تبدیل $z$ دو طرفه: $\mathcal{Z}\{x[k]\} \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}$ تبدیل $z$ یک‌طرفه: $\mathcal{Z}\{x[k]\} \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k}$

جدول تبدیل $z$ یک‌طرفه:

| $t$ | $\mathcal{L}$ | $k$ | $\mathcal{Z}$ |
|---|---|---|---|
| $u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ | $\frac{1}{s}$ | $u[k] = u(kT)$ | $\frac{1}{1-z^{-1}}$ |
| $tu(t)$ | $\frac{1}{s^2}$ | $kTu[k]$ | $\frac{Tz}{(z-1)^2}$ |
| $\frac{1}{2}t^2u(t)$ | $\frac{1}{s^3}$ | $\frac{1}{2}T^2k^2u[k]$ | $\frac{Tz(z+1)}{2(z-1)^3}$ |
| $\mathrm{e}^{-at}u(t)$ | $\frac{1}{s+a}$ | $\mathrm{e}^{-akT}u[k]$ | $\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-aT}z^{-1}}$ |
| | | $a^ku[k]$ | $\frac{1}{1-az^{-1}}$ |
| $\sin(\omega t)u(t)$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ | $\sin(\omega kT)u[k]$ | $\frac{z\sin(\omega T)}{z^2-2z\cos(\omega T)+1}$ |
| $\cos(\omega t)u(t)$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ | $\cos(\omega kT)u[k]$ | $\frac{z(z-\cos(\omega T))}{z^2-2z\cos(\omega T)+1}$ |

اگر $X(z) = \mathcal{Z}\{x[k]\}$ آن‌گاه (یک‌طرفه و $\forall k < 0, x[k] = 0$):

$$\mathcal{Z}\{a^kx[x]\} = X(\frac{z}{a})$$
$$\mathcal{Z}\{x[x-m]\} = z^{-m}X(z), \quad m > 0$$
$$\mathcal{Z}\{x[x+m]\} = z^mX(z) - z^mx[0] - z^{m-1}x[1]... - zx[m-1], \quad m > 0$$
$$\mathcal{Z}\{k^mx[x]\} = \left(-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^m X(z)$$
$$\mathcal{Z}\{\sum_h x[k-h]y[h]\} = X(z)Y(z)$$
$$\mathcal{Z}\{\frac{\partial}{\partial a}x_a[k]\} = \frac{\partial X_a(z)}{\partial a}$$

انتگرال معکوس سازی ($C$ یک خم ساده بسته داخل ناحیه همگرایی و دربرگیرنده مبدأ):

$$x[k] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{k-1}\mathrm{d}z = \sum \text{Residue of } X(z)z^{k-1} \text{ at pole } z_i \text{ of } X(z)z^{k-1}$$

انتگرال کانولوشن:

$$X^*(s) = \frac{1}{2\pi j}\oint \frac{X(p)}{1-\mathrm{e}^{-T(s-p)}} = \sum \left[\text{Residue of } \frac{X(p)}{1-\mathrm{e}^{-T(s-p)}} \text{at poles of } \ X(p)\right]$$
$$X(z) = X^*(s)|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = \sum \left[\text{Residue of } \frac{X(p)z}{z-\mathrm{e}^{Tp}} \text{at poles of } \ X(p)\right]$$

محاسبه مانده:

$$\text{Residue of } \phi(z) \text{ at} = \begin{cases} \lim\limits_{z\to z_i}(z-z_i)\phi(z) & z_i \text{ is simple pole of } \phi(z) \\ \frac{1}{(q-1)!}\lim\limits_{z\to z_i}\frac{\mathrm{d}^{q-1}}{\mathrm{d}z^{q-1}}\{(z-z_i)^q\phi(z)\} & z_i \text{ is pole of order } q \end{cases}$$

معیار پایداری jury برای $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots a_{n-1} z + a_n$ :
ریشه‌های $P(z)$ (که $a_0 > 0$) داخل دایره واحد است اگر:

- $|a_n| < a_0$
- $P(1) > 0$
- $(-1)^n P(-1) > 0$
- $|b_{n-1}| > |b_0|, \;\; ... \;\; |q_2| > |q_0|$

| | $z^0$ | $z^1$ | $\cdots$ | $z^{n-1}$ | $z^n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $a_n$ | $a_{n-1}$ | $\cdots$ | $a_1$ | $a_0$ |
| 2 | $a_0$ | $a_1$ | $\cdots$ | $a_{n-1}$ | $a_n$ |
| 3 | $b_{n-1}$ | $b_{n-2}$ | $\cdots$ | $b_0$ | |
| 4 | $b_0$ | $b_1$ | $\cdots$ | $b_{n-1}$ | |
| $\vdots$ | | | | | |
| $2n$-3 | $q_2$ | $q_1$ | $q_0$ | | |

$$b_k = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1-k} \\ a_0 & a_{k+1} \end{vmatrix}, \; k = 0, 1, 2, ..., n-1$$

در مورد سیستم $\dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ ( و $0 \le \zeta \le 1$):

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}, \quad \sigma = \zeta\omega_n, \quad \beta = \cos^{-1}(\zeta), \quad \omega_b = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}$$

$$\text{O.S.} = \exp\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right), \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_d}, \quad t_s(2\%) = \frac{4}{\zeta\omega_n}, \quad t_r(0-100) = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}, \quad t_r(10-90) = \frac{2.2}{\omega_b}$$

گسسته سازی به روش:

- تفاضل مستقیم $s \to \dfrac{1 - z^{-1}}{T z^{-1}}$
- تفاضل معکوس $s \to \dfrac{1 - z^{-1}}{T}$
- دوخطی(ذوزنقه) $s \to \dfrac{2}{T} \dfrac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$