# การวิเคราะห์จลนศาสตร์ขาหุ่นยนต์ (กลไก 5-Bar Linkage แบบมี Offset)

นายธีรโชติ เมืองจำนงค์

17 พฤศจิกายน พ.ศ. 2568

## 1 พารามิเตอร์ทางจลนศาสตร์

เอกสารนี้สรุปพารามิเตอร์และการคำนวณสำหรับกลไกขาหุ่นยนต์แบบ 5-Bar Parallel Linkage

**ภาพรวม:** กลไก 5-Bar Parallel Linkage คือระบบแขนกลที่ประกอบด้วย:

- แขนต่อ 4 แท่ง (4 links): AC, BD, CE, DE
- ข้อต่อ 5 จุด: A, B, C, D, E
- มอเตอร์ควบคุม 2 ตัว ที่จุด A และ B
- ปลายเท้า (End-effector) ที่จุด F ซึ่งยื่นออกจากจุด E

กลไกนี้ใช้ในการควบคุมตำแหน่งปลายเท้าของหุ่นยนต์โดยการปรับมุมมอเตอร์ทั้งสอง

### 1.1 ระบบพิกัด

*คำอธิบาย:* เราใช้ระบบพิกัด Cartesian 2D โดยตั้งจุดกำเนิดไว้กึ่งกลางระหว่างมอเตอร์ทั้งสอง เพื่อให้ระบบสมมาตรและสะดวกต่อการคำนวณ

- **จุดกำเนิด:** $(0, 0)$ - กึ่งกลางระหว่างมอเตอร์
- **แกน X:** แนวนอน (ขวาเป็นบวก)
- **แกน Y:** แนวตั้ง (ขึ้นเป็นบวก)
- **จุด A (มอเตอร์ซ้าย):** $\mathrm{P}_A = (-42.5, 0)$ mm
- **จุด B (มอเตอร์ขวา):** $\mathrm{P}_B = (42.5, 0)$ mm
- **ระยะห่างมอเตอร์:** $|AB| = 85$ mm

### 1.2 ความยาวของแขนต่อ (Link Lengths)

*คำอธิบาย:* กลไก 5-Bar Linkage ประกอบด้วยแขนต่อ 4 แท่ง ออกแบบแบบสมมาตรเพื่อความเสถียรและควบคุมง่าย

**ชั้นบน (Upper Links)** - ต่อจากมอเตอร์ไปยังข้อเข่า:

- **Link AC (ซ้าย):** $L_1 = L_{AC} = 105$ mm
- **Link BD (ขวา):** $L_2 = L_{BD} = 105$ mm

**ชั้นล่าง (Lower Links)** - ต่อจากข้อเข่าไปยังจุด E:

- **Link CE (ซ้าย):** $L_3 = L_{CE} = 145$ mm
- **Link DE (ขวา):** $L_4 = L_{DE} = 145$ mm

*หมายเหตุ:* $L_1 = L_2$ และ $L_3 = L_4$ เพื่อความสมมาตร

### 1.3 End-Effector (ปลายเท้า)

*คำอธิบาย:* ปลายเท้าของหุ่นยนต์มี 2 จุดสำคัญ:

**จุด E** - จุดตัดของแขนล่างทั้งสอง (CE และ DE):

- เป็นจุดที่แขนล่างทั้งสองมาบรรจบกัน
- ใช้ในการคำนวณทางคณิตศาสตร์
- ต้องอยู่ภายใน Workspace ที่เป็นไปได้

**จุด F** - ปลายเท้าจริง (Actual End-Effector):

- ยื่นออกจากจุด E ตามแนวเส้นตรง DE
- ระยะ Offset: $L_{EF} = 40$ mm
- เพิ่มพื้นที่การทำงาน (Workspace) ของหุ่นยนต์

**เงื่อนไขสำคัญ:** จุด D, E, F ต้องอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน (collinear) เสมอ

- **จุดคำนวณ:** จุด E
- **ปลายเท้าจริง:** จุด F
- **ระยะออฟเซ็ต (EF):** $L_{EF} = 40$ mm
- **เงื่อนไข:** จุด **D, E, F** อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน (collinear)

## 2 การหา Forward Kinematics (FK)

วัตถุประสงค์: หาพิกัดของปลายเท้า $\mathrm{P}_F(x_f, y_f)$ จากมุมมอเตอร์ $\theta_A$ และ $\theta_B$

**Forward Kinematics (FK)** คือการคำนวณหาตำแหน่งปลายเท้าเมื่อเรารู้มุมของมอเตอร์ทั้งสอง เช่น ถ้ามอเตอร์ A หมุน 30 องศา และมอเตอร์ B หมุน 45 องศา ปลายเท้าจะอยู่ที่ไหน? นี่คือปัญหาพื้นฐานในการควบคุมหุ่นยนต์

## 2.1 ขั้นตอนที่ 1: พิกัดของข้อเข่า ($P_C, P_D$)

*วิธีการ:* คำนวณตำแหน่งข้อเข่าทั้งสองข้าง (จุด C และ D) จากมุมมอเตอร์โดยใช้ตรีโกณมิติ
**มุมมอเตอร์:**

- $\theta_A$ - มุมของมอเตอร์ซ้าย (จุด A) วัดจากแกน X+
- $\theta_B$ - มุมของมอเตอร์ขวา (จุด B) วัดจากแกน X+
- ทิศทางบวก: หมุนทวนเข็มนาฬิกา (CCW)

**สมการคำนวณ:**

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}_A &= (-42.5, 0) \\
\mathsf{P}_B &= (42.5, 0) \\
\mathsf{P}_C &= \mathsf{P}_A + L_1 \begin{bmatrix} \cos\theta_A \\ \sin\theta_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -42.5 + 105\cos\theta_A \\ 105\sin\theta_A \end{bmatrix} \\
\mathsf{P}_D &= \mathsf{P}_B + L_2 \begin{bmatrix} \cos\theta_B \\ \sin\theta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42.5 + 105\cos\theta_B \\ 105\sin\theta_B \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

## 2.2 ขั้นตอนที่ 2: จุดตัดแขนล่าง ($P_E$)

*วิธีการ:* หาจุด E โดยการหาจุดตัดของวงกลมสองวง (Circle-Circle Intersection)
**วงกลมที่ 1:** ศูนย์กลางที่ $\mathsf{P}_C$, รัศมี $L_3 = 145$ mm

$$|\mathsf{P}_E - \mathsf{P}_C| = L_{CE} = 145 \tag{1}$$

**วงกลมที่ 2:** ศูนย์กลางที่ $\mathsf{P}_D$, รัศมี $L_4 = 145$ mm

$$|\mathsf{P}_E - \mathsf{P}_D| = L_{DE} = 145 \tag{2}$$

**ระบบสมการ:**

$$
\begin{aligned}
(x_e - x_c)^2 + (y_e - y_c)^2 = L_3^2 = 145^2 \\
(x_e - x_d)^2 + (y_e - y_d)^2 = L_4^2 = 145^2
\end{aligned}
$$

*หมายเหตุ:*

- การตัดกันของวงกลมให้จุดตัด 2 จุด (Elbow Up/Down)
- เราเลือกจุดที่ $y_e$ น้อยกว่า (Elbow Down Configuration)
- ต้องแก้ระบบสมการนี้โดยใช้วิธี Geometric Method

## 2.3 ขั้นตอนที่ 3: จุดปลายเท้า ($P_F$)

*วิธีการ:* คำนวณตำแหน่งปลายเท้าจริง (จุด F) ซึ่งยื่นออกจากจุด E ตามแนวเส้นตรง DE
**เงื่อนไข:**

- จุด D, E, F อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน (collinear)

- ระยะ $|EF| = L_{EF} = 40$ mm
- ทิศทางจาก D ไป E ต่อไปยัง F

**การคำนวณ:** หาทิศทางจาก D ไป E (เวกเตอร์หนึ่งหน่วย) แล้วเลื่อนจุด E ไปตามทิศทางนั้น 40 mm เนื่องจาก $D, E, F$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน:

$$\vec{V}_{DE} = \mathsf{P}_E - \mathsf{P}_D$$
$$\vec{u}_{DE} = \frac{\vec{V}_{DE}}{\|\vec{V}_{DE}\|} = \frac{\mathsf{P}_E - \mathsf{P}_D}{145}$$
$$\vec{V}_{EF} = 40 \cdot \vec{u}_{DE} = \frac{40}{145}(\mathsf{P}_E - \mathsf{P}_D) = \frac{8}{29}(\mathsf{P}_E - \mathsf{P}_D)$$

พิกัดของ $\mathsf{P}_F$ คือ:

$$\mathsf{P}_F = \mathsf{P}_E + \vec{V}_{EF}$$
$$\mathsf{P}_F = \mathsf{P}_E + \frac{8}{29}(\mathsf{P}_E - \mathsf{P}_D)$$
$$\mathsf{P}_F = \left(1 + \frac{8}{29}\right)\mathsf{P}_E - \frac{8}{29}\mathsf{P}_D$$

**สมการ FK สุดท้าย:**

$$\mathsf{P}_F = \frac{37}{29}\mathsf{P}_E - \frac{8}{29}\mathsf{P}_D$$

หรือ:

$$x_f = \frac{37}{29}x_e - \frac{8}{29}x_d$$
$$y_f = \frac{37}{29}y_e - \frac{8}{29}y_d$$

# 3 การหา Jacobian ($J_F$)

วัตถุประสงค์: หาเมทริกซ์ $\mathsf{J}_F$ ที่เชื่อมความสัมพันธ์ $\mathsf{v}_F = \mathsf{J}_F\dot{\mathsf{q}}$ โดยที่ $\mathsf{v}_F = [\dot{x}_f, \dot{y}_f]^T$ และ $\dot{\mathsf{q}} = [\dot{\theta}_A, \dot{\theta}_B]^T$

**Jacobian Matrix** คือเครื่องมือสำคัญที่บอกว่า "ถ้าเราหมุนมอเตอร์เร็วขนาดนี้ ปลายเท้าจะเคลื่อนที่เร็วแค่ไหน-ในแต่ละทิศทาง" ใช้ในการควบคุมความเร็ว การวางแผนเส้นทาง และการคำนวณแรงกด

*หลักการ:* Jacobian เป็นเมทริกซ์ที่แปลงความเร็วเชิงมุมของมอเตอร์ $(\dot{\theta}_A, \dot{\theta}_B)$ ให้เป็นความเร็วเชิงเส้นของปลาย-เท้า $(\dot{x}_f, \dot{y}_f)$

## 3.1 ความสัมพันธ์ของความเร็ว

หาอนุพันธ์ของสมการ FK สำหรับ $\mathsf{P}_F$ เทียบกับเวลา:

$$\mathsf{v}_F = \frac{d\mathsf{P}_F}{dt} = \frac{37}{29}\frac{d\mathsf{P}_E}{dt} - \frac{8}{29}\frac{d\mathsf{P}_D}{dt}$$

$$\mathsf{v}_F = \frac{37}{29}\mathsf{v}_E - \frac{8}{29}\mathsf{v}_D$$

เราต้องหา $\mathsf{v}_E = \mathsf{J}_E\dot{\mathsf{q}}$ และ $\mathsf{v}_D = \mathsf{J}_D\dot{\mathsf{q}}$

## 3.2 Jacobian ของจุด D ($J_D$)

*คำอธิบาย:* จุด D เชื่อมโดยตรงกับมอเตอร์ B เท่านั้น (คอลัมน์แรกเป็น 0) ดังนั้น Jacobian จะบอกว่าการหมุนมอเตอร์ B จะทำให้จุด D เคลื่อนที่อย่างไร

จาก $\mathsf{P}_D = (42.5 + 105\cos\theta_B, 105\sin\theta_B)$:

$$\mathsf{v}_D = \begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{y}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_d}{\partial \theta_A} & \frac{\partial x_d}{\partial \theta_B} \\ \frac{\partial y_d}{\partial \theta_A} & \frac{\partial y_d}{\partial \theta_B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_A \\ \dot{\theta}_B \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{J}_D = \begin{bmatrix} 0 & -105\sin\theta_B \\ 0 & 105\cos\theta_B \end{bmatrix}$$

## 3.3 Jacobian ของจุด E ($J_E$)

*คำอธิบาย:* จุด E ซับซ้อนกว่าเพราะได้รับผลกระทบจากมอเตอร์ทั้งสองตัว ต้องใช้ implicit differentiation ของสมการวงกลมเพื่อหาว่าเมื่อข้อเข่า C และ D เคลื่อนที่ จุด E จะเคลื่อนที่อย่างไร

$\mathsf{J}_E$ ได้มาจากการหาอนุพันธ์โดยนัย (implicit differentiation) ของสมการวงกลมในหัวข้อ 2.2 ซึ่งได้ผลลัพธ์ในรูปแบบ $\mathsf{Av}_E = \mathsf{B}\dot{\mathsf{q}}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_e - x_c & y_e - y_c \\ x_e - x_d & y_e - y_d \end{bmatrix}}_{\mathsf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \end{bmatrix}}_{\mathsf{v}_E} = \underbrace{\begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}}_{\mathsf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}_A \\ \dot{\theta}_B \end{bmatrix}}_{\dot{\mathsf{q}}}$$

โดยที่:

$$B_{11} = 105[(y_e - y_c)\cos\theta_A - (x_e - x_c)\sin\theta_A]$$
$$B_{22} = 105[(y_e - y_d)\cos\theta_B - (x_e - x_d)\sin\theta_B]$$

ดังนั้น $\mathsf{J}_E = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{B}$

## 3.4 Jacobian สุดท้าย ($J_F$)

*คำอธิบาย:* เมื่อเรามี Jacobian ของจุด E และ D แล้ว เราสามารถรวมกันเพื่อหา Jacobian ของจุด F (ปลายเท้าจริง) โดยใช้สูตรที่เราหาได้ว่า $\mathsf{P}_F = \frac{37}{29}\mathsf{P}_E - \frac{8}{29}\mathsf{P}_D$ นำมาหาอนุพันธ์ตามเวลา

แทนค่า $\mathsf{J}_E$ และ $\mathsf{J}_D$ กลับเข้าไปในสมการ $\mathsf{v}_F$:

$$\mathsf{v}_F = \frac{37}{29}(\mathsf{J}_E\dot{\mathsf{q}}) - \frac{8}{29}(\mathsf{J}_D\dot{\mathsf{q}})$$
$$\mathsf{v}_F = \left(\frac{37}{29}\mathsf{J}_E - \frac{8}{29}\mathsf{J}_D\right)\dot{\mathsf{q}}$$

**Jacobian สุดท้าย:**

$$\mathsf{J}_F = \frac{1}{29}(37\mathsf{J}_E - 8\mathsf{J}_D)$$