به نام خدا

نظریه بازی

بهار ۱۴۰۳

استاد درس:دکتر کبریایی

دانشکده‌ی مهندسی برق و کامپیوتر

تمرین سری سوم

زمان تحویل: ۲۶ اردیبهشت

توجه : در تمام سوالات پروسه‌ی حل را بصورت دقیق بیان نمایید. برای ارتباط با تدریس‌یاران مربوط به این تمرین، لطفا در گروه تلگرامی عضو شوید.

سوال ۱: تعادل نش بیزی در فضای گسسته (۲۵ نمره)

بازی دو نفره‌ی زیر را در نظر بگیرید که با احتمال P حالت سمت چپ، و با احتمال $1-P$ حالت سمت راست رخ می‌دهد.

Player1 / Player2

P	F	Y
F	-1, 1	1, 0
Y	0, 1	0, 0

1-P	F	Y
F	1, -1	1, 0
Y	0, 1	0, 0

الف) در دو حالت زیر به ازای مقادیر مختلف P بازی را تحلیل کنید و تعادل(های) نش بیزی خالص را در صورت وجود بدست آورید.

- هیچکدام از بازیکنان نمی‌دانند که در کدام یک از حالات تصمیم‌گیری خواهند کرد.
- بازیکن دوم به حالت بازی خود آگاه است اما بازیکن اول صرفا احتمال P را از تایپ بازیکن دوم می‌داند.

ب) اگر عدم قطعیت و مقادیر payoff برای بازیکنان به صورت زیر تغییر کند، تعادل نش بیزی مخلوط را محاسبه کنید.

Player1 / Player2

P=0.3	F	Y
F	2, 0	0, 2
Y	0, 2	2, 0

P=0.1	F	Y
F	2, 2	0, 3
Y	3, 0	1, 1

P=0.2	F	Y
F	2, 2	0, 0
Y	0, 0	1, 1

P=0.4	F	Y
F	2, 1	0, 0
Y	0, 0	1, 2

سوال ۲: بازی کورنات با اطلاعات ناقص(۲۵ نمره)

بازی کورنات با دو کمپانی را در نظر بگیرید که تابع $P(Q)$ آن به صورت رابطه یک است :

$$P(Q) = \begin{cases} 60 - Q & \text{if} \quad Q \leq 60 \\ 0 & \text{if} \quad Q \geq 60 \end{cases} \tag{۱}$$

که در آن $Q = q_1 + q_2$ ، مجموع خروجی ها در مارکت است. هزینه کمپانی ۲ به صورت $c_2(q_2) = 12q_2$ با احتمال $\frac{1}{4}$ و $c_2(q_2) = 24q_2$ با احتمال $\frac{3}{4}$ است و هزینه کمپانی ۱ به صورت $c_1(q_1) = 18q_1$ با احتمال $\frac{1}{3}$ و $c_1(q_1) = 24q_1$ با احتمال $\frac{2}{3}$ است. کمپانی ها هریک از وضعیت خود که در کدام یک از دو حالت هستند ، خبر دارند ولی کمپانی مقابل تنها از نوع تایپ ها و احتمالات آن ها خبر دارد.

الف) اطلاعات داده شده را به صورت یک بازی بیزی نمایش دهید و برای این کار ، مجموعه بازیکن ها ، مجموعه تایپ هریک ، مجموعه استراتژی ها و باور و تابع سود را مشخص کنید .

ب) تعادل نش بیزی را بدست آورید ؛ سپس سود هر یک از کمپانی ها را در نقاط تعادل محاسبه کنید .

پ) فرض کنید برای ساده شدن مسئله کمپانی ۱ تنها یک قیمت $c_1(q_1) = 18q_1$ دارد. حال بخش ب را مجدد با این فرضیه حل کنید .

ج) حال فرض کنید کمپانی ۱ می داند که کمپانی ۲ دارای تابع هزینه $c_2(q_2) = 12q_2$ است . نقطه تعادل نش را محاسبه کنید و سود کمپانی ها را در نقاط تعادل بدست آورید .

د) حال فرض کنید کمپانی ۱ می داند که کمپانی ۲ دارای تابع هزینه $c_2(q_2) = 24q_2$ است . نقطه تعادل نش را محاسبه کنید و سود کمپانی ها را در نقاط تعادل بدست آورید .

ه) در این قسمت فرض کنید ، در یک تایپ از کمپانی ۲ ترجیح می دهد در حالت اطلاعات کامل باشد و تایپ دیگر ترجیح می دهد در وضعیت اطلاعات ناقص باشد. وضعیت این دو تایپ را مشخص کنید .

سوال ۳: کاربرد بازی های بیزی در مبادله کالا (۲۰ نمره)

یک مبادله کالا را در نظر بگیرید که بین یک خریدار و یک فروشنده می باشد. در این مبادله فروشنده یک قیمت، p_s ، برای کالا خود تقاضا کرده و خریدار نیز یک قیمت خرید، p_b ، ارایه می دهد. مبادله با قیمت میانگین دو قیمت پیشنهادی، $p = (p_s + p_b)/2$ ، انجام می شود اگر که قیمت خریدار از فروشنده بیشتر باشد. توابع سود برای هر بازیگر تغیرات میزان سود آن ها می باشد و اگر مبادله ای صورت نگیرد توابع سود برای هر دو بازیگر برابر صفر می باشد(چون تغیرات صفر می باشد). با در نظرگرفتن توابع خطی استراتژی زیر برای خریدار و فروشنده، تعادل نش بیزی را بدست آورید.

$$\beta_s(v_s) = a_s + c_s v_s \tag{۲}$$

$$\beta_b(v_b) = a_b + c_b v_b \tag{۳}$$

توجه: ارزش کالا نزد فروشنده و خریدار به ترتیب برابر v_s و v_b می باشد. ارزش کالا یک پارامتر خصوصی برای هر بازیگر است و بازیگر دیگر از ارزش کالا نزد دیگری اطلاع ندارد و همچنین دارای توزیع یکنواخت بین بازه [1 ,0] است.

تذکر: تعادل نش بیزی در این سوال متقارن نیست و باید بهترین پاسخ برای هر بازیگر را حساب کرده و در نهایت ضرایب مجهول $a_s,\ a_b, c_s,\ c_b$ را بدست آورید.

سوال ۴: شبیه‌سازی کامپیوتری- بازی حراج قیمت (۳۰ نمره + ۱۰ نمره امتیازی)

هدف اصلی در این سوال بررسی محاسبات تئوری و فرضیات انجام شده در بازی حراج قیمت اول و دوم با اطلاعات ناکامل در قالب حل عددی و شبیه سازی کامپیوتری است. (لطفا به سوالات دقیق پاسخ دهید و همچنین لزومی به گزارش کدها نیست. پیشنهاد می‌شود برای سهولت از پایتون و کتابخانه‌های آن استفاده کنید، ولیکن اجباری ندارید.)

آ) بازی حراج قیمت دوم

۱) بازی SPA را برای سه بازیگر درنظر بگیرید. فرض کنید که استراتژی بازیگر دوم و سوم در استراتژی بهینه $b_i = \beta(v_i) = v_i$ ثابت شده است و بازیگر اول صرفا از تابع چگالی احتمال دو بازیگر دیگر اطلاع داشته و تحت شرایط استقلال، نوع بازیگران تابع چگالی یکنواخت $v_i \sim U(0,1)$ را دارد.

- تابع امید ریاضی payoff را برای ۹ مقدار دلخواه از نوع بازیگر اول به دست آورده و در یک شکل رسم نمایید. (**راهنمایی:** می‌دانیم که نوع برای خود بازیگر مشخص است. بنابراین باید به ازای یک مقدار مشخص v_1 و مقادیر مختلف b_1 در شرایطی که b_2 و b_3 مقادیر تصادفی‌ای داشته که با توجه به استراتژی بهینه حادث شده‌اند، تابع امید ریاضی را به صورت عددی محاسبه و رسم کرده و این کار را ۸ بار دیگر تکرار کنید (۹ نمودار در یک شکل). دقت کنید تابع امید ریاضی باید بر حسب b_1 رسم شود.)
- مقدار بیشینه‌ی امید ریاضی را محاسبه و روی هر ۹ شکل نشان دهید. روند رشد این مقادیر چه سیری دارد؟
- مقادیر بیشینه امید ریاضی به ازای چه مقادیری از b_1 به دست آمده‌اند؟ آنها را گزارش کنید.
- مقادیر b_1 بخش قبل را بر حسب مقادیر v_1 رسم کرده و تابعی بر آنها برازش کنید. ویژگی‌های این تابع را بیان کنید.

۲) در این بخش تابع چگالی نوع بازیگران را تابع نمایی $v_i \sim exp(2)$ درنظر بگیرید.

- موارد خواسته شده در بخش آـ۱ را به ازای همان ۹ مقداری که در بخش قبل برای v_1 در نظر گرفتید، تکرار کنید.
- آیا عوض شدن تابع چگالی احتمال، تغییری در مقادیر b_1 که به ازای امید ریاضی بیشینه به دست آمده‌اند، ایجاد می‌کند؟ تابعی که در این شرایط به مقادیر b_1 بر حسب v_1 برازش می‌کنید، چه تغییری می‌کند؟ علت را بیان کنید.

ب) بازی حراج قیمت اول

۱) بازی FPA را برای سه بازیگر درنظر بگیرید. فرض کنید که استراتژی بازیگر دوم و سوم در استراتژی بهینه محاسبه شده از حل تئوری ثابت شده است. مطابق قبل، بازیگر اول صرفا از تابع چگالی احتمال نوع دو بازیگر دیگر مطلع است و تابع چگالی احتمال نوع بازیگران یکنواخت $v_i \sim U(0,1)$ است.

- موارد خواسته شده در بخش آـ۱ را تکرار کنید. (**راهنمایی:** تابع استراتژی بهینه را پیاده‌سازی و مقادیر تصادفی b_2 و b_3 را با توجه به آن و نمونه‌های v_2 و v_3 محاسبه کرده و ۹ تابع امید ریاضی را برای بازیگر اول محاسبه و در یک شکل رسم کنید.)
- آیا تابع برازش شده تفاوتی با تابع استراتژی بهینه حل تئوری دارد؟ خصوصیات این تابع را بیان کنید و با فرضیات حل این بازی مطابقت دهید.

۲) در این بخش تابع چگالی احتمال بازیگران را تابع نمایی $v_i \sim exp(2)$ در نظر بگیرید.

- موارد خواسته شده در بخش آـ۱ را تکرار کنید. دقت کنید که تابع استراتژی بهینه با بخش بـ۱ متفاوت می‌شود. باید این تابع را با فرض چگالی نمایی پیاده‌سازی کرده و سپس مطابق قبل نمودارها را رسم کنید. در این بخش نیازی به برازش تابع برای مقادیر b_1 بر

حسب v_1 نیست، اما باید مقادیر به دست آمده از حل عددی را با مقدارهای واقعی که با توجه به تابع استراتژی بهینه به دست خواهید آورد در یک شکل گزارش کنید (۹ مقدار b_1 با توجه به تابع استراتژی بهینه و ۹ مقدار b_1 با توجه به نمودارهای امید ریاضی در یک شکل).

- روند رشد مقادیر تقریبی و واقعی b_1 بر حسب v_1 چه سیری دارد؟ آیا تفاوتی میان مقدارهای به دست آمده از حل عددی و تئوری وجود دارد؟ اگر بخواهیم تابعی بر مقادیر تقریبی برازش کنیم، این تابع چه ویژگی‌هایی خواهد داشت؟ این ویژگی‌ها را با فرضیات حل این سوال مقایسه کنید.

۳) **(امتیازی)** در این بخش تابع چگالی احتمال بازیگران را تابع گاما $v_i \sim Gamma(2, 1)$ در نظر بگیرید.

- موارد خواسته شده در بخش ب- ۲ را تکرار کنید. باید تابع استراتژی بهینه دقیق پیاده‌سازی شود. (**راهنمایی:** برای پیاده‌سازی تابع CDF گاما از دستور scipy.special.gammainc() در پایتون استفاده کنید.)