Solución de sistemas lineales

PhD. Alejandro Paredes

Facultad de Ciencias

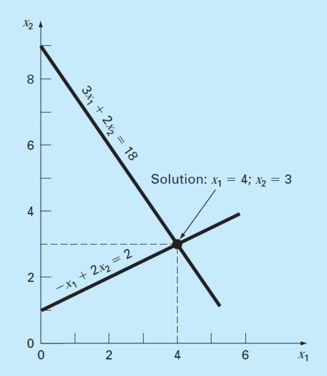
Resumen

1. Sistemas lineales
2. Métodos directos e iterativos
3. Sustitución directa.
4. Sustitución inversa.
5. Eliminación de Gauss.
6. Pivoteo parcial.
7. Descomposición LU.
8. Descomposición de Cholesky.

Sistemas lineales

Consideremos el sistema lineal simple:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x_1 + \frac{b_1}{a_{12}} \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 + \frac{b_2}{a_{22}}
\end{aligned}
$$

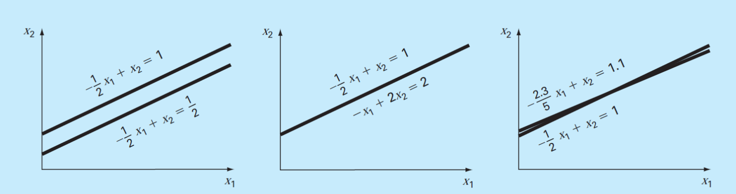


Sistemas lineales

a) Sistema sin solución.

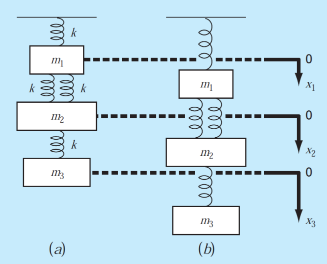
b) Sistema con soluciones infinitas.

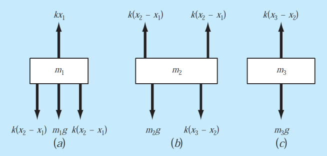
c) Sistema mal condicionado (extremadamente sensibles a errores de redondeo).



(*a*) (*b*) (*c*)

Sistemas lineales en Física





$$
\begin{aligned}
m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= 2k(x_2 - x_1) + m_1 g - k x_1 \\
m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= k(x_3 - x_2) + m_2 g - 2k(x_2 - x_1) \\
m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} &= m_3 g - k(x_3 - x_2)
\end{aligned}
$$

Sistemas lineales en Física

Si buscamos la solución estacionaria:

$$\begin{aligned} 3kx_1 - 2kx_2 &= m_1 g \\ -2kx_1 + 3kx_2 - kx_3 &= m_2 g \\ -kx_2 + kx_3 &= m_3 g \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 3k & -2k & 0 \\ -2kk & 3k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 g \\ m_2 g \\ m_3 g \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

Métodos directos e iterativos

Según las características del problema

- Tipo de matriz (triangular, tridiagonal, llena de ceros, sin ceros, etc)
- Tamaño del problema (dimensión de la matriz).
- Condicionamiento de la matriz.

Existen dos métodos (caminos) para encontrar la solución

- Métodos directos(Sustitución directa e inversa, eliminación de Gauss con y sin pivote, factorización LU y de Cholesky).
- Métodos iterativos(Jacobi, Gaus-Seidel,SOR, método del gradiente, gradiente conjugado).

Nota: En ningún caso se calcula A^{-1}

Sustitución directa (forward)

- Matriz con dimensión pequeña.
- Matriz A: triangular inferior L.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1/a_{11}, \quad x_2 = (b_2 - a_{21}x_1)/a_{22} \\ x_n &= (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 \cdots - a_{n(n-1)}x_{(n-1)})/a_{nn} \\ x_n &= (b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j)/a_{nn} \\ x_k &= (b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}x_j)/a_{kk} \end{aligned}$$

Sustitución directa (forward)

Algoritmo: Dada una matriz triangular inferior A de dimensión n y un vector b,

$$
\begin{aligned}
&\text{for } k = 1 : n \\
&\qquad x_k = \frac{b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_j}{a_{kk}} \\
&\text{end}
\end{aligned}
$$

- Los elementos de la diagonal no puden ser cero.
- Hay problemas si los elementos de la diagonal son próximos a cero.

Sustitución directa (forward)

Número de operaciones

$$x_k = \left(b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_j \right) / a_{kk}$$

por cada valor de k tenemos

- 1 división.
- 1 resta.
- $k-1$ multiplicaciones
- $k-1$ sumandos, entonces $k-2$ sumas.

$$\begin{aligned} \text{Operaciones} &= \sum_{k=1}^{n} (1 + 1 + (k-1) + (k-2)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 \end{aligned}$$

Sustitución inversa (backward)

- Matriz de dimension pequenña.
- Matriz A: triangular superior U

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_n &= b_n/a_{nn} \\ x_{n-1} &= (b_{n-1} - a_{(n-1)n}x_n)/a_{(n-1)(n-1)} \\ x_{n-2} &= (b_{n-2} - a_{(n-2)n}x_n - a_{(n-2)(n-1)}x_{n-1})/a_{(n-2)(n-2)} \\ &\vdots \\ x_1 &= (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \cdots - a_{1n}x_n)/a_{11} \\ x_k &= (b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j)/a_{kk} \end{aligned}$$

Sustitución inversa.

Algoritmo: Dada una matriz triangular superior A de dimesión n y un vector $\mathbf{b}$,

$$\text{for } k = n : -1 : 1$$
$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j}{a_{kk}}$$
$$\text{end}$$

- El bucle debe comenzar a partir de $k = n - 1$
- Se debe inicializar $x_n = b_n / A_{nn}$

Eliminación de Gauss

- Matriz de dimensión pequeña.
- Matriz A : no es ni L ni U.
- Los coeficientes de la primera columna no son cero ni proximos a cero.
- El objetivo es llevar la matriz A a un matriz U y luego realizar una sustitución backwards.

Método eliminación de Gauss

Solución : $[3 \quad 4 \quad -2]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 5 \\ 2 & 3 & 5 & | & 8 \\ 4 & 0 & 5 & | & 2 \end{bmatrix}$$

Transformar un sistema lineal en U o L

- F2 -2F1
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & 3 & | & -2 \\ 4 & 0 & 5 & | & 2 \end{bmatrix}$$
- F3-4F1
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & 3 & | & -2 \\ 0 & -4 & 1 & | & -18 \end{bmatrix}$$
- F3+4F2
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & 3 & | & -2 \\ 0 & 0 & 13 & | & -26 \end{bmatrix}$$
- F3/13
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & 3 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{bmatrix}$$

Algoritmo eliminación Gauss:

```
DOFOR k = 1, n − 1
 DOFOR i = k + 1, n
   factor = a_{i,k} / a_{k,k}
   DOFOR j = k + 1 to n
     a_{i,j} = a_{i,j} − factor · a_{k,j}
   END DO
   b_i = b_i − factor · b_k
 END DO
END DO
x_n = b_n / a_{n,n}
DOFOR i = n − 1, 1, −1
  sum = b_i
  DOFOR j = i + 1, n
   sum = sum − a_{i,j} · x_j
  END DO
  x_i = sum / a_{i,i}
END DO
```

Método eliminación de Gauss

Cosiderando la matriz aumentada $\hat{A} = A|b$ ($dim = n(n+1)$). Donde $\#C = \#F + 1$.

- Para eliminar el coeficiente $\hat{A}_{21}$ se necesita: 1 división, $n+1$ multiplicaciones ($\#C$) y $n+1$ restas ($\#C$). En total de $2n+3$ operaciones.
- Eliminar la primera columna debajo de la diagonal se multiplica el número anterior por $n-1$, es decir $\#F-1$. Entonces tenemos $(1+2\#C)(\#F-1) = (2\#F+3)(\#F-1) = (2n+3)(n-1)$
- Se repite el mismo procedimiento para una matriz $\hat{A}'$ con $\#F = n-1, n-2, \ldots, 1$

$$
\begin{aligned}
\text{Total} &= \sum_{k=1,n} (2k^2 + k - 3) \\
&= 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} - 3n = \mathcal{O}(n^3)
\end{aligned}
$$

Método eliminación de Gauss

Desventajas:

- La solución sólo se obtiene al culminar todas las operaciones.
- Sensible a errores de redondeo.
- No hay posibilidad de aumentar la precisión de la solución.

Pivoteo parcial

Los métodos de sustitucion y de eliminación de Gauss fallan cuando un elemento de la diagonal es cero.

$$
\begin{aligned}
2x_2 + 3x_3 &= 8 \\
4x_1 + 6x_2 + 7x_3 &= -3 \\
2x_1 + 1x_2 + 6x_3 &= 5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}
$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$a_{11} = 0$ y también falla cuando $a_{11} \approx 0$

Pivoteo parcial

Solución:

- Pivotear (intercambiar) la primera y la segunda fila.
- Se debe escoger el mayor elmento en la columna debajo del elemento a pivotear.

Nota:

- Pivoteo parcial: intercambio filas.
- Pivoteo total: intercambio filas y columnas.
- El pivoteo total disminuye errores de redondeo, pero es más costoso en $\#$ de operaciones.

```
p = k
big = |a_{k,k}|
DOFOR ii = k+1, n
  dummy = |a_{ii,k}|
  IF (dummy > big)
    big = dummy
    p = ii
  END IF
END DO
IF (p ≠ k)
  DOFOR jj = k, n
    dummy = a_{p,jj}
    a_{p,jj} = a_{k,jj}
    a_{k,jj} = dummy
  END DO
  dummy = b_p
  b_p = b_k
  b_k = dummy
END IF
```

Descomposición LU

Deseamos resolver el problema

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad A \text{ es invertible}$$

Supongamos que el problema anterior se puede escribir

$$U\mathbf{x} = \mathbf{d} \to U\mathbf{x} - \mathbf{d} = 0$$

donde U es una matriz triangular superior y existe una matriz L triangular inferior con $1's$ en la diagonal tal que

$$L\left[U\mathbf{x} - \mathbf{d}\right] = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$$

por lo tanto

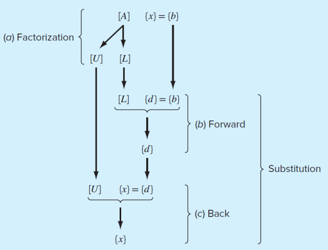
$$A = LU, \quad \text{y } L\mathbf{d} = \mathbf{b}$$

Descomposición LU

Algoritmo

- Se factoriza la matriz $A = LU$
- Obtener $\mathbf{d}$ por sustitución forward en $L\mathbf{d} = \mathbf{b}$ y luego $\mathbf{x}$ por sustitución backward en $U\mathbf{x} = \mathbf{d}$.

El problema se concentra en factorizar la matriz $A = LU$



Descomposición LU

- La matriz A admite una factorización LU si y solo si se cumple que

$$det(A_k) \neq 0, \quad k = 1, \ldots, n$$

donde las matrices A_k es una submatriz obtenida a partir de las primras filas y columnas de A

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

- Si la matriz A admite una descomsición LU, entonces la factorización LU es única.

Descomposición LU

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ 0 & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ 0 & 0 & \beta_{33} & \beta_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{i1}\beta_{1j} + \cdots = a_{ij}$$

$$\begin{aligned} i < j: &\qquad \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \cdots + \alpha_{ii}\beta_{ij} = a_{ij} \\ i = j: &\qquad \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \cdots + \alpha_{ii}\beta_{jj} = a_{ij} \\ i > j: &\qquad \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \cdots + \alpha_{ij}\beta_{jj} = a_{ij} \end{aligned}$$

- Hay N^2 ecuaciones.
- Cada matriz L y U tiene $(N^2 + N)/2$ elementos.
- $N^2 + N$ incognitas!!!.

Algoritmo de Crout

- Se especifican N variables $\alpha_{ii} = 1$ para $i = 1, \ldots, N$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} & \alpha_{11}\beta_{12} & \alpha_{11}\beta_{13} & \alpha_{11}\beta_{14} \\ \alpha_{21}\beta_{11} & \alpha_{21}\beta_{12}+\alpha_{22}\beta_{22} & \alpha_{21}\beta_{13}+\alpha_{22}\beta_{23} & \alpha_{21}\beta_{14}+\alpha_{22}\beta_{24} \\ \alpha_{31}\beta_{11} & \alpha_{31}\beta_{12}+\alpha_{32}\beta_{22} & \alpha_{31}\beta_{13}+\alpha_{32}\beta_{23}+\alpha_{33}\beta_{33} & \alpha_{31}\beta_{14}+\alpha_{32}\beta_{24}+\alpha_{33}\beta_{34} \\ \alpha_{41}\beta_{11} & \alpha_{41}\beta_{12}+\alpha_{42}\beta_{22} & \alpha_{41}\beta_{13}+\alpha_{42}\beta_{23}+\alpha_{43}\beta_{33} & \alpha_{41}\beta_{14}+\alpha_{42}\beta_{24}+\alpha_{43}\beta_{34}+\alpha_{44}\beta_{44} \end{bmatrix}$$

- Se resuelven las demás varaibles del sistema lineal $\alpha_{i1}\beta_{1j} + \cdots = a_{ij}$
- Para cada $j = 1, \ldots, N$ hacer estos dos procedimientos
  - Para $i = 1, \ldots, j$ (cuando $i = 1$ la sumatoria es cero)

$$\beta_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_{ik}\beta_{kj} \text{ Sust. Forward}$$

  - Para $i = j+1, j+2, \ldots, N$

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{\beta_{jj}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_{ik}\beta_{kj}\right) \text{ Sust. Backward}$$

Descomposición de Cholesky

Consideremos una matriz A simétrica

$$A^T = A$$

y positiva definida

$$x^T A x > 0, \quad \forall x \neq 0$$

- Tales matrices,de cierta manera, extienden el concepto de un escalar positivo.
- Se puede demostrar que para A siempre se puede utilizar una eliminación de Gauss sin pivoteo parcial.

Descomposición de Cholesky

La matriz simétrica A (invertible) admite una descomposición LU

$$A = LU, \quad U \text{ diagonal superior con } u_{kk} > 0$$

$$U = D\tilde{U}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12}/u_{11} & \dots & u_{1n}/u_{11} \\ & 1 & u_{33}/u_{22} & \vdots \\ & & 1 & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Descomposición de Cholesky

$$A = LD\tilde{U} = A^T = \tilde{U}^T D^T L^T$$

ya que la descomposición es única, $\tilde{U}^T = L$ y tenemos que

$$A = LDL^T$$

donde L s una matriz triangular inferior con 1's en la diagonal y D una matriz diagonal con elementos postivos u_{kk}.
Es posible escirbir $D = D^{1/2}D^{1/2}$ con

$$D^{1/2} = diag\left\{\sqrt{u_{11}}, \sqrt{u_{22}} \ldots \sqrt{u_{nn}}\right\}$$

Descomposición de Cholesky

- Toda matriz simétrica A positiva definida se puede factorizar de la forma

$$A = G^T G, \quad G = (LD^{1/2})^T$$

donde G es una matriz triangular superior.

- Esta descomposición se denonima de Cholesky.

Los terminos de G se pueden calcular con la regla de recurrencia

$$\begin{aligned} g_{ii} &= \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ki}^2} \\ \text{para } j &= i+1, \ldots, n \\ g_{ij} &= \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ki} g_{kj}}{g_{ii}} \end{aligned}$$

Ejercicios

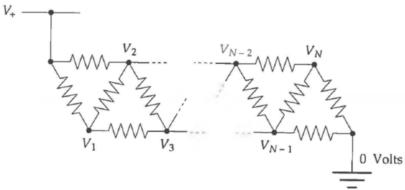
Resolver los sistemas lineales triangulares

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5,\\
-4x_2 + x_3 &= 2,\\
-2x_3 &= 4.
\end{aligned}
\qquad
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}
$$

usando los métodos se sustitución $forward$ y $backward$.

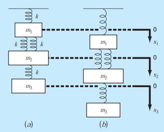
Ejercicio

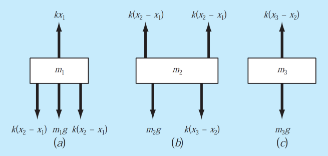
En el arreglo cada resitor tiene una resistencia R y $V_+ = 5V$.



- Encuentre la ecuación que verifican los potenciales en cada nodo.
- Exprese las ecuaciones en forma matricial $AV = W$.
- Encuentre el valor de los potenciales cuando $N = 6$ considerando $R = 1\Omega$.
- Encuentre los potenciales cuando $N = 1000$.

Ejercicio





$$
\begin{aligned}
m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= 2k(x_2 - x_1) + m_1 g - k x_1 \\
m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= k(x_3 - x_2) + m_2 g - 2k(x_2 - x_1) \\
m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} &= m_3 g - k(x_3 - x_2)
\end{aligned}
$$

Encontrar las soluciones estacionarias cuando $k = 10$ y $m_1 = m_2 = m_3 = 1kg$.