الف) .۱

$u_1 = s_1 + s_1 s_2 - (s_1)^2 \quad , \quad s_1^* = \underset{s_1}{\text{Arg max}}\ u_1$

$\dfrac{\partial u_1}{\partial s_1} = 1 + s_2 - 2s_1 = 0 \rightarrow \boxed{s_1^* = \dfrac{1+s_2}{2}}$ ① $\quad , \quad \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial s_1^2} = -2 < 0$ ✓

$u_1(s_1, s_2) = u_2(s_2, s_1) \rightarrow \boxed{s_2^* = \dfrac{1+s_1}{2}}$ ②

$u_3 = 10s_3 - s_1 s_3 - s_2 s_3 - s_3^2 \quad , \quad s_3^* = \underset{s_3}{\text{Arg max}}\ u_3$

$\dfrac{\partial u_3}{\partial s_3} = 10 - s_1 - s_2 - 2s_3 = 0 \rightarrow \boxed{s_3^* = \dfrac{10 - s_1 - s_2}{2}}$ ③

$\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial s_3^2} = -2 < 0$ ✓

$\xrightarrow[\text{برخورد BR ها}]{③, ②, ①}$ $\quad s_1^* = \dfrac{1+s_2^*}{2} = \dfrac{1 + \dfrac{1+s_1^*}{2}}{2} \rightarrow s_1^* = 1 \ , \ s_2^* = 1$

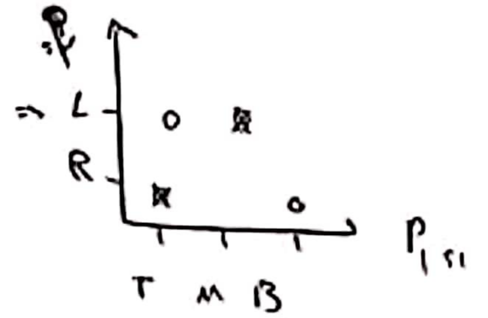
$s_3^* = \dfrac{10 - s_1^* - s_2^*}{2} = 4$

$s^* = (s_1^*, s_2^*, s_3^*) = (1, 1, 4)$

ب)

	L	R
T	۲,۲	۲,۲
P_1 M	۳,۳	۱,۰
B	۰,۰	۱,۱

$$BR_2(s_1) = \begin{cases} L,R & s_1 = T \\ L & s_2 = M \\ R & s_2 = B \end{cases} \qquad BR_1(s_2) = \begin{cases} M & s_2 = L \\ T & s_2 = R \end{cases}$$



⇒ تعادل های نش خالص $= \{(M,L), (T,R)\}$

برای تعادل های نش مخلوط ابتدا به راحتی می توان گفت که استراتژی B برای بازیکن ۱ مغلوب است و آن را حذف کرد زیرا می توان با ترکیب مناسب مانند $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ از یک استراتژی های T و M نتایج بهتری از B گرفت با حذف سطر B ماتریس بازی به صورت زیر می شود

	P_2 L	R
P_1 T	۲,۲	۲,۲
M	۳,۳	۱,۰

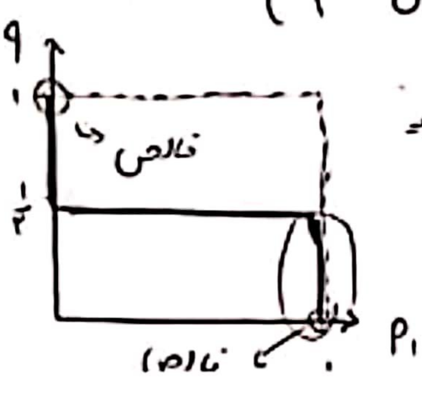
برای بدست آوردن تعادل های نش این ماتریس از روش تقاطع بهترین پاسخ ها استفاده می کنم

$$E(u_1) = 2p_1q_1 + 2p_1(1-q_1) + 3(1-p_1)q_1 + (1-p_1)(1-q_1) = p_1(1-2q_1) + 1 + 2q_1$$

$$BR_2(q_1) = \underset{p_1}{\mathrm{Arg\,max}}\ u_1(p_1,q_1) = p_1(1-2q_1) + \underbrace{\cancel{1+2q_1}}_{\text{ثابت}} = p_1^*(q_1) = \begin{cases} 1 & q < \frac{1}{2} \\ - & q = \frac{1}{2} \\ 0 & q > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$E(u_2) = u_2 = p^T B q = 2p_1q_1 + 2p_1(1-q_1) + 3(1-p_1)q_1 = 3q(1-p) + 2p_1$$

$$\Rightarrow {}^{BR} q_1^*(p_1) = \begin{cases} - & p_1 = 1 \\ 1 & \text{o.w} \end{cases}$$



⇒ تعادل های نش مخلوط $= \left((1,0,0), (q_1^*, 1-q_1^*) \right) + \quad q_1^* \in [0 \quad \frac{1}{2}] \quad ((0,1,0),(1,0))$

2.

الف)

		شایان: مشت	شایان: پناه
مجید	شاتگان	6,-10	0,10
	مشت	4,1	1,0

محاسبه‌ی نش خالص:

BR(مجید) = { شاتگان : مشت = شایان ؛ مشت : پناه = شایان }

BR(شایان) = { مشت : مشت = مجید ؛ پناه : شاتگان = مجید }

$\Rightarrow$ BR ها تقاطع ندارند بنابراین نش خالص وجود ندارد

	q	$1-q$
p	6,10	0,10
$1-p$	4,1	1,0

محاسبه‌ی نش مخلوط:

چون هیچ نش خالصی وجود ندارد می‌توان از روش سوم نش مخلوط را محاسبه کرد و اطمینان داشت که تمام نش‌های مخلوط از این روش به دست می‌آید.

$$\delta = (\overbrace{[p, 1-p]}^{\delta_1^*}, \overbrace{[q, 1-q]}^{\delta_2^*})$$

مجید: $u_1(\text{شاتگان}, \delta_2^*) = u_1(\text{مشت}, \delta_2^*)$

$$6q = 4q + 1 - q \rightarrow q = \frac{1}{3}$$

شایان: $u_2(\text{مشت}, \delta_1^*) = u_2(\text{پناه}, \delta_1^*)$

$$-10p + (1-p) = 10p \rightarrow p = \frac{1}{21}$$

$$\delta = ([\tfrac{1}{21}, \tfrac{20}{21}], [\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}])$$

تعادل مخلوط به دست آمده تنها تعادل این بازی است.

ب) ابتدا سود بازیکنان در تعادل نش مخلوط به دست آمده را محاسبه می‌کنیم.

$$u_1 = \frac{1}{21}\left(\frac{1}{3}\times 6 + \frac{2}{3}\times 0\right) + \frac{20}{21}\left(\frac{1}{3}\times 4 + \frac{2}{3}\times 1\right) = 2$$

$$u_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{21}(-10) + \frac{20}{21}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{21}\times 10 + \frac{20}{21}\times 0\right) = \frac{10}{21}$$

اگر مجید با احتمال $p-\varepsilon$ شاتگان بازی کند، تعادل از بین رفته و برای شایان استراتژی مشت سود بیشتری دارد. بنابراین استراتژی خود را به مشت خالص تغییر می‌دهد.

در این حالت سود بازیکنان به صورت زیر می‌شود.

$$u_1 = \left(\frac{1}{21} - \varepsilon\right)(1\times 6 + 0\times 0) + \left(\frac{20}{21} + \varepsilon\right)(1\times 4 + 0\times 1) = \frac{86}{21} - 2\varepsilon > 2$$

$$u_2 = \left(\frac{1}{21} - \varepsilon\right)(-10) + \left(\frac{20}{21} + \varepsilon\right)\times 1 = \frac{10}{21} + 11\varepsilon > \frac{10}{21}$$

پ) مشابه بخش قبل مجید با احتمال ۱ استراتژی شاتگان را بازی می‌کند. سود حاصل از این بازی به صورت زیر می‌شود.

$$u_1 = \left(\frac{1}{3} + \varepsilon\right)6 + \left(\frac{2}{3} - \varepsilon\right)\times 0 = \frac{6}{3} + \varepsilon > 2$$

$$u_2 = \left(\frac{1}{3} + \varepsilon\right)(-10) + \left(\frac{2}{3} - \varepsilon\right)\times 10 = \frac{10}{3} - 20\varepsilon > \frac{10}{21}$$

۳

الف)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial q_1} = P(q_1+q_2) + \dfrac{\partial P}{\partial q_1} q_1 - \dfrac{\partial C}{\partial q_1} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial u_2}{\partial q_2} = P(q_1+q_2) + q_2 \cdot \dfrac{\partial P}{\partial q_2} - \dfrac{\partial C}{\partial q_2} = 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \partial u_1/\partial q_1 = \dfrac{1}{1-\alpha}\left(1-(q_1+q_2)^{1-\alpha}\right) + \dfrac{-1}{(q_1+q_2)^\alpha} q_1 - c_1 = 0 \quad (1) \\[2ex] \dfrac{\partial u_2}{\partial q_2} = \dfrac{1}{1-\alpha}\left(1-(q_1+q_2)^{1-\alpha}\right) - \dfrac{1}{(q_1+q_2)^\alpha} q_2 - c_2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{q_1}{(q_1+q_2)^\alpha} + c_1 = \frac{q_2}{(q_1+q_2)^\alpha} + c_2 \longrightarrow q_1 - q_2 = (c_2 - c_1)(q_1+q_2)^\alpha \quad (3)$$

$$(1),(2),(3) \longrightarrow \begin{cases} \left[(2-\alpha) q_1 + q_2\right](q_1+q_2)^{-\alpha} = 1-(1-\alpha)c_1 \\ \left[q_1 + (2-\alpha) q_2\right](q_1+q_2)^{-\alpha} = 1-(1-\alpha)c_2 \end{cases}$$

- برای حل دقیق بالا با توجه به تقارن حل معادله رفت اما با شرایط $c_1=c_2$ داریم:

$$(2-\alpha)\, q_1 + q_2 = q_1 + (2-\alpha)\, q_2 \longrightarrow q_1 = q_2$$

$$\longrightarrow (3-\alpha)\, q_1 \cdot (2q_1)^{-\alpha} = 1-(1-\alpha)\, c_1 \longrightarrow q_1 = \sqrt[\alpha-1]{\frac{3-\alpha}{(1-(1-\alpha)c)\, 2^{\alpha}}}$$

با توجه به رابطه بالا می‌توان گفت که اگر $0<\alpha<1$ باشد (قسمت ط) نش خالص وجود دارد در غیر این صورت نش خالص وجود ندارد

قسمت c) فرض کنیم که q_i^* دارای چگالی f_i می‌باشد:

$$u_i(q_i;q_{-i}) = \int_0^{1/2} u_i(q_i,q_{-i})\, f_{-i}(q_{-i})\, dq_{-i}^*$$

با جایگذاری داریم:

$$u_i(q_i;q_{-i}) = \cancel{F_{-i}(1/2)}^{\,1} \left(\frac{q_i}{1-\alpha} - q_i c\right) + \int_0^{1/2} \frac{-q_i}{1-\alpha} (q_i+q_{-i})^{1-\alpha} f_{-i}(q_{-i})\, dq_{-i}$$

با تعریف تابع تجمعی $F_{-i}(x) = 2x(x+\frac{1}{2})^{1-\alpha}$ حاصل عبارت بالا برابر عدد ثابت می‌گردد اگر $\alpha>0$ باشد نقطه تعادل نش مخلوط وجود دارد

- هر چند جواب این تحقیق با حدس زدن F همراه بود. لذا حل این سوال منوط به نوشتن روابط و نه رسیدن به جواب آخر است.

3- قسمت b)

با توجه به الف $\rightarrow$ $q_1 = q_2 = \sqrt[\alpha-1]{\dfrac{3-\alpha}{1-(1-\alpha)c)2^{\alpha}}}$

شرط وجود تش $q \geq 0$ $\Longrightarrow$ $q = \sqrt[\alpha-1]{\dfrac{3-\alpha}{(1-(1-\alpha)c)2^{\alpha}}} \geq 0$

تعیین علامت

ریشه صورت $\rightarrow$

α		3	
مقدار عبارت	+		−

ریشه مخرج $\rightarrow$

α		$-\frac{1}{c}+1$	
مقدار عبارت	−		+

$1-\frac{1}{c} > 3$ $\rightarrow$

α		3		$1-\frac{1}{c}$	
مقدار عبارت	−		+		−

$1-\frac{1}{c} < 3$

α		$1-\frac{1}{c}$		3	
مقدار عبارت	−		+		−

پس برای اینکه عبارت مثبت شود باید α بین ۳ و $\frac{1}{c}-1$ باشد

در این صورت مشکلی نداریم.

T جواب درست

F جواب غلط

4

utility function این بازی بصورت زیر می باشد.

$$u_i(s_i, s_{-i}) = 1_{[s_i = T]} - 11 \times 1_{\{s = TT\ldots T\}}$$

الف) تعادل نش خالص دو ویژگی زیر را دارد:

۱- حداقل یک نفر عمل F را انجام می دهد چراکه درغیراین صورت هریک از افراد با تغییر استراتژی خود از T به F امتیازش را از 10- به 0 می رساند.

۲- حداکثر یک نفر عمل F را انجام می دهد چراکه درغیراین صورت هریک از افرادی که F انجام می دهد با تغییر استراتژی اش سودش را از 0 به 1 می رساند.

بنابراین بازی n تعادل خالص دارد که در هرکدام یکی از بازیکنان 1 تا n، F و بقیه‌ی افراد T بازی می کنند.

ب) اگر بازیکنی استراتژی خالص F را بازی کند بقیه حتما خالص T را بازی می کنند. پس در تعادل نش مخلوط، تعدادی از افراد با احتمال $1 > p_i > 0$ و بقیه‌ی افراد با احتمال 1 T بازی می کنند.

افرادی که استراتژی غیرخالص را انتخاب می کنند، بین انتخاب T و F بی تفاوت هستند و سودشان فرقی نمی کند.

فرض کنیم k نفر به صورت غیرخالص بازی می کنند. اگر احتمال T بازی کردن تمامی k بازیکن به جز نفر i ام را برابر q_i در نظر بگیریم آنگاه رابطه‌ی روبروی برای محاسبه‌ی سود سود بازیکن i ام برقرار است:

سود حاصل از T برای نفر i ام = سود حاصل از F برای نفر i ام

$$0 = 1\times(1-q_i) - 10 * q_i \rightarrow q_i = \frac{1}{11}$$

$$q_i = \frac{\prod_{j=1}^{k} p_j}{p_i} = \frac{1}{11} \rightarrow p_i = 11\prod_{j=1}^{k} p_j \overset{\text{تقارن}}{=} 11(p_i)^k \rightarrow p_i = \sqrt[k-1]{\frac{1}{11}}$$

بنابراین تعادل های مخلوط این بازی تمامی بردارهای $\langle p_1, \ldots, p_n \rangle$ هستند که $n \geq k > 1$ درایه از بردارها برابر $\left(\sqrt[k-1]{\frac{1}{11}}, 1-\sqrt[k-1]{\frac{1}{11}}\right)$ و $n-k$ درایه‌ی دیگر برابر (0 و 1) هستند.

5

حالت اول : $u>w$ و $l>y$ <= استراتژی a_1 برای بازیکن اول استراتژی غالب است.

در این حالت بازیکن دوم اگر $v>m$ باشه استراتژی b_1 را انجام می دهد و اگر $v<m$ باشه استراتژی b_2 را انجام می دهد و اگر $v=m$ باشه با احتمال $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ دو استراتژی را انجام می دهد.

حالت دوم : $u<w$ و $l<y$ <= استراتژی a_2 برای بازیکن اول استراتژی غالب است.

در این حالت بازیکن دوم اگر $x>z$ باشه استراتژی b_1 را انجام می دهد و اگر $x<z$ باشد استراتژی b_2 را انجام می دهد و اگر $x=z$ باشد با احتمال $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ دو استراتژی را انجام می دهد.

حالت سوم : $v>m$ و $x>z$ <= استراتژی b_1 برای بازیکن دوم استراتژی غالب است.

در این حالت بازیکن اول اگر $u>w$ باشه استراتژی a_1 را انجام می دهد و اگر $u<w$ باشه استراتژی a_2 را انجام می دهد و در غیر این حالت با احتمال $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ دو استراتژی را انجام می دهد.

حالت چهارم: $v<m$, $x<z$ <= استراتژی b_2 برای بازیکن دوم استراتژی غالب است

در این حالت اگر بازیکن اول $l>y$ باشد استراتژی a_1 را انجام می‌دهد و اگر $l<y$ باشد استراتژی a_2 را انجام می‌دهد در غیر این صورت با احتمال $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ دو استراتژی را انجام می‌دهد.

حالت پنجم: در باقی حالات استراتژی مغلوب نداریم و می‌توانیم از تساوی سوم استفاده کنیم:

$$\delta_1^* = (P, 1-P)$$

$$\Rightarrow U_2(\delta_1^*, b_1) = P \times v + (1-P) \times x$$

$$, \quad U_2(\delta_1^*, b_2) = P \times m + (1-P) z$$

$$\Rightarrow U_2(\delta_1^*, b_1) = U_2(\delta_1^*, b_2)$$

$$\Rightarrow Pv + (1-P)x = Pm + (1-P)z$$

$$\longrightarrow P(v - x - m + z) = z - x$$

$$\longrightarrow P = \frac{z-x}{v+z-x-m} \checkmark$$

$$, \quad \delta_1^* = (P, 1-P)$$

همین کارها را برای حالات زیر اگر بکنیم؟

$$\delta_2^* = (q, 1-q)$$

$$\longrightarrow U_1(a_1, \delta_2^*) = U_1(a_2, \delta_2^*)$$

$$\longrightarrow q = \frac{y-l}{y+u-l-w}$$

$$, \delta_2^* = (q, 1-q)$$

player 1 : $BR_1(b_1) = a_3$

$BR_1(b_2) = a_1$ یا a_3

$BR_1(b_3) = a_1$

$BR_1(b_4) = a_2$

استراتژی a_4 مغلوب است ردیف a_4 حذف می شود و دیگر مورد بررسی قرار نمی گیرد.

player 2 : $BR_2(a_1) = b_1$

$BR_2(a_2) = b_2$

$BR_2(a_3) = b_3$

→ b_4 مغلوب است ستون آخر حذف می شود

player 1 : با حذف ستون آخر استراتژی a_2 هم مغلوب می شود و ردیف دوم حذف می شود.

player 2 : با حذف ردیف دوم استراتژی b_2 مغلوب می شود

بنابراین ماتریس بازی به صورت زیر در می آید:

		q	$1-q$
		b_1	b_3
p	a_1	$-1, 2$	$2, -1$
$1-p$	a_3	$2, -1$	$-1, 2$

همانطور که مشخص است بازی نش خالص ندارد بنابراین می توان از روش سوم نش های مخلوط آن را محاسبه کرد

$$\delta^* = (\underbrace{[p, 1-p]}_{\delta_1^*}, \underbrace{[q, 1-q]}_{\delta_2^*})$$

player 1 : $u_1(a_1, \delta_2^*) = u_1(a_3, \delta_2^*)$

$$\rightarrow -1 \times q + 2 \times (1-q) = 2q + -1 \times (1-q) \rightarrow q = \frac{1}{2}$$

به دلیل تقارن بازی $p = \frac{1}{2}$

نش مخلوط : $\delta^* = ([1/2, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$

7. الف)

بازیکنان: ساکنین ساختمان که P_1 تا P_9 هستند.

استراتژی ها: هر یک از بازیکنان یکی از دو استراتژی V (رای به افزایش قیمت) یا D (رای به ثابت ماندن قیمت) را انتخاب می‌کنند. $S=\{V, D\}$

توابع سود: فرض کنیم اجاره‌ی هر یک از واحد ها برابر P است. با افزایش نرخ اجاره این میزان به P' ($P'>P$) می‌رسد.

یک ضریب $\alpha_i \in [0,1]$ برای هر یک از افراد در نظر می‌گیریم. این ضریب بیان کننده‌ی امید به داشتن پارکینگ است. i اندیس بازیکن است و i کمتر نشان‌دهنده‌ی سابقه‌ی بیشتر و حضور بیشتر در ساختمان است. بنابراین $\alpha_i > \alpha_j$ if $i<j$ و $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1$

به این ترتیب payoff بازیکنان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$payoff = 3\times\frac{1}{9}P - \alpha_i P = \left(\frac{1}{3}-\alpha_i\right)P$$

فرضیات در نظر گرفته شده:

۱- به غیر از α_i ساکنان مشابه در نظر گرفته شده‌اند و همگی به اجاره‌ی پارکینگ نیاز دارند.

۲- بازیکنان بدون دانستن رای یکدیگر رای می‌دهند و رای ایشان مستقل از رای دیگران است.

۳- تمامی ساکنان باید یکی از V یا D رای دهند.

ب) علامت $\frac{1}{3}-\alpha_i$ تعیین کننده‌ی رای افراد است. اگر $\alpha_i > \frac{1}{3}$ باشد نفر i ام و نفرات قبلی او به افزایش نرخ اجاره رای منفی می‌دهند و اگر $\alpha_i < \frac{1}{3}$ باشد، نفر i ام و نفرات بعدی او به افزایش نرخ رای مثبت می‌دهند زیرا افزایش P موجب افزایش payoff آن‌ها می‌شود.

برای تصویب شدن تصمیم کافی است 5 نفر رای مثبت دهند. بنابراین اگر $\alpha_5 < \frac{1}{3}$ باشد، حداقل 5 نفر رای مثبت می‌دهند و افزایش اجاره تصویب می‌شود.