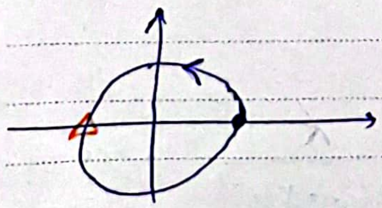
$\frac{1}{1.2}<-\frac{1}{k}<\frac{1}{1.8}$ ✗ ناپایدار

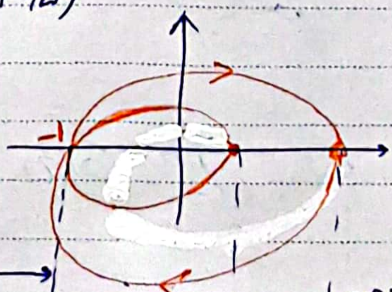
$-\frac{1}{k}>\frac{1}{0.18}$ ✓ پایدار

مثال. $G(z)=\frac{1}{z(z+0.5)}$ پایداری



$G(e^{j\Omega})=\frac{1}{e^{j\Omega}(e^{j\Omega}+0.5)}$





$-\frac{1}{k}<-1 \to \boxed{0<k<1}$

$-1<-\frac{1}{k}<\frac{2}{3} \to \boxed{k>1}$

$\frac{2}{3}<-\frac{1}{k}<2 \to -\frac{3}{2}<\frac{1}{k}<-\frac{1}{2}$... $\frac{1}{k}>-2 \to \boxed{-\frac{3}{2}<k<-\frac{1}{2}}$ ✓

$\infty>-\frac{1}{k}>2 \to \frac{1}{k}<-2 \to \boxed{0>k>-\frac{1}{2}}$ ✓

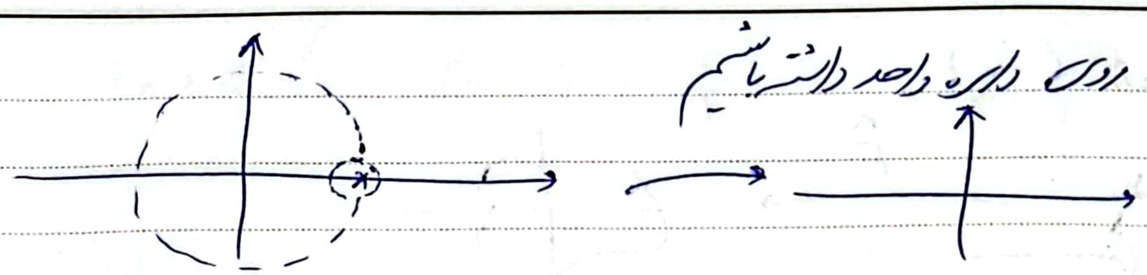
$0<-\frac{1}{k}<\frac{2}{3} \to 0>\frac{1}{k}>-\frac{2}{3} \to \boxed{k<-\frac{3}{2}}$ ✓

$2 \quad -\frac{3}{2} \quad 1 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2$

تعداد قطب های ناپایدار حلقه بسته

Subject:
Date

اگر قطب روی دایره واحد داشته باشیم



$\hat{F}(W) \longrightarrow N = Z - P$

$\hat{F}$ تعداد صفرهای داخل

F خارج " "

$\hat{F}$ قطب های داخل

F خارج "

$$\boxed{\hat{F}\left(\frac{1}{z}\right) = F(z)}$$

$W = 1 - \varepsilon e^{j\theta}$ $\qquad \theta : \frac{\pi}{2} \cdots -\frac{\pi}{2}$

$$\hat{F}(W) = \hat{F}(1-\varepsilon e^{j\theta}) = F\left(\frac{1}{1-\varepsilon e^{j\theta}}\right) = F(1+\varepsilon e^{j\theta})$$

$\theta : \frac{\pi}{2}, \cdots, -\frac{\pi}{2}$

برای $G(z)$ که در مسیر تک حلقه با فیدبک واحد منفی قرار دارد سیستم حلقه بسته پایدار است اگر $Z = N + P$ صفر باشد.

N: تعداد دور زدن های تصویر مسیر نایکوئیست حول -1.

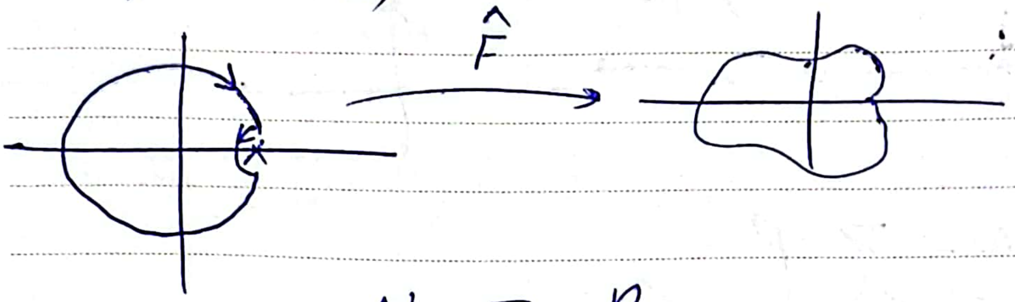
P: تعداد قطب های خارج از دایره واحد G.

مسیر نایکوئیست (دایره واحد در جهت خلاف عقربه های ساعت
قطب های روی دایره واحد داخل مسیر هستند)

PAPCO

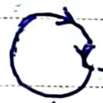
Subject:
Date

$$\hat{F}(\omega) \triangleq F\left(\frac{1}{\omega}\right)$$



$$N = Z - P$$

۱- تعداد دور زدن



توسط کانتور تحت نگاشت $\hat{F}$

تعداد قطب های $\hat{F}$ داخل دایره واحد

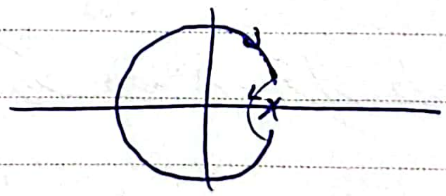
یا تعداد قطب های F خارج از دایره واحد

$$G(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

$$\hat{G}(\omega) \triangleq G\left(\frac{1}{\omega}\right) = \frac{1}{\frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{\omega}-1\right)} = \frac{\omega^2}{1-\omega}$$

$$\omega = 1 + \varepsilon e^{j\theta}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \to \frac{3\pi}{2}$$



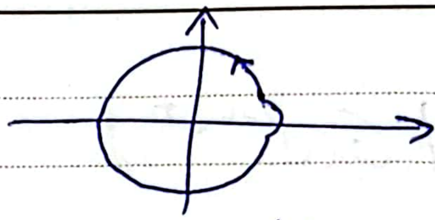
$$\hat{G}(\omega) = \frac{(1+\varepsilon e^{j\theta})^2}{1-1-\varepsilon e^{j\theta}} = \frac{1}{-\varepsilon e^{j\theta}} = \frac{1}{\varepsilon}\left(-e^{-j\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\left(e^{-j(\theta-\pi)}\right)$$

PAPCO

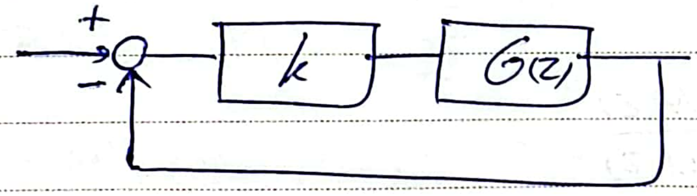
Subject:
Date

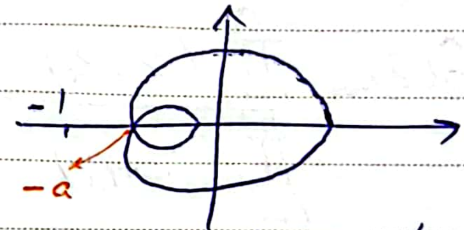
$$z = 1+\varepsilon e^{j\gamma} \qquad \gamma = -\frac{\pi}{2} \cdots \frac{\pi}{2}$$



$$G(z) = \frac{1}{(1+\varepsilon e^{j\gamma})(1+\varepsilon e^{j\gamma}-1)} = \frac{1}{\varepsilon e^{j\gamma}} = \frac{1}{\varepsilon} e^{-j\gamma}$$

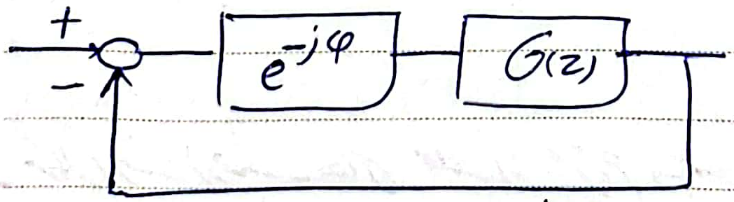
$$\gamma : -\frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{2}$$

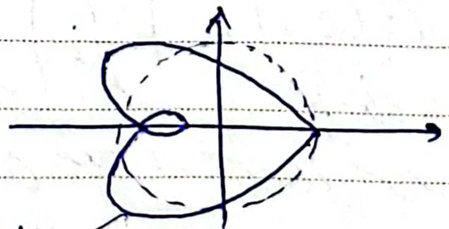




$\measuredangle G(e^{j\omega_g T}) = -180$ وجه: فرکانس قطع فاز ، فرکانس گذر

حد بهره: $\dfrac{1}{|G(e^{j\omega_g T})|}$





نمودار نایکوئیست $G(e^{j\Omega T})$

هر مقدار فاز می‌تواند باعث ناپایداری شود

$$z^{-p}\Big|_{z=e^{j\Omega T}} = e^{-j\Omega T p}$$

PAPCO

Ω_c - فرکانس قطع بهره:

$$|G(e^{j\Omega_c T})| = 1$$

$$\text{حد فاز} = \pi + \angle G(e^{j\Omega_c T})$$

مرور مکان هندسی ریشه‌ها و طراحی گسسته با استفاده از مکان ریشه،

پیوسته

$$1+kG(s)=0 \longrightarrow 1+kG(z)=0$$

$$G(z) = \frac{\prod_{i=1}^{m}(z+z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(z+p_i)} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

$$G(z^*) = \frac{-1}{k^*}$$

$$\underbrace{\angle G(z^*)}_{\text{شرط زاویه}} = \begin{cases} (2l+1)\pi & k^*>0 \\ 2l\pi & k^*<0 \end{cases}$$

$$\underbrace{|G(z^*)|}_{\text{شرط اندازه}} = \left|\frac{1}{k^*}\right|$$

- مکان ریشه از قطب‌های حلقه باز شروع و به صفرهای حلقه باز منتهی می‌شوند

- " " دارای $\max(n,m)$ شاخه است

- روی محور حقیقی $\begin{cases} k>0 \leftarrow & \text{نقاطی که سمت راستشان تعداد فردی صفر و قطب است} \\ k<0 \leftarrow & \text{" " " " زوج} \end{cases}$

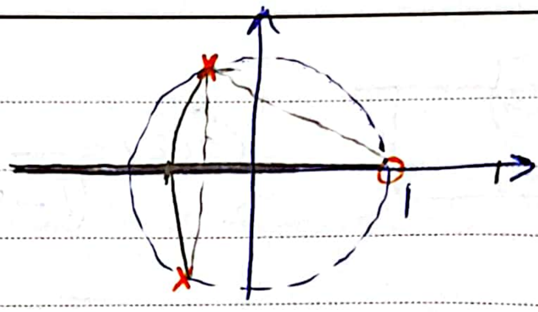
- تعداد $|n-m|$ (درجه صورت، درجه مخرج) مجانب $\begin{cases} \text{زاویه مجانب‌ها} \begin{cases} k>0 \rightarrow \frac{(2l+1)\pi}{n-m} \\ k<0 \rightarrow \frac{2l\pi}{n-m} \end{cases} \\ \text{محل برخورد } (n>m) \rightarrow \frac{\sum \text{قطب‌ها} - \sum \text{صفرها}}{n-m} \end{cases}$

$$\frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m}$$

Subject:
Date

$k>0$

$$G(z)=\frac{z-1}{z^2+z+1}$$



صفر : $z=1$

قطب , $\frac{-1\pm j\sqrt{3}}{2}$

$\max(m,n)=2$

- محاسبه نقاط شکست: $N'D-D'N=0 \rightarrow z_i^* \rightarrow G(z_i^*)=$ یک عدد حقیقی

- زاویه خروج از قطب

k مثبت $\theta_c=(2l+1)\pi-\sum\theta_i+\sum\varphi_i$

k منفی $\theta_c=(2l)\pi-\sum\theta_i+\sum\varphi_i$

نقاط شکست برای مثال بالا $(z^2+z+1)-(2z+1)(z-1)=0 \begin{cases} 2.731 \\ -0.731 \end{cases}$

- زاویه ورود به صفر

k مثبت $\varphi_c=(2l+1)\pi-\sum\varphi_i+\sum\theta_i$

k منفی $\varphi_c=2l\pi-\sum\varphi_i+\sum\theta_i$

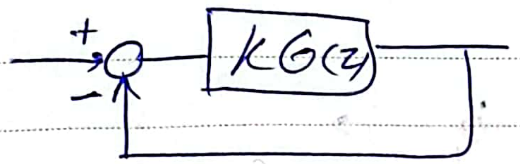
برای مثال بالا : $\theta_c=(2l+1)\pi-\frac{\pi}{2}+\left[\pi-\tan^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}\right)\right]$

$= 4.2$ radian

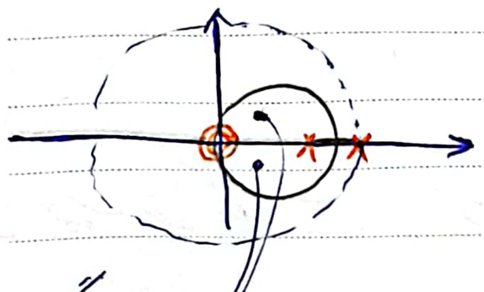
$\varphi_c=(2l+1)\pi-0=\pi$

PAPCO

فرض کن



$$G(z)=\frac{1}{(1-0.5z^{-1})(1-z^{-1})}=\frac{z^{2}}{(z-0.5)(z-1)}$$



از اینجا می‌گذرد

Subject:
Date

روش های طراحی کنترل کننده

۱) طراحی در زمان پیوسته و گسسته سازی کنترل کننده حاصل

۲) استفاده از تکنیک مکان هندسی ریشه ها

۳) طراحی با استفاده از روش پاسخ فرکانسی

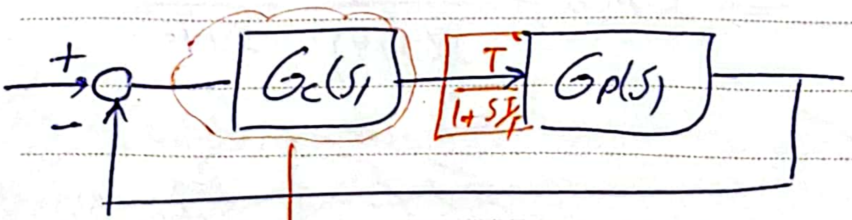
۴) طراحی DeadBeat

۵) روش های فضای حالت

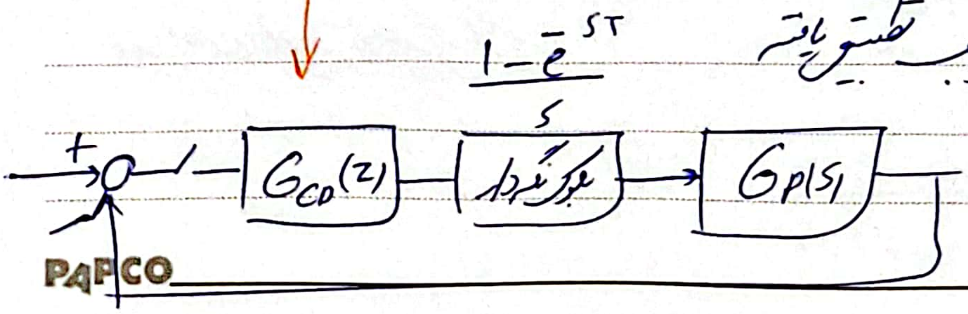
۱) ـ در نظر گرفتن خواسته مشخصه T

ـ در نظر گرفتن از بلوک نگهدار

طراحی

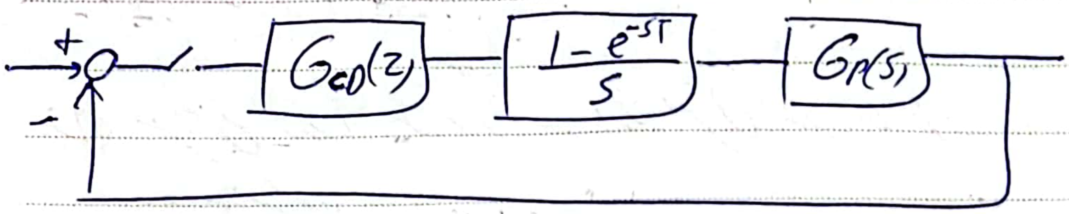


گسسته سازی {
حفظ پاسخ پله
تبدیل دوخطی
صفر و قطب تطبیق یافته



Subject:
Date

مثال:



$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

$$\boxed{\zeta = 0.5}$$

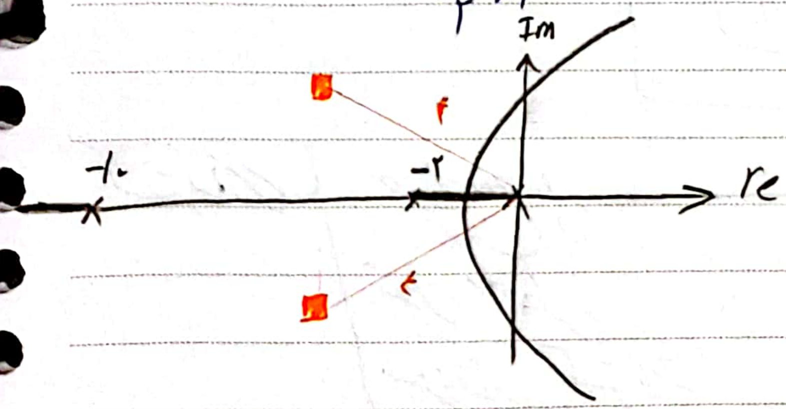
- فراجهش کمتر از ۱۶ درصد
- زمان نشست کمتر از ۲ ثانیه

$$T = \frac{t_s}{10} = 0.2 \longrightarrow \boxed{T = 0.2}$$

$$\frac{4}{\zeta\omega_n} = 2 \longrightarrow \frac{4}{0.5\omega_n} = 2 \longrightarrow \boxed{\omega_n = 4}$$

از تقریب نگهدار: $\frac{T}{\frac{sT}{2}+1} = \frac{0.2}{0.1s+1} = \frac{2}{s+10}$

$$\hat{G}_p(s) = G_p(s)\frac{T}{\frac{sT}{2}+1} \Longrightarrow \hat{G}_p(s) = \frac{1}{s(s+2)} \cdot \frac{2}{s+10}$$



lead زاویه اضافه می‌کند.
lag ″ کم می‌کند.

باید نقص زاویه را جبران کنیم.

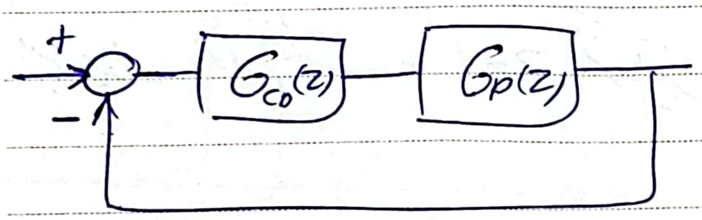
$$G_c(s) = 20.25\,\frac{s+2}{s+4.44}$$

Subject:
Date

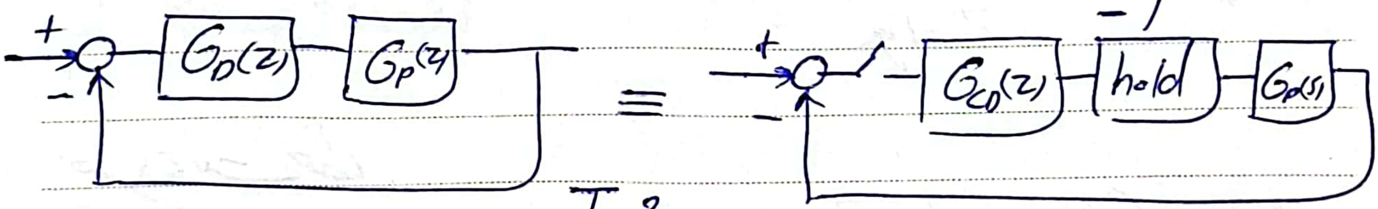
$$\frac{1-e^{-sT}}{s}=\frac{1-\frac{e^{-\frac{sT}{2}}}{e^{sT/2}}}{s}=\frac{1-\frac{1-\frac{T}{2}s}{1+\frac{T}{2}s}}{s}=\frac{\frac{\cancel{1}+\frac{sT}{2}\cancel{-1}+\frac{sT}{2}}{1+\frac{sT}{2}}}{s}$$

$$=\frac{\cancel{s}T}{\cancel{s}\left(1+\frac{sT}{2}\right)}=\frac{T}{1+\frac{sT}{2}}$$

②



$G_p(z)$ } — سیستم (plant) اساساً گسسته است



$T=?$

_ خواسته های مسئله ← محل قطب های غالب سیستم حلقه بسته در صفحه z

_ رسم مکان هندسی $G_p(z)$ ← محاسبه نقص زاویه (تفاوت زاویه $G_p(z)$ در محل قطب مطلوب انتخاب شده نسبت به $(2k+1)\pi$)

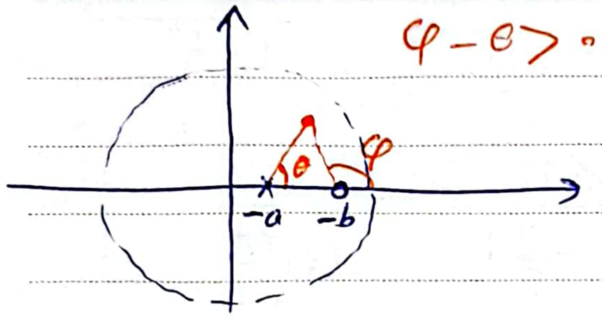
_ جبران نقص زاویه با کنترل کننده lead

_ جبران ثابت های خطا با استفاده از کنترل lag

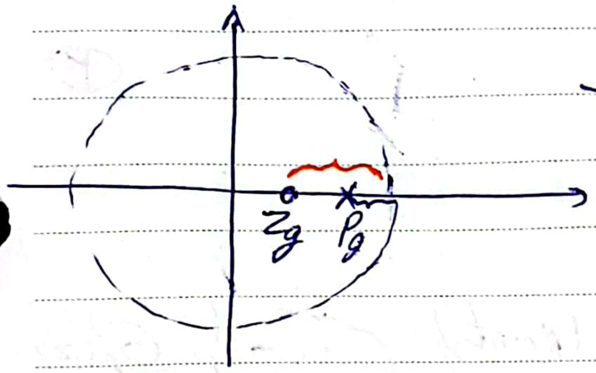
P4PCO

$\varphi - \theta > 0$

$$G_{ld}(z) = k\,\frac{z+b}{z+a}$$



پیش فاز، محل صفر به نقطه $z=1$ نزدیکتر است

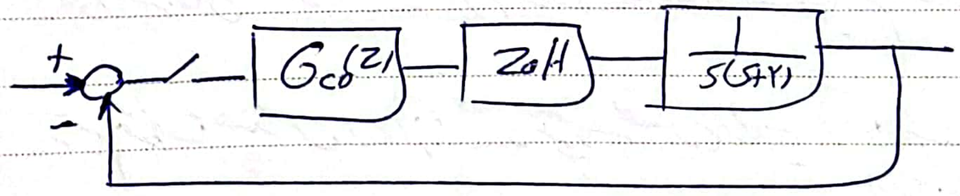


پس فاز، محل قطب به $z=1$ نزدیکتر است

$$G_{lg}(z) = \frac{z-z_g}{z-p_g}$$

تغییر در ثابت خطا،

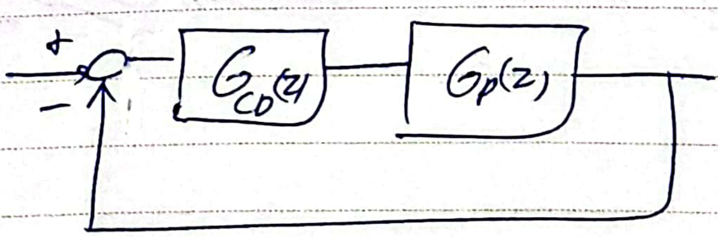
$$\lim_{z\to 1} G_{lg}(z) = \frac{1-z_g}{1-p_g} > 1$$



فراجهش کمتر از ۱۶ درصد
زمان نشست کمتر از ۲ ثانیه

← با استفاده از مکان ریشه

$T=0.2$

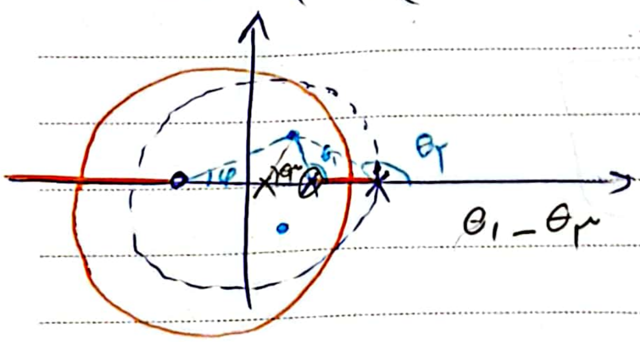


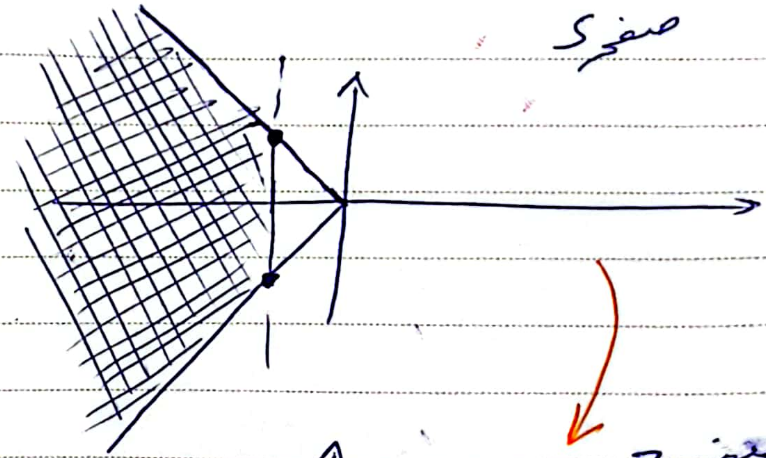
Subject:
Date

$$G_p(z) = Z\left\{ \frac{1-e^{-sT}}{s} \cdot \frac{1}{s(s+2)} \right\}$$

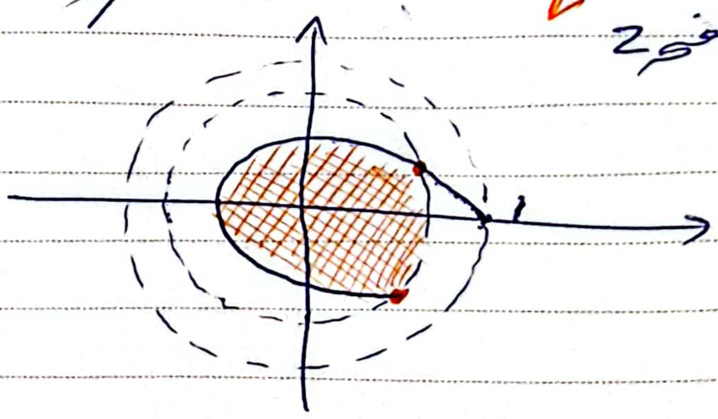
$$= \frac{۰,۰۱۷۸\,(z+۰,۸۷۶۰)}{(z-1)(z-۰,۶۷۰۳)}$$

$$\measuredangle G_p(z)\Big|_{\text{قطب مطلوب}} = \overset{۱۸۰^\circ}{\varphi} - \overset{۱۱۸^\circ}{\theta_1} - \overset{۱۳۴}{\theta_2} = -۲۳۱,۲۶$$





$$\frac{4}{\zeta\omega_n} < 2 \rightarrow \zeta\omega_n \geq 2$$



$$z_{1,2} = \exp\big(\overset{۰,۲}{T}(-2 \pm j2\sqrt{3})\big) = ۰,۶۷۰۳\ \measuredangle \pm ۳۹,۶۹^\circ$$

$$= ۰,۵۱۵۸ \pm ۰,۴۲۸۱j$$

PAPCO

نقص زاویه $-\varphi_c = 180 + \varphi_1 - \theta_1 - \theta_2 = -51.26$

$$\varphi_c = \varphi_z - \theta_p \longrightarrow \varphi_c = \theta_1 - \theta_p \rightarrow \theta_p = \theta_1 - \varphi_c$$

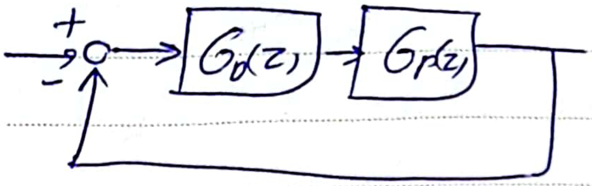
سهم زاویه صفر کنترل کننده

〃 〃 قطب 〃 〃

$$= 118 - 51.26 \simeq 65^\circ$$

$$\boxed{G_d(z) = 12.67 \, \frac{z - 0.6703}{z - 0.2543}}$$

طراحی کنترل کننده در حوزه فرکانس :



① تغییر متغیر

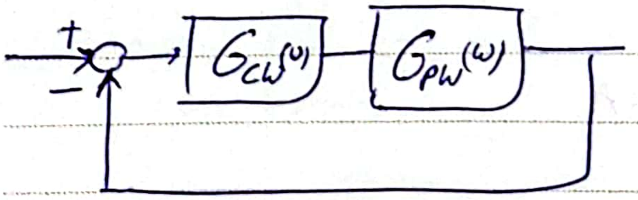
$$z \to \frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}$$

$$G_{pw}(w) = G_p(z)\Big|_{z=\frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}}$$ فضای w

② در نظر گرفتن خواسته مسئله (حد فاز، حد بهره، ...)

$$v = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\Omega T}{2}\right)$$ فرکانس های مربوطه به فرکانس با توجه

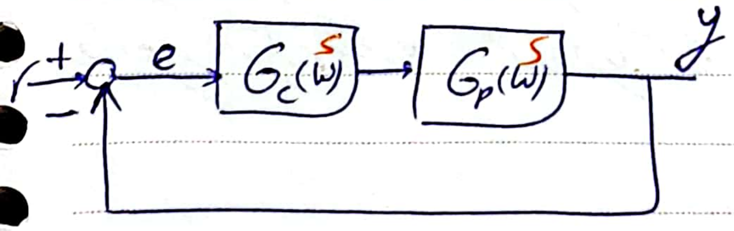
③ طراحی کنترل کننده در فضای w همانندی و به دست آوردن تابع تبدیل کنترل کننده



شبیه چیزی که در کنترل خطی دیدیم $G_{cw}(w)$

$$G_D(z) = G_{cw}(w)\Big|_{w=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}$$

Subject:
Date



$$E(s)=\frac{1}{1+G_p(s)G_c(s)}R(s)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G_c(s)\,G_p(s)}{1+G_c(s)\,G_p(s)} \rightarrow Y(s)=\frac{G_c(s)\,G_p(s)}{1+G_c(s)\,G_p(s)}R(s)$$

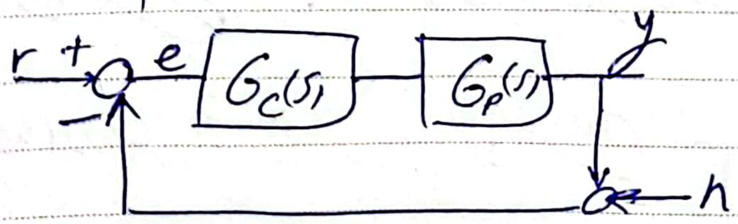
$$\lim_{s\to 0} sY(s)=y(\infty) \qquad \lim_{s\to 0} G_c(s)\,G_p(s)=?$$

این بهره هر چقدر بزرگتر باشد خطای ماندگاری کمتر خواهد بود

درنتیجه بالا بودن بهره حلقه در فرکانس های پایین مطلوب است

$$\boxed{\begin{array}{l} PM=100\zeta \\ t_r=\dfrac{2.2}{\omega_b} \end{array}} \leftarrow$$ ارتباط حوزه زمان در فرکانس

پهنای باند سیستم حلقه بسته



$$Y(s)=-\frac{G_c(s)\,G_p(s)}{1+G_c(s)\,G_p(s)}N(s)$$

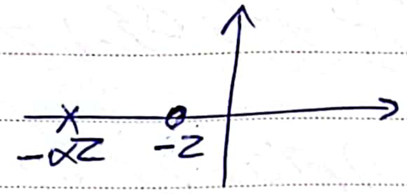
پاسخ فرکانسی مطلوب: بالا بودن بهره حلقه در فرکانس های پایین ← ردیابی

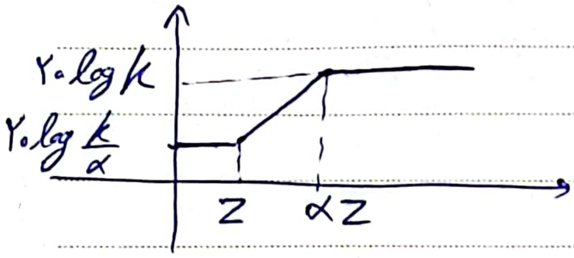
پایین " " " " بالا ← رفع نویز

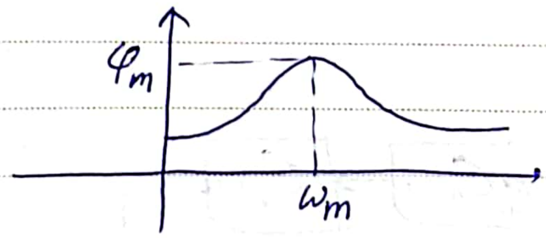
Subject:
Date

مراحل کنترل کننده lead،

$$G_{ld}(s) = k\,\frac{s+z}{s+\alpha z} = \bar{k}\,\frac{Ts+1}{\beta Ts+1} \qquad \alpha>1$$







$$\sin(\varphi_m) = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$$

$$\omega_m = z\sqrt{\alpha}$$

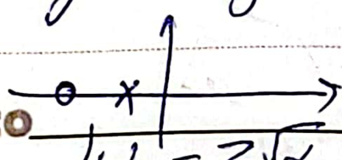
PM $\uparrow$ $\Longrightarrow$ رفتار بهتر $\Longrightarrow$ O.V $\downarrow$

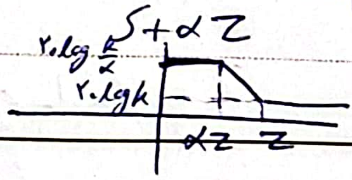
تعیین $\frac{k}{\alpha}$ از روی ثابت های خطا

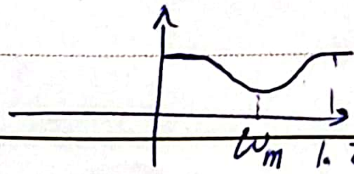
مثلا $K_p = \lim\limits_{s\to 0} G_c(s)\,G_p(s)$

z,α $\left\{\begin{array}{l} \text{درنظر گرفتن فرکانس مربوط به فاصله حد فاز} \leftarrow \omega_m \\ \text{فاصله میزان فاز لازم برای رسیدن به حد فاز مدنظر} \leftarrow \varphi_m \end{array}\right.$

log . $G_{lg}(s) = k\,\frac{s+z}{s+\alpha z} \qquad 0<\alpha<1$







$\left\{\begin{array}{l} \omega_m = z\sqrt{\alpha} \\ \sin(\varphi_m) = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \end{array}\right.$

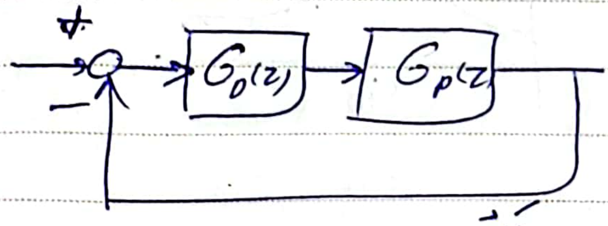
Subject:
Date

محاسبه $\frac{k}{\alpha}$ را بر اساس میزان بهبود مورد نیاز در خطای حالت ماندگار

k را ابتدا با $\frac{1}{\alpha}$ در نظر می‌گیریم ← $\checkmark\alpha$

z را بگونه‌ای محاسبه کنیم که تغییر اساسی که کنترل کننده lag رخ دهد قبل از

فرکانس‌های مهم (فرکانس قطع بهره) ناچیز شده باشد.
بهینه باشد

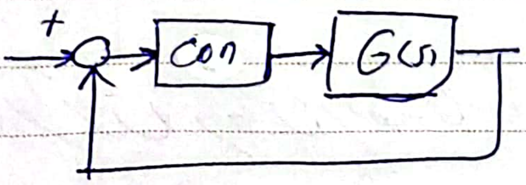


کنترل کننده Dead Beat یا مرده نوسان:

کنترل کننده‌ای که خروجی در کمترین (گام) زمان ممکن پاسخ سیستم را به مقدار نهایی برساند

با خطای صفر. اگر تابع plant زمان پیوسته است بین لحظات نمونه برداری نوسان

(Beat) نداشته باشیم



$y(t) = y_{ss} \quad \forall t > T$

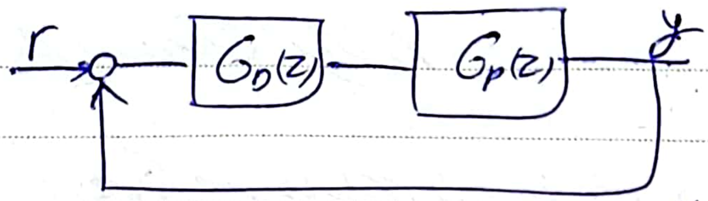
هیچ کنترل کننده خطی وجود ندارد که در زمان محدود خروجی را به مقدار مطلوب برساند
با خطای صفر

مثلا $y = 1 - e^{-3t}$

$\sin(4t)$

Subject:
Date

ایده حل:



ابتدا تابع تبدیل ح.ب را درنظر می‌گیریم

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)\,G_p(z)}{1+G_D(z)\,G_p(z)} = F(z)$$

$$\boxed{G_D(z) = \frac{F(z)}{1-F(z)}\;\frac{1}{G_p(z)}}$$

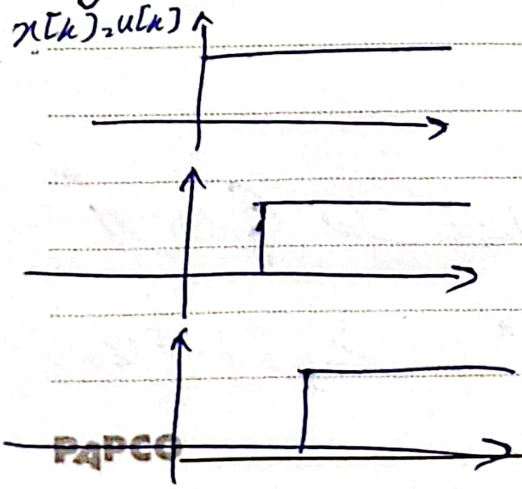
درنظر گرفتن $F(z)$ بصورت $F(z) = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2}$

$$Y(z) = F(z)\,R(z)$$

$$y = \lim_{z\to 1} (1-z^{-1})\,F(z)\,\frac{1}{1-z^{-1}} = \lim_{z\to 1} F(z)$$

$$Y(z) = f_0 R(z) + f_1 z^{-1} R(z) + f_2 z^{-2} R(z)$$

$$y[k] = f_0\,x[k] + f_1\,x[k-1] + f_2\,x[k-2]$$



بعد از ۲ مرحله به پاسخ نهایی می‌رسد

Subject:
Date

بازآورد شدن شرایط زیر:

اگر $G_p(z)$ صفر ناپایداری دارد این صفر در $F(z)$ وجود داشته باشد

جلوگیری از حذف صفر و قطب ناپایدار بین کنترل کننده و Plant

$$G_p(z) = \frac{N_p(z)\,(1-az^{-1})}{D_p(z)} \qquad a>1$$

$$G_D(z) = \frac{N_D(z)}{D_D(z)}$$

$$F(z) = \frac{G_D(z)\,G_p(z)}{1+G_D(z)\,G_p(z)} = \frac{\frac{N_p(z)}{D_p(z)}(1-az^{-1})\frac{N_D(z)}{D_D(z)}}{1+ \quad ''}$$

$$= \frac{N_p(z)\,(1-az^{-1})\,N_D(z)}{D_pD_D + N_pN_D\,(1-z^{-1})}$$

بنابراین $F(z)$ را بصورت زیر در نظر میگیریم:

$$F(z) = M(z)\,(1-az^{-1})$$

$$\overset{\text{مثلاً}}{=} (M_0+M_1z^{-1})(1-az^{-1})$$

اگر $G_p(z)$ قطب ناپایداری داشته باشد این قطب باید بصورت یک صفر در عبارت $1-F(z)$ دیده شود.

$$G_p(z) = \frac{N_p(z)}{D_p(z)(1-az^{-1})}$$

PAPCO

Subject:
Date

$$1-F(z)=\frac{1}{1+G_p(z)G_D(z)}=\frac{1}{1+\frac{N_p}{D_p}\frac{N_D}{D_D}\frac{1}{1-az^{-1}}}$$

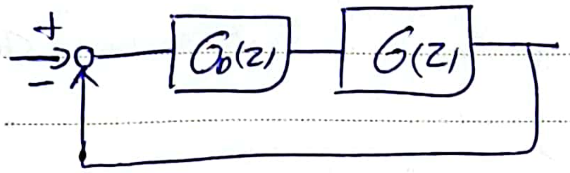
$$=\frac{D_pD_D(1-az^{-1})}{D_pD_D(1-az^{-1})+N_pN_D}$$

$$1-F(z)=N(z)(1-az^{-1})$$

اگر در بسط $G(z)$ اولین جمله از z^{-k} شروع می‌شود اولین جمله $F(z)$ هم از z^{-k} شروع شود

PAPCO

۱۴۰۳/۲/۳۱



$$F(z) = \frac{G_D(z)\,G(z)}{1+G_D(z)G(z)} \Longleftrightarrow G_D(z) = \frac{F(z)}{1-F(z)} \cdot \frac{1}{G(z)}$$

① اگر $z=a$ صفر ناپایدار G باشد آنگاه $F(z) = (1-az^{-1})M(z)$

② اگر $z=b$ قطب ناپایدار G باشد آنگاه $1-F(z) = (1-bz^{-1})N(z)$

③ اگر بسط $G(z)$ از جمله z^{-p} شروع شود $F(z)$ نیز باید از z^{-p} شروع شود

مثلا $G(z) = \dfrac{1}{1-az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \cdots$

$G(z) = \dfrac{z^{-1}}{1-az^{-1}} = z^{-1} + az^{-2} + \cdots$

④ اگر $R(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-z^{-1}} \\ \dfrac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \\ \dfrac{Tz^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3} \end{cases}$ آنگاه

پله $n=1$
شیب $n=2$
شتاب $n=3$

$$1-F(z) = (1-z^{-1})^n Q(z)$$

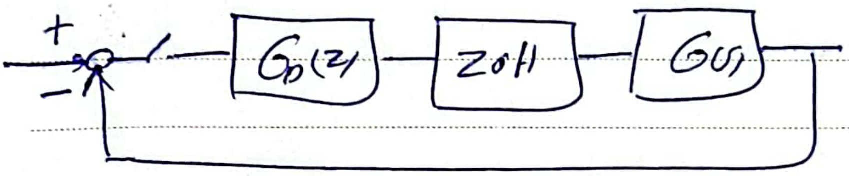
$$E(z) = \frac{1}{1+G_D(z)G(z)} R(z)$$

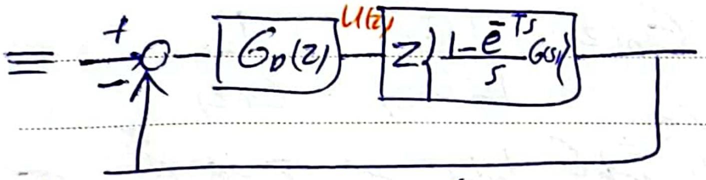
$$E(z) = (1-F(z))R(z) = \cancel{(1-z^{-1})^n}\, Q(z)\, \frac{\bar{Q}(z)}{\cancel{(1-z^{-1})^n}}$$

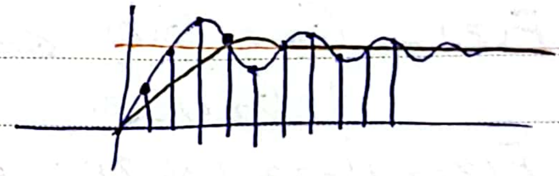
$$e_0 + e_1z^{-1} + e_2z^{-2} + 0 + 0 + \cdots$$

$x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+x[3]z^{-3}$

۴







۵ برای عدم وجود ریپل در بین لحظات نمونه برداری شکل $U(z)$ باید بصورت زیر باشد

ورودی پله:

$$U(z)=u_0+u_1z^{-1}+u_2\left(z^{-2}+z^{-3}+\cdots\right)$$

شیب

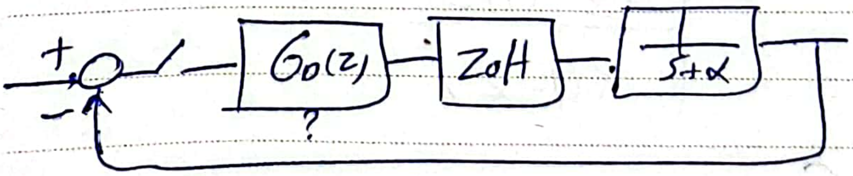
$$(1-z^{-1})U(z)=u_0+u_1z^{-1}+u_2\left(z^{-2}+\cdots\right)$$

شتاب:

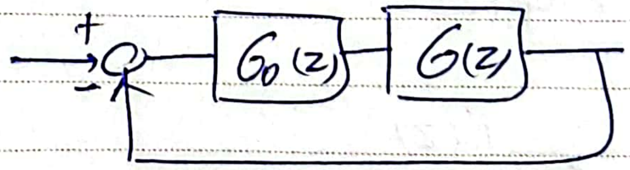
$$(1-z^{-1})^2U(z)=u_0+u_1z^{-1}+u_2\left(z^{-2}+\cdots\right)$$

$$U(z)=\frac{G_D(z)}{1+G(z)G_D(z)}R(z)=\frac{F(z)R(z)}{G(z)}=\frac{N_U(z)}{D_U(z)}$$

$$\rightarrow D_U(z)U(z)=N_U(z)$$



Deadbeat:



$$G(z)=Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{1}{s+\alpha}\right\}=\frac{az^{-1}}{1-bz^{-1}}\qquad\begin{cases}a=\frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha T}\right)\\ b=e^{-\alpha T}\end{cases}$$

Subject:
Date

$$G(z)= a z^{-1}\left(1+b z^{-1}+b^{2} z^{-2}+\cdots\right)=\frac{a z^{-1}}{1-b z^{-1}}$$

$$F(z)=f_1 z^{-1}$$

قطب ناپایدار و صفر ناپایدار ندارد

$a z^{-1}$ بنابراین $F(z)$ شامل [illegible] نیست

$\alpha > 0 \rightarrow |b| < 1$

$T > 0$

چون ورودی پله است:

$$1-F(z)=(1-z^{-1})Q(z)$$

$$\rightarrow 1-f_1 z^{-1}=(1-z^{-1})(q_0+q_1 z^{-1}) \rightarrow q_0=1,\quad q_1=0$$

$$\Rightarrow \boxed{f_1=1}$$

ورودی اگر پله باشد پس از یک گام خروجی ورودی را دنبال می‌کند.

$$U(z)=\frac{F(z)}{G(z)}R(z)$$

$$u_0+u_1 z^{-1}+u_2 z^{-2}+\cdots=\frac{(1-b z^{-1})}{a}\,\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$\rightarrow a(1-z^{-1})(u_0+u_1 z^{-1}+u_2 z^{-2}+\cdots)=1-b z^{-1}$$

$$a u_0+a(u_1-u_0)z^{-1}+a(u_2-u_1)z^{-2}+a(u_3-u_2)z^{-3}+\cdots$$

$$=1-b z^{-1}+0 \rightarrow a u_0=1 \rightarrow \boxed{u_0=\frac{1}{a}}$$

$$a(u_1-u_0)=-b \rightarrow u_1=-\frac{b}{a}+\frac{1}{a}=\frac{1-b}{a} \rightarrow \boxed{u_1=\frac{1-b}{a}}$$

$$\left.\begin{array}{l} a(u_2-u_1)=0 \\ \vdots \end{array}\right\} \Rightarrow u_1=u_2=u_3=\cdots$$

PAPCO

Subject:
Date

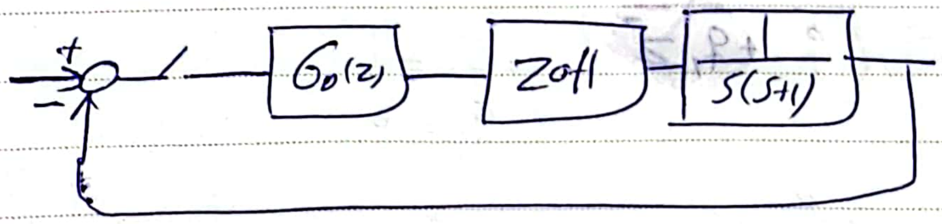
$$G_D(z) = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad \frac{1-bz^{-1}}{az^{-1}}$$

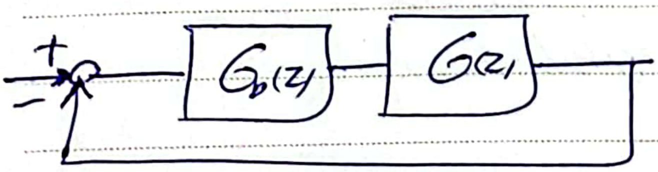
$$= \frac{1}{a} \frac{1-bz^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{a}\left(\frac{b-bz^{-1}+1-b}{1-z^{-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{a}\left(b + \frac{1-b}{1-z^{-1}}\right)$$

کنترل کننده PI

$\alpha = 1$, $T = 1$ شبیه سازی در متلب





$$G(z) = Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{1}{s(s+1)}\right\} = \frac{az^{-1}(1+bz^{-1})}{(1-z^{-1})(1+az^{-1})}$$

$$T = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} a = 0.3479 \\ b = 0.8171 \end{cases}$$

$F(z) = f_1 z^{-1}$ $F(z)$ را از z^{-1} شروع کنیم

$1 - F(z) = (1-z^{-1})\, Q(z)$

$$\rightarrow 1 - f_1 z^{-1} = (1-z^{-1})(q_0 + q_1 z^{-1}) \Rightarrow q_0 = 1$$

$$q_1 = 0$$

$$\Rightarrow f_1 = 1$$

PAPCO

Subject:
Date

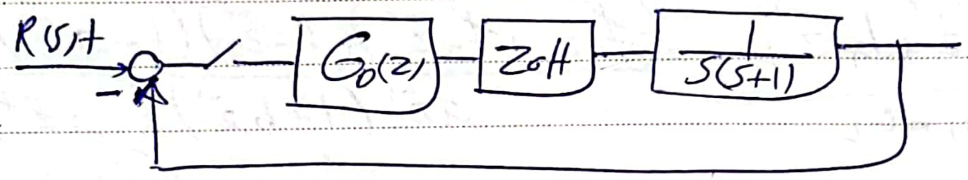
$$G_D(z) = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} \cdot \frac{(1-z^{-1})(1+az^{-1})}{az^{-1}(1+bz^{-1})} = \frac{(1+az^{-1})}{a(1+bz^{-1})}$$

با شبیه سازی می‌بینیم که سیگنال کنترل نوسانی خواهد بود بنابراین $F(z)=f_1z^{-1}$ نمی‌تواند انتظارات ما را برآورده کند بنابراین $F(z)$ را به صورت $f_1z^{-1}+f_2z^{-2}$ در نظر می‌گیریم

PAPCO

Subject:
Date: ۱۴۰۳٫۰۳٫۰۵

$T=1$

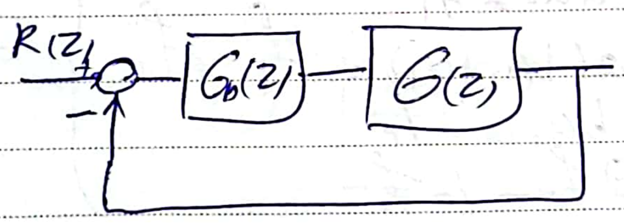


$G_D(z) \longrightarrow$ در کمترین زمان به مقدار نهایی برسد با خطای صفر و عدم وجود موجک } Deadbeat

$$G(z) = Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\,\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \frac{az^{-1}(1+bz^{-1})}{(1-z^{-1})(1-az^{-1})}$$

$a = ۰٫۳۶۷۹$

$b = ۰٫۷۱۸۱$



$$F(z) = \frac{G_D(z)\,G(z)}{1+G_D(z)G(z)} \longrightarrow G_D(z) = \frac{F(z)}{1-F(z)}\,\frac{1}{G(z)}$$

$$F(z) = f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2}$$

$1-F(z) = (1-z^{-1})(n_0+n_1 z^{-1})$ بنابراین $\underline{\underline{n_0=1}}$

$$\rightarrow 1 - f_1 z^{-1} - f_2 z^{-2} = 1 + (n_1-1) z^{-1} - n_1 z^{-2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\rightarrow n_1 = f_2 \\ -f_1 = n_1 - 1\end{array}\right\} \rightarrow -f_1 = f_2 - 1 \rightarrow \boxed{f_2 = 1 - f_1} \; (*)$$

$$U(z) = \frac{F(z)}{G(z)} R(z)$$

$$\underbrace{u_0 + u_1 z^{-1} + u_2 z^{-2} + u_3 z^{-3} + \cdots}_{u_{i+1} - u_i} = \frac{(f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2})\cancel{(1-z^{-1})}(1-az^{-1})}{a z^{-1}(1+bz^{-1})\cancel{(1-z^{-1})}}$$

$$(u_0 + u_1 z^{-1} + u_2 z^{-2} + \cdots)\, a(1+bz^{-1}) = (f_1 + f_2 z^{-1})(1-az^{-1})$$

$$a\left(u_0 + (bu_0 + u_1)z^{-1} + (bu_1 + u_2)z^{-2} + (bu_2 + u_3)z^{-3} + \cdots\right)$$

$$= f_1 + (f_2 - a f_1)z^{-1} - a f_2 z^{-2}$$

$$\left.\begin{array}{l} a u_0 = f_1 \\ a(bu_0 + u_1) = f_2 - a f_1 \\ a(bu_1 + u_2) = -a f_2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} a u_0 = f_1 \\ a(bu_0 + u_1) = f_2 - a f_1 \\ bu_1 = -f_2 \\ * \; f_2 = 1 - f_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} bu_2 + u_3 = 0 \\ bu_3 + u_4 = 0 \\ \vdots \end{array}\right\} u_2 = u_3 = \cdots = 0$$

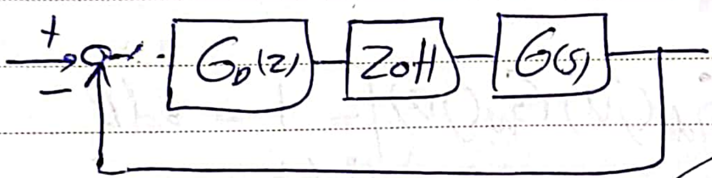
$$\boxed{\begin{array}{ll} f_1 = \dfrac{1}{1+b} & u_0 = \dfrac{1}{a(1+b)} \\[2ex] f_2 = \dfrac{b}{1+b} & u_1 = \dfrac{-1}{1+b} \end{array}}$$

Subject:
Date

حل: طراحی با استفاده از پاسخ فرکانسی.

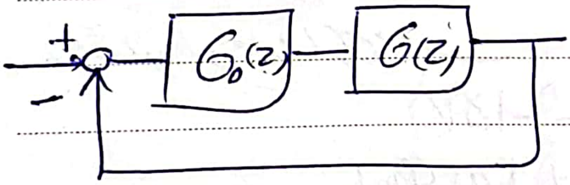
$PM = 60^\circ \qquad T = \frac{1}{4}$

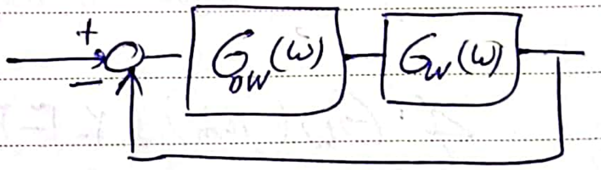
$\Omega_c = 1.5$ فرکانس قطع بهره



$$Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\,\frac{1}{s(s+1)}\right\}$$

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \qquad G(z) = \frac{0.0288\,(z+0.9201)}{(z-1)(z-0.7788)}$$





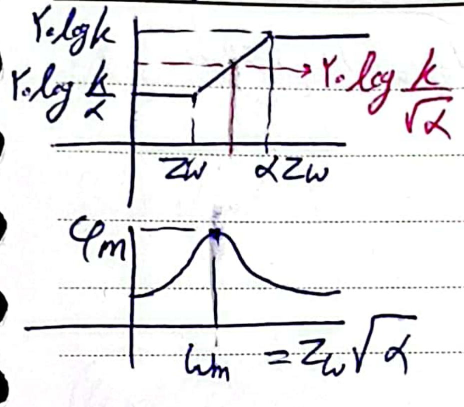
$$G_W(w) = G(z)\Big|_{z=\frac{1-\frac{T}{2}w}{1+\frac{T}{2}w}} = \frac{8-w}{8+w}$$

$$G_W(w) = \frac{0.0288\left(\left(\frac{8-w}{8+w}\right)+0.9201\right)}{\left(\frac{8-w}{8+w}-1\right)\left(\frac{8-w}{8+w}-0.7788\right)}$$

$$= \frac{-6.47\times 10^{-4}\,(w+192.99)(w-8)}{w(w+0.9968)}$$

$$V_C = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\Omega_c T}{2}\right) = 8\tan\left(\frac{1}{8}\times 1.5\right) = 1.52$$ فرکانس قطع بهره $G_W(w)$

PAPCO



$\alpha > 1 \qquad G_{ld}(w) = k\,\frac{w+z_w}{w+\alpha z_w}$

$$\alpha = \frac{1+\sin(\varphi_m)}{1-\sin(\varphi_m)}$$

$$\begin{cases} \omega_m = 1{,}52 = z_w\sqrt{\alpha} \\ \left|G_{ld}(j\nu)\,G_w(j\nu)\right|_{\nu=\omega_m} = 1 = 0\,dB \\ \left|\angle G_{ld}(j\nu)\,G_w(j\nu)\right|_{\nu=\omega_m} = -180^\circ + 60^\circ = -120^\circ \end{cases}$$

با استفاده از شبیه سازی متلب

$\angle G_w(j\omega_m) = 203 - 360 = -157$

$\rightarrow \varphi_m = 37 \rightarrow \alpha = \frac{1+\sin(\varphi_m)}{1-\sin(\varphi_m)}$ ✓

$z_w = \frac{\omega_m}{\sqrt{\alpha}}$ ✓

متلب

$20\log\frac{k}{\sqrt{\alpha}} = 8{,}36\,dB \Longrightarrow \frac{k}{\sqrt{\alpha}} = 10^{\frac{8{,}36}{20}} \rightarrow k$ ✓

$$\boxed{G_{Dw}(w) = 5{,}46\,\frac{w+0{,}76}{w+4{,}02\times 0{,}78}}$$

$$G_D(z) = G_{Dw}(w)\Big|_{w=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}$$

۱۴۰۳ ـ ۳ ـ ۷

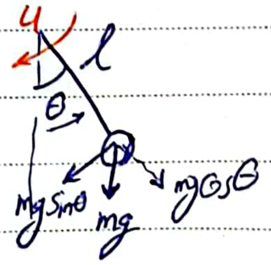
فضای حالت:

حالت: مجموعه متغیرهایی که وضعیت سیستم را مشخص می‌کند

با داشتن آنها در زمان t_0 و با داشتن ورودی سیستم برای $t \geq t_0$ رفتار سیستم به صورت کامل مشخص می‌شود

متغیرهای حالت

فضای حالت: فضایی که متغیرهای حالت در آن قرار دارد.



مثال:

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + u$$

$$x^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u^* = mg\sin x_1^*$$

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{g}{l}\sin x_1 + \dfrac{1}{ml}u \end{array}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

معادله فضای حالت:

پیوسته
$$\begin{cases} \dot{x} = F(x,u,t) \\ y = H(x,u,t) \end{cases}$$

گسسته
$$\begin{cases} x[k+1] = F(x[k],u[k],k) \\ y[k] = H(x[k],u[k],k) \end{cases}$$

پیوسته
$$\dot{x} = f(x,t) + g(x,t)\,u \longrightarrow \text{affine}$$

Subject:
Date

$F(\omega)$ خطی است اگر

$$F(\alpha_1\omega_1+\alpha_2\omega_2)=\alpha_1F(\omega_1)+\alpha_2F(\omega_2)$$

گسسته $x[k+1]=F(x[k])+g(x[k])\,u$

پیوسته
$$\begin{cases}\dot{x}=A(t)x+B(t)u\\ y=C(t)x+D(t)u\end{cases}$$

گسسته
$$\begin{cases}x[k+1]=A[k]x[k]+B[k]u[k]\\ y[k]=C[k]x[k]+B[k]\,u[k]\end{cases}$$

$$\begin{cases}x[k+1]=Ax[k]+Bu[k]\\ y[k]=Cx[k]+Du[k]\end{cases}$$

پیوسته
$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases}$$

نقطه کار: x^* نقطه تعادل سیستم $\dot{x}=F(x,u,t)$ است اگر $u^*(t)$ وجود داشته باشد که

$$F(x^*,u^*(t),t)=0\qquad\forall t\geq t_0$$

x^* یک نقطه تعادل سیستم

$$x[k+1]=F(x[k],u[k],k)$$

است اگر $u^*[k]$ ای وجود داشته باشد که

$$x^*=F(x^*,u[k],k)\qquad\forall k\geq k_0$$

خطی سازی ، (در نظر گرفتن بسط مرتبه ۱ تابع F حول نقطه کار)

$$\dot{x} = F(x,u,t)$$

x^* نقطه کار باشد

$$F(x^*,u^*,t) = 0 \leftarrow u^*$$

$$\dot{x} = F(x^*,u^*,t) + \underbrace{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x^*,u^*}}_{A(t)} \underbrace{(x-x^*)}_{\tilde{x}} + \underbrace{\left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_{x^*,u^*}}_{B(t)} \underbrace{(u-u^*)}_{\tilde{u}}$$

$$+ H.O.T$$

$$\tilde{x} = x - x^* \qquad \dot{\tilde{x}} = \dot{x} = F(x^*,u^*,t) + A(t)\tilde{x} + B(t)\tilde{u}$$

$$\tilde{u} = u - u^*$$

$$\dot{\tilde{x}} = A(t)\tilde{x} + B(t)\tilde{u}$$

$$F(x,u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\sin x_1 + \frac{1}{ml}u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

فرض کنید $x^* = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos 1.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml} \end{bmatrix}$$

Subject:
Date

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\text{Cos}\,1,\alpha & 0 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml} \end{bmatrix} \tilde{u}$$

$$x = \tilde{x} + x^*$$

$$x[k+1] = F(x[k], u[k], k) \qquad x^* = F(x^*, u^*, k)$$

$$x[k+1] = F(x^*, u^*, k) + \overbrace{\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x^*, u^*}}^{A[k]} \overbrace{(x[k] - x^*)}^{\tilde{x}[k]}$$

$$+ \overbrace{\frac{\partial F}{\partial u}\Big|_{x^*, u^*}}^{B[k]} \overbrace{(u[k] - u^*)}^{\tilde{u}[k]}$$

$$+ H.O.T$$

$$\tilde{x}[k] = x[k] - x^* \quad / \quad \tilde{u}[k] = u[k] - u^*$$

$$\tilde{x}[k+1] = x[k+1] - x^* = \cancel{F(x^*, u^*; k)} + A[k]\tilde{x}[k] + B[k]\tilde{u}[k] \cancel{- x^*}$$

$$\rightarrow \tilde{x}[k+1] = A[k]\tilde{x}[k] + B[k]\tilde{u}[k]$$

مثال از خطی سازی در حوزه گسسته

$$\begin{cases} x_1[k+1] = x_1[k] + a\,x_2[k] \\ x_2[k+1] = x_1^3[k] + \sin(x_2[k]) + x_1[k]\,u[k]^2 \end{cases}$$

PAPCO

Subject:
Date

$$\begin{cases} \cancel{x_1^*} = \cancel{x_1^*} + a x_2^* \\ x_2^* = x_1^{*3} + \sin x_2^* + x_1^* u^{*2} \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} x_2^* = 0 \\ x_1^{*3} + x_1^* u^{*2} = 0 \end{array}$$

$$x_1^{*2} + u^{*2} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F(x[k], u[k], k) = \begin{bmatrix} x_1[k] + a x_2[k] \\ x_1^3[k] + \sin(x_2[k]) + x_1[k] u^2[k] \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{\partial F}{\partial x}\bigg|_{(x^*, u^*)} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 3x_1^2[k] + u^2[k] & \cos(x_2[k]) \end{bmatrix}\bigg|_{(x^*, u^*)}$$

$$(x^*, u^*) \rightarrow \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, u^*\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & a \\ u^{*2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2x_1[k]\, u[k] \end{bmatrix}_{x^*, u^*} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x}[k+1] = \begin{bmatrix} 1 & a \\ u^{*2} & 1 \end{bmatrix} \tilde{x}[k] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{u}[k]$$

PAPCO

Subject:
Date ۱۴۰۳/۰۳/۱۲

فضای حالت

نمایش سیستم در فضای پیوسته

تابع تبدیل : $G(s) = \dfrac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}$

معادله دیفرانسیل : $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 = b_n u^{(n)} + \cdots + b_0$

فضای حالت : $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$

- نمایش فضای حالت در سیستم های زمان گسسته

- برنامه سازی مستقیم ← فرم کانونیکال کنترل پذیر

- " " تودرتو ← " " رویت پذیر

- گسترش به کسرهای جزئی ← فرم جردن

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = b_0 + \frac{(b_1 - a_1 b_0) z^{-1} + \cdots + (b_n - a_n b_0) z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

$$\rightarrow Y(z) = b_0 U(z) + \tilde{Y}(z) \quad ; \quad \tilde{Y}(z) = \frac{(b_1 - a_1 b_0) z^{-1} + \cdots + (b_n - a_n b_0) z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} \cdot U(z)$$

$$\rightarrow \frac{\tilde{Y}(z)}{(b_1-a_1b_0)z^{-1}+\cdots+(b_n-a_nb_0)z^{-n}} = \frac{U(z)}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}} \overset{*}{=} Q(z)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{Y}(z) = (b_1-a_1b_0)z^{-1}Q(z)+\cdots+(b_n-a_nb_0)z^{-n}Q(z) \\ U(z) = Q(z)+a_1z^{-1}Q(z)+\cdots+a_nz^{-n}Q(z) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} X_1(z) = z^{-n}Q(z) \\ X_2(z) = z^{-(n-1)}Q(z) \\ \vdots \\ X_n(z) = z^{-1}Q(z) \end{array}\right\} \rightarrow x_i(k) = Z^{-1}(X_i(z))$$

$$Z^{-1}(zY(z)) = y(k+1)$$

$$\begin{cases} zX_1(z) = X_2(z) & \rightarrow x_1(k+1) = x_2(k) \\ zX_2(z) = X_3(z) & \rightarrow x_2(k+1) = x_3(k) \\ \vdots & \vdots \\ zX_{n-1}(z) = X_n(z) & \rightarrow x_{n-1}(k+1) = x_n(k) \\ zX_n(z) = Q(z) \quad \text{I} & \end{cases}$$

$$* \quad U(z) = Q(z)+a_1z^{-1}Q(z)+\cdots+a_nz^{-n}Q(z)$$

$$\rightarrow Q(z) = U(z) - a_1X_n(z) - a_2X_{n-1}(z) - \cdots - a_nX(z)$$

$$\text{I} \rightarrow x_n(k+1) = -a_1x_n(k) - a_2x_{n-1}(k) - \cdots - a_nx_1(k) + u(k)$$

$$\tilde{Y}(z) = (b_1-a_1b_0)z^{-1}Q(z)+\cdots+(b_n-a_nb_0)z^{-n}Q(z)$$
$$= (b_1-a_1b_0)X_n(z)+\cdots+(b_n-a_nb_0)X_1(z)$$

$$\rightarrow \tilde{y}(k) = (b_1 - a_1 b_0)x_n(k) + \cdots + (b_n - a_n b_0)x_1(k)$$

$$\overset{z^{-1}}{\longrightarrow}\ y(k) = b_0 u(k) + \tilde{y}(k)$$

$$\rightarrow y(k) = (b_1 - a_1 b_0)x_n(k) + \cdots + (b_n - a_n b_0)x_1(k) + b_0 u(k)$$

$$x(k) \triangleq \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

برنامه ریزی مستقیم

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 & \cdots & b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} x(k) + b_0 u(k)$$

حال اگر $X_1(z)$ تا $X_n(z)$ را به صورت زیر تعریف کنیم ماتریس های A و B، C و D چه تغییری می کنند؟

$$X_1(z) = z^{-1} Q(z)$$

$$\vdots$$

$$X_n(z) = z^{-n} Q(z)$$

Subject:
Date

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_0 & \cdots & b_n - a_n b_0 \end{bmatrix}$$

برنامه‌ریزی تودرتو

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

طرفین وسطین می‌کنیم:

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \cdots + a_n z^{-n} Y(z) = b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + \cdots + b_n z^{-n} U(z)$$

$$\rightarrow Y(z) = b_0 U(z) + z^{-1}\left[b_1 U(z) - a_1 Y(z)\right] + z^{-2}\left(b_2 U(z) - a_2 Y(z)\right) + \cdots + z^{-n}\left(b_n U(z) - a_n Y(z)\right)$$

$$\rightarrow Y(z) = b_0 U(z) + \underbrace{z^{-1}\Big[b_1 U(z) - a_1 Y(z) + \underbrace{z^{-1}\big[b_2 U(z) - a_2 Y(z) + z^{-1}[b_3 U(z) - a_3 Y(z) + \cdots]\big]}_{\triangleq X_{n-1}(z)} \cdots \Big]}_{\triangleq X_n(z)}$$

$$Y(z) = b_0 U(z) + X_n(z) \rightarrow y(k) = b_0 u(k) + x_n(k)$$

$$\begin{cases} z X_n(z) = b_1 U(z) - a_1 Y(z) + X_{n-1}(z) \\ z X_{n-1}(z) = b_2 U(z) - a_2 Y(z) + X_{n-2}(z) \\ \vdots \\ z X_1(z) = b_n U(z) - a_n Y(z) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_n(k+1) = -a_1 x_n(k) + x_{n-1}(k) + (b_1 - a_1 b_0)\, u(k) \\ x_{n-1}(k+1) = -a_2 x_n(k) + x_{n-2}(k) + (b_2 - a_2 b_0)\, u(k) \\ \vdots \\ x_1(k+1) = -a_n x_n(k) + (b_n - a_n b_0)\, u(k) \end{cases}$$

فرم کانونیکال رویت پذیر

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & & -a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & 1 \quad 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \quad 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u(k)$$

Subject:
Date

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k)$$

حال اگر متغیرهای حالت را به ترتیب معکوس درنظر بگیریم ماتریس های B, A

C و D چگونه می‌شوند؟

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -a_n & \cdots & & & 0 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_0 \\ \vdots \\ b_n - a_n b_0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

فرم جردن.

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} = \left[b_0 + \underbrace{\frac{c_1}{z-p_1}}_{\frac{X_1(z)}{U(z)}} + \underbrace{\frac{c_2}{z-p_2}}_{\frac{X_2(z)}{U(z)}} + \cdots + \underbrace{\frac{c_n}{z-p_n}}_{\frac{X_n(z)}{U(z)}} \right]$$

$$X_1(z) = \frac{c_1}{z-p_1} U(z) \rightarrow z X_1(z) - p_1 X_1(z) = c_1 U(z)$$

$$\rightarrow x_1(k+1) = p_1 x_1(k) + c_1 u(k)$$

PAPCO

Subject:
Date

به همین ترتیب:

$$x_n(k+1) = P_n x_n(k) + C_n U(k)$$

$$Y(z) = G(z)U(z) = b_0 U(z) + X_1(z) + X_2(z) + \cdots + X_n(z)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & & 0 \\ & P_2 & \\ & \ddots & \\ 0 & & P_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} U(k)$$

حال اگر $X_i(z)$ را بصورت زیر در نظر می‌گیریم، نتایج چگونه تغییر می‌کرد؟

$$X_i(z) = \frac{1}{z-P_i} U(z)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{bmatrix}$$

* همچنین B و C را طوری می‌توانیم تعریف کنیم که حاصل ضرب درایه‌های متناظر برابر با C_i شود.

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 U$$

حال، حالتی را بررسی می‌کنیم که قطب مرتبه m داشته باشیم. در این حالت ماتریس A به فرم جردن بدست می‌آید

P4PCO

Subject:
Date

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} = b_0 + \frac{c_1}{(z-p_1)^m} + \frac{c_2}{(z-p_1)^{m-1}}$$

$$+ \cdots + \frac{c_m}{z-p_1} + \frac{c_{m+1}}{z-p_{m+1}} + \cdots + \frac{c_n}{z-p_n}$$

$$Y(z) = G(z)U(z) = b_0 U(z) + \frac{c_1}{(z-p_1)^m} U(z) + \frac{c_2}{(z-p_1)^{m-1}} U(z)$$

$$+ \cdots + \frac{c_m}{z-p_1} U(z) + \frac{c_{m+1}}{z-p_{m+1}} U(z) + \cdots + \frac{c_n}{z-p_n} U(z)$$

$$X_1(z) = \frac{1}{(z-p_1)^m} U(z)$$

$$X_2(z) = \frac{1}{(z-p_1)^{m-1}} U(z)$$

$$\vdots$$

$$X_m(z) = \frac{1}{z-p_1} U(z)$$

$$X_{m+1}(z) = \frac{1}{z-p_{m+1}} U(z)$$

$$\vdots$$

$$X_n(z) = \frac{1}{z-p_n} U(z)$$

Subject:
Date

$$\Rightarrow X_1(z) = \frac{1}{z-P_1} X_2(z) \longrightarrow x_1(k+1) = P_1 x_1(k) + x_2(k)$$

$$\vdots$$

$$X_{m-1}(z) = \frac{1}{z-P_1} X_m(z) \longrightarrow x_{m-1}(k+1) = P_1 x_{m-1}(k) + x_m(k)$$

$$X_m(z) = \frac{1}{z-P_1} U(z) \longrightarrow x_m(k+1) = P_1 x_m(k) + u(k)$$

$$x_{m+1}(k+1) = P_{m+1} x_{m+1}(k) + u(k)$$

$$\vdots$$

$$x_n(k+1) = P_n x_n(k) + u(k)$$

$$\Rightarrow A = \left[\begin{array}{cccc|cccc} P_1 & 1 & & 0 & & & & \\ & P_1 & 1 & & & & 0 & \\ & 0 & \ddots & 1 & & & & \\ & & & P_1 & & & & \\ \hline & & & & P_{m+1} & & & \\ & & 0 & & & P_{m+2} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & P_n \end{array}\right]$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

$$D = b_0$$

گسسته سازی فضای حالت

$$\begin{cases} x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

Subject:
Date

تغییر متغیر می‌دهیم:

P → ماتریس معکوس پذیر

$$\tilde{x}(k) = P\,x(k) \longrightarrow x(k) = P^{-1}\tilde{x}(k)$$

$$\Rightarrow \tilde{x}(k+1) = P\,x(k+1) = P\left[Gx(k) + Hu(k)\right]$$

$$= \underbrace{PGP^{-1}}_{\hat{G}}\tilde{x}(k) + \underbrace{PH}_{\hat{H}}u(k)$$

$$y(k) = \underbrace{CP^{-1}}_{\hat{C}}\tilde{x}(k) + \underbrace{D}_{\hat{D}}u(k)$$

✓ تبدیل P ماتریس G را قطری کند.

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{x}(k+1) = \hat{G}\tilde{x}(k) + \hat{H}u(k) \\ y(k) = \hat{C}\tilde{x}(k) + \hat{D}u(k) \end{cases}$$

بدست آوردن تابع تبدیل پالس از روی نمایش فضای حالت

$$\begin{cases} x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

* شرایط اولیه را صفر در نظر می‌گیریم زیرا می‌خواهیم تابع تبدیل بدست بیاوریم

از دو طرف معادلات تبدیل z گرفتیم →

$$Y(z) = CX(z) + DU(z)$$

$$\rightarrow \mathcal{Z}\{x(k+1)\} = zX(z) = GX(z) + HU(z)$$

$$\rightarrow (zI - G)X(z) = HU(z) \rightarrow X(z) = (zI - G)^{-1}HU(z)$$

PAPCO

Subject:
Date

$$Y(z) = C(zI-G)^{-1}HU(z) + DU(z)$$

$$\Rightarrow Y(z) = \underbrace{\left[C(zI-G)^{-1}H + D\right]}_{G(z)} U(z)$$

به ازای هر نمایش فضای حالت برای یک سیستم، تابع تبدیل پالس متناظر آن یعنی $G(z)$ به صورت یکتا مشخص خواهد شد.

حل معادله های فضای حالت زمان گسسته

$$\begin{cases} x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$ (رابطه بازگشتی)

فرض می کنیم شرایط اولیه سیستم یعنی $x(0)$ را داریم

$k=0$ $x(0)$ ✓

$\rightarrow x(1) = Gx(0) + Hu(0)$

$\xrightarrow{k=1} x(2) = Gx(1) + Hu(1) = G^2x(0) + GHu(0) + Hu(1)$

$\xrightarrow{k=2} x(3) = Gx(2) + Hu(2) = G^3x(0) + G^2Hu(0) + GHu(1) + Hu(2)$

$\vdots$

$$\begin{cases} x(k) = G^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1} Hu(j) \quad , \quad k=1,2,3,\ldots \\ y(k) = CG^k x(0) + C\sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1} Hu(j) + Du(k) \end{cases}$$

معادله همگن ← ورودی صفر (ورودی نداشته باشیم)

$x(k+1) = Gx(k) + 0$

$\Rightarrow x(k) = G^k x(0)$ ماتریسی که حالت را از زمان صفر به k منتقل می کند

$$\boxed{\psi(k) \triangleq G^k}$$ ماتریس انتقال حالت

$$x(k) = \psi(k)x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \underbrace{\psi(k-j-1)}_{m} Hu(j)$$

$$= \psi(k)x(0) + \sum_{m=0}^{k-1} \psi(m) Hu(k-m-1)$$

Subject:
Date

یادآوری: در درس کنترل مدرن داشتیم،

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

ماتریس انتقال حالت در حالت پیوسته $\longrightarrow \psi(t) = e^{At}$

● استفاده از تبدیل Z

$$\begin{cases} x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

* برای حساب کردن تابع تبدیل باید $x(0)$ را صفر در نظر می‌گرفتیم اما اینجا نمی‌گیریم

$$\xrightarrow{Z} zX(z) - zx(0) = GX(z) + HU(z)$$

$$\rightarrow (zI - G)X(z) = zx(0) + HU(z)$$

$$\rightarrow X(z) = (zI-G)^{-1}zx(0) + (zI-G)^{-1}HU(z)$$

$$\xrightarrow{Z^{-1}} x(k) = \underbrace{Z^{-1}\{(zI-G)^{-1}zx(0)\}}_{= x_0 Z^{-1}\{(zI-G)^{-1}z\}} + Z^{-1}\{(zI-G)^{-1}HU(z)\}$$

رابطه‌ای که صفحه قبل بدست آوردیم

$$x(k) = \underbrace{G^{k}}x(0) + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1}}HU(j)$$

$$G^{k} = Z^{-1}\{(zI-G)^{-1}z\}$$

Subject:
Date

رابطه‌ای که جلسه پیش برای تابع تبدیل پالسی بدست آوردیم:

$$F(z) = C(zI-G)^{-1}H + D$$

$$F(k) = Z^{-1}\{F(z)\} \rightarrow$$ ماتریس دنباله داریم

که اگر سیستم چند ورودی باشد و چند خروجی داریم

نکته:

$$(zI-G)^{-1} = Iz^{-1} + Gz^{-2} + G^{2}z^{-3} + \cdots + G^{k}z^{-k-1} + \cdots$$

برای صحت سنجی رابطه بالا دو طرف معادله بالا را در $(zI-G)$ ضرب کنیم می‌بینیم که $I = I$ خواهد شد ✓

یادآوری: $$(z-g)^{-1} = z^{-1}\underbrace{\left(1-\frac{g}{z}\right)^{-1}}_{(1-a)^{-1}\ \text{بسط}} = z^{-1}\left(1+\frac{g}{z}+\frac{g^2}{z^2}+\cdots\right)$$

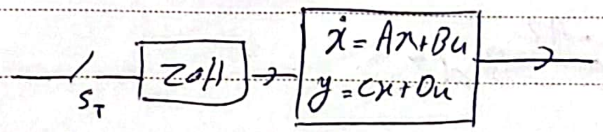
با توجه به نکته بالا داریم:

$$F(z) = D + CHz^{-1} + CGHz^{-2} + \cdots + CG^{k-1}Hz^{-k} + \cdots$$

$$\rightarrow F(k) = \begin{cases} D & k=0 \\ CH & k=1 \\ CG^{k-1}H & k>1 \end{cases}$$

گسسته‌سازی معادلات حالت زمان پیوسته

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$



طبق کنترل مدرن می‌دانیم: $$x(t) = e^{At}x(0) + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)\,d\tau$$

PAPCO

Subject:
Date

با توجه به sampler, zero_order holder ، ورودی سیستم ما یعنی u در فاصله زمانی بین زمان‌های نمونه برداری مقدار ثابتی دارد یعنی:

$$u(t) = u(kT) \qquad kT \leq t < (k+1)T$$

$$x((k+1)T) = e^{A(k+1)T} x(0) + e^{A(k+1)T} \int_0^{(k+1)T} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau$$

$$x(kT) = e^{AkT} x(0) + e^{AkT} \int_0^{kT} e^{-A\tau} B \, u(\tau) d\tau$$

معادله دوم را در $(-e^{AT})$ ضرب کرده و با معادله اول جمع می‌کنیم:

$$x((k+1)T) = e^{AT} x(kT) + e^{A(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow x((k+1)T) = \underbrace{e^{AT}}_{G} x(kT) + e^{A(k+1)T} u(kT) \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-A\tau} B \, d\tau$$

دنبال چی هستیم؟ یک نمایش فضای حالت گسسته:

$$\begin{cases} x((k+1)T) = G x(kT) + H u(kT) \\ y = C x(kT) + D u(kT) \end{cases}$$

عبارت سمت راست را ساده‌تر می‌کنیم:

$$e^{A(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-A\tau} B \, d\tau$$

تغییر متغیر می‌دهیم:

$$\lambda = (k+1)T - \tau$$

PAPCO

$$= -e^{A(k+1)T}\int_T^0 e^{-A((k+1)T-\lambda)}B\,d\lambda$$

$$= \int_0^T e^{A\lambda}B\,d\lambda \Rightarrow \boxed{H=\int_0^T e^{A\lambda}B\,d\lambda}$$

$$\boxed{G=e^{AT}}$$

* G ، H تابع $\underline{\underline{T}}$ هستند

مثال: گسسته سازی معادلات حالت

$$G(s)=\frac{1}{s+a} \Rightarrow \begin{cases}\dot{x}=-ax+u\\ y=x\end{cases}$$

$$G(T)=e^{AT}=e^{-aT}$$

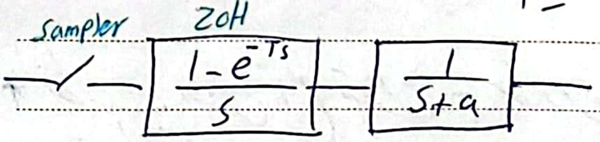
$$H(T)=\int_0^T e^{A\lambda}B\,d\lambda=\int_0^T e^{-a\lambda}\times 1\,d\lambda=\frac{1-e^{-aT}}{a}$$

$$\left.\begin{array}{l} x(k+1)=e^{-aT}x(k)+\dfrac{1-e^{-aT}}{a}u(k)\\ y=x\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$G(z)=C(zI-G)^{-1}H+D \Rightarrow G(z)=(z\times 1-e^{-aT})^{-1}\left(\frac{1-e^{-aT}}{a}\right)$$

$$\Rightarrow G(z)=\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{a(1-e^{-aT}z^{-1})} \checkmark$$

حال تابع تبدیل پالس را به شیوه ای دیگر بدست می آوریم



$$G(z)=Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s(s+a)}\right\}=(1-z^{-1})Z\left\{\frac{1}{s(s+a)}\right\}$$

$$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}\right)$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{1}{a}(1-z^{-1})\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{a} \times \frac{-e^{-aT}z^{-1} + z^{-1}}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{1}{a}\,\frac{z^{-1}(1-e^{-aT})}{(1-e^{-aT}z^{-1})} \quad ۲$$

دیدیم که از هر دو روش به جواب یکسان رسیدیم

● پایداری

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

نمایش فضای حالت

$$\begin{cases} x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

با هم برابرند

$$\hookrightarrow G(z) = C(zI-G)^{-1}H + D$$

$$(zI-G)^{-1} = \frac{adj(zI-G)}{|(zI-G)|}$$

$adj(zI-G) \rightarrow Iz^{n-1} + H_1 z^{n-2} + \cdots + H_{n-1}$

$|(zI-G)| \rightarrow z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$

$$* \; H_i = G + a_i I \rightarrow \begin{cases} a_1 = -tr\,G \\ a_i = -\frac{1}{i}\,tr\,GH_{i-1} \end{cases}$$

* قطب‌های تابع تبدیل $G(z)$ = مقادیر ویژه ماتریس حالت متناظرش G

ماتریس C، H و D ثابت هستند. $\text{adj}(\cdot)$ هم عبارتی به مخرج اضافه نمی‌کند

بنابراین هر جا که $|zI-G|$ صفر شود قطب‌های $G(z)$ است

سیستم زمان پیوسته

$\dot{x} = Ax$ (ورودی ندارد)

گسسته سازی $\longrightarrow$ $x(k+1) = G\,x(k)$ ، $G = e^{AT}$

اگر A پایدار باشد آیا سیستم معادل گسسته آن نیز پایدار خواهد بود یا خیر؟ بله

A پایدار $\longrightarrow \text{Re}\{\lambda_i(A)\} < 0$

اگر λ مقدار ویژه A باشد، $e^{\lambda T}$ مقدار ویژه G است

$\text{Re}\{\lambda\} < 0 \longrightarrow |e^{\lambda T}| < 1 \longrightarrow$ داخل دایره واحد $\longrightarrow$ پایدار

پایداری به مفهوم لیاپانوف

پیوسته	گسسته
برای سیستم $\dot{x} = f(x,t)$	$x(k+1) = f(x(k),k)$
- x_e حالت تعادل (نقطه تعادل) نامیده می‌شود اگر: $f(x_e,t) = 0 \quad \forall t$	- x_e حالت تعادل (نقطه تعادل) نامیده می‌شود اگر: $f(x_e,k) = x_e \quad \forall k$
- نقطه تعادل x_e پایدار لیاپانوف است اگر $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \text{s.t.}$	- نقطه تعادل x_e پایدار لیاپانوف است اگر $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{s.t.}$
برای هر $\|x_e - x_0\| < \delta$	برای هر $\|x_e - x_0\| < \delta$
$\|\varphi(t_0,x_0,t) - x_e\| < \varepsilon$	$\|\varphi(k_0,x_0,k) - x_e\| < \varepsilon$
برای هر $t \geq t_0$ برقرار باشد	برای هر $k \geq k_0$ برقرار باشد

Subject:
Date

به معنی پاسخ با شرایط اولیه x_0 در لحظه t_0 است $\rightarrow \varphi(t_0, x_0, t)$

همچنین نماد $\|.\|$ به معنی نرم ۲ است یعنی:

$$\|y\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}$$

پیوسته

برای سیستم $\dot{x} = f(x,t)$

- نقطه تعادل x_e پایدار مجانبی است اگر x_e پایدار لیاپانوف باشد و

$$\lim_{t\to\infty} \|\varphi(t_0, x_0, t) - x_e\| = 0$$

- نقطه تعادل x_e پایدار مجانبی در کل است اگر برای هر x_0 در فضای حالت

$$\lim_{t\to\infty} \|\varphi(t_0, x_0, t) - x_e\| = 0$$

or

$$x(t) \rightarrow x_e$$

گسسته

$x(k+1) = f(x(k), k)$

- نقطه تعادل x_e پایدار مجانبی است اگر x_e پایدار لیاپانوف باشد و

$$\lim_{k\to\infty} \|\varphi(k_0, x_0, k) - x_e\| = 0$$

- نقطه تعادل x_e پایدار مجانبی در کل است اگر برای هر x_0 در فضای حالت

$$\lim_{k\to\infty} \|\varphi(k_0, x_0, k) - x_e\| = 0$$

or

$$x(k) \rightarrow x_e$$

$$\dot{x} = Ax \xrightarrow{\text{نقاط تعادل}} \boxed{Ax = 0} \rightarrow x \checkmark$$

اگر A^{-1} وجود داشته باشد یک نقطه تعادل دارد

اگر A معکوس پذیر نباشد بی نهایت نقطه تعادل دارد (فضای پوچی ماتریس A)

نکته: برای سیستم های غیرخطی روابط بالا برقرار نیست یعنی سیستم می تواند به جز ۱ و بی نهایت تعداد نقطه تعادل دیگری نیز داشته باشد. مثال:

$$\dot{x} = -x(x-1)$$

$$-x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0,\; x = 1 \Rightarrow$$ ۲ تا نقطه تعادل دارد

PAPCO

مفهوم قضیه لیاپانوف: وقتی یه جوری انرژی یک سیستمی تلف شود بعد از گذر زمان به کمینه انرژی خود می‌رسد مثال، پاندول
(انرژی یک کمیت اسکالر است)

نقطه تعادل پایدار → انرژی min

تابع انرژی باید min داشته باشد

قضیه لیاپانوف

تابع

$V(x): \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow[\text{تابع اسکالر}]{} \mathbb{R}$

- مثبت معین نامیده می‌شود اگر

P.D → Positive definite

$V(0) = 0$

$V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$

- مثبت نیمه معین نامیده می‌شود اگر

P.S.D → semi

$V(0) = 0$

$V(x) \geq 0 \quad \forall x \neq 0$

- منفی معین نامیده می‌شود اگر $-V(x)$ مثبت معین باشد

N.D.

- نامعین نامیده می‌شود اگر نه مثبت نیمه معین باشد و نه منفی نیمه معین.

مثال:

$V(x) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow$ در $(0,0)$ صفر است و در باقی نقاط مثبت است $\rightarrow$ P.D.

$V(x) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{1+x_1^2} \rightarrow$ P.D.

$V(x) = x_1^2 + x_2 \rightarrow$ حوالی $(0,0)$ را بررسی کنیم

$x_1 = 0 ,\ x_2 = 0.1 \Rightarrow V(x) > 0$

$x_1 = 0 ,\ x_2 = -0.1 \Rightarrow V(x) < 0$

$\Rightarrow$ نامعین است

$V(x) = (x_1 + x_2)^2 \rightarrow V(x) \geq 0$

$\left.\begin{array}{l} \forall x_1 \Rightarrow x_2 = -x_1 \Rightarrow V(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ P.S.D.

$V(x) = -x_1^2 - (x_1 + x_2)^2 \rightarrow$ N.D.

قضیه لیاپانوف یک شرط کافی است. یعنی اگر با انتخاب یک تابع V نرسیدیم به اینکه $\dot V<0$ نمی‌توانیم بگوییم حتما پایدار مجانبی نیست چه‌بسا یک V دیگر بشود ($\dot V<0$)

عکس قضیه هم وجود دارد. یعنی اگر نقطه تعادل پایدار مجانبی باشد حتما یک V ای وجود دارد که مشتقش منفی است.

Subject:
Date

ادامه قضیه لیاپانوف

پیوسته

برای $\dot x = f(x)$

که $f(0)=0$ ← نقطه مبدا است

و یک تابع مثبت معین $V(x)$ وجود دارد که

- $\dot V(x)<0 \;:\; x\neq 0$ در نتیجه $x=0$ پایدار مجانبی است
- $\dot V(x)\leq 0 \;:\;$ " " " پایدار لیاپانوف است
- $\dot V(x)\leq 0$ و $\dot V(\varphi(t_0,x_0,t))$ که $x_0\neq 0$ به صورت متحد با صفر نیست، در این صورت $x=0$ پایدار مجانبی است

گسسته

برای $x(k+1) = f(x(k))$

که $f(0)=0$ است

و یک تابع مثبت معین $V(x)$ وجود دارد که

$\Delta V(x) = V(x(k+1)) - V(x(k))$

- $\Delta V<0$ در نتیجه $x=0$ پایدار مجانبی است
- $\Delta V\leq 0$ " " " لیاپانوف است
- $\Delta V\leq 0$ و $\Delta V(\varphi(k_0,x_0,k))$ که $x_0\neq 0$ به صورت متحد با صفر نیست، در این صورت $x=0$ پایدار مجانبی است

قضیه لیاپانوف برای سیستم LTI

$$x(k+1) = Gx(k)$$

$$V(x(k)) = x^T(k)Px(k) \quad (\text{ماتریس مثبت معین } P>0)$$

$$\Delta V = V(x(k+1)) - V(x(k)) = x(k+1)^T P x(k+1) - x^T(k)Px(k)$$

$$= x^T(k)G^TPGx(k) - x^T(k)Px(k) = x^T(k)\big[\underbrace{G^TPG-P}_{-Q}\big]x(k)$$

$$\Rightarrow \Delta V = -x^T(k)Qx(k) \longrightarrow$$ اگر Q مثبت معین باشد $\longrightarrow$ پایدار مجانبی

PAPCO

Subject:
Date

اگر معادله

$$\boxed{G^T P G - P = -Q}$$

برای یک ماتریس $Q>0$ یک پاسخ مثبت معین مانند P داشته باشد آنگاه دستگاه

پایدار مجانبی است

یادآوری: در سیستم پیوسته معادله لیاپانوف بصورت زیر بدست آمد:

$\dot{x} = Ax$

$PA + A^T P = -Q$

مثال:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

معادله لیاپانوف را تشکیل می‌دهیم:

$$G^T P G - P = -Q \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نکته ۱: ماتریس Q را باید یک ماتریس مثبت معین در نظر بگیریم که معمولاً برای سادگی، Q را بصورت یک ماتریس همانی در نظر میگیریم.

نکته ۲: ماتریس P یک ماتریس متقارن خواهد بود. لذا، $P_{21} = P_{12}$

Subject:
Date

۳ معادله ۳ مجهول ← ۳ تا P بدست می‌آید

با حل معادله لیاپانوف به جواب زیر می‌رسیم:

$$P=\begin{bmatrix} \frac{11}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{24}{5} \end{bmatrix} \rightarrow P.D. \quad \text{یعنی } P>0$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{11}{5}>0 \\ |P|>0 \end{array}\right\} \Rightarrow P>0$$

لذا پایداری مجانبی در مبدا است.

برای تعیین علامت P می‌توانیم دترمینان کهادهای اصلی مقدم را چک کنیم.

اگر دترمینان‌های مذکور مثبت باشند، ماتریس P مثبت معین است.

$$\begin{array}{cccc} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \cdots \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & \cdots \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & \cdots \end{array}$$

$$P_{11}>0$$

$$\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{vmatrix}>0$$

$$\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{vmatrix}>0$$

$\vdots$

✓ بنابراین توانستیم با ماتریس مثبت معین $Q=I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ پایداری مجانبی این سیستم را احراز کنیم یعنی این سیستم زمان گسسته پس از مدتی به مبدا نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود.

✓ حال اگر Q را مثبت نیمه معین در نظر بگیریم یعنی:

$$Q=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{حل معادله لیاپانوف}} P=\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{12}{5} \end{bmatrix} > 0$$

$$V=x^T(k)\,P\,x(k) \xrightarrow{\text{چون P مثبت معین است}} V>0$$

$$\Delta V=-x^T(k)\,Q\,x(k)=-x_2^2(k)\leq 0$$

بنابراین ΔV منفی شد
منفی یا برابر صفر می‌شود

PAPCO

Subject:
Date

باید ببینیم که ΔV کجاها متحد با صفر می‌شود

از یک جا به بعد برای هر k ای

با توجه به معادلات سیستم

$$\Delta V = 0 \Rightarrow \underbrace{x_2(k) = 0}_{} \Rightarrow x_1(k+1) = 0$$

بنابراین در مبدا ΔV برابر با صفر خواهد بود و در خارج از مبدا ΔV نمی‌تواند متحد با صفر شود

لذا با اینکه $\Delta V \leqslant 0$ شد اما باز می‌توانیم نتیجه بگیریم که این سیستم پایدار مجانبی به صفر است

PAPCO

Subject:
Date ۱۴۰۳/۰۳/۱۹

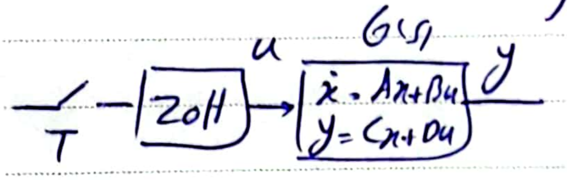
مرور فیلم ۲

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

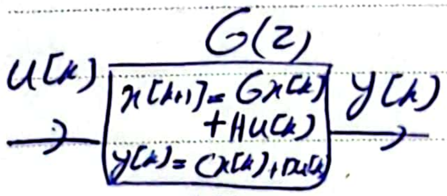
$$x[k+1] = Gx[k] + Hu[k]$$

$$x[k] = G^{k-k_0} x[k_0] + \sum_{j=k_0}^{k-1} G^{k-1-j} H u[j]$$



$$u(t) = u(kT) \qquad kT \leq t \leq (k+1)T$$

گسسته سازی



$$G(z) = Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s} G(s)\right\}$$

$$\begin{cases} G = e^{AT} \\ H = \int_0^T e^{A\eta} B \, d\eta \end{cases}$$

$$\begin{cases} G(s) = \dfrac{e^{-3s}}{s(s+1)} \\ T = 1 \\ G(s) = \dfrac{e^{-1.5s}}{s(s+1)} \\ T = 1 \end{cases}$$

$$Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{e^{-1.5s}}{s(s+1)}\right\} = ?$$

$$T = 1$$

PAPCO

Subject:
Date

پایداری به مفهوم لیاپانوف مربوط به پاسخ ورودی صفر است (پاسخ ناشی از شرایط اولیه)

$x[k+1] = Gx[k]$

$x_e = Gx_e \rightarrow x_e - Gx_e = 0 \rightarrow (I-G)x_e = 0$

مبدا ($x_e=0$) نقطه تعادل یکتای سیستم فوق است اگر $I-G$ معکوس پذیر باشد

$x_e = 0$ مبدا نقطه تعادل پایدار به مفهوم لیاپانوف برای $x[k+1] = Gx[k]$ است اگر

نقطه تعادل

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \|x[k_0] - 0\| < \delta$

$\|x[k] - 0\| < \varepsilon \qquad \forall k \geq k_0$

نقطه تعادل

مجانبی است اگر پایدار لیاپانوف باشد و

$\lim_{k \to \infty} x[k] = 0$ نقطه تعادل ما

تابع انرژی

$V(x) \Longrightarrow$ مثبت معین حول ($x=0$ نقطه تعادل)

$$\begin{cases} V(0) = 0 \\ V(x) > 0 \quad x \neq 0 \\ \dot{V}(x) = \dfrac{dV}{dt} < 0 \end{cases}$$

برای گسسته: $\Delta V = V[k+1] - V[k] < 0$ پایدار مجانبی (یعنی به سمت نقطه تعادل می‌رسیم)

$\Delta V = V[k+1] - V[k] \leq 0$

PAPCO

پایدار لیاپانوف (دور نمی‌شود از او جایی که شروع به حرکت کرده)

Subject:
Date

$\Delta V \leq 0 + \text{La Salle} =$ 　　 $x[k]$ برای همه‌ی زمان‌ها داخل مجموعه $\{x \mid \Delta V = 0\} - \{0\}$

باقی نماند ← پایدار مجانبی

مثال:

$$x_1[k+1] = x_1[k] + x_2[k]$$
$$x_2[k+1] = 0{,}5\, x_2[k] - 0{,}5\, x_1[k]$$

نقاط تعادل:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{1e} &= x_{1e} + x_{2e} \\ x_{2e} &= 0{,}5x_{2e} - 0{,}5x_{1e} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_{2e} &= 0 \\ x_{1e} &= 0 \end{aligned}$$

تابع لیاپانوف را به صورت

$$V(x) = x_1^2[k] + x_2^2[k]$$

$$V[k+1] = V(x[k+1])$$

$$\Delta V = V[k+1] - V[k] = x_1^2[k+1] + x_2^2[k+1] - x_1^2[k] + (-x_2^2[k])$$

$$= (x_1[k] + x_2[k])^2 + (0{,}5x_2[k] - 0{,}5x_1[k])^2 - x_1^2[k] - x_2^2[k]$$

$$= \cancel{x_1^2} + \cancel{x_2^2} + 2x_1x_2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{4}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1x_2 - \cancel{x_1^2} - \cancel{x_2^2}$$

$$= \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2) = \frac{1}{4}\left((x_1 + 3x_2)^2 - 8x_2^2\right)$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ 　　 علامتش را به صورت ماتریس هم ترانهاده تعیین کنیم.

↓

نامعین علامت

Subject:
Date

همچنین با ذکر مثال هم می توانیم نشان دهیم که حوالی مبدا علامت آن تغییر می کند

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} & \Delta V < 0 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \Delta V > 0 \end{cases}$$

یادآوری .
$$a x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_2^2 = [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x^T P x > 0 \Leftrightarrow P > 0$$

حالت کلی سیستم های خطی

$$x[k+1] = G x[k]$$

$$V = x^T P x$$

$$\Delta V = V[k+1] - V[k] = x[k+1]^T P x[k+1] - x[k]^T P x[k]$$

$$\Delta V = (x^T[k] G^T) P (G x[k]) - x[k]^T P x[k]$$

$$= x[k]^T \underbrace{[G^T P G - P]}_{-Q} x[k] = -x[k]^T Q x[k]$$

$$(Q > 0)$$

اگر معادله $G^T P G - P = -Q$ برای $Q > 0$ یک جواب مثبت معین مانند $P > 0$ داشته باشد آنگاه $x[k+1] = G x[k]$ پایدار مجانبی است

Subject:
Date

$$G=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -0.5 & 0.5\end{bmatrix}\qquad Q=I$$

$$\begin{bmatrix}1 & -0.5\\ 1 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1 & P_2\\ P_2 & P_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -0.5 & 0.5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}P_1 & P_2\\ P_2 & P_3\end{bmatrix}$$

$$=-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}P_1-0.5P_2 & P_2-0.5P_3\\ P_1+0.5P_2 & P_2+0.5P_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -0.5 & 0.5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}P_1 & P_2\\ P_2 & P_3\end{bmatrix}$$

$$=-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-P_2+\frac{1}{4}P_3=-1\\ P_1-\frac{1}{4}P_3-P_2=0\\ P_1+\frac{1}{2}P_2-\frac{3}{4}P_3=-1\end{cases}$$

این دستگاه معادلات جواب ندارد.

دلیل: مقادیر ویژه G خارج از دایره واحد است.

$$\lambda_{1,2}(G)=0.75\pm0.66j$$

$$x[k+1]=Gx[k]$$

$$G^TPG-P=-Q\qquad \begin{matrix}P>0\\ Q>0\end{matrix}\ \Leftrightarrow\ |\lambda_i(G)|<1$$

پایدار مجانبی

PAPCO

Subject:
Date

$$|\lambda_i(G)| \leq 1 \iff \begin{matrix} P > 0 \\ Q \geq 0 \end{matrix} \qquad G^T P G - P = -Q$$

پایداری لیاپانوف

$$x[k+1] = G x[k]$$

ناپایدار است
$$\begin{cases} P > 0 \\ Q < 0 \end{cases} , \quad G^T P G - P = -Q$$

$$\Downarrow$$

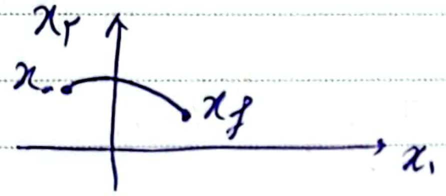
$$\exists \lambda_i(G) \ \text{s.t.} \ |\lambda_i| > 1$$

for $G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$ $\quad \lambda_i(G) = \begin{cases} 0.5 \\ 0 \end{cases}$ $\quad Q = I$

$$P = \begin{bmatrix} 2.667 & 1.667 \\ 1.667 & 2.667 \end{bmatrix} \qquad Q = I$$

$$\ast\begin{cases} x[k+1] = Gx[k] + Hu[k] \\ y[k] = Cx[k] + Du[k] \end{cases}$$

سیستم فوق کنترل پذیر حالت است اگر $u[k]$ با تعداد محدودی جمله وجود داشته باشند بنحوی که از هر حالت اولیه x_0 به هر حالت نهایی x_f طی n گام رسید



سیستم فوق رویت پذیر حالت است اگر $x[0]$ را بتوان از روی تعدادی از زوج های $u[k]$ محاسبه نمود.

کنترل پذیری:

$$x[n] = G^n x[0] + G^{n-1} H u[0] + G^{n-2} H u[1] + \dots + H u[n-1]$$

$$H u[n-1] + GH u[n-2] + \dots + G^{n-1} H u[0] = x[n] - G^n x[0]$$

$$\begin{bmatrix} H & GH & \dots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u[n-1] \\ u[n-2] \\ \vdots \\ u[0] \end{bmatrix} = x[n] - G^n x[0]$$

سیستم کنترل پذیر حالت است اگر و تنها اگر ماتریس کنترل پذیری

$$M = \begin{bmatrix} H & GH & \dots & G^{n-1}H \end{bmatrix}$$

دارای رتبه کامل سطری باشد (اگر مربعی است معکوس پذیر باشد)

Subject:
Date

رویت پذیری،

$$x[k+1] = Gx[k] + Hu[k]$$
$$y[k] = Cx[k] + Du[k]$$

$$y[0] = Cx[0] + Du[0]$$
$$y[1] = Cx[1] = CGx[0] + Du[1] + CGDu[0] + CHu[0]$$
$$\vdots$$
$$y[n-1] = CG^{n-1}x[0] + Du[n-1] + \dots + CG^{n-1}Du[0]$$

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \vdots \\ y[n-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix} x[0] - \begin{bmatrix} Du[0] \\ Du[1] + CGDu[0] + CHu[0] \\ \vdots \end{bmatrix}$$

* سیستم رویت پذیر حالت است اگر ماتریس رویت پذیری دارای رتبه کامل ستونی باشد (اگر مربعی است معکوس پذیر باشند)

$$\boxed{N \triangleq \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix}}$$

* زوج (G, H) کنترل پذیر هستند اگر و تنها اگر G^T و H^T رویت پذیر باشند

طراحی کنترل کننده از طریق فیدبک حالت:

با جابجایی قطب:

$$G(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}}$$

مثال:

$$x[k+1]=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & & \cdots & -a_1\end{bmatrix}x[k]+\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}u[k]$$

$-\hat{a}_n \quad -\hat{a}_{n-1} \quad \cdots \quad -\hat{a}_1$

$\left\{ z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n=0 \right.$ ریشه‌های این چند جمله‌ای $\Big\} = \Big\{$ قطب‌های سیستم $\Big\}$

$= \Big\{$ مقادیر ویژه ماتریس G $\Big\}$

چند جمله‌ای مربوط به محل قطب‌ها مطلوب

$$z^n+\hat{a}_1z^{n-1}+\cdots+\hat{a}_n=0$$

مثلاً اگر قطب‌های مطلوب را با $\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}$ باشد:

$$\left(z-\tfrac{1}{2}\right)\left(z+\tfrac{1}{2}\right)=z^2+0z-\tfrac{1}{4}$$

اگر $u[k]$ را به صورت زیر در نظر بگیریم

$$u[k]=(a_n-\hat{a}_n)x_1[k]+(a_{n-1}-\hat{a}_{n-1})x_2[k]+\cdots+(a_1-\hat{a}_1)x_n[k]$$

$$=-(\hat{a}-a)x[k]$$

تبدیل به فرم کانونیکال کنترل‌پذیری

$$x[k+1]=Gx[k]+Hu[k]$$

$$\tilde{x}[k]=T^{-1}x[k]$$

Subject:
Date

$$\tilde{x}[k+1] = T^{-1}x[k+1] = T^{-1}\left(Gx[k] + Hu[k]\right)$$

$$= \underbrace{T^{-1}GT}_{\tilde{G}}\,\tilde{x}[k] + \underbrace{T^{-1}H}_{\tilde{H}}\,u[k]$$

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_n & \cdots & \cdots & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \qquad \tilde{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T\underset{\substack{\downarrow \\ e_n}}{\tilde{H}} = H$$ ستون آخر T برابر با H است

$$GT = T\tilde{G}$$

GT ستون آخر $= GH = T_{n-1} - a_1 H$

$T\tilde{G}$ ستون آخر $= T(e_{n-1} - a_1 e_n) = T_{n-1} - a_1 H$.

$A\,e_i =$ ستون iام A

$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$ iام

ستون iام $A[B_1\ B_2\ \cdots\ B_n]$ برابر با AB_i

$$T = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} G^{n-1}H + a_1 G^{n-2}H + \cdots + a_n H & \cdots & G^2H + a_1 GH + a_2 H & GH + a_1 H & H \end{array}\right]$$

PAPCO

Subject:
Date

$$T = \underbrace{\left[\, H \;\middle|\; GH \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; G^{n-1}H \,\right]}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & \vdots & & 1 & \\ \vdots & \vdots & 1 & & \\ a_1 & 1 & & & 0 \\ 1 & & & & \end{bmatrix}}_{W}$$

$$T = M \times W$$

حتما معکوس پذیر است

طراحی کنترل کننده با فیدبک حالت

$$x[k+1] = Gx[k] + Hu[k] \qquad T = MW$$

$$\tilde{x}[k] \triangleq T^{-1}x[k]$$

$$\tilde{x}[k+1] = T^{-1}GT\tilde{x}[k] + T^{-1}Hu[k]$$

$$u[k] = -(\hat{a} - a)\tilde{x}[k]$$

a ← ضرایب چندجمله‌ای مشخصه حلقه باز

$\hat{a}$ ← ضرایب مطلوب

$$u[k] = -(\hat{a} - a)T^{-1}x[k]$$

اگر $\hat{a}$ را برابر $[0, 0, \ldots, 0]$ قرار دهیم همه قطب های G روی مبدا خواهد افتاد یعنی , $z^n = 0$

کنترل کننده deadbeat

$$\tilde{x}[k+1] = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{G} \tilde{x}[k]$$

پوچ توان است ← G

$$G^n = 0_{n \times n}$$

$$G' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & & & & 1 \end{bmatrix}$$

PAPCO

Subject:
Date

طراحی رویت گر :

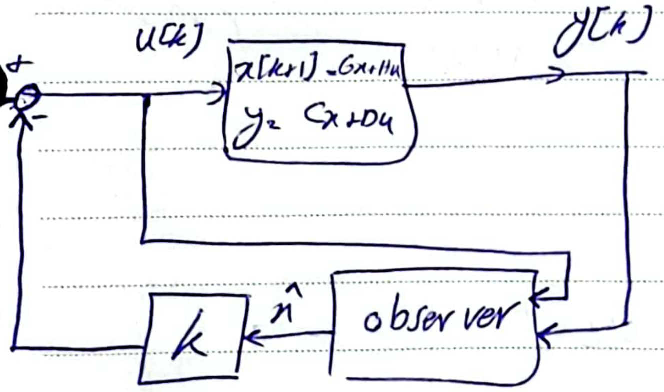
ما فقط به خروجی دسترسی داریم و نه استیت ها

دنبال تخمین از استیت ها هستیم.

$$x[k+1] = Gx[k] + Hu[k]$$

$$y[k] = Cx[k] + Du[k]$$

$$\hat{x}[k+1]$$



طراحی رویت گر :

$$\hat{x}[k+1] = G\hat{x}[k] + Hu[k] + L\left(y[k] - \hat{y}[k]\right)$$

$$\hat{y}[k] = C\hat{x}[k] + Du[k]$$

ترم خطا را تشکیل می دهیم

$$e[k] \triangleq x[k] - \hat{x}[k]$$

$$\rightarrow e[k+1] = x[k+1] - \hat{x}[k+1]$$

$$\rightarrow e[k+1] = Gx[k] + \cancel{Hu[k]} - \Big\{ G\hat{x}[k] + \cancel{Hu[k]} + L\big(Cx[k] + \cancel{Du[k]} - C\hat{x}[k] - \cancel{Du[k]}\big) \Big\}$$

$$\rightarrow e[k+1] = Ge[k] + LCe[k]$$

$$e[k+1] = \underbrace{(G+LC)}_{\text{مقادیر ویژه داخل دایره واحد}} e[k]$$

PAPCO

Subject:
Date

محل قطب های $G+LC$ = محل قطب های $(G+LC)^T = G^T + C^T L^T$

مقادیر ویژه $G+LC$

مقادیر ویژه $(G+LC)^T$

وقتی می توانیم مقادیر ویژه $\underbrace{G^T}_{G} + \underbrace{C^T}_{H}\underbrace{L^T}_{K}$ معادل است با را دلخواه تعیین کنیم که زوج G^T, C^T

کنترل پذیر باشد که معادل است با رویت پذیری زوج G, C

پایان

۱۴۰۳/۰۳/۲۱