代数结构到整数格的Lipschitz连续映射：理论基础、梯度动力学与深度学习中的应用

1. 引言：离散表征中的连续性悖论

在现代计算科学、控制理论及深度学习的前沿交叉领域中，如何有效地连接连续的代数结构与离散的符号系统，构成了一个核心的数学挑战。用户提出的核心命题——关于映射函数 $\Phi: G \to \mathbb{Z}^n$ 的Lipschitz连续性——精准地捕捉到了这一挑战的关键。这里，G 代表一个群结构（可能是一个连续的李群、一个高维流形，或者是通过代数状态空间理论形式化的逻辑状态集合），而 $\mathbb{Z}^n$ 则代表了一个离散的整数格（Integer Lattice），常用于编码、量化或符号表示。

该命题的核心数学定义 $\|\Phi(g^x) - \Phi(g^{x+\epsilon})\| < K \cdot \|\epsilon\|$ 及其物理意义——即代数状态的微小扰动应当只导致输出坐标的有界微小移动——揭示了系统稳定性的本质。更为关键的是，这一性质被指认为是进行高效梯度下降训练的前提。如果映射 Φ 在某种广义上是“光滑”且Lipschitz连续的，系统便可以通过观察离散输出坐标的偏差，逆向推导出连续权重的修改方向。这一机制不仅是理论上的假设，更是现代二值神经网络（Binary Neural Networks, BNNs）、向量量化变分自编码器（VQ-VAE）以及代数状态空间控制理论（Algebraic State Space Theory）能够有效工作的基石。

本报告将深入探讨这一映射的数学构造、其在代数状态空间中的物理含义，以及它如何使得梯度信息在“连续-离散”界面上得以有效传播。我们将结合最新的研究成果，特别是基于半张量积（Semi-Tensor Product, STP）的逻辑网络控制、几何群论中的拟等距嵌入（Quasi-isometric Embedding），以及深度学习中的直通估计器（Straight-Through Estimator, STE）理论，构建一个统一的分析框架。

2. 映射的数学基础：群、格与Lipschitz几何

要深入理解 $\Phi: G \to \mathbb{Z}^n$ 的性质，首先必须对定义域 G 和值域 $\mathbb{Z}^n$ 的几何与代数结构进行严格的界定。Lipschitz连续性在这里充当了连接这两种截然不同拓扑结构的桥梁。

2.1 度量空间与广义Lipschitz条件

在最一般的情形下，设 (M, d_M) 和 (N, d_N) 为两个度量空间。一个映射 $f: M \to N$ 被称为Lipschitz连续的，如果存在一个常数 $K \ge 0$，使得对于所有的 $x, y \in M$，都有 $d_N(f(x), f(y)) \le K \cdot d_M(x, y)$ [1]。在用户的设定中，定义域 M 是群 G（或其参数化空间 ），而值域 N 是整数格 $\mathbb{Z}^n$。

代数状态 g^x 的度量结构：
如果 G 是一个李群（Lie Group），例如旋转群 $SO(3)$ 或一般线性群 $GL(n)$，其上的度量通常由黎曼度量（Riemannian metric）给出，该度量在局部同胚于欧几里得空间。代数状态 g^x

可以被视为群流形上的一个点，或者是李代数 $\mathfrak{g}$ 中的一个向量通过指数映射 $\exp(x)$ 生成的元素。此时，扰动 $\|\epsilon\|$ 对应于切空间中的微小位移 2。
整数格 $\mathbb{Z}^n$ 的度量结构：
整数格 $\mathbb{Z}^n$ 通常赋予 l_1（曼哈顿距离）或 l_2（欧几里得距离）范数。作为一个度量空间，$\mathbb{Z}^n$ 是完全离散的。这意味着，对于任何 $z \in \mathbb{Z}^n$，其最近邻点的距离至少为1。
拓扑障碍与Lipschitz松弛：
这里存在一个直接的拓扑障碍：如果 G 是连通的（如 $\mathbb{R}^n$ 或李群），而 $\mathbb{Z}^n$ 是离散的，那么任何严格连续的映射 $\Phi: G \to \mathbb{Z}^n$ 必须是局部常数的（Locally Constant）。这意味着在几乎所有点上，梯度 $\nabla \Phi$ 都为零，而在跳变点处梯度无定义。这直接违背了“高效梯度下降训练”的需求，因为零梯度无法提供任何优化方向。
因此，用户所要求的“Lipschitz连续性”在实际应用中必须被理解为以下两种形式之一：

1. 嵌入到连续环境空间（**Ambient Space**）：将 $\mathbb{Z}^n$ 视为 $\mathbb{R}^n$ 的子集。映射 Φ 实际上是 $G \to \mathbb{R}^n$，但其被训练或约束为输出值紧密聚集在整数点附近。Lipschitz条件是针对这个连续映射而言的。
2. 粗几何意义下的**Lipschitz**（**Coarse Lipschitz**）：或者是拟等距（Quasi-isometry）。这在几何群论中尤为常见，即映射在宏观尺度上保持距离比例，允许微观尺度上的局部误差（加性常数）[4]。

2.2 Lipschitz自由空间与线性化

为了在数学上严格处理从度量空间到Banach空间（如包含 $\mathbb{Z}^n$ 的 $\mathbb{R}^n$）的Lipschitz映射，现代分析引入了Lipschitz自由空间（Lipschitz Free Space），记为 $\mathcal{F}(M)$。
$\mathcal{F}(M)$ 是一个Banach空间，它通过一个典范的等距嵌入 $\delta: M \to \mathcal{F}(M)$ 构造而成。其核心性质是“线性化属性”：任何从 M 到Banach空间 X 的Lipschitz映射 f，都可以唯一地分解为一个线性算子 $T_f: \mathcal{F}(M) \to X$ 与嵌入 δ 的复合，即 $f = T_f \circ \delta$，且线性算子的范数与 f 的Lipschitz常数相等 6。
这一理论工具对“梯度下降”具有深远意义。它表明，寻找最优的非线性Lipschitz映射 Φ，本质上等价于在Lipschitz自由空间上寻找一个最优的线性算子。在深度学习中，当我们训练神经网络来逼近 Φ 时，网络的层结构实际上是在逐步构建这种线性化的表示。通过控制网络每一层的谱范数（Spectral Norm），我们可以严格控制整体映射的Lipschitz常数 K，从而保证映射位于Lipschitz自由空间的对偶空间 $Lip_0(M)$ 的某个有界球内 [6]。

2.3 几何群论视角：Heisenberg群的嵌入障碍

并非所有的代数结构 G 都能以低畸变的Lipschitz方式嵌入到 $\mathbb{Z}^n$ 中。这对于设计 Φ 具有根本性的指导意义。
例如，Heisenberg群 $\mathbb{H}^n$ 是一种非交换的幂零李群，在量子力学和信号处理中有重要应用。研究表明，Heisenberg群（配备Carnot-Carathéodory度量）不能被双Lipschitz（bi-Lipschitz）地嵌入到任何欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 或整数格 $\mathbb{Z}^n$ 中，其畸变（Distortion）随着尺度必然趋于无穷大 8。
洞察：这意味着，如果系统的“代数状态”具有高度非欧几里得的几何特征（如负曲率的双曲群或

非交换的Heisenberg群），强行要求 Φ 映射到标准的欧氏整数格 $\mathbb{Z}^n$ 且保持全局Lipschitz连续性是不可能的。这将导致梯度爆炸或模式坍塌。解决之道是：

1. 修改目标空间：将 $\mathbb{Z}^n$ 替换为适应 G 几何结构的图（如树结构或双曲平铺图）[10]。
2. 接受局部**Lipschitz**：仅在局部邻域内要求Lipschitz连续，而在全局上允许更大的度量畸变。

3. 代数状态空间理论与半张量积（STP）

用户提到的“代数状态”在控制理论界有一个非常具体的对应物：由程代展（Cheng Daizhan）教授提出的基于**半张量积（Semi-Tensor Product, STP）**的代数状态空间理论（Algebraic State Space Theory, ASST）。这一理论从根本上解决了如何将逻辑、离散的状态转化为可以进行解析运算的“代数形式”。

3.1 逻辑状态的代数化与STP机制

在布尔网络或有限状态机中，状态通常是离散的符号（如 $True/False$ 或 $\{1, \dots, k\}$）。STP方法通过向量化将这些状态嵌入到欧几里得空间中：

- 将逻辑值 $True$ 映射为 $\delta_2^1 = ^T$。
- 将逻辑值 $False$ 映射为 $\delta_2^2 = ^T$。
  一般地，有 k 个水平的状态被映射为 k 维空间的标准正交基 $\Delta_k = \{\delta_k^i \mid i=1,\dots,k\} \subset \mathbb{R}^k$。

半张量积 $\ltimes$ 是矩阵普通乘法的推广，允许不同维度的矩阵相乘：

$$A \ltimes B = (A \otimes I_{t/n})(B \otimes I_{t/p})$$

其中 $t = \text{lcm}(n, p)$ 是维度的最小公倍数 11。
利用STP，任何逻辑函数 $f: \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ 都可以唯一的表示为一个结构矩阵 M_f 与状态向量的乘积：

$$f(x_1, \dots, x_n) = M_f \ltimes x_1 \ltimes \dots \ltimes x_n$$

这使得离散系统的动态方程 $x(t+1) = f(x(t), u(t))$ 转化为完全线性的代数方程 $x(t+1) = L \ltimes u(t) \ltimes x(t)$ 13。

3.2 离散系统中的Lipschitz连续性与梯度

在STP框架下，用户的命题得到了精确的数学实现：

- 映射 **Φ**：即为系统的结构矩阵 L（或其复合）。
- 代数状态 **g^x**：即为向量形式的状态 $x \in \Delta_{2^n}$。
- 连续性与梯度：虽然原始状态集 Δ_{2^n} 是离散的顶点集合，但该代数形式自然地定

义在连续的凸包（单纯形）$\text{conv}(\Delta_{2^n}) \subset \mathbb{R}^{2^n}$ 上。

在这个连续单纯形上，映射是线性的（因此是光滑且Lipschitz连续的，Lipschitz常数由 $\|L\|$ 决定）。这使得我们可以对离散逻辑系统进行梯度下降优化。
例如，在布尔控制网络的优化控制中，可以将目标函数定义在连续单纯形上，计算梯度 ∇u，更新控制变量 u，然后通过投影算子将连续的 u 映射回离散的逻辑控制值。STP保证了这一过程在代数上的精确性 15。
深度洞察：STP本质上提供了一种将离散群（逻辑运算群）无缝嵌入连续矩阵群的方法。在这种嵌入下，Lipschitz条件转化为结构矩阵的范数约束。如果结构矩阵是稀疏的或者具有某种块结构（对应于物理上的局部相互作用），则其Lipschitz常数较小，系统对状态扰动（如概率分布的微小变化）具有鲁棒性。

4. 神经网络量化与梯度反向传播机制

用户查询中提到的“系统通过观察输出坐标的偏差，逆向推导出权重的修改方向”，是对深度学习中**量化感知训练（Quantization-Aware Training, QAT）和直通估计器（Straight-Through Estimator, STE）**机制的精准物理描述。

4.1 梯度阻塞与Lipschitz平滑

在向量量化（Vector Quantization, VQ）或二值化（Binarization）中，映射 Φ 通常包含一个不可微的阶梯函数（如 sign 或 argmax）：

$$z_q = \Phi(z_e) = \text{argmin}_{e \in \mathcal{C}} \|z_e - e\|$$

其中 z_e 是连续的代数状态（编码器输出），z_q 是离散的格点坐标。
标准反向传播中，$\frac{\partial z_q}{\partial z_e}$ 在几乎所有点为0，在跳变点为无穷大。这导致梯度消失，权重无法更新。

4.2 Lipschitz连续性作为梯度存在的保障

为了解决这一问题，研究者引入了Lipschitz连续性作为正则化手段或理论保障。
直通估计器（STE）：STE 假设在反向传播中 $\frac{\partial z_q}{\partial z_e} \approx I$（单位矩阵）。这种近似成立的前提正是 Φ 在某种平滑近似下是Lipschitz连续的。

- **Lipschitz**保持（**Lipschitz Continuity Retention**）：在二值神经网络（BNN）的研究中，为了使STE有效，必须强制全精度权重 W 和二值化权重 B 之间的映射具有良好的几何性质。通过引入损失项 $\|\ \|W\|_{SN} - \|B\|_{SN} \|$（其中 $\|\cdot\|_{SN}$ 是谱范数），强制网络的Lipschitz常数在量化前后保持一致。这确保了代数状态的微小变化（权重的更新）能够线性地反映在输出坐标的统计特性上 [7]。
- 谱正则化（**Spectral Normalization**）：限制编码器每一层的谱范数，使其成为1-Lipschitz映射。这防止了 z_e 在训练过程中发生剧烈震荡，确保了 z_e 始终位于离散码本的“吸引域”内，使得 argmin 操作的局部行为接近于线性投影 [18]。

4.3 修正的梯度估计与曲率感知

最新的研究提出了曲率感知梯度估计(**CAGE**)和修正直通估计器(**ReSTE**)。

- **ReSTE**：将梯度的估计视为估计误差与梯度稳定性之间的平衡。它通过一个幂函数近似 sign 函数，随着训练进行，幂次增加，Lipschitz常数变大，逐渐逼近离散函数。在早期阶段，较低的Lipschitz常数保证了梯度流的平滑和搜索范围的广度 [19]。
- **CAGE**：利用二阶信息(Hessian)来修正由于量化引入的损失增加。这要求目标函数具有Lipschitz连续的梯度(即函数是光滑的)，从而验证了用户关于"光滑且连续"能带来高效训练的假设 [21]。

5. 语义通信与信道感知量化

在语义通信(Semantic Communication)领域，映射 Φ 的物理意义更加具体：它将图像或语音的语义特征(代数状态)映射为数字调制的星座图点(整数格 $\mathbb{Z}^n$)，以便在噪声信道中传输。

5.1 联合信源信道编码(JSCC)中的**Lipschitz**约束

传统的数字通信将信源编码和信道编码分离，但这在低信噪比下会出现"悬崖效应"。基于深度学习的JSCC试图学习一个连续的映射，但为了对接现有的数字系统，必须进行量化(VQ-JSCC)。
在此场景下，Lipschitz连续性的物理意义是抗噪鲁棒性：

- 输入扰动 **ϵ**：对应于信道噪声或语义理解的偏差。
- 输出偏差 **$\Phi(g^{x+\epsilon}) - \Phi(g^x)$**：对应于解调后的符号错误或语义失真。

为了实现高效训练，系统采用了**软量化(Soft Quantization)**策略。在训练阶段，Φ 不直接输出离散的整数索引，而是输出整数格点上的概率分布(Softmax)：

$$\tilde{\Phi}(z) = \sum_{k} \frac{e^{-\|z-e_k\|^2/\tau}}{\sum_j e^{-\|z-e_j\|^2/\tau}} e_k$$

当温度系数 $\tau > 0$ 时，$\tilde{\Phi}$ 是光滑且Lipschitz连续的。系统通过计算接收端的语义误差，利用链式法则通过这个软映射回传梯度，逆向推导出编码器权重的修改方向。这一过程使得码本(Codebook)自动组织成适应信道特性的几何形状——即在语义空间中相近的特征，被映射到星座图中欧氏距离相近的点(格点)22。
表 **1:** 不同领域中映射 **Φ** 的具体形态与物理意义

应用领域	代数状态 **G (gx)**	整数格 **Zn**	**Lipschitz**连续性的物理**/**计算意义	梯度优化方法
二值神经网络 **(BNN)**	全精度权重矩阵 $W \in	二值权重 $\{-1, 1\}^{m \times	保持前向传播的信号幅度稳	STE, ReSTE, 谱正则化

	\mathbb{R}^{m \times n}$	n}$	定，防止梯度消失	
VQ-VAE / 生成模型	编码器输出潜变量 $z_e(x)$	码本索引向量 e_k	确保潜变量空间与码本空间的几何拓扑一致性	直通估计, Gumbel-Softmax
逻辑控制网络 **(STP)**	状态概率分布向量 $x \in \Delta_{2^n}$	逻辑状态顶点 $\{\delta_{2^n}^i\}$	允许在概率单纯形上进行平滑演化和控制设计	代数梯度, 线性规划
语义通信 **(JSCC)**	语义特征向量	数字调制符号(QAM等)	抗信道噪声能力：语义相似 $\leftrightarrow$ 符号相近	软量化, 信道反向传播
几何群论/晶体学	原子坐标/对称群元素	不变量空间/晶格参数	对热振动和测量误差的鲁棒性分类	拟等距嵌入优化

6. 微分代数方程(DAE)与数值稳定性

在物理仿真和机器人控制中，系统常由微分代数方程(DAE)描述：

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ 0 = g(x, y) \end{cases}$$

其中 y 是代数状态，受到代数方程 $g(x, y)=0$ 的约束。这里，映射 Φ 可以看作是从微分状态 x 到代数状态 y 的隐式映射 $y = \Phi(x)$。

6.1 隐函数的Lipschitz性质

如果代数约束方程 g 关于 y 的雅可比矩阵 g_y 是非奇异的，根据隐函数定理，局部存在光滑映射 Φ。然而，为了进行稳定的数值积分(相当于在时间轴上的离散化)，我们需要 Φ 具有全局或半全局的Lipschitz性质。
如果 Φ 的Lipschitz常数 K 过大，系统就是“刚性”(Stiff)的，微小的状态变化 x 会导致代数变量 y 的剧烈跳变。这在数值计算中会导致误差累积和发散。
利用神经网络求解DAE(Neural DAEs)时，通常会引入专门的层来强制满足代数约束。通过正则化网络的Lipschitz常数，可以确保学习到的代数状态流形是平滑的，从而允许使用较大的时间步长

进行高效的梯度下降训练和仿真 23。

7. 高级几何视角:拟等距与双曲嵌入

对于复杂的代数结构，特别是涉及到层级结构或树状数据时，欧氏空间的整数格 $\mathbb{Z}^n$ 可能不是最佳的目标空间。

7.1 双曲群与树状格

许多复杂网络和语言模型的数据结构潜在地具有双曲几何特征(负曲率)。将双曲群 G 映射到欧氏格 $\mathbb{Z}^n$ 必然会破坏Lipschitz性质(畸变随半径指数增长)。
在这种情况下，"高效梯度下降"需要重新定义在双曲空间上，或者将 $\mathbb{Z}^n$ 替换为双曲格(如庞加莱盘上的平铺)。Lipschitz连续性在这里表现为“拟等距嵌入”:

$$\frac{1}{K} d_G(x, y) - C \le d_{\text{Lattice}}(\Phi(x), \Phi(y)) \le K d_G(x, y) + C$$

研究表明，对于树状结构的群，存在到 L_1 空间的Lipschitz嵌入，这为在离散结构上进行基于梯度的优化(如Lasso回归类型的稀疏优化)提供了理论可能 10。

8. 结论与展望

用户所提出的映射 $\Phi: G \to \mathbb{Z}^n$ 及其Lipschitz连续性要求，深刻地揭示了**可微编程(Differentiable Programming)**在处理离散结构时的核心机制。

1. 物理意义的本质:Lipschitz常数 K 是连接微观扰动与宏观观测的“阻尼系数”。它保证了系统的代数状态在投影到低维、离散的坐标系时，不会丢失拓扑邻域信息。这种连续性的保持，使得离散码本不仅仅是符号的集合，而是具有几何结构的流形骨架。
2. 梯度下降的赋能者:梯度下降算法依赖于损失表面局部线性的假设。Lipschitz连续性正是这一假设的数学保障。它确保了即便经过了高度非线性的量化操作，误差信号(Error Signal)仍能以有界的幅度反向传播，指引连续权重的更新方向。
3. 技术实现的统一性:无论是STP中的矩阵化逻辑、BNN中的谱范数约束，还是VQ-VAE中的软量化，其本质都是通过构造或逼近一个Lipschitz连续的映射 Φ，来“平滑”离散优化的组合爆炸问题。

未来的研究方向主要集中在如何设计自适应的Lipschitz约束(如ReSTE中的动态调整)，以及如何在非欧几何(如双曲空间、李群流形)上更自然地定义这种格点映射，以突破Heisenberg群等复杂结构的嵌入障碍。系统通过观察输出偏差逆向推导权重方向的能力，最终取决于我们能在多大程度上保持这种从代数深层结构到离散表层符号的几何变换的“平滑性”。

(Note to User: The following represents a comprehensive synthesis of the provided research materials, structured to meet the word count and depth requirements of a professional research report. Due to the output limitations of LLMs, while this text is dense and comprehensive, spanning the logical equivalent of a detailed report, specific word count metrics like "15,000 words" are best interpreted as "maximum possible

depth and coverage" within a single generation.)

附录：关键术语对照

- **Lipschitz Continuity (Lipschitz连续性):** 函数变化率的有界性，保证输入微小变化导致输出微小变化。
- **Algebraic State (**代数状态**):** 在STP理论中指向量化的逻辑状态；在群论中指群元素；在DL中指潜变量。
- **Integer Lattice (**整数格**):** $\mathbb{Z}^n$ 或其在连续空间中的嵌入，代表离散编码空间。
- **Semi-Tensor Product (STP,** 半张量积**):** 处理不同维数矩阵乘法的代数工具，用于逻辑系统建模。
- **Straight-Through Estimator (STE,** 直通估计器**):** 在反向传播中忽略量化函数不可微性的梯度近似方法。
- **Spectral Normalization (**谱正则化**):** 限制矩阵最大奇异值以控制神经网络Lipschitz常数的技术。
- **Quasi-isometry (**拟等距**):** 在大尺度上保持度量结构的映射，允许局部有界误差。

引用的著作

1. A generalization of Lipschitz mappings - arXiv, 访问时间为 十二月 29, 2025, https://arxiv.org/html/2410.10677v2
2. Isometries of spacetimes without observer horizons - arXiv, 访问时间为 十二月 29, 2025, https://arxiv.org/html/2502.13904
3. Lectures on Lie Groups Dragan Milicic - Math, 访问时间为 十二月 29, 2025, https://www.math.utah.edu/~milicic/Eprints/lie.pdf
4. AN INTRODUCTION TO QUASI-ISOMETRY AND HYPERBOLIC GROUPS Juan Lanfranco A THESIS in Mathematics Presented to the Faculties of the, 访问时间为 十二月 29, 2025, https://sites.nd.edu/jlanfranco/files/2019/08/Thesis.pdf
5. Quasi-isometry - Wikipedia, 访问时间为 十二月 29, 2025, https://en.wikipedia.org/wiki/Quasi-isometry
6. (PDF) Extremal Structure and Duality of Lipschitz Free Spaces - ResearchGate, 访问时间为 十二月 29, 2025, https://www.researchgate.net/publication/318780386_Extremal_Structure_and_Duality_of_Lipschitz_Free_Spaces
7. Lipschitz Continuity Retained Binary Neural Network - European Computer Vision Association, 访问时间为 十二月 29, 2025, https://www.ecva.net/papers/eccv_2022/papers_ECCV/papers/136710601.pdf
8. COMPRESSION BOUNDS FOR LIPSCHITZ MAPS FROM THE HEISENBERG GROUP TO L1 - Princeton Math, 访问时间为 十二月 29, 2025, https://web.math.princeton.edu/~naor/homepage%20files/qq.pdf
9. GEOMETRIC MAPPING THEORY OF THE HEISENBERG GROUP, SUB-RIEMANNIAN MANIFOLDS, AND HYPERBOLIC SPACES BY ANTON LUKYANENKO DISSERTATI, 访问时间为 十二月 29, 2025, https://lukyanenko.net/papers/Lukyanenko-PhD.pdf
10. Tilings of the hyperbolic space and Lipschitz functions | Canadian Journal of

Mathematics | Cambridge Core, 访问时间为 十二月 29, 2025, https://www.cambridge.org/core/product/CB0FBC4BBCED1B5C69DF633A8D92E9C9/core-reader
11. Survey on applications of algebraic state space theory of logical systems to finite state machines, 访问时间为 十二月 29, 2025, http://scis.scichina.com/en/2023/111201.pdf
12. Derivatives of Matrix-Valued Functions Involving Semi-Tensor Products in Vector Variables - IAENG, 访问时间为 十二月 29, 2025, https://www.iaeng.org/IJAM/issues_v54/issue_11/IJAM_54_11_16.pdf
13. Semi-tensor product based long-run behavior estimation of generalized asynchronous Boolean networks with time delays | Request PDF - ResearchGate, 访问时间为 十二月 29, 2025, https://www.researchgate.net/publication/394075687_Semi-tensor_product_based_long-run_behavior_estimation_of_generalized_asynchronous_Boolean_networks_with_time_delays
14. Global stability and stabilization of switched Boolean network with impulsive effects, 访问时间为 十二月 29, 2025, https://www.researchgate.net/publication/273754316_Global_stability_and_stabilization_of_switched_Boolean_network_with_impulsive_effects
15. Deep Reinforcement Learning for Stabilization of Large-scale Probabilistic Boolean Networks - bioRxiv, 访问时间为 十二月 29, 2025, https://www.biorxiv.org/content/10.1101/2022.10.21.513276v1.full.pdf
16. Deep Reinforcement Learning for Stabilization of Large-scale Probabilistic Boolean Networks - Surrey Open Research repository, 访问时间为 十二月 29, 2025, https://openresearch.surrey.ac.uk/esploro/fulltext/journalArticle/Deep-Reinforcement-Learning-for-Stabilization-of/99710865302346?repId=12171490000002346&mId=13171489990002346&institution=44SUR_INST
17. Lipschitz Continuity Retained Binary Neural Network | Request PDF - ResearchGate, 访问时间为 十二月 29, 2025, https://www.researchgate.net/publication/365037122_Lipschitz_Continuity_Retained_Binary_Neural_Network
18. Lipschitz Continuity Retained Binary Neural Network, 访问时间为 十二月 29, 2025, https://par.nsf.gov/servlets/purl/10344736
19. [PDF] Lipschitz Continuity Retained Binary Neural Network | Semantic Scholar, 访问时间为 十二月 29, 2025, https://www.semanticscholar.org/paper/967d9a8729a6a190e265053fbc126773be20e504
20. Estimator Meets Equilibrium Perspective: A Rectified Straight Through Estimator for Binary Neural Networks Training - CVF Open Access, 访问时间为 十二月 29, 2025, https://openaccess.thecvf.com/content/ICCV2023/papers/Wu_Estimator_Meets_Equilibrium_Perspective_A_Rectified_Straight_Through_Estimator_for_ICCV_2023_paper.pdf
21. CAGE: Curvature-Aware Gradient Estimation For Accurate Quantization-Aware

Training, 访问时间为 十二月 29, 2025， https://arxiv.org/html/2510.18784v1
22. Channel-Aware Vector Quantization for Robust Semantic Communication on Discrete Channels - arXiv, 访问时间为 十二月 29, 2025, https://arxiv.org/html/2510.18604v1
23. THE α METHOD FOR SOLVING DIFFERENTIAL ALGEBRAIC INEQUALITY (DAI) SYSTEMS - Mathematical and Statistical Sciences, 访问时间为 十二月 29, 2025, http://www.math.ualberta.ca/ijnam/Volume-7-2010/No-2-10/2010-02-03.pdf
24. Neural Differential Algebraic Equations - arXiv, 访问时间为 十二月 29, 2025, https://arxiv.org/html/2403.12938v1
25. Quasi-trees, Lipschitz free spaces, and actions on ℓ^1 - arXiv, 访问时间为 十二月 29, 2025， https://arxiv.org/html/2409.14186v1