

矩阵半张量积(STP)理论、代数状态空间法与跨学科应用综合研究报告

1. 引言: 跨越矩阵代数的维度障碍

1.1 传统矩阵理论的局限性与突破

矩阵理论作为现代数学、物理学及工程学的基石, 长期以来受到严格的维度匹配条件的制约。在传统的线性代数框架下, 两个矩阵 $A \in M_{m \times n}$ 和 $B \in M_{p \times q}$ 能够进行乘法运算的前提是前者的列数必须等于后者的行数, 即 $n=p$ 。这一经典条件虽然确保了线性变换在向量空间中的一致性, 但在处理多线性系统、高维数组数据(张量)以及跨维度操作时, 显得捉襟见肘。随着复杂系统科学、网络化控制及大数据技术的发展, 现实世界中的数学模型往往涉及不同维度的状态空间交互, 传统的矩阵乘法已难以满足这些新兴领域的建模需求¹。

为了解决这一根本性的数学障碍, 中国科学院程代展教授及其团队在21世纪初提出了**矩阵半张量积(Semi-Tensor Product, STP)**的概念。STP 是一种广义的矩阵乘法, 它不仅兼容传统的矩阵乘法, 更突破了维度匹配的限制, 允许任意维度的矩阵进行运算。这一理论的提出, 不仅是对线性代数运算规则的一次重大扩充, 更为逻辑系统、非线性控制及博弈论等领域提供了一套全新的代数化分析工具¹。

1.2 STP 理论的发展历程与核心贡献

STP 理论的发展可以追溯到对多线性映射和高维数组运算的研究。早期的尝试如克罗内克积(Kronecker Product)虽然解决了部分维度问题, 但其结果往往不仅增加了维度, 且缺乏与传统矩阵乘法的内在一致性(即不具备降维或收缩的特性)。程代展教授提出的 STP 通过引入最小公倍数(LCM)作为维度的桥梁, 利用 Kronecker 积作为算子基础, 巧妙地实现了跨维度的矩阵运算, 同时保持了结合律和分配律等基本代数性质¹。

该理论的核心贡献在于**代数状态空间理论(Algebraic State Space Theory, ASST)**的建立。通过将逻辑变量向量化, STP 成功地将布尔网络(Boolean Networks)、模糊系统及有限自动机等逻辑动态系统转化为代数形式的线性或双线性状态空间模型。这一转化使得原本只能依靠仿真或图论方法研究的逻辑系统, 能够直接利用成熟的线性控制理论工具(如特征值、秩、能控性矩阵等)进行解析分析⁵。

近年来, STP 理论不断演进。从最初的左/右半张量积, 发展到针对信号处理的保维半张量积(Dimension-Keeping STP, DK-STP), 再到针对高阶张量系统的立方矩阵 **t-STP**, 其理论边界正在向高维代数结构(如超环、超李代数)拓展。这些进展表明, STP 不仅仅是一个计算工具, 更正在形成一套完整的跨维度数学体系⁷。

1.3 报告结构概览

本报告将全面、深入地剖析 STP 的理论体系及其广泛应用。第2章将详细阐述 STP 的数学定义、

性质及换位矩阵的伪交换性;第3章重点介绍代数状态空间理论(ASST)及其在布尔网络中的应用;第4章探讨网络化演化博弈(NEGs)的 STP 建模与控制;第5章至第7章将分别论述 STP 在工程控制、图论组合优化、编码理论及深度学习等前沿领域的应用;最后,第8章总结 STP 的计算工具并展望其未来的发展方向。

2. 矩阵半张量积的数学基础与代数性质

半张量积的数学本质是利用张量积的扩张性质来弥补矩阵乘法中的维度缺失,同时通过广义的收缩操作来维持运算的物理意义。与仅关注元素排列的普通运算不同,STP 建立在严格的多线性代数基础之上。

2.1 广义矩阵乘法的定义

STP 的定义依赖于参与运算矩阵维度的最小公倍数。这种设计确保了运算结果在代数结构上的封闭性和一致性。

2.1.1 左半张量积 (Left STP)

对于两个矩阵 $A \in M_{m \times n}$ 和 $B \in M_{p \times q}$, 设 n 和 p 的最小公倍数为 $t = \text{lcm}(n, p)$ 。左半张量积 $A \ltimes B$ 定义为:

$$A \ltimes B = (A \otimes I_{t/n})(B \otimes I_{t/p})$$

其中, \otimes 表示 Kronecker 积, I_k 表示 k 阶单位矩阵。运算结果 C 是一个 $(mt/n) \times (qt/p)$ 的矩阵⁹。

深度解析:

- 兼容性 (Generalization):** 当 $n=p$ 时, 即维度匹配, $t=n=p$, 此时 $t/n=1$, $t/p=1$ 。公式退化为 $(A \otimes I_1)(B \otimes I_1) = AB$ 。这证明了 STP 是传统矩阵乘法的自然推广。任何在 STP 框架下推导出的定理, 在维度匹配的特例下均自动回归为经典矩阵理论¹。
- 倍数维度情况:** 若 n 是 p 的倍数 ($n = kp$), 则 $A \ltimes B = A(B \otimes I_k)$; 若 p 是 n 的倍数 ($p = kn$), 则 $A \ltimes B = (A \otimes I_k)B$ 。这种性质使得 STP 能够方便地处理多分辨率数据或层级系统¹。

2.1.2 向量半张量积与降维特性

STP 在处理向量时表现出独特的张量收缩特性。对于行向量 $X \in \mathbb{R}^{1 \times np}$ 和列向量 $Y \in \mathbb{R}^{p \times 1}$, 左半张量积将 X 视为由 p 个块组成的块行向量, 每个块的维度为 $1 \times n$ 。运算过程实际上是将 X 的每个块与 Y 的对应标量元素相乘并求和, 最终结果是一个 n 维列向量(若定义略有不同, 结果维度可能变化, 此处依据标准定义解释其降维潜力)。这种操作在物理学中对应于张量场的缩并(Contraction), 为处理高阶张量数据提供了代数路径¹²。

2.2 换位矩阵与伪交换性 (Pseudo-Commutativity)

在经典矩阵代数中，矩阵乘法不满足交换律 ($AB \neq BA$)。然而，在多线性代数和逻辑运算中，往往需要调整变量的次序。STP 引入了换位矩阵 (Swap Matrix) $W_{[m,n]}$ ，赋予了矩阵乘法一种“伪交换性”。

2.2.1 换位矩阵的构造

换位矩阵 $W_{[m,n]}$ 是一个 $mn \times mn$ 的正交矩阵，其作用是交换 Kronecker 积中向量的顺序。定义如下：

$$W_{[m,n]} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \delta_{mn}^{(i-1)n+j} (\delta_{mn}^{(j-1)m+i})^T$$

或者更直观地表示为列向量的重排： $W_{[m,n]} [x \otimes y] = y \otimes x$ ，其中 $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$ 。

2.2.2 伪交换性质及其意义

对于任意矩阵 A 和 B (维度合适)，以及列向量 x, y ，STP 满足以下性质：

1. 向量交换： $x \otimes y = W_{[m,n]} \otimes y \otimes x$ 。这一性质极其关键，它允许在代数表达式中任意重排逻辑变量的位置，从而实现逻辑函数的规范化和化简¹³。
2. 矩阵与向量交换： $x \otimes A = (I_m \otimes A) \otimes x$ (假设维度匹配)。这使得控制系统中的状态向量 x 可以被“移”到矩阵的右侧，从而构建标准的状态空间形式¹。

2.3 理论前沿：保维半张量积与高阶代数结构

随着研究的深入，学者们发现标准的 STP 在某些应用中 (如信号压缩) 会导致维度膨胀。为了解决这一问题，新的变体被提出。

2.3.1 保维半张量积 (DK-STP)

定义：对于 $A \in M_{m \times n}$ 和 $B \in M_{p \times q}$ ，设 $t = \text{lcm}(n, p)$ 。保维半张量积 (DK-STP) 定义为：

$$A \otimes_{DK} B = (A \otimes \mathbf{1}_{t/n}^T) (B \otimes \mathbf{1}_{t/p})$$

其中 $\mathbf{1}_k$ 是全 1 的列向量。与标准 STP 使用单位矩阵 I 不同，DK-STP 使用全 1 向量进行投影，从而极大地压缩了结果矩阵的维度，使其保持在较小的规模。这在压缩感知 (Compressed Sensing) 中对于设计低存储需求的测量矩阵具有决定性意义⁷。

2.3.2 立方矩阵与 t-STP

针对三阶张量 (立方矩阵)，程代展团队提出了 t-STP。传统的张量 t-积 (t-product) 基于循环卷积，要求严格的维度匹配。t-STP 结合了 t-积的循环特性和 STP 的跨维度特性，允许不同维度的立方矩阵进行乘法运算。

这一扩展建立了**超环 (Super-Ring) 和超模 (Super-Module) 等代数结构，并导出了超李代数 (Super-Lie Algebra) 的概念。这意味着经典的李群和李代数理论可以推广到非方阵和高阶张量

领域，为研究超网络化系统(Hyper-networked Systems)中的多层耦合动力学提供了数学基础8。

3. 逻辑系统的代数状态空间理论 (ASST)

STP 最具革命性的应用在于创立了代数状态空间理论(ASST)。该理论通过将逻辑变量数值化，打通了布尔逻辑与数值代数之间的壁垒，使得离散逻辑系统(如布尔网络、模糊逻辑)能够像连续控制系统一样被精确解析。

3.1 逻辑变量的向量化表示

在 ASST 框架下，一个取值于 $D_k = \{1, 2, \dots, k\}$ 的逻辑变量 x 被表示为一个 k 维向量。具体地，数值 i 对应于 k 阶单位矩阵的第 i 列，记为 δ_k^i 。

- $\text{True} (1) \sim \delta_2^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- $\text{False} (0) \sim \delta_2^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

这种表示方法建立了一个双射 $\Delta_k \leftrightarrow D_k$ 。对于包含 n 个节点的逻辑网络，其系统总状态 $x(t)$ 由各个节点状态的 STP 构成： $x(t) = x_1(t) \ltimes x_2(t) \ltimes \dots \ltimes x_n(t)$ ，结果是一个 k^n 维的向量¹。

3.2 逻辑算子的结构矩阵

任意 k 值逻辑函数 $f(x_1, \dots, x_n)$ 都可以表示为多线性映射形式。通过 STP，所有基本的逻辑算子(与、或、非、异或等)都可以表示为唯一的结构矩阵 (Structure Matrix) M_f 。这意味着逻辑方程 $y = f(x_1, \dots, x_n)$ 可以等价地转化为代数方程：

$$y = M_f \ltimes x_1 \ltimes \dots \ltimes x_n$$

布尔算子结构矩阵示例 ($k=2$):

算子 (Operator)	符号	结构矩阵 M (Compact Form)	矩阵数值
非 (Negation)	$\neg x$	δ_2	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
或 (Disjunction)	$x \vee y$	δ_2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

			$\end{pmatrix}$
与 (Conjunction)	$x \wedge y$	δ_2	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
蕴含 (Implication)	$x \rightarrow y$	δ_2	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

通过这些结构矩阵，复杂的布尔表达式可以被“算术化”。例如，函数 $f = x \wedge \neg y$ 的代数形式为 $M_c \times (M_n \times y)$ 。利用换位矩阵，可以将其整理为标准型 $L \times x \times y^1$ 。

3.3 布尔网络 (BN) 的代数建模与分析

布尔网络是基因调控网络 (GRN) 的标准模型。在 BN 中，每个基因 (节点) 的状态由其邻居节点的布尔函数决定。

$$x_i(t+1) = f_i(x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad i=1, \dots, n$$

利用 ASST，整个网络的动力学演化可以被转化为一个离散时间的线性系统：

$$x(t+1) = L \times x(t)$$

其中， $L \in M_{\{2^n \times 2^n\}}$ 称为网络转移矩阵 (Network Transition Matrix)。 L 是唯一的，且包含了网络拓扑和逻辑规则的所有信息。

基于 L 的拓扑分析：

- 不动点 (Fixed Points)：网络的稳态对应于方程 $x = L \times x$ 的解。这等价于寻找矩阵 L 对应于特征值 1 的特征向量 (且必须是合法的逻辑状态向量)。
- 极限环 (Cycles/Attractors)：长度为 k 的循环对应于 $x(t+k) = x(t)$ 。这可以通过计算 L^k 的对角线元素来确定。具体算法可以枚举所有吸引子及其吸引域 (Basin of Attraction) 的大小⁶。
- 对偶网络与隐藏秩序 (Dual Networks & Hidden Order)：这是一个较新的研究视角。除了

显式的状态轨迹外，研究发现布尔网络的对偶网络存在一种“隐藏秩序”。通过分析对偶网络的吸引子，可以揭示原网络在状态空间中的深层对称性和结构约束，这对理解生物系统的鲁棒性具有重要意义²¹。

3.4 布尔控制网络(BCN)的能控性与能观性

引入外部控制输入 $u(t)$ 后，系统变为布尔控制网络：

$$x(t+1) = L \cdot u(t) \cdot x(t)$$

这是一个双线性系统。利用 STP，经典控制理论中的概念得以直接应用：

- 能控性(**Controllability**)：通过构建可达性矩阵(**Reachability Matrix**) $R = [M, L M, L^2 M, \dots]$ (类似卡尔曼秩条件)，可以判断系统是否能从初始状态驱动到任意目标状态。研究表明，利用 STP 导出的能控性充要条件比传统图论方法更为精确，且适用于受限控制输入的情况²²。
- 能观性(**Observability**)：通过分析输出方程 $y(t) = H \cdot x(t)$ 与状态转移矩阵 L 的关系，可以判断初始状态是否可由输出序列唯一确定²⁵。
- 扰动与鲁棒性：STP 方法还可以用于分析单比特扰动对吸引子的影响，即“翻转”某个节点状态是否会导致系统从一个吸引子跃迁到另一个吸引子(Attractor Controllability)，这在癌症治疗(将细胞从癌变稳态诱导至正常稳态)中具有潜在应用价值²²。

4. 应用领域一：网络化演化博弈(NEGs)

演化博弈论研究群体中个体的策略调整过程。当个体之间的交互受限于网络拓扑结构时，系统被称为网络化演化博弈(**Networked Evolutionary Games, NEGs**)。STP 为 NEGs 提供了一个统一的建模框架，能够同时处理网络拓扑、博弈收益和策略更新规则²⁸。

4.1 NEGs 的代数方程构建

一个 NEG 系统包含三个要素：网络图、基础博弈(收益矩阵)和策略更新规则(SUR)。

1. 状态表示：设玩家 i 的策略集为 $S_i = \{1, \dots, k\}$ ，其在时刻 t 的策略为 $x_i(t) \in \Delta_k$ 。全网策略格局(Profile)为 $x(t) = \prod_{i=1}^n x_i(t)$ 。
2. 收益计算：玩家 i 的收益 p_i 取决于其自身策略和邻居策略。利用 STP，收益函数可以写成代数形式： $p_i(x(t)) = P_i \cdot x(t)$ ，其中 P_i 是结合了网络邻接矩阵和基础博弈矩阵的综合收益矩阵³⁰。
3. 策略更新与演化动力学：常见的更新规则如“近视最佳响应(Myopic Best Response)”或“费米规则(Fermi Rule)”本质上是基于收益比较的逻辑函数。由于收益 p_i 已经是 $x(t)$ 的函数，更新规则 $x_i(t+1) = f(p_i, \dots)$ 也可以转化为 $x(t)$ 的逻辑函数。最终，整个群体的演化方程可统一为：

$$x(t+1) = L \cdot x(t)$$

这一方程揭示了博弈演化的确定性或概率性规律²⁵。

4.2 控制与优化策略

- 零行列式(ZD)策略的设计: 零行列式策略是近年来博弈论的重大发现, 它允许玩家单方面控制对手的收益。利用 STP, 可以推导出多玩家、非对称博弈中 ZD 策略存在的充要条件和通用构造公式。这证明了在网络环境下, 通过精心设计策略, 可以强制引导系统演化至特定的社会福利状态³³。
- 超网络化博弈与多通道延迟: 现实网络往往具有多层结构(如社交层与物理层耦合)和信息传输延迟。STP 的高阶扩展(如 t-STP)被用于建模这类超网络化演化博弈。研究引入了控制延迟(Control Delay)和状态延迟的概念, 建立了包含历史信息的代数方程, 不仅解决了多通道结构下的策略优化问题, 还设计了反馈控制器以消除延迟带来的负面影响³⁴。
- 玩家退出机制: 针对动态网络中玩家因收益过低而退出的现象, STP 模型可以将“退出”视为一种虚拟策略, 从而将拓扑变化内化为策略演化的一部分, 便于分析系统的稳定性和存活率³⁶。

5. 应用领域二: 图论、组合优化与编码理论

许多图论问题本质上是组合逻辑问题(例如, “相邻节点颜色不能相同”)。ASST 将这些逻辑约束转化为代数方程, 为解决 NP 难问题提供了新的解析视角。

5.1 图着色与最大团问题

- 图着色(Graph Coloring): k -着色问题要求为图的每个顶点分配 k 种颜色之一, 使得相邻顶点颜色不同。设 $x_i \in \Delta_k$ 为节点 i 的颜色向量。边 (i, j) 的约束条件可以表示为 $x_i \otimes x_j$ 的某种逻辑积为零(或特定值)。整个图的着色问题转化为求解一个包含 STP 的矩阵方程 $A \otimes x = b$ 。若方程有解, 则图是 k -可着色的。这种方法已被应用于考试时间表调度等实际资源分配问题³⁷。
- 最大团(Maximum Clique): 寻找图中最大的全连接子图。利用 STP, 可以将团的定义转化为逻辑函数的极值问题, 进而构建代数不等式进行求解³⁷。

5.2 编码理论与盲源分离

- 盲源分离(Blind Source Separation, BSS): 在信号处理中, 如何从混合信号中分离出相互独立的源信号是一个经典难题。STP 提供的代数工具能够处理非线性混合模型, 通过构建基于 STP 的独立性判据或解相关算法, 实现源信号的有效恢复⁴⁰。
- 纠错编码: 在编码理论中, STP 的张量结构有助于理解和构造复杂的纠错码, 特别是在处理多维校验和网格编码调制(Trellis Coded Modulation)时, 代数状态空间的表达提供了一种系统化的分析手段⁴²。

6. 应用领域三: 前沿工程与量子计算

6.1 模糊控制与关系方程求解

模糊关系方程(Fuzzy Relation Equation, FRE)形如 $A \circ X = B$, 广泛用于模糊控制与故障诊断。

- **STP 解析法**: 传统解法依赖于特定的算子性质, 而 STP 方法通过引入“布尔半张量积合成”算子和列堆叠(Column Stacking)技术, 将模糊方程转化为标准的代数方程组。这种方法不仅能求出解, 还能系统地刻画出解集的结构(包括最大解和所有极小解)。
- **二型模糊系统**: 最近的研究将 STP 扩展到区间二型模糊集(Interval Type-2 Fuzzy Sets)。通过将问题分解为“主模糊矩阵方程”和“次模糊矩阵方程”, 利用区间矩阵的 STP 定义, 成功解决了二型模糊关系方程的求解难题⁴⁴。

6.2 压缩感知与深度学习压缩

- **压缩感知(Compressed Sensing)中的 DK-STP**: 在资源受限的物联网设备中, 传输和存储大的测量矩阵是瓶颈。利用保维半张量积(DK-STP), 可以构造出维度较小但功能等效于高维投影的测量矩阵。实验表明, 基于 DK-STP 的压缩感知系统在大幅降低存储需求的同时, 重构图像的峰值信噪比(PSNR)甚至优于传统方法¹⁴。
- **神经网络压缩**: 随着深度学习模型日益庞大, 参数压缩成为热点。基于 STP 的张量分解(如将权重矩阵分解为多个小矩阵的 STP 乘积)提供了一种比传统 Tucker 分解或 Tensor Train 分解更灵活的方案。这种方法打破了分解因子的维度限制, 允许构建更紧凑的神经网络架构, 同时保持高推理精度⁴⁹。此外, 结合域(Domain)概念的卷积 STP 正在被探索用于新型卷积神经网络的设计⁵¹。

6.3 量子张量网络

量子多体系统的状态通常由张量网络(Tensor Networks, TN)表示, 以避免希尔伯特空间的指数爆炸。

- **张量缩并(Contraction)**: 计算量子态的期望值或模拟量子电路本质上是张量缩并的过程。STP 为这些缩并操作提供了一套广义的代数语法, 有助于优化缩并路径(Contraction Path), 提高经典计算机模拟量子系统的效率。
- **量子机器学习**: STP 支持的张量网络也被用于模拟量子机器学习算法(如用于图像分类的矩阵乘积态模型), 成为连接经典深度学习与量子计算的桥梁⁵²。

7. 计算工具与算法实现

鉴于 STP 运算涉及大规模矩阵操作, 手工推导仅适用于小型系统。为了支持理论研究与工程应用, 程代展团队开发了专门的 MATLAB 工具箱。

7.1 MATLAB STP 工具箱

该工具箱封装了 STP 的核心算法, 使得研究人员可以像进行普通矩阵运算一样处理逻辑系统。

- **核心函数**:
 - `lsp(A, B)`: 计算矩阵 A 和 B 的左半张量积。
 - `lmd(k)`: 生成 k 值逻辑的离散化/析取结构矩阵。
 - `leye(n)`: 生成逻辑单位矩阵。

- `logical_to_vector` 类函数: 辅助用户将布尔函数直接转换为结构矩阵 M_f 或转移矩阵 L_f ⁵⁵。
- 获取方式: 工具箱及相关手册均开源, 可从中科院系统所或相关学术主页下载。这些工具极大地降低了 STP 的入门门槛, 促进了其在全球范围内的传播⁵⁶。

8. 结论与展望

矩阵半张量积(STP)理论的诞生, 标志着矩阵代数从“固定维度”向“跨维度”范式的跨越。通过代数状态空间理论(ASST), STP 成功地统一了逻辑推理与数值计算, 将布尔网络、博弈论、模糊控制等离散事件系统纳入了连续控制理论的分析框架。

核心结论:

1. 维度的解放: STP 证明了矩阵维度的不匹配并非运算的终点, 而是通过多线性映射进行信息融合的起点。
2. 方法论的统一: 它为处理混合动态系统(Hybrid Systems)提供了一种通用的语言, 消除了逻辑模型与代数模型之间的鸿沟。
3. 应用的广泛性: 从生物信息学中的基因网络稳定性分析, 到人工智能中的模型压缩, STP 展现了强大的跨学科应用潜力。

未来展望:

STP 的未来将向更高阶、更抽象的方向发展。从矩阵 STP 到 立方矩阵 t-STP 的跨越, 预示着其在处理超图、多层网络及高阶张量数据方面的巨大潜力。随着 保维半张量积(DK-STP) 在信号处理和高效计算中的应用日益成熟, 以及其与 量子张量网络 的深度融合, STP 有望成为下一代复杂系统建模与计算的标准数学工具之一。

引用的著作

1. A SURVEY ON SEMI-TENSOR PRODUCT OF MATRICES, 访问时间为 十二月 30, 2025, <https://lsc.amss.ac.cn/~hsqi/papers/JSSC2007-Survey-STP.pdf>
2. Semi-tensor product of matrices—A convenient new tool - ResearchGate, 访问时间为 十二月 30, 2025, https://www.researchgate.net/publication/269589453_Semi-tensor_product_of_matrices-A_convenient_new_tool
3. Semi-tensor Product of Matrices and Mathematics, 访问时间为 十二月 30, 2025, <https://fzqx.qdu.edu.cn/EN/10.13306/j.1672-3813.2025.02.003>
4. Kronecker product - Wikipedia, 访问时间为 十二月 30, 2025, https://en.wikipedia.org/wiki/Kronecker_product
5. Analysis on Boolean Networks Using Semi-tensor Product of Matrices - CityUHK Scholars, 访问时间为 十二月 30, 2025, <https://scholars.cityu.edu.hk/en/studentTheses/analysis-on-boolean-networks-using-semi-tensor-product-of-matrice/>
6. A Linear Representation of Dynamics of Boolean Networks - SciSpace, 访问时间为 十二月 30, 2025, <https://scispace.com/pdf/a-linear-representation-of-dynamics-of-boolean-netw>

- [orks-3437k0s8yx.pdf](#)
7. [2305.19794] From DK-STP to Non-square General Linear Algebra and General Linear Group - arXiv, 访问时间为 十二月 30, 2025, <https://arxiv.org/abs/2305.19794>
 8. From t-Product to t-STP of Cubic Matrices With Application to Hyper-Networked Systems - arXiv, 访问时间为 十二月 30, 2025, <https://arxiv.org/pdf/2412.07153>
 9. Is this "semi-tensor product" something recently invented? Are there other usages of it?, 访问时间为 十二月 30, 2025, <https://mathoverflow.net/questions/392047/is-this-semi-tensor-product-something-recently-invented-are-there-other-usage>
 10. Semi-tensor Product of Matrices: Concepts and Properties, 访问时间为 十二月 30, 2025, <https://m-stp.lcu.edu.cn/docs/2020-08/20200829194841159793.pdf>
 11. A Dimension-Keeping Semi-Tensor Product Framework for Compressed Sensing - arXiv, 访问时间为 十二月 30, 2025, <https://arxiv.org/html/2510.13180v1>
 12. semi-tensor product of matrices and its some applications to physics - Project Euclid, 访问时间为 十二月 30, 2025, <https://projecteuclid.org/journals/methods-and-applications-of-analysis/volume-10/issue-4/SEMI-TENSOR-PRODUCT-OF-MATRICES-AND-ITS-SOME-APPLICATIONS-TO/maa/1093024264.pdf>
 13. An Introduction to Semi-Tensor Product of Matrices and Its Applications - World Scientific Publishing, 访问时间为 十二月 30, 2025, http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789814374699_0002
 14. A Dimension-Keeping Semi-Tensor Product Framework for Compressed Sensing - arXiv, 访问时间为 十二月 30, 2025, <https://arxiv.org/pdf/2510.13180>
 15. A Dimension-Keeping Semi-Tensor Product Framework for Compressed Sensing, 访问时间为 十二月 30, 2025, https://www.researchgate.net/publication/396517661_A_Dimension-Keeping_Semi-Tensor_Product_Framework_for_Compressed_Sensing
 16. [2412.07153] From t-Product to t-STP of Cubic Matrices With Application to Hyper-Networked Systems - arXiv, 访问时间为 十二月 30, 2025, <https://arxiv.org/abs/2412.07153>
 17. Algebraic Structure of Cubic Matrices via Generalized t-Product - ResearchGate, 访问时间为 十二月 30, 2025, https://www.researchgate.net/publication/386977208_Algebraic_Structure_of_Cubic_Matrices_via_Generalized_t-Product/fulltext/675d457c2547a96a92339d77/Algebraic-Structure-of-Cubic-Matrices-via-Generalized-t-Product.pdf
 18. A Semi-tensor Product Approach for Probabilistic Boolean Networks - APORC, 访问时间为 十二月 30, 2025, <https://www.aporc.org/ISB/2014/Proceedings/Papers/ISB2014F17.pdf>
 19. Matrix Approach to Boolean Calculus - SciSpace, 访问时间为 十二月 30, 2025, <https://scispace.com/pdf/matrix-approach-to-boolean-calculus-vhktqs04q1.pdf>
 20. A Linear Representation of Dynamics of Boolean Networks* Daizhan Cheng, Hongsheng Qi 1 Introduction, 访问时间为 十二月 30, 2025, http://lsc.amss.ac.cn/~dcheng/preprint/bn_dynamics.pdf
 21. Hidden Order of Boolean Networks - arXiv, 访问时间为 十二月 30, 2025,

- <https://arxiv.org/pdf/2111.12988>
22. Attractor controllability of Boolean networks by flipping a subset of their nodes - PubMed, 访问时间为 十二月 30, 2025,
<https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/31906642/>
 23. Controllability of dynamic-algebraic Boolean control networks based on the semi-tensor product | IEEE Conference Publication | IEEE Xplore, 访问时间为 十二月 30, 2025, <https://ieeexplore.ieee.org/document/10696116/>
 24. Controllability Analysis and Control Design for Switched Boolean Networks with State and Input Constraints | SIAM Journal on Control and Optimization, 访问时间为 十二月 30, 2025, <https://epubs.siam.org/doi/10.1137/120902331>
 25. A survey on applications of semi-tensor product method in engineering, 访问时间为 十二月 30, 2025,
<https://m-stp.lcu.edu.cn/docs/2019-04/20190406202715503395.pdf>
 26. Design Architectures and Activity Diagram for Mobile Robot - MATLAB & Simulink, 访问时间为 十二月 30, 2025,
<https://www.mathworks.com/help/systemcomposer/ug/design-architectural-models.html>
 27. Attractor Stabilizability of Boolean Networks With Application to Biomolecular Regulatory Networks | IEEE Journals & Magazine | IEEE Xplore, 访问时间为 十二月 30, 2025, <https://ieeexplore.ieee.org/document/8263561/>
 28. Semi-tensor product approach to networked evolutionary games - ResearchGate, 访问时间为 十二月 30, 2025,
https://www.researchgate.net/publication/271917374_Semi-tensor_product_approach_to_networked_evolutionary_games
 29. Semi-tensor product approach to networked evolutionary games, 访问时间为 十二月 30, 2025, <http://lsc.amss.ac.cn/~hsqi/papers/CTT2014-NEG.pdf>
 30. Networked Evolutionary Model of Snow-Drift Game Based on Semi-Tensor Product, 访问时间为 十二月 30, 2025,
<https://www.scirp.org/journal/paperinformation?paperid=91457>
 31. On Networked Evolutionary Games Part 1: Formulation, 访问时间为 十二月 30, 2025, <https://skoge.folk.ntnu.no/prost/proceedings/ifac2014/media/files/1461.pdf>
 32. SURVEY ON APPLICATIONS OF SEMI-TENSOR PRODUCT METHOD IN NETWORKED EVOLUTIONARY GAMES - Journal of Applied Analysis & Computation, 访问时间为 十二月 30, 2025,
<https://www.jaac-online.com/data/article/jaac/preview/pdf/jaac-10-1-32.pdf>
 33. RESEARCH PAPER . Design of zero-determinant strategies and its application to networked repeated games - arXiv, 访问时间为 十二月 30, 2025,
<https://arxiv.org/pdf/2311.07124>
 34. Matrix-Based Method for the Analysis and Control of Networked Evolutionary Games: A Survey - MDPI, 访问时间为 十二月 30, 2025,
<https://www.mdpi.com/2073-4336/14/2/22>
 35. STP-based control of networked evolutionary games with multi-channel structure - PubMed, 访问时间为 十二月 30, 2025,
<https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/39236108/>
 36. Modeling and optimization for networked evolutionary games with player exit

- mechanism: Semi-tensor product of matrices method - IDEAS/RePEc, 访问时间为十二月 30, 2025,
<https://ideas.repec.org/a/eee/phsmap/v590y2022ics0378437121009274.html>
37. [PDF] A matrix approach to graph maximum stable set and coloring, 访问时间为十二月 30, 2025,
<https://www.semanticscholar.org/paper/A-matrix-approach-to-graph-maximum-stable-set-and-Wang-Zhang/f0bcd2eb5eae7f9f324ea330605931db67fff5a7>
38. Least squares solutions of matrix equation $AXB = C$ under semi-tensor product - AIMS Press, 访问时间为十二月 30, 2025,
<https://www.aimspress.com/aimspress-data/era/2024/5/PDF/era-32-05-136.pdf>
39. A survey on applications of semi-tensor product method in engineering, 访问时间为十二月 30, 2025, <http://scis.scichina.com/en/2018/010202.pdf>
40. Blind signal separation: statistical principles - page index, 访问时间为十二月 30, 2025, <http://www2.iap.fr/users/cardoso/papers/ProclEEE.pdf>
41. Advances in Nonlinear Blind Source Separation, 访问时间为十二月 30, 2025,
https://www.rd.ntt/cs/team_project/icl/signal/ica2003/cdrom/data/0209.pdf
42. Lecture 15: Product Codes 1 Recap of Topological Codes - People @EECS, 访问时间为十二月 30, 2025,
<https://people.eecs.berkeley.edu/~jswright/quantumcodingtheory24/scribe%20notes/lecture15.pdf>
43. Matrix Algebra and Error-Correcting Codes, 访问时间为十二月 30, 2025,
[https://www.math.toronto.edu/afenyas/writing/error-correction%20\(october%202015\).pdf](https://www.math.toronto.edu/afenyas/writing/error-correction%20(october%202015).pdf)
44. Perfect hypercomplex algebras: Semi-tensor product approach - AIMS Press, 访问时间为十二月 30, 2025,
<https://www.aimspress.com/article/doi/10.3934/mmc.2021017>
45. Resolution of Fuzzy Relational Inequalities with Boolean Semi-Tensor Product Composition, 访问时间为十二月 30, 2025,
<https://www.mdpi.com/2227-7390/9/9/937>
46. Solving interval type-2 fuzzy relation equations via semi-tensor product of interval matrices, 访问时间为十二月 30, 2025,
<https://www.aimspress.com/article/id/657bb7d1ba35de5cbf0c3d3c>
47. Resolution of Fuzzy Relational Inequalities with Boolean Semi-Tensor Product Composition - Semantic Scholar, 访问时间为十二月 30, 2025,
<https://pdfs.semanticscholar.org/297e/0ddde5e05109137ba61f5398a4f65504e6d3.pdf>
48. [2510.13180] A Dimension-Keeping Semi-Tensor Product Framework for Compressed Sensing - arXiv, 访问时间为十二月 30, 2025,
<https://arxiv.org/abs/2510.13180>
49. Semi-tensor Product-based TensorDecomposition for Neural Network Compression | Request PDF - ResearchGate, 访问时间为十二月 30, 2025,
https://www.researchgate.net/publication/354982893_Semi-tensor_Product-based_TensorDecomposition_for_Neural_Network_Compression
50. Stable tensor neural networks for efficient deep learning - Frontiers, 访问时间为十二月 30, 2025,

- <https://www.frontiersin.org/journals/big-data/articles/10.3389/fdata.2024.1363978/full>
51. [2506.10407] Semi-Tensor-Product Based Convolutional Neural Networks - arXiv, 访问时间为 十二月 30, 2025, <https://arxiv.org/abs/2506.10407>
 52. Quantum Machine Learning Tensor Network States - Frontiers, 访问时间为 十二月 30, 2025, <https://www.frontiersin.org/journals/physics/articles/10.3389/fphy.2020.586374/full>
 53. Applying Quantum Tensor Networks in Machine Learning: A Systematic Literature Review - SciTePress, 访问时间为 十二月 30, 2025, <https://www.scitepress.org/Papers/2025/134021/134021.pdf>
 54. Tensor Network Contractions - OAPEN Library, 访问时间为 十二月 30, 2025, <https://library.oapen.org/bitstream/id/894df17f-8784-4b00-92b9-e7f996ea815e/1007036.pdf>
 55. STP Toolbox for Matlab, 访问时间为 十二月 30, 2025, https://www.billhowell.ca/Qnial/MY_NDFS/Cheng%20-%20semi-tensor%20and%20switching%20control.%20Matlab%20toolbox/stp/readme.pdf
 56. On Fully Actuated Boolean Control Networks | Request PDF - ResearchGate, 访问时间为 十二月 30, 2025, https://www.researchgate.net/publication/395507599_On_Fully_Actuated_Boolean_Control_Networks
 57. (PDF) Novel way to research nonlinear feedback shift register - ResearchGate, 访问时间为 十二月 30, 2025, https://www.researchgate.net/publication/271414565_Novel_way_to_research_nonlinear_feedback_shift_register