การวิเคราะห์จลนศาสตร์ขาหุ่นยนต์ (กลไก 5-Bar Linkage แบบมี Offset)

นายธีรโชติ เมืองจำนงค์

17 พฤศจิกายน พ.ศ. 2568

1 พารามิเตอร์ทางจลนศาสตร์

เอกสารนี้สรุปพารามิเตอร์และการคำนวณสำหรับกลไกขาหุ่นยนต์แบบ 5-Bar Linkage

ภาพรวม: กลไก 5-Bar Linkage คือระบบแขนกลที่ประกอบด้วยแขนต่อ 4 แท่ง (4 links) เชื่อมต่อกันด้วยข้อต่อ 5 จุด ควบคุมโดยมอเตอร์ 2 ตัว ใช้ในการขยับปลายเท้าของหุ่นยนต์ไปยังตำแหน่งที่ต้องการ

1.1 ระบบพิกัด

คำอธิบาย: เราตั้งจุดกำเนิดไว้กึ่งกลางระหว่างมอเตอร์ทั้งสอง เพื่อให้ระบบสมมาตรและคำนวณง่าย มอเตอร์ 2 ตัว-ติดตั้งห่างกัน 85 มม.

- **จุดกำเนิด (0, 0):** ตั้งอยู่กึ่งกลางระหว่างมอเตอร์ทั้งสอง
- **จุด A (มอเตอร์ 1, ซ้าย):** $(-42.5, 0)$ mm
- **จุด B (มอเตอร์ 2, ขวา):** $(42.5, 0)$ mm
- *(ระยะห่างระหว่างเพลามอเตอร์ $d = 85$ mm)*

1.2 ความยาวของแขนต่อ (Link)

คำอธิบาย: แขนต่อแบ่งเป็น 2 ชั้น - ชั้นบน (L1, L2) ยาว 105 มม. ต่อจากมอเตอร์ไปยังข้อเข่า และชั้นล่าง (L3, L4) ยาว 145 มม. ต่อจากข้อเข่าไปยังปลายเท้า การออกแบบแบบสมมาตรช่วยให้ควบคุมง่ายและมีเสถียรภาพ

- **L1 (บนซ้าย, AC):** $L_{AC} = 105$ mm
- **L2 (บนขวา, BD):** $L_{BD} = 105$ mm
- **L3 (ล่างซ้าย, CE):** $L_{CE} = 145$ mm
- **L4 (ล่างขวา, DE):** $L_{DE} = 145$ mm

1.3 ปลายมือจับ (ปลายเท้า)

คำอธิบาย: จุด E คือจุดที่ใช้ในการคำนวณทางคณิตศาสตร์ (จุดตัดของแขนทั้งสอง) แต่ปลายเท้าจริง (จุด F) จะยื่นออกไปอีก 40 มม. เพื่อเพิ่มพื้นที่การทำงานของหุ่นยนต์ จุด D, E, F ต้องอยู่บนเส้นตรงเดียวกันเสมอ

- **จุดคำนวณ:** จุด E
- **ปลายเท้าจริง:** จุด F
- **ระยะออฟเซ็ต (EF):** $L_{EF} = 40$ mm
- **เงื่อนไข:** จุด **D, E, F** อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน (collinear)

2 การหา Forward Kinematics (FK)

วัตถุประสงค์: หาพิกัดของปลายเท้า $\mathsf{P}_F(x_f, y_f)$ จากมุมมอเตอร์ θ_A และ θ_B

Forward Kinematics (FK) คือการคำนวณหาตำแหน่งปลายเท้าเมื่อเรารู้มุมของมอเตอร์ทั้งสอง เช่น ถ้ามอเตอร์ A หมุน 30 องศา และมอเตอร์ B หมุน 45 องศา ปลายเท้าจะอยู่ที่ไหน? นี่คือปัญหาพื้นฐานในการควบคุมหุ่นยนต์

2.1 พิกัดของข้อเข่า (P_C, P_D)

ขั้นตอนที่ 1: คำนวณตำแหน่งข้อเข่าทั้งสองข้าง (จุด C และ D) จากมุมมอเตอร์โดยใช้ตรีโกณมิติ

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}_A &= (-42.5, 0) \\
\mathsf{P}_B &= (42.5, 0) \\
\mathsf{P}_C &= (-42.5 + 105\cos\theta_A, 105\sin\theta_A) \\
\mathsf{P}_D &= (42.5 + 105\cos\theta_B, 105\sin\theta_B)
\end{aligned}
$$

2.2 จุดคำนวณ (P_E)

ขั้นตอนที่ 2: หาจุด E โดยหาจุดตัดของวงกลมสองวง - วงกลมแรกมีจุดศูนย์กลางที่ C รัศมี 145 มม. และวงกลมที่สองมีจุดศูนย์กลางที่ D รัศมี 145 มม. จุดตัดของวงกลมทั้งสองคือตำแหน่งที่ปลายแขนทั้งสองมาบรรจบกัน

จุด $\mathsf{P}_E(x_e, y_e)$ คือจุดตัดของวงกลมสองวง:

$$
\begin{aligned}
(x_e - x_c)^2 + (y_e - y_c)^2 &= L_{CE}^2 = 145^2 \\
(x_e - x_d)^2 + (y_e - y_d)^2 &= L_{DE}^2 = 145^2
\end{aligned}
$$

(ต้องแก้ระบบสมการนี้เพื่อหาค่า P_E)

2.3 จุดปลายเท้า (P_F)

ขั้นตอนที่ 3: เนื่องจากปลายเท้าจริง (F) ยื่นออกไปจาก E อีก 40 มม. ตามแนวเส้นตรง DE เราจึงต้องหาทิศทางจาก D ไป E ก่อน (หาเวกเตอร์หนึ่งหน่วย) แล้วเลื่อนจุด E ไปตามทิศทางนั้นอีก 40 มม.

เนื่องจาก D, E, F อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน และ $L_{EF} = 40$:

$$\vec{V}_{DE} = \mathsf{P}_E - \mathsf{P}_D$$
$$\vec{u}_{DE} = \frac{\vec{V}_{DE}}{\|\vec{V}_{DE}\|} = \frac{\mathsf{P}_E - \mathsf{P}_D}{145}$$
$$\vec{V}_{EF} = 40 \cdot \vec{u}_{DE} = \frac{40}{145}(\mathsf{P}_E - \mathsf{P}_D) = \frac{8}{29}(\mathsf{P}_E - \mathsf{P}_D)$$

พิกัดของ P_F คือ:

$$\mathsf{P}_F = \mathsf{P}_E + \vec{V}_{EF}$$
$$\mathsf{P}_F = \mathsf{P}_E + \frac{8}{29}(\mathsf{P}_E - \mathsf{P}_D)$$
$$\mathsf{P}_F = \left(1 + \frac{8}{29}\right)\mathsf{P}_E - \frac{8}{29}\mathsf{P}_D$$

สมการ FK สุดท้าย:

$$\mathsf{P}_F = \frac{37}{29}\mathsf{P}_E - \frac{8}{29}\mathsf{P}_D$$

หรือ:

$$x_f = \frac{37}{29}x_e - \frac{8}{29}x_d$$
$$y_f = \frac{37}{29}y_e - \frac{8}{29}y_d$$

3 การหา Jacobian (J_F)

วัตถุประสงค์: หาเมทริกซ์ J_F ที่เชื่อมความสัมพันธ์ $\mathsf{v}_F = \mathsf{J}_F\dot{\mathsf{q}}$ โดยที่ $\mathsf{v}_F = [\dot{x}_f, \dot{y}_f]^T$ และ $\dot{\mathsf{q}} = [\dot{\theta}_A, \dot{\theta}_B]^T$

Jacobian Matrix คือเครื่องมือสำคัญที่บอกว่า "ถ้าเราหมุนมอเตอร์เร็วขนาดนี้ ปลายเท้าจะเคลื่อนที่เร็วแค่ไหนในแต่ละทิศทาง" ใช้ในการควบคุมความเร็ว การวางแผนเส้นทาง และการคำนวณแรงกด

หลักการ: Jacobian เป็นเมทริกซ์ที่แปลงความเร็วเชิงมุมของมอเตอร์ $(\dot{\theta}_A, \dot{\theta}_B)$ ให้เป็นความเร็วเชิงเส้นของปลายเท้า $(\dot{x}_f, \dot{y}_f)$

3.1 ความสัมพันธ์ของความเร็ว

หาอนุพันธ์ของสมการ FK สำหรับ P_F เทียบกับเวลา:

$$\mathsf{v}_F = \frac{d\mathsf{P}_F}{dt} = \frac{37}{29}\frac{d\mathsf{P}_E}{dt} - \frac{8}{29}\frac{d\mathsf{P}_D}{dt}$$

$$\mathsf{v}_F = \frac{37}{29}\mathsf{v}_E - \frac{8}{29}\mathsf{v}_D$$

เราต้องหา $\mathsf{v}_E = \mathsf{J}_E\dot{\mathsf{q}}$ และ $\mathsf{v}_D = \mathsf{J}_D\dot{\mathsf{q}}$

3.2 Jacobian ของจุด D (J_D)

คำอธิบาย: จุด D เชื่อมโดยตรงกับมอเตอร์ B เท่านั้น (คอลัมน์แรกเป็น 0) ดังนั้น Jacobian จะบอกว่าการหมุนมอเตอร์ B จะทำให้จุด D เคลื่อนที่อย่างไร

จาก $\mathsf{P}_D = (42.5 + 105\cos\theta_B, 105\sin\theta_B)$:

$$\mathsf{v}_D = \begin{bmatrix} \dot{x}_d \\ \dot{y}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_d}{\partial \theta_A} & \frac{\partial x_d}{\partial \theta_B} \\ \frac{\partial y_d}{\partial \theta_A} & \frac{\partial y_d}{\partial \theta_B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_A \\ \dot{\theta}_B \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{J}_D = \begin{bmatrix} 0 & -105\sin\theta_B \\ 0 & 105\cos\theta_B \end{bmatrix}$$

3.3 Jacobian ของจุด E (J_E)

คำอธิบาย: จุด E ซับซ้อนกว่าเพราะได้รับผลกระทบจากมอเตอร์ทั้งสองตัว ต้องใช้ implicit differentiation ของสมการวงกลมเพื่อหาว่าเมื่อข้อเข่า C และ D เคลื่อนที่ จุด E จะเคลื่อนที่อย่างไร

J_E ได้มาจากการหาอนุพันธ์โดยนัย (implicit differentiation) ของสมการวงกลมในหัวข้อ 2.2 ซึ่งได้ผลลัพธ์ในรูปแบบ $\mathsf{A}\mathsf{v}_E = \mathsf{B}\dot{\mathsf{q}}$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_e - x_c & y_e - y_c \\ x_e - x_d & y_e - y_d \end{bmatrix}}_{\mathsf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \end{bmatrix}}_{\mathsf{v}_E} = \underbrace{\begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}}_{\mathsf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}_A \\ \dot{\theta}_B \end{bmatrix}}_{\dot{\mathsf{q}}}$$

โดยที่:

$$B_{11} = 105[(y_e - y_c)\cos\theta_A - (x_e - x_c)\sin\theta_A]$$
$$B_{22} = 105[(y_e - y_d)\cos\theta_B - (x_e - x_d)\sin\theta_B]$$

ดังนั้น $\mathsf{J}_E = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{B}$

3.4 Jacobian สุดท้าย (J_F)

คำอธิบาย: เมื่อเรามี Jacobian ของจุด E และ D แล้ว เราสามารถรวมกันเพื่อหา Jacobian ของจุด F (ปลายเท้าจริง) โดยใช้สูตรที่เราหาได้ว่า $\mathsf{P}_F = \frac{37}{29}\mathsf{P}_E - \frac{8}{29}\mathsf{P}_D$ นำมาหาอนุพันธ์ตามเวลา

แทนค่า J_E และ J_D กลับเข้าไปในสมการ v_F:

$$\mathsf{v}_F = \frac{37}{29}(\mathsf{J}_E\dot{\mathsf{q}}) - \frac{8}{29}(\mathsf{J}_D\dot{\mathsf{q}})$$
$$\mathsf{v}_F = \left(\frac{37}{29}\mathsf{J}_E - \frac{8}{29}\mathsf{J}_D\right)\dot{\mathsf{q}}$$

Jacobian สุดท้าย:

$$\mathsf{J}_F = \frac{1}{29}(37\mathsf{J}_E - 8\mathsf{J}_D)$$