



توجه: در تمام سوالات پروسه‌ی حل را بصورت دقیق بیان نمایید. برای ارتباط با تدریس‌یاران مربوط به این تمرین، لطفاً در گروه تلگرامی عضو شوید.

سوال ۱: تخصیص منابع (۲۰ نمره)

در تقسیم منابع میان دو کارخانه‌ی تولیدی، تابع هدف برای هر یک از عوامل به ازای منابع موجود به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} u_1(x_1) = (x_1)^{\frac{1}{8}} \\ u_2(x_2) = (x_2)^{\frac{1}{4}} \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

(آ) به صورت شهودی یا ریاضی، اثبات کنید که فضای Joint Payoff در این مسئله فشرده و محدب است.

(ب) در صورتی که طرفین در صورت عدم توافق هیچ سودی حاصل نکنند، با توجه به روش چانه‌زنی نش، تخصیص چه درصدی از منابع به هر یک از طرفین آن‌ها را به توافق می‌رساند؟

سوال ۲: بررسی بازی Cournot (۲۵ نمره)

بازی کورنات با روابط کلی زیر را در نظر بگیرید.

q_i : میزان تولید، AC_i : میانگین هزینه تولید، $q_i * AC_i = TC_i$: هزینه کلی

$MC_i = \frac{d(TC_i)}{dq_i}$: هزینه حاشیه ای

p : قیمت کالا، $q_i p - TC_i = P_i$: سود شرکت

با فرض اینکه:

$$p = 160 - 8(q_1 + q_2), \quad AC_2 = 80 - 4q_2 + q_2^2, \quad AC_1 = 64 - 4q_1 + q_1^2$$

به سوالات زیر پاسخ دهید.

توجه: در حل این سوال می‌توانید از نرم افزار (Matlab, Python) برای حل بهینه سازی ها و معادلات استفاده کنید. اما باید کدهای قابل اجرا خود را ارائه دهید.

(آ) efficient point را بدست آورید. (نقطه ای می‌باشد که هزینه حاشیه ای برابر با قیمت فروش محصول می‌باشد)

(ب) تعادل نش در حالت غیر همکارانه را بدست آورید.

(ج) تعادل نش را در حالت همکارانه بدست آورید. ($D=(134, 62)$)

(د) مساله را در صورتی که دو شرکت با یک دیگر همکاری کرده و به دنبال بیشینه کردن جمع سودهایشان هستند حل کنید.

side-payment به زبان ساده یک پرداختی می‌باشد که توسط یک عضو در یک توافق به عضو دیگر داده می‌شود به طوری که آن عضو را ترغیب کند که در این توافق باشد و آن را ترک نکند.

حال بازه ای برای side-payment مشخص کنید که پس از پرداخت آن دو شرکت همچنان تمایل برای این نوع همکاری که در این بخش مطرح شد را نسبت به حالت همکارانه (ج) داشته باشند.

(ه) حالتی را در نظر بگیرید که تنها تولیدکننده شرکت یک می‌باشد و بهترین پاسخ این شرکت به این وضعیت را بیابید.

(و) بخش قبل را برای شرکت دو نیز انجام دهید.

ن) در یک جدول نتایج بند های قبلی را جمع آوری کرده و تحلیل کنید. این جدول باید شامل میزان تولید هر یک از شرکت ها سود هر یک و قیمت کالا در هر حالت باشد.

سوال ۳: خواص چانه زنی نش (۲۰ نمره)

آ) فرض کنید برای فضای Payoff های ممکن U ، اصول چهارگانه نش به جز تقارن برقرار است. اگر مقادیر a و b مثبت باشند و فضای مشترک Payoff های بازیگران داخل قطاع بیضی $U = \{u \in \mathbb{R}^2 : \frac{u_1^2}{a^2} + \frac{u_2^2}{b^2} \leq 1\}$ در ربع اول مختصات و مقدار d نیز برابر $(0, 0)$ باشد.

۱) با توجه به فضای مشترک Payoff U ، فضای مشترک Payoff دیگری را در نظر گرفته که متقارن بوده و با استفاده از آن و اصل scale invariance نشان دهید $(u_1^*, u_2^*) = (\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$ است (دقت کنید که مقدار بهینه را باید با توجه به اصل یاد شده و نه با استفاده از حل بهینه سازی نش به دست آورید).

۲) برای $a = 16$ ، $b = 20$ و $d = (10, 0)$ با استفاده از حل نش مقدار بهینه را مشخص کنید.

ب) فضای Payoff های مشترک U ، V و W را در نظر بگیرید.

$$U = \{u \in \mathbb{R}_+^2 : 2u_1 + u_2 \leq 100\} \quad (۱)$$

$$V = \{v \in \mathbb{R}_+^2 : v_1 + 2v_2 \leq 100\} \quad (۲)$$

$$W = \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}V = \left\{ \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v : u \in U, v \in V \right\} \quad (۳)$$

۱) مطابق با روند آ-۱ و با استفاده از اصل scale invariance $f(U, (0, 0))$ و $f(V, (0, 0))$ را محاسبه و مقدار $\frac{1}{2}f(U, (0, 0)) + \frac{1}{2}f(V, (0, 0))$ را تعیین کنید.

۲) با توجه به رابطه ۳ فضای مشترک W Payoff، را رسم کنید و از روی شکل مقدار $f(W, (0, 0))$ را تعیین و با بخش ب-۱ مقایسه کنید. چه نتیجه ای می توان گرفت؟

سوال ۴: بازی ملک و اجاره (۱۵ نمره)

یک بازی با تعداد n بازیکن را در نظر بگیرید که تنها ائتلافی برنده است که یک بازیکن خاص و حداقل یک بازیکن دیگر را شامل شود. اگر ائتلاف برنده پاداش ۱ دلاری دریافت کند، هسته بازی و مقدار شپلی بازی را بدست آورید.

سوال ۵: شبکه سرویس دهی در قالب بازی ائتلافی (۲۰ نمره)

مساله ای را به صورت زیر در نظر بگیرید که گروهی از مشتریان باید به یک تاسیسات مرکزی که یک سرویس مورد نیاز را تامین می کند متصل شوند. این اتصال می تواند به صورت مستقیم یا به صورت اتصال به مشتری دیگر که آن به تاسیسات مرکزی متصل است صورت گیرد. این وضعیت را می توان به صورت یک بازی ائتلافی (N, v) مدل کرد.

N مجموعه مشتریان و $v(s)$ برابر است با هزینه اتصال همه مشتریان موجود در S به صورت مستقیم به تاسیسات مرکزی منهای هزینه حداقل درخت پوشا که فقط شامل مشتریان در S و تاسیسات مرکزی می باشد.

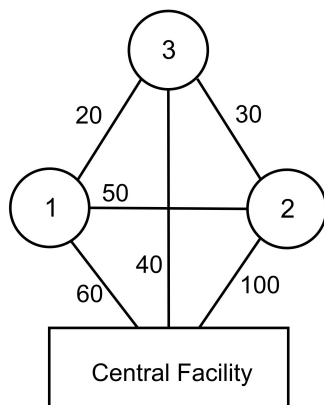
حال سناریو زیر که سه مشتری دارد و اعداد روی یال ها گراف هزینه هستند را در نظر بگیرید.

به سوالات زیر پاسخ دهید :

۱) ارزش ائتلاف یعنی $v(s)$ را برای همه ائتلاف های ممکن s بدست آورید.

۲) shapley value را حساب کنید.

۳) آیا مقدار شپلی در هسته است ؟



شکل ۱: گراف بازی

۴) درباره محدب بودن بازی چه می توان گفت؟

سوال ۶: محاسبه و پیاده سازی Shapely value (۲۰ نمره امتیازی)

آ) ارزش ائتلاف های ممکن برای چهار بازیگر که در زیر آمده است را در نظر بگیرید. ارزش ائتلاف سراسری برای بازیگران برابر با ۲۴۰ است. براساس معیار Shapely value و با توجه به ارزش زیر ائتلاف ها سهم Payoff هر بازیگر در ائتلاف سراسری را تعیین کنید.

$$\begin{aligned} v(1) &= 6, & v(2) &= 12, & v(3) &= 0, & v(4) &= 18, \\ v(1, 2) &= 24, & v(1, 3) &= 48, & v(1, 4) &= 60, & v(2, 4) &= 32, & v(3, 4) &= 38, & v(2, 3) &= 12, \\ v(1, 2, 3) &= 120, & v(1, 2, 4) &= 89, & v(1, 3, 4) &= 150, & v(2, 3, 4) &= 179, \\ v(1, 2, 3, 4) &= 240. \end{aligned}$$

ب) الگوریتمی که در ادامه معرفی می کنیم برای محاسبه Shapely value به صورت عددی و تکراری توسط John Harsanyi ارائه شده و ثابت می شود به نقاطی خواهد رسید که رابطه ی Shapely value برای بازیگران، درون ائتلاف سراسری ارائه می دهد. در پایتون الگوریتم را برای بخش آ پیاده سازی کنید و صحت کارکرد پیاده سازی خود را نشان دهید.

• با فرض داشتن یک بازی ائتلافی $(N; v)$

۱) یک ائتلافی را انتخاب کنید که ارزش آن صفر نباشد و این ارزش را به طور مساوی بین اعضای ائتلاف تقسیم کنید. (این مبلغ به عنوان سهم اعضای ائتلاف در نظر گرفته می شود.)

۲) ارزش این ائتلاف را از ارزش هر ائتلافی که شامل آن ائتلاف یا برابر با آن است، کم کنید.

۳) این فرآیند را تا زمانی که دیگر ائتلافی با ارزش غیر صفر وجود نداشته باشد، تکرار کنید.

۴) در پایان مجموع ارزش هایی که در هر گام به هر بازیگر اختصاص داده اید، Shapely value برای هر بازیگر است.

• مثال:

$$\begin{aligned} v(1) &= 6, & v(2) &= 12, & v(3) &= 18, & v(1, 2) &= 30, & v(1, 3) &= 60, \\ v(2, 3) &= 90, & v(1, 2, 3) &= 120. \end{aligned}$$

Stage	1	2	3	1, 2	1, 3	2, 3	1, 2, 3	Coalition	1	2	3
1	6	12	18	30	60	90	120	1, 2	15	15	0
2	6	12	18	0	60	90	90	2	0	12	0
3	6	0	18	-12	60	78	78	1, 3	30	0	30
4	6	0	18	-12	0	78	18	1	6	0	0
5	0	0	18	-18	-6	78	12	3	0	0	18
6	0	0	0	-18	-24	60	-6	1, 2, 3	-2	-2	-2
7	0	0	0	-18	-24	60	0	1, 2	-9	-9	0
8	0	0	0	0	-24	60	18	1, 3	-12	0	-12
9	0	0	0	0	0	60	42	2, 3	0	30	30
10	0	0	0	0	0	0	-18	1, 2, 3	-6	-6	-6
11	0	0	0	0	0	0	0				
									22	40	58

- **توجه:** برای بخش ب صرفاً باید فایل نوتبوک (ipynb) را تحویل دهید و نیاز به گزارش نویسی نیست. از صحت اجرای حل خود مطمئن شوید. حل نرم‌افزاری شما بررسی، اجرا و در صورت پیاده‌سازی صحیح و صحت جواب به آن نمره تعلق خواهد گرفت.