1. Упростите выражение для множеств:

$$(A \cup \overline{B}) \cap (B \setminus C \cup D \setminus A) \cup A \cap D \cup B \cap D.$$

В итоговом выражении должно быть минимально возможное число операций над множествами.

2. Рассмотрим множество натуральных чисел от 1 до n и введем на нем следующее отношение частичного порядка: если у числа a натуральных делителей строго меньше, чем у b, то $a \prec b$. Также введем отношение эквивалентности: если количество делителей у a и b совпадает, тогда $a \sim b$; в этом случае a и b не сравнимы относительно введенного ранее частичного порядка.

(a) Нарисуйте диаграмму Хассе получившегося частично упорядоченного множества для $n = 20$;

(b) Укажите самую большую антицепь в нем. Не забудьте обосновать свой ответ;

(c) Пусть $48 \leqslant n \leqslant 59$. Сколько есть классов эквивалентности на введенном множестве?

3. Для булевой функции $f(a, b, c) = (01011100)$:

(a) Запишите ДНФ, полученную из таблицы истинности, а затем упростите ее;

(b) По упрощенному выражению постройте решающее дерево;

(c) Из построенного дерева получите КНФ для функции f.

4. Найдите линейное рекуррентное соотношение для последовательности $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, где a_n — количество двоичных слов длины n, не содержащих подслова “010” и вычислите a_0, a_1, a_2 и a_3. Будьте внимательны, от вас требуется найти именно рекуррентное соотношение, а не выписать явную формулу от n.

5. Дан полный двудольный граф $K_{m,n}$.

(a) Сколько подграфов C_5 (циклов на 5 вершинах) он содержит?

(b) А сколько в нем подграфов C_6?

6. Приведите пример связного графа на 1000 вершинах, в котором центральных вершин ровно 100 и при этом степень любой центральной вершины меньше степени любой нецентральной.

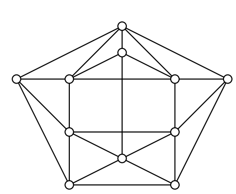
7. Вычислите малые числа Рамсея:

(a) $R(3, 3) = 6$;

(b) $R(3, 4) = 9$.

То есть нужно доказать для числа Рамсея соответствующую оценку сверху и привести пример графа, показывающего, что меньше указанного числа число Рамсея быть не может.

8. Эйлеров ли этот граф? Если да, то найдите в нём эйлеров цикл, если нет, то найдите минимальное число рёбер, которые необходимо из него удалить, чтобы он стал эйлеровым. Ответ обоснуйте.



9. Рёберным графом графа G называется граф G', такой, что вершины графа G' соответствуют рёбрам G, и две вершины в G' смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им рёбра в G имеют общий конец. Докажите или опровергните утверждение: «если в G есть гамильтонов цикл, то и в G' также есть гамильтонов цикл».

10. На курсе 100 студентов. Известно, что среди них можно выделить 149 различных пар студентов, которые во время семестра давали друг другу списывать на контрольных. Деканат принял решение отчислить после сессии минимально возможное число студентов, но таким образом, чтобы среди оставшихся студентов не осталось ни одной пары списывающих друг у друга. Докажите, что к следующему семестру на курсе останется не менее 26 студентов.

11. Дано семейство различных k-элементных подмножеств $\mathcal{S} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ множества $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Назовём элементы v_i и v_j *соседями*, если они вместе входят хотя бы в одно из множеств A_k. Пусть у каждого из элементов v_j существует не более чем $2k$ соседей (включая сам v_j). Докажите, что элементы $v_1, \ldots, v_n$ при всех достаточно больших k можно раскрасить пятью красками, так, чтобы никакое подмножество из $\mathcal{S}$ не было одноцветным. Примените локальную лемму Ловаса.

12. Пусть M_G — матрица смежности размера $n \times n$ двудольного графа G с равными долями размера n, такая, что ее строки соответствуют вершинам первой доли, а столбцы — вершинам второй. Пусть $p(G)$ — количество всех различных совершенных паросочетаний в G (необязательно непересекающихся по ребрам). Подумайте, какая функция $P(M_G)$, зависящая от всех элементов матрицы, удовлетворяет свойству $P(M_G) = p(G)$ для любого графа G. *Подсказка:* попробуйте рассмотреть определить и, возможно, как-то его “подправить”.

13. Окружность разбита на 2019 равных пронумерованных дуг. Сколькими способами можно раскрасить эти дуги в красный и синий цвета, так, чтобы ни одна красная дуга не была окружена двумя синими дугами? Раскраски, отличающиеся друг от друга поворотами окружности, считайте разными. Решите задачу, применив формулу включений-исключений, обязательно указав явно, как определяются множества, мощность объединения которых по этой формуле вычисляется.