

# การวิเคราะห์ Inverse Kinematics แบบ Analytical (5-Bar Parallel Linkage)

นายธีรโชติ เมืองจำนงค์

17 พฤศจิกายน พ.ศ. 2568

## 1 บทนำ

เอกสารนี้อธิบายการคำนวณ Inverse Kinematics (IK) แบบ Analytical สำหรับกลไก 5-Bar Parallel Linkage ของหุ่นยนต์ขาสองขา โดยใช้วิธีการแก้สมการทางเรขาคณิตโดยตรง ซึ่งให้ความแม่นยำสูงและรวดเร็วกว่าวิธี Numerical Inverse Kinematics (IK) คือการคำนวณหามุมมอเตอร์  $\theta_A$  และ  $\theta_B$  เมื่อเรารู้ตำแหน่งเป้าหมายของปลายเท้า  $P_F(x_f, y_f)$  ซึ่งเป็นปัญหาที่สำคัญในการควบคุมหุ่นยนต์

### 1.1 ข้อได้เปรียบของวิธี Analytical

- ความแม่นยำสูง: ใกล้เคียง machine precision ( $\sim 10^{-14}$  mm)
- ความเร็ว: คำนวณตรงไม่ต้อง iterate
- Deterministic: ได้คำตอบเดียวกันเสมอ
- ไม่ต้องค่าเดาเริ่มต้น: แต่ต้องเลือก Configuration (Elbow Up/Down)

## 2 Configurations ที่เป็นไปได้

สำหรับกลไก 5-Bar Linkage มีท่าที่เป็นไปได้ทั้งหมด 4 แบบ ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของข้อเท้า C (ซ้าย) และ D (ขวา):

1. Config 1 (Down-Down): C ลง, D ลง - ท่ามาตรฐาน
2. Config 2 (Down-Up): C ลง, D ขึ้น
3. Config 3 (Up-Down): C ขึ้น, D ลง
4. Config 4 (Up-Up): C ขึ้น, D ขึ้น

### 3 วิธีการคำนวณ

#### 3.1 ขั้นตอนที่ 1: หาระยะห่างระหว่างจุด

จากสมการ Forward Kinematics:

$$P_F = \frac{37}{29}P_E - \frac{8}{29}P_D \quad (1)$$

เราสามารถหาระยะห่างระหว่าง  $P_F$  และ  $P_D$ :

$$|P_F - P_D| = L_{DE} \times \frac{37}{29} = 145 \times \frac{37}{29} = 185.0 \text{ mm} \quad (2)$$

#### 3.2 ขั้นตอนที่ 2: หาจุด D จากการตัดกันของวงกลม

หา  $P_D$  จากการตัดกันของวงกลม 2 วง:

- วงที่ 1: ศูนย์กลาง  $P_F$  (เป้าหมาย), รัศมี 185.0 mm
- วงที่ 2: ศูนย์กลาง  $P_B$  (มอเตอร์ขวา), รัศมี  $L_{BD} = 105 \text{ mm}$

การตัดกันของวงกลมจะได้จุด 2 จุด เราเลือกตาม Configuration ที่ต้องการ (D ลง หรือ D ขึ้น)

#### 3.3 ขั้นตอนที่ 3: หาจุด E

จากสมการ:

$$P_E = \frac{29P_F + 8P_D}{37} \quad (3)$$

#### 3.4 ขั้นตอนที่ 4: หาจุด C จากการตัดกันของวงกลม

หา  $P_C$  จากการตัดกันของวงกลม 2 วง:

- วงที่ 1: ศูนย์กลาง  $P_A$  (มอเตอร์ซ้าย), รัศมี  $L_{AC} = 105 \text{ mm}$
- วงที่ 2: ศูนย์กลาง  $P_E$ , รัศมี  $L_{CE} = 145 \text{ mm}$

#### 3.5 ขั้นตอนที่ 5: คำนวณมุมมอเตอร์

จากเวกเตอร์ที่ได้:

$$\theta_A = \arctan 2(y_c - y_a, x_c - x_a) \quad (4)$$

$$\theta_B = \arctan 2(y_d - y_b, x_d - x_b) \quad (5)$$

### 4 ผลการทดสอบ

#### 4.1 กรณีทดสอบ: Home Pose

เป้าหมาย:  $P_F = (0, -200) \text{ mm}$

ตารางที่ 1: ผลลัพธ์ IK สำหรับทั้ง 4 Configurations

Configuration	$\theta_A$ (°)	$\theta_B$ (°)	Error (mm)	Valid
Down-Down	-119.53	-37.68	$6.36 \times 10^{-14}$	×
Down-Up	-139.91	-166.32	$1.68 \times 10^{-13}$	
Up-Down	-16.06	-37.68	$4.26 \times 10^{-14}$	
Up-Up	-19.37	-166.32	$3.39 \times 10^2$	

ตารางที่ 1: ผลการทดสอบ IK ทั้ง 4 Configurations สำหรับเป้าหมาย (0, -200) mm

## 4.2 การตีความผลลัพธ์

คำตอบที่ถูกต้อง (Valid): พบ 3 จาก 4 Configurations

1. Config 1 (Down-Down): ทำมาตรฐาน - เหมาะสมที่สุด
2. Config 2 (Down-Up): ทำแปลก - อาจเสี่ยง singularity
3. Config 3 (Up-Down): ทำแปลก - ไม่เหมาะกับการพุงน้ำหนัก

Config 4 (Up-Up): อยู่นอก Workspace (Error = 339 mm)

## 5 สรุปและข้อแนะนำ

### 5.1 ข้อค้นพบสำคัญ

- กลไก 5-Bar Linkage มี **หลายคำตอบ** สำหรับจุดเดียวกัน
- สำหรับ (0, -200) mm มีคำตอบที่ถูกต้อง **3 แบบ**
- ความแม่นยำระดับ  $10^{-14}$  mm (machine precision)

### 5.2 การนำไปใช้

แนะนำให้ใช้ Config 1 (Down-Down) เพราะ:

- เป็นท่าที่เสถียรและธรรมชาติ
- เหมาะสำหรับการพุงน้ำหนัก
- หลีกเลี่ยง Singularity