باسمه تعالی

سیستم‌های کنترل دیجیتال

امتحان میان‌ترم

تاریخ برگزاری ۶ اردیبهشت ۱۴۰۳ - زمان امتحان: ۲ ساعت

---

۱. دنباله اعداد فیبوناچی را می‌توان به صورت رابطه بازگشتی زیر معرفی کرد:

$$f[k+2] = f[k+1] + f[k], \qquad f[1] = 1, f[0] = 0$$

با استفاده از تبدیل z جمله kام این دنباله را برای $k > 1$ بیابید. ناحیه همگرایی تبدیل z دنباله $f[k]$ را مشخص کنید.

با استفاده از تبدیل z:

$$z^2F(z) - z^2f[0] - zf[1] = zF(z) - zf[0] \; + \; F(z)$$

در نتیجه:

$$F(z) = \frac{z}{z^2 - z - 1}$$

برای استفاده از عکس تبدیل z:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z^2 - z - 1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{z - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{z - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

بنابراین:

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{z}{z - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{z}{z - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

با توجه $\mathcal{Z}\{a^k u[k]\} = \frac{z}{z-a}$ نتیجه می‌شود:

$$f[k] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k, \qquad k \geq 0$$

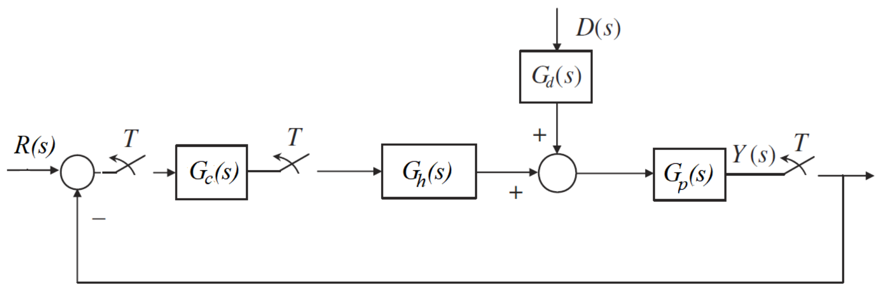
تابع تبدیل $F(z)$ دارای دوقطب در $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ است. می‌دانیم ناحیه همگرایی هیچ‌کدام از قطب‌ها را نباید در بگیرد. همچنین دنباله $f[k]$ یک دنباله سمت‌راستی محاسبه شده است، پس ناحیه همگرایی خارج از یک دایره خواهد بود. بنابراین:

$$\mathrm{ROC} = \{|z| > \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\}$$

۲. سیستم شکل ۱ را در نظر بگیرید. ورودی مرجع در این سوال صفر است.

(آ) $Y^*(s)$ را بر حسب توابع تبدیل موجود در شکل و اغتشاش $D(s)$ بنویسید.

$$Y(s) = G_p(s)\left[G_d(s)D(s) + G_h(s)X^*(s)\right]$$
$$X(s) = G_c(s)\left[-Y^*(s)\right]^* \quad \Rightarrow \quad X^*(s) = -G_c^*(s)Y^{**}(s) = -G_c^*(s)Y^*(s)$$



شکل ۱: بلوک دیاگرام یک سیسم زمان گسسته

بنابراین:

$$\begin{aligned} Y^*(s) &= [G_p(s)G_d(s)D(s)]^* + [G_p(s)G_h(s)]^* X^*(s) \\ &= [G_p(s)G_d(s)D(s)]^* - [G_p(s)G_h(s)]^* G_c^*(s)Y^*(s) \end{aligned}$$

و در نتیجه:

$$Y^*(s) = \frac{[G_p(s)G_d(s)D(s)]^*}{1 + [G_p(s)G_h(s)]^* G_c^*(s)}$$

(ب) رابطه‌ای برای تبدیل z سیگنال خروجی بر اساس اجزا موجود در شکل بیان کنید.

$$Y(z) = Y^*(s)|_{s=\frac{1}{T}\ln(z)}$$

$$Y(z) = \frac{G_pG_dD(z)}{1 + G_pG_h(z)Gc(z)}$$

که در آن:

$$G_pG_dD(z) = \mathcal{Z}\{G_p(s)G_d(s)D(s)\}, \quad G_pGh(z) = \mathcal{Z}\{G_p(s)G_h(s)\}, \quad G_c(z) = \mathcal{Z}\{G_c(s)\}$$

(ج) با فرض

$$G_c(s) = K_c, \quad G_h(s) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-sT}}{s}, \quad G_p(s) = \frac{K_p}{s+1}, \quad G_d(s) = \frac{1}{s}$$

اگر اغتشاش به صورت یک ضربه با دامنه A وارد شود و خروجی y کران‌دار باشد، مقدار نهایی خروجی را مشخص کنید.

در ادامه قسمت قبل و $D(s) = 1$:

$$\begin{aligned} G_pG_dD(z) &= \mathcal{Z}\{\frac{K_p}{s+1}\frac{1}{s}A\} = K_pA\mathcal{Z}\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\} = K_pA(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-T}z^{-1}}) \\ &= K_pA\frac{(1-\mathrm{e}^{-T})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-\mathrm{e}^{-T}z^{-1})} \\ G_pG_h(z) &= \mathcal{Z}\{G_p(s)G_h(s)\} = \mathcal{Z}\{\frac{K_p}{s+1}\frac{1-\mathrm{e}^{-Ts}}{s}\} = K_p(1-z^{-1})(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-T}z^{-1}}) \\ &= K_p\frac{(1-\mathrm{e}^{-T})z^{-1}}{1-\mathrm{e}^{-T}z^{-1}} \\ G_c(z) &= \mathcal{Z}\{G_c(s)\} = K_c \end{aligned}$$

بنابراین:

$$Y(z) = \frac{K_pA(1-\mathrm{e}^{-T})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-\mathrm{e}^{-T}z^{-1}) + K_cK_p(1-\mathrm{e}^{-T})z^{-1}(1-z^{-1})}$$

از قضیه مقدار نهایی(با توجه به کران‌داری y قطب‌های تبدیل z آن خارج از دایره واحد نیست بنابراین شرط قضیه برقرار است):

$$\lim_{k\to\infty} y[k] = \lim_{z\to1}(1-z^{-1})Y(z) = \lim_{z\to1}\frac{K_pA(1-\mathrm{e}^{-T})z^{-1}}{(1-\mathrm{e}^{-T}z^{-1}) + K_cK_p(1-\mathrm{e}^{-T})z^{-1}} = \frac{K_pA}{1+K_cK_p}$$

۳. در شکل ۱ تابع تبدیل از ورودی مرجع به خروجی (با فرض صفر بودن اغتشاش) به صورت زیر به دست آمده است:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)}$$

که در آن

$$G(z) = \frac{(T+\mathrm{e}^{-T}-1)z - T\mathrm{e}^{-T} - \mathrm{e}^{-T} + 1}{(z-\mathrm{e}^{-T})(z-1)}$$

است. بازه‌ای برای T معرفی کنید که سیستم حلقه بسته پایدار باشد. برای $T=4$ سیستم حلقه بسته پایدار است؟

معادله مشخصه سیستم حلقه بسته:

$$z^2 + (T-2)z - T\mathrm{e}^{-T} + 1 = 0$$

شرایط معیار پایدرای Jury ($a_0 = 1 > 0$):

- $|a_n| < a_0 \to |T\mathrm{e}^{-T} - 1| < 1 \to 0 < T\mathrm{e}^{-T} < 2$
- $P(1) > 0 \to T - T\mathrm{e}^{-T} > 0 \to \mathrm{e}^{-T} < 1 \to \checkmark$
- $P(-1) > 0 \to 4 - T - T\mathrm{e}^{-T} > 0 \to T + T\mathrm{e}^{-T} < 4$

شرط $0 < T\mathrm{e}^{-T} < 2$ با توجه به مثبت بودن T همواره برآورده می‌شود چون ماکزیمم این عبارت در

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}T\mathrm{e}^{-T} = \mathrm{e}^{-T} - T\mathrm{e}^{-T} = 0 \to T = 1$$

رخ می‌دهد و مقدار آن برابر $\exp(-1) \approx 0.3679$ است.

برای محاسبه تقریبی بازه T که در شرط $T + T\mathrm{e}^{-T} < 4$ صدق می‌کند، می‌توان به این صورت عمل کرد. اگر $T > 3$ باشد:

$$T + T\mathrm{e}^{-T} < T + T\mathrm{e}^{-3}$$

بنابراین اگر $T + T\mathrm{e}^{-3} < 4$ برقرار باشد شرط $T + T\mathrm{e}^{-T} < 4$ نیز برآورده می‌شود. پس:

$$T + T\mathrm{e}^{-3} < 4 \to T < \frac{4}{1+\exp(-3)} \approx \frac{4}{1+0.05} \approx 3.8$$

بنابراین بازه تقریبی برای پایداری به صورت $0 < T < 3.8$ به دست می‌آید. مقدار دقیق‌تر آن $0 < T < 3.922$ است.
با توجه به رابطه زیر برای $T=4$ سیستم حلقه بسته پایدار نیست.

$$4 + 4\exp(-4) > 4$$

۴. شکل ۲ خطوط ζثابت و ω_n ثابت در صفحه z نمایش می‌دهد.

(آ) محلی از صفحه z مشخص کنید که اگر قطب‌های غالب سیستم حلقه بسته در آن قرار داشته باشد، میزان فراجهش پاسخ پله سیستم حلقه بسته کمتر ۱۰ درصد خواهد بود.

$$\text{O.S.} < 10\% \Rightarrow \exp(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}) < 0.1 \Rightarrow \zeta > 0.5912 \approx 0.6 \Rightarrow$$ در شکل مشخص شده است.

(ب) سیستم حلقه بسته زمان گسسته‌ای صرفا یک قطب در $z = -0.75$ دارد. به صورت تقریبی فراجهش پاسخ پله این سیستم را مشخص نمایید. هم‌چنین اگر زمان بین دو نمونه از پاسخ برابر ۱ ثانیه باشد($T = 1$)، به صورت تقریبی زمان نشست پاسخ پله را مشخص کنید.

محل این قطب در شکل مشخص شده است(ستاره سبز رنگ). این محل تقریبا متناظر با خم $\zeta = 0.1$ است. بنابراین میزان فراجهش را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$M_p = \exp(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}})|_{\zeta=0.1} = 0.73$$

فاصله این قطب از مبدا برابر 0.75 است. بنابراین:

$$\exp(-\sigma T) = 0.75 \Rightarrow \sigma = \frac{\ln(0.75)}{-T} = 0.288$$

و زمان نشست (۲ درصد) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{0.288} \approx 13.9 \approx 14$$

(ج) تابع تبدیل

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

را در نظر بگیرید و معادل گسسته آن $G_D(z)$ را با استفاده از روش تفاضل معکوس به دست آورید.

تفاضل معکوس $s \to \frac{1-z^{-1}}{T}$ بنابراین:

$$G_D(z) = \frac{1}{(\frac{1-z^{-1}}{T})^2 + \frac{1-z^{-1}}{T} + 1} = \frac{T^2}{z^{-2} + (-2-T)z^{-1} + T^2 + T + 1}$$

(د) حداکثر فراجهش پاسخ پله $G(s)$ و $G_D(z)$ در بند قبل را مشخص نمایید. (به صورت تقریبی. در صورت لزوم می‌توانید از شکل ۲ استفاده کنید.)

ζ مربوط به قطب‌های $G(s)$ برابر 0.5 است. بنابراین فراجهش پاسخ پله تقریبا برابر 15% است.

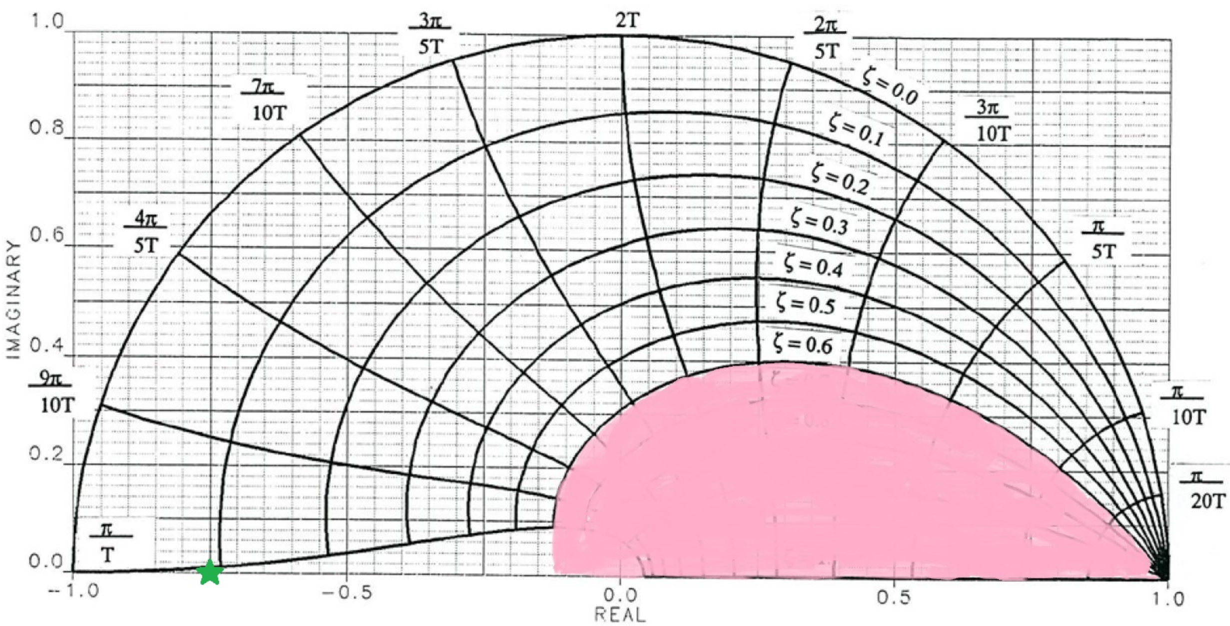
$$M_p = \exp(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}})|_{\zeta=0.5} = 0.164$$

با $T = 1$ معادله مشخصه قطب‌های G_D به صورت زیر به دست می‌آید:

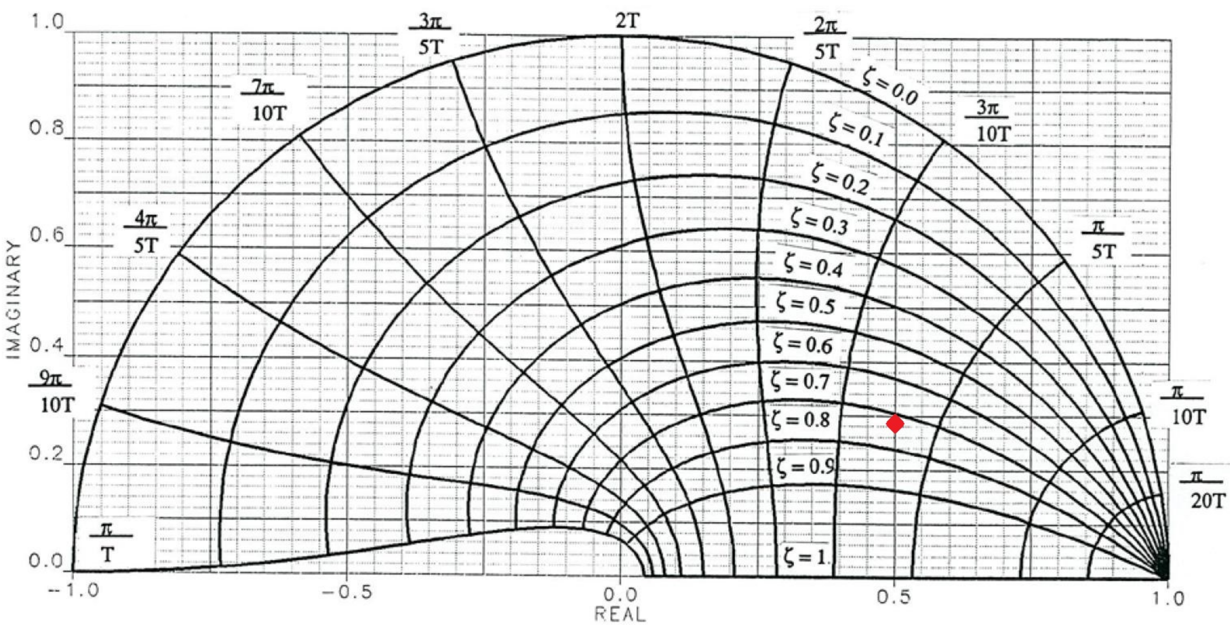
$$3z^2 - 3z + 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6} = 0.5 \pm 0.2887$$

این قطب‌ها روی شکل مشخص شده اند و تقریبا متناظر با $\zeta = 0.7$ است. بنابراین مقدار فراجهش برای G_D به صورت محاسبه می‌شود (تقریبا ۵ درصد):

$$\exp(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}})|_{\zeta=0.7} = 0.046$$



شکل ۲: نمایش خطوط ζثابت و ω_n ثابت در صفحه z



شکل ۳: نمایش خطوط ζثابت و ω_n ثابت در صفحه z