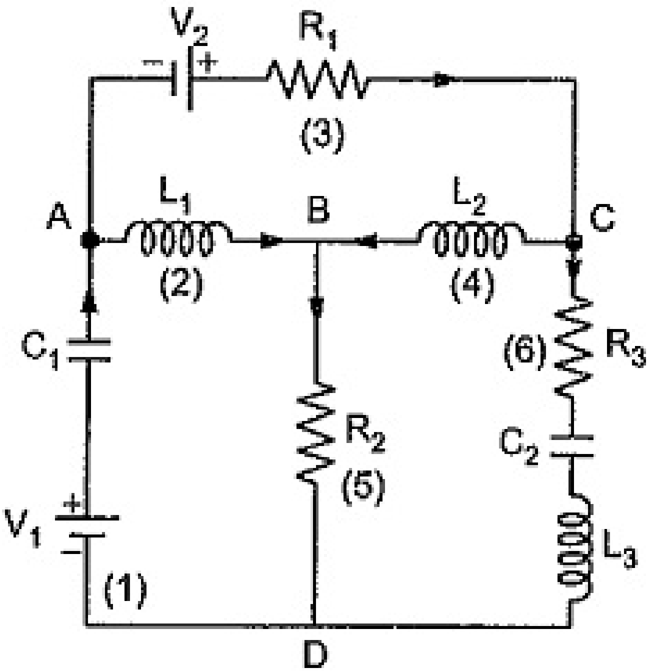
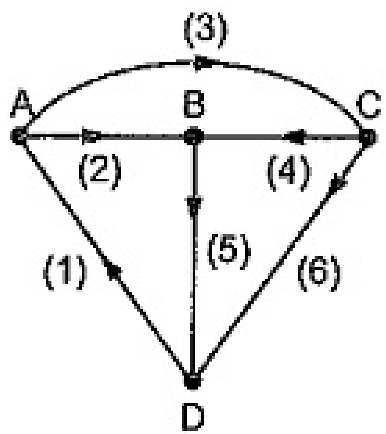
قضیه تلگان

امیر عباس شایگانی اکمل

یادآوری گراف



(a)



(b)

$$A_a = \begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +1 & 0 & +1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

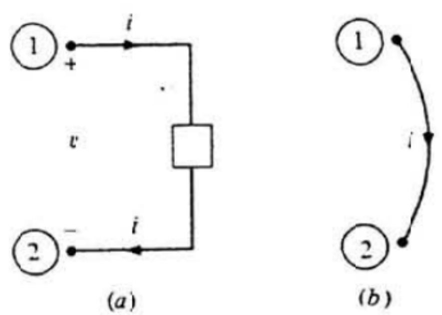
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & +1 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

قضیه تلگان

- برای تمام شبکه ها اعم از خطی، غیر خطی، متغیر با زمان یا نامتغیر با زمان قابل استفاده است. تفاوت نمی کند مقادیر اعداد، توابع یا فازورها استفاده شوند.

- تنها محدودیت برای استفاده از قضیه تلگان، فشرده بودن مدار و صدق کردن قوانین **KVL** و **KCL** بر ولتاژها و جریان های شاخه ها است.

- رعایت جهت های قراردادی الزامی است.



بیان قضیه تلگان

Tellegen's theorem Consider an arbitrary circuit. Let the digraph $\mathcal{G}$ have b branches. Let us use associated reference directions. Let $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_b)^T$ be *any* set of branch currents satisfying KCL for $\mathcal{G}$ and let $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_b)^T$ be *any* set of branch voltages satisfying KVL for $\mathcal{G}$, then

$$\sum_{k=1}^{b} v_k i_k = 0 \qquad \text{or equivalently} \qquad \mathbf{v}^T\mathbf{i} = 0 \tag{7.1}$$

اثبات قضیه تلگان

$$V^TJ=(A^Te)^TJ=(e^T(A^T)^T)J=(e^TA)J$$
$$= e^T(AJ)=e(0)=0$$

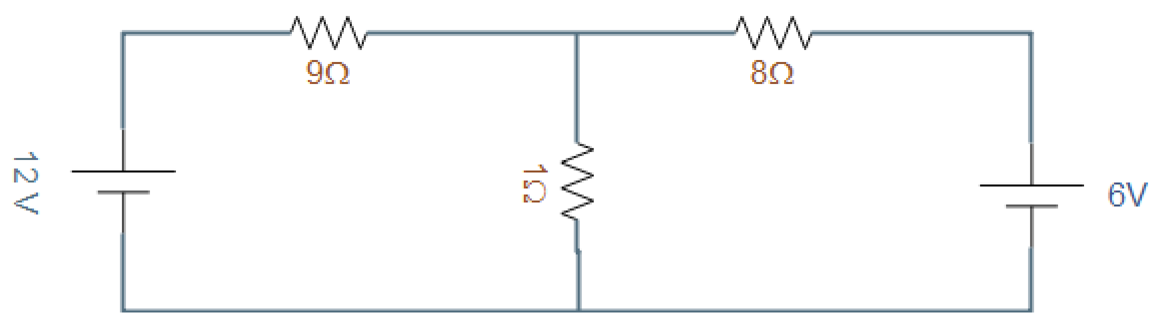
V بردار ولتاژ شاخه ها

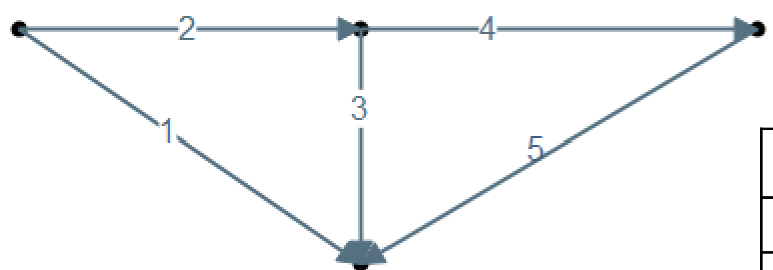
J بردار جریان شاخه ها

e بردار ولتاژ گره ها

A ماتریس تلاقی گره با شاخه (مختصر شده)

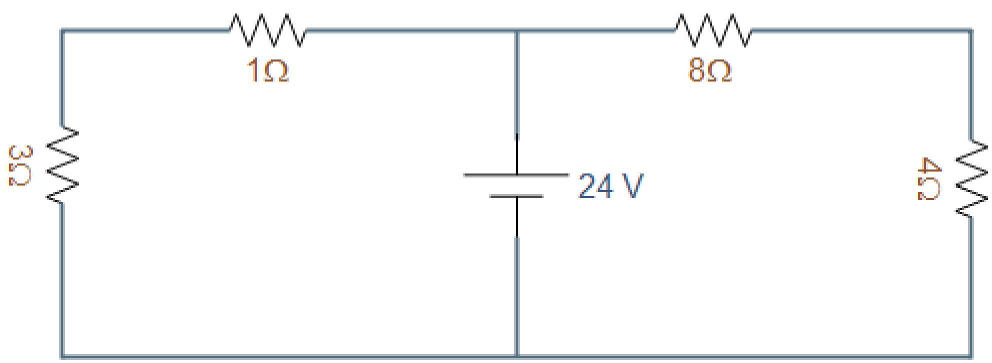
مثال ۱

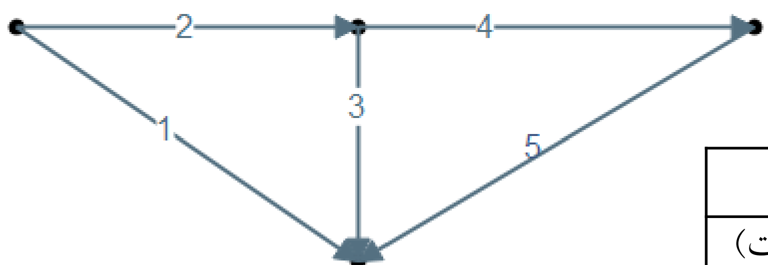




شاخه	۱	۲	۳	٤	٥
ولتاژ (ولت)	۱۲	۹	۳	−۳	٦
جریان (آمپر)	−۱	۱	۳	−۲	−۲
توان	−۱۲	۹	۹	٦	−۱۲

مثال ۲





شاخه	۱	۲	۳	٤	٥
ولتاژ (ولت)	۱۸	–٦	۲٤	۱٦	۸
جریان (آمپر)	٦	–٦	–۸	۲	۲
توان	۱۰۸	۳٦	–۱۹۲	۳۲	۱٦

مثال ٣

شاخه	١	٢	٣	٤	٥
ولتاژ (ولت)از مثال ١	١٢	٩	٣	−٣	٦
جریان (آمپر) از مثال ٢	٦	−٦	−٨	٢	٢
حاصلضرب ولتاژ در جریان شاخه	٧٢	−٥٤	−٢٤	−٦	١٢

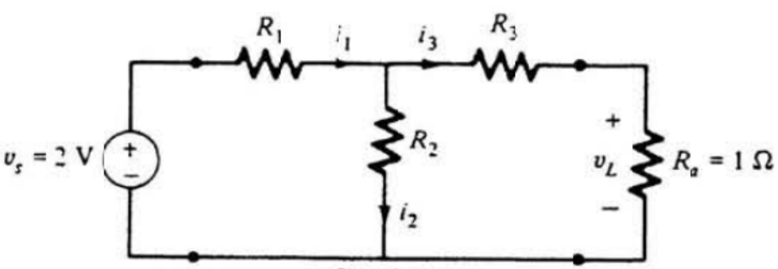
شاخه	١	٢	٣	٤	٥
ولتاژ (ولت)از مثال ٢	١٨	−٦	٢٤	١٦	٨
جریان (آمپر) از مثال ١	−١	١	٣	−٢	−٢
حاصلضرب ولتاژ در جریان شاخه	−١٨	−٦	٧٢	−٣٢	−١٦

مثال ۴

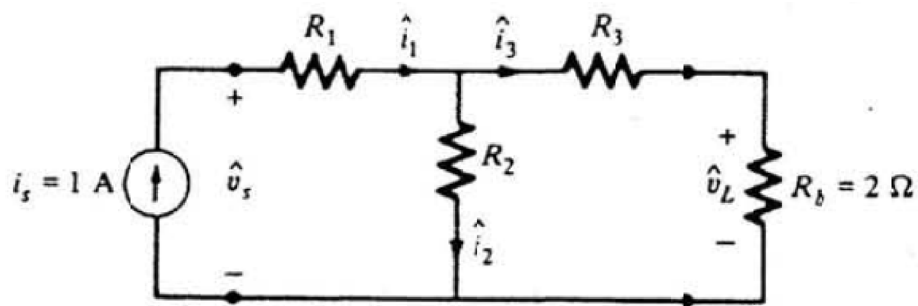
24 In the circuits shown in Fig. P1.24, let v_k and i_k be the branch voltage and current in circuit A and $\hat{v}_k$ and $\hat{i}_k$ be the branch voltage and current in circuit B. The following measurements have been obtained:

$$i_1 = 1\ \text{A} \qquad \hat{v}_s = 3\ \text{V} \qquad v_L = 2\ \text{V}$$

Use a particular form of Tellegen's theorem to determine $\hat{v}_L$, where R_1, R_2, and R_3 are unknown resistors satisfying Ohm's law.



Circuit A

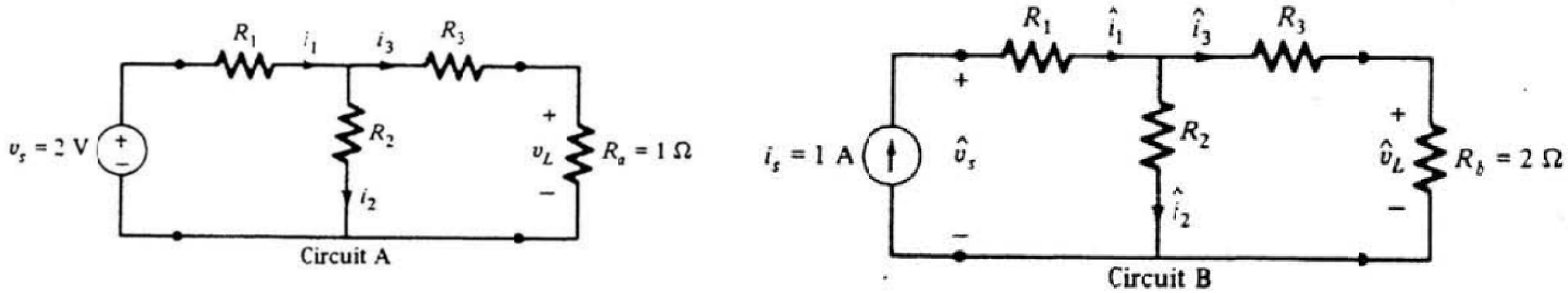


Circuit B

حل مثال ۴

$$\sum_{k=1}^{5} v_k j_k = 0 \qquad \sum_{k=1}^{5} \widehat{v_k}\widehat{j_k} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{5} v_k \widehat{j_k} = 0 \qquad \sum_{k=1}^{5} \widehat{v_k} j_k = 0$$



$$2(-1) + R_1 i_1 \widehat{i_1} + R_2 i_2 \widehat{i_2} + R_3 i_3 \widehat{i_3} + 2\frac{\widehat{v_L}}{2}$$
$$= 3(-1) + R_1 \widehat{i_1} i_1 + R_2 \widehat{i_2} i_2 + R_3 \widehat{i_3} i_3 + \widehat{v_L} 2$$

$$\widehat{v_L} = 1$$

یکی از نتایج تلگان

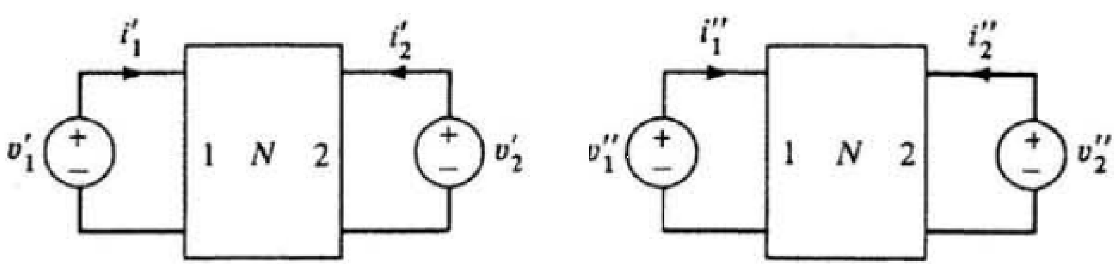
20 Let N be a two-port made of arbitrary interconnections of linear two-terminal linear resistors (i.e., each resistor satisfies Ohm's law: $v_j = R_j i_j$). Consider the following two experiments:

Experiment 1. Drive N with two voltage sources v_1' and v_2' and measure the resulting port currents i_1' and i_2', respectively. (See Fig. P1.20.)

Experiment 2. Drive N with two voltage sources v_1'' and v_2'' and measure the resulting port currents i_1'' and i_2'', respectively.

(*a*) Prove that the two sets of measurements are related as follows:

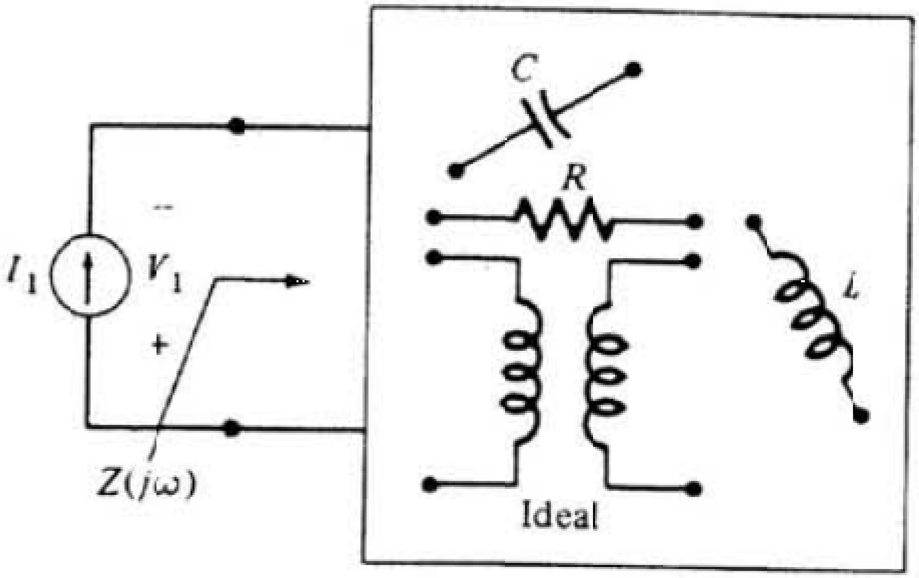
$$v_1' i_1'' + v_2' i_2'' = v_1'' i_1' + v_2'' i_2'$$



این نتیجه برای حالت دائم سینوسی هنگامیکه شبکه N از RLC تشکیل شده باشد نیز معتبر است.

نکته: در حالت دائم سینوسی از فازورهای ولتاژ و جریان استفاده می شود.

امپدانس نقطه تحریک



$$Z(j\omega) = \frac{2P_{\text{ave}} + 4j\omega[(\mathscr{E}_M(\omega) - \mathscr{E}_E(\omega)]}{|I_1|^2}$$

P_{ave} = average power dissipated in the resistors of $\mathcal{N}$

$\mathscr{E}_M$ = average *magnetic* energy stored in $\mathcal{N}$

$\mathscr{E}_E$ = average *electric* energy stored in $\mathcal{N}$

نتایج امپدانس نقطه تحریک

Comments

1. As expected $\text{Re}[Z(j\omega)]$ is $2P_{\text{ave}}/|I_1|^2$: The larger the dissipation, the larger the real part of the input impedance. [See also Eq. (5.15) above.]
2. If $\mathcal{N}$ is purely *reactive* (only L's and C's, no resistors), then $Z(j\omega)$ is purely imaginary; furthermore $\text{Im}[Z(j\omega)] \triangleq X(j\omega)$ is positive or negative according to whether $\mathscr{E}_M(\omega) > \mathscr{E}_E(\omega)$ or vice versa. [Recall the series RL, $Z = R + j\omega L$, or the series RC circuit, $Z = R - j(1/\omega C)$.]
3. Equation (5.38) implies the following facts:

(*a*) If $\mathcal{N}$ consists only of *passive resistors* and/or *passive inductors*—often called a passive RL circuit—then

$$0 \le \measuredangle Z(j\omega) \le 90^\circ \qquad \text{for all real } \omega\text{'s}$$

(*b*) If $\mathcal{N}$ consists only of *passive resistors* and/or *passive capacitors*—called a passive RC circuit—then

$$-90^\circ \le \measuredangle Z(j\omega) \le 0 \qquad \text{for all real } \omega\text{'s}$$

(*c*) In the general case, if $\mathcal{N}$ has only *passive* R's, L's, C's, transformers, and gyrators, then

$$-90^\circ \le \measuredangle Z(j\omega) \le +90^\circ \qquad \text{for all real } \omega\text{'s}$$

or equivalently

$$\text{Re}[Z(j\omega)] \ge 0 \qquad \text{for all real } \omega\text{'s}$$

4. Similar conclusions hold for $Y(j\omega)$, by duality.