

Рекурсия и итерация

1. Найдите с помощью расширенного алгоритма Евклида обратный остаток $7^{-1} \pmod{102}$.
2. Вычислите $3^{11} \pmod{107}$.
3. Доказать корректность рекурсивный алгоритма умножения чисел Multiply ([ДПВ] раздел 1.1.2) и получить верхнюю оценку на его время работы.

```
1 Function Multiply ( $x, y$ ) :  
    Вход : ( $x, y$ ) — целые числа,  $y \geq 0$   
    Выход:  $x \times y$   
2   if  $y == 0$  then  
3       return 0  
4   end  
5    $z = \text{Multiply}(x, \lfloor y/2 \rfloor)$   
6   if  $y$  чётно then  
7       return  $2z$   
8   end  
9   else  
10      return  $2z + x$   
11  end  
12 end
```

4[Задача о Ханойской башне]. Есть три стержня, на первом из них нанизано n колец разного радиуса; чем ниже лежит кольцо, тем больше радиус. Кольца разрешено перекладывать со стержня на стержень, но только при условии что кольцо меньшего радиуса кладётся на кольцо большего радиуса. Найдите

минимальное число перекладываний, требуемое для того, чтобы переложить все кольца с одного стержня на другой. (Найдите как верхнюю, так и нижнюю оценку).

5 [Шень 1.1.33]. Функция f с натуральными аргументами и значениями определена так: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2n) = f(n)$, $f(2n + 1) = f(n) + f(n + 1)$.

1. Построить рекурсивный и итеративный алгоритмы, вычисляющий $f(n)$ и оценить их сложности, считая что арифметические операции стоят $O(1)$.

2. Постройте алгоритм, требующий $O(\log n)$ операций.

6 [Конкретная математика раздел 1.2]. Какое максимальное число L_n областей, на которые плоскость делится n прямыми? Постройте рекурсивный алгоритм, решающий задачу, и получите с его помощью явную формулу.

7 [Задача Иосифа Флавия (см. Конкретная математика 1.3)]. В ходе иудейской войны Иосиф в составе 41 иудейского воина был загнан римлянами в пещеру. Чтобы не сдаваться противнику, воины решили выстроиться в круг и последовательно убивать каждого третьего, пока не останется ни одного человека (последний убивает предпоследнего и себя). Иосиф не хотел умирать, нашёл единомышленника и вычислил спасительные места.

1. Постройте алгоритм, который получает на вход число n и вычисляет спасительное место (только для Иосифа), при условии, что убивают каждого второго.

2*. Получите явную формулу.