Vaja 2: Diskretna Fourierjeva transformacija (DFT)

Iz ugotovitev prejšnjih vaj sledi, da sta signala sinus in kosinus pri isti frekvenci ortogonalna. Še več, harmonični signali različnih frekvenc so med seboj nekorelirani. J. B. Fourier je v začetku 19. st. na podlagi tega opažanja sklenil, da bi lahko korelacije nekega poljubnega signala s harmoničnimi signali različnih frekvenc vsebovale neodvisne informacije o signalu (vsebnost posamezne frekvence v signalu). Poljuben signal je tako predstavil kot linearno kombinacijo (vsoto različno uteženih) harmoničnih signalov različnih frekvenc.

Ugotovil je, da lahko izračuna »podobnost« (korelacijo) poljubnega signala $x[n]$ periode N s harmoničnimi signali vseh frekvenc (oz. k-timi večkratniki osnovne frekvence $\frac{2\pi}{N}$, tj. frekvencami $\frac{2\pi}{N}k$; korelacija z ostalimi frekvencami bi bila enaka 0, sicer N ne bi bila perioda signala).

Pri tem je izkoristil kompleksna števila na način, da bi realni del izračuna predstavljal korelacijo s kosinusom, imaginarni del pa korelacijo z minus sinusom. Povedano drugače, računal je korelacije poljubnega signala s kompleksnimi harmoničnimi signali različnih frekvenc:

$$c_k[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\,n\right) - j\sin\left(\frac{2\pi}{N}k\,n\right) = e^{-j\frac{2\pi}{N}k\,n}$$

Pridobljene rezultate je zapisal v zaporedje $X[k]$, kjer k-ti element predstavlja korelacijo signala $x[n]$ s kompleksnim harmoničnim signalom $c_k[n]$ k-kratnika osnovne krožne frekvence.

$X[k]$ je diskretna Fourierjeva Transformacija (DFT) oz. frekvenčni spekter signala $x[n]$.

Z enačbo lahko vse zgoraj navedeno zapišemo kot:

$$X[k] = DFT\{x[n]\} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\left(\cos\left(\frac{2\pi}{N}k\,n\right) - j\sin\left(\frac{2\pi}{N}k\,n\right)\right)$$

oziroma z upoštevanjem Eulerjevega izreka:

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}k\,n}$$

$X[k]$ je torej zaporedje kompleksnih števil. Vsako kompleksno število v zaporedju lahko predstavimo tudi v polarni obliki. Zaporedju absolutnih vrednosti kompleksnega spektra pravimo **amplitudni spekter**: $A[k] = |X[k]|$, zaporedju kotov kompleksnega spektra pa pravimo **fazni spekter**: $\varphi[k] =$

$atan\left(\frac{Im\{X[k]\}}{Re\{X[k]\}}\right)(+\pi)$. **Močnostni spekter** periodičnega diskretnega signala je definiran kot Fourierjev transform njegove avtokorelacijske funkcije $S_x[k]$ = DFT$\{R_{xx}[n]\}$.

Pri računanju DFT nam pogosto pomaga upoštevanje njegovih lastnosti:

- linearnost
- lastnost o časovnem premiku
- DFT realnih signalov
- DFT avtokorelacijske funkcije
- Parsevalov teorem
- DFT sodih in lihih funkcij

Obstaja tudi inverzna preslikava, s katero iz frekvenčnega spektra signala pridobimo časovni potek:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}k\,n}$$

Zgornjemu izrazu rečemo **Inverzna Fourierjeva Transformacija (IDFT).**

Primeri

1. Izračunajte frekvenčne spektre ter izrišite amplitudne in fazne dele za naslednje periodične signale:

a) $x[n] = cos(\frac{2\pi}{6}n)$

b) $x[n] = 3\,sin(\frac{2\pi}{6}n)$

c) $x[n] = cos(\frac{2\pi}{8}n + \frac{\pi}{3})$

d) $x[n] = 2\,cos(\frac{2\pi}{8}n) + 4\,cos(\frac{2\pi}{8}2\,n) + 2\,cos(\frac{2\pi}{8}3\,n)$

e) $x[n] = 2 + 2\,cos(\frac{2\pi}{6}n)$

f) $x[n] = cos(\frac{2\pi}{8}(n-2))$

g) $x[n] = [1,\ 0,\ 0,\ 0]$

h) $x[n] = [0,\ 0,\ 0,\ 1]$

i) $x[n] = [1,\ 0,\ 0,\ 1]$

j) $x[n] = [10,\ 10,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0]$

k) $x[n] = [11,\ 11,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1]$

l) $x[n] = [-10, -10,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0]$

2. Izračunajte in izrišite eno periodo signala s podanim spektrom:

a) $x[n] = [0,\ \frac{1}{4}i,\ 0,\ 1,\ 0,\ -\frac{1}{4}i]$

b) $X[k] = [\ 0,\ \sqrt{2} + i\sqrt{2},\quad 2,\quad \sqrt{2} - i\sqrt{2}]$

3. Kako izračunamo frekvenčni spekter neperiodičnega signala?

▪ Matlab

Naloga 2.1: V okolju Matlab ustvarite funkcijo

$[X, A, phi] = \text{fnDFT}[x]$

za izračun spektralnih komponent signala $x[n]$. X podaja izračunane spektralne komponente, A amplitudni del spektra in *phi* njegov fazni del.

Naloga 2.2: Z uporabo ustvarjene funkcije fnDFT(x) iz prejšnje točke izračunajte koeficiente DFT ter izrišite amplitudne in fazne spektre naslednjih signalov, pri čem naj imajo vsi obravnavani signali periodo $N = 64$.

a) periodičnega delta impulza $\delta[n \bmod 64]$

b) sinusnega signala $\sin(\frac{\pi}{32}n)$

c) vsote dveh sinusnih komponent različnih frekvenc, npr. $1{,}2\sin(\frac{\pi}{32}n)+1{,}8\sin(\frac{\pi}{8}n)$

d) vsote petih sinusnih komponent različnih amplitud, frekvenc in različnega faznega zamika:

$$A_1\sin(\frac{\pi}{32}k_1n+\varphi_1)+A_2\sin(\frac{\pi}{32}k_2n+\varphi_2)+A_3\sin(\frac{\pi}{32}k_3n+\varphi_3)+A_4\sin(\frac{\pi}{32}k_4n+\varphi_4)+A_5\sin(\frac{\pi}{32}k_5n+\varphi_5).$$

Naloga 2.3: Opazujte vpliv amplitude, frekvence in faze signala $x[n] = A\,cos(\frac{2\pi}{8}n+\varphi)$.
V programskem okolju Matlab spreminjaje amplitudo signala med 0 in 1, frekvenco med $\frac{2\pi}{128}$ in $\frac{2\pi}{4}$ ter fazo med 0 in 2π. Vsakokrat izrišite amplitudni in fazni spekter signala ter ga predvajajte:

```
>> p = audioplayer(x, fvz);
>> play(p);
>> pause(p); %% in/ali tudi resume(p); stop(p);
```

Frekvenco vzorčenja nastavite na 48 kHz. Katere frekvence je slišani zvok? Kako iz slike spektra razberete frekvenco v Hz? Kakšen je vpliv faznega zamika pri poslušanju?

Naloga 2.4: Preizkusite Matlabovo vgrajeno funkcijo `fft(x)` za hitri izračun DFT spektra na signalih iz prejšnjih nalog in ugotovite, ali podaja enake rezultate.

Naloga 2.5: V okolje Matlab uvozite zvočni posnetek »Lestvica.m4a« iz spletne učilnice, ga predvajajte in prikažite amplitudni spekter signala. Katere frekvence vsebuje signal? Kakšna je ločljivost prikaza izračunanega spektra?

Naloga 2.6: Privzemite, da je signal iz podnaloge 2.5 periodičen (da se lestvica vseskozi ponavlja) in ga podaljšajte za 20 period. Ponovno izračunajte in izrišite spekter signala. Katere frekvence vsebuje signal? Kakšna je sedaj ločljivost prikaza?

Naloga 2.7: Privzemite, da signal iz podnaloge 2.5 ni periodičen (lestvica se ponovi le enkrat). Za izračun spektra signal umetno podaljšajte za 20 period na način, da dodate vrednosti 0 (tišino po koncu zvoka). Ponovno izračunajte in izrišite spekter signala. Katere frekvence vsebuje signal? Kakšna je sedaj ločljivost prikaza?