



## نظریه بازی

بهار ۱۴۰۳

استاد درس: دکتر کبریایی

زمان تحویل: ۶ تیر

تمرین سری پنجم

توجه: در تمام سوالات پروسه‌ی حل را بصورت دقیق بیان نمایید. برای ارتباط با تدریس‌یاران مربوط به این تمرین، لطفاً در گروه تلگرامی عضو شوید.

## سوال ۱: بازی Bertrand تکرارشونده با محصولات متمایز (۱۰ نمره)

بازی Bertrand با توابع ارزش ۱ و هزینه  $c = 3$  را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}\pi_a &= (24 - 2p_a + p_b)(p_a - c) \\ \pi_b &= (24 - 2p_b + p_a)(p_b - c)\end{aligned}\quad (۱)$$

آ) تعادل نش بازی را از طریق تقاطع بهترین پاسخ‌ها به دست آورید.

ب) اگر بازیگر a با استفاده از روش گرادیان اصلاح‌شده با پارامتر  $\alpha$  و تخمین ساده‌انگارانه و بازیگر b با استفاده از تصمیم‌گیری بهترین پاسخ و تخمین تطبیقی با پارامتر  $\beta$  یادگیری را انجام دهند، به سوالات زیر پاسخ دهید.

۱) معادلات یادگیری را استخراج و نقاط تعادل را به دست آورید.

۲) پایداری نقاط تعادل را با استفاده از خطی سازی به ازای  $\alpha = 0.04$  و  $\beta = 0.2$  بررسی کنید. کدام یک از نقاط تعادل می‌تواند نش بازی باشد، چرا؟

## سوال ۲: بررسی ارتباط نش، ESS و نقطه تعادل RD (۲۰ نمره)

دو ماتریس  $U$  و  $V$  که مربوط به دو بازی استراتژیک متقارن با سه بازیگر است را در نظر گرفته و به سوالات زیر پاسخ دهید.

$$U = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \\ 11 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \\ 9 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

آ) چه ارتباطی میان Payoff های دو ماتریس وجود دارد؟

ب) تعادل(های) هر دو بازی را به دست آورید.

ج) بررسی کنید که آیا تعادل(های) نش دو بازی ESS هستند یا خیر؟

د) معادلات RD را در شرایط گسسته برای بازی‌های  $U$  و  $V$  تشکیل داده و با استفاده از روش خطی سازی پایداری تعادل نش را بررسی کنید. (برای محاسبه ماتریس ژاکوبین می‌توانید از متلب استفاده کنید. گزارش ماتریس ژاکوبین و مقادیر ویژه الزامی است.)

ه) معادلات RD را به ازای شرایط اولیه  $(0.90, 0.05, 0.05)$  برای ماتریس  $U$  و به ازای شرایط اولیه  $(0.40, 0.30, 0.30)$  برای ماتریس  $V$  در ۲۰۰۰ بار تکرار بازی رسم کرده و نتایج را با بخش قبلی مقایسه کنید.

و) چه نتیجه‌ای می‌توانید در مورد وجود ESS، RD و رابطه بین دو مفهوم پایداری با توجه به این سوال بگیرید؟

### سوال ۳: مدل یادگیری گسسته Fictitious Play (۲۰ نمره)

در یک بازی دو نفره با ۳ استراتژی، تابع سود به صورت زیر است.

	C1	C2	C3
R1	2, -2	1, -1	0, 0
R2	2, -2	0, 0	3, -3
R3	-1, 1	3, -3	-3, 3

(آ) تعادل های نش این بازی را بیابید.

(ب) اگر در ۳ تکرار قبلی بازی تاریخچه به صورت  $r1, r1, r2$  برای نفر اول و  $c1, c2, c3$  برای نفر دوم باشد و افراد از تاریخچه بازی یکدیگر اطلاع داشته باشند، انتخاب افراد در ۴ مرحله ی بعدی بازی را بررسی کنید. (تاریخچه بازی تاکنون را به عنوان یک فرض اولیه در نظر بگیرید. لازم نیست دلیل وقوع آن را بررسی کنید.)

(ج) با توجه به تاریخچه تصمیمات بخش ب همگرایی تصمیمات افراد به تعادل نش قسمت الف را از نظر متوسط زمانی بررسی کنید.

### سوال ۴: بخش کامپوتری بررسی تعادل های نش، ESS و RD (۲۰ نمره)

با توجه به ماتریس payoff زیر به سوالات پاسخ دهید.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(آ) تعادل نش سیستم را بیابید.

(ب) تعادل پایدار تکاملی (ESS) را بیابید.

(ج) با استفاده از کد متلب یا پایتون تابعی بنویسید که دینامیک تکاملی را مدل کند. این تابع با گرفتن ماتریس سود، جمعیت اولیه و تعداد مراحل جمعیت جدید را در هر مرحله بیان می کند.

(د) با استفاده از این تابع همگرایی شرایط اولیه متفاوت به تعادل Replicator Dynamics را بررسی کنید.

### سوال ۵: بخش کامپوتری Fictitious Play (۳۰ نمره)

در یک بازی دو نفره با ۲ استراتژی، تابع سود به صورت زیر است. فرض کنید این بازی تکرارشونده است و هر بازیکن برای پیدا کردن استراتژی خود از بازی ساختگی (Fictitious Play) استفاده می کند. برنامه ای بنویسید که موارد زیر را محاسبه کند. (متلب یا پایتون)

	L	R
U	5, 2	0, 3
D	4, a	2, 7

(آ) تعادل نش این بازی را برای  $a=4$  پیدا کنید.

(ب) فرض کنید بازیکنان مشاهدات قبلی  $(n1=(0,2), n2=(2,3))$  را دارند. بررسی کنید که این بازی با استفاده از بازی ساختگی (Fictitious Play) به تعادل نش مورد (الف) می رسد یا خیر؟ جواب خود را تحلیل کنید.

(ج) تعادل نش این بازی را برای  $a=10$  پیدا کنید.

(د) فرض کنید بازیکنان مشاهدات قبلی مورد (ب) را دارند. بررسی کنید که این بازی با استفاده از بازی ساختگی (Fictitious Play) به تعادل نش مورد (پ) برای  $a=10$  می رسد یا خیر؟ جواب خود را تحلیل کنید.

نکات ضروری در این سوال:

قسمت های اصلی کد به همراه توضیح قدم به قدم در گزارش ذکر شود.

فایل کدها به همراه فایل گزارش پیوست شود.

دقت شود که کدها ترجیحا کامنت گذاری شده و قابل اجرا باشند (اگر نیاز به کتابخانه ی اضافی هست ذکر شود).