

Universidad Nacional de Córdoba
 Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación
 Curso de Posgrado “Redes Neuronales”
 Docentes: Dr. Francisco Tamarit, Dr. Juan Ignacio Perotti
 Alumna: María Virginia Romero Messein
 Trabajo Práctico N° 1

En este informe utilizaré el modelo Integrate and Fire para analizar la evolución temporal del potencial de membrana $V_m(t)$ entre el interior y el exterior de una neurona genérica. Este modelo fue propuesto en 1907 por el neurocientífico francés Louis Lapicque con el objetivo de describir matemáticamente el potencial de membrana.

valiosa para conocer el comportamiento del sistema en tiempos largos. En este caso, donde no hay un estímulo de corriente externa, es decir cuando $I_e = 0$. En este diagrama de estabilidad se observa una recta con pendiente negativa $\frac{-1}{\tau_m}$ con raíz en E_L donde $V_m = 0$. En este caso $V = E_L$ es el punto fijo.

Primera Parte. Sin activación del mecanismo de disparo

Considero la siguiente ecuación diferencial ordinaria para el potencial de membrana de una neurona genérica. La ecuación es lineal, unidimensional y de primer orden:

$$\frac{dV_m(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_m} (E_L - V_m(t) + R_m I_e(t)),$$

donde:

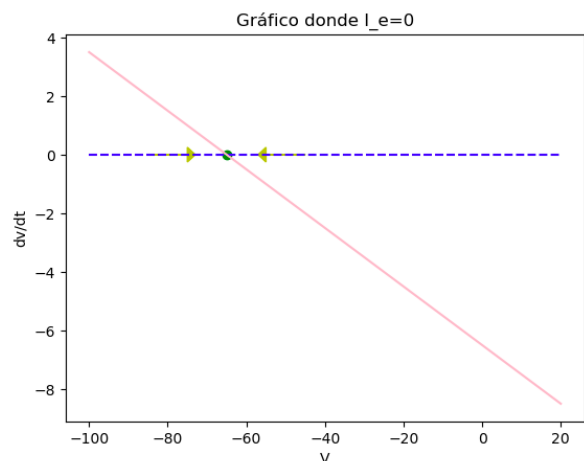
$\tau_m = 10 \text{ mses}$ el tiempo característico de la membrana,

$E_L = -65 \text{ mV}$ es el potencial en reposo,

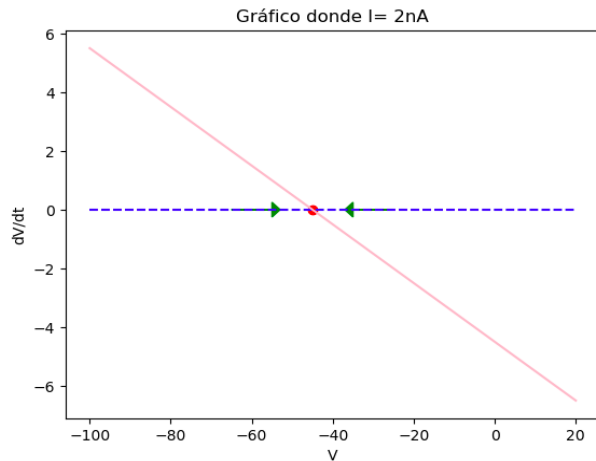
$R_m = 10 \text{ M}\Omega$ es la resistencia,

$I_e(t)$ es una corriente eléctrica externa.

A) A continuación se observa el gráfico del lado derecho de la EDO, el cual brinda información



B) En el siguiente gráfico se observa que al agregar una corriente externa $I_e = 2 \text{ nA}$, se produce un corrimiento del punto fijo donde $V_m = E_L + R_m I_e$



C) Resuelvo analíticamente la ecuación diferencial (1) (sin incorporar el mecanismo de disparo) para un valor arbitrario y constante $I_e(t) = I$

$$\frac{dV_m(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_m} (E_L - V_m(t) + R_m I_e(t))$$

Reescribo la ecuación simplificando los índices

$$V' = \frac{1}{\tau} (E + RI) - \frac{1}{\tau} V$$

Teniendo en cuenta que la EDO es una ecuación en la que se pueden separar las variables:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\tau} (E + RI) - \frac{1}{\tau} V$$

$$\omega = J$$

$$\tau dV = (J + V) dt$$

$$\tau \frac{dV}{(J - V)} = dt$$

Integrando obtengo:

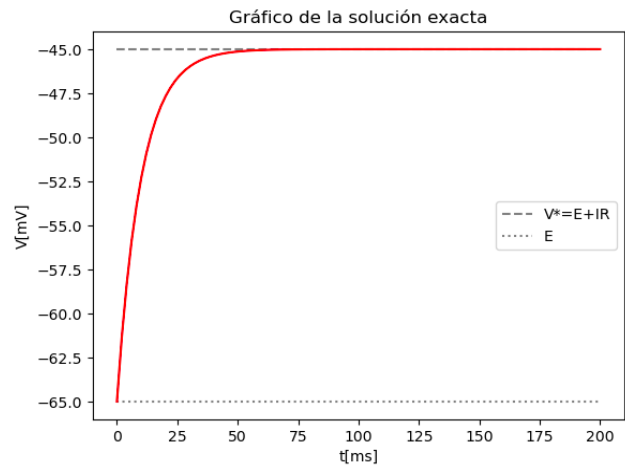
$$-\tau \ln(J - V) = t + C$$

Con constante arbitraria C

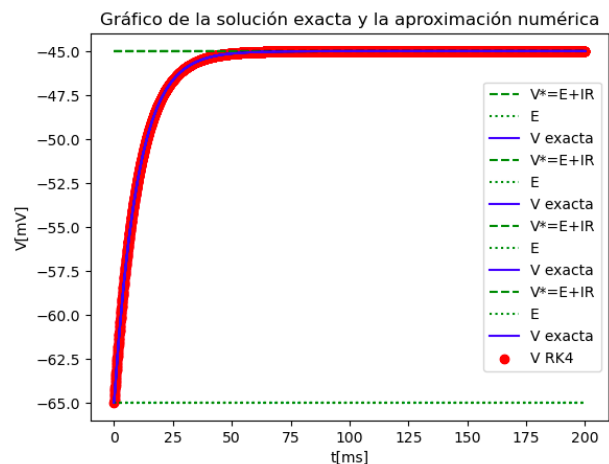
La solución general es la siguiente:

$$V(t) = E + RI - e^{-\frac{t}{\tau}} \quad C^*$$

D) A continuación se observa el gráfico de la solución calculada en el punto anterior con corriente $I_e = 2 \text{ nA}$ y considerando que $V(0) = E_L = -65 \text{ mV}$.

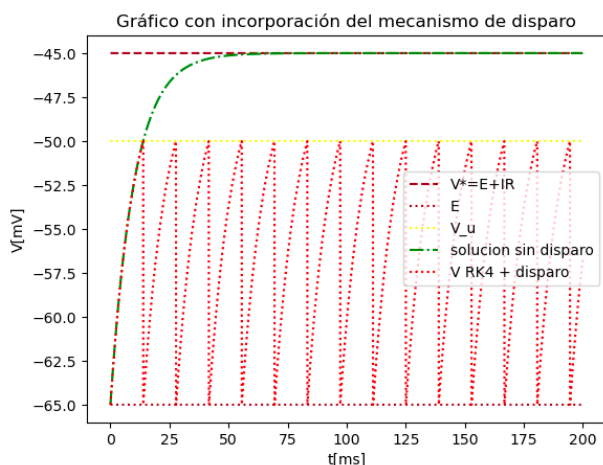


E) A continuación se grafica de manera superpuesta la solución exacta graficada en el apartado D) y la aproximación numérica calculada a través del método Runge Kutta para resolver el problema del valor inicial con una corriente externa de $I_e = 2 \text{ nA}$. Se observa que la aproximación numérica marcada en rojo se asemeja a la solución exacta marcada en azul.



Segunda parte: con activación del mecanismo de disparo

F) En el siguiente gráfico se observa que al agregar la condición de disparo con una corriente de entrada constante de $I_e = 2 \text{ nA}$, ocurre lo siguiente: Al comienzo $V_m = 0$ y con la presencia de la corriente externa su valor empieza a crecer hasta alcanzar el valor del umbral -50 mV . Allí el potencial comienza a despolarizarse, es decir, pierde la carga del capacitor abruptamente, lo que provoca un regreso al valor de reposo de -65 mV . Sin embargo, dado que la corriente de entrada sigue allí, de a poco se vuelve a restituir la carga, lo que genera un crecimiento del potencial hasta llegar nuevamente al umbral de disparo y así sucesivamente. Se observa que el sistema oscila entre -65 y -50 mV generando una sucesión de picos. La línea verde indica la solución sin disparo demostrando que si no estuviese el umbral, V_m seguiría cargando.

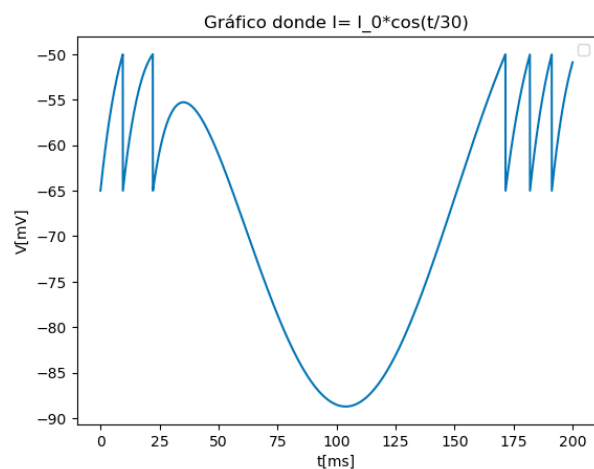


G) En el siguiente gráfico los valores son los mismos que en el punto anterior solo que ahora

la corriente externa depende de t y tiene esta forma:

$$I_e(t) = I_0 \cos(t/30), \quad I_0 = 2.5 \text{ nA}, \quad \text{para } 0 \text{ ms} \leq t \leq 200 \text{ ms}.$$

Se observa que cuando la corriente externa depende del tiempo, se produce una caída del potencial de membrana por debajo del estado de reposo y cuando la señal de input supera cierto valor comienza a disparar.



H) A continuación se presenta el cálculo analítico de la frecuencia de disparo para los valores del punto F) en función de la corriente externa I_e (constante).

Partiré de la solución exacta obtenida en el punto C), donde la condición inicial es $V_m(0) = E_L$,

$$V(t) = E + RI_0(1 - e^{-\frac{t-t_d}{\tau}})$$

El tiempo t_d del primer disparo satisface a

$$V_u = V(t_d)$$

Entonces:

$$V_u = E + RI_0(1 - e^{-\frac{t_d}{\tau}})$$

Ahora despejo t_d

$$1 - \frac{V_u - E}{RI_0} = e^{-\frac{t_d}{\tau}}$$

$$\ln(1 - \frac{V_u - E}{RI_0}) = -\frac{t_d}{\tau}$$

$$t_d = \tau \ln(\frac{RI_0}{RI_0 + E - V_u})$$

La frecuencia de disparo es:

$$f_d = \frac{1}{t_d}$$

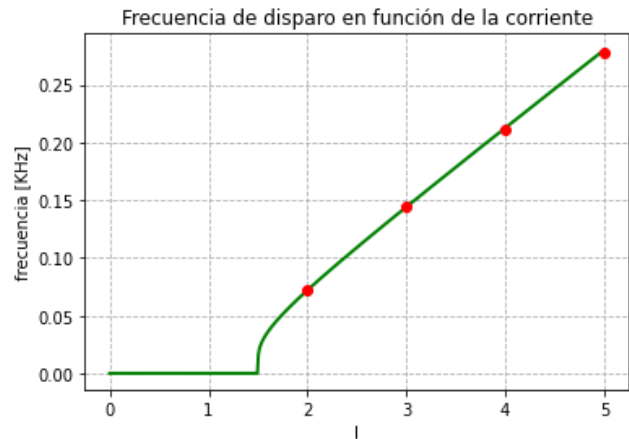
$$f_d = \frac{1}{\tau \ln(\frac{RI_0}{RI_0 + E - V_u})}$$

Ahora defino la expresión de la frecuencia en función de la corriente de entrada:

$$frec(I) = \frac{0}{- \tau \ln(\frac{E + RI + v_{umb}}{RI})}$$

En el siguiente gráfico el cálculo analítico está representado por la línea verde. Se observa que la frecuencia es 0 hasta que $I = 1,5$ y que a partir de ese valor la frecuencia comienza a aumentar.

Por otra parte, los puntos rojos representan el cálculo numérico de la relación existente entre la frecuencia y la corriente para diferentes valores de la corriente externa, 2,3,4 y 5. A través de la superposición de ambos tipos de cálculo (analítico y numérico) se observa un buen comportamiento de la aproximación numérica.



I) En el siguiente gráfico los valores son los mismos que en el punto F), pero ahora la corriente externa depende de t y es una función con una suma de senos y cosenos con la forma:

$$I_e(t) = 0.35 (\cos(\frac{t}{3}) + \sin(\frac{t}{5}) + \cos(\frac{t}{7}) + \sin(\frac{t}{11}) + \cos(\frac{t}{13}))^2 nA$$

Se observa que con esta corriente de entrada, los picos ocurren de manera irregular. Aquí, la corriente es una función que oscila en el tiempo. No se trata de un movimiento periódico, sino que se generan espigas de diversos tamaños.

