

# การวิเคราะห์จลนศาสตร์ขาหุ่นยนต์ (กลไก 5-Bar Linkage แบบมี Offset)

นายธีรโชติ เมืองจำนงค์

17 พฤศจิกายน พ.ศ. 2568

## 1 พารามิเตอร์ทางจลนศาสตร์

เอกสารนี้สรุปพารามิเตอร์และการคำนวณสำหรับกลไกขาหุ่นยนต์แบบ 5-Bar Parallel Linkage

**ภาพรวม:** กลไก 5-Bar Parallel Linkage คือระบบแขนกลที่ประกอบด้วย:

- แขนต่อ 4 แท่ง (4 links): AC, BD, CE, DE
- ข้อต่อ 5 จุด: A, B, C, D, E
- มอเตอร์ควบคุม 2 ตัว ที่จุด A และ B
- ปลายเท้า (End-effector) ที่จุด F ซึ่งยื่นออกจากจุด E

กลไกนี้ใช้ในการควบคุมตำแหน่งปลายเท้าของหุ่นยนต์โดยการปรับมุมมอเตอร์ทั้งสอง

### 1.1 ระบบพิกัด

**คำอธิบาย:** เราใช้ระบบพิกัด Cartesian 2D โดยตั้งจุดกำเนิดไว้กึ่งกลางระหว่างมอเตอร์ทั้งสอง เพื่อให้ระบบสมมาตรและสะดวกต่อการคำนวณ

- จุดกำเนิด:  $(0, 0)$  - กึ่งกลางระหว่างมอเตอร์
- แกน X: แนวนอน (ขวาเป็นบวก)
- แกน Y: แนวตั้ง (ขึ้นเป็นบวก)
- จุด A (มอเตอร์ซ้าย):  $P_A = (-42.5, 0)$  mm
- จุด B (มอเตอร์ขวา):  $P_B = (42.5, 0)$  mm
- ระยะห่างมอเตอร์:  $|AB| = 85$  mm

## 1.2 ความยาวของแขนต่อ (Link Lengths)

คำอธิบาย: กลไก 5-Bar Linkage ประกอบด้วยแขนต่อ 4 แท่ง ออกแบบแบบสมมาตรเพื่อความเสถียรและควบคุมง่าย

ชั้นบน (Upper Links) - ต่อจากมอเตอร์ไปยังข้อเข้า:

- Link AC (ซ้าย):  $L_1 = L_{AC} = 105 \text{ mm}$
- Link BD (ขวา):  $L_2 = L_{BD} = 105 \text{ mm}$

ชั้นล่าง (Lower Links) - ต่อจากข้อเข้าไปยังจุด E:

- Link CE (ซ้าย):  $L_3 = L_{CE} = 145 \text{ mm}$
- Link DE (ขวา):  $L_4 = L_{DE} = 145 \text{ mm}$

หมายเหตุ:  $L_1 = L_2$  และ  $L_3 = L_4$  เพื่อความสมมาตร

## 1.3 End-Effector (ปลายเท้า)

คำอธิบาย: ปลายเท้าของหุ่นยนต์มี 2 จุดสำคัญ:

จุด E - จุดตัดของแขนล่างทั้งสอง (CE และ DE):

- เป็นจุดที่แขนล่างทั้งสองมาบรรจบกัน
- ใช้ในการคำนวณทางคณิตศาสตร์
- ต้องอยู่ภายใน Workspace ที่เป็นไปได้

จุด F - ปลายเท้าจริง (Actual End-Effector):

- ยื่นออกจากจุด E ตามแนวเส้นตรง DE
- ระยะ Offset:  $L_{EF} = 40 \text{ mm}$
- เพิ่มพื้นที่การทำงาน (Workspace) ของหุ่นยนต์

เงื่อนไขสำคัญ: จุด D, E, F ต้องอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน (collinear) เสมอ

- จุดคำนวณ: จุด E
- ปลายเท้าจริง: จุด F
- ระยะออฟเซต (EF):  $L_{EF} = 40 \text{ mm}$
- เงื่อนไข: จุด D, E, F อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน (collinear)

## 2 การหา Forward Kinematics (FK)

วัตถุประสงค์: หาพิกัดของปลายเท้า  $P_F(x_f, y_f)$  จากมุมมอเตอร์  $\theta_A$  และ  $\theta_B$

Forward Kinematics (FK) คือการคำนวณหาตำแหน่งปลายเท้าเมื่อเรารู้มุมของมอเตอร์ทั้งสอง เช่น ถ้ามอเตอร์ A หมุน 30 องศา และมอเตอร์ B หมุน 45 องศา ปลายเท้าจะอยู่ที่ไหน? นี่คือการหาพื้นฐานในการควบคุมหุ่นยนต์

## 2.1 ขั้นตอนที่ 1: พิกัดของข้อเข้า ( $P_C, P_D$ )

วิธีการ: คำนวณตำแหน่งข้อเข้าทั้งสองข้าง (จุด C และ D) จากมุมมอเตอร์โดยใช้ตรีโกณมิติ มุมมอเตอร์:

- $\theta_A$  - มุมของมอเตอร์ซ้าย (จุด A) วัดจากแกน X+
- $\theta_B$  - มุมของมอเตอร์ขวา (จุด B) วัดจากแกน X+
- ทิศทางบวก: หมุนทวนเข็มนาฬิกา (CCW)

สมการคำนวณ:

$$P_A = (-42.5, 0)$$

$$P_B = (42.5, 0)$$

$$P_C = P_A + L_1 \begin{bmatrix} \cos \theta_A \\ \sin \theta_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -42.5 + 105 \cos \theta_A \\ 105 \sin \theta_A \end{bmatrix}$$

$$P_D = P_B + L_2 \begin{bmatrix} \cos \theta_B \\ \sin \theta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42.5 + 105 \cos \theta_B \\ 105 \sin \theta_B \end{bmatrix}$$

## 2.2 ขั้นตอนที่ 2: จุดตัดแขนล่าง ( $P_E$ )

วิธีการ: หาจุด E โดยการหาจุดตัดของวงกลมสองวง (Circle-Circle Intersection)

วงกลมที่ 1: ศูนย์กลางที่  $P_C$ , รัศมี  $L_3 = 145$  mm

$$|P_E - P_C| = L_{CE} = 145 \quad (1)$$

วงกลมที่ 2: ศูนย์กลางที่  $P_D$ , รัศมี  $L_4 = 145$  mm

$$|P_E - P_D| = L_{DE} = 145 \quad (2)$$

ระบบสมการ:

$$(x_e - x_c)^2 + (y_e - y_c)^2 = L_3^2 = 145^2$$

$$(x_e - x_d)^2 + (y_e - y_d)^2 = L_4^2 = 145^2$$

หมายเหตุ:

- การตัดกันของวงกลมให้จุดตัด 2 จุด (Elbow Up/Down)
- เราเลือกจุดที่  $y_e$  น้อยกว่า (Elbow Down Configuration)
- ต้องแก้ระบบสมการนี้โดยใช้วิธี Geometric Method

## 2.3 ขั้นตอนที่ 3: จุดปลายเท้า ( $P_F$ )

วิธีการ: คำนวณตำแหน่งปลายเท้าจริง (จุด F) ซึ่งยื่นออกจากจุด E ตามแนวเส้นตรง DE เื่อนไข:

- จุด D, E, F อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน (collinear)

- ระยะ  $|EF| = L_{EF} = 40 \text{ mm}$
- ทิศทางจาก D ไป E ต่อไปยัง F

การคำนวณ: หาทิศทางจาก D ไป E (เวกเตอร์หนึ่งหน่วย) แล้วเลื่อนจุด E ไปตามทิศทางนั้น 40 mm เนื่องจาก  $D, E, F$  อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน:

$$\begin{aligned}\vec{V}_{DE} &= \mathbf{P}_E - \mathbf{P}_D \\ \vec{u}_{DE} &= \frac{\vec{V}_{DE}}{\|\vec{V}_{DE}\|} = \frac{\mathbf{P}_E - \mathbf{P}_D}{145} \\ \vec{V}_{EF} &= 40 \cdot \vec{u}_{DE} = \frac{40}{145}(\mathbf{P}_E - \mathbf{P}_D) = \frac{8}{29}(\mathbf{P}_E - \mathbf{P}_D)\end{aligned}$$

พิกัดของ  $\mathbf{P}_F$  คือ:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_F &= \mathbf{P}_E + \vec{V}_{EF} \\ \mathbf{P}_F &= \mathbf{P}_E + \frac{8}{29}(\mathbf{P}_E - \mathbf{P}_D) \\ \mathbf{P}_F &= \left(1 + \frac{8}{29}\right) \mathbf{P}_E - \frac{8}{29} \mathbf{P}_D\end{aligned}$$

สมการ FK สุดท้าย:

$$\mathbf{P}_F = \frac{37}{29} \mathbf{P}_E - \frac{8}{29} \mathbf{P}_D$$

หรือ:

$$\begin{aligned}x_f &= \frac{37}{29}x_e - \frac{8}{29}x_d \\ y_f &= \frac{37}{29}y_e - \frac{8}{29}y_d\end{aligned}$$

### 3 การหา Jacobian ( $J_F$ )

วัตถุประสงค์: หาเมทริกซ์  $J_F$  ที่เชื่อมความสัมพันธ์  $\mathbf{v}_F = J_F \dot{\mathbf{q}}$  โดยที่  $\mathbf{v}_F = [\dot{x}_f, \dot{y}_f]^T$  และ  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{\theta}_A, \dot{\theta}_B]^T$

Jacobian Matrix คือเครื่องมือสำคัญที่บอกว่า "ถ้าเราหมุนมอเตอร์เร็วขนาดนี้ ปลายเท้าจะเคลื่อนที่เร็วแค่ไหนในแต่ละทิศทาง" ใช้ในการควบคุมความเร็ว การวางแผนเส้นทาง และการคำนวณแรงกด

หลักการ: Jacobian เป็นเมทริกซ์ที่แปลงความเร็วเชิงมุมของมอเตอร์ ( $\dot{\theta}_A, \dot{\theta}_B$ ) ให้เป็นความเร็วเชิงเส้นของปลายเท้า ( $\dot{x}_f, \dot{y}_f$ )

#### 3.1 ความสัมพันธ์ของความเร็ว

หาอนุพันธ์ของสมการ FK สำหรับ  $\mathbf{P}_F$  เทียบกับเวลา:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_F &= \frac{d\mathbf{P}_F}{dt} = \frac{37}{29} \frac{d\mathbf{P}_E}{dt} - \frac{8}{29} \frac{d\mathbf{P}_D}{dt} \\ \mathbf{v}_F &= \frac{37}{29} \mathbf{v}_E - \frac{8}{29} \mathbf{v}_D\end{aligned}$$

เราต้องหา  $\mathbf{v}_E = J_E \dot{\mathbf{q}}$  และ  $\mathbf{v}_D = J_D \dot{\mathbf{q}}$

### 3.2 Jacobian ของจุด D ( $J_D$ )

คำอธิบาย: จุด D เชื่อมโดยตรงกับมอเตอร์ B เท่านั้น (คอลัมน์แรกเป็น 0) ดังนั้น Jacobian จะบอกว่าการหมุนมอเตอร์ B จะทำให้จุด D เคลื่อนที่อย่างไร

จาก  $P_D = (42.5 + 105 \cos \theta_B, 105 \sin \theta_B)$ :

$$\mathbf{v}_D = \begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{y}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_d}{\partial \theta_A} & \frac{\partial x_d}{\partial \theta_B} \\ \frac{\partial y_d}{\partial \theta_A} & \frac{\partial y_d}{\partial \theta_B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_A \\ \dot{\theta}_B \end{bmatrix}$$

$$J_D = \begin{bmatrix} 0 & -105 \sin \theta_B \\ 0 & 105 \cos \theta_B \end{bmatrix}$$

### 3.3 Jacobian ของจุด E ( $J_E$ )

คำอธิบาย: จุด E ซับซ้อนกว่าเพราะได้รับผลกระทบจากมอเตอร์ทั้งสองตัว ต้องใช้ implicit differentiation ของสมการวงกลมเพื่อหาว่าเมื่อข้อเข้า C และ D เคลื่อนที่ จุด E จะเคลื่อนที่อย่างไร

$J_E$  ได้มาจากการหาอนุพันธ์โดยนัย (implicit differentiation) ของสมการวงกลมในหัวข้อ 2.2 ซึ่งได้ผลลัพธ์ในรูปแบบ  $\mathbf{A}\mathbf{v}_E = \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}$ :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_e - x_c & y_e - y_c \\ x_e - x_d & y_e - y_d \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_E} = \underbrace{\begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}_A \\ \dot{\theta}_B \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}}$$

โดยที่:

$$B_{11} = 105[(y_e - y_c) \cos \theta_A - (x_e - x_c) \sin \theta_A]$$

$$B_{22} = 105[(y_e - y_d) \cos \theta_B - (x_e - x_d) \sin \theta_B]$$

ดังนั้น  $J_E = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$

### 3.4 Jacobian สุดท้าย ( $J_F$ )

คำอธิบาย: เมื่อเรามี Jacobian ของจุด E และ D แล้ว เราสามารถรวมกันเพื่อหา Jacobian ของจุด F (ปลายเท้าจริง)

โดยใช้สูตรที่เราหาได้ว่า  $\mathbf{P}_F = \frac{37}{29}\mathbf{P}_E - \frac{8}{29}\mathbf{P}_D$  นำมาหาอนุพันธ์ตามเวลา

แทนค่า  $J_E$  และ  $J_D$  กลับเข้าไปในสมการ  $\mathbf{v}_F$ :

$$\mathbf{v}_F = \frac{37}{29}(J_E\dot{\mathbf{q}}) - \frac{8}{29}(J_D\dot{\mathbf{q}})$$

$$\mathbf{v}_F = \left( \frac{37}{29}J_E - \frac{8}{29}J_D \right) \dot{\mathbf{q}}$$

Jacobian สุดท้าย:

$$J_F = \frac{1}{29}(37J_E - 8J_D)$$