Interpolación polinomial

Dr. Alejandro Paredes

Facultad de Ciencias

26 de abril de 2023

Resumen

Motivación

- Las leyes físicas están expresadas en términos de relaciones funcionales

$$
\begin{aligned}
F &= -kx \quad \text{Ley de Hook,} \\
B_\nu(T) &= \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/k_BT}-1} \quad \text{Ley de radiación de cuerpo.}
\end{aligned}
$$

- En algunos casos solo disponemos de los datos experimentales.
- Muchas veces se necesita la derivada de una determinada función o su primitiva.
- En otros casos, las leyes físicas vienen expresadas en forma de ecuaciones diferenciales $(\nabla \cdot \mathbf{B} = 0)$.

Solución: Aproximar las relaciones funcionales con polinomios.

Un problema

Se tiene un conjunto de medidas y_k a ciertos instantes de tiempo t_k con $k = 1, 2, 3, \ldots m$

$$(y_1, t_{,1}); (y_2, t_{,2}); \ldots (y_m, t_{,m})$$

Debemos encontar la función interpolante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(t_k) = y_k \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, m$$

Condiciones adicionales:

- Pendiente en ciertos puntos.
- Suavidad, monotonicidad, convexidad de la función interpolante.
- Sólo consideraremos el caso unidimensional $f(x)$.

Interpolación

Ventajas:

- Hacer pasar una curva suave sobre los datos discretos.
- Hallar el valor de una medida entre dos datos.
- Tener acceso a la derivada y a la integral del conjunto de datos.

Desventajas:

- Pobres resultados con datos sujetos a errores significantes.
- Dificultad para capturar discontinuidades.

Bases de funciones

Conjunto de funciones $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\}$ base de $E(\mathbb{R} : \mathbb{R})$

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \phi_j(t)$$

Imponemos que $f(x)$ pase por los datos

$$f(t_k) = y_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \phi_j(t_k) \qquad k = 1, 2, \ldots, m$$

$$\mathbf{A}\lambda = \mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} \phi_1(t_1) & \phi_2(t_1) & \ldots & \phi_n(t_1) \\ \phi_1(t_2) & \phi_2(t_2) & \ldots & \phi_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_1(t_n) & \phi_2(t_n) & \ldots & \phi_n(t_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Monomios

$$\begin{aligned} \phi_j(t) &= t^{j-1} \quad j = 1, 2, \ldots, n \\ f_{n-1}(t) &= \lambda_1 t^0 + \lambda_2 t^1 + \cdots + \lambda_n t^{n-1} \end{aligned}$$

Ejemplo: $(-2, -27), (0, -1), (1, 0)$

$\mathbf{A}\lambda = \mathbf{y}, \quad \mathbf{A}$: matriz de Vandermonde

$$\begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$det(A) \neq 0 \Rightarrow$ solución única $\lambda = (-1, 5, -4)$

$$f_2(t) = -1 + 5t - 4t^2$$

Polinomios de Lagrange

$$\ell_j(t) = \prod_{k=1, k\neq j}^{n} \frac{(t-t_k)}{(t_j-t_k)} \qquad \ell_j(t_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Para los pares ordenados $(y_1, t_1), (y_2, t_2), (y_3, t_3)$, tenemos

$$\begin{aligned} \ell_1(t) &= \frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} \\ \ell_2(t) &= \frac{(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)} \\ \ell_3(t) &= \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)} \end{aligned}$$

Polinomios de Lagrange

La matriz $\mathbf{A}$ en $\mathbf{A}\lambda = \mathbf{y}$ resulta ser la matriz identidad.

$$f_{n-1} = y_1\ell_1 + y_2\ell_2 + \cdots + y_n\ell_n$$

Aquí el trabajo sólo es escribir los polinomios.
Ejemplo: $(-2, -27), (0, -1), (1, 0)$

$$f_2 t) = -27\frac{t(t-1)}{-2(-2-1)} + (-1)\frac{(t+2)(t-1)}{2(-1)}$$

Polinomios de Newton

$$\pi_1 = 1 \quad \pi_j = \prod_{k=1}^{j-1}(t - t_k) \quad j = 2, \ldots, n$$

$$\begin{aligned} f_{n-1}(t) = \lambda_1 + \lambda_2(t-t_1) + \lambda_3(t-t_1)(t-t_2) \\ + \cdots + \lambda_n(t-t_1)(t-t_2)\cdots(t-t_{n-1}) \end{aligned}$$

Nota:
Para $i < j, \pi_j(t_i) = 0$ entonces $\mathbf{A}$ es una matriz triangular L.
Ejemplo: $(-2, -27), (0, -1), (1, 0)$

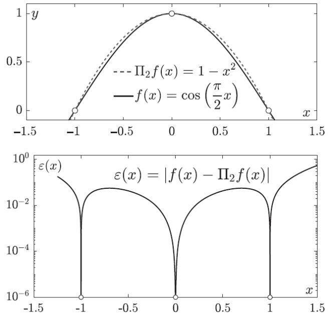
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x = (-27, 13 - 4)$

$$f_2(t) = -27 + 13(t+2) - (t+2)t$$

Convergencia

Cosideremos la interpolación de $f(x) = Cos(\pi x/2)$ en los puntos $\{-1, 0, 1\}$ con polinomio interpolante $\Pi_2 f(x)$



- ¿Puede una función ser siempre interpolada?
- ¿Qué tan cerca esta el polinomio interpolante de la función?

Convergencia

Teorema de aproximación de Weiertrass : Sea f(x) una función continua en el intervalo $[a, b]$. Entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe un entero $n = n(\epsilon)$ y un polinomio $p(x) \in \mathbb{R}_n(x)$ tal que

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon \forall x \in [a, b]$$

Resto de Cauchy: Sea una función $f(x)$ $(n+1)$ veces derivable en $I = [a, b]$ y sea $\Pi_n f(x)$ el polinomio interpolante de $f(x)$ en los puntos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in I$. Entonces, $\forall x \in I \quad \exists$ un punto $\zeta(x)$ dentro del intervalo $[min\{x_0, \ldots, x_n, x\}, max\{x_0, \ldots, x_n, x\}]$, tal que

$$R_n(x) = f(x) - \Pi_n f(x) = \frac{f^{n+1}(\zeta)}{(n+1)!} l(x)$$

donde $l(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$

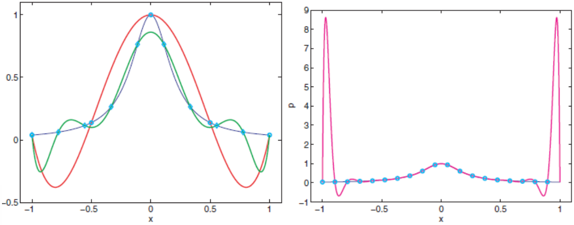
Convergencia

- El resto $R_n(x)$ es cero en los nodos.
- El factor $(n+1)!$ indica que la aproximación mejora al incrementar los puntos de interpolación.
- Si $f^{n+1}(\zeta)$ es grande degrada la precisión.

Contraejemplo de Runge: considere la función

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

Interpolación con puntos equidistantes no funciona



(a) $n = 4, 9$. (b) $n = 19$.

Condicionamiento de una interpolación

Consideremos una función continua $f(x)$ tal que $|f(x)| \leq 1$ y puntos equidistantes $\{x_1, \ldots x_n\}$ dentro del intervalo $[-1, 1]$. El polinomio interpolante de Lagrange será:

$$\Pi_n f(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\ell_j(x)$$

Función de Lebesgue: asociada a los puntos $\{x_1, \ldots x_n\}$ dentro del intervalo $[-1, 1]$ es

$$\lambda_n(x) = \sum_{j=0}^{n} |\ell_j(x)|$$

Constante de Lebesgue: correspondiente a $\lambda_n(x)$ es

$$\Lambda_n = max_{x\in[-1,1]}\lambda_n(x)$$

Condicionamiento de una interpolación

ya que $f(x)$ está acotada, entonces

$$|\Pi_n f(x)| = \left|\sum_{j=0}^{n} f_j \ell_j(x)\right| \leq \sum_{j=0}^{n} |f_j||\ell_j(x)| \leq \sum_{j=0}^{n} |\ell_j(x)| = \lambda_n(x).$$

Sin embargo, debido a errores de precisión o incertidumbres de medición la función a interpolar se expresa como:

$$\tilde{f}(x_j) = f(x_j) + \Delta f(x_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad \text{con } |\Delta f(x_j)| < \epsilon$$

$\epsilon > 0$ constante es la precisión de la data. Puede representar la precisión de la máquina. El polinomio interpolante asociado con $\tilde{f}(x_j)$, será:

$$\widetilde{\Pi}_n f(x) = \sum_{j=0}^{n} \widetilde{f}_j \ell_j(x) = \sum_{j=0}^{n} (f_j + \Delta f_j) \ell_j(x).$$

Condicionamiento de una interpolación

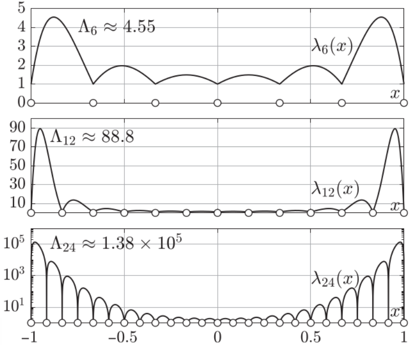
Comparamos la interpolación de la función perturbada y la de la función exacta.

$$
\begin{aligned}
|\widetilde{\Pi}_n f(x) - \Pi_n f(x)| &= \left| \sum_{j=0}^{n} (f_j + \Delta f_j)\ell_j(x) - \sum_{j=0}^{n} f_j \ell_j(x) \right| \\
&= \left| \sum_{j=0}^{n} \Delta f_j \ell_j(x) \right| \leq \sum_{j=0}^{n} |\Delta f_j||\ell_j(x)| \\
&\leq \varepsilon \sum_{j=0}^{n} |\ell_j(x)| = \varepsilon \lambda_n(x).
\end{aligned}
$$

$$
\max_{x \in I} |\widetilde{\Pi}_n f(x) - \Pi_n f(x)| \leq \varepsilon \Lambda_n,
$$

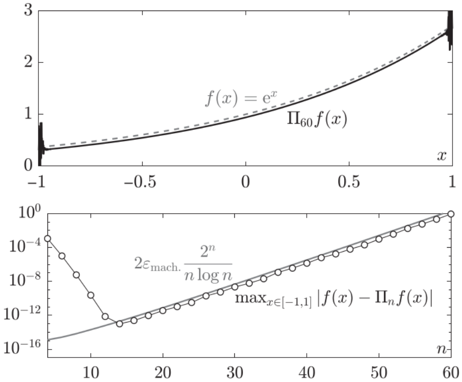
Condicionamiento de una interpolación

La amplificación de las incertidumbres en $f(x_j)$ están limitadas por la constante de Lebesgue. Esta constante es llamada el numero de condicionamiento de la interpolación. Para el caso de la función de Runge, tenemos



Condicionamiento de una interpolación

Consideremos el caso de la función e^x en el intervalo $[-1,1]$



$$\boxed{\Lambda_n^{\text{Equi.}} \propto \frac{2^n}{n \log n}.}$$

Interpolación de Chebyshev

- Se tiene una función suave $f(x)$ definida en el intervalo $[a, b]$.
- Se desea una buena interpolación y somos libres de escoger los $n + 1$ puntos de interpolación $x_0, x_1, \ldots$
- ¿Que puntos escogemos para garantizar un mínimo error?

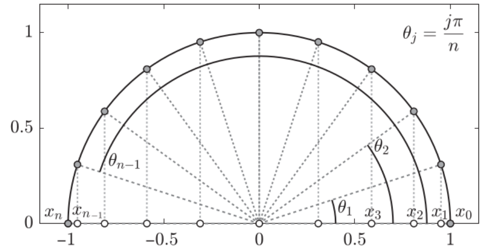
Si asumimos que que la $f^{n+1}(x)$ está acotada, entonces para minimizar el resto $R_n$debemos minimizar $|l(x)|$, donde $l(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$.

Interpolación de Chebyshev

El resultado corresponde a los puntos de Chebyshev

$$x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)$$

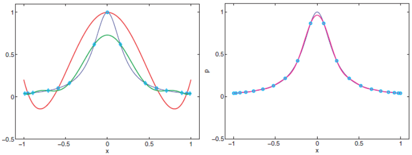
Corresponden a las proyecciones sobre el eje x de los puntos sobre el circulo unitario distanciados por ángulos $\theta_j = j\pi/n$



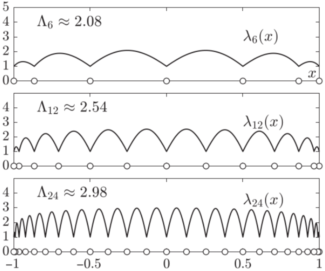
Interpolación de Chebyshev

Puntos de Chebyshev en el intervalo $[a, b]$ (transformación afín)

$$x_j = a + \frac{a-b}{2}\left[1 + cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)\right]$$



(a) $n = 4, 9$. (b) $n = 19$.

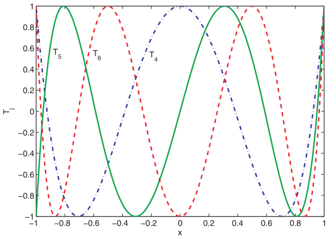


Interpolación de Chebyshev

Los polinomios de Chebyshev de grado n están definidos por:

$$T_n(x) = \cos(n\theta), \quad x = \cos(\theta)$$
$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

y verifican $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$



$$
\begin{aligned}
T_0(x) &= 1\\
T_1(x) &= x\\
T_2(x) &= 2x^2 - 1\\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x\\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1\\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x\\
T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1\\
T_7(x) &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x\\
T_8(x) &= 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1\\
T_9(x) &= 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x\\
T_{10}(x) &= 512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1\\
T_{11}(x) &= 1024x^{11} - 2816x^9 + 2816x^7 - 1232x^5 + 220x^3 - 11x
\end{aligned}
$$

Interpolación de Chebyshev

- Evidentemente $|T_n|_\infty = \max_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = 1$.
- El coeficiente líder (factor de x^n) es igual a 2^{n-1}.
- Los n ceros de T_n son de multiplicidad simple, reales y yacen en el intervalo $]-1,1[$.

$$\bar{x}_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1,\dots,n$$

- $T_n(x)$ tiene $n+1$ extremales en el intervalo $[-1,1]$

$$x_k = \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right), \quad k = 0,\dots,n.$$

Interpolación de Chebyshev

Teorema: Propiedad Min-Max de Chebyshev
Considere los puntos $\bar{x}_k$ (raíces de T_n), definimos $\tilde{T}_n(x) = \Pi_{k=1}^{n}(x - \bar{x}_k)$. Entonces, de todos los polinomios mónicos de grado n, únicamente $\tilde{T}_n(x)$ tiene la magnitud máxima mínima en el intervalo $[-1, 1]$, y

$$\max_{x \in [-1,1]} |\tilde{T}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Interpolación de Chebyshev

Si $x_0, x_1, \ldots x_n$ son distintos puntos en el intervalo $[-1, 1]$, $f \in C^{n+1}$ y $P(x)$ el polinomio interpolante de grado n, entonces tenemos que $l(x)$ en el resto de Cauchy

$$\begin{aligned} R_n(x) &= f(x) - P(x) = \frac{f^{n+1}(\zeta)}{(n+1)!} l(x) \\ l(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) \end{aligned}$$

es un polinomio de grado $n + 1$. Por lo tanto

$$\frac{1}{2^n} = max_{x \in [-1,1]} (x - \bar{x}_1) \ldots (x - \bar{x}_n) \leq \max_{x \in [-1,1]} l(x)$$

entonces interpolando $P(x)$ en los ceros de $T_n(x)$, tenemos

$$\max_{x \in [-1,1]} R_n(x) \leq \frac{1}{2^n (n+1)!} max_{x \in [-1,1]} |f^{n+1}(x)|$$

Interpolación de Chebyshev

- Las raíces de $T_n(x)$ es que no contienen los extremos del intervalo $[-1, 1]$.
- El resultado es similar si los puntos de interpolación son x_k (extremales de $T_n(x)$).

JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY **36**, 257–264 (1982)

Polynomial Approximation Using Equioscillation on the Extreme Points of Chebyshev Polynomials

G. M. PHILLIPS

Mathematical Institute, University of Saint Andrews, Saint Andrews, Scotland

AND

P. J. TAYLOR

Department of Mathematics, University of Stirling, Stirling, Scotland

Communicated by Richard S. Varga

Received September 3, 1981

IN MEMORY OF PROFESSOR A.S.B. HOLLAND,
UNIVERSITY OF CALGARY

Ejercicios

Considere los datos

x	0	1	2	5.5	11	13	16	18
y	0.5	3.134	5.3	9.9	10.2	9.35	7.2	6.2

Use los monomios, polinomios de Lagrange y polinomios de Newton para determinar el valor de y en $x = 8$

Ejercicios

Considere la función

$$f(x) = tanh(20sin(12x)) + \frac{1}{50}e^{3x}sin(300x)$$

- En $[0,1]$ interpolar $f(x)$ con 100 puntos equidistantes y de Chebyshev (Lagrange).
- Graficar el error

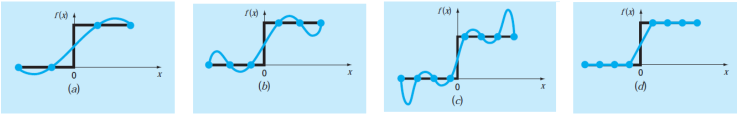
  $$Err(x) = |f(x) - \Pi f(x)| \quad \forall x \in [0,1]$$

  Los $\Pi f(x)$ son los polinomios del item anterior.
- En $[0,1]$, interpolar $f(x)$ con puntos de Chebyshev para $n = 100, 200, 300, \ldots, 1000$ (Lagrange).
- Graficar con escala logarítmica en y el error

  $$Err = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - \Pi_n f(x)|, \quad n = 100, 200, \ldots, 1000$$

Interpolación con spline

- Utilizamos un polinomio de grado n para interpolar $n+1$ datos.
- No siempre funciona inclusive para n grande.
- Alternativa: usar polinomios de grado inferior en subgrupos de datos. Esos polinomios reciben el nombre de funciones spline.



Splines lineales

Sea un conjunto de datos $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$. En cada intervalo se utilizan líneas rectas para unir los puntos

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + m_0(x - x_0) && x_0 \leq x \leq x_1 \\
f(x) &= f(x_1) + m_1(x - x_1) && x_1 \leq x \leq x_2 \\
&\ \ \vdots \\
f(x) &= f(x_{n-1}) + m_{n-1}(x - x_{n-1}) && x_{n-1} \leq x \leq x_n
\end{aligned}
$$

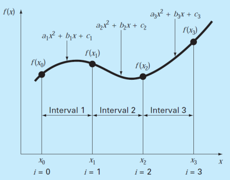
Solo se necesita especificar las pendientes de las rectas

$$m_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Splines cuadráticas

- Para cada intervalo $i = 1, \ldots, n$ se debe encontrar un polinomio de grado 2.

$$f_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$$



- Tenemos $n + 1$ puntos en las abscisas, n intervalos y $3n$ constantes que determinar. Necesitamos $3n$ ecuaciones.

Splines cuadráticas

- Dos polinomios adyacentes tienen el mismo valor en el punto de intersección.$(i = 2, \ldots, n)$

$$a_{i-1}x_{i-1}^2 + b_{i-1}x_{i-1} + c_{i-1} = f(x_{i-1})$$
$$a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = f(x_{i-1})$$

  En total tenemos $2n - 2$.

- En los extremos las funciones deben verificar

$$a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 = f(x_0)$$
$$a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n = f(x_n)$$

  así tenemos 2 condiciones adicionales y en total $2n$.

- Las primeras derivadas de cada polinomio deben ser las misma en los puntos de intersección.$(i = 2, \ldots, n)$

$$2a_{i-1}x_{i-1} + b_{i-1} = 2a_i x_{i-1} + b_i$$

  tenemos $n - 1$ ecuaciones adicionales y en total $3n - 1$ condiciones.

Splines cuadráticas

- Nos falta una condición. Asumimos que la segunda derivada en el primer punto es cero. Tenemos que $a_1 = 0$ y la primera spline es una recta.

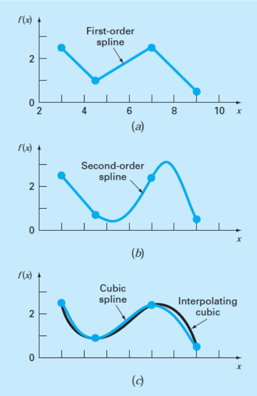
Splines cúbicas

- Se desea usar un polinomio de grado 3 en cada intervalo.

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

- Se tienen $4n$ incógnitas en total.
- Igualdad de polinomios en puntos int.($2n - 2$ cond).
- Las funciones deben pasar por los extremos. (2 cond).
- Primeras derivadas puntos int. son iguales. ($n - 1$ cond).
- Segundas derivadas puntos int. son iguales. ($n - 1$ cond).
- Segundas derivadas en extremos igual a cero. (2 cond).

x	$f(x)$
3.0	2.5
4.5	1.0
7.0	2.5
9.0	0.5



Interpolación con spline

Considere la función

$$Sen(t)^2$$

- Genere 8 puntos igualmente espaciados e interpole los puntos con un polinomio de orden 7.
- Interpole con una spline cúbica.
- Interpole usando ocho puntos de Chebyshev.