

การวิเคราะห์ Inverse Kinematics แบบ Analytical (5-Bar Parallel Linkage)

นายธีร์โอติ เมืองจำนำค์

17 พฤศจิกายน พ.ศ. 2568

1 บทนำ

เอกสารนี้อธิบายการคำนวณ Inverse Kinematics (IK) แบบ Analytical สำหรับกลไก 5-Bar Parallel Linkage ของหุ่นยนต์ขาสองขา โดยใช้วิธีการแก้สมการทางเรขาคณิตโดยตรง ซึ่งให้ความแม่นยำสูงและรวดเร็วกว่าวิธี Numerical Inverse Kinematics (IK) คือการคำนวณหาหมุนมองเตอร์ θ_A และ θ_B เมื่อทราบตำแหน่งเป้าหมายของปลายเท้า $P_F(x_f, y_f)$ ซึ่งเป็นปัญหาที่สำคัญในการควบคุมหุ่นยนต์

1.1 ข้อได้เปรียบของวิธี Analytical

- ความแม่นยำสูง: ใกล้เคียง machine precision ($\sim 10^{-14}$ mm)
- ความเร็ว: คำนวณตรงไม่ต้อง iterate
- Deterministic: ได้คำตอบเดียวกันเสมอ
- ไม่ต้องค่าเดาเริมต้น: แต่ต้องเลือก Configuration (Elbow Up/Down)

2 Configurations ที่เป็นไปได้

สำหรับกลไก 5-Bar Linkage มีท่าที่เป็นไปได้ทั้งหมด 4 แบบ ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของข้อเข่า C (ซ้าย) และ D (ขวา):

- Config 1 (Down-Down): C ลง, D ลง - ท่ามาตรฐาน
- Config 2 (Down-Up): C ลง, D ขึ้น
- Config 3 (Up-Down): C ขึ้น, D ลง
- Config 4 (Up-Up): C ขึ้น, D ขึ้น

3 วิธีการคำนวณ

3.1 ขั้นตอนที่ 1: หาระยะห่างระหว่างจุด

จากสมการ Forward Kinematics:

$$P_F = \frac{37}{29}P_E - \frac{8}{29}P_D \quad (1)$$

เราสามารถหาระยะห่างระหว่าง P_F และ P_D :

$$|P_F - P_D| = L_{DE} \times \frac{37}{29} = 145 \times \frac{37}{29} = 185.0 \text{ mm} \quad (2)$$

3.2 ขั้นตอนที่ 2: หาจุด D จากการตัดกันของวงกลม

หา P_D จากการตัดกันของวงกลม 2 วง:

- วงที่ 1: ศูนย์กลาง P_F (เป้าหมาย), รัศมี 185.0 mm
- วงที่ 2: ศูนย์กลาง P_B (มอเตอร์ขวา), รัศมี $L_{BD} = 105 \text{ mm}$

การตัดกันของวงกลมจะได้จุด 2 จุด เราเลือกตาม Configuration ที่ต้องการ (D ลง หรือ D ขึ้น)

3.3 ขั้นตอนที่ 3: หาจุด E

จากสมการ:

$$P_E = \frac{29P_F + 8P_D}{37} \quad (3)$$

3.4 ขั้นตอนที่ 4: หาจุด C จากการตัดกันของวงกลม

หา P_C จากการตัดกันของวงกลม 2 วง:

- วงที่ 1: ศูนย์กลาง P_A (มอเตอร์ซ้าย), รัศมี $L_{AC} = 105 \text{ mm}$
- วงที่ 2: ศูนย์กลาง P_E , รัศมี $L_{CE} = 145 \text{ mm}$

3.5 ขั้นตอนที่ 5: คำนวณมุมมอเตอร์

จากเวกเตอร์ที่ได้:

$$\theta_A = \arctan 2(y_c - y_a, x_c - x_a) \quad (4)$$

$$\theta_B = \arctan 2(y_d - y_b, x_d - x_b) \quad (5)$$

4 ผลการทดสอบ

4.1 กรณีทดสอบ: Home Pose

เป้าหมาย: $P_F = (0, -200) \text{ mm}$

ตารางที่ 1: ผลลัพธ์ IK สำหรับทั้ง 4 Configurations

Configuration	θ_A ($^{\circ}$)	θ_B ($^{\circ}$)	Error (mm)	Valid
Down-Down	-119.53	-37.68	6.36×10^{-14}	
Down-Up	-139.91	-166.32	1.68×10^{-13}	
Up-Down	-16.06	-37.68	4.26×10^{-14}	
Up-Up	-19.37	-166.32	3.39×10^2	✗

ตารางที่ 1: ผลการทดสอบ IK ทั้ง 4 Configurations สำหรับเป้าหมาย (0, -200) mm

4.2 การตีความผลลัพธ์

คำตอบที่ถูกต้อง (Valid): พบ 3 จาก 4 Configurations

1. **Config 1 (Down-Down):** ท่ามาตรฐาน - เหมาะสมที่สุด
2. **Config 2 (Down-Up):** ท่าแปลง - อาจเสี่ยง singularity
3. **Config 3 (Up-Down):** ท่าแปลง - ไม่เหมาะสมกับการพยุงน้ำหนัก

Config 4 (Up-Up): อยู่นอก Workspace (Error = 339 mm)

5 สรุปและข้อแนะนำ

5.1 ข้อค้นพบสำคัญ

- กลไก 5-Bar Linkage มี หลายคำตอบ สำหรับจุดเดียว กัน
- สำหรับ $(0, -200)$ mm มีคำตอบที่ถูกต้อง 3 แบบ
- ความแม่นยำระดับ 10^{-14} mm (machine precision)

5.2 การนำไปใช้

แนะนำให้ใช้ **Config 1 (Down-Down)** เพราะ:

- เป็นท่าที่เสถียรและธรรมชาติ
- เหมาะสำหรับการพยุงน้ำหนัก
- หลีกเลี่ยง Singularity