25 сентября 2020 г.

Задачи для семинара № 1.

1

Два игрока играют в игру: они одновременно поднимают вверх 1 или 2 пальца. Если оба показывают 1 палец, то первый игрок выигрывает 2 доллара, если 2 пальца, то 4 доллара. Если же один из них показывает 1 палец, а другой - 2 пальца, то второй игрок выигрывает 3 доллара.

Второй игрок решил выбрасывать 1 или 2 пальца по следующему принципу. Он загадал некоторое вероятностное распределение P на $[0, 1]$ и на каждом этапе разыграет случайную величину η с этим распределением, а затем уже разыгрывает 1 или 2 с вероятностями η и $1 - \eta$ соответсвенно. Известно, что P является абсолютно непрерывным распределением с конечным математическим ожиданием.

Первый игрок решил "не мудрить" и выбирать 1 или 2 с вероятностями p и $1 - p$ соответственно ($p \in [0, 1]$-константа).

Предполагается, что перед началом игры было сыграно несколько раундов для разминки (не на деньги).

T1 Объясните, какое значение параметра p нужно выбрать первому игроку, чтобы математическое ожидание его выигрыша было максимальным.

N1 Просимулируйте игру для случаев, когда P является равномерным распределением на $[0, 1]$ и бета распределением, а p меняется от 0 до 1 с шагом $1/5$. Постройте соответствующие диаграммы размаха размера выигрыша первого игрока.

2

T2 Пусть $X_1, ..., X_n$ - выборка из распределения с функцией распределения $F(x)$ и плотностью $p(x)$. Докажите, что функция распределения $r-$ ой порядковой статистики равна

$$F_{X_{(r)}}(x) = \sum_{k=r}^{n} C_n^k \big(F(x)\big)^k \big(1 - F(x)\big)^{n-k},$$

а плотность этого распределения задаётся формулой

$$p_{X_{(r)}}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \big(F(x)\big)^{r-1} \big(1 - F(x)\big)^{n-r} p(x).$$

N2 Пусть $X_0, X_1, X_2, ...$ - цены акций в моменты времени $0, 1, 2, ...$ Лог-доходностью акции называется

$$Y_k = \log\big(X_k / X_{k-1}\big), \qquad k = 1, 2, ...$$

Value-at-Risk определяется как взятая со знаком минус теоретическая квантиль распределения Y_k, то есть

$$\mathbb{P}\Big\{Y \leq -VaR_p\Big\} = p$$

На основе информации о ценах акции IBM (data(ibm) в пакете waveslim) постройте графики зависимости VaR_p от параметра p. Сравните этот график с аналогичными графиками, построенными при помощи других оценок квантилей. Для $p = 0.05$, постройте график оценённой функции распределения случайной величины $Y_{(\lfloor np \rfloor)}$, заменив функцию распределения величины Y на её оценку.

3

T3 Дана выборка из распределения с функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \big(x/\beta\big)^\alpha, & 0 \leq x < \beta. \\ 1, & x \geq \beta, \end{cases}$$

где α, β - положительные параметры. Найдите оценки параметров α, β

(a) методом максимального правдоподобия;

(b) методом моментов.

N3 Зафиксируйте значения $\alpha > 0$ и $\beta > (\alpha + 2)/(\alpha + 1)$ и просимулируйте случайную величину с функцией распределением $F(x)$ 1000 раз. По каждой выборке оцените параметры α и β методом моментов и методом максимума правдоподобия. Постройте диаграммы размаха показывающие, какой метод лучше.

4

T4 Обозначим семейство распределений Пуассона

$$\mathbb{P}_\lambda\{X = k\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

(a) Докажите, что данное семейство является экспоненциальным.

(b) Используя только свойства экспоненциальных семейств:

- найдите математическое ожидание и дисперсию величины X;

- предполагая, что дана выборка $x_1, ..., x_n$, найдите оценку параметра λ методом максимального правдоподобия и методом моментов.

N4 Промоделируйте случайную величину с бета-распределением. При помощи численной оптимизации, найдите оценки параметров методами максимального правдоподобия и методом моментов.