PROYECTO 3: MECÁNICA CELESTE

EQUIPO N°1

- Mariana Zapata Covarrubias 195111
- Mauricio Verduzco Chavira 195106
- Ricardo Illescas Carrancá 197809
- Alejandro Terrazas Maeshiro 187977

TABLA DE CONTENIDO

IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

Identificación del problema

Después de más de 20 años de investigación, aún no se sabe como se mueve en realidad la Luna. El objetivo de este proyecto es modelar y simular el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra y del Sol. Para esto modelaremos el sistema solar usando ecuaciones diferenciales, que nos ayudarán a describir el movimiento de estos cuerpos celestes con el paso del tiempo.

MODELO MATEMÁTICO

Como ya mencionamos, el movimiento de los planetas en el sistema solar se describe con ecuaciones diferenciales, ya que este sistema es dinámico con el paso del tiempo, dependiendo de las masas de los planetas y sus posiciones. Dicho movimiento se describe mediante una elipse y un movimiento de fuerzas entre dos cuerpos. En este caso, se visualiza el movimiento como producto de la fuerza ejercida entre algún planeta y el Sol.

Tomando en cuenta la ecuación de gravedad de Newton:

$$F = G * \frac{m_1 * m_2}{r^2} \ldots (\text{Ec. } 1)$$

En donde la fuerza de atracción gravitacional entre dos cuerpos es igual al producto entre las masas e inversamente proporcional a su distancia al cuadrado, todo multiplizado por la constante de gravitación universal de Newton.

Esta fórmula describe una fuerza exclusivamente en una dirección, sin embargo debemos recordar que los cuerpos se comportan tridimensonalmente. Entonces, para obtener la fuerza adecuadamente, debemos obtener los componentes de cada vector.

También recordamos la segunda Ley de Newton o la Ley de Inercia:

$$F = m * a \ \ldots (\text{Ec. } 2)$$

Esta explica que la fuerza que un cuerpo experimenta es igual al producto entre su masa y su aceleración.

Todo el modelo matemático se fundamenta en el hecho de que la función de posición, de velocidad y de aceleración son funciones del tiempo y están relacionadas entre sí.

$$r(t) = r_0 + v(t) * t + \frac{a(t) * t^2}{2}$$

$$v(t) = v_0 + a(t) * t$$

$$a(t) = a(t)$$

Esto significa que

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v(t))$$

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r(t))$$

Entonces esto implica que:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} r(t) = a(t) \ldots (\text{Ec. } 3)$$

Es decir, la aceleración de un cuerpo es proporcional a la segunda derivada de la posición.

Si tomamos la relación de Ec. 3 y lo insertamos en Ec. 2, resulta que

$$F = m * \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} r(t) \ldots \text{Ec. } 4$$

Igualando Ec. 1 con Ec. 4.

$$m * \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} r(t) = G * \frac{m * m'}{r^2}$$

Por lo tant:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} r(t) = \frac{G * m'}{r^2}$$

Al romper esta ecuación diferencial en los componentes, obtenemos que:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} x(t) = G * m' \frac{(x' - x)}{r^3}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = G * m' \frac{(y' - y)}{r^3}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}z(t) = G * m' \frac{(z' - z)}{r^3}$$

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

En donde G es la cosntante de Gravitación Universal de Newton, m' es la masa del planeta, r es la distancia entre la luna y el planeta en cuestión.

Esto nos deja con un problema que se explica como un sistema de tres ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Nostros sabemos que una ecuación diferencial debe tener una cantidad de condiciones inciales proporcionales a su grado. De esta forma al tener una ecuación de segundo orden, necesitamos dos confdiciones inciaiales. La posición inicial y la velocidad inicial. Ya que tenemos un sistema de tres ecuaciones esto singifica que necesitaremos seis condiciones iniciales, las tres componentes de la posición inicial y las tres componentes de la velocidad inicial. Ahora, tomando en cuenta que vamos a estudiar tres cuerpos celestes: Tierra, Sol y Luna, necesitaremos entonces 18 condiciones inciales para resolver este sistema satisfactoriamente.

Notemos que para calcular adecuadamente la trayectoria de la luna, significa que tenemos que calcular este sistema de ecuaciones iterativamente para encontrar el impacto que significa cada cuerpo respecto la Luna y así sumarlos.

Implementación del modelo en el proyecto

Para implementar este proyecto vale la pena aprovechar las características de MATLAB y su eficiencia en operaciones matriciales. Las iteraciones de ecuaciones diferenciales pueden ser resueltas con distintos métodos numéricos de solución de ecuaciones diferenciales como ode45, ode113, RK4, RKF45, ABM4.

Los resultados se almacenan en distintas posiciones de un vector resultante y, nosotros necesitamos tomar solo las columnas correspondientes a la posición de cada planeta a lo largo del vector del tiempo "t".

Esta gráfica la podemos hacer con ayuda de un plot3 o un comet3 si quisieramos animarlo.

Más adelante podemos estudiar estas gráficas y, con ayuda de algoritmos de minimización y/o maximización, podremos encontrar el tiempo en el que sucederán distancias máximas y mínimas entre planetas, o encontrar el tiempo en el que sucederá el siguiente eclipse.

CÓDIGO

```
Ms = 1.989*10^30;
Mt = 5.972*10^24;
Ml = 7.349*10^22;
G = 6.67*10^-11;
Gm= G*[Ms;Mt;Ml];
```

```
r0=[  1.81899e8;    9.83630e8; -1.58778e7;
    -1.43778e11;  -4.00067e10; -1.38875e7;
    -2.43778e11;  -5.00067e10; -2.38875e7];
v0=[-1.12474e01 ; 7.54876e00 ;  2.68723e-01;
      7.65151e3 ; -2.87514e4 ;  2.08354e00;
      1.65151e3 ; -1.87514e4 ;  1.08354e00];

y0=[r0;v0];
```

PRUEBAS DEL MODELO

Problema 1

```
```

Problema 2

```
```

CONCLUSIONES

REFERENCIAS