Vaja 1: Periodični diskretni signali in njihove značilne vrednosti

Vrednosti diskretnih signalov poznamo le v določenih trenutkih ($t \to n$). Diskretne signale obravnavamo lahko kot urejene nize števil $\{x_n\}$, signalne vektorje $\mathbf{x} = [x_{k-1}, x_k, \dots, x_0, x_1, \dots, x_m]$ ali funkcije indeksa n $x[n]$. Tudi v diskretnem prostoru je signal lahko periodičen, aperiodičen in naključen.

Značilne vrednosti periodičnih diskretnih signalov

Periodičen diskreten signal $x[n]$ je popolnoma določen s signalom v eni periodi. Če je perioda diskretnega signala N, dobimo njegove značilne vrednosti v skladu z naslednjimi izrazi:

srednja vrednost
$$\overline{x[n]} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \tag{1.1}$$

srednja moč
$$\overline{x^2[n]} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] \tag{1.2}$$

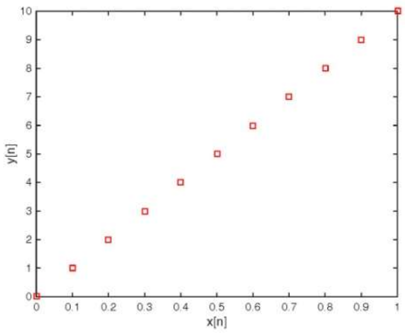
varianca
$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n] - \overline{x[n]}\right)^2 \tag{1.3}$$

Nadalje, korelacija med dvema signaloma je merilo njune linearne podobnosti. Pri izračunu upoštevamo, da imata oba signala enako periodo N. Zaradi boljše interpretacije, korelacijo ponavadi normirano, t.j. delimo z kvadratnim korenom produkta srednjih moči obeh signalov.

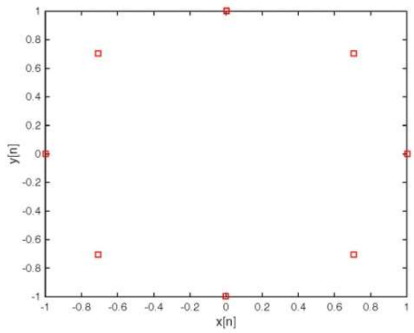
korelacija
$$R_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, y[n] \tag{1.4}$$

normirana korelacija
$$R_{xy\,n} = \frac{R_{xy}}{\sqrt{\overline{x^2[n]}\;\overline{y^2[n]}}} \tag{1.5}$$

Največjo absolutno vrednost normirane korelacije ($R_{xy\,n} = \pm 1$) dobimo, ko odvisnost med obema signaloma lahko popolnoma opišemo s premico skozi izhodišče koordinatnega sistema (nobeden izmed parov vzorcev ($x[n]$, $y[n]$) ne odstopa od te premice).



Slika 1.1: Primer medsebojne odvisnosti med signaloma $x[n]$ in $y[n]$, ki imata normirano korelacijo $R_{xy\,n}$=1.



Slika 1.2: Primer medsebojne odvisnosti med signaloma $x[n]$ in $y[n]$, ki imata normirano korelacijo $R_{xy\,n}$=0.

Korelacijska funkcija je merilo linearne podobnosti med dvema signaloma, ki upošteva časovno zamaknjenost med njima *m*. Avtokorelacijska funkcija je merilo linearne podobnosti signala s samim seboj in pove, koliko si je signal podoben ob različnih časovnih zamikih *m*.

korelacijska funkcija
$$\begin{aligned} R_{xy}[m] &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,y[n+m] \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,y[(n+m) \bmod N] \end{aligned} \tag{1.6}$$

avtokorelacijska funkcija
$$\begin{aligned} R_{xx}[m] &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,x[n+m] \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,x[(n+m) \bmod N] \end{aligned} \tag{1.7}$$

▪ Računanje korelacije med periodičnimi diskretnimi signali

Izračunajmo korelacijo in normirano korelacijo med naslednjimi pari periodičnih signalov ($N = 4$):

a) $x[n]=[1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]$
$y[n]=[2 \quad 4 \quad 6 \quad 8]$

b) $x[n]=[1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$
$y[n]=[0 \quad 0 \quad 1 \quad 1]$

▪ Računanje korelacijske funkcije med diskretnimi periodičnimi signali

Izračunajmo korelacijsko funkcijo med naslednjimi pari periodičnih signalov:

a) $x[n]=[1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$
$y[n]=[0 \quad 0 \quad 1 \quad 1]$

b) $x[n]=\sin(\frac{\pi}{2}n)$
$y[n]=\delta_4[n]=[1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$

c) $x[n]=2\sin(\frac{\pi}{2}n)$
$y[n]=2\sin(\frac{\pi}{2}n)$

d) $x[n]=2\sin(\frac{\pi}{2}n)$
$y[n]=2\cos(\frac{\pi}{2}n)$

e) $x[n]=\sin(\frac{\pi}{2}n)$
$y[n]=\sin(\frac{\pi}{4}n)$

Delo v programskem okolju Matlab

Za delo z okoljem Matlab je v spletni učilnici priložena kratka datoteka s seznamom najbolj pogosto klicanih ukazov in funkcij (*Matlab Cheat Sheet*).

Naloga 1.1: V okolju Matlab ustvarite funkcijo *R*=fnKorelacijskaFunkcija(*x*,*y*) za izračun korelacijske funkcije.

Naloga 1.2: Pravilnost delovanja funkcije *R*=fnKorelacijskaFunkcija(*x*,*y*) preverite z uporabo zgornjih primerov b)-e) in pripadajočih rezultatov.

Naloga 1.2.1: Prejšnjo nalogo ponovite na način, da za $x[n]$ vzamete $x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)$.

Naloga 1.3: Z uporabo funkcije *R*=fnKorelacijskaFunkcija(*x*,*y*) izračunajte korelacijsko funkcijo med naslednjima signaloma - nizoma pravokotnih impulzov:

$$x[n] = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$
$$y[n] = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Kdaj je vrednost korelacijske funkcije za dani primer največja?

Naloga 1.4: Iz spletne učilnice prenesite datoteko Signal LV1. Pridobili boste Matlab podatkovno datoteko, ki vsebuje signal, ki ga bomo analizirali. V okolje Matlab signal iz podatkovne datoteke uvozite s klicem vgrajene funkcije import. Signal pred analizo izrišite in opredelite, ali obstajajo kakšne pravilnosti v signalu ali gre bolj za naključen, šumni signal. Za signal nato izračunajte avtokorelacijsko funkcijo in jo tudi izrišite, najbolje na istem grafu, kjer je tudi izris osnovnega signala. Kaj lahko sklenete?

Primer izpitne naloge

Podan je diskreten periodičen signal $x[n] = -2 - \sin\left(\frac{2\pi}{8}3n\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{8}4n\right)$.
Določite vrednosti v eni periodi in izrišite eno periodo signala.
Izračunajte korelacijo in normirano korelacijo med podanim signalom in signalom $y[n] = \cos(\pi n)$ (naloga pisnega dela izpita).
Izračunajte korelacijsko funkcijo med podanim signalom in signalom $y[n] = \cos(\pi n)$ (naloga Matlab dela izpita).

Domača naloga 1 (Sprotno preverjanje znanja)

1. Na lastni pametni telefon namestite poljubno brezplačno aplikacijo, ki omogoča zajem in pošiljanje signalov iz IMU senzorjev (angl. Inertail Measurement Unit), tj. pospeškometrov in žiroskopov. Primeri aplikacij so Sensor Logger in Sensor Log. V aplikaciji namestite zajem signalov pospeška in nastavite vzorčno frekvenco (angl. sampling frequency) na vsaj 25 Hz. Podatek o vzorčni frekvenci zapišite. Sprožite zajem, med lastnim mirovanjem telefon postavite v žep in nato po prostoru naredite točno deset dvokorakov. Telefon vzemite iz žepa, ustavite zajem in pridobljene signale prenesite na osebni računalnik (ponavadi prek spletne pošte). Datoteko, ki ste jo prejeli, uvozite v okolje Matlab. Odvisno od aplikacije, format in struktura datotek se lahko razlikuje (.csv, .txt…). Raziščite kako ustrezno opraviti uvoz v okolje Matlab, da imate neposreden dostop do signalov 3D pospeška. Pri tem vam lahko pomagajo dokumentacije na spletu, ChatGPT in seveda tudi asistentka (sestavite razumljiv opis problema ter ga pošljite na mail sara.stancin@fe.uni-lj.si). Signale izrišite in izračunajte njihove avtokorelacijske funkcije. Tudi slednje izrišite. Ugotovite, v kolikšnem času ste prehodili deset dvokorakov. Za konec določite tudi povprečno kadenco lastne hoje – koliko korakov v povprečju naredite v eni minuti. Koliko pa v eni sekundi? Kolikšna je frekvenca v enotah Hz vaših dvokorakov?