تمرین ۶

رضا آدینه پور

402131055

سوال : برای هر یک از رشته های زیر CRC جداگانه به دست آورید .

a)
$$\begin{cases} \text{Data} = \overset{0}{1}\overset{1}{0}\overset{2}{1}\overset{3}{1}\overset{4}{1}\overset{5}{0}\overset{6}{0}\overset{7}{1} \longrightarrow D(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^7 \\ \text{Gen} = \overset{0}{1}\overset{1}{0}\overset{2}{1}\overset{3}{1} \longrightarrow G(x) = 1 + x^2 + x^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V(x) = G(x)\,D(x) = (1+x^2+x^3)\cdot(1+x^2+x^3+x^4+x^7)$$

$$= 1 + \cancel{x^2} + \cancel{x^3} + \cancel{x^4} + \cancel{x^7} + \cancel{x^2} + \cancel{x^4} + \cancel{x^5} + \cancel{x^6} + x^9 + \cancel{x^3} + \cancel{x^5} + \cancel{x^6} + \cancel{x^7} + x^{10}$$

$$= 1 + x^9 + x^{10} \longrightarrow \text{Code Word} = \overset{0}{1}\overset{1}{0}\overset{2}{0}\overset{3}{0}\overset{4}{0}\overset{5}{0}\overset{6}{0}\overset{7}{0}\overset{8}{0}\overset{9}{1}\overset{10}{1}$$

b) Data = $\overset{0\,1\,2\,3\,4\,5\,6\,7}{1110\,1110}$ $\longrightarrow$ $D(x) = 1 + x^1 + x^2 + x^4 + x^5 + x^6 + 0x^7$

Gen = $\overset{0\,1\,2\,3\,4}{0\,1\,1\,0\,1}$ $\longrightarrow$ $G(x) = x + x^2 + x^4$

$\Rightarrow V(x) = G(x) \cdot D(x) = (x + x^2 + x^4) \cdot (1 + x + x^2 + x^4 + x^5 + x^6 + 0x^7)$

$= x + x^2 + x^3 + x^5 + x^6 + x^7 + 0x^8 + x^2 + x^3 + x^4 + x^6 + x^7 + x^8 + 0x^9$

$+ x^4 + x^5 + x^6 + x^8 + x^9 + x^{10} + 0x^{11}$

$= x + x^6 + x^9 + x^{10} + 0x^{11}$ $\longrightarrow$ Code word = $\overset{0\,1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11}{0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,0}$

c) Data = 00110011 (0 1 2 3 4 5 6 7) ⟶ $D(x) = x^2 + x^3 + x^6 + x^7$

Gen = 1001 (0 1 2 3) ⟶ $G(x) = 1 + x^3$

$\Rightarrow V(x) = G(x)\,D(x) = (1+x^3)\cdot(x^2+x^3+x^6+x^7)$

$= x^2 + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + x^{10}$

$= x^2 + x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + x^{10}$ ⟶ Code Word = 00110101011 (0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10)

d) Data = 00111110 (0 1 2 3 4 5 6 7) ⟶ $D(x) = x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + 0x^7$

Gen = 10011 (0 1 2 3 4) ⟶ $G(x) = 1 + x^3 + x^4$

$\Rightarrow V(x) = G(x)\,D(x) = (1+x^3+x^4)\cdot(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+0x^7)$

$= x^2 + x^3 + x^4 + x^6 + x^{10} + 0x^{11}$ ⟶ Code Word = 00111010000 10 (0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11)

سوال ② : سوال قبل را در حالت جبانیر حل کنید.

a) Data = 10111001 ⟶ $D(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^7$

Gen = 1011 ⟶ $G(x) = 1 + x^2 + x^3$

$\Rightarrow x^{n-k}\,D(x) = x^3(1+x^2+x^3+x^4+x^7) = x^3 + x^5 + x^6 + x^7 + x^{10}$

$x^{10} + x^7 + x^6 + x^5 + x^3 \;\big|\; x^3 + x^2 + 1$

$x^{10} + x^9 + x^7$

$x^9 + x^6 + x^5 + x^3$

$x^9 + x^8 + x^6$

$x^8 + x^5 + x^3$

$x^8 + x^7 + x^5$

$x^7 + x^3$

$x^7 + x^6 + x^4$

$x^6 + x^4 + x^3$

$x^6 + x^5 + x^3$

$x^5 + x^4$

$x^5 + x^4 + x^2$

x^2

$\Rightarrow V(x) = x^{n-k}\,D(x) + R(x)$

$= x^3 + x^5 + x^6 + x^7 + x^{10} + x^2$

(0 1 2) 001 — code

(0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10) ~~00010111001~~ 10111001 — Data

b) $\begin{cases} D(x) = 1 + x^1 + x^2 + x^4 + x^5 + x^6 + 0x^7 \\ G(x) = x + x^2 + x^4 \end{cases} \Rightarrow x^{n-k} D(x) = x^4 + x^5 + x^6 + x^8 + x^9 + x^{10} + 0x^{11}$

$$0x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^4 \;\Big|\; x^4 + x^2 + x$$

$$\text{quotient: } 0x^7 + x^6 + x^5 + x + 1$$

$0x^{11} + 0x^9 + 0x^8$

$x^{10} + x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^4$

$x^{10} + x^8 + x^7$

$x^9 + x^8 + x^6 + x^5 + x^4$

$x^9 + x^7 + x^6$

$x^5 + x^4$

$x^5 + x^3 + x^2$

$x^4 + x^3 + x^3$

$x^4 + x^2 + x$

$x^3 + x \longrightarrow 0101$

$\Rightarrow$ 0101 (code) | 1110111 0 (Data)

c) $\begin{cases} D(x) = x^2 + x^3 + x^6 + x^7 \\ G(x) = 1 + x^3 \end{cases} \Rightarrow x^{n-k} D(x) = x^5 + x^6 + x^9 + x^{10}$

$$x^{10} + x^9 + x^6 + x^5 \;\Big|\; x^3 + 1$$

$$\text{quotient: } x^7 + x^6 + x^4 + x^2 + x$$

$x^{10} + x^7$

$x^9 + x^7 + x^6 + x^5$

$x^9 + x^6$

$x^7 + x^5$

$x^7 + x^4$

$x^5 + x^4$

$x^5 + x^2$

$x^4 + x^2$

$x^4 + x$

$x^2 + x \longrightarrow 011$

$\Rightarrow$ 011 (code) | 00110011 (abrde)

D) $\begin{cases} D(x) = x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + 0x^7 \\ G(x) = 1 + x^3 + x^4 \end{cases} \Rightarrow x^{n-k} D(x) = x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + 0x^{11}$

به علت کمبود جا تقسیم ها نوشته نشده است.

$\Rightarrow R(x) = x^3 + 1 \longrightarrow 1001$

CC:

1001 (code) | 00111110 (Data)

سوال ③ پ: برای هر گزینه به صورت تصادفی code word تولید را به اندازه k-1 بیت کنار هم تغییر دهید (k بالاترین درجه G(x) است) و بررسی کنید آیا روش جدا ناپذیر کشف می‌کند یا خیر؟

a) Code word : $1+x^9+x^{10} \longrightarrow$ (10)000000011 $\xrightarrow{\text{تغییر}}$ 01000000011

$G(x) = 1+x^2+x^3 \longrightarrow k=3$

$$
\begin{array}{l|l}
x^{10}+x^9+x & x^3+x^2+1 \\
x^{10}+x^9+x^7 & x^7+x^4+x^3+x^2+1 \\
\hline
x^7+x & \\
x^7+x^6+x^4 & \\
\hline
x^6+x^4+x & \\
x^6+x^5+x^3 & \\
\hline
x^5+x^4+x^3+x & \\
x^5+x^4+x^2 & \\
\hline
x^3+x^2+x & \\
x^3+x^2+1 & \\
\hline
x &
\end{array}
$$

$(x) \longrightarrow R(x) \neq 0 \longrightarrow$ پس 2 تغییر پشت هم را کشف می‌کند.

b) Code word = $x+x^6+x^9+x^{10}+0x^{11} \longrightarrow$ 010000100[110] $\xrightarrow{\text{تغییر}}$ 010000~~1~~00[001]

$G(x): x+x^2+x^4 \longrightarrow k=4$

$$
\begin{array}{l|l}
x^{11}+x^6+x & x^4+x^2+x \\
x^{11}+x^9+x^8 & x^7+x^5+x^4+x^3+x^2 \\
\hline
x^9+x^8+x^6+x & \\
x^9+x^7+x^6 & \\
\hline
x^8+x^7+x & \\
x^8+x^6+x^5 & \\
\hline
x^7+x^6+x^5+x & \\
x^7+x^5+x^4 & \\
\hline
x^6+x^4+x & \\
x^6+x^4+x^3 & \\
\hline
x^3+x &
\end{array}
$$

$(x^3+x) \longrightarrow R \neq 0 \longrightarrow$ کشف می‌کند

c) Code word = ~~$x+x^3+x^4+x^5+x^6+0x^7$~~ $x^2+x^3+x^6+x^7 \longrightarrow$ 00[11]0011 $\xrightarrow{\text{تغییر}}$ 00000011

$G(x) =$ ~~$1+x^3+x^4$~~ $1+x^3 \longrightarrow k=$ ~~4~~ 3

$$
\begin{array}{l|l}
x^7+x^6 & x^3+1 \\
x^7+x^4 & x^4+x^3+x+1 \\
\hline
x^6+x^4 & \\
x^6+x^3 & \\
\hline
x^4+x^3 & \\
x^4+x & \\
\hline
x^3+x & \\
x^3+1 & \\
\hline
x &
\end{array}
$$

$(x) \longrightarrow R(x) \neq 0 \longrightarrow$ کشف می‌شود

d) $\begin{cases} \text{Code word} = x^2 + x^3 + x^4 + x^6 + x^{10} + 0x^{11} \longrightarrow 001110100\boxed{010} \xrightarrow{\text{تغییر}} 001110100\boxed{101} \\ G(x) = 1 + x^3 + x^4 \longrightarrow k = 4 \end{cases}$

(bit positions above the changed word: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11)

$$x^{11} + x^9 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 \quad \Big| \quad \frac{x^4 + x^3 + 1}{x^7 + x^6 + x^3 + x^2 + x}$$

$$x^{11} + x^{10} + x^7$$

$$x^{10} + x^9 + x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2$$

$$x^{10} + x^9 + x^6$$

$$x^7 + x^4 + x^3 + x^2$$

$$x^7 + x^6 + x^3$$

$$x^6 + x^4 + x^2$$

$$x^6 + x^5 + x^2$$

$$x^5 + x^4$$

$$x^5 + x^4 + x$$

$\boxed{x} \longrightarrow R(x) \neq 0 \longrightarrow$ پس کشف شد.

سوال ④ : سوال ③ را برای جداپذیر حل کنید .

a) Code word $= \underbrace{x^2}_{code} + \underbrace{x^3 + x^5 + x^6 + x^7 + x^{10}}_{Data} \Rightarrow \underbrace{001}_{code}\ \underbrace{10111001}_{Data}$

$G(x) = 1 + x^2 + x^3 \longrightarrow K=3 \longrightarrow x^8, x^9$ را تغییر می دهیم : $001\ 10111111$

$\Rightarrow x^2 + x^3 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} \Rightarrow$

$x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 \div (x^3 + x^2 + 1) = x^7 + x^5 + x^4 + x$

$x^{10} + x^9 + x^7$

$x^8 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2$

$x^8 + x^7 + x^5$

$x^7 + x^6 + x^3 + x^2$

$x^7 + x^6 + x^4$

$x^4 + x^3 + x^2$

$x^4 + x^3 + x$

$x^2 + x \longrightarrow R(x) \neq 0 \longrightarrow$ تغییر 2 بیت را نشان هم را پیدا می کند

b) Code Word $= \underbrace{x^3 + x}_{code} + \underbrace{1 + x + x^2 + x^4 + x^5 + x^6 + 0x^7}_{Data}$

Code Word $= \underbrace{0101}_{code}\ 1110\ 1110 \xrightarrow{\text{تغییر } 9, 10, 11} 0101\ 11101001$

$G(x) = x + x^2 + x^4 \longrightarrow K=4$

$x^{11} + x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x \div (x^4 + x^2 + x) = x^7 + x^5 + x^3 + x$

$x^{11} + x^9 + x^8$

$x^9 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x$

$x^9 + x^7 + x^6$

$x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + x$

$x^7 + x^5 + x^4$

$x^3 + x$

$x^5 + x^3 + x^2$

$x^5 + x^2 + x \longrightarrow R(x) \neq 0 \longrightarrow$ قابل کشف است

c) Code Word = $\underbrace{x^2+x}_{\text{Code}} + \underbrace{x^2+x^3+x^6+x^7}_{\text{Data}}$

→ 011 00 11 00 11 (Code: 011, Data: 00 11 00 11) — تغییر → 011 11 11 00 11

$G(x) = 1+x^3$ → $K=3$

$$\frac{x^{10}+x^9+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x^1}{x^7+x^6+x^4+x^2+1} \quad \text{remainder } x+1$$

$R(x) \neq 0$ → کنترل کند.

D) Code Word = $\underbrace{1+x^3}_{\text{Code}} + \underbrace{x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+0x^7}_{\text{Data}}$

→ 1001 (Code) 00111 110 (Data) — تغییر → 1001 00111 001

$G(x) = 1+x^3+x^4$ → $K=4$

$$\frac{x^{11}+x^8+x^7+x^6+x^3+1}{x^7+x^6+x^5+x+1} \quad \text{remainder } x^1$$

$R(x) \neq 0$ → کنترل کند.

سوال ⑤ : مدار تقسیم بر $G(x)$ در حالت کلی چه شکلی می‌شود؟

$$G(x) = g_0 + g_1 x^1 + g_2 x^2 + \cdots + g_K x^K$$

$$1 + G(x) = 1 + g_0 + g_1 x^1 + g_2 x^2 + \cdots g_K x^K$$