Appunti spettrometro

February 19, 2021

1 Angolo di deviazione minimo

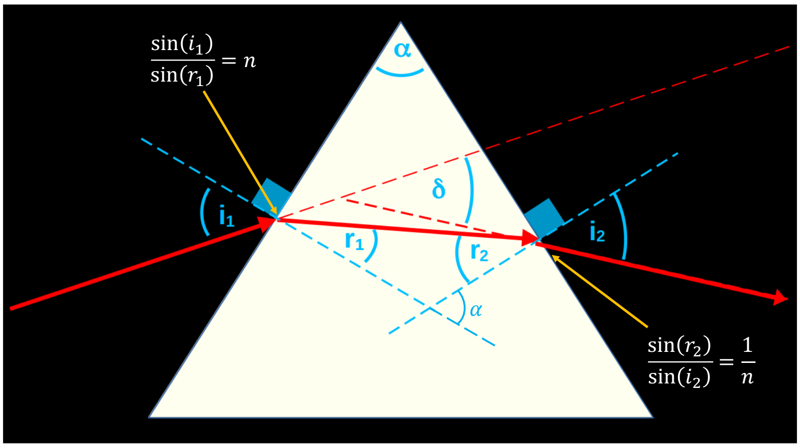

Figure 1: Schema prisma: riporta la notazione utilizzata per la derivazione dell'angolo di deviazione minimo.

Dalla relazione tra angoli interni ed esterni di un triangolo possiamo scrivere:

$$\alpha = r_1 + r_2 \tag{1}$$

$$\delta = i_1 - r_1 + i_2 - r_2 = i_1 + i_2 - \alpha \tag{2}$$

variando la 2 e la 1 si ha:

$$d\delta = di_1 + di_2 \tag{3}$$

$$dr_1 = -dr_2 \tag{4}$$

Consideriamo adesso la legge di Snell sulle due superfici del prisma:

$$seni_1 = \frac{n_2}{n_1} senr_1; \quad senr_2 = \frac{n_1}{n_2} seni_2 \tag{5}$$

variando le leggi di Snell rispetto agli angoli:

$$cosi_1 di_1 = \frac{n_2}{n_1} cosr_1 dr_1; \quad cosr_2 dr_2 = \frac{n_1}{n_2} cosi_2 di_2 \tag{6}$$

A partire dalla seconda della 6 possiamo scrivere:

$$di_2 = \frac{n_2}{n_1} \frac{cosr_2}{cosi_2} dr_2 = -\frac{n_2}{n_1} \frac{cosr_2}{cosi_2} dr_1 = -\frac{cosr_2}{cosi_2} \frac{cosi_1}{cosr_1} di_1 \tag{7}$$

dove abbiamo usato la 4 nel primo paassaggio e la prima delle 6 nel secondo passaggio.

Consideriamo adesso la derivata della 2 rispetto all'angolo di incidenza i_1:

$$\frac{d\delta}{di_1} = 1 + \frac{di_2}{di_1} = 1 - \frac{cosr_2}{cosi_2}\frac{cosi_1}{cosr_1} \tag{8}$$

dove abbiamo usato la 7. Questa espressione ci dice come varia l'angolo di deviazione δ tra raggio incidente e raggio uscente dal prisma per una variazione infinitesima dell'angolo di incidenza. Ricaviamo il punto in cui 8 si annulla:

$$\frac{d\delta}{di_1} = 1 - \frac{cosr_2}{cosi_2}\frac{cosi_1}{cosr_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad cosr_2 cosi_1 = cosi_2 cosr_1 \tag{9}$$

Concentriamoci sull'uguaglianza a destra ed eseguiamo qualche passaggio:

$$cos^2 r_2 cos^2 i_1 = cos^2 i_2 cos^2 r_1 \tag{10}$$

esprimendo i coseni in funzione dei seni e utilizzando le espressioni 5 della legge di Snell, si ricavano le seguenti:

$$sen^2 i_1 = sen^2 i_2; \quad sen^2 r_1 = sen^2 r_2 \tag{11}$$

Dunque il punto in cui la derivata 8 si annulla è:

$$i \equiv i_1 = i_2; \quad r \equiv r_1 = r_2 \tag{12}$$

da cui, usando le espressioni 2 e 1 si ricavano:

$$\delta_m = 2i - \alpha; \quad r = \frac{\alpha}{2} \tag{13}$$

Verifichiamo che δ_m sia effettivamente un minimo: studiamo la derivata di δ, espressione 8, per capire come varia spostandoci dal valore δ_m. L'angolo di deviazione δ cresce se:

$$\frac{d\delta}{di_1} = 1 - \frac{cosr_2}{cosi_2}\frac{cosi_1}{cosr_1} > 0 \quad \Rightarrow \quad cosr_2 cosi_1 < cosi_2 cosr_1 \tag{14}$$

Possiamo effettuare gli stessi passaggi fatti a partire dalla 10, solo che in questo caso abbiamo una disuguaglianza, quindi otteniamo:

$$sen^2 i_2 < sen^2 i_1; \quad sen^2 r_2 < sen^2 r_1 \tag{15}$$

da cui ricaviamo:

$$i_1 > i_2; \quad r_1 > r_2 \tag{16}$$

Dalle espressioni 1 e 13 possiamo scrivere anche:

$$2r = \alpha = r_1 + r_2 < 2r_1 \quad \Rightarrow \quad r_1 > r \quad \Rightarrow \quad i_1 > i \tag{17}$$

quindi possiamo concludere che l'angolo di deviazione δ cresce se l'angolo di incidenza i_1 è più grande dell'angolo di incidenza i per cui la derivata si annulla.
Allo stesso modo, possiamo studiare quando l'angolo di deviazione δ decresce, ponendo:

$$\frac{d\delta}{di_1} = 1 - \frac{cosr_2}{cosi_2}\frac{cosi_1}{cosr_1} < 0 \quad \Rightarrow \quad cosr_2 cosi_1 > cosi_2 cosr_1 \tag{18}$$

attraverso passaggi del tutto analoghi si arriva a concludere che l'angolo di deviazione δ decresce se l'angolo di incidenza i_1 è più piccolo dell'angolo di incidenza i per cui la derivata si annulla.
Per riassumere:

$$\begin{cases} i_1 > i \Rightarrow \frac{d\delta}{di_1} > 0 \Rightarrow \delta \text{ crescente} \\ i_1 < i \Rightarrow \frac{d\delta}{di_1} < 0 \Rightarrow \delta \text{ decrescente} \end{cases} \tag{19}$$

e quindi il valore δ_m dato dalla 13 è un minimo.
Per $\delta \equiv \delta_m$ si ha:

$$n = \frac{sen\frac{\alpha+\delta_m}{2}}{sen\frac{\alpha}{2}} \tag{20}$$

2 Criterio di Rayleigh

A causa della diffrazione, l'immagine di una sorgente puntiforme data da una lente è quella di un dischetto luminoso. Questo comportamento è importante quando si vogliono distinguere due sorgenti puntiformi viste dalla lente sotto un angolo θ piccolo. Si faccia rferimento alle figure 2 e 3.

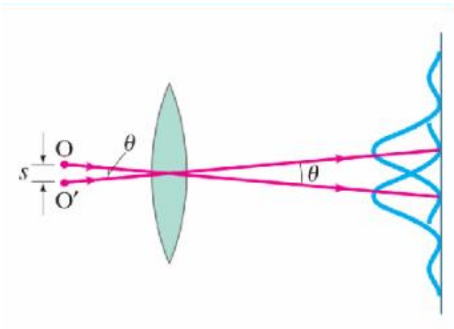

Figure 2: Due sorgenti puntiformi O e O' viste dalla lente sotto un angolo θ.

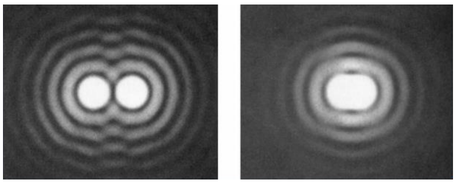

Figure 3: Sinistra: $\theta > 1.22\frac{\lambda}{D}$. Destra: $\theta \approx 1.22\frac{\lambda}{D}$

Tenendo conto del fatto che il primo minimo della figura di diffrazone si ha per $\theta_R = 1.22\frac{\lambda}{D}$, dove D è il diametro della lente, allora per $\theta >> \theta_R = 1.22\frac{\lambda}{D}$ non c'è sovrapposizone tra i due dischetti, e le immagini delle due sorgenti O e O' rsultano ben distinte (si dice che sono risolte). Al diminuire dell'angolo θ le due figure di diffrazione tendono a sovrapporsi, fino al punto in cui non si può più distinguerle.
Possiamo stabilire un criterio (criterio di Rayleigh) mediante il quale affermiamo se le due sorgenti sono distinguibili o meno: il valore minimo dell'angolo θ per cui riusciamo a distinguere le immagini delle due sorgenti è:

$$\theta_R = 1.22\frac{\lambda}{D} \tag{21}$$

e corrisponde al punto in cui il primo minimo di diffrazione di una sorgente coincide con il centro del massimo dell'altra sorgente (si dice che le due sorgenti sono appena risolte). Questo criterio è applicabile anche alle immagini prodotte da una fenditura: in tal caso nella 21 non compare il fattore 1.22.

3 Potere risolutivo prisma

La performance di uno spettrometro a prisma è caratterizzata dal potere risolutivo R. Due righe corrispondenti a lunghezze d'onda λ e $\lambda+\Delta\lambda$, rispettivamente, risultano distinguibili fino a quando il massimo della riga $\lambda+\Delta\lambda$ non coincide con il minimo della riga λ. Il potere risolutivo del prisma è definito come il rapporto tra la lunghezza d'onda λ e la minima differenza di lunghezza d'onda $\Delta\lambda$ per cui due righe λ e $\lambda + \Delta\lambda$ sono distinguibili:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \tag{22}$$

Il potere risolutivo si può esprimere nel modo seguente:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = L \cdot |\frac{dn}{d\lambda}| \tag{23}$$

dove L è la base del prisma. Noti i coefficienti della legge di Cauchy, dalla 22 è possibile determinare il potere risolutivo del prisma in esame.
Derivazione della 22: definiamo la dispersione angolare del prisma come la variazione della deviazione minima con la lunghezza d'onda

$$\frac{d\delta_m}{d\lambda} = \frac{2sen\frac{\alpha}{2}}{cos\frac{\delta_m+\alpha}{2}} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \tag{24}$$

ottenuta derivando la 20.

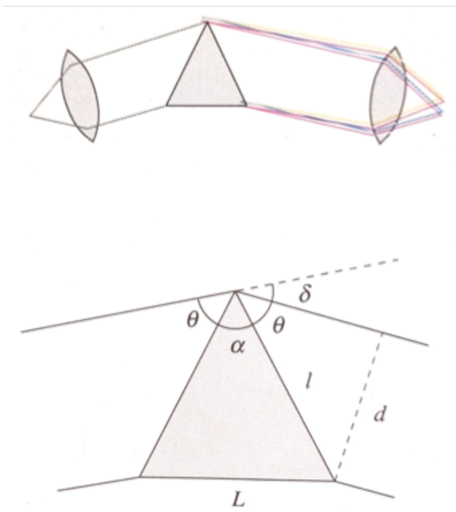

Figure 4:

Con riferimento alla figura 4, possiamo scrivere:

$$\delta_m + \alpha = \pi - 2\theta \Longrightarrow cos\frac{\delta_m + \alpha}{2} = sen\theta = \frac{d}{l} \tag{25}$$

$$l \cdot sin\frac{\alpha}{2} = \frac{L}{2} \tag{26}$$

usando queste espressioni nella 24 otteniamo:

$$\frac{d\delta_m}{d\lambda} = \frac{L}{d} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \tag{27}$$

Il fascio uscente dal prisma, focalizzato dalla lente del telescopio, ha una larghezza d (vedi figura 4). Nel piano focale della lente si formerà un'immagine della sorgente, la fenditura, allargata dalla diffrazione. Dal criterio di Rayleigh, eq. 21, sappiamo che la minima deviazione angolare risolvibile è:

$$\Delta\delta_R = \frac{\lambda}{d} \tag{28}$$

quindi possiamo scrivere:

$$\frac{\Delta\delta_m}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda}{d \cdot \Delta\lambda} = \frac{L}{d} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \tag{29}$$

dove nel primo passaggio abbiamo usato la 28 e nel secondo 27. Da quest'ultima si ottiene evidentemente la relazione 23.

4 Potere risolutivo reticolo

Se consideriamo due lunghezze d'onda λ_1 e λ_2, con $\lambda_2 > \lambda_1$, per un reticolo a N fenditure e passo d, i corrispondenti massimi principali di ordine m e minimi ad essi adiacenti si formano ad angoli:

$$sen\theta_{m,1}^{max} = m\frac{\lambda_1}{d}, \qquad sen\theta_{m,1}^{min} = m\frac{\lambda_1}{d} \pm \frac{\lambda_1}{Nd} \tag{30}$$

$$sen\theta_{m,2}^{max} = m\frac{\lambda_2}{d}, \qquad sen\theta_{m,2}^{min} = m\frac{\lambda_2}{d} \pm \frac{\lambda_2}{Nd} \tag{31}$$

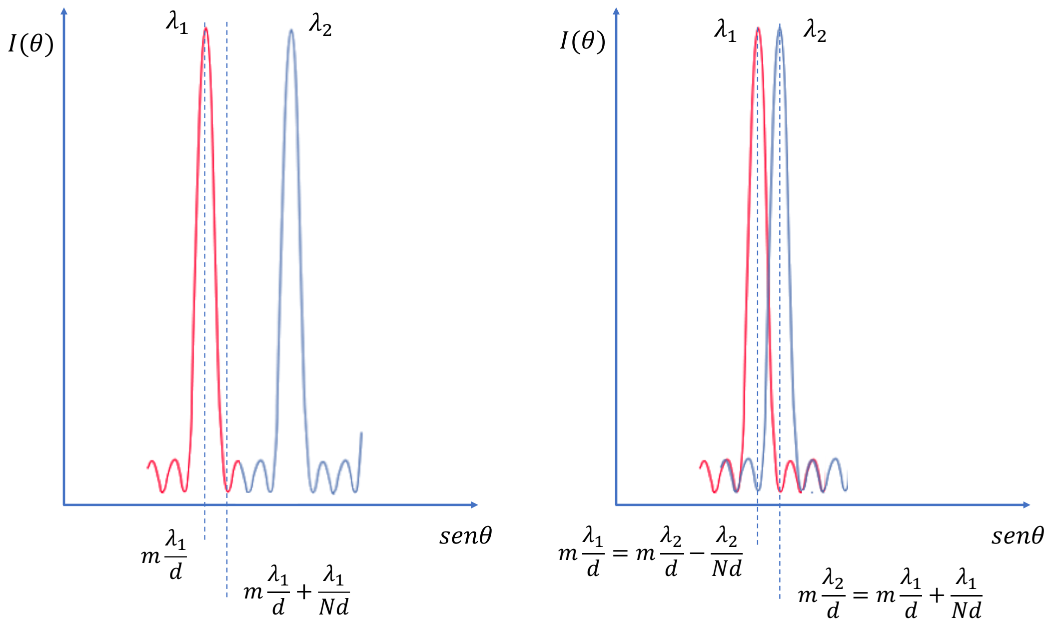

Figure 5: Sinistra: i due massimi di ordine m, corrispondenti alle righe di lunghezza d'onda λ_1 e λ_2, rispettivamente, sono risolvibili. Destra: in questa situazione il massimo di una riga coincide con il minimo dell'altra, e i due massimi sono appena risolvibili.

Facendo riferimento al criterio di Rayleigh: i due massimi di ordine m sono appena risolvibili quando il massimo di una riga coincide con il minimo dell'altra; ovvero, usando le espressioni 30 e 31, quando sono soddisfatte le condizioni (vedi figura 5):

$$m\frac{\lambda_1}{d} + \frac{\lambda_1}{Nd} = m\frac{\lambda_2}{d} \qquad \Longrightarrow \qquad m(\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{\lambda_1}{N} \tag{32}$$

$$m\frac{\lambda_2}{d} - \frac{\lambda_2}{Nd} = m\frac{\lambda_1}{d} \qquad \Longrightarrow \qquad m(\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{\lambda_2}{N} \tag{33}$$

dalla somma delle espressioni ottenute:

$$m(\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2N} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} = mN \tag{34}$$

e ponendo $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ e $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$, possiamo scrivere il potere risolutivo del reticolo a N fenditure all'ordine m come:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN \quad (35)$$

Come notiamo dalla 35, il potere risolutivo del reticolo è proporzionale al numero di fenditure N e aumenta con l'ordine m dello spettro, tuttavia non dipende dal passo d.

5 Potere dispersivo reticolo

Come già evidenziato nella discussione sul potere risolutivo del reticolo, per due righe le cui lunghezze d'onda differiscono di $d\lambda$ i massimi principali di ordine m si formano a due angoli che differiscono di $d\theta$. Possiamo quantificare la separazione angolare $d\theta$ a cui si formano i due massimi corrisipondenti alle righe di differenza di lunghezza d'onda $d\lambda$ con la grandezza:

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{1}{d}\frac{m}{cos\theta_m} \quad (36)$$

ottenuta derivando la relazione sull'angolo a cui si formano i massimi principali:

$$sen\theta_m = m\frac{\lambda}{d} \quad (37)$$

La grandezza D è nota come potere dispersivo. Il potere dispersivo di un reticolo aumenta al diminuire del passo d e all'aumentare dell'ordine m dello spettro.

6 Considerazioni sul potere risolutivo e dispersivo di un reticolo

Potere risolutivo e dispersivo di un reticolo sono grandezze legate a proprietà diverse del reticolo, come già evidenziato nei paragrafi 4 e 5. Per un reticolo con passo d piccolo, ma anche numero di fenditure N piccolo, la dispersione è buona, ma non si riesce a risolvere lunghezze d'onda molto vicine. Infatti, i centri dei massimi sono ben distanziati, ma ciascun massimo è largo. Al contrario, per un reticolo con passo più grande, ma anche numero di fenditure maggiore, la dispersione è peggiore, ma si riescono a risolvere meglio lunghezze d'onda molto vicine perchè i massimi sono più stretti. Naturalmente le performance migliori si ottengono con un reticolo il cui passo d è piccolo e il numero di fenditure N è grande: in questo caso si ha sia una buona dispersione che una buona risoluzione.
Notiamo che dispersione e risoluzione non dipendono esplicitamente dalla larghezza della fenditura, tuttavia essa determina il massimo valore dell'ordne m, e di conseguenza i valori più grandi che si possono ottenere per la dispersione e la risoluzione.