Vaja 4: DFT periodičnega pravokotnega impulza

Periodičen pravokoten impulz periode N ima M od nič različnih zaporednih vzorcev. Zapišemo ga lahko v naslednji obliki:

$$x[n]=\begin{cases} A & \text{za } n \bmod N \le M \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}. \tag{3.1}$$

DFT spekter podaja naslednji izraz:

$$X[k]=\frac{A}{N}\frac{\sin(\frac{\pi}{N}kM)}{\sin(\frac{\pi}{N}k)}e^{-j\frac{\pi}{N}k(M-1)}. \tag{3.2}$$

Spekter podan z izrazom (3.2) je pri vrednosti k=0 enak povprečni vrednosti signala, velja torej $X[0]=A\frac{M}{N}$, pri vrednostih $k=\frac{N}{M}p$, pri čem je p celo število $1\le p<M$, ima (M-1) ničel. Pri vmesnih vrednostih k je amplitudni spekter podan z izrazom:

$$A_X[k]=\frac{A}{N}\frac{\left|\sin(\frac{\pi}{N}kM)\right|}{\sin(\frac{\pi}{N}k)} \tag{3.3}$$

medtem ko fazni spekter podaja izraz:

$$\varphi_X[k]=-\frac{\pi}{N}k(M-1)+p\pi. \tag{3.4}$$

V izrazu (3.4) označuje p število ničel spektra med k=1 in obravnavano komponento k.

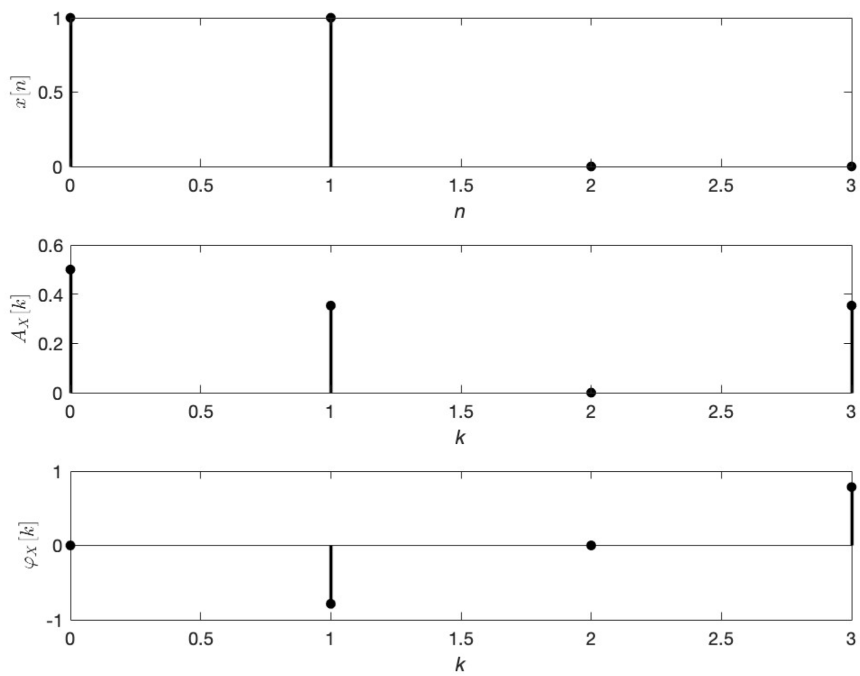
▪ Primeri

Primer 3.1: Naj bo periodičen diskreten signal podan z naslednjim izrazom $x[n]$ = [1 1 0 0]. Določite DFT spekter tega signala in izrišite njegov amplitudni in fazni del.

Spekter signala lahko izračunamo tako, da upoštevamo, da je signal sestavljen iz dveh delta impulzov: $\delta[n \bmod 4]$ in $\delta[(n-1) \bmod 4]$. Tako dobimo DFT spekter kot superpozicijo spektrov obeh posameznih delta impulzov:

$$
\begin{aligned}
X[k] &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{-jk\frac{\pi}{2}} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -j\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & j\frac{1}{4} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} - j\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} + j\frac{1}{4} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{4}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Enak rezultat dobimo, če v upoštevamo (3.2) vpoštevamo M=2 in N=4. Amplitudni in fazni spekter prikazuje Slika 3.1.



Slika 3.1: DFT spekter periodičnega pravokotnega impulza (A=1, M=2, N=4).

Primer 3.2: Naj bo periodičen diskretni signal podan z naslednjim izrazom $x[n]$ = [1 1 1 1 0 0 0 0]. Določite DFT spekter tega signala in izrišite njegov amplitudni in fazni del.

Ob vpoštevanju (3.2) za M=4 in N=8 pišemo lahko:

$$X[k]=\frac{1}{8}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}k)}{\sin(\frac{\pi}{8}k)}e^{-j\frac{3}{8}\pi k}.$$

$X[k]$ ima ničle pri vseh sodih vrednostih $k = 2p$, $p = 1\ldots M\text{-}1$, torej pri k = 2, 4 in 6. Pri vrednosti k = 0 je $X[k]$ enak povprečni vrednosti signala, torej $X[k] = M/N$=1/2. Celoten amplitudni spekter je enak:

$$A_X[k]=[0{,}50 \quad 0{,}33 \quad 0 \quad 0{,}14 \quad 0 \quad 0{,}14 \quad 0 \quad 0{,}33].$$

Potek faze opisuje premica $\varphi_X{}'[k]=-\frac{3}{8}\pi k.$ Končni fazni potek dobimo tako, da pri vsaki ničli DFT spektra vsem naslednjim vrednostim faze $\varphi_X{}'[k]$ prištejemo π. Za obravnavani primer tako dobimo:

$$\varphi_X[k]=\left[0 \quad -\frac{3\pi}{8} \quad \sim \quad -\frac{\pi}{8} \quad \sim \quad \frac{\pi}{8} \quad \sim \quad \frac{3\pi}{8}\right].$$

Kjer ima DFT spekter $X[k]$ ničlo vrednost faze ni definirana (~).

Primer 3.3: Naj bo periodičen diskreten signal podan z naslednjim izrazom:

$x[n]$ = [1,5 1,5 1,5 0 0 0 0 0 0] (M=3, N=9).

Določite DFT spekter tega signala in izrišite njegov amplitudni in fazni del.

Ob upoštevanju (3.2) za A=1,5, M=3 in N=9 pišemo lahko:

$$X[k]=\frac{1{,}5}{9}\frac{\sin(\frac{\pi}{3}k)}{\sin(\frac{\pi}{9}k)}e^{-j\frac{2}{9}\pi k}.$$

$X[k]$ ima ničle pri vrednostih $k = 3p$, $p = 1\ldots M\text{-}1$, torej pri k = 3 in 6. Pri vrednosti k = 0 je $X[k] = AM/N$=0,49. Celoten amplitudni spekter je enak:

$$A_X[k]=[0{,}50 \quad 0{,}42 \quad 0{,}22 \quad 0 \quad 0{,}15 \quad 0{,}15 \quad 0 \quad 0{,}22 \quad 0{,}42].$$

Potek faze opisuje premica $\varphi_X{}'[k] = -\frac{2}{9}\pi k.$ Končni fazni potek dobimo tako, da pri vsaki ničli DFT spektra vsem naslednjim vrednostim faze $\varphi_X{}'[k]$ prištejemo π. Za obravnavani primer tako dobimo:

$$\varphi_X[k] = \begin{bmatrix} 0 & -40^\circ & -80^\circ & \sim & 20^\circ & -20^\circ & \sim & 80^\circ & 40^\circ \end{bmatrix}.$$

Kjer ima DFT spekter $X[k]$ ničlo vrednost faze ni definirana (~).

<u>Primer 3.4:</u> Naj bo periodičen diskreten signal podan z naslednjim izrazom $x[n]$ = [2 2 2 2 -2 -2]. Določite DFT spekter tega signala in izrišite njegov amplitudni in fazni del.

Nalogo lahko rešimo tako, da upoštevamo, da je signal $x[n]$ sestavljen iz periodičnega pravokotnega impulza z A=4, M = 4 in N = 6 in enosmerne komponente -2:

$$x[n] = 4\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 2.$$

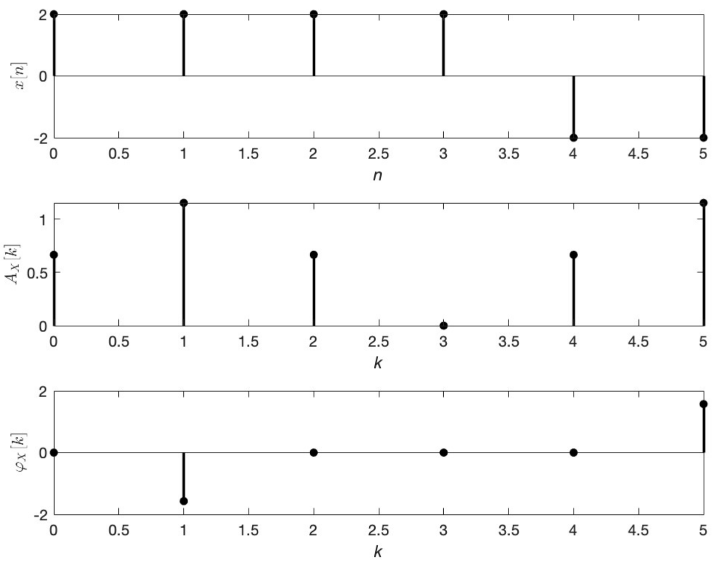
DFT spekter potem lahko dobimo z upoštevanjem teorema o linearnosti, in sicer:

$$\begin{aligned} X[k] &= DFT\left\{4\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} - DFT\left\{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\right\} \\ &= \begin{bmatrix} 0{,}66 & -1.15j & 0{,}66 & 0 & 0{,}66 & 1{,}15j \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

iz česar sledi:

$$\begin{aligned} A_X[k] &= \begin{bmatrix} 0{,}66 & 1.15 & 0{,}66 & 0 & 0{,}66 & 1{,}15 \end{bmatrix} \\ \varphi_X[k] &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\pi}{2} & 0 & \sim & 0 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Poteka amplitudnega in faznega spektra prikazuje Slika 3.2.



Slika 3.2: DFT spekter periodičnega signala $x[n]$=[2 2 2 2 -2 -2].

▪ Delo v programskem okolju Matlab

Naloga 4.1: Iz spletne učilnice lokalno prenesite knjižnico Matlab uporabniških funkcij *lib*. Pot do knjižnice vključite v delovne poti orodja Matlab. Nadalje, ustvarite novo skripto in v njej opredelite pravokoten impulz amplitude $A = 1$, širine $M = 4$ in periode $N = 64$. S klicem funkcije [X, AX, $phiX$] = $fnDFT(x)$ izračunajte DFT spekter tega impulza ter izrišite njegov amplitudni in fazni del.

Naloga 4.2: Nalogo 4.1. ponovite za impulze širin $M_1 = 2$, $M_2 = 10$, $M_3 = 32$ in $M_4 = 48$. Primerjajte amplitudni in fazni spekter s spektroma pridobljenima pri Nalogi 4.1. in podajte sklepe.

Naloga 4.3: Nalogo 4.1. ponovite za impulze period $N_1 = 8$, $N_2 = 32$, $N_3 = 128$ in $N_4 = 4096$. Primerjajte amplitudni in fazni spekter s spektroma pridobljenima pri Nalogi 4.1. in podajte sklepe.

Naloga 4.4: Z uporabo uporabniško definirane funkcije za sintezo/rekonstrukcijo signala iz izračunanih DFT komponent $fnIFFT(X)$ pokažite spremembo rekonstruiranega signala v odvisnosti od upoštevanih spektralnih komponent (neupoštevane komponente postavite na vrednost 0). Signal iz Naloge 4.1 rekonstruirajte z upoštevanjem:

a) spektralne komponente k=0
b) spektralni komponenti k=0 in1
c) spektralnih komponent k=0, 1 in 2
d) spektralnih komponent k=0…3
e) spektralnih komponent k=0…11
f) vseh spektralnih komponent signala.

Za vsako podnalogo a)-f) predvajajte pridobljen rekonstruiran signal s ustvarjanjem predvajalnega objekta v okolju Matlab. Pri tem upoštevajte vzorčno frekvenco f_{vz} = 8192 Hz, osnovni signal pred predvajanjem pa ponovite 100 krat zato, da boste med predvajanjem imeli dovolj časa signal slišati in oceniti. Izrišite potek pridobljenih rekonstruiranih signalov v časovnem prostoru in podajte sklepe.

Domača naloga 3

1. Izračunajte in izrišite DFT spekter signala iz Naloge 4.1 zakasnjenim za štiri vzorce.

2. Pridobite signal $x[n]$ v časovno diskretnem prostoru, če je njegov DFT spekter enak:

$$X[k] = [1, \quad j, \quad 0, \quad -1 + j\sqrt{3}, \quad -1 - j\sqrt{3}, \quad 0, \quad -j].$$

3. V okolju Matlab izračunajte DFT spekter signala $x[n]$ = [1 0 -1 0] na tri načine:
   a. Z upoštevanjem periode $N = 4$.
   b. Z upoštevanjem $N = 5$.
   c. Z upoštevanjem dodajanja velikega števila ničel signalu.

Za vsak primer eksplicitno zapišite po pridobljenem spektru v $x[n]$ vsebovane frekvence.

4. Izračun DFT spektra signala iz Naloge 4.1 ponovite ob upoštevanju 10 period signala. Ponovno izračunajte in izrišite spekter signala. Katere frekvence vsebuje signal? Kakšna je sedaj ločljivost prikaza?

5. Izračun DFT spektra signala iz Naloge 4.1 ponovite in sicer tako, da signalu pred izračunom dodate 64*9 = 576 ničel (signal je enako dolg kot pri prejšnji nalogi). Ponovno izračunajte in izrišite spekter signala. Katere frekvence vsebuje signal? Kakšna je sedaj ločljivost prikaza?

Rezultate oddajte do 09. 11. 2025 23:59.