معادلات حالت

امیر عباس شایگانی اکمل

مقدمه معادلات حالت

اگر معادلات دیفرانسیل یک شبکه بصورت

$$\dot{X} = f(X, W, t)$$

نوشته شود، در آن صورت **X** بردار حالت نامیده می شود. در این معادلات **W** بردار ورودی و t زمان است.

در یک شبکه خطی معادلات بصورت

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) + du(t)$$

نوشته می شود.

حالت

در شبکه های الکتریکی ولتاژ خازن ها و جریان سلف ها حالتهای شبکه هستند. (تعداد حالت ها برابر با مجموع تعداد خازن ها و سلف ها)

اگر شبکه غیر خطی باشد ممکن است انتخاب بار خازن ها (q) و شار سلفها (Φ) به معادلات ساده تری بیانجامد.

بازای هر حلقه خازنی، یک حالت کم می شود. (وابستگی خطی ولتاژها)

بازای هر کات ست سلفی، یک حالت کم می شود. (وابستگی خطی جریان ها)

نکته: اگر منبع وابسته در شبکه داشته باشیم که یک رابطه خطی در معادلات شبکه بین متغیرهای حالت ایجاد کند، یک حالت کم می شود.

نوشتن معادلات حالت

با توجه به اینکه ولتاژ سلف $v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$، مشتق یکی از حالتهای شبکه است، با نوشتن معادله KVL حلقه آن می توان یک معادله حالت را نوشت.

همچنین چون جریان خازن $i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$، مشتق یکی از حالتهای شبکه است، با نوشتن KCL کات ست آن می توان یک معادله حالت را نوشت.

انتخاب درخت مناسب

ملاحظه کردید که باید معادله ولتاژ حلقه سلفها و معادله جریان کات ست خازن ها را در شبکه بنویسیم.
از این رو یک درخت انتخاب می کنیم که شامل تمام خازن ها باشد و هیچ سلفی را شامل نشود. (نکته: اگر خازن ها حلقه تشکیل دهند، خازنهای مستقل را در درخت انتخاب کنید. اگر سلفها کات ست تشکیل دهند، سلف وابسته را در درخت در نظر بگیرید.)

نوشتن معادلات پس از انتخاب درخت مناسب

۱- برای هر خازن مستقل معادله کات ست مربوط به شاخه آن خازن را بنویسد.

۲- در معادله کات ست خازن، جریان مقاومتها و منابع وابسته را بر حسب متغیرهای حالت بنویسید.

۳- برای هر سلف مستقل معادله حلقه مربوط به آن را بنویسید.

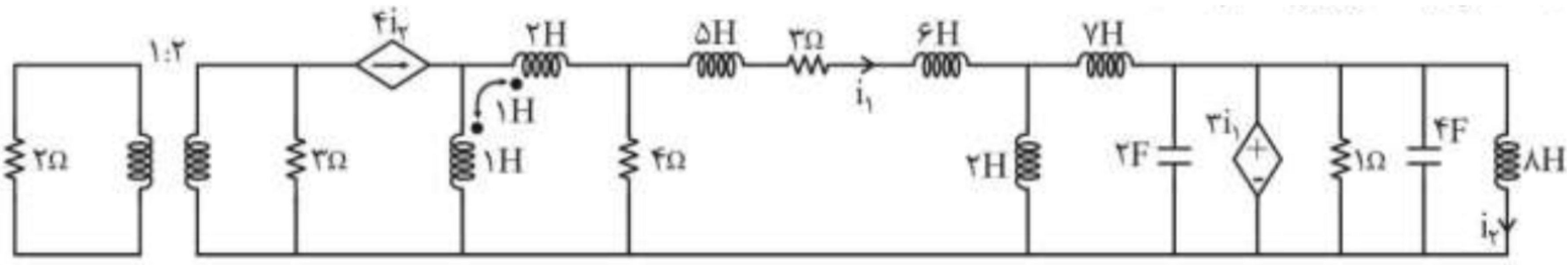
۴- در معادله حلقه سلف، ولتاژ مقاومت ها و منابع وابسته را بر حسب متغیرهای حالت بنویسید.

۵- معادلات را بشکل استاندارد، منظم کنید.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) + du(t)$$

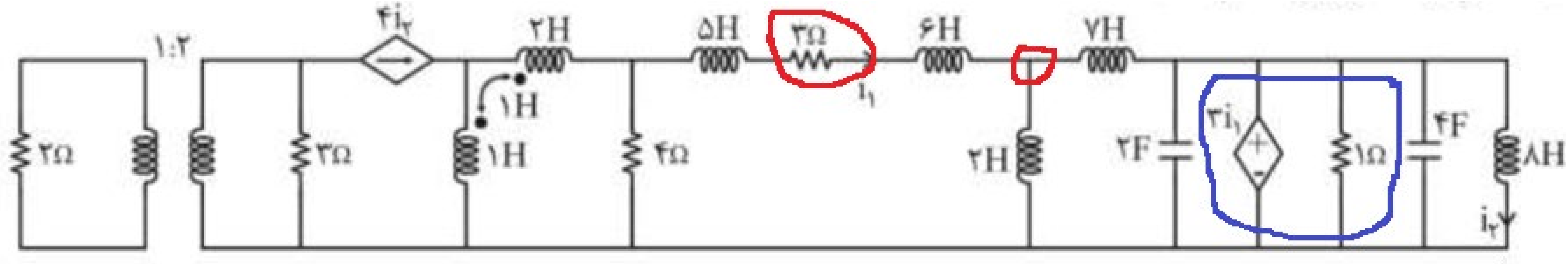
مثال تعداد حالتها



تعداد سلفها: ۷

تعداد خازنها: ۲

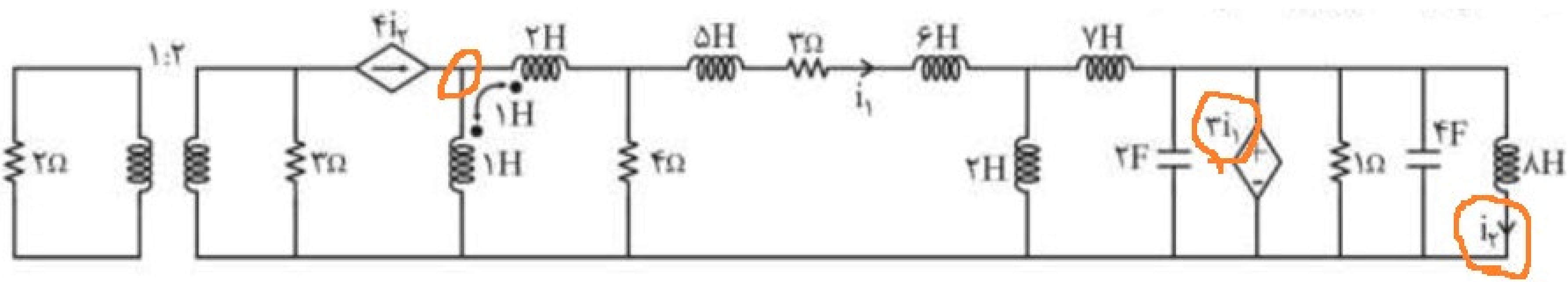
حل مثال



کات ست سلفی: ۲

حلقه خازنی: ۱

ادامه حل مثال

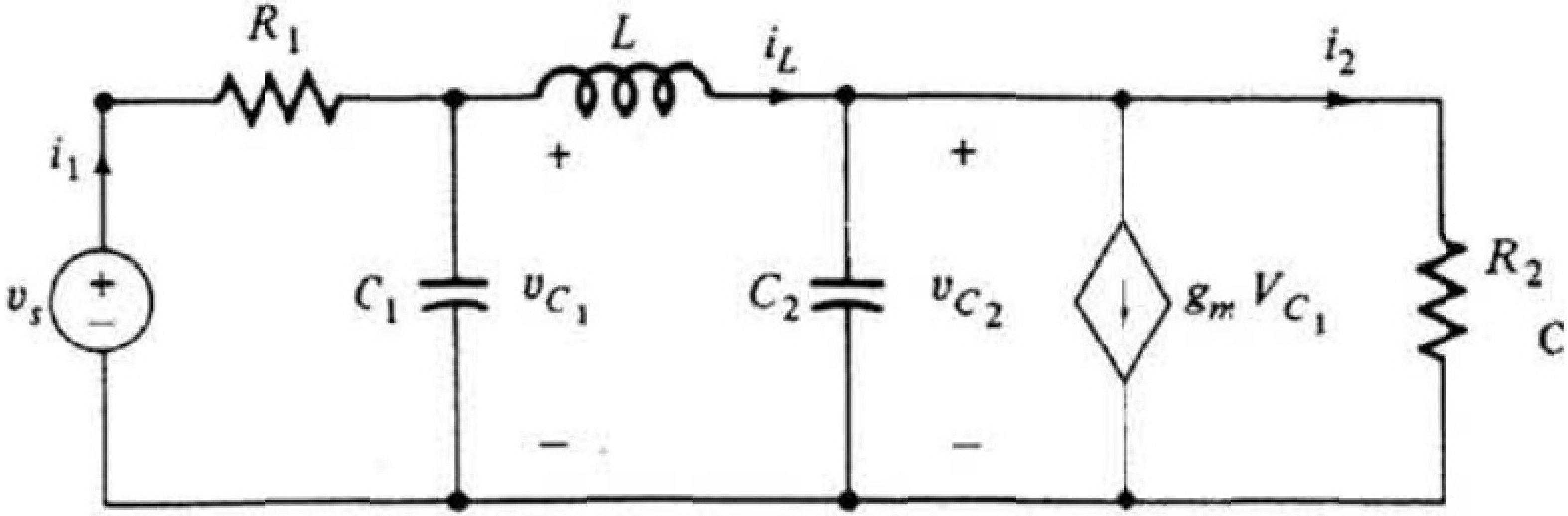


رابطه جریان سلفها : ۱

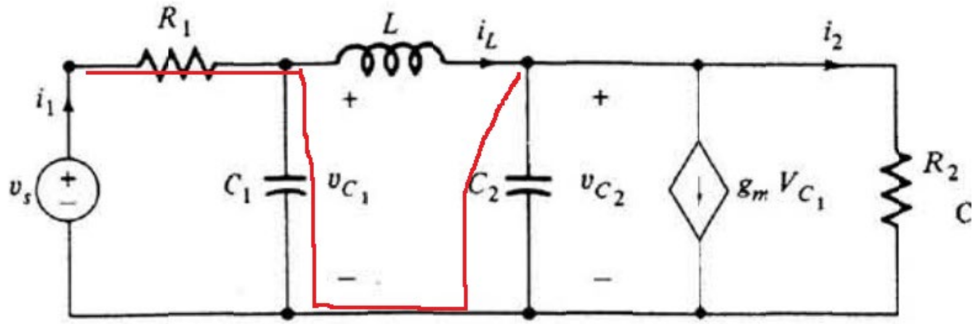
رابطه ولتاژ خازن با جریان سلف: ۱

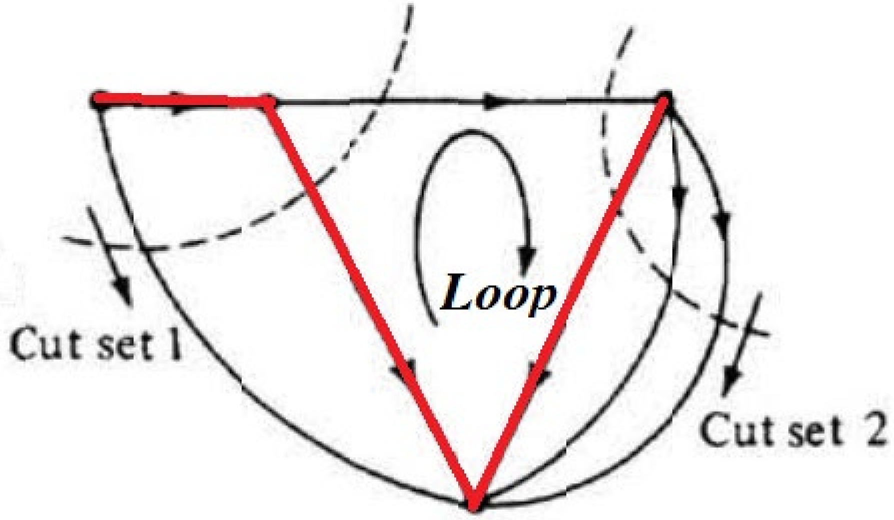
بنابراین تعداد حالتها برابر با ۴ خواهد بود.

مثال برای نوشتن معادلات حالت

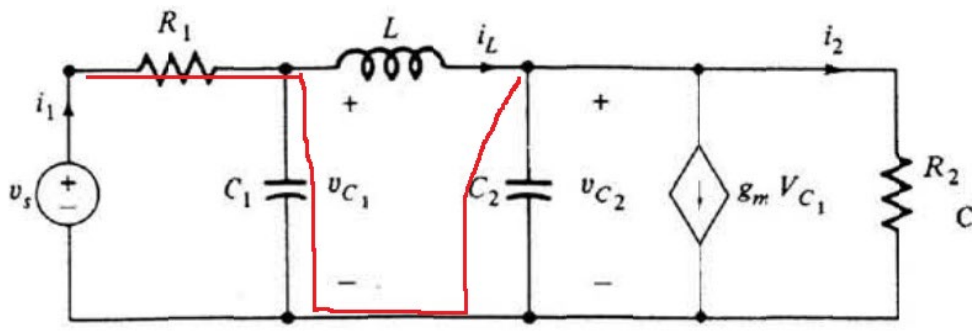


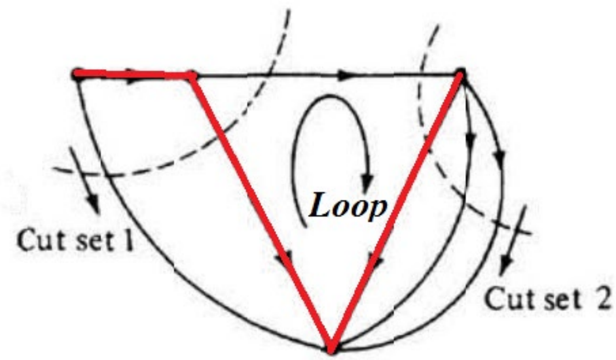
انتخاب درخت





نوشتن معادلات کات ست

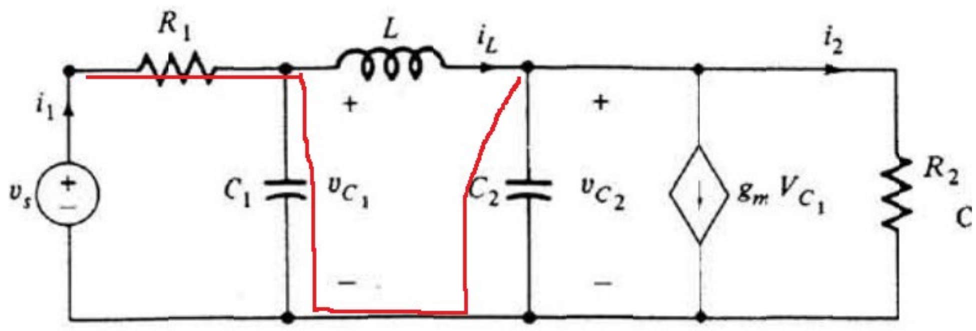


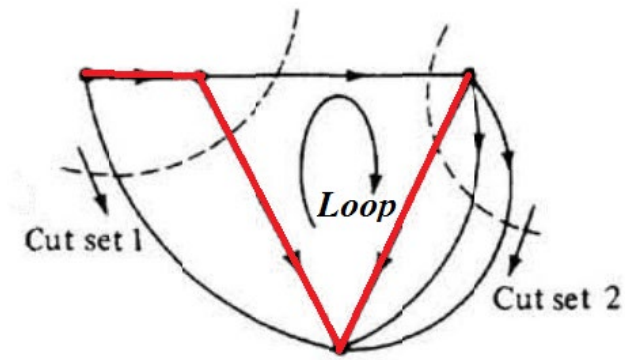


$$C_1 \frac{dv_{C1}}{dt} = i_1 - i_L = \frac{v_s - v_{C1}}{R_1} - i_L$$

$$C_2 \frac{dv_{C2}}{dt} = i_L - g_m v_{C1} - i_2 = i_L - g_m v_{C1} - \frac{v_{C2}}{R_2}$$

نوشتن معادلات حلقه





$$L \frac{di_L}{dt} = v_{C1} - v_{C2}$$

بیان ماتریسی معادلات

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dv_{C1}}{dt} \\ \dfrac{dv_{C2}}{dt} \\ \dfrac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_1C_1} & 0 & -\dfrac{1}{C_1} \\ -\dfrac{g_m}{C_2} & -\dfrac{1}{C_2R_2} & \dfrac{1}{C_2} \\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_s$$

تغییر متغیر

$$\mathbf{x} = [q_1, q_2, \phi]^T$$

$$q_1 = C_1 v_{C1} \qquad q_2 = C_2 v_{C2} \qquad \text{and} \qquad \phi = L i_L$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dq_1}{dt} \\ \dfrac{dq_2}{dt} \\ \dfrac{d\phi}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_1 C_1} & 0 & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{-g_m}{C_1} & -\dfrac{1}{R_2 C_2} & +\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C_1} & \dfrac{1}{C_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_s$$

تغییر متغیر

$$q_1 = C_1 v_{C1}$$

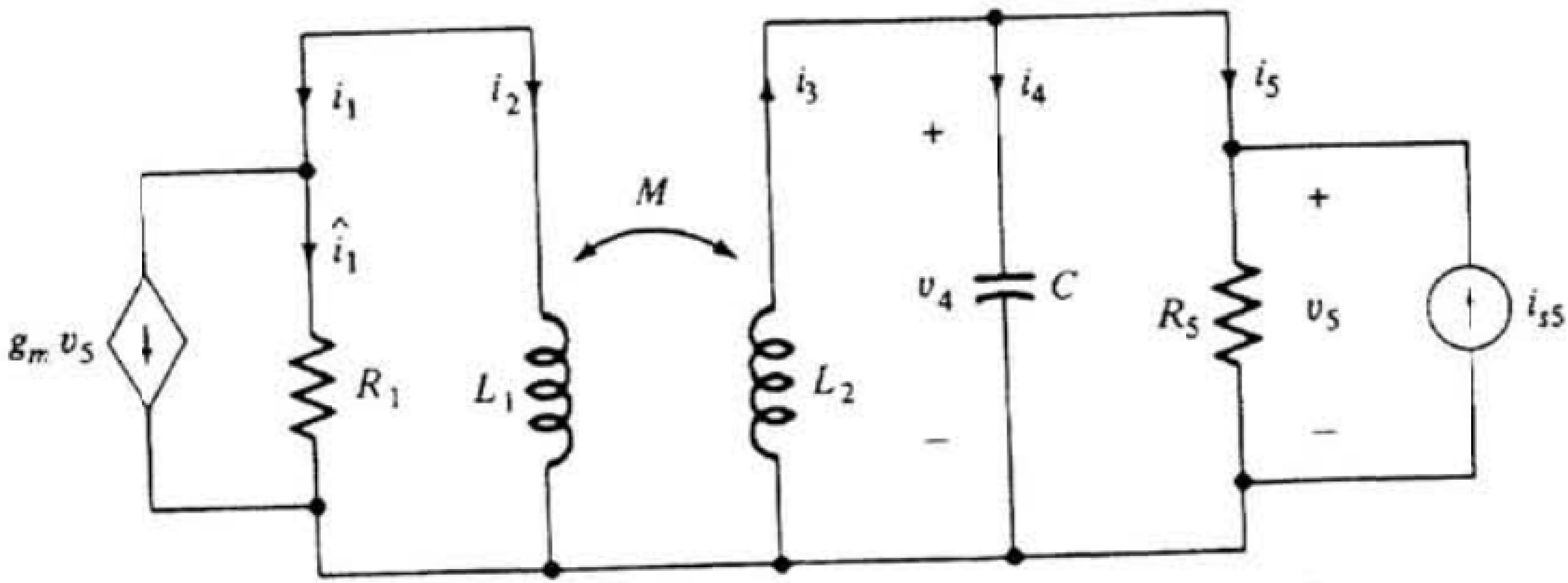
$$q_2 = C_2 v_{C2}$$

$$\phi = L i_L$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dv_{C1}}{dt} \\ \dfrac{dv_{C2}}{dt} \\ \dfrac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_1C_1} & 0 & -\dfrac{1}{C_1} \\ -\dfrac{g_m}{C_2} & -\dfrac{1}{C_2R_2} & \dfrac{1}{C_2} \\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_s$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dq_1}{dt} \\ \dfrac{dq_2}{dt} \\ \dfrac{d\phi}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_1C_1} & 0 & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{-g_m}{C_1} & -\dfrac{1}{R_2C_2} & +\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C_1} & \dfrac{1}{C_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_s$$

مثال دیگر



$g_m = 1\,\text{S}$ $R_1 = 10\,\Omega$ $L_1 = 10\,\text{H}$ $L_2 = M = 1\,\text{H}$ $C = 1\,\text{F}$ $R_5 = 10\,\Omega$