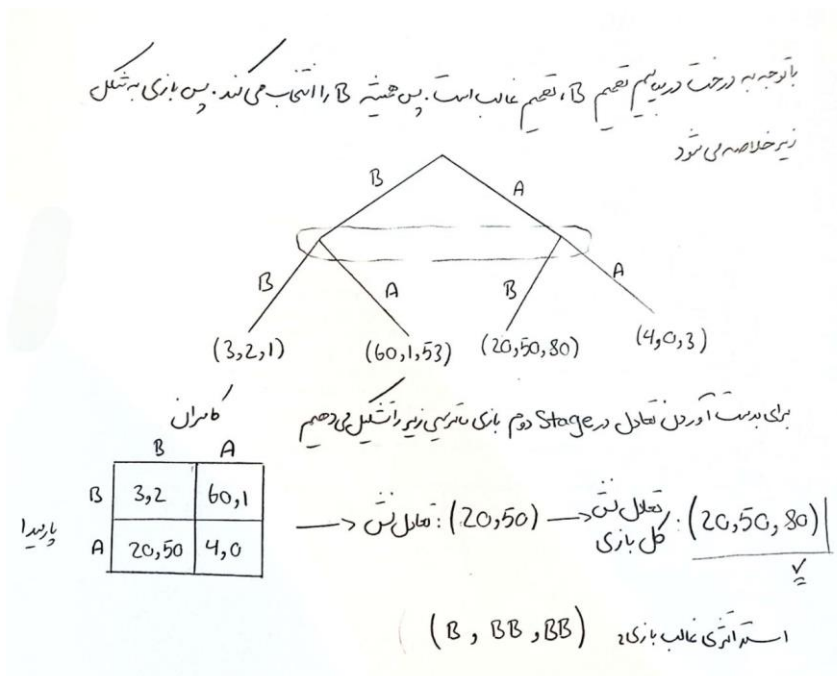
.۱

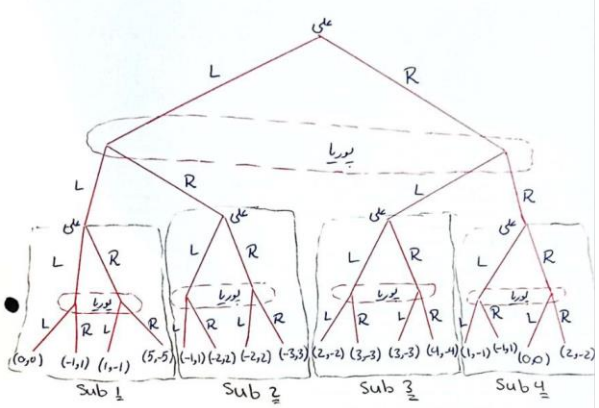
الف) با استفاده از روش برگشت به عقب تعادل نش بازی زیر را بیابید.

پاسخ



ب) با استفاده از روش برگشت به عقب، تعادل نش بازی زیر را بیابید.

پاسخ



Sub 1:

علی \ پوریا	L	R
L	0,0	-1,1
R	1,-1	5,-5

تعادل نش خالص: $(1,-1)$

Sub 2:

علی \ پوریا	L	R
L	-1,1	-2,2
R	-2,2	-3,2

تعادل نش خالص: $(-2,2)$

Sub 3:

علی	L	R
L	2,-2	3,-3
R	3,-3	4,-4

تعادل نش خالص: $(3,-3)$

Sub 4:

علی \ پوریا	L	R
L	1,-1	-1,1
R	0,0	2,-2

تعادل نش خالص نداریم!
پس تعادل نش مخلوط را حساب می‌کنیم (با استفاده از بازی سوم):

$q-(1-q)=2(1-q) \longrightarrow q=\frac{3}{4}$

$-P=P-2(1-P) \longrightarrow P=\frac{1}{2}$

ادامه زیربازی چهارم:

$E(u_1)=1\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}-1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+0+2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

$E(u_2)=-1\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+0-2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$

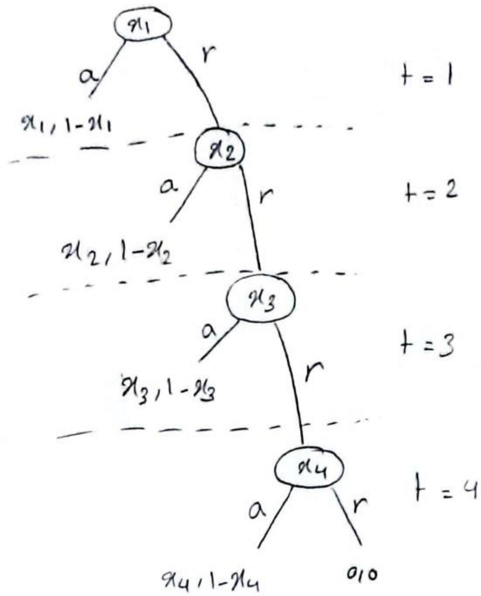
حال جمع‌بندی می‌کنیم:

علی \ پوریا	L	R
L	1,-1	-2,2
R	3,-3	$\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$

تعادل نش خالص: $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

استراتژی بازیگران $\longrightarrow \left(R, R, \left((\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{3}{4},\frac{1}{4})\right)\right)$

.۲



در هر مرحله یک بازیکن عدد پیشنهاد می‌دهد و بازیکن دیگر تایید a یا رد r می‌کند. مسئله را با استقرای معکوس حل می‌کنیم.

$$t=4 \begin{cases} \text{player 2: accept if } 1-x_4 \geq 0 \\ \text{player 1: } x_4 = 1 \,,\ 1-x_4 = 0 \end{cases}$$

$$t=3 \begin{cases} \text{player 1: accept if } x_3 \geq \delta_1 \\ \text{player 2: } x_3 = \delta_1 \,,\ 1-x_3 = 1-\delta_1 \end{cases}$$

$\rightarrow$ اگر سهم بیشتری به خودش بدهد رد می‌شود و در مرحله‌ی آخر سود ۰ خواهد داشت.

$$t=2 \begin{cases} \text{player 1: accept if } x_2 \geq \delta_1^2 \\ \text{player 2: } x_2 = \delta_1^2 \,,\ 1-x_2 = 1-\delta_1^2 \end{cases}$$

$$t=1 \begin{cases} \text{player 2: accept if } 1-x_1 \geq \delta_2(1-\delta_1^2) \\ \text{player 1: } x_1 = 1-\delta_2(1-\delta_1^2) \,,\ 1-x_1 = \delta_2(1-\delta_1^2) \end{cases}$$

.۳

	A	B
A	0,5	1,1
B	1,1	5,0

الف) B استراتژی غالب player1 است ← $Nash = (B, A)$
A 〃 〃 player2

ب) نفر اول با سرپیچی در مراحل فرد به B و نفر دوم با سرپیچی در مراحل زوج به A ممکن است سود بیشتری به دست بیاورد. استراتژی افراد را این‌گونه در نظر می‌گیریم که در مراحل فرد (A, A) و در مراحل زوج (B, B) بازی شود و اگر حریف سرپیچی کرد، از آن به بعد استراتژی غالب هر فرد بازی شود.

سود افراد در صورت پایبندی:

$$u_1 = 5\delta + 5\delta^3 + 5\delta^5 + \cdots + 5\delta^{2t+1} + \cdots$$

$$u_2 = 5 + 5\delta^2 + 5\delta^4 + \cdots + 5\delta^{2t} + \cdots$$

اگر بازیکن اول در مرحله‌ی $2t+1$ تخطی کند:

$$u_1' = \overbrace{5\delta + 5\delta^3 + 5\delta^5 + \cdots + 5\delta^{2t-1}}^{\text{همکاری}} + \underset{\text{تخطی}}{\underset{\uparrow}{\delta^{2t}}} + \underbrace{\delta^{2t+1} + \delta^{2t+2} + \cdots}_{\text{مجازات}}$$

$$u_1 - u_1' = 5\delta^{2t+1}(1 + \delta^2 + \delta^4 + \cdots) - \delta^{2t}(1 + \delta + \delta^2 + \cdots)$$

$$= 5\frac{\delta^{2t+1}}{1-\delta^2} - \frac{\delta^{2t}}{1-\delta} \geqslant 0$$

$$\rightarrow \frac{5\delta}{1+\delta} \geqslant 1 \rightarrow \boxed{\delta \geqslant \frac{1}{4}}$$

اگر بازیکن دوم در مرحله‌ی $2t+2$ تخطی کند:

$$u_2' = \overbrace{5 + 5\delta^2 + \cdots + 5\delta^{2t}}^{\text{همکاری}} + \underset{\downarrow}{\overset{\text{تخطی}}{\delta^{2t+1}}} + \underbrace{\delta^{2t+2} + \delta^{2t+3} + \cdots}_{\text{مجازات}}$$

$$u_2 - u_2' = 5\frac{\delta^{2t+2}}{1-\delta^2} - \frac{\delta^{2t+1}}{1-\delta} \geqslant 0$$

$$\rightarrow 5\delta \geqslant 1 + \delta \rightarrow \boxed{\delta \geqslant \frac{1}{4}}$$

اگر $\delta \geqslant \frac{1}{4}$ باشد استراتژی بیان شده یک SPE است.

۴.

الف) هر زیربازی متناظر یکی از رأسهای درخت فرم گسترده، و زیردرخت آغاز شده از آن رأس میباشد. پس در این سوال باید، تعداد رأسهایی که در فرم گسترده بعد از دو مرحله به آنها میرسیم را بشماریم. با حالتبندی روی عمودی یا افقی بودن برش کیمیا و پارسا به تعداد زیر میرسیم:

$$2 \times 30 \times 29 + 4 \times 30^2 = 5340$$

ب) بازی با ۱ ورق سرامیک آغاز می شود و با 31×31 تکه سرامیک تمام میشود؛ و هر مرحله فارغ از محل بُرش، یکی به تعداد قطعه های سرامیک اضافه میشود. پس بازی فارغ از استراتژی بازیکنان دقیقا $31 \times 31 - 1$ مرحله ادامه پیدا میکند و با توجه به زوج بودن تعداد مراحل، کیمیا همواره برندهی بازیست. اگر هر دو بازیکن، طبق استراتژی گفته شده بازی کنند، یک تعادل زیربازی کامل داریم، چرا که هیچ کدام از دو بازیکن با تغییر استراتژی خود نمیتوانند به نتیجه ی بهتری برسند در هر صورت کیمیا میبرد و پارسا می بازد.

۵. الف)

Solution: *The NE is* (D, D) *with payoffs* $u_1 = u_2 = 1$*. It is in dominant strategies.*

ب)

Solution: *The payoff with the proposed strategy profile is*

$$u_c = 4 + 4\delta + 4\delta^2 + \cdots + 4\delta^{t-1} + 4\delta^t + 4\delta^{t+1} + \cdots + 4\delta^{t+n} + 4\delta^{t+n+1} + 4\delta^{t+n+2} + \cdots$$

If one player deviates in stage t he gets the payoff

$$u_d = 4 + 4\delta + 4\delta^2 + \cdots + 4\delta^{t-1} + 6\delta^t + \delta^{t+1} + \cdots + \delta^{t+n} + 4\delta^{t+n+1} + 4\delta^{t+n+2} + \cdots$$

The proposed strategy profile is a NE iff

$$0 \le u_c - u_d = -2\delta^t + 3\delta^{t+1} + \cdots + 3\delta^{t+n} = \delta^t\left(3\delta + \cdots + 3\delta^n - 2\right) = \delta^t\left(\frac{3\delta - 3\delta^{n+1}}{1-\delta} - 2\right)$$

Thus, the strategy profile is a NE iff

$$3\delta - 3\delta^{n+1} \ge 2 - 2\delta$$

i.e.

$$5\delta \ge 2 + 3\delta^{n+1}$$

With $\delta = \frac{1}{2}$ this means

$$\frac{5}{2} \ge \frac{3}{2^{n+1}}$$

or $2^n \ge 3$. So, it is enough to take $n = 2$.

.۶

الف)

Solution: *There is no NE in pure strategies. We look for a NE in mixed strategies of the form*

$$\sigma_1 = pC + (1-p)D$$
$$\sigma_2 = qC + (1-q)D$$

We have that

$$u_1(C, \sigma_2) = 6q$$
$$u_1(D, \sigma_2) = 4 - 4q$$

and

$$u_2(\sigma_1, C) = 6p + 2(1-p) = 4p + 2$$
$$u_2(\sigma_1, D) = 8p$$

We must have that

$$6q = 4 - 4q$$
$$4p + 2 = 8p$$

That is,

$$p = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{2}{5}$$

Thus,

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}D$$
$$\sigma_2 = \frac{2}{5}C + \frac{3}{5}D$$

is a NE of G with payoffs

$$u_1 = \frac{12}{5}, \quad u_2 = 4$$

ب)

Solution: *Since, the stage game has a unique NE, the unique SPNE of the game repeated finitely many times consists in playing the NE of part 1 at every stage of the repeated game.*

ج)

Solution: *Let us consider trigger strategies: Player $i = 1, 2$ at*

- $t = 1$ *plays* C*;*
- $t > 1$ *plays* C *if* (C, C) *was played at* $t = 1, \dots, t-1$*. Otherwise, play* (σ_1, σ_2).

Let us check that it is a SPNE of the repeated game. We first check that it is a NE of the repeated game. The payoffs obtained by both players with the trigger strategy are,

$$u_1^c = u_2^c = 6 + 6\delta + \cdots + 6\delta^t + 6\delta^{t+1} + 6\delta^{t+2} + 62\delta^{t+3} + \cdots$$

Note that $\mathrm{BR}_1(C) = C$*. Hence, player 1 has no incentives to deviate. If player 2 deviates at stage* t *and player 1 follows the trigger strategy, the payoff of player 2 is*

$$u_2^d = 6 + 6\delta + \cdots + 6\delta^t + 8\delta^{t+1} + 4\delta^{t+2} + 4\delta^{t+3} + \cdots$$

The trigger strategy is NE iff $u^c - u^d \geq 0$*. That is,*

$$\delta^{t+1}\left(-2 + 2\delta + 2\delta^2 + \cdots\right) \geq 0$$

That is

$$\delta + \delta^2 + \cdots \geq 1$$

which is the same as

$$\frac{\delta}{1-\delta} \geq 1$$

Thus, the trigger strategy is a NE of the repeated game iff

$$\delta \geq \frac{1}{2}$$

Now, the standard argument shows that it is also a NE in every subgame: There are two types of subgames starting at a stage t.

- *Subgames in which at every stage* $1, 2, \dots, t-1$ *it was played* (C, C)*. Then, the situation in the subgame that starts at this node is exactly as above, except that the payoffs are multiplied by* δ^{t-1}*. The above argument shows that the trigger strategy is also a NE of that subgame.*
- *Subgames in which at some stage* $1, 2, \dots, t-1$ *the strategy profile* (C, C) *was not played. In these subgames the trigger strategy prescribes to play* (σ_1, σ_2)*, a NE of the stage game* G*. But, this is a SPNE of this subgame.*

Therefore, if $\delta \geq \frac{1}{2}$*, the trigger strategy is a SPNE of the repeated game. Note that in this strategy profile, the players cooperate at every stage of the repeated game.*