Integración y diferenciación numérica

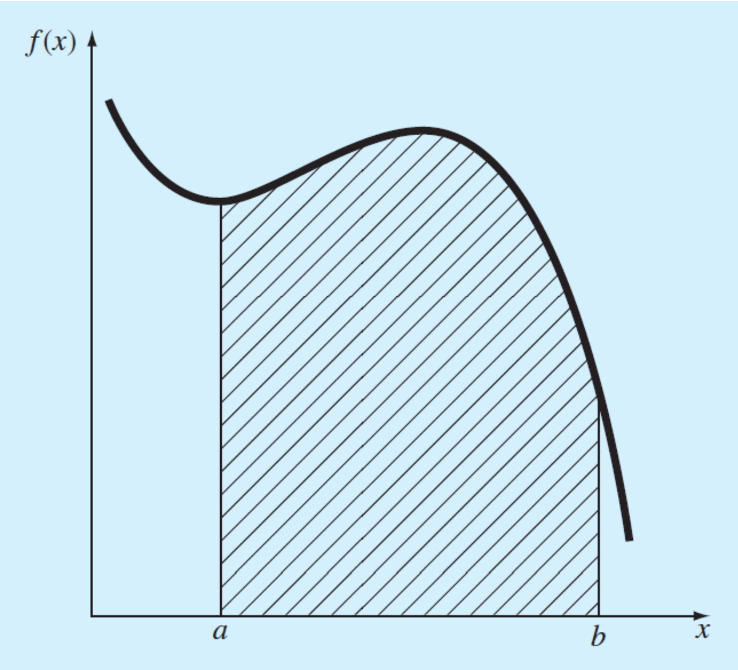
Alejandro Paredes

Formulas de Newton-Cotes

Técnica que consiste en remplazar el integrando por una expression polynomial.

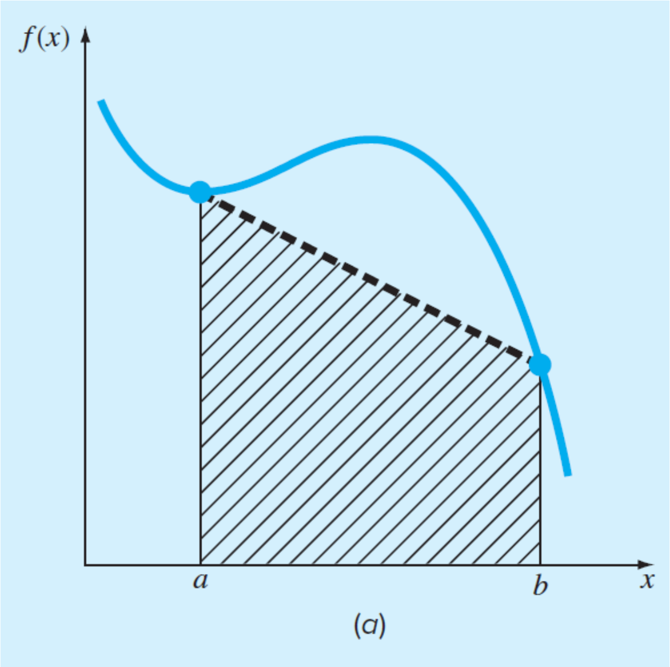
$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

$$I = \int_a^b f(x)\, dx \cong \int_a^b f_n(x)\, dx$$

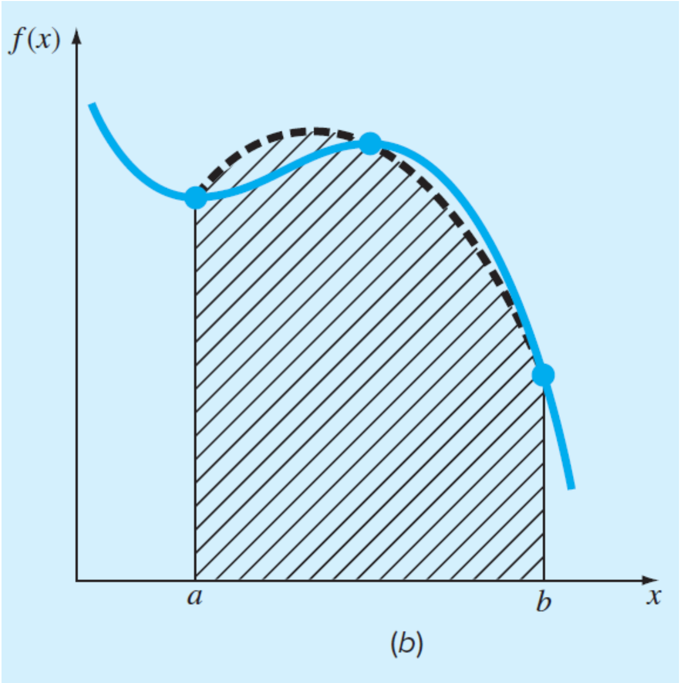


$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

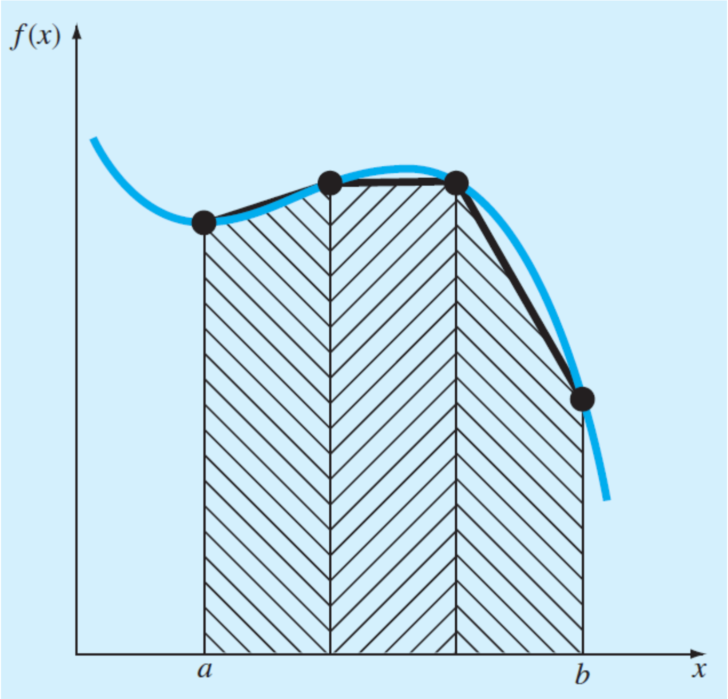
Formulas Newton-Cotes



Aproximación lineal



Aproximación polinomial

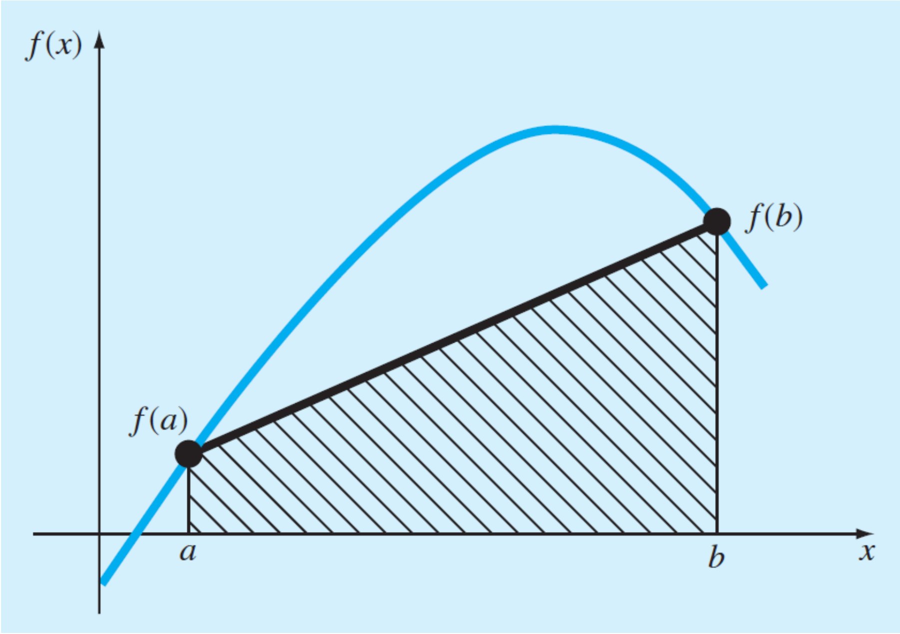


Aproximación compuesta

Método del trapecio

Polinomio interpolante de Lagrange de grado 1

$$f(x) = \frac{(x-b)}{a-b} f(a) + \frac{(x-a)}{b-a} f(b) \ + \frac{f''(\zeta)}{3!}(x-a)(x-b) \forall\ x, \zeta \in [a, b]$$

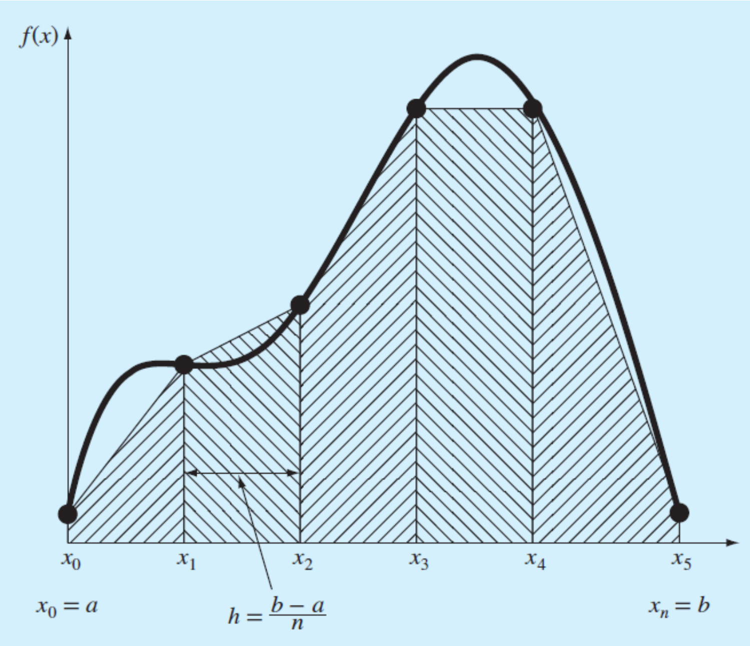


$$I = \int_a^b f(x) = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} + E_t$$

$$E_t = \ \int_a^b \frac{f''(\zeta)}{3!}(x-a)(x-b)$$

$$= -\frac{1}{12} f''(\zeta)(b-a)^3$$

Método del trapecio compuesto



$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

$$I = h\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \cdots + h\frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}$$

```
FUNCTION Trapun (x, y, n)
  LOCAL i, sum
  sum = 0
  DOFOR i = 1, n
    sum = sum + (xi − xi−1)*(yi−1 + yi)/2
  END DO
  Trapun = sum
END Trapun
```

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right] \qquad E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$$

$$I = (b-a)\;\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n} \qquad \bar{f}'' \cong \frac{\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)}{n}$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\bar{f}''$$

Método de Simpson (1/3)

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \right] dx$$

Polinomio interpolante de segundo grado.

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi)$$

$$I = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4 f(x_1) + f(x_2) \right]$$

$$I = (b-a)\frac{f(x_0) + 4 f(x_1) + f(x_2)}{6}$$

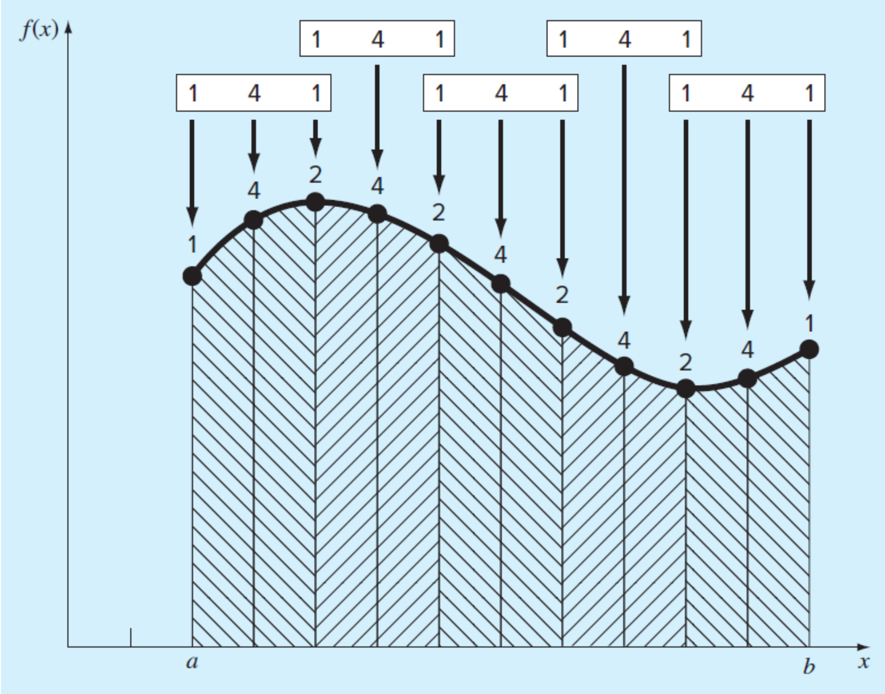
```
FUNCTION Simp13 (h, f0, f1, f2)
  Simp13 = 2*h* (f0+4*f1+f2) / 6
END Simp13
```

Método de Simpson (1/3) compuesto

- El intervalo $[a, b]$ se divide en segmentos de igual longitud.
- En cada segmento se calcula un polinomio interpolante de segundo grado.

$$I = 2h\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} + 2h\frac{f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)}{6} + \cdots + 2h\frac{f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)}{6}$$

$$I = (b-a)\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n}$$



$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

Método de Simpson (3/8)

Polinomio interpolante de tercer grado.

$$I = \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3) \right]$$

$$I = (b-a)\frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}$$

$$E_t = -\frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\xi)$$

```
FUNCTION Simp38 (h, f0, f1, f2, f3)
  Simp38 = 3*h* (f0+3*(f1+f2)+f3) / 8
END Simp38
```

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\xi)$$

Ejercicio 1

Evaluar la siguiente integral

$$\int_{-2}^{4}(1 - x - 4x^3 + 2x^5)\,dx$$

- Analiticamente.
- Aplicando la regla del trapecio.
- Aplicando la regla compuesta del trapecio para $n = 2,4$.
- Aplicando la regla de Simpson 1/3.
- Aplicando la regla de Simpson 3/8.

Ejercicio

La tabla muestra la velocidad de un auto para diferentes instantes de tiempo

t	1	2	3.25	4.5	6	7	8	8.5	9	10
v	5	6	5.5	7	8.5	8	6	7	7	5

Determine la distancia recorrida por el auto, utilizando la regla del trapecio compuesto con puntos no equidistantes.

$$I = h_1 \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h_2 \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \cdots + h_n \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}$$

Extrapolación de Richardson

$$I = I(h) + E(h)$$

- I: valor de la integral.
- $I(h)$: aproximación por el método del trapecio compuesto.
- $E(h)$: Error de la aproximación. Con $h = (b - a)/n$.

Para dos aproximaciones distintas:

$$I(h_1) + E(h_1) = I(h_2) + E(h_2)$$ (Igualdad de integrales)

Extrapolación de Richardson

Integración con método de trapecio compuesto, el error es

$$E \cong -\frac{b-a}{12} h^2 \bar{f}''$$

Dos integraciones con diferentes espaciamientos h_1 y h_2, tenemos

$$\frac{E(h_1)}{E(h_2)} \cong \frac{h_1^2}{h_2^2} \Rightarrow E(h_1) \cong E(h_2)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2$$

Resultado se reemplaza en la igualdad de integrales

Extrapolación de Richardson

Despejamos $E(h_2)$

$$I(h_1) + E(h_2)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 \cong I(h_2) + E(h_2)$$

$$\boxed{E(h_2) \cong \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - (h_1/h_2)^2}}$$

La integral de trapècio compuesto para h_2

$$I = I(h_2) + E(h_2)$$

$$I \cong I(h_2) + \frac{1}{(h_1/h_2)^2 - 1}[I(h_2) - I(h_1)]$$

Caso particular $h_2 = h_1/2$

$$I \cong I(h_2) + \frac{1}{2^2 - 1}[I(h_2) - I(h_1)]$$

$$I \cong \frac{4}{3}I(h_2) - \frac{1}{3}I(h_1)$$

- Tiene un error $O(h^4)$.
- Se puede calcular una integral $O(h^4)$ a partir de dos de integrales de $O(h^2)$.

Extrapolación de Richardson

Ejemplo:
Calcular la integral de $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ en el intrevalo a=0, b=8.

Valor de la integral = 1.640533

Aplicando la regladel trapecio tenemos

Segments	h	Integral	ε_t, %
1	0.8	0.1728	89.5
2	0.4	1.0688	34.9
4	0.2	1.4848	9.5

- Integral extrapolada para $h_1=0.8$ y $h_2=0.4$

$$I \cong \frac{4}{3}(1.0688) - \frac{1}{3}(0.1728) = 1.367467$$

- Integral extrapolada para $h_1=0.4$ y $h_2=0.2$

$$I \cong \frac{4}{3}(1.4848) - \frac{1}{3}(1.0688) = 1.623467$$

Extrapolación de Richardson

$$I \cong \frac{4}{3} I(h_2) - \frac{1}{3} I(h_1)$$

$h_1/h_2 = 2$

$O(h^4)$

$$I \cong \frac{16}{15} I_m - \frac{1}{15} I_l$$

I_m : integral más exacta *$O(h^4)$*.
I_l: integrla menos exacta*O(h4)*.

$O(h^6)$

$$I \cong \frac{64}{63} I_m - \frac{1}{63} I_l$$

I_m : integral más exacta *$O(h^6)$*.
I_l: integrla menos exacta*$O(h^6)$*.

$O(h^8)$

Algoritmo de Romberg

	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$
	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
		$I \cong \frac{4}{3} I(h_2) - \frac{1}{3} I(h_1)$	$I \cong \frac{16}{15} I_m - \frac{1}{15} I_l$	$I \cong \frac{64}{63} I_m - \frac{1}{63} I_l$
h=0.8	0.172800	1.367467		
h=0.4	1.068800			
h=0.8	0.172800	1.367467	1.640533	
h=0.4	1.068800	1.623467		
h=0.2	1.484800			
h=0.8	0.172800	1.367467	1.640533	1.640533
h=0.4	1.068800	1.623467	1.640533	
h=0.2	1.484800	1.639467		
h=0.1	1.600800			

Ejercicio

Usar el algoritmo de Romberg para evaluar la integral

$$\int_0^2 \frac{e^x \sin x}{1 + x^2}\, dx$$

con una precisión de 0.5 %.