Problemas con condiciones de frontera

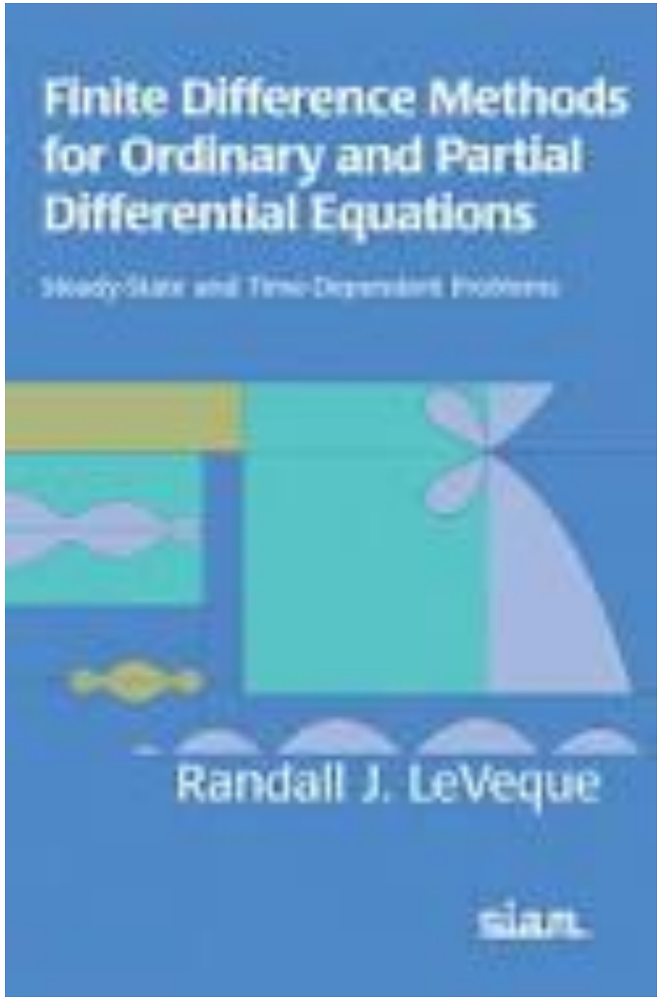
PhD. Alejandro Paredes

Problemas con condiciones de frontera
Boundary Value Problems (BVP)

Consideremos la ecuación del calor de una barra con extremos en los puntos $x = a$ y $x = b$.

$$u_t(x,t) = (\kappa(x)u_x(x,t))_x + \psi(x,t)$$

- $u(x,t)$: Temperatura de la barra en un punto e instante determinado.
- $\kappa(x)$: Coeficiente de conducción dependiente de la posición.
- $\psi(x,t)$: Fuente de calor ($\psi > 0$) o sumidero ($\psi < 0$).



Problemas con condiciones de frontera

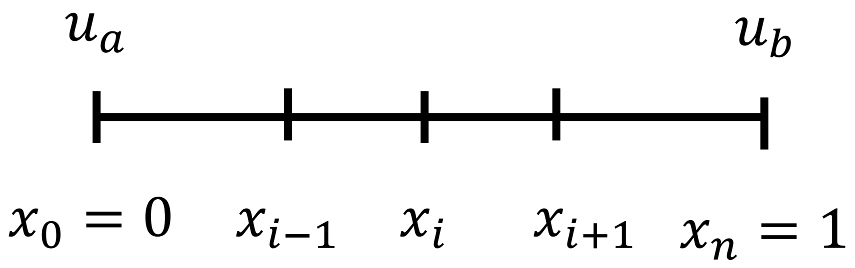
- Consideremmos el estado estacionario, $\kappa(x) = \kappa$, temperatura fija en los bordes (condiciones de frontera de Dirichlet) y extremos $a = 0, b = 1$.

$$u''(x) = f(x) \quad 0 < x < 1$$

$$u(0) = u_a, u(1) = u_b$$

- Consideremos la discretización (malla)

$$x_i = i\,h, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad h = \frac{1}{n}$$



$$u''(x_i) \approx \frac{u(x_i - h) - 2u(x_i) + u(x_i + h)}{h^2}$$

$$\frac{u(x_i - h) - 2u(x_i) + u(x_i + h)}{h^2} = f(x_i) + error$$

$error$: Error local o de truncamiento.

Problemas con condiciones de frontera

Definimos U_i como la solución en diferencias finitas. U_i es una aproximación de $u(x)$ en el punto x_i. Si U_i existe, entonces verifica el sistema lineal

$$\begin{aligned}
\frac{u_a - 2U_1 + U_2}{h^2} &= f(x_1)\\
\frac{U_1 - 2U_2 + U_3}{h^2} &= f(x_2)\\
\frac{U_2 - 2U_3 + U_4}{h^2} &= f(x_3)\\
\cdots &= \cdots\\
\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} &= f(x_i)\\
\cdots &= \cdots\\
\frac{U_{n-3} - 2U_{n-2} + U_{n-1}}{h^2} &= f(x_{n-2})\\
\frac{U_{n-2} - 2U_{n-1} + u_b}{h^2} &= f(x_{n-1})
\end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}
-\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & & & \\
\frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & & \\
 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2}\\
 & & & & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2}
\end{bmatrix}}_{A}
\underbrace{\begin{bmatrix} U_1\\ U_2\\ U_3\\ \vdots\\ U_{n-2}\\ U_{n-1}\end{bmatrix}}_{U}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} f(x_1) - u_a/h^2\\ f(x_2)\\ f(x_3)\\ \vdots\\ f(x_{n-2})\\ f(x_{n-1}) - u_b/h^2\end{bmatrix}}_{F}$$

A : Es la representación matricial del operador d^2/dx^2.

Convergencia, consistencia y estabilidad

Error global

- Si $\boldsymbol{U} = [U_1, \dots, U_{n-1}]^T$ es la solución en DF y $\boldsymbol{u} = [u(x_1), \dots, u(x_{n-1})]^T$ es la solución analítica evaluada en los puntos de la malla con paso h, entonces definimos el error global

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{U} - \boldsymbol{u}$$

- **Definición**: el método de diferencias finitas es **convergente** si se tiene una norma $\| \quad \|$ sobre la malla y $\lim_{h\to 0}\|\boldsymbol{E}\| = 0.$

Norma infinita:

$$\|\boldsymbol{E}\|_\infty = \max_{1\le i\le n-1}\{E_i\}$$

p-norma :

$$\|\boldsymbol{E}\|_p = \left(h\sum_{i=1}^{n-1}|E_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

- **Definición**: el método DF tiene un orden de precisión p, si

$$\|\boldsymbol{E}\| \le C\,h^p, \qquad p > 0$$

dodne C no depende de h.

Convergencia, consistencia y estabilidad

Error local

- En general la solución analítica $\boldsymbol{u} = [u(x_1), \ldots, u(x_{n-1})]^T$ no satisface exactamente la ecuación $\mathrm{A}\mathbf{u} \neq \boldsymbol{F}$, mas bien

$$\tau_j = \frac{1}{h^2}(u(x_{j-1}) - 2u(x_j) + u(x_{j+1})) - f(x_j) \qquad \boldsymbol{\tau} = A\boldsymbol{u} - \boldsymbol{F} \qquad \boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}]^T$$

- El vector $\boldsymbol{\tau}$ recibe el nombre de error local. Si definimos los operadores :

$$Pu(x) = \frac{d^2u(x)}{dx^2}, \; P_h u(x) = \frac{u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)}{h^2} \qquad \tau_j = P_h u(x_j) - Pu(x_j)$$

- **Definición**: el método de diferencias finitas es **consistente** si: $\lim_{h\to 0} \tau_j = 0 \;\; \forall\, j = 1, \ldots, n-1$

- Consistencia significa que la ecuación discretizada tiende a la ecuación diferencial en cada punto cuando $h \to 0$. En nuestro caso $\|\boldsymbol{\tau}\| = O(h^2)$.

Convergencia, consistencia y estabilidad

En general tenemos:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{U} - \boldsymbol{u} \\ A\boldsymbol{U} &= \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{\tau} &= A\boldsymbol{u} - \boldsymbol{F} \end{aligned}\right\} \quad A\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\tau}$$

Sea $\left(A^h\right)^{-1}$ la inversa de A^h, entonces

$$E^h = -(A^h)^{-1}\tau^h$$

$$\begin{aligned} \|E^h\| &= \|(A^h)^{-1}\tau^h\| \\ &\leq \|(A^h)^{-1}\| \, \|\tau^h\| \end{aligned}$$

Para una malla determinada con paso h

$$A^h\boldsymbol{E}^h = -\boldsymbol{\tau}^h, \qquad dim(A) = n - 1 = 1/h - 1$$

Donde A^h es la matriz asociada al operador diferencial d^2/dx^2 y su dimensión depende de h.

Definición: un método DF genera una secuencia de ecuaciones matriciales de la forma $A^h\boldsymbol{U}^h = \boldsymbol{F}^h$ donde h es el paso de la malla. El método DF es **estable** si $\left(A^h\right)^{-1}$ existe para todo h suficientemente pequeño ($h < h_0$) y si existe una constante C, independiente de h, tal que

$$\left\|\left(A^h\right)^{-1}\right\| \leq C \quad \forall\, h < h_0.$$

Convergencia, consistencia y estabilidad

Teorema: Un método DF consistente y estable es convergente.

Consistencia + Estabilidad $\Rightarrow$ Convergencia

$$\|E^h\| \leq \|(A^h)^{-1}\| \, \|\tau^h\| \leq C\|\tau^h\| \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad h \to 0$$

Error local por truncamiento $O(h^2)$ + Estabilidad $\Rightarrow$ Error global $O(h^2)$

Condiciones de frontera y puntos fantasmas

Condiciones de Dirichlet

$$u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = u_a, \quad u(1) = u_b,$$

Condiciones de Neumann

$$u''(x) = f(x), \quad a < x < b,$$

$$u'(a) = \alpha, \qquad u(b) = u_b\,,$$

Condiciones de Robin

$$u''(x) = f(x), \quad a < x < b,$$

$$\alpha u'(a) + \beta u(a) = \gamma \qquad u(b) = u_b$$

$$x = a \quad \alpha \neq 0$$

Condiciones de Cauchy

$$u''(x) = f(x), \quad a < x < b,$$

$$u(a) = u_a, \qquad u(b) = u_b$$

$$u'(a) = \alpha, \qquad u'(b) = \beta$$

Condiciones de frontera y puntos fantasmas

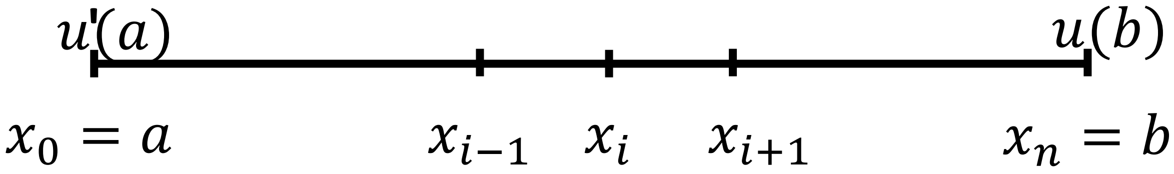
Condiciones de Neumann

$$u''(x) = f(x), \quad a < x < b,$$

$$u'(a) = \alpha, \qquad u(b) = u_b\,,$$

Para los puntos interiores

$$\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$



Ecuación para el punto x_0

$$\frac{U_1 - U_0}{h} = \alpha \qquad \frac{-U_0 + U_1}{h^2} = \frac{\alpha}{h} \qquad \text{(Orden 1)}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & & & \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & & \\ & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ & & & & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n-2} \\ U_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{h} \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) - \frac{u_b}{h^2} \end{bmatrix}$$

Condiciones de frontera y puntos fantasmas

Para mantener la precisión al segundo orden necesitamos extender la solución al intervalo $[a-h, a]$

Punto fantasma : $x_{-1} = x_0 - h = a - h$

Condición de frontera al segundo orden:

$$\frac{U_1 - U_{-1}}{2h} = \alpha$$

$$U_{-1} = U_1 - 2h\alpha.$$

$$\frac{U_{-1} - 2U_0 + U_1}{h^2} = f_0,$$

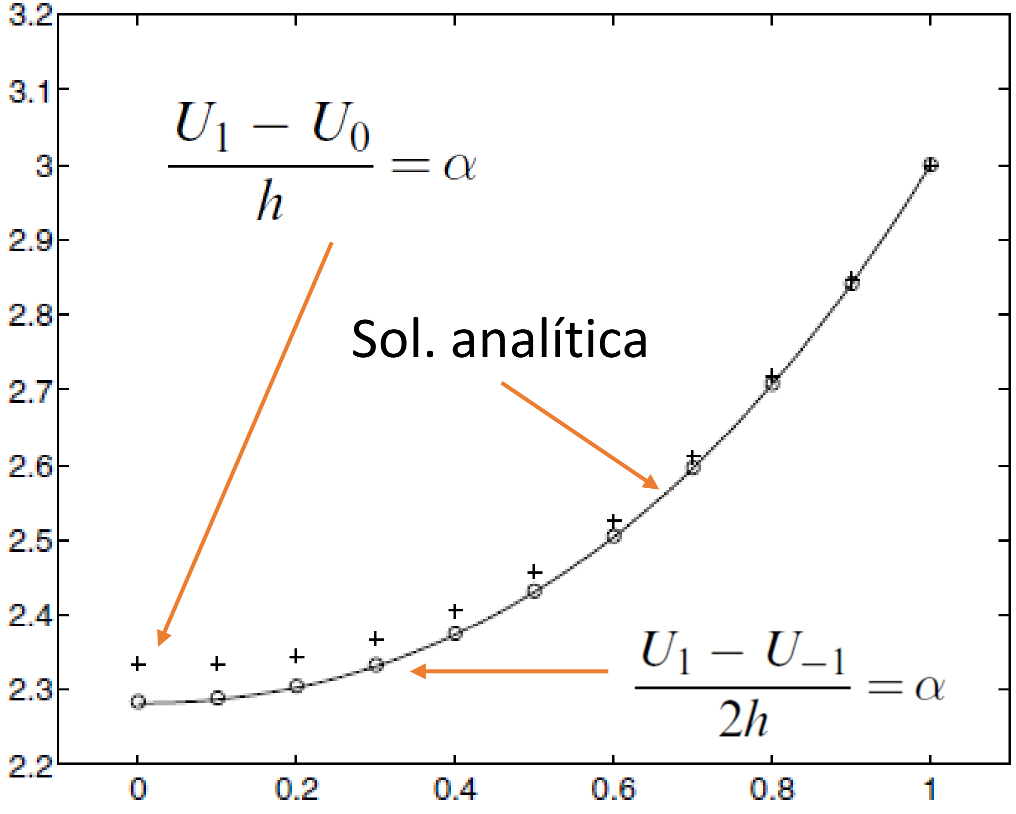
$$\frac{U_1 - 2h\alpha - 2U_0 + U_1}{h^2} = f_0,$$

$$\frac{-U_0 + U_1}{h^2} = \frac{f_0}{2} + \frac{\alpha}{h},$$

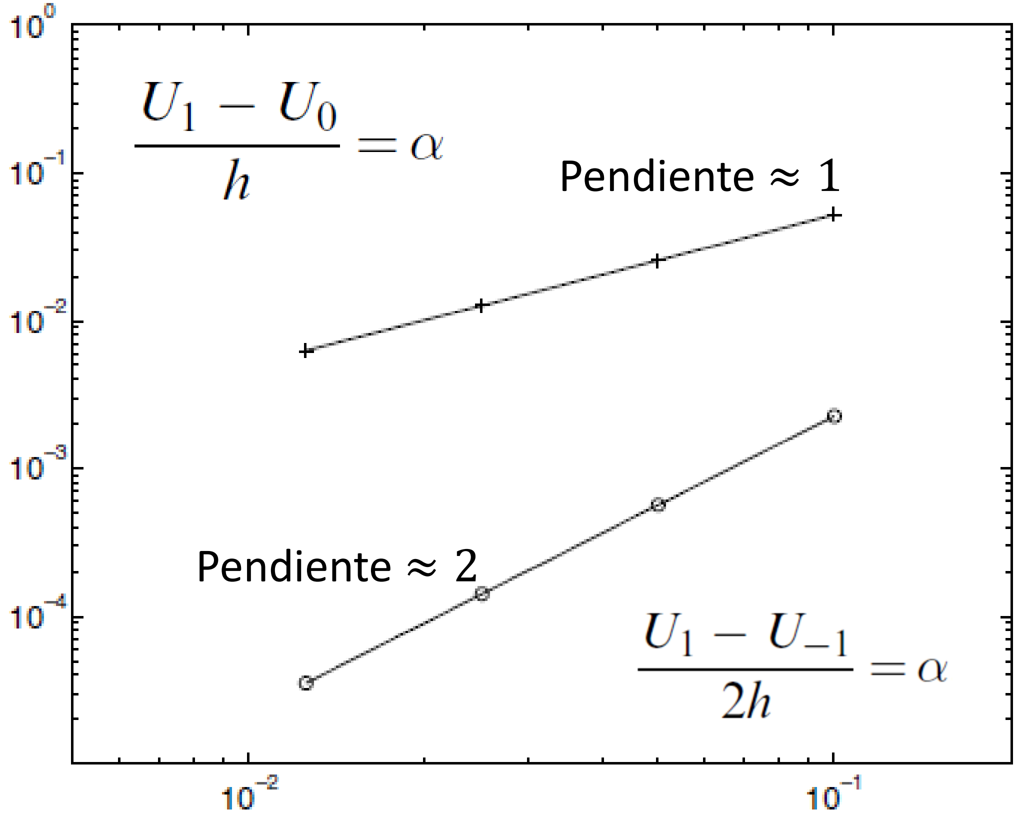
$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & & & \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & & \\ & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ & & & & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n-2} \\ U_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0/2 + \alpha/h \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) - \frac{u_b}{h^2} \end{bmatrix}$$

Condiciones de frontera y puntos fantasmas

Solución



Error por refinamineto



Problemas autoadjuntos con condiciones de frontera

Ecuación conducción del calor con conductivad variable (problema de Sturm-Liouville)

$$(\kappa(x)u'(x))' = f(x) \qquad u(a) = \alpha, \qquad u(b) = \beta$$

L : operador auto adjunto $\qquad -L(u(x)) = f(x), \qquad L(u) = -\frac{d}{dx}(\kappa(x)\frac{du}{dx})$

Dado un producto interno se cumple que: $\quad (Lu, v) = (u, Lv)$

Si además escogemos una base, la matriz asociada a L (L_{mn}) es una matriz simétrica.

Problemas autoadjuntos con condiciones de frontera

$$(\kappa(x)u'(x))' = f(x) \quad \Longrightarrow \quad \kappa(x)u''(x) + \kappa'(x)u'(x) = f(x)$$

Discretizamos con diferencias centradas de orden 2

$$\kappa_i\left(\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2}\right) + \kappa_i'\left(\frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h}\right) = f_i$$

Matriz no simétrica !!!!

$$\Longrightarrow \quad A = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -2\kappa_1 & (\kappa_1 + h\kappa_1'/2) & & \\ (\kappa_2 - h\kappa_2'/2) & -2\kappa_2 & (\kappa_2 + h\kappa_2'/2) & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (\kappa_{m-1} - h\kappa_{m-1}'/2) & -2\kappa_{m-1} & (\kappa_{m-1} + h\kappa_{m-1}'/2) \\ & & (\kappa_m - h\kappa_m'/2) & -2\kappa_m \end{bmatrix}$$

Problemas autoadjuntos con condiciones de frontera

$$\kappa(x_{i+1/2})u'(x_{i+1/2}) = \kappa_{i+1/2}\left(\frac{U_{i+1}-U_i}{h}\right)$$

$$\begin{aligned}(\kappa u')'(x_i) &\approx \frac{1}{h}\left[\kappa_{i+1/2}\left(\frac{U_{i+1}-U_i}{h}\right) - \kappa_{i-1/2}\left(\frac{U_i-U_{i-1}}{h}\right)\right] \\ &= \frac{1}{h^2}[\kappa_{i-1/2}U_{i-1} - (\kappa_{i-1/2}+\kappa_{i+1/2})U_i + \kappa_{i+1/2}U_{i+1}]\end{aligned}$$

Matriz simétrica !!!!

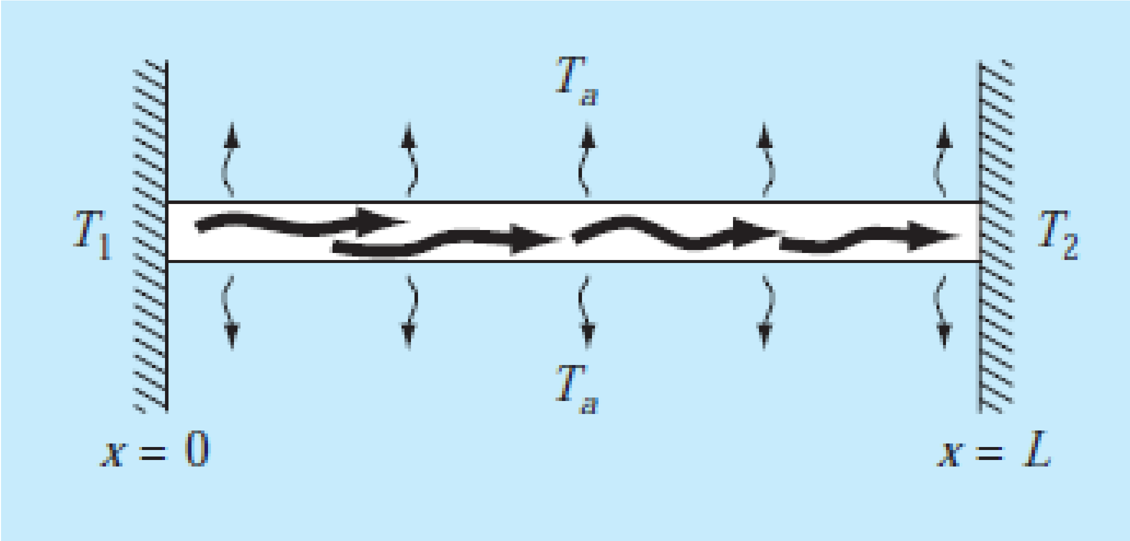
$$A = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -(\kappa_{1/2}+\kappa_{3/2}) & \kappa_{3/2} & & \\ \kappa_{3/2} & -(\kappa_{3/2}+\kappa_{5/2}) & \kappa_{5/2} & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \kappa_{m-3/2} & -(\kappa_{m-3/2}+\kappa_{m-1/2}) & \kappa_{m-1/2} \\ & & \kappa_{m-1/2} & -(\kappa_{m-1/2}+\kappa_{m+1/2}) \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1

$$\frac{d^2T}{dx^2} + h'(T_a - T) = 0$$

Condiciones de Dirichlet

$$T(0) = T_1$$
$$T(L) = T_2$$



- Encontrar la solución analítica.
- Resolver numéricamente considerando:
- Graficar el error global por refinamiento.

$$L = 10m\ , h' = 0.01m^{-2}\ \ \Delta x = 1m\ T(0) = 40, T(10) = 200°C, Ta = 20°C$$

Ejercicio 2

$$0 = \frac{d^2 T}{dx^2} + h'\,(T_\infty - T)$$

Condiciones de Neumann y Dirichlet

$$\frac{dT}{dx}(0) = T'_a$$

$$T(L) = T_b$$

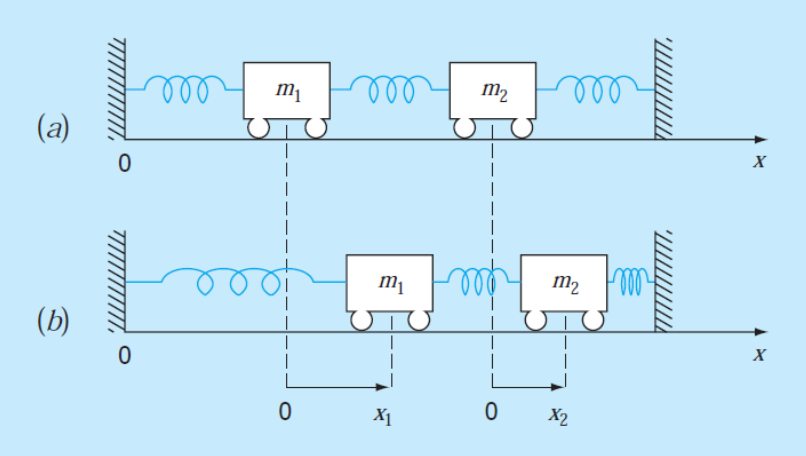
- Encontrar la solución analítica.
- Resolver numéricamente considerando:

$L = 10m\,, h' = 0.01m^{-2}\ \ \Delta x = 1m$
$T_\infty = 40°C, T(10) = 200°C, T'a = 10°C/m$

y las aproximaciones para la condición de Neumann.

- Graficar el error global por refinamiento.

Problema de autovalores



$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1) - kx_2$$

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} - k(-2x_1 + x_2) = 0$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} - k(x_1 - 2x_2) = 0$$

$$x_i = A_i \sin(\omega t) \qquad x_i'' = -A_i \omega^2 \sin(\omega t) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T_p}$$

$$\left(\frac{2k}{m_1} - \omega^2\right) A_1 - \frac{k}{m_1} A_2 = 0$$

$$-\frac{k}{m_2} A_1 + \left(\frac{2k}{m_2} - \omega^2\right) A_2 = 0$$

- La variable ω es un valor propio necesario para hallar A_1 y A_2.
- Se determina ω y luego se resuelve un sistema lineal.

Problema de autovalores

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p^2 y = 0$$

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p^2 y_i = 0 \qquad\qquad y_{i-1} - (2 - h^2 p^2) y_i + y_{i+1} = 0$$

Para cuatro puntos dentro del intervalo

$$\begin{bmatrix} (2-h^2p^2) & -1 & 0 & 0 \\ -1 & (2-h^2p^2) & -1 & 0 \\ 0 & -1 & (2-h^2p^2) & -1 \\ 0 & 0 & -1 & (2-h^2p^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = 0$$

Método polinomial

$$\begin{bmatrix} (2-h^2p^2) & -1 & 0 & 0 \\ -1 & (2-h^2p^2) & -1 & 0 \\ 0 & -1 & (2-h^2p^2) & -1 \\ 0 & 0 & -1 & (2-h^2p^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = 0$$

A partir del determinante se obtine la ecuación característica que se resuelve Numericamente con e método de la bisección, newtonrhapson, etc.

$$(2-0.36p^2)^4 - 3(2-0.36p^2)^2 + 1 = 0$$

$$p = \pm 1.0301 \qquad |\varepsilon_t| = 1.6\%$$
$$p = \pm 1.9593 \qquad |\varepsilon_t| = 6.5\%$$
$$p = \pm 2.6967 \qquad |\varepsilon_t| = 14\%$$
$$p = \pm 3.1702 \qquad |\varepsilon_t| = 24\%$$

Los valores de y_1, y_2, y_3, y_4 se obtiene resolviendo el sistema lineal

Método de potencias

- Se utiliza cuando la matriz A (dim(A)=n) tiene n vectore propios LI $\{V_1, ...V_n\}$.
- Los autovalores deben verifivar

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

- El método calcula el autovalor dominante λ_1.
- Un vector caulquiera X_0 cumple

$$X_0 = c_1V_1 + c_2V_2 + \cdots + c_nV_n$$

Método de potencias

Multiplicando sucesivamente por la matriz A, tenemos

$$AX_0 = c_1\lambda_1 V_1 + c_2\lambda_2 V_2 + \cdots + c_n\lambda_n V_n$$
$$A^2X_0 = c_1{\lambda_1}^2 V_1 + c_2{\lambda_2}^2 V_2 + \cdots + c_n{\lambda_n}^2 V_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A^m x_0 = c_1{\lambda_1}^m V_1 + c_2{\lambda_2}^m V_2 + \cdots + c_n{\lambda_n}^m V_n$$

Y dividiendo entre λ_1^m, tenemos

$$\frac{1}{{\lambda_1}^m}A^m X_0 = c_1V_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^m V_1 + \cdots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^m c_nV_n$$

Para *m* grande, tenemos

$$\frac{1}{{\lambda_1}^m}A^m X_0 \doteq c_1V_1$$

$$\frac{1}{{\lambda_1}^{m+1}}A^{m+1} X_0 \doteq c_1V_1$$

Método de potencias

Para cualquier vector Y que no sea perpendicular a V_1

$$\frac{1}{{\lambda_1}^m}(A^m X_0 \cdot Y) \doteq c_1 V_1 \cdot Y$$

$$\frac{1}{\lambda_1^{m+1}}(A^{m+1} X_0 \cdot Y) \doteq c_1 V_1 \cdot Y$$

$$\frac{1}{\lambda_1^{m+1}}(A^{m+1} X_0 \cdot Y) \doteq \frac{1}{{\lambda_1}^m}(A^m X_0 \cdot Y) \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A^{m+1} X_0 \cdot Y}{A^m X_0 \cdot Y} \doteq \frac{\lambda_1^{m+1}}{{\lambda_1}^m} = \lambda_1$$

Método de potencias

Ejemplo: Estimar el autovalor dominante de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Comenzamos con $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ cualquiera y calculamos las potencias:

$$AX_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A^2X_0 = A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A^3X_0 = A\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$$A^4X_0 = A\begin{pmatrix} 34 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 142 \\ 140 \end{pmatrix}$$

$$A^5X_0 = A\begin{pmatrix} 142 \\ 140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 562 \\ 564 \end{pmatrix}$$

$$A^6X_0 = A\begin{pmatrix} 562 \\ 564 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2254 \\ 2252 \end{pmatrix}$$

Método de potencias

Escogemos $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y *m*=5

$$\lambda_1 \doteq \frac{A^6X_0 \cdot Y}{A^5X_0 \cdot Y} = \frac{\begin{pmatrix} 2254 \\ 2252 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 562 \\ 564 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \frac{2254}{562} = 4.0106\cdots$$

Respuesta real:

$$\left(4, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Se puede escoger

$$Y = A^m X_0$$

$$\lambda_1 \doteq \frac{A^{m+1}X_0 \cdot A^m X_0}{A^m X_0 \cdot A^m X_0} \doteq \frac{A(A^m X_0) \cdot A^m X_0}{A^m X_0 \cdot A^m X_0}$$

Método de potencias

Consideremos $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ con $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$AX_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = W_1$$

$$AW_1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{14} \\ 1 \end{pmatrix} = W_2$$

$$AW_2 = \begin{pmatrix} -1.64\cdots \\ 7.85\cdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -0.209\cdots \\ 1 \end{pmatrix} = W_3$$

$$\vdots$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -0.4988\cdots \\ 1 \end{pmatrix} = W_{10}$$

$$AW_{10} = \begin{pmatrix} -4.49\cdots \\ 8.997\cdots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -0.4994\cdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Autovalor

$$\frac{AW_{10} \cdot W_{10}}{W_{10} \cdot W_{10}} \doteq 9.002$$

Autovector

$$\begin{pmatrix} -0.4994\cdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4

Usando el método de potencias encontrar en cada caso el valor propio más elevado y su correspondiente vector propio

$$\begin{pmatrix} -4 & 10 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$