Решение постараюсь залить в репозитори1 DM_HW_5 на моей страничке в гитхабе https://github.com/M-Polina/DM_HW_5/

Файлик юпитера я вам прислала, вроде должно работать. Вот тут все картинки из того файла:

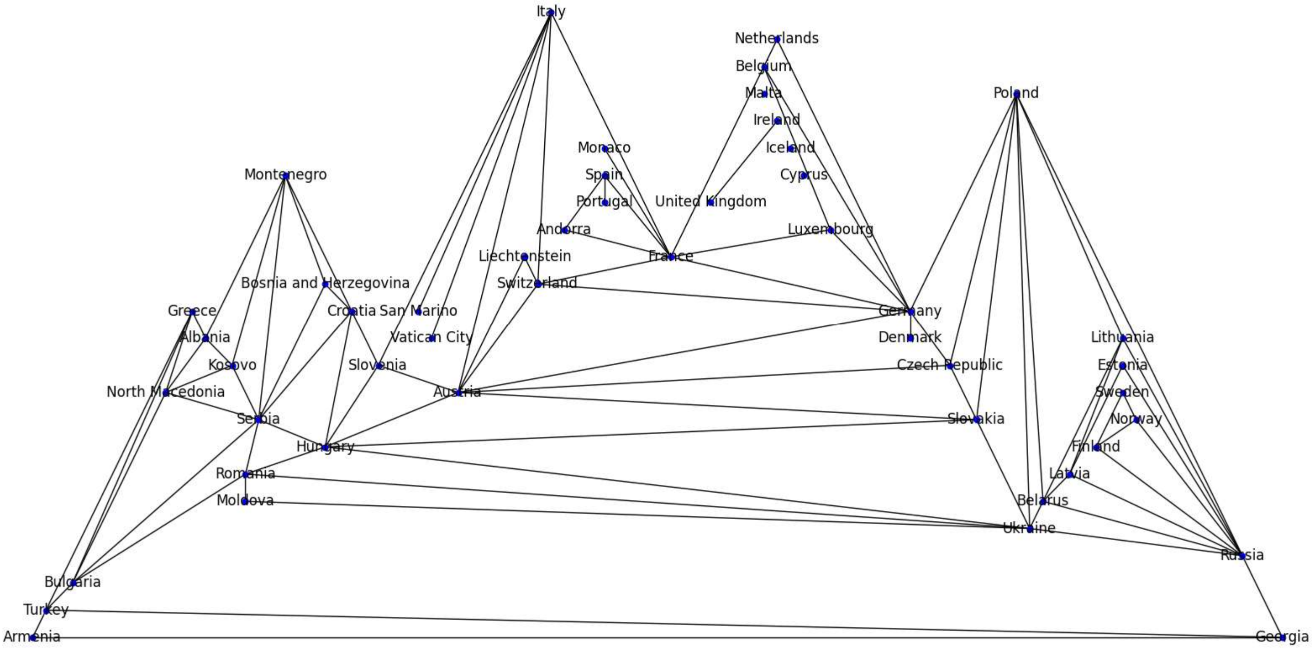
# №1

# a)

**Draw G* with the minimum number of intersecting edges**

***Solution:***

I used nx.draw_planar() to draw the graph of Europe with minimum number of intersected edges. We had no intersections, because graph is planar (the second picture is just a good generated graph)




# n)

**Construct an SPQR tree of the largest biconnected component of G.**

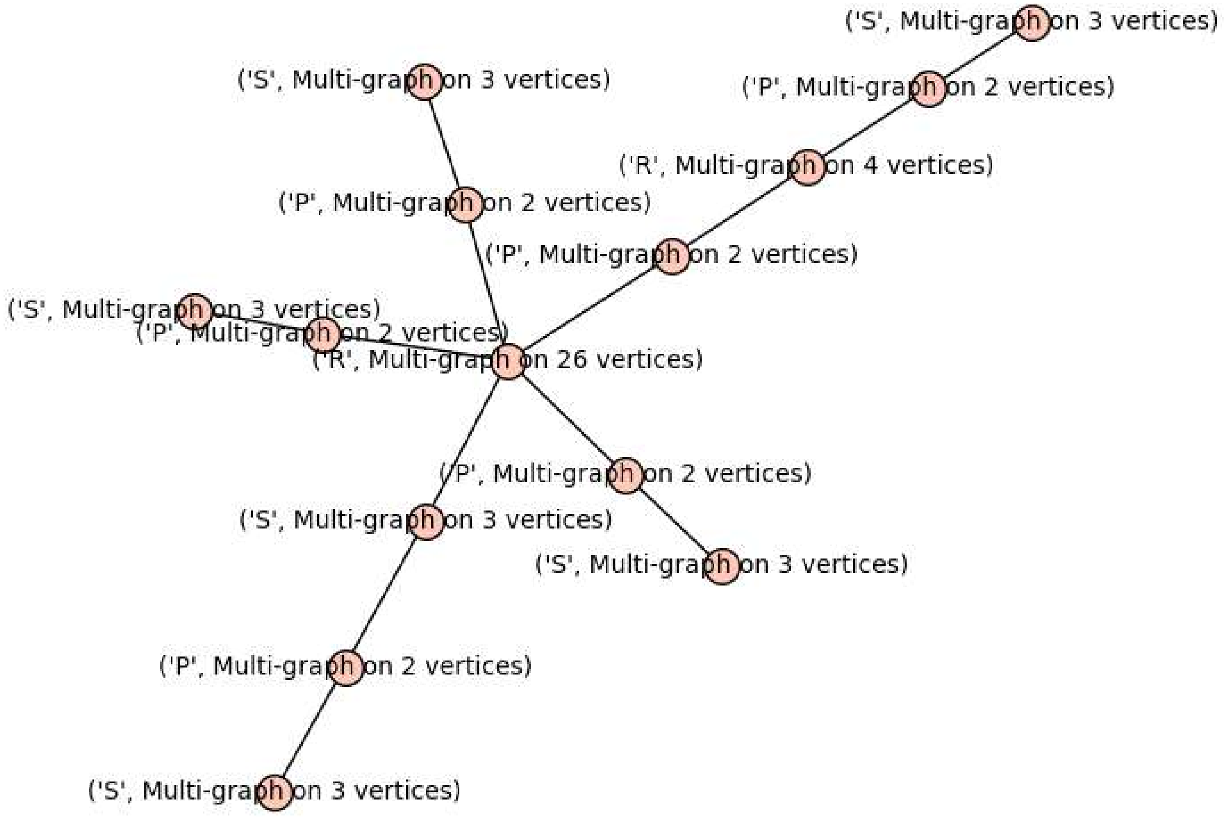
***Solution:***

Made the graph in the site: https://sagecell.sagemath.org/?q=tnzukr

graph = [('Germany', 'Austria'), ('Austria', 'Czech Republic'), ('Czech Republic', 'Poland'), ('Poland', 'Belarus'), ('Belarus', 'Lithuania'), ('Lithuania', 'Latvia'), ('Latvia', 'Belarus'), ('Latvia', 'Estonia'), ('Estonia', 'Russia'), ('Russia', 'Belarus'), ('Russia', 'Georgia'), ('Georgia', 'Armenia'), ('Armenia', 'Turkey'), ('Turkey', 'Bulgaria'), ('Bulgaria', 'Greece'), ('Greece', 'Albania'), ('Albania', 'Kosovo'), ('Kosovo', 'Serbia'), ('Serbia', 'Bosnia and Herzegovina'), ('Bosnia and Herzegovina', 'Croatia'), ('Croatia', 'Hungary'), ('Hungary', 'Austria'), ('Hungary', 'Slovenia'),

```
('Slovenia', 'Austria'), ('Slovenia', 'Croatia'), ('Slovenia', 'Italy'), ('Italy', 'Austria'), ('Italy', 'France'), ('France', 'Belgium'), ('Belgium', 'Luxembourg'), ('Luxembourg', 'France'), ('Luxembourg', 'Germany'), ('Belgium', 'Netherlands'), ('Netherlands', 'Germany'), ('Belgium', 'Germany'), ('France', 'Germany'), ('France', 'Switzerland'), ('Switzerland', 'Austria'), ('Switzerland', 'Germany'), ('Switzerland', 'Italy'), ('Switzerland', 'Liechtenstein'), ('Liechtenstein', 'Austria'), ('Hungary', 'Ukraine'), ('Ukraine', 'Belarus'), ('Ukraine', 'Moldova'), ('Moldova', 'Romania'), ('Romania', 'Bulgaria'), ('Romania', 'Hungary'), ('Romania', 'Ukraine'), ('Romania', 'Serbia'), ('Ukraine', 'Poland'), ('Ukraine', 'Russia'), ('Ukraine', 'Slovakia'), ('Slovakia', 'Austria'), ('Slovakia', 'Czech Republic'), ('Slovakia', 'Hungary'), ('Slovakia', 'Poland'), ('Hungary', 'Serbia'), ('Croatia', 'Montenegro'), ('Montenegro', 'Albania'), ('Montenegro', 'Bosnia and Herzegovina'), ('Montenegro', 'Kosovo'), ('Montenegro', 'Serbia'), ('Croatia', 'Serbia'), ('Serbia', 'Bulgaria'), ('Serbia', 'North Macedonia'), ('North Macedonia', 'Albania'), ('North Macedonia', 'Bulgaria'), ('North Macedonia', 'Greece'), ('North Macedonia', 'Kosovo'), ('Greece', 'Turkey'), ('Turkey', 'Georgia'), ('Russia', 'Latvia'), ('Russia', 'Lithuania'), ('Russia', 'Poland'), ('Lithuania', 'Poland'), ('Poland', 'Germany'), ('Czech Republic', 'Germany')]
#largest biconnected component of G (множество рёбер)
g = Graph()
g.add_edges(graph)
g = g.to_undirected()
tree = g.spqr_tree()
plot(tree,layout="spring")
```

Answer:



**№2**

**Prove rigorously the following theorems:**

**Theorem 1** (Triangle Inequality). For any connected graph $G = \langle V, E \rangle$:

$$\forall x, y, z \in V : \mathrm{dist}(x, y) + \mathrm{dist}(y, z) \geq \mathrm{dist}(x, z)$$

**Theorem 2** (Tree). A connected graph $G = \langle V, E \rangle$ is a tree (*i.e.* acyclic graph) *iff* $|E| = |V| - 1$.

**Theorem 3** (Whitney). For any graph $G$: $\varkappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.

**Theorem 4** (Chartrand). For a connected graph $G$: if $\delta(G) \geq \lfloor |V|/2 \rfloor$, then $\lambda(G) = \delta(G)$.

**Theorem 5** (Menger). For any pair of non-adjacent vertices $u$ and $v$ in an undirected graph, the size of the minimum *vertex cut* is equal to the maximum number of pairwise *internally vertex-disjoint paths* from $u$ to $v$.

**Theorem 6** (Harary). Every block of a block graph[6] is a clique.

**1)**

Theorem 1 (Triangle Inequality) For any connected graph $G = (V, E)$:

$$\forall x, y, z \in V: \mathrm{dist}(x, y) + \mathrm{dist}(y, z) \geq \mathrm{dist}(x, z)$$

• Докажем от противного:

Пусть $\mathrm{dist}(x, y) + \mathrm{dist}(y, z) < \mathrm{dist}(x, z)$ $(*)$

$\mathrm{dist}(x, z)$ – длина кратчайшего пути из $x$ в $z$ по определению, значит $(\mathrm{dist}(x,y) + \mathrm{dist}(y,z))$ не может быть меньше, чем $\mathrm{dist}(x, z)$, т.к. $x \rightsquigarrow y + y \rightsquigarrow z$ это "есть" путь $x \rightsquigarrow z$

т.о. $\mathrm{dist}(x,z) \leq \mathrm{dist}(x,y) + \mathrm{dist}(y,z)$

Что противоречит предположению $(*)$.

Значит $\mathrm{dist}(x, y) + \mathrm{dist}(y, z) \geq \mathrm{dist}(x, z)$.

ч.т.д.

**2)**

**Theorem 2** (Tree) A connected graph $G=(V,E)$ is a tree (i.e. acyclic graph) iff $|E| = |V| - 1$.

• 1) $\exists$ $G$ is a tree (i.e. acyclic graph)

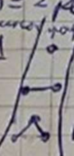
доказать: $|E|=|V|-1$.

Докажем методом мат. индукции: или $n=3$

База индукции: в связном граф с $n=1$ или $n=2$ кол-во рёбер ровно $n-1$;

$M = n$ – кол-во вершин в графе.

(И каждый раз добавляется ровно одно ребро.)

| кол-во вершин | граф | $\|E\|$ |
|---|---|---|
| $n=1$ |  | $n-1=0$ |
| $n=2$ | | $n-1=1$ |
| $n=3$ | | $n-1=2$ |

Индукционный переход:

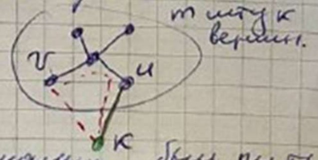
$\exists$ $n=m$, $|E|=m-1$

Тогда для $n=m+1$:

Добавим одну вершину и ребра, ведущие к ней так, чтобы граф остался связным и всё ещё был деревом (т.е. ацикличным). Получается, что больше одного ребра мы добавить не можем, так как при этом образуется цикл:

добавим вершину $k$ и ребро $(u,k)$,

tree →




если добавим ребро $(v,k)$, то (графе) появится цикл, т.к. в дереве изначально был путь $v \rightsquigarrow u$ (т.к. граф связный), тогда в $k$ ведут два пути:

1) $v \rightsquigarrow k = (v,k)$

2) $v \rightsquigarrow u + (u,k)$

Таким образом при добавлении одной вершины мы добавляем только одно ребро. (ребро не добавить мы не можем, т.к. тогда граф станет не связным).

$n=m+1$: $|E|=(m-1)+1=m=n-1$, т.е. условие выполнено.

Значит по принципу мат. индукции $|E|=n-1$ выполняется для любого ацикличного связного графа (с любым кол-вом вершин $n$)

Т.е. $|E|=|V|-1$.

Ч.т.д.

2) Пусть $G$ - связный граф, в котором $|E|=|V|-1$. ($|V|=n$ - кол-во вершин)

Докажем методом мат. индукции:

База индукции: при $n=1$, $n=2$ и $n=3$ связный граф $G$ является ацикличным:

| $\lvert V\rvert$ | граф | ациклич-но |
|---|---|---|
| $n=1$ | • | да |
| $n=2$ | •—• | да |
| $n=3$ | •—•—• | да |
| | $G$ | |

Инд. переход: Пусть $n=m$, $|E|=m-1$ и граф $G$ ацикличен.

Тогда для $n=m+1$: (добавляем вершину)

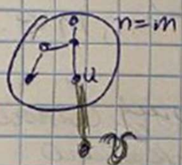
по условию $|E|=n-1=(m+1)-1=m=(m-1)+1$

Т.е. можно добавить только одно ребро,

при этом граф должен по условию быть (остаться) связным.

Соединим любую вершину графа с $n=m$ с новой (одним ребром).

Новый Граф будет ацикличным, т.к. мы соединили изначальный ацикличный граф (с $n=m$) с новой вершиной всего одним ребром.




Значит по принципу мат. индукции любой связный граф с любым кол-вом вершин $n$ такой, что $|E|=|V|-1$ будет ацикличным.
$(|E| = n-1)$

ч.т.д.

Т.о. теорема доказана в одну и в другую сторону.

#

**3)**

**Theorem** (Chartrand) For any graph $G$:
$$\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$$
$\kappa(G)$ - вершинная связность - наим-ее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу
$\lambda(G)$ - рёберная св-ть - наим-ее кол-во рёбер, удаление которых приводят к несвязному или тривиальному графу.
$\delta(G)$ - минимальная степень вершины графа $G$.

1) Докажем, что $\lambda(G) \le \delta(G)$

1. Если в графе $G$ нет рёбер, то $\lambda = 0$, $\delta = 0$, равенство выполняется

2. В графе $G$ есть рёбра, тогда найдём вершину $v$, для которой $\deg v = \delta(G)$.
Чтобы получить несвязный граф (или ...) необходимо удалить как максимум все рёбра, инцидентные вершине $v$, а таких рёбер не больше, чем $\deg v$,
т.е. $\lambda(G) \le \delta(G)$ #

2) Докажем, что $\kappa(G) \le \lambda(G)$

Пусть $E'$ - минимальное мн-во рёбер, которые надо удалить, чтобы получить несвязный (или тривиальный граф), $|E'| = \lambda(G)$

Тогда для получения несвязного (или тривиального) графа достаточно удалить по одной вершине, инцидентной ребру из $E'$ (для каждого ребра) (вершины могут повторяться)

А таких вершин в худшем случае $|E'|$.$^{(*)}$
Однако в графе $G$ могут существовать рёбра из $E'$, которые инцидентны одной вершине (т.е. при удалении одной этой вершины происходит удаление вершины, инцидентной и тому и тому ребру), т.е. ~~кол-во~~ достаточно удалить даже меньшее число вершин, чем $|E'|$, чтобы граф стал не связным (или тривиальным)
Т.о. $k(G) \le \lambda(G)$
Ч.т.д.

(*) Удаляя одну вершину инцидентную данному ребру исчезает и это ребро (а так же все рёбра, инцидентные данной вершине)
Т.о. достаточно ~~все~~ удалить всего одну вершину, чтобы удалились рёбра.

**4)**

Theorem 4 For a connected graph $G$:

If $\delta(G) \geq \lfloor |V|/2 \rfloor$, then $\lambda(G) = \delta(G)$.

• Выберем разрезающее мн-во ~~...~~ из $\lambda$ рёбер, делит граф на 2 ком-ты связности. Возьмём меньшую по числу вершин из этих компонент или любую, если число вершин в них одинаковое. Назовём её $L$.

$|L| \leq \frac{|V|}{2}$. Каждая вершина в $L$ ~~...~~ инцидентна с хотя бы одним ребром из разрезающего мн-ва, т.к. если это было не так, то эта вершина имела $|L|-1$ рёбер, а $|L|-1 < \frac{|V|}{2}$.

$n = |V|$

Тогда число рёбер в разрезе должно быть не меньше чем $|L| \cdot (\delta(G) - (|L|-1))$, т.е. разность степени вершины и числа рёбер, связывающих вершину с другими вершинами из $L$, и всё это домножаем на кол-во вершин ~~...~~, инцидентных с рёбрами разрезающего множества (т.е. есть $|L|$)

минимальна $\lambda = |L| \cdot (\delta(G) - |L| + 1)$

Докажем что $|L|(\delta(G) - |L| + 1) \geq \delta(G)$

от противного

$$\exists\ |L| \cdot (\delta(G) - |L| + 1) < \delta(G)$$

$$|L|\delta(G) - |L|^2 + |L| < \delta(G)$$

$$\delta(G)(|L|-1) < |L|(|L|-1)$$

$\delta(G) < |L|$ — противоречие, т.к. $|L| \leq \frac{n}{2}$, $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ (по усл.)

Тогда $|L| \cdot (\delta(G) - |L| + 1) \geq \delta(G)$

По теореме Whitney $\lambda(G) \leq \delta(G)$ } $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda(G) = \delta(G)$. ч.т.д.

5)

**Theorem 5** (Menger) For any pair of non-adjacent vertices u and v in an undirected graph, the size of the minimum vertex-cut is equal to the maximum number of pairwise internally vertex-disjoint paths from u to v.

• $m = |E|$ – ~~размер графа~~ – кол-во рёбер в графе

Докажем методом мат. индукции

Базa индукции: Все графы с $m = 0$:

для всех ~~деревьев~~ без рёбер графов теорема верна: u v

Путей между u и v нет (их 0)

the min vertex cut $= 0$, т.к. вершины не соединены.

Индукционный переход:

Предположение: Пусть теорема верна для всех ~~для~~ графов, размер которых $m < m_0 > 0$.

] G – неориентированный граф размера $|E| = m = m_0$

] u, v – non-adjacent vertices of G.

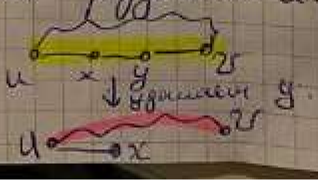
] Минимум k вершин надо удалить, чтобы „разделить" вершины u и v (k вершин в minimum vertex cut)

~~Надо доказать~~ Докажем, что maximum number of pairwise internally vertex-disjoint paths это k.

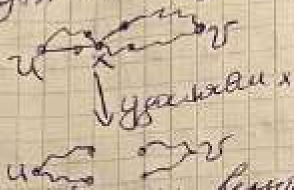
$k = 0$: 0 вершин нужно, чтобы „разделить" u и v => u и v не соединены => u v

=> 0 internally vertex disjoint paths from u to v.

$k = 1$ => 1 internally vertex disjoint path, иначе, если их 2 или больше, то удалением одной вершины на пути u⇝v не сможем разделить u и v:



При этом может быть несколько путей u-v, но они не будут internally vertex disjoint:




Т.о. теорема Менгера верна для $k=0$ и $k=1$

Далее будем считать, что $k \geq 2$

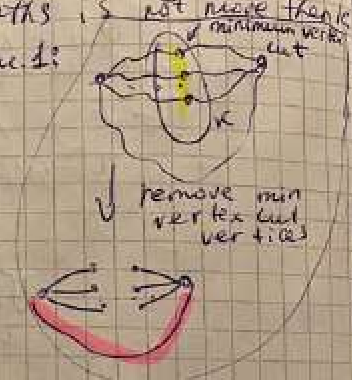
Пусть $i$ — кол-во internally vertex disjoint u-v path.

В графе $G$ не более $k$ internally vertex disjoint u-v paths: (от противного)

$\exists$ кол-во internally vertex disjoint u-v paths ($i > k$) больше $k$, тогда удаление $k$ вершин не может «разделить» вершины $u$ и $v$, (см. рис.1) что противоречит предположению $\Rightarrow$ кол-во in-y vertex disjoint u-v paths is not more than $k$

Т.е. $i \leq k$.

рис.1:




Осталось доказать, что в графе $G$ существует $k$ internally disjoint u-v paths, тогда зная, что $i \leq k$, получается, что $k$ = maximum number of internally vertex disjoint u-v paths.

1) $\exists$ minimum vertex cut $W$ в графе $G$, содержащий вершину $x$, смежную $u$ и $v$, $x \in W$, $|W| = k$


Тогда $G' = G \setminus x$ имеет размер $< m = m_0$, т.к. размер графа $G = m$ и при удалении вершины $x$ удаляются как минимум 2 ребра

$W \setminus \{x\}$ это minimum vertex cut в графе $G' = G \setminus x$

$|W - \{x\}| = k - 1$

Согласно индукционному предположению для вершин $u$ и $v$ в графе $G' = G - x$

u-v paths = maximum num. of internally vertex disjoint $= k-1 =$ minimum vertex cut (u-v)

Эти k-1 internally vertex disjoint u-v paths of G-x вместе с ~~вершиной~~ путём P = (u, x, v) составляют k internally vertex disjoint u-v paths в графе G.

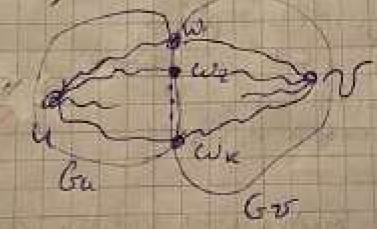
2) ∃ minimum u-v ~~sep.~~ vertex cut W в G, содерж. вершину не смежную с u и вершину не смежную с v. Они могут различаться

Пусть $W = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}$ $(|W| = k)$

Разделим граф G на 2 подграфа $G_u$ и $G_v$, таких, что $v \in G_v$, $u \in G_u$


Пусть $G_u$ – подграф G, содержащий все пути $u - \omega_i$, $\omega_i \in W$ для каждого пути

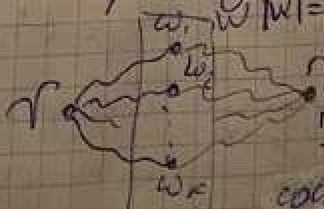
Пусть $G_v$ – подграф G, содерж. все пути $v - \omega_i$, $\omega_i \in W$.




Замечание: как только путь выходит из u и достигает граф G-v он останавливается и наоборот: нет путей $u \rightsquigarrow \omega_i - \omega_j$, $v \rightsquigarrow \omega_i - \omega_j$ $(\omega_i, \omega_j \in W)$

Пусть $G_u'$ – новый граф, ~~содержащ~~ – надграф для графа $G_u$

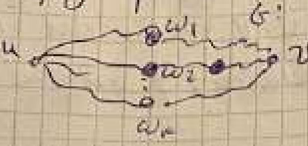
$G_u'$ включает в себя граф $G_u$, новую вершину $v'$ и рёбра от $(\omega_1, v'), (\omega_2, v'), \ldots, (\omega_k, v')$

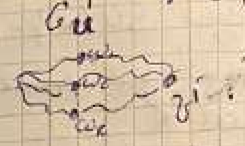



(*) размер графа $G_u' < m = m_0$, W – minimum u-v vertex cut ⟹ $\xrightarrow{\text{по инд. предполож.}}$ k = maximum number of internally vertex disjoint u-v paths в $G_u'$, пути состоят из $P_i = u \rightsquigarrow \omega_i$ и ребра $(\omega_i, v')$.

каждый из которых

($\Rightarrow$) т.к. по предположению существует вершина, не смежная с $u$ (а вершина, не смежная с $v$ для графа $G'_v$), значит размер $G$ точно больше размера $G'_u$ (и $G'_v$)




~~Возьмем в $G$ было ребра $(w_1, w_2)$, ...~~

Аналогично задаем граф $G'_v$:


$|W| = k$, $W$ – minimum vertex cut

$k$ = minimum number of internally vertex disjoint $u'-v$ paths в $G'_v$

аналогично размер $G'_v < m = m_0$

$\exists$ maximum number of $k$ internally disjoint $u'-v$ paths в $G'_v$, каждый из которых состоит из пути $Q_i = w_i \rightsquigarrow v$ и ребра $(u', w_i)$

Таким образом, $k$ путей состоящих из путей $P_i$, продолжающихся путём $Q_i$ $(1 \le i \le k)$ это и есть $k$ internally vertex disjoint paths в графе $G$.

3) Для каждого minimum $u$-$v$ ~~sep~~ vertex cut $W$ in $G$ каждая вершина из $W$ смежно либо с вершиной $v$, либо с вершиной $u$.

Пусть $P = u \rightsquigarrow v$ – shortest $u \rightsquigarrow v$ path
$P = (u, x, y, \dots, v)$


помимо $u$ и $v$ в $P$ как минимум 2 вершины, иначе не выполняется условие смежности / несмежности)

$e = (x, y)$

$G - e$: каждый minimum $u-v$ vertex cut состоит как минимум из $k-1$ вершин.

Докажем, что $k$ = maximum num of inter. ver. disj. $u-v$ paths от противного

Пусть каждый min u-v vertex cut в G-e
содержит k-1 вершин.

∃ $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{k-1}\}$ - is a minimum u-v vertex cut in G-e

Удаление x повлечет удаление e.

Тогда $S \cup \{x\}$ - min. u-v vertex cut in G.

~~Удаление вершины x~~ z ~~повлечет удаление~~
ребра e

Тогда все вершины S смежны u

Кроме того $S \cup \{v\}$ - min u-v vertex cut in G

но изначально: u-x-y

Получили противоречие.

Т.О. minimum u-v vertex cut содержит
k вершин.

размер G-e < m

Тогда по инд. предположению ∃ a maximum
of k [illegible] inter. ver. disjoint u-v
paths в G-e ⊂ G

Т.к. G не может содержать >k
inter. disj. paths, тогда

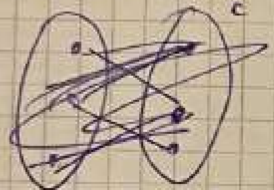
k = max. num. of inter. ver. disjoint u-v paths.

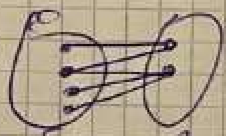
ч.т.д.

**6)**

Theorem 6 (Harary). Every block of a block graph is a clique.

• В блочном (блоковом) графе каждая вершина $v \in V$ соответствует блоку G- и $\exists$ ребро $(v,u) \in E$ тогда и только тогда, когда „блоки" v и u имеют общую вершину сочленения. Согласно определению с лекции — это двудольный граф,





то есть единственный „тип" блоков, которые могут быть в этом графе — блоки вида: •——•, что является кликой.

Т.о. Every block of a block graph is a clique.