



## تمرین شماره اول

نظریه بازی‌ها  
بهار 1403

استاد: دکتر کبرایی  
مهلت تحویل: 1403/01/15

1. به خواسته هر بخش پاسخ دهید.

الف) دریا، کامران و پارمیدا با استراتژی‌های  $s_1, s_2, s_3$  و توابع سود  $u_1, u_2, u_3$  که در زیر بیان شده است در حال انجام بازی هستند. تعادل نش این بازی را در صورت وجود بیابید.

$$\begin{aligned}u_1(s_1, s_2, s_3) &= s_1 + s_1 s_2 - s_1^2 \\u_2(s_1, s_2, s_3) &= s_2 + s_2 s_1 - s_2^2 \\u_3(s_1, s_2, s_3) &= 10s_3 - s_1 s_3 - s_2 s_3 - s_3^2\end{aligned}$$

ب) تعادل‌های نش خالص و مخلوط بازی زیر را بیابید.

2,2	2,2
3,3	1,0
0,0	1,1

2. جدول زیر دعوا بین مجید و شایان است، استراتژی‌های مجید استفاده کردن از شاتگان یا مشت زدن است و استراتژی‌های شایان پناه گرفتن پشت دیوار یا حمله با مشت است:

شایان \ مجید	مشت	پناه گرفتن
شاتگان	6,-10	0,10
مشت	4,1	1,0

الف) تعادل نش خالص و مخلوط این بازی را بیابید و همچنین درمورد یکتایی آنها بحث کنید.

ب) نشان دهید اگر مجید بتواند متعهد شود که با احتمال اندکی کمتر از  $p$  (احتمالی که در تعادل نش ترکیبی بازی می‌کند) استراتژی استفاده از شاتگان را بازی کند در این صورت مجید میتواند امتیاز خود را افزایش دهد و همچنین شایان نیز سود میکند و امتیاز بیشتری از امتیاز در تعادل نش بدست می‌آورد.

پ) نشان دهید اگر شایان بتواند متعهد شود که با احتمال اندکی بیشتر از  $q$  (احتمالی که در تعادل نش ترکیبی بازی می‌کند) استراتژی حمله با مشت را بازی کند در این صورت شایان میتواند امتیاز خود را افزایش دهد و همچنین مجید نیز سود میکند و امتیاز بیشتری از امتیاز در تعادل نش بدست می‌آورد.

ج) نتایج بدست آمده از بخش ب و پ را تحلیل کنید.

3. بازی کورنات بین دو شرکت به شکل زیر در نظر بگیرید. هر یک از شرکت‌ها استراتژی خود را به شکل  $q_i \in [0, \frac{1}{2}]$  انتخاب می‌کند و قیمت محصول نیز از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود.

$$P = \frac{1}{1-\alpha} (1 - x^{1-\alpha}) \quad \text{if} \quad \alpha < 2$$

تابع سود هر بازیگر به شکل زیر بیان می‌شود:

$$u_i(q_i, q_{-i}) = q_i * P(q_i + q_{-i}) - C(q_i), \quad i \in \{1, 2\}$$

که در معادلات بالا تابع  $[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$   $C_i$  تابع هزینه می‌باشد و مشتق پذیر است.

با مفروضات بالا به سوالات زیر پاسخ دهید (در صورت نیاز فرض کنید  $C_1 = C_2$ ):

(a) با فرض  $\alpha < 0$  و همچنین  $C(q_i) = c_i * q_i, c_i > 0$  بررسی کنید آیا بازی بالا دارای نقطه تعادل نش خالص می‌باشد؟

(b) اگر  $0 < \alpha < 1$  و  $C(q_i)$  یک تابع صعودی و مشتق پذیر باشد، بررسی کنید که نقطه تعادل نش در این حالت وجود دارد یا خیر؟

(c) با مفروضات بخش a بررسی کنید آیا این بازی دارای نقطه تعادل نش مخلوط می‌باشد؟ (برای راحتی نش متقارن فرض شود).

4. آزمونی با یک سوال در یک کلاس  $N > 2$  نفره در حال برگزاری است. متاسفانه پاسخنامه این آزمون از قبل لو رفته است و تمامی دانشجویان جواب سوال را میدانند. هر یک از آنها میتواند یکی از دو استراتژی نوشتن جواب درست یا غلط را انتخاب کند. کسی که جواب درست را انتخاب کند یک نمره مثبت دریافت می‌کند و کسی که جواب غلط بدهد نمره‌ای نمی‌گیرد.

اگر تمامی دانشجویان جواب درست بدهند آزمون باطل اعلام شده و از تمامی دانشجویان به دلیل تقلب ۱۰ نمره کسر می‌شود (واضح است که نمره‌ی سوال را هم دریافت نمی‌کنند).

الف) تمامی تعادل‌های نش خالص این مسئله بیابید.

ب) تمامی تعادل‌های نش مخلوط این مسئله بیابید.

5. ثابت کنید برای هر بازی دو نفره‌ای با شرایط زیر تعادل نش مخلوط وجود دارد.

		<i>player2</i>	
		$b_1$	$b_2$
<i>player1</i>	$a_1$	$u, v$	$l, m$
	$a_2$	$\omega, x$	$y, z$

شرط:  $u \neq \omega, l \neq y, v \neq m, x \neq z$

6. تمام استراتژی‌های مخلوط بازی زیر را بیابید.

		کیمیا			
		$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$
کامیار	$a_1$	-1,2	2,0	2,-1	1,0
	$a_2$	0,2	0,3	0,0	4,1
	$a_3$	2,-1	2,0	-1,2	1,0
	$a_4$	0,1	1,3	0,3	1,4

7. (سوال امتیازی) در آپارتمان‌های سازمانی، افراد برای مدت محدودی ساکن می‌شوند تا زمانی که به خانه خود بروند. حال فرض کنید یک آپارتمان سازمانی 9 واحد دارد و به دلیل مساحت زیر بنای کم فقط 3 جایگاه پارکینگ دارد. این پارکینگ‌ها مالکیت ثابتی ندارند. اولویت مالکیت این پارکینگ‌ها با ساکنین با سابقه بیشتر است. همچنین ساکنینی که از پارکینگ استفاده می‌کنند اجاره بهایی را پرداخت می‌کنند و این پول بین تمام ساکنین (حتی افرادی که پارکینگ را دارند) تقسیم می‌شود و همه ساکنین به این پول نیاز دارند. آقا منصور به تازگی به این آپارتمان نقل مکان کرده است و در حال گذراندن درس نظریه بازی است و به تازگی مبحث اقتصاد اشتراکی (sharing economy) را از نقشه راه 2030 مهندسی کنترل (لینک) مطالعه کرده است، در جلسه هیئت مدیره پیشنهاد می‌کند اجاره‌بها پارکینگ افزایش پیدا کند (این افزایش قیمت محدودیتی ندارد، صرفاً اجاره‌بها پیشنهادی از اجاره‌بها قبلی بیشتر است). طرح منصور تنها در صورتی تصویب می‌شود که بیش از نیمی از افراد ساختمان به این طرح رای دهند. و فرض کنید افراد بدون دانستن رای دیگر افراد رای می‌دهند و رای ساکنین از یکدیگر مستقل است و تمام ساکنین به افزایش یا ثابت ماندن اجاره‌بها رای خواهند داد.

الف) یک بازی با شرایط بالا تعریف نمایید (بازیگران، استراتژی‌ها، و توابع سود را مشخص کنید) و فرضیات خود را بگویید.

ب) بررسی نمایید در چه صورت ایده افزایش اجاره‌بها آقا منصور تعادل نش است و طرح افزایش اجاره‌بها تصویب می‌شود.

## نکات کلی درباره تمرین

- مطابق قوانین اعلام شده در ابتدای ترم عمل کنید.
  - در صورت وجود هرگونه سوال و ابهام از طریق ایمیل‌های زیر با دستیاران آموزشی در ارتباط باشید. دستیاران آموزشی موظف به پاسخگویی از راه‌های ارتباطی دیگر نیستند.
- زینب پورقیصری: [z.pourgheisari@gmail.com](mailto:z.pourgheisari@gmail.com)
- محمدصابر بهادری: [m.saberbahadori@gmail.com](mailto:m.saberbahadori@gmail.com)
- محمدامین جهان‌تاب: [amin.jahantab@ut.ac.ir](mailto:amin.jahantab@ut.ac.ir)
- امیرحسین ایرانمنش: [amiriranmanesh@ut.ac.ir](mailto:amiriranmanesh@ut.ac.ir)