

# การวิเคราะห์ทอร์กแบบสถิต (Static Torque Analysis) สำหรับกลไก 5-Bar Parallel Linkage

นายธีรโชติ เมืองจำนงค์

17 พฤศจิกายน พ.ศ. 2568

## 1 บทนำ

เอกสารนี้อธิบายการวิเคราะห์ทอร์ก (Torque) ที่มอเตอร์ทั้งสองต้องจ่ายเพื่อรองรับน้ำหนักของขาหุ่นยนต์ในท่าหนึ่ง (Static Condition) โดยใช้หลักการของ **Virtual Work** และ **Jacobian Transpose Method**

วัตถุประสงค์:

- คำนวณทอร์กที่มอเตอร์ A และ B ต้องจ่ายในท่าหนึ่ง
- เปรียบเทียบทอร์กระหว่าง 3 Configurations ที่เป็นไปได้
- แนะนำ Configuration ที่เหมาะสมที่สุดสำหรับการใช้งาน
- เลือกฮาร์ดแวร์ (มอเตอร์) ที่เหมาะสม

การประยุกต์ใช้:

- เลือกมอเตอร์ที่มีกำลังเพียงพอ
- ประเมินประสิทธิภาพของแต่ละ Configuration
- วางแผนการควบคุมให้ใช้พลังงานต่ำสุด

## 2 ทฤษฎี: Jacobian Transpose Method

### 2.1 หลักการ Virtual Work

ในท่าหนึ่ง (Static Equilibrium) งานเสมือน (Virtual Work) ที่ทำโดยแรงภายนอก  $F$  และทอร์กภายใน  $\tau$  ต้องเท่ากัน:

$$\delta W_{external} = \delta W_{internal} \quad (1)$$

$$F^T \delta P_F = \tau^T \delta q \quad (2)$$

โดย:

- $F = [F_x, F_y]^T$  = แรงที่กระทำต่อปลายเท้า (End-effector) ที่จุด  $F$
- $\delta P_F = [\delta x, \delta y]^T$  = การเคลื่อนที่เสมือนของปลายเท้า
- $\tau = [\tau_A, \tau_B]^T$  = ทอร์กที่มอเตอร์ A และ B
- $\delta q = [\delta \theta_A, \delta \theta_B]^T$  = การหมุนเสมือนของมอเตอร์

## 2.2 ความสัมพันธ์ผ่าน Jacobian

จากการวิเคราะห์จลนศาสตร์เชิงขั้ว (Forward Kinematics) เราได้ว่า:

$$\delta P_F = J_F \delta q \quad (3)$$

โดย  $J_F$  คือ Jacobian Matrix ขนาด  $2 \times 2$  ที่ได้จากการอนุพันธ์ของ Forward Kinematics:

$$J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_F}{\partial \theta_A} & \frac{\partial x_F}{\partial \theta_B} \\ \frac{\partial y_F}{\partial \theta_A} & \frac{\partial y_F}{\partial \theta_B} \end{bmatrix} \quad (4)$$

(ดูรายละเอียดการ derive ใน `forward-kinematics-5bar.tex` Section 3)

## 2.3 สูตรทอร์กแบบสถิต

แทนค่า  $\delta P_F = J_F \delta q$  ลงในสมการ Virtual Work:

$$F^T (J_F \delta q) = \tau^T \delta q \quad (5)$$

$$(J_F^T F)^T \delta q = \tau^T \delta q \quad (6)$$

เนื่องจากสมการต้องเป็นจริงสำหรับทุก  $\delta q$  ดังนั้น:

$$\tau = J_F^T F \quad (7)$$

นี่คือ Jacobian Transpose Method ที่ใช้คำนวณทอร์กแบบสถิต

# 3 พารามิเตอร์และข้อมูลเบื้องต้น

## 3.1 พารามิเตอร์ทางกายภาพ

พารามิเตอร์	ค่า	หน่วย
มวลรวมของขา	7.22	kg
แรงโน้มถ่วง $g$	9.81	m/s <sup>2</sup>
แรงโน้มถ่วงรวม $mg$	17.71	N

ตารางที่ 1: พารามิเตอร์ทางกายภาพของขาหุ่นยนต์

### 3.2 แรงที่กระทำต่อปลายเท้า

ในทำนองนี้ แรงที่กระทำต่อปลายเท้าคือแรงโน้มถ่วงเท่านั้น (ไม่มีแรงภายนอกอื่น):

$$F = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -17.71 \end{bmatrix} \text{ N} \quad (8)$$

เครื่องหมาย — บ่งชี้ว่าแรงชี้ลงตามแกน  $y$

### 3.3 Home Pose และ Configurations

สำหรับท่าอ้างอิง (Home Pose) ที่ปลายเท้าอยู่ที่:

$$P_F = (0, -200) \text{ mm} \quad (9)$$

จากการวิเคราะห์ Inverse Kinematics (ดู `inverse-kinematics-analytical.tex`) พบว่ามี 3 Configurations ที่เป็นไปได้ (Valid Solutions):

Configuration	$\theta_A$ (°)	$\theta_B$ (°)	สถานะ
Config 1 (Down-Down)	-119.53	-37.68	Valid
Config 2 (Down-Up)	-139.91	-166.32	Valid
Config 3 (Up-Down)	-16.06	-37.68	Valid
Config 4 (Up-Up)	-	-	Invalid

ตารางที่ 2: ทั้งหมด 4 Configurations สำหรับ Home Pose (มี 3 แบบที่ใช้งานได้)

## 4 การคำนวณทอร์กสำหรับแต่ละ Configuration

### 4.1 ขั้นตอนการคำนวณ

สำหรับแต่ละ Configuration เราจะคำนวณทอร์กดังนี้:

ขั้นตอนที่ 1: คำนวณ Jacobian Matrix  $J_F$  ที่ Configuration นั้นๆ โดยใช้ฟังก์ชัน:

```
J_F = calculate_jacobian([theta_A, theta_B])
```

ขั้นตอนที่ 2: คำนวณทอร์กโดยใช้สูตร:

$$\tau = J_F^T F = J_F^T \begin{bmatrix} 0 \\ -17.71 \end{bmatrix} \quad (10)$$

ขั้นตอนที่ 3: แยกองค์ประกอบของทอร์ก:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_A \\ \tau_B \end{bmatrix} \quad (11)$$

## 4.2 Configuration 1: Down-Down (แนะนำ)

มุมมอเตอร์:

$$\theta_A = -119.53^\circ, \quad \theta_B = -37.68^\circ \quad (12)$$

Jacobian Matrix: (คำนวณจากฟังก์ชัน `calculate_jacobian`)

$$J_F = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (13)$$

ทอร์ก:

$$\tau = J_F^T \begin{bmatrix} 0 \\ -17.71 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{21} \times (-17.71) \\ J_{22} \times (-17.71) \end{bmatrix} \quad (14)$$

ผลลัพธ์โดยประมาณ:

$$\tau_A \approx 1.63 \text{ N-m}, \quad \tau_B \approx 1.60 \text{ N-m} \quad (15)$$

คุณสมบัติ:

- + ทอร์กสมดุล:  $|\tau_A| \approx |\tau_B|$  (แตกต่างกันเพียง 2%)
- + มุมทั้งสองอยู่ในช่วงปลอดภัย (ห่างจากขีดจำกัด)
- + Elbow Down ทั้งสองข้าง (ธรรมชาติ สำหรับการยืน)

## 4.3 Configuration 2: Down-Up

มุมมอเตอร์:

$$\theta_A = -139.91^\circ, \quad \theta_B = -166.32^\circ \quad (16)$$

ผลลัพธ์โดยประมาณ:

$$\tau_A \approx 2.1 \text{ N-m}, \quad \tau_B \approx 3.5 \text{ N-m} \quad (17)$$

คุณสมบัติ:

- ~ ทอร์กไม่สมดุล:  $\tau_B$  สูงกว่า  $\tau_A$  มาก (67%)
- มุม  $\theta_B = -166.32^\circ$  ใกล้ขีดจำกัด  $-180^\circ$
- ~ Configuration แปลกและไม่ธรรมชาติ

## 4.4 Configuration 3: Up-Down

มุมมอเตอร์:

$$\theta_A = -16.06^\circ, \quad \theta_B = -37.68^\circ \quad (18)$$

ผลลัพธ์โดยประมาณ:

$$\tau_A \approx 0.8 \text{ N-m}, \quad \tau_B \approx 1.6 \text{ N-m} \quad (19)$$

คุณสมบัติ:

- ~ ทอร์กไม่สมดุล:  $\tau_B$  สูงกว่า  $\tau_A$  (100%)
- + มุมอยู่ในช่วงปลอดภัย
- Elbow Up ด้านซ้าย (ไม่เหมาะสมสำหรับการยืน)

## 5 การเปรียบเทียบและข้อแนะนำ

### 5.1 ตารางเปรียบเทียบ

Configuration	$\tau_A$ (N-m)	$\tau_B$ (N-m)	ความสมดุล	ข้อเสนอแนะ
Config 1 (Down-Down)	1.63	1.60	ดีเยี่ยม (2%)	□ แนะนำ
Config 2 (Down-Up)	2.1	3.5	แย่ (67%)	ไม่แนะนำ
Config 3 (Up-Down)	0.8	1.6	ปานกลาง (100%)	ใช้ได้

ตารางที่ 3: เปรียบเทียบทอร์กของทั้ง 3 Configurations

หมายเหตุ: ความสมดุล =  $\frac{|\tau_B - \tau_A|}{\tau_A} \times 100\%$

### 5.2 ข้อแนะนำ

Configuration ที่แนะนำ: **Config 1 (Down-Down)**

เหตุผล:

1. ทอร์กสมดุล: มอเตอร์ทั้งสองใช้กำลังใกล้เคียงกัน ลดการสึกหรอไม่สม่ำเสมอ
2. ประสิทธิภาพพลังงาน: ใช้พลังงานรวมต่ำสุด
3. ความปลอดภัย: มุมทั้งสองห่างจากขีดจำกัด
4. ธรรมชาติ: Elbow Down เหมาะสมสำหรับการยืนและเดิน

## 6 การเลือกมอเตอร์

### 6.1 ทอร์กสูงสุดที่ต้องการ

จากการวิเคราะห์ Static Torque พบว่า:

- ทอร์กสูงสุดในท่านิ่ง:  $\tau_{max} \approx 1.63$  N-m
- เพิ่ม Safety Factor 3x สำหรับการเคลื่อนที่:  $\tau_{required} = 1.63 \times 3 \approx 5$  N-m

### 6.2 มอเตอร์ที่เลือก

ข้อเสนอแนะ: เลือกสเต็ปมอเตอร์ที่มี Holding Torque  $\geq 5$  N-m

ตัวอย่าง:

- NEMA 23 (57 mm) - 5 N-m Stepper Motor
- มี Safety Factor เพียงพอสำหรับการเดินและการเร่งความเร็ว

### 6.3 ข้อควรพิจารณาเพิ่มเติม

- **Dynamic Torque:** การวิเคราะห์ในเอกสารนี้เป็นแบบสถิตเท่านั้น สำหรับการเคลื่อนที่จริง ต้องคำนวณ Dynamic Torque ที่รวม Inertia และ Acceleration ด้วย (Phase 2.2)
- **Peak Torque:** ในระหว่างการเดิน ทอร์กสูงสุดอาจมากกว่า Static Torque 2-3 เท่า
- **Continuous vs Peak:** ตรวจสอบว่ามอเตอร์สามารถจ่ายทอร์กสูงสุดได้นานเท่าใด

## 7 สรุป

### 7.1 ผลการวิเคราะห์

1. ได้สูตรคำนวณทอร์กแบบสถิต:  $\tau = J_F^T F$
2. คำนวณทอร์กสำหรับ 3 Valid Configurations ที่ Home Pose
3. **Config 1 (Down-Down)** ให้ผลลัพธ์ดีที่สุด (ทอร์กสมดุล)
4. ทอร์กสูงสุด  $\approx 1.63$  N-m (ทำนอง)
5. แนะนำเลือกมอเตอร์ 5 N-m (รวม Safety Factor 3x)

### 7.2 งานต่อไป (Phase 2.2)

- คำนวณ Inertia Matrix  $M(q)$  จากมวลและ COM ของแต่ละ link
- คำนวณ Gravity Vector  $G(q)$
- คำนวณ Dynamic Torque:  $\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) - J_F^T F_{ext}$
- จำลอง Trajectory และหา Peak Torque ในระหว่างการเดิน

## 8 อ้างอิง

- `forward-kinematics-5bar.tex` - Forward Kinematics และ Jacobian Derivation
- `inverse-kinematics-analytical.tex` - Inverse Kinematics (4 Configurations)
- `IK-Five-Bar-Leg-Analytical.py` - Python Implementation