باسمه تعالی

سیستم‌های کنترل دیجیتال

امتحان پایان‌ترم

تاریخ برگزاری ۱۳ تیر ۱۴۰۳ - زمان امتحان: ۲ ساعت

۱. در شکل ۱ تابع تبدیل $G(z)$ به صورت زیر است:

$$G(z) = z^{-1} + z^{-2}$$

(آ) با فرض $G_D(z) = k > 0$، مکان هندسی ریشه‌ها ($1 + kG(z) = 0$) را رسم کنید. وضعیت پایداری سیستم حلقه بسته را با افزایش k از صفر تا بی‌نهایت مشخص کنید.

تابع تبدیل به صورت

$$G(z) = k\frac{z+1}{z^2}$$

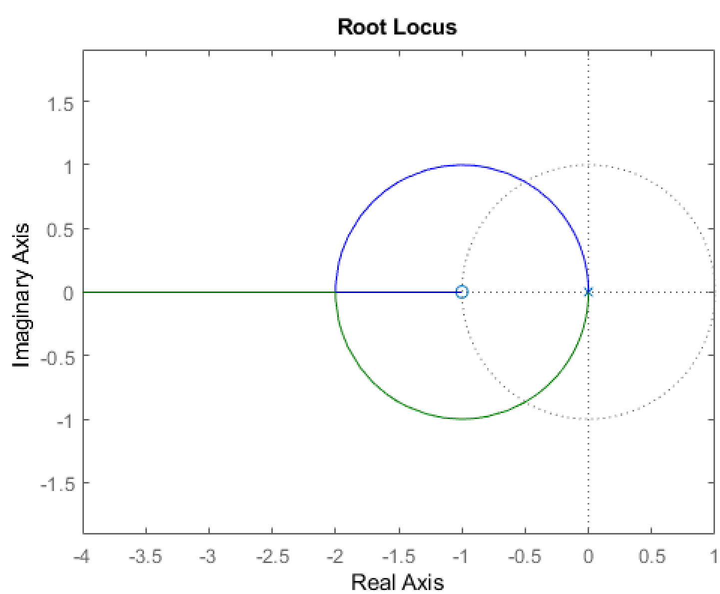
دو قطب در مبدا و یک صفر در $z = -1$ ، محل مکان ریشه روی محور حقیقی: سمت چپ $z = -1$، تعداد مجانب‌ها: یک، زاویه مجانب: π. نقطه شکست:

$$N'D - D'N = 0 \Rightarrow \; z^2 - 2z(z+1) = 0 \; \Rightarrow \; -z^2 - 2z = 0 \; \Rightarrow z = 0, -2$$

زاویه خروج از قطب:

$$n\bar{\theta} = -\sum \theta_i + \sum \phi_i (2l+1)\pi \; \Rightarrow \; 2\bar{\theta} = (2l+1)\pi \; \Rightarrow \bar{\theta} = \pm\frac{pi}{2}$$

بنابراین



با تغییر k از صفر تا $+\infty$ قطب‌های سیستم حلقه بسته (مکان ریشه) از قطب‌های حلقه باز $z=0$ به سمت صفرهای حلقه باز $z=1$ و بی‌نهایت حرکت می‌کنند. بنابراین با تغییر k ابتدا سیستم حلقه بسته پایدار $(0<k<1)$ و سپس سیستم حلقه بسته ناپایدار $k>1$ می‌شود.

(ب) یک کنترل کننده PI طراحی کنید که خطای حالت ماندگار به ورودی پله صفر شود و تا حد ممکن پاسخ سریع باشد و فراجهش نداشته باشد.

کنترل‌کننده PI را می‌توان به صورت

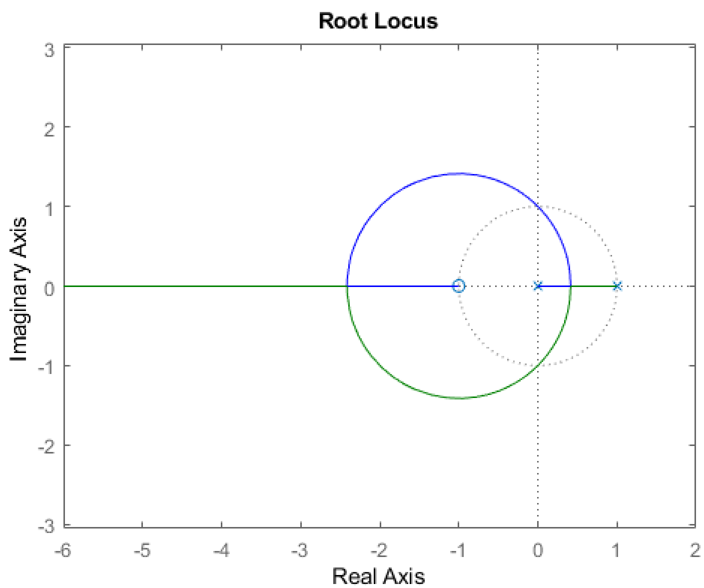
$$G_c(z) = k\frac{z+a}{z-1}$$

نوشت.

اگر صفر را در مبدا قرار دهیم (می‌توان بررسی کرد که در غیر این صورت پاسخ بهتری به دست نمی‌آید) ترکیب کنترل کننده و پلنت به صورت

$$G_c(z)G(z) = k\frac{z+1}{z(z-1)}$$

و مکان ریشه به صورت شکل زیر در می‌آید.

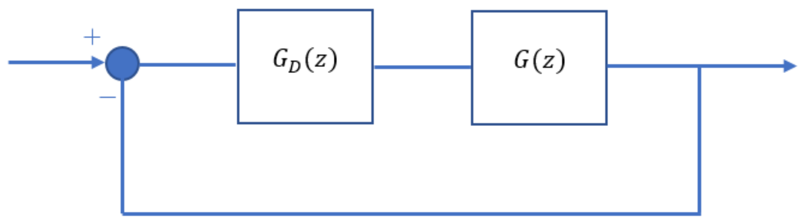


برای آنکه فراجهش نداشته باشیم کافی است قطب‌های سیستم حلقه بسته روی محور حقیقی مثبت داخل دایره واحد باشند. برای پاسخ سریع‌تر باید به مبدا نزدیک‌تر باشند. در این شکل هنگامی هر دوقطب این ویژگی را دارند که روی نقطه شکست داخل دایره قرار بگیرند. محاسبه نقطه شکست:

$$z(z-1)-(2z-1)(z+1)=0 \Rightarrow z=-1\pm\sqrt{2}$$

محاسبه k از شرط اندازه برای آنکه قطب‌های حلقه بسته در $-1+\sqrt{2}$ قرار بگیرند:

$$k=\frac{(-1+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$$



شکل ۱: بلوک دیاگرام یک سیستم کنترلی

۲. در شکل ۱ تابع تبدیل $G(z)$ به صورت زیر است:

$$G(z)=k\frac{z+b}{z(z+a)},\quad k>0,\quad |a|<1,\quad |b|>1$$

(آ) کنترل کننده $G_D(z)$ را به نحوی طراحی کنید که پاسخ سیستم برای ورودی پله در کمترین زمان ممکن به مقدار نهایی برسد و خطای حالت ماندگار صفر باشد (مرده نوش طراحی کنید).

$$F(z)=f_1z^{-1}+f_2z^{-2}$$

(با توجه به صفر ناپایدار، مرتبه ۱ جواب نمی‌دهد). یک صفر ناپایدار داریم و ورودی پله است، پس:

$$\begin{matrix} F(z)=(1+bz^{-1})(f_1z^{-1}) \\ 1-F(z)=(1-z^{-1})(1+n_1z^{-1}) \end{matrix} \rightarrow \quad \begin{matrix} f_2=bf_1, \\ -f_1=n_1-1, \\ -f_2=-n_1 \end{matrix} \Rightarrow \quad f_1=\frac{1}{1+b}, f_2=\frac{b}{1+b}$$

بنابراین(با فرض $b>1$)

$$G_c(z)=\frac{1+z^{-1}a}{k(1+b-z^{-1}-bz^{-2})}$$

(ب) اگر $G(z)$ از گسسته سازی یک تابع تبدیل پیوسته آمده باشد، در مورد تغییرات پاسخ بین لحظات نمونه برداری پس از رسیدن پاسخ گسسته به مقدار نهایی، چه می‌توان گفت؟

تبدیل z سیگنال u را حساب می‌کنیم:

$$U(z)=\frac{F(z)}{G(z)}R(z)=\frac{1}{1+b}\frac{(1+az^{-1})}{k}\frac{1}{1-z^{-1}}$$

بنابراین:

$$(1-z^{-1})(u_0+u_1z^{-1}+u_2z^{-2})=\frac{1}{k(1+b)}(1+az^{-1})\Rightarrow$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned}
u_0 &= \frac{1}{k(1+b)} \\
u_1 - u_0 &= \frac{a}{k(1+b)} \\
u_2 - u_1 &= 0 \\
u_{i+1} - u_i &= 0, \quad i = 2, 3, ...
\end{aligned}$$

پس از دو گام مقدار u_i ثابت می‌شود بنابراین بین لحظات نمونه برداری موجک نداریم.

(ج) یک نمایش فضای حالت برای سیستم حلقه بسته (با کنترل کننده بند آ) بنویسید.
تابع تبدیل سیستم حلقه بسته برابر

$$F(z) = \frac{1}{1+b} z^{-1} + \frac{b}{1+b} z^{-2}$$

است. بنابراین نمایش کانونیکال کنترل‌پذیری:

$$\begin{aligned} x[k+1] &= Gx[k] + Hu[k] \\ y[k] &= Cx[k] + Du[k], \end{aligned} \; G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; H = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \frac{b}{1+b} & \frac{1}{1+b} \end{bmatrix}, \; D = 0$$

۳. $kG(z)$ در مسیر مستقیم یک حلقه کنترلی با فیدبک واحد منفی قرار دارد. $H(w)$ از جایگذاری $\frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}$ به جای z در $G(z)$ به دست آمده است، یعنی:

$$H(w) \triangleq G(z)|_{z=\frac{2+Tw}{2-Tw}}$$

نمودار نایکوئیست $H(j\nu)$ در شکل ۲ مشخص شده است. $G(z)$ قطبی خارج از دایره واحد ندارد.

(آ) برای $1 \le k \le 3$ تعداد قطب‌های داخل و خارج از دایره واحد سیستم حلقه بسته را مشخص کنید.

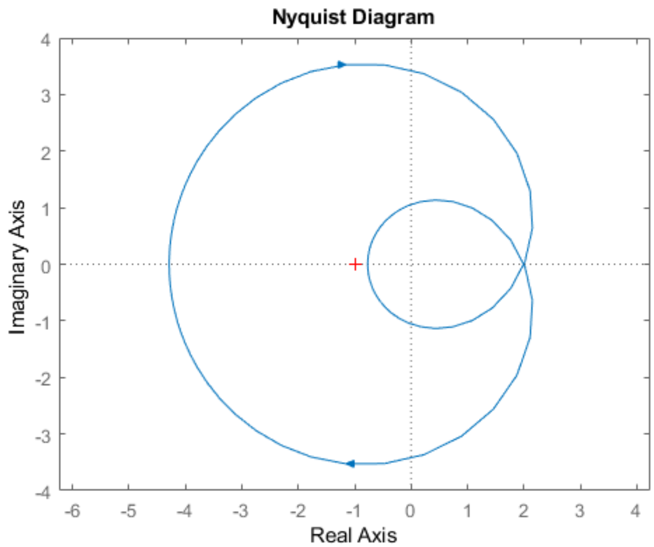
(ب) بازه (تقریبی) k های منفی که سیستم حلقه بسته پایدار است را مشخص نمایید.

می‌دانیم هرگاه رابطه $\nu = \frac{2}{T}\tan(\frac{\Omega T}{2})$ برقرار باشد آنگاه $H(j\nu) = G(e^{j\Omega T})$ برقرار است. با تغییر ν از 0 تا ∞ مقدار Ω از 0 تا π تغییر می‌کند و $e^{j\Omega T}$ روی دایره واحد نیمه بالایی را در خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌پیماید. بنابراین، نمودار نایکوئیست $H(j\nu)$ و نمودار نایکوئیست $G(e^{j\Omega T})$ یک شکل هستند. بنابراین طبق قضیه نایکوئیست، از آن‌جایی که برای $1 \le k < \frac{1}{0.8}$ (تقریبی) ، $N = 1$ است و چون G قطبی خارج از دایره واحد ندارد $P = 0$، نتیجه می‌شود $Z = N + P = 1$ یعنی سیستم حلقه بسته ۱ قطب خارج از دایره واحد دارد. به همین صورت، برای $\frac{1}{0.8} < k$ سیستم حلقه بسته ۲ قطب خارج از دایره واحد دارد.

برای $k < 0$ نمودار نایکوئیست قرینه می‌شود. از روی شکل مشخص می‌شود $|k| < \frac{1}{2}$ (تقریبی) سیستم حلقه بسته پایدار خواهد بود. بنابراین $-\frac{1}{2} < k < 0$ سیستم حلقه بسته پایدار است.

۴. سیستم غیرخطی زمان گسسته زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
x_1[k+1] &= x_1[k] + x_2[k] \\
x_2[k+1] &= -x_1[k] + x_1^3[k] - x_2[k] + u[k]
\end{aligned}$$



شکل ۲: نمودار نایکوئیست

(آ) با فرض $u[k] = 0$ نقاط تعادل این سیستم را مشخص کنید.

محاسبه نقطه تعادل:

$$\begin{aligned} x_{1e} &= x_{1e} + x_{2e} \\ x_{2e} &= -x_{1e} + x_{1e}^3 - x_{2e} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} & x_{2e} = 0 \\ & -x_{1e} + x_{1e}^3 = 0, \ \Rightarrow x_{1e} = 0, -1, 1 \end{aligned}$$

پس نقاط تعادل برابرند با:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(ب) سیستم را حول $u = 0$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ خطی کنید.

$$G = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 + 3x_1^2 & -1 \end{bmatrix} \Bigg|_{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad H = \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

و

$$x[k+1] = Gx[k] + Hu[k]$$

(ج) کنترل‌پذیری سیستم خطی شده را بررسی کنید.

$$M = [H \quad GH] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ماتریس کنترل‌پذیری معکوس‌پذیر است پس سیستم کنترل‌پذیر است.

(د) با فرض ورودی صفر، پایداری سیستم خطی شده را بررسی کنید.

پایداری سیستم را از محل مقادیر ویژه G یا پاسخ معادله لیاپانوف بررسی کرد. هر دو مقادیر ویژه G صفر و داخل دایره واحد است پس سیستم پایدار مجانبی است. معادله لیاپانوف

$$G^T P G - P = -I$$

پاسخی به صورت

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

که مثبت معین است. بنابراین سیستم پایدار مجانبی است.