



باسمه تعالی
سیستم‌های کنترل دیجیتال
امتحان پایان ترم

تاریخ برگزاری ۲۳ خرداد ۱۴۰۰



در سوالات پیش‌رو پارامترهای a, b, c و d مرتبط با شماره‌ی دانشجویی شما به صورت $81019abcd$ هستند.

۱. تابع تبدیل پالسی زیر را (به عنوان سیستم حلقه باز) در نظر بگیرید:

$$G(z) = K \frac{\alpha_0 z + \alpha_1}{z^2 + \beta_1 z + \beta_0}$$

که در آن

$$\alpha_0 = \frac{a+1}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{b+1}{2},$$
$$\beta_0 = \frac{c+1}{2}, \quad \beta_1 = \frac{d+1}{2}$$

بازه‌ی مقادیر K را بیابید به نحوی که سیستم حلقه بسته با فیدبک واحد قطب‌هایی داخل دایره‌ای به شعاع γ داشته باشد. γ برابر با ۲، ۵ و ۱۰ است، اگر باقیمانده c بر ۳ برابر با ۰، ۱ و ۲ باشد.

۲. معادل زمان گسسته‌ی فیلتر زمان پیوسته زیر را به روش‌های صفر و قطب تطبیق‌یافته و تغییر ناپذیری پاسخ ضربه به دست آورید:

$$G(s) = \frac{s+a}{s(s+b+1)}$$

۳. سیستم تعریف شده توسط معادله‌ی زیر را در نظر بگیرید

$$x(k+1) = Gx(k)$$

که در آن G یک ماتریس پایدار است (مقادیر ویژه‌ی آن داخل دایره واحد قرار دارند). نشان دهید برای یک ماتریس معین مثبت (یا نیمه معین مثبت) Q ، حاصل

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} x^T(k) Q x(k)$$

را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد

$$J = x^T(0) P x(0)$$

که P پاسخ معادله‌ی

$$P = Q + G^T P G$$

است.

۴. سیستم تعریف شده توسط معادله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$x(k+1) = Gx(k), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (۱)$$

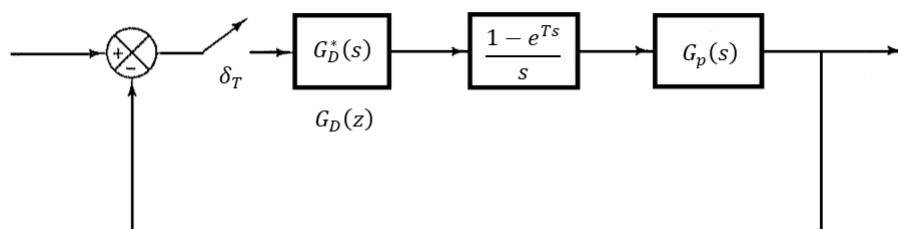
فرض کنید C یک ماتریس $m \times n$ است و $m < n$. اگر معادله

$$G^T P G - P = -C^T C$$

دارای یک پاسخ مثبت معین برای P باشد.

- در مورد نوع پایداری مبدا در سیستم (۱) چه می‌توان گفت؟
- اگر زوج (G, C) رویت پذیر باشند، در مورد نوع پایداری مبدا در سیستم (۱) چه می‌توان گفت؟

۵. سیستم شکل ۱ زیر را در نظر بگیرید. که در آن



شکل ۱:

$$G_p(s) = \frac{1}{s + \alpha}$$

و α برابر با ۱ به اضافه باقیمانده تقسیم d بر ۳ هست. دوره نمونه برداری T برابر با ۰.۱، ۰.۲ و ۰.۵ هست اگر باقیمانده c بر ۳ برابر با ۰، ۱ و ۲ باشد.

- برای این سیستم کنترل کننده $G_D(z)$ را به گونه‌ای طراحی کنید که خروجی سیستم پاسخ مرده نوش به ورودی پله واحد نشان دهد (یعنی زمان مستقر شدن حداقل ممکن باشد، خطای حالت دائمی برای ورودی پله صفر باشد و هم‌چنین پس از مستقر شدن، خروجی سیستم موجک‌های بین لحظه‌های نمونه برداری را نشان ندهد).
- با این کنترل کننده خطای حالت دائم برای ورودی شیب چقدر است؟