

# การวิเคราะห์ทอร์กแบบไดนามิก (Dynamic Torque Analysis) สำหรับกลไก 5-Bar Parallel Linkage

นายธีรโชติ เมืองจำนงค์

20 พฤศจิกายน พ.ศ. 2568

## 1 บทนำ

เอกสารนี้นำเสนอการวิเคราะห์ทอร์กแบบไดนามิก (Dynamic Torque Analysis) สำหรับกลไก 5-Bar Parallel Linkage ที่ใช้ในหุ่นยนต์สี่ขา 8-DOF โดยคำนึงถึงผลของแรงเฉื่อย (Inertial Effects) แรงโน้มถ่วง (Gravity Forces) และการกระจายน้ำหนักของหุ่นยนต์ทั้งระบบ การวิเคราะห์นี้คำนวณความต้องการทอร์กแบบไดนามิกสำหรับการเดินแบบวิถีสี่ขา (Elliptical Gait) ที่ความถี่ 1 Hz เพื่อตรวจสอบความเหมาะสมของมอเตอร์ที่เลือก

### 1.1 วัตถุประสงค์

วัตถุประสงค์หลักของการวิเคราะห์นี้คือการคำนวณความต้องการทอร์กแบบไดนามิกสำหรับมอเตอร์แต่ละตัวในกลไก 5-Bar Parallel Linkage ระหว่างการเดินแบบวิถีสี่ขา การวิเคราะห์นี้ขยายผลจากการวิเคราะห์ทอร์กแบบสถิต (Static Torque Analysis) โดยพิจารณาเพิ่มเติม:

- ผลของแรงเฉื่อยจากความเร่งของลิงก์ (Inertial effects from link accelerations)
- ส่วนสมทบของโมเมนต์ความเฉื่อยในการหมุน (Rotational inertia contributions)
- การกระจายน้ำหนักหุ่นยนต์ทั้งหมด (มวลรวม 6.70 kg)
- การเคลื่อนที่แบบไดนามิกที่ความถี่ 1 Hz

### 1.2 ข้อมูลหุ่นยนต์

ลักษณะหุ่นยนต์:

- ประเภท: หุ่นยนต์สี่ขา 8 องศาอิสระ (8-DOF Quadruped Mobile Robot)
- กลไกขา: 5-Bar Parallel Linkage
- มวลรวม: 6.70 kg แบ่งเป็น:

- แบตเตอรี่และอิเล็กทรอนิกส์: 2.00 kg
  - โครงสร้าง/แชสซี: 1.62 kg
  - มอเตอร์ (8 ตัว): 3.08 kg
- มวลต่อขา: 1.675 kg (กระจายเท่ากันทั้ง 4 ขา)

## 2 พารามิเตอร์กลไก

### 2.1 ขนาดลิงก์

ลิงก์	ความยาว (mm)	คำอธิบาย
$L_{AC}$	105	ลิงก์มอเตอร์ซ้าย (L1)
$L_{BD}$	105	ลิงก์มอเตอร์ขวา (L2)
$L_{CE}$	145	ลิงก์เชื่อมซ้าย (L3)
$L_{DE}$	145	ลิงก์เชื่อมขวา (L4)
$L_{EF}$	40	ออฟเซตปลายเท้า

ตารางที่ 1: ขนาดความยาวของลิงก์

### 2.2 ตำแหน่งมอเตอร์

$$P_A = (-42.5, 0) \text{ mm} \quad (\text{มอเตอร์ซ้าย}) \quad (1)$$

$$P_B = (42.5, 0) \text{ mm} \quad (\text{มอเตอร์ขวา}) \quad (2)$$

### 2.3 คุณสมบัติมวล (จาก CAD)

วัสดุ: PA12-HP Nylon ความหนาแน่น  $\rho = 1120 \text{ kg/m}^3$

ลิงก์	มวล (g)	ความยาว (mm)	อัตราส่วน COM (%)	ตำแหน่ง COM (mm)	$I_{zz}$ (kg·m <sup>2</sup> )
L1 (AC)	24.88	105	33.56	35.24	$\approx 0$
L2 (BD)	35.33	105	23.63	24.81	$1 \times 10^{-5}$
L3 (CE)	20.56	145	50.00	72.50	$5 \times 10^{-5}$
L4 (DE)	25.06	145	61.73	89.51	$8 \times 10^{-5}$

ตารางที่ 2: คุณสมบัติมวลของลิงก์ที่สกัดจากโมเดล CAD

หมายเหตุ:

- COM (Center of Mass) = ศูนย์กลางมวล
- $I_{zz}$  = โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน z
- อัตราส่วน COM วัดจากข้อต่อเริ่มต้นของลิงก์

### 3 การกำหนดวิถีการเดิน

#### 3.1 วิถีรูปไข่ (Elliptical Gait Pattern)

วิถีการเคลื่อนที่ของปลายเท้าเป็นรูปวงรีด้วยพารามิเตอร์ดังนี้:

$$x_F(t) = a \cos(\omega t) \quad (3)$$

$$y_F(t) = y_{\text{home}} + b \sin(\omega t) \quad (4)$$

พารามิเตอร์:

- แกนกึ่งยาว (Semi-major axis):  $a = 60$  mm (ความยาวก้าว)
- แกนกึ่งสั้น (Semi-minor axis):  $b = 30$  mm (ความสูงก้าว)
- ตำแหน่งยืน (Home position):  $y_{\text{home}} = -200$  mm
- ความถี่เชิงมุม (Angular frequency):  $\omega = 2\pi f = 2\pi$  rad/s
- ความถี่การเดิน (Gait frequency):  $f = 1.0$  Hz
- เวลา 1 รอบ (Cycle time):  $T = 1.0$  s

หมายเหตุ: อัตราส่วนแกนยาว:แกนสั้น = 2:1 เพื่อให้ได้วิถีรูปไข่ที่เหมาะสมกับการเดิน

### 4 แบบจำลองไดนามิก

#### 4.1 สมการการเคลื่อนที่

สมการไดนามิกสำหรับระบบคือ:

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \quad (5)$$

สำหรับการวิเคราะห์นี้ เราทำให้พจน์โคริโอลิสเป็นแบบง่าย จึงได้:

$$\tau = M(q)\ddot{q} + G(q) \quad (6)$$

โดยที่:

- $\tau = [\tau_A, \tau_B]^T$  = ทอร์กที่ข้อต่อ
- $q = [\theta_A, \theta_B]^T$  = มุมข้อต่อ
- $M(q)$  = เมทริกซ์ความเฉื่อย (Inertia matrix) ขนาด  $2 \times 2$
- $G(q)$  = เวกเตอร์แรงโน้มถ่วง (Gravity vector) ขนาด  $2 \times 1$

## 4.2 เมทริกซ์ความเฉื่อย (Inertia Matrix)

เมทริกซ์ความเฉื่อยคำนวณโดยใช้วิธี Composite Rigid Body:

$$M(q) = \sum_{i=1}^4 [m_i J_{v,i}^T J_{v,i} + I_{zz,i} J_{\omega,i}^T J_{\omega,i}] \quad (7)$$

โดยที่:

- $m_i$  = มวลของลิงก์ที่  $i$
- $J_{v,i}$  = Jacobian ความเร็วเชิงเส้นของ COM ของลิงก์ที่  $i$  (ขนาด  $2 \times 2$ )
- $J_{\omega,i}$  = Jacobian ความเร็วเชิงมุมของลิงก์ที่  $i$  (ขนาด  $1 \times 2$ )
- $I_{zz,i}$  = โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน  $z$

## 4.3 เวกเตอร์แรงโน้มถ่วง (Gravity Vector)

ทอร์กจากแรงโน้มถ่วงรวมส่วนสมทบจากทุกลิงก์และน้ำหนักหุ่นยนต์ที่กระจาย:

$$G(q) = \sum_{i=1}^4 m_i g J_{v,i}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + m_{\text{leg}} g J_F^T \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

โดยที่:

- $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  = ความเร่งโน้มถ่วง
- $m_{\text{leg}} = 1.675 \text{ kg}$  = มวลที่กระจายต่อขา
- $J_F$  = Jacobian ของปลายเท้า (End-effector) ขนาด  $2 \times 2$

คำอธิบาย: เวกเตอร์  $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$  แสดงทิศของแรงโน้มถ่วงในแกน  $y$  (ชี้ลง)

## 4.4 การคำนวณ Jacobian

### 4.4.1 ลิงก์ที่ 1 (AC) - ลิงก์มอเตอร์ซ้าย

$$J_{v,1} = \begin{bmatrix} -r_1 \sin \theta_A & 0 \\ r_1 \cos \theta_A & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$J_{\omega,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

โดยที่  $r_1 = 0.03524 \text{ m}$  (ตำแหน่ง COM จากข้อต่อ A)

### 4.4.2 ลิงก์ที่ 2 (BD) - ลิงก์มอเตอร์ขวา

$$J_{v,2} = \begin{bmatrix} 0 & -r_2 \sin \theta_B \\ 0 & r_2 \cos \theta_B \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$J_{\omega,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

โดยที่  $r_2 = 0.02481 \text{ m}$  (ตำแหน่ง COM จากข้อต่อ B)

#### 4.4.3 ลิงก์ที่ 3 และ 4 (CE, DE) - ลิงก์เชื่อม

สำหรับลิงก์เชื่อม Jacobian จะคำนวณด้วยวิธีเชิงตัวเลขตามท่าทางปัจจุบัน โดยคำนึงถึงจลนศาสตร์แบบเชื่อมโยงของกลไกแบบขนาน (Parallel Mechanism)

## 5 การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข

ความเร็วและความเร่งข้อต่อคำนวณโดยใช้วิธี Central Difference:

### 5.1 ความเร็ว (Central Difference)

$$\dot{q}_i = \frac{q_{i+1} - q_{i-1}}{2\Delta t} \quad (13)$$

### 5.2 ความเร่ง (Central Difference)

$$\ddot{q}_i = \frac{q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}}{(\Delta t)^2} \quad (14)$$

โดยที่  $\Delta t = T/N = 1.0/60 \approx 0.0167$  s

หมายเหตุ: วิธี Central Difference ให้ความแม่นยำสูงกว่า Forward หรือ Backward Difference

## 6 ผลการวิเคราะห์

### 6.1 ทอร์กไดนามิกสูงสุด

การวิเคราะห์คำนวณทอร์กไดนามิกตลอด 1 รอบการเดิน (60 จุดข้อมูล) ค่าทอร์กสูงสุดคือ:

มอเตอร์	ทอร์กสูงสุด (N·m)	ตำแหน่งที่เกิด
มอเตอร์ A (ซ้าย)	1.9273	ระหว่างการเดิน
มอเตอร์ B (ขวา)	1.6478	ระหว่างการเดิน

ตารางที่ 3: ความต้องการทอร์กไดนามิกสูงสุด (ผลจากการจำลอง)

### 6.2 เปรียบเทียบทอร์กแบบสถิตกับไดนามิก

มอเตอร์	ทอร์กสถิต (N·m)	ทอร์กไดนามิกสูงสุด (N·m)	อัตราส่วน (ไดนามิก/สถิต)
มอเตอร์ A	0.9172	1.9273	2.10×
มอเตอร์ B	1.5628	1.6478	1.05×

ตารางที่ 4: การเปรียบเทียบทอร์กแบบสถิตและไดนามิก

### 6.3 การตรวจสอบความเหมาะสมของมอเตอร์

ข้อกำหนดมอเตอร์เป้าหมาย: 5.0 N·m

มอเตอร์	ทอร์กสูงสุด (N·m)	ค่า Safety Factor	สถานะ
มอเตอร์ A	1.9273	2.59×	ผ่าน
มอเตอร์ B	1.6478	3.03×	ผ่าน

ตารางที่ 5: การวิเคราะห์ค่า Safety Factor ของมอเตอร์

เกณฑ์การประเมิน Safety Factor:

- $SF \geq 2.0$  - ผ่าน (มอเตอร์เพียงพอ)
- $1.5 \leq SF < 2.0$  - เตือน (ค่า Safety Factor ต่ำ)
- $SF < 1.5$  - ไม่ผ่าน (มอเตอร์ไม่เพียงพอ)

## 7 ข้อกำหนดมอเตอร์

### 7.1 พารามิเตอร์มอเตอร์ที่เลือก

- ทอร์กขาออก: 5.0 N·m (ข้อกำหนดเป้าหมาย)
- อัตราทดเกียร์: 8:1
- ความเร็วขาออก: 120 RPM (12.57 rad/s)
- ความเร็วขาเข้า: 960 RPM (ก่อนผ่านเกียร์บ็อกซ์)

### 7.2 การตรวจสอบความเร็ว

ความเร็วข้อต่อสูงสุดระหว่างรอบการเดินไม่ควรเกิน:

$$|\dot{\theta}_{\max}| \leq 12.57 \text{ rad/s} \quad (15)$$

## 8 การวิเคราะห์องค์ประกอบของทอร์ก

ทอร์กไดนามิกรวมสามารถแยกเป็นองค์ประกอบได้ดังนี้:

### 8.1 ทอร์กเฉื่อย (Inertial Torque)

$$\tau_{\text{inertia}} = M(q)\ddot{q} \quad (16)$$

คำนึงถึงความเร่งของลิงก์และโมเมนต์ความเฉื่อยในการหมุน

## 8.2 ทอร์กโน้มถ่วง (Gravitational Torque)

$$\tau_{\text{gravity}} = G(q) \quad (17)$$

ประกอบด้วย:

- น้ำหนักตัวลิงก์เอง (รวม 105.83 g)
- น้ำหนักหุ่นยนต์ที่กระจาย (1.675 kg ต่อขา)

## 9 สรุปและข้อเสนอแนะ

### 9.1 ผลการศึกษาที่สำคัญ

1. คำนวณความต้องการทอร์กไดนามิกสำหรับการเดินแบบวิถีรูปไข่ที่ความถี่ 1 Hz
2. กระจายน้ำหนักหุ่นยนต์ทั้งหมด (6.70 kg) อย่างถูกต้องทั้ง 4 ขา
3. คำนวณค่า Safety Factor สำหรับมอเตอร์ขนาด 5.0 N·m
4. ตรวจสอบขีดจำกัดความเร็วตามความสามารถของมอเตอร์

### 9.2 ข้อเสนอแนะ

- กรอกราคาทอร์กจริงจากการรันโปรแกรมจำลอง
- ตรวจสอบว่าค่า Safety Factor ผ่านเกณฑ์การออกแบบ ( $SF \geq 2.0$ )
- หากค่า Safety Factor ต่ำ ให้พิจารณา:
  - ลดความถี่การเดิน
  - ลดความยาวก้าว
  - เลือกมอเตอร์ที่มีทอร์กสูงขึ้น
  - ปรับวิธีการเดินให้ราบรื่นขึ้น
- ดำเนินการต่อไปยัง Phase 3: การสร้างโมเดล URDF และการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดของวิถี

### 9.3 ขั้นตอนต่อไป

1. รันโปรแกรม Dynamic-Torque-Analysis.py เพื่อรับผลลัพธ์เชิงตัวเลข
2. อัปเดตตารางด้วยค่าทอร์กสูงสุดที่ได้จริง
3. ตรวจสอบความเหมาะสมของมอเตอร์กับเกณฑ์ความปลอดภัย
4. สร้างกราฟแสดง:
  - มุมข้อต่อตามเวลา
  - ความเร็วและความเร่งข้อต่อ
  - องค์ประกอบทอร์ก (เฉื่อยและโน้มถ่วง)
  - ทอร์กไดนามิกรวมพร้อมขีดจำกัดมอเตอร์
5. บันทึกผลการศึกษาและดำเนินการเลือกฮาร์ดแวร์

## 10 เอกสารอ้างอิง

1. โมเดล CAD - คุณสมบัติวัสดุ PA12-HP Nylon
2. Phase 2.1 - ผลการวิเคราะห์ทอร์กแบบสถิต (Static Torque Analysis)
3. Craig, J.J., "Introduction to Robotics: Mechanics and Control"
4. Merlet, J.P., "Parallel Robots"

## A การใช้งานโปรแกรม Python

การวิเคราะห์ทอร์กไดนามิกถูก implement ใน:

`scripts/analysis/Dynamic-Torque-Analysis.py`

ฟังก์ชันสำคัญ:

- `calculate_inertia_matrix(thetas)` - คำนวณ  $M(\mathbf{q})$
- `calculate_gravity_vector(thetas)` - คำนวณ  $G(\mathbf{q})$
- `calculate_jacobian_COM(thetas, link_id)` - Jacobian ของ COM
- `calculate_trajectory_derivatives()` - การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข

## B อัลกอริทึมการเลือก Configuration

เพื่อให้การเคลื่อนที่ราบรื่น โปรแกรมแก้ inverse kinematics จะเลือก configuration ที่ทำให้ระยะทางเชิงมุมจากท่าก่อนหน้าน้อยที่สุด:

$$\text{config}^* = \arg \min_{\text{config}} \sum_{j=A,B} \min(|\theta_j - \theta_j^{\text{prev}}|, 2\pi - |\theta_j - \theta_j^{\text{prev}}|) \quad (18)$$

วิธีนี้ป้องกันการกระโดดแบบไม่ต่อเนื่องระหว่าง configuration แบบ elbow-up และ elbow-down