تجزیه و تحلیل حلقه و کات ست

امیر عباس شایگانی اکمل

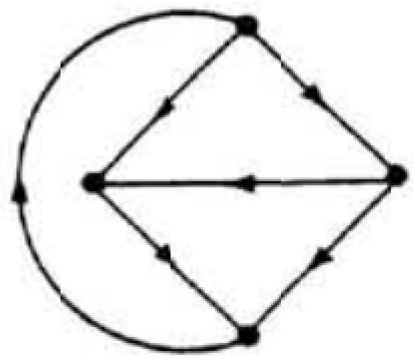
تعریف درخت

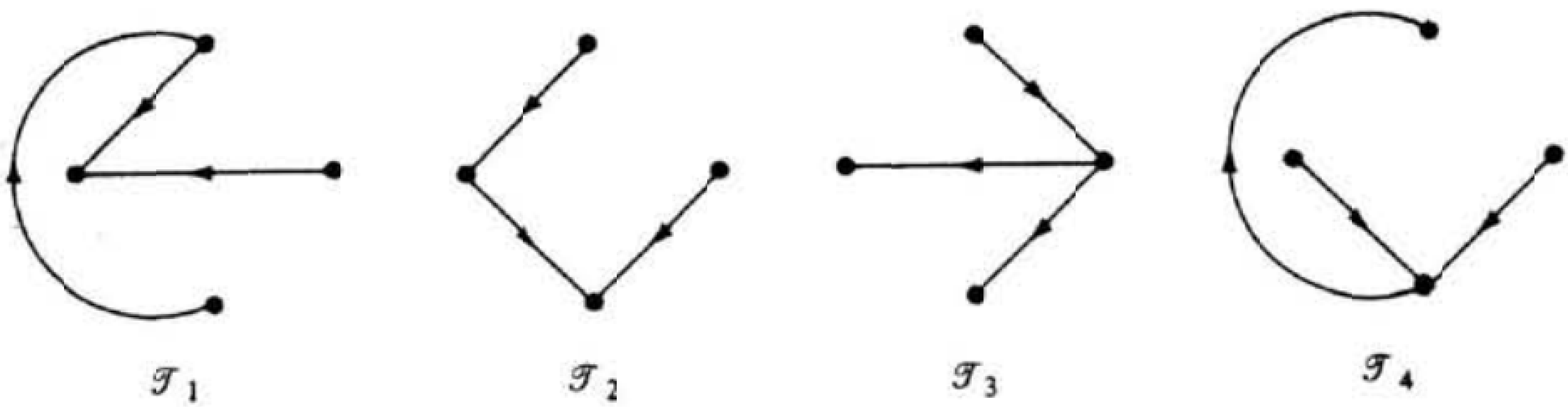
T یک درخت از گراف متصل به هم g گفته می شود چنانچه:

- T یک زیر گراف متصل به هم باشد.
- T شامل تمام گره های g باشد.
- T شامل هیچ حلقه ای نباشد.

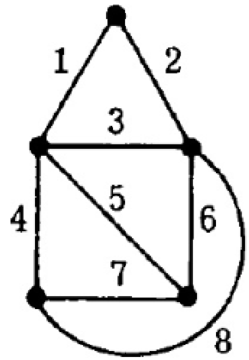
شاخه های Tرا شاخه درخت و شاخه هایی از g را که در T نباشند، لینک می نامند.

مثالی از یک گراف و چند درخت آن

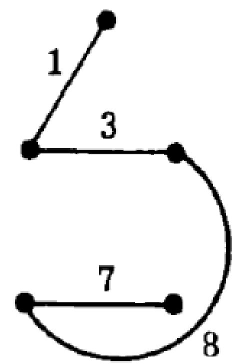




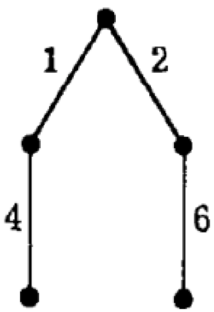
مثالی دیگر



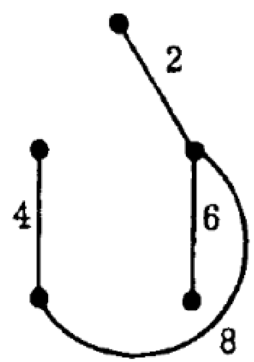
(الف) گراف g



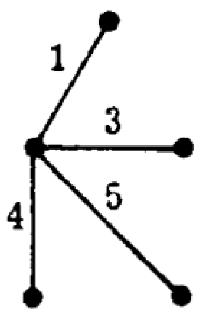
(ب) درخت T_1



(ج) درخت T_2



(د) درخت T_3



(ه) درخت T_4

قضیه اساسی نظریه گراف

گراف متصل به هم g با n_t گره و b شاخه و یک درخت T از g داده شده‌اند

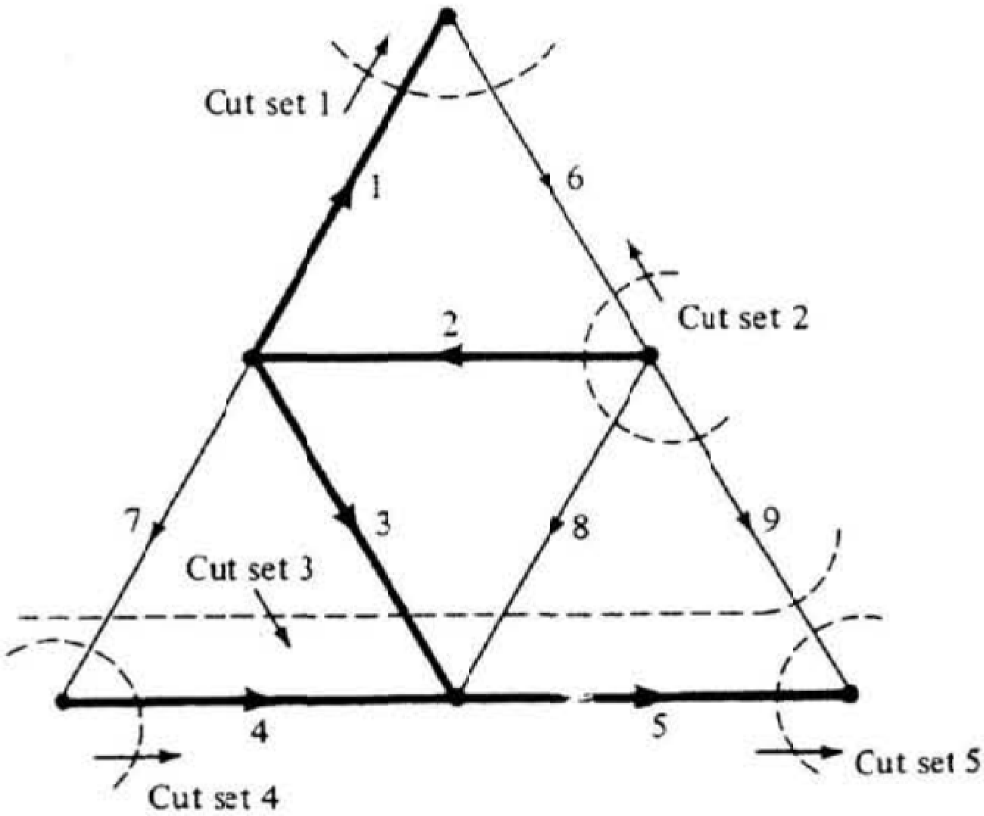
۱- میان هر جفت گره از g مسیر یکتایی در روی درخت وجود دارد.

۲- $n_t - 1$ شاخه درخت و $b - n_t + 1$ لینک وجود دارند.

۳- هر لینک T و مسیر یکتای میان گره‌های دوسر آن در روی درخت، حلقه یکتایی تشکیل می‌دهد (این حلقه را حلقه اساسی متناظر با لینک گویند).

۴- هر شاخه درخت T همراه با بعضی از لینک‌ها، کات‌ست یکتایی از g را تعریف می‌کند. این کات‌ست را کات‌ست اساسی متناظر با آن شاخه درخت گویند. به عبارت دیگر به تعداد شاخه‌های درخت کات‌ست اساسی داریم.

مثال قضیه اساسی نظریه گراف



set 1: $i_1 - i_6 = 0$

set 2: $i_2 - i_6 + i_8 + i_9 = 0$

set 3: $i_3 + i_7 + i_8 + i_9 = 0$

set 4: $i_4 - i_7 = 0$

set 5: $i_5 + i_9 = 0$

Cut set 1: $i_1 - i_6 = 0$

Cut set 2: $i_2 - i_6 + i_8 + i_9 = 0$

Cut set 3: $i_3 + i_7 + i_8 + i_9 = 0$

Cut set 4: $i_4 - i_7 = 0$

Cut set 5: $i_5 + i_9 = 0$

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{1}_{n-1}, \mathbf{Q}_\ell]$$

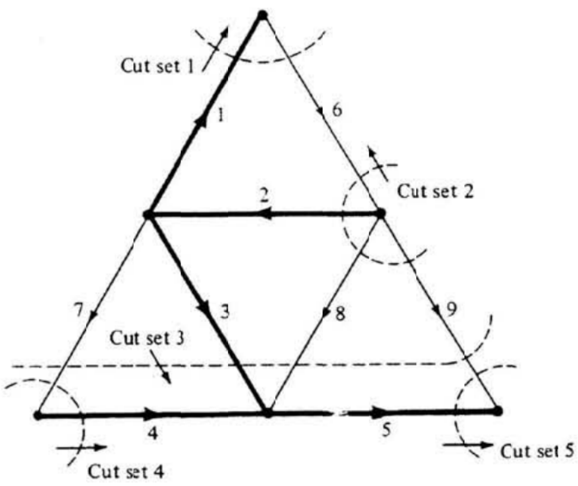
$$n-1 \text{ Cut sets} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1}_{n-1 \text{ twigs}} & & & & & \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1}_{\ell \text{ links}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ i_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

تجزیه و تحلیل کات ست

$$\mathbf{Q}\mathbf{i} = \mathbf{0} \tag{3.2}$$

where $\mathbf{Q}$ is an $(n-1) \times b$ matrix called the *fundamental cut-set matrix* associated with a tree $\mathcal{T}$. Its jkth element is defined as follows:

$$q_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{if branch } k \text{ belongs to cut set } j \\ & \text{and has the same direction} \\ -1 & \text{if branch } k \text{ belongs to cut set } j \\ & \text{and has the opposite direction} \\ 0 & \text{if branch } k \text{ does not belong to} \\ & \text{cut set } j \end{cases}$$



$$v_1 = v_{t1} \qquad v_6 = -v_1 - v_2 \qquad = -v_{t1} - v_{t2}$$

$$v_2 = v_{t2} \qquad v_7 = v_3 - v_4 \qquad = v_{t3} - v_{t4}$$

$$v_3 = v_{t3} \qquad v_8 = v_2 + v_3 \qquad = v_{t2} + v_{t3}$$

$$v_4 = v_{t4} \qquad v_9 = v_2 + v_3 + v_5 \qquad = v_{t2} + v_{t3} + v_{t5}$$

$$v_5 = v_{t5}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ \\ v_9 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{n-1} \begin{bmatrix} v_{t1} \\ v_{t2} \\ v_{t3} \\ v_{t4} \\ v_{t5} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}^T \mathbf{v}_t$$

جمع بندی نتایج تعریف درخت

Kirchhoff's equations based on the fundamental cut-set matrix $\mathbf{Q}$ of $(n-1)$ rows and b columns:

KCL: $$\mathbf{Q}\mathbf{i} = \mathbf{0}$$

KVL: $$\mathbf{v} = \mathbf{Q}^T \mathbf{v}_t \tag{3.6}$$

If twigs are labeled first from 1 to $n-1$, then

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{1}_{n-1}, \mathbf{Q}_\ell]$$

نکته

REMARKS

1. The two equations in (3.6) are generalizations of the following familiar Kirchhoff's equations based on nodes and the reduced incidence matrix **A**:

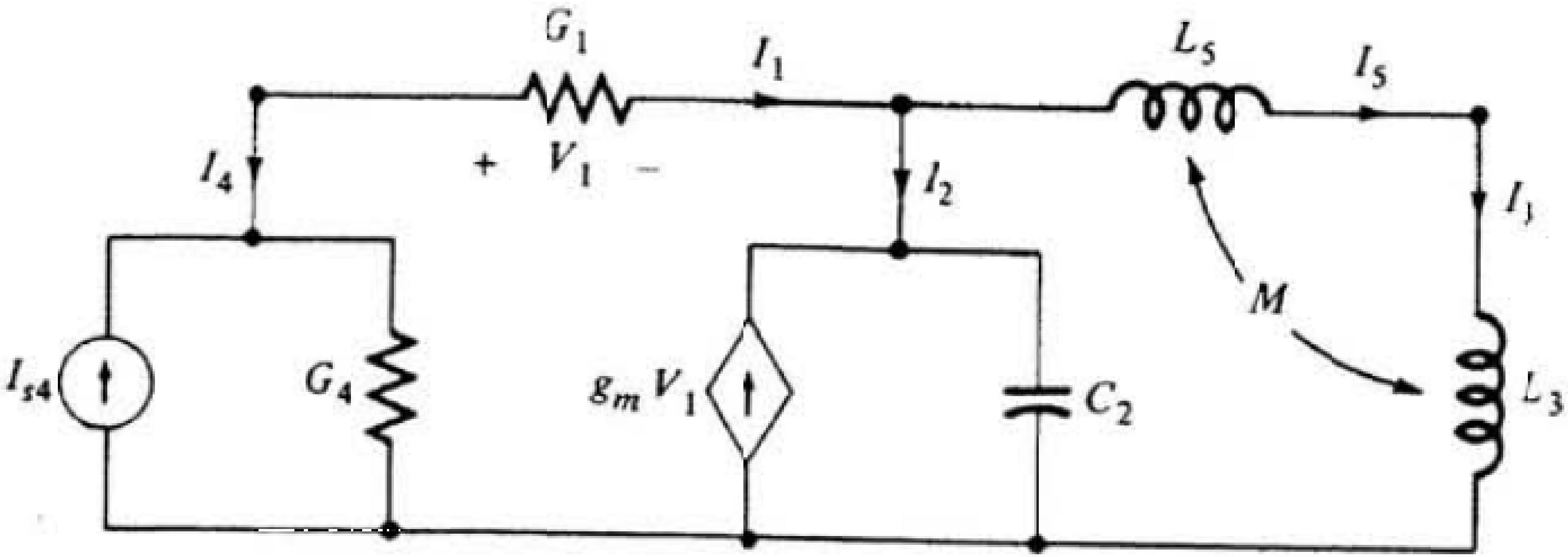
$$\begin{aligned} &\text{KCL:} \quad \mathbf{Ai} = \mathbf{0} \\ &\text{KVL:} \quad \mathbf{v} = \mathbf{A}^T\mathbf{e} \end{aligned} \tag{3.7}$$

2. Obviously, the fundamental cut-set matrix **Q** associated with a tree represents a special case of the reduced cut-set matrix $\mathbf{Q}_R$ introduced in Sec. 2. While for many digraphs, the reduced incidence matrix **A** is a special case of the fundamental cut-set matrix, i.e., a tree can be chosen such that the **Q** obtained is identical with the reduced incidence matrix for a particular datum node. This is not always possible as in the graph in Fig. 3.3.

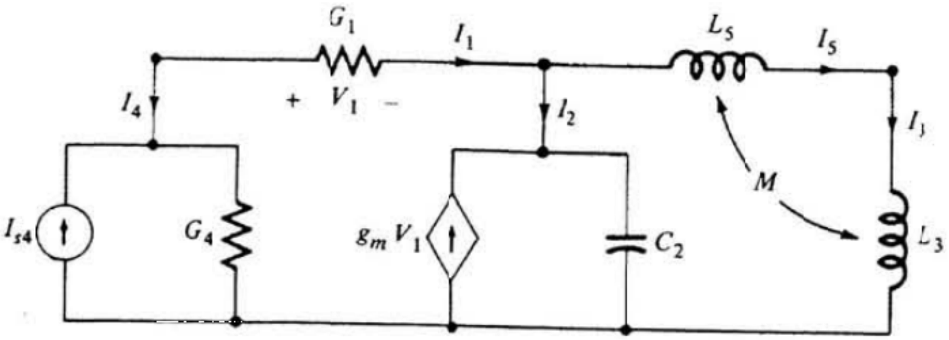
نوشتن معادلات کات ست بصورت میانبر

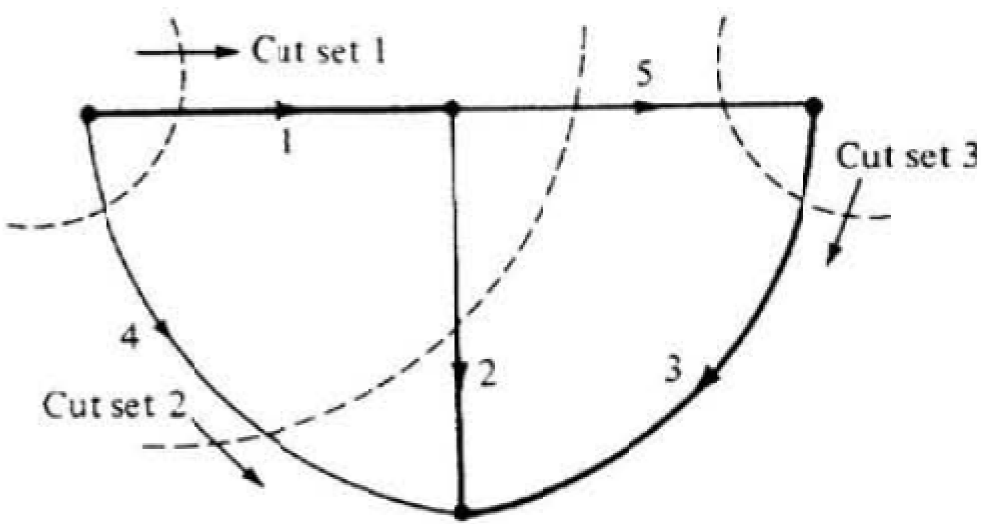
۱- متغیرهای معادلات کات ست، ولتاژ شاخه های درخت هستند.
۲- عناصر قطر اصلی برابر با مجموع ادمیتانسهای حاضر در کات ست مربوطه
۳- عناصر قطر فرعی i و j لینکهای مشترک بین کات ست i و کات ست j هستند. اگر جهت کات ست ها برای لینک مشترک مخالف باشد، علامت ادمیتانس آن منفی و در غیر این صورت علامت آن مثبت خواهد بود.
۴- جهت منبع جریان با جهت مخالف کات ست، مثبت و در غیر اینصورت منفی خواهد بود.

مثال کات ست حالت دائم سینوسی

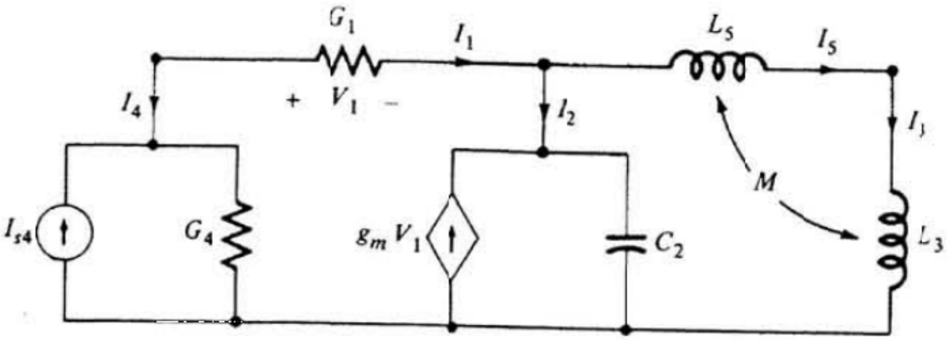


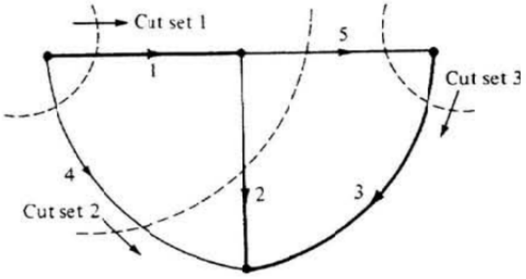
مثال کات ست، گراف و درخت





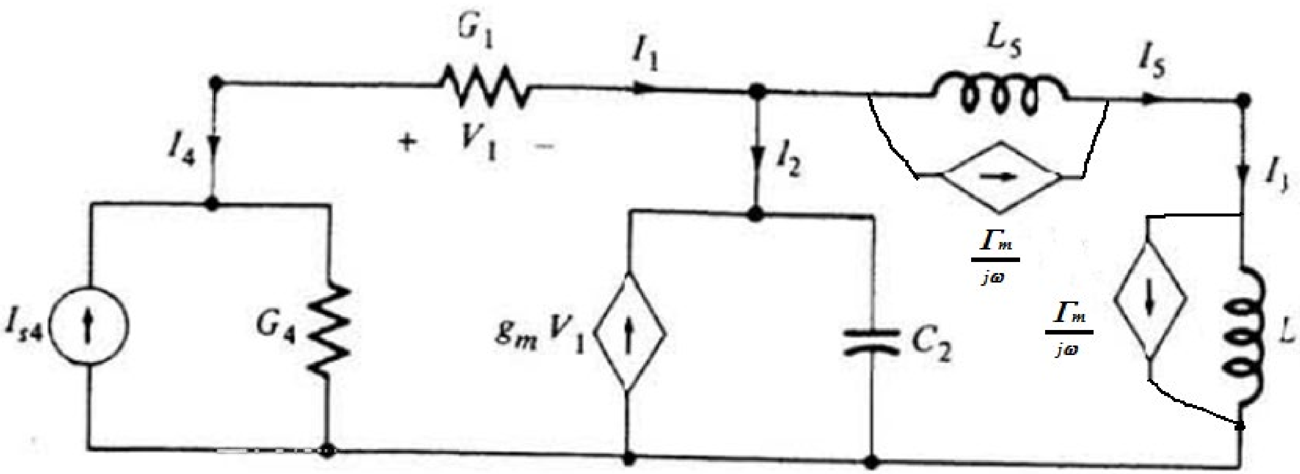
حل مثال کات ست

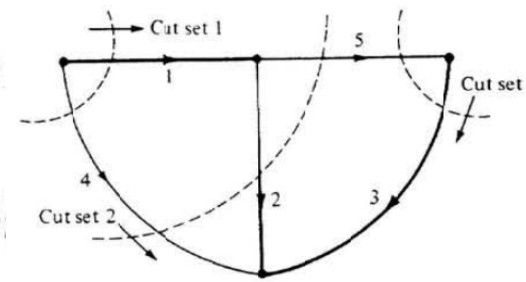




$$\begin{bmatrix} G_1 + G_4 & G_4 & 0 \\ G_4 & G_4 + \frac{1}{j\omega}\Gamma_5 + j\omega C_2 & -\frac{\Gamma_5}{j\omega} \\ 0 & -\frac{\Gamma_5}{j\omega} & \frac{1}{j\omega}(\Gamma_3 + \Gamma_5) \end{bmatrix}$$

حل مثال کات ست





$$\begin{bmatrix} I_{s4} \\ I_{s4}+g_mV_1-\frac{\Gamma_m}{j\omega}V_{t3} \\ \frac{\Gamma_m}{j\omega}V_{t3}-\frac{\Gamma_m}{j\omega}(V_{t2}-V_{t3}) \end{bmatrix}$$

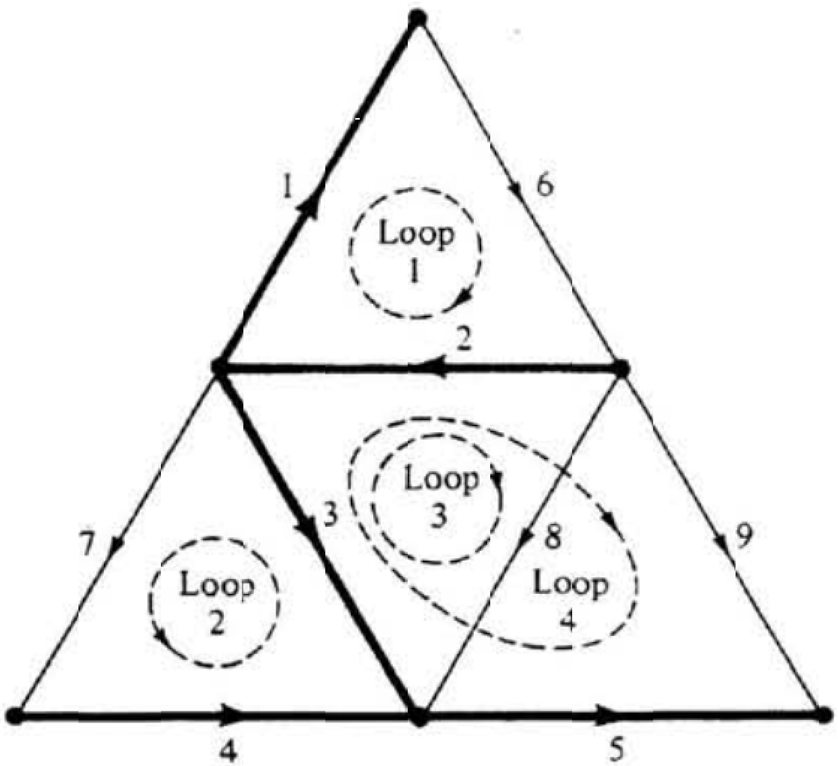
حل مثال کات ست

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_4 & G_4 & 0 \\ G_4 & G_4 + \frac{1}{j\omega}\Gamma_5 + j\omega C_2 & -\frac{\Gamma_5}{j\omega} \\ 0 & -\frac{\Gamma_5}{j\omega} & \frac{1}{j\omega}(\Gamma_3 + \Gamma_5) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_{s4} \\ I_{s4} + g_m V_1 - \frac{\Gamma_m}{j\omega} V_{t3} \\ \frac{\Gamma_m}{j\omega} V_{t3} - \frac{\Gamma_m}{j\omega}(V_{t2} - V_{t3}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_4 & G_4 & 0 \\ G_4 - g_m & G_4 + \frac{1}{j\omega}\Gamma_5 + j\omega C_2 & -\frac{\Gamma_5}{j\omega} + \frac{\Gamma_m}{j\omega} \\ 0 & -\frac{\Gamma_5}{j\omega} + \frac{\Gamma_m}{j\omega} & \frac{1}{j\omega}(\Gamma_3 + \Gamma_5 + 2\Gamma_m) \end{bmatrix}$$

تجزیه و تحلیل حلقه



Loop 1: $v_6 + v_1 + v_2 = 0$

Loop 2: $v_7 - v_3 + v_4 = 0$

Loop 3: $v_8 - v_2 - v_3 = 0$

Loop 4: $v_9 - v_2 - v_3 - v_5 = 0$

نوشتن معادلات حلقه

Loop 1: $v_5 + v_1 + v_2 = 0$

Loop 2: $v_7 - v_3 + v_4 = 0$

Loop 3: $v_8 - v_2 - v_3 = 0$

Loop 4: $v_9 - v_2 - v_3 - v_5 = 0$

$$\ell\ \textbf{loops}\ \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix}1&1&0&0&0\\0&0&-1&1&0\\0&-1&-1&0&0\\0&-1&-1&0&-1\end{matrix}}_{n-1\text{ twigs}} & \underbrace{\begin{matrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{matrix}}_{\ell\text{ links}}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ v_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Bv} = \mathbf{0}$$

نوشتن B

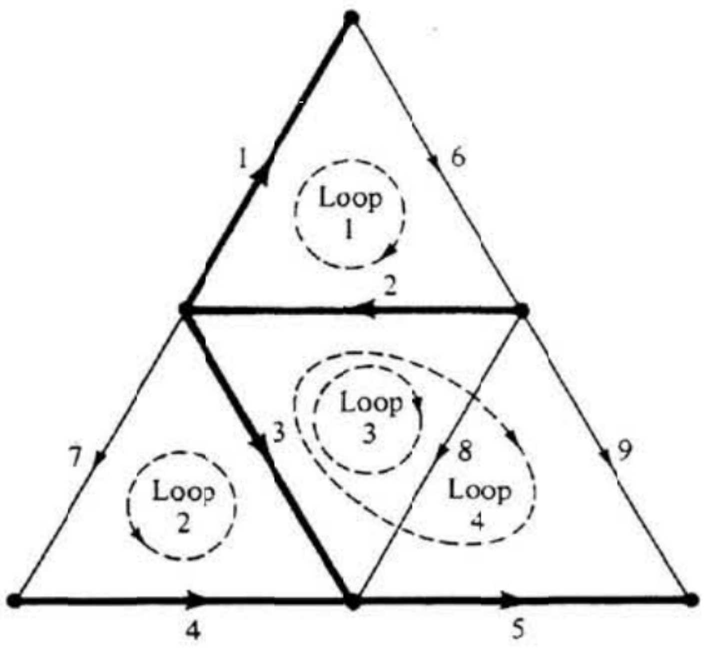
$$\mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_t, \mathbf{1}_\ell]$$

where **B** is an $\ell \times b$ matrix called the *fundamental loop matrix* associated with the tree $\mathcal{T}$. Its jkth element is defined as follows:

$$b_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{if branch } k \text{ is in loop } j \text{ and their reference directions are the same} \\ -1 & \text{if branch } k \text{ is in loop } j \text{ and their reference directions are opposite} \\ 0 & \text{if branch } k \text{ is not in loop } j \end{cases}$$

معادلات KCL



$$i_6 = i_{\ell 1}$$

$$i_7 = i_{\ell 2}$$

$$i_8 = i_{\ell 3}$$

$$i_9 = i_{\ell 4}$$

$$i_1 = i_{\ell 1}$$

$$i_2 = i_{\ell 1} - i_{\ell 3} - i_{\ell 4}$$

$$i_3 = -i_{\ell 2} - i_{\ell 3} - i_{\ell 4}$$

$$i_4 = i_{\ell 2}$$

$$i_5 = -i_{\ell 4}$$

نوشتن KCL

$$i_1 = i_{\ell 1}$$
$$i_2 = i_{\ell 1} - i_{\ell 3} - i_{\ell 4}$$
$$i_3 = -i_{\ell 2} - i_{\ell 3} - i_{\ell 4}$$
$$i_4 = i_{\ell 2}$$
$$i_5 = -i_{\ell 4}$$
$$i_6 = i_{\ell 1}$$
$$i_7 = i_{\ell 2}$$
$$i_8 = i_{\ell 3}$$
$$i_9 = i_{\ell 4}$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \\ \vdots \\ \\ \\ \\ \\ i_9 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\ell} \begin{bmatrix} i_{\ell 1} \\ i_{\ell 2} \\ i_{\ell 3} \\ i_{\ell 4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{i} = \mathbf{B}^T \mathbf{i}_\ell$$

جمع بندی

Kirchhoff's equations based on the fundamental loop matrix **B** of ℓ rows and b columns

$$\text{KVL:} \quad \mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{0} \qquad (3.13)$$

$$\text{KCL:} \quad \mathbf{i} = \mathbf{B}^T \mathbf{i}_\ell$$

If twigs are numbered first from 1 to $n-1$,

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_t, \mathbf{1}_\ell]$$

نکته

REMARKS

1. The fundamental loop matrix **B** associated with a tree $\mathscr{T}$ is obviously a special case of the reduced loop matrix $\mathbf{B}_R$. In deriving the KVL equations $\mathbf{Bv} = \mathbf{0}$ based on a tree, we have demonstrated that **B** is of rank $\ell = b - (n - 1)$. Thus the number of a maximal and linearly independent set of KVL equations based on loops is equal to ℓ, i.e., $\mathbf{B}_R$ is of rank ℓ.

2. We have mentioned duality in deriving the fundamental loop matrix **B** from the fundamental cut-set matrix **Q**. It should be clear to the reader by now that there indeed exist many dual terms. We summarize some of these in Table 3.1.

نوشتن معادلات حلقه بصورت میانبر

۱- متغیرهای معادلات حلقه، جریان لینک های مربوط به درخت مورد نظر هستند.

۲- عناصر قطر اصلی برابر با مجموع امپدانسهای حاضر در حلقه

۳- عناصر قطر فرعی i و j شاخه های مشترک بین حلقه i و حلقه j هستند. اگر جهت حلقه ها برای شاخه مشترک یکسان باشد، علامت امپدانس آن مثبت و در غیر این صورت علامت آن منفی خواهد بود.

۴- برای علامت منبع ولتاژ اگر حلقه با قطب منفی منبع برخورد می کند، مثبت در نظر گرفته می شود و در غیر اینصورت منفی خواهد بود.

دوگانی

Table 3.1 Dual terms in loop and cut-set analysis

Loop analysis	Cut-set analysis
Link	Twig
Fundamental loop	Fundamental cut set
Link current, $\mathbf{i}_l$	Twig voltage, $\mathbf{v}_t$
Fundamental loop matrix, $\mathbf{B}$	Fundamental cut-set matrix, $\mathbf{Q}$

رابطه بین Q و B

Theorem Let **Q** and **B** be the fundamental cut-set matrix and the fundamental loop matrix, respectively, of a connected digraph $\mathcal{G}$ for a specified tree $\mathcal{T}$; then

$$\mathbf{B}\mathbf{Q}^T = \mathbf{0} \tag{3.14}$$

Proof We have, for an arbitrary twig voltage vector $\mathbf{v}_t = [v_{t1}, v_{t2}, \ldots, v_{t(n-1)}]^T$,

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}^T\mathbf{v}_t \tag{3.15}$$

This says that the b-vector **v** is expressed by KVL in terms of linear combinations of v_{tk}'s by the matrix $\mathbf{Q}^T$. Next, we have, by KVL, a set of linear constraints on the b-vector **v**, given by

$$\mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{3.16}$$

Thus, premultiplying Eq. (3.15) by **B** and using Eq. (3.16), we obtain

$$\mathbf{B}\mathbf{Q}^T\mathbf{v}_t = \mathbf{0} \qquad \text{for all } \mathbf{v}_t \tag{3.17}$$

Thus,

$$\mathbf{B}\mathbf{Q}^T = \mathbf{0}$$

رابطه بین زیر ماتریسهای Q و B

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{1}_{n-1}, \mathbf{Q}_\ell]$$

and

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_t, \mathbf{1}_\ell]$$

$$\mathbf{B}\mathbf{Q}^T = [\mathbf{B}_t, \mathbf{1}_\ell]\begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n-1} \\ \mathbf{Q}_\ell^T \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{B}_t + \mathbf{Q}_\ell^T = 0$$

We obtain the identities

$$\mathbf{B}_t = -\mathbf{Q}_\ell^T \qquad \text{and} \qquad \mathbf{B}_t^T = -\mathbf{Q}_\ell$$