

CORSO DI LABORATORIO II

TURNO 2A

GRUPPO 14

Circuiti 3: sulle funzioni di trasferimento

Autori:

Anno Accademico 2021-2022

Contents

Elenco delle figure	ii
1 Parte prima: funzioni di trasferimento nei circuiti RL ed RC	1
1.1 Obiettivi	1
1.2 Metodo	1
1.3 Dati ed analisi	2
1.4 Conclusioni	2
2 Parte seconda: funzioni di trasferimento nei circuiti RLC	5
2.1 Obiettivi	5
2.2 Metodo	5
2.3 Dati ed analisi	5
2.4 Conclusioni	7

List of Figures

1	Schemi circuiti RC ed RL	1
2	Grafici RC	3
3	Grafici RL	4
4	Schema circuito RLC	5
5	Grafici RLC	7

1 Parte prima: funzioni di trasferimento nei circuiti RL ed RC

1.1 Obiettivi

Si studiano le funzioni di trasferimento all'interno di circuiti RL e RC in tensione alternata. Successivamente, si determinano i valori delle osservabili caratterizzanti il condensatore e l'induttore.

1.2 Metodo

Dopo aver impostato il circuito come in figura, si calcola la tensione del generatore reale V_g su tutto il circuito e la tensione V_R sulla resistenza. Grazie alle impostazioni dell'oscilloscopio (Tektronix TDS 1001C-EDU) è

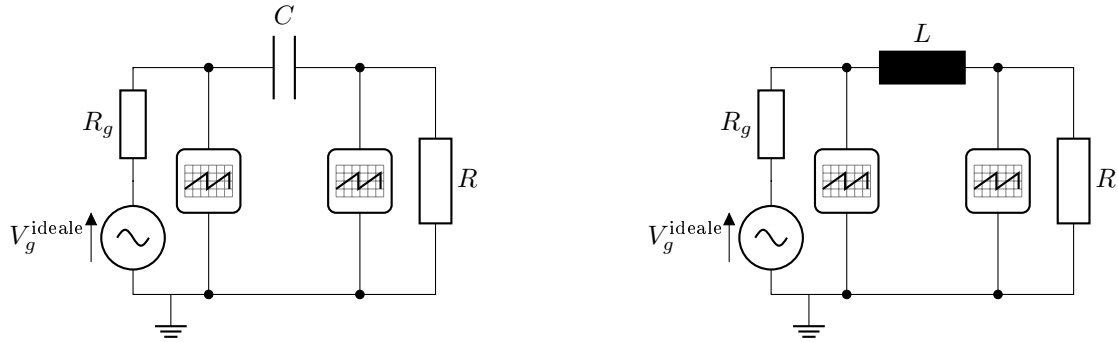


Figure 1: Schemi dei circuiti RC ed RL con rappresentata la posizione delle sonde dell'oscilloscopio.

possibile ricavare direttamente la loro differenza $V_{C,L}(t) = V_g(t) - V_R(t)$ che è esattamente la tensione che si ha sul condensatore (induttore) del circuito.

Successivamente si ricava anche la differenza di fase $\Delta\phi'(\omega)$ tra $V_{C,L}$ e V_g , e la differenza di fase $\Delta\phi''(\omega)$ tra V_g e V_R . Questi dati sono stati ottenuti dall'oscilloscopio in dotazione tramite specifiche funzioni con cui si può calcolare direttamente le differenze di fase sopra descritte.

Il calcolo manuale di $\Delta\phi'$ e $\Delta\phi''$ avrebbe previsto la valutazione della differenza temporale tra gli zeri delle due onde e la moltiplicazione di essa per la frequenza del generatore. Risulta preferibile utilizzare gli zeri rispetto ai picchi in quanto l'incertezza sulla tensione è minore a causa della pendenza della forma del segnale.

Si utilizza un condensatore con capacità $C = 1 \mu\text{F}$ ed una resistenza $R = (2.002 \pm 0.011) \text{ k}\Omega$. Ogni misura riportata — tranne per il valore della resistenza — è ottenuta facendo misure ripetute da cui si estrae la media e la deviazione della media.

Di seguito le formule utilizzate per le funzioni di trasferimento. Per $H_1(\omega) : V_g \rightarrow V_{C,L}$ si ha:

$$|H_1(\omega)| = \left| \frac{V_{C,L}}{V_g} \right|, \quad \arg[H_1(\omega)] = \Delta\phi'(\omega)$$

Per $H_2(\omega) : V_g \rightarrow V_R$ si ha:

$$|H_2(\omega)| = \left| \frac{V_R}{V_g} \right|, \quad \arg[H_2(\omega)] = \Delta\phi''(\omega)$$

Come si può osservare, le funzioni di trasferimento sono particolari ad ogni componente.

1.3 Dati ed analisi

I dati rilevanti raccolti sono:

RC		RL	
f/Hz	$ H_C(\omega) $	f/kHz	$ H_L(\omega) $
10	1.004 ± 0.009	4	0.453 ± 0.006
20	0.986 ± 0.005	5	0.533 ± 0.004
30	0.953 ± 0.004	6	0.606 ± 0.003
50	0.887 ± 0.004	8	0.724 ± 0.004
70	0.797 ± 0.004	20	0.937 ± 0.005
100	0.673 ± 0.004	30	0.976 ± 0.004
200	0.426 ± 0.005	40	0.993 ± 0.002
300	0.2929 ± 0.0009	50	1.005 ± 0.006
400	0.2259 ± 0.0007	60	1.005 ± 0.006
500	0.1844 ± 0.0012	70	1.005 ± 0.003
600	0.1541 ± 0.0004		
700	0.1342 ± 0.0004		

Le funzioni di trasferimento utilizzate il circuito RC ed il circuito RL rispettivamente sono:

$$|H_C(\omega)| = \left| \frac{V_C}{V_g} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \quad \Delta\phi'(\omega) = -\arctan(\omega RC)$$

$$|H_L(\omega)| = \left| \frac{V_L}{V_g} \right| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}, \quad \Delta\phi'(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega L}{R}$$

In particolare, l'espressione per il modulo è utilizzata per le interpolazioni:

$$|H_C(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} + A, \quad |H_L(\omega)| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} + B$$

dove $R = (2.002 \pm 0.011) \text{ k}\Omega$ è noto. Si ricavano i parametri:

Parametro	Valore	Unità
C	0.864 ± 0.005	μF
L	40.3 ± 0.3	mH
A	$(6.6 \pm 0.9) \times 10^{-3}$	
B	$(12.3 \pm 1.7) \times 10^{-3}$	

H_C : $\chi^2 = 12$, DoF = 10, p -value = 28%. H_L : $\chi^2 = 7$, DoF = 8, p -value = 53%.

1.4 Conclusioni

Il valore misurato di capacità è prossimo alla quantità riportata sul componente stesso. Il valore di induttanza misurato non è in accordo con quanto trovato precedentemente di $L = (85 \pm 3) \text{ mH}$.

La forma d'onda data dal generatore non varia rispetto alla tensione V_g del circuito in quanto la tensione picco-picco è sempre costante e non ci sono elementi circuitali che potrebbero creare un calo di tensione. Sperimentalmente, si ha soltanto qualche piccola variazione a causa della resistenza interna del generatore di funzioni.

L'induttanza ha una propria resistenza interna in quanto non è ideale. Essa può essere considerata come una induttanza ideale posta in serie ad una resistenza. Indubbiamente, tale resistenza dev'essere considerata nei calcoli del circuito, a meno che sia di un ordine di grandezza trascurabile.

Le funzioni di trasferimento sono caratterizzate in modo differente a seconda delle tensioni che si vanno a considerare. Come si può notare dalle equazioni sopra scritte, le tensioni variano a seconda della posizione relativa delle sonde e delle componenti. Dunque, si possono avere differenti funzioni di trasferimento per uno

stesso circuito.

In un circuito RC ad alte frequenze, il condensatore induce una grande alterazione all'onda in quanto il tempo di caricamento totale è maggiore rispetto al periodo dell'onda della tensione generata. Infatti, a frequenze più basse non ci sono alterazioni ampiamente apprezzabili. Avviene esattamente il contrario con un circuito RL in quanto la tensione sull'induttanza diminuisce all'aumentare del tempo.

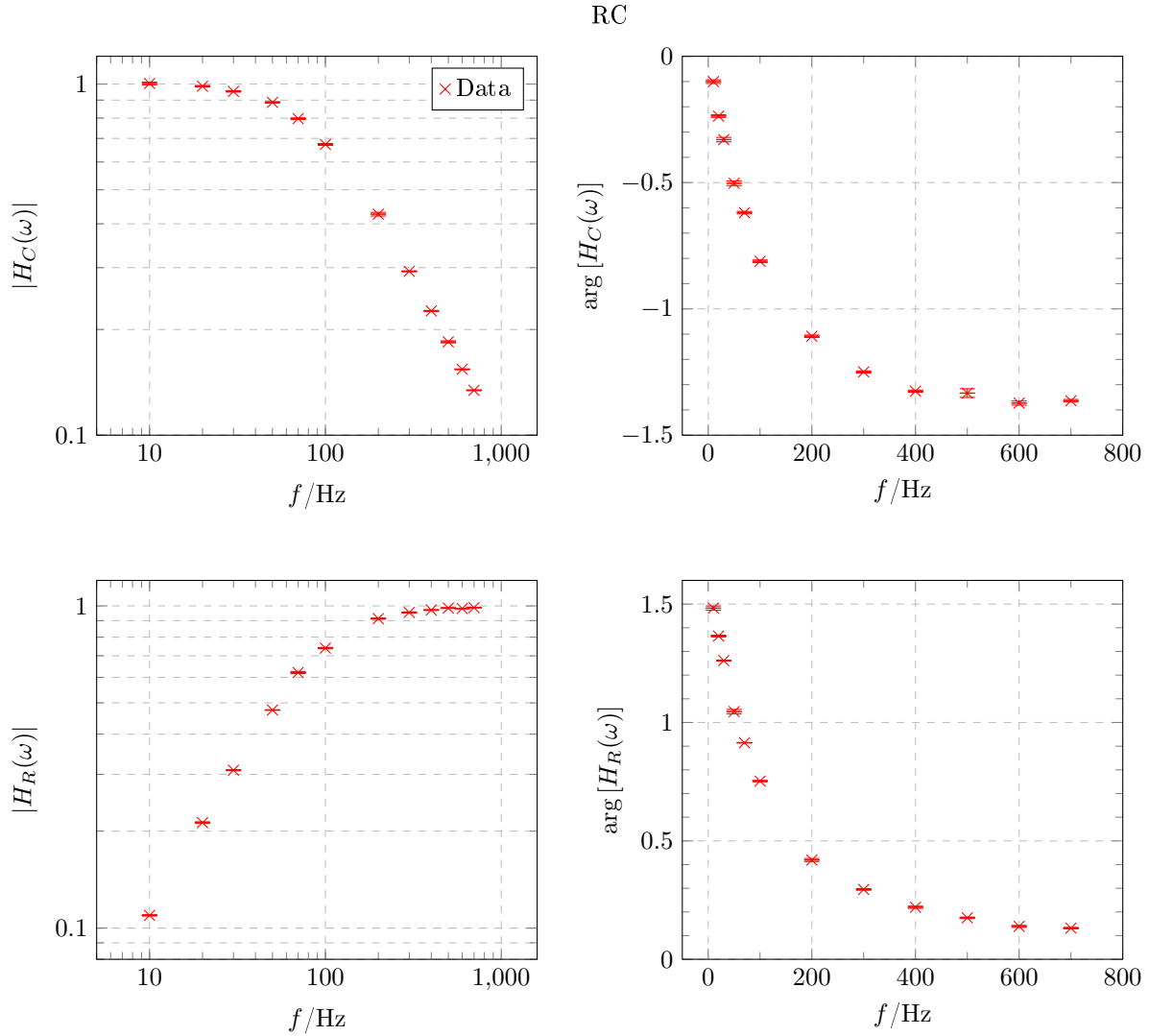


Figure 2: Grafici della funzione di trasferimento rispetto al tempo dei dati raccolti per un condensatore e per un resistore. H_C : $\chi^2 = 12$, DoF = 10, p -value = 28%.

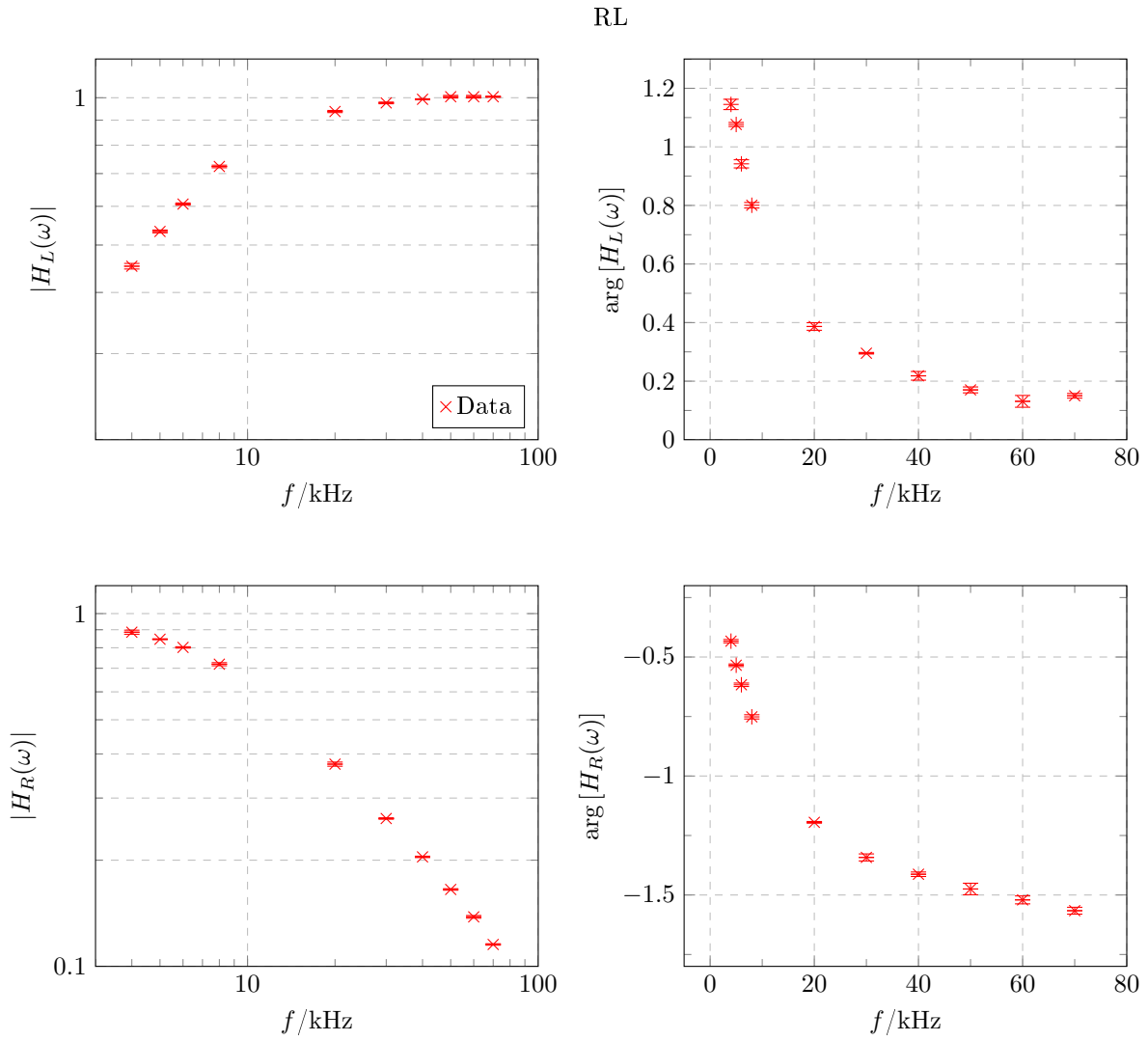


Figure 3: Grafici della funzione di trasferimento rispetto alla frequenza dei dati raccolti per un induttore e per un resistore. H_L : $\chi^2 = 7$, DoF = 8, p -value = 53%.

2 Parte seconda: funzioni di trasferimento nei circuiti RLC

2.1 Obiettivi

Si studiano le funzioni di trasferimento per un circuito RLC in corrente alternata.

2.2 Metodo

Si dispone il circuito come in figura e, generando una tensione alternata, si ricava la tensione V_g su tutto il circuito e si ricava la tensione V_R sulla resistenza. Si studiano le funzioni di trasferimento da V_g alle tensioni

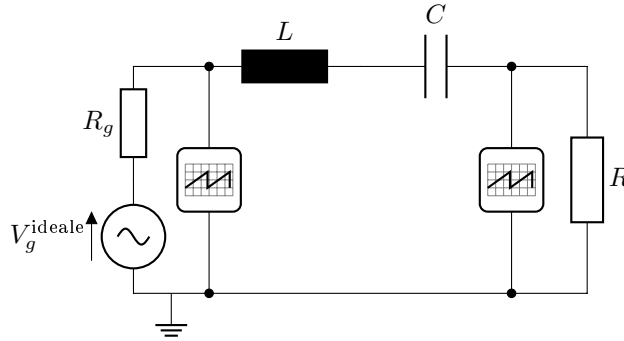


Figure 4: Schema del circuito RLC con rappresentata la posizione delle sonde dell'oscilloscopio.

sulle componenti: V_R , V_C e V_L . Per misurare la tensione su ciascuna componente, si pone questa alla fine del circuito: in questo modo la sonda di destra dell'oscilloscopio non cambia mai posizione né riferimento.

2.3 Dati ed analisi

I dati raccolti per il modulo delle funzioni di trasferimento sono:

R		C		L	
f/Hz	$ H_R(\omega) $	f/Hz	$ H_C(\omega) $	f/kHz	$ H_L(\omega) $
20	0.2147 ± 0.0007	10	0.98785 ± 0.00005	1	0.1183 ± 0.0005
40	0.4013 ± 0.0014	25	0.959 ± 0.004	4	0.4277 ± 0.0013
50	0.4784 ± 0.0016	30	0.943 ± 0.004	5	0.507 ± 0.003
60	0.546 ± 0.003	50	0.868 ± 0.006	6	0.583 ± 0.002
80	0.655 ± 0.003	100	0.670 ± 0.003	20	0.931 ± 0.004
100	0.730 ± 0.004	150	0.513 ± 0.004	30	0.970 ± 0.004
200	0.9094 ± 0.0003	300	0.2800 ± 0.0009	40	0.983 ± 0.004
400	0.953 ± 0.009			50	0.990 ± 0.004
500	0.973 ± 0.004				

I dati raccolti per la fase delle funzioni di trasferimento sono:

R		C		L	
f/Hz	$\arg[H_R(\omega)]$	f/Hz	$\arg[H_C(\omega)]$	f/kHz	$\arg[H_L(\omega)]$
20	1.3317 ± 0.0010	10	-0.117 ± 0.004	1	1.402 ± 0.006
40	1.147 ± 0.006	30	-0.317 ± 0.008	2	1.299 ± 0.008
60	1.002 ± 0.005	50	-0.521 ± 0.004	5	1.007 ± 0.008
80	0.846 ± 0.011	100	-0.859 ± 0.007	8	0.786 ± 0.012
100	0.729 ± 0.013	200	-1.162 ± 0.005	20	0.367 ± 0.010
200	0.3880 ± 0.0006	300	-1.303 ± 0.005	30	0.201 ± 0.003
		500	-1.438 ± 0.005	40	0.141 ± 0.005
				50	0.075 ± 0.006

Le funzioni di trasferimento per le componenti sono:

$$\begin{aligned}
 |H_R(\omega)| &= \left| \frac{V_R}{V_g} \right| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}, & \Delta\phi'_R(\omega) &= -\arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \\
 |H_C(\omega)| &= \left| \frac{V_C}{V_g} \right| = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}, & \Delta\phi'_C(\omega) &= -\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \\
 |H_L(\omega)| &= \left| \frac{V_L}{V_g} \right| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}, & \Delta\phi'_L(\omega) &= \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}
 \end{aligned}$$

Come precedentemente, l'espressione per il modulo viene utilizzata per le interpolazioni. In particolare:

$$\begin{aligned}
 |H_R(\omega)| &= \frac{R}{\sqrt{(R + R_L)^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} + A \\
 |H_C(\omega)| &= \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{(R + R_L)^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} + B \\
 |H_L(\omega)| &= \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} + D
 \end{aligned}$$

dove $R = (2.002 \pm 0.011) \text{ k}\Omega$, mentre R_L è la resistenza intrinseca dell'induttore. I parametri ottenuti sono:

Resistore			Condensatore		
Parametro	Valore	Unità	Parametro	Valore	Unità
C	0.835 ± 0.006	μF	C	0.90 ± 0.02	μF
L	120 ± 20	mH	L	230 ± 40	mH
R_L	1.068 ± 0.010	Ω	R_L	50 ± 50	Ω
A	$(4.6 \pm 1.9) \times 10^{-3}$		B	$(-6.27 \pm 0.11) \times 10^{-3}$	

Induttore		
Parametro	Valore	Unità
C	0.27 ± 0.06	μF
L	35.8 ± 0.5	mH
D	$(8 \pm 2) \times 10^{-3}$	

H_R : $\chi^2 = 8.4$, DoF = 5, p -value = 14%. H_C : $\chi^2 = 0.64$, DoF = 3, p -value = 89%. H_L : $\chi^2 = 5$, DoF = 5, p -value = 41%.

Successivamente si interpolano anche le fasi secondo:

$$\begin{aligned}
 \Delta\phi'_R(\omega) &= -\arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} + a \\
 \Delta\phi'_C(\omega) &= -\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} + b \\
 \Delta\phi'_L(\omega) &= \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} + d
 \end{aligned}$$

Da cui i parametri sono:

Resistore			Condensatore		
Parametro	Valore	Unità	Parametro	Valore	Unità
C	0.768 ± 0.013	μF	C	0.897 ± 0.013	μF
L	82 ± 8	mH	L	23 ± 4	mH
a	$(-48 \pm 4) \times 10^{-3}$		b	$(-3 \pm 5) \times 10^{-3}$	

Parametro	Induttore	
	Valore	Unità
C	1.5 ± 0.2	μF
L	31.1 ± 0.9	mH
d	-0.122 ± 0.009	

ϕ_R : $\chi^2 = 5.65$, DoF = 3, p -value = 13%. ϕ_C : $\chi^2 = 8$, DoF = 4, p -value = 8.8%. ϕ_L : $\chi^2 = 16$, DoF = 5, p -value = 0.6%.

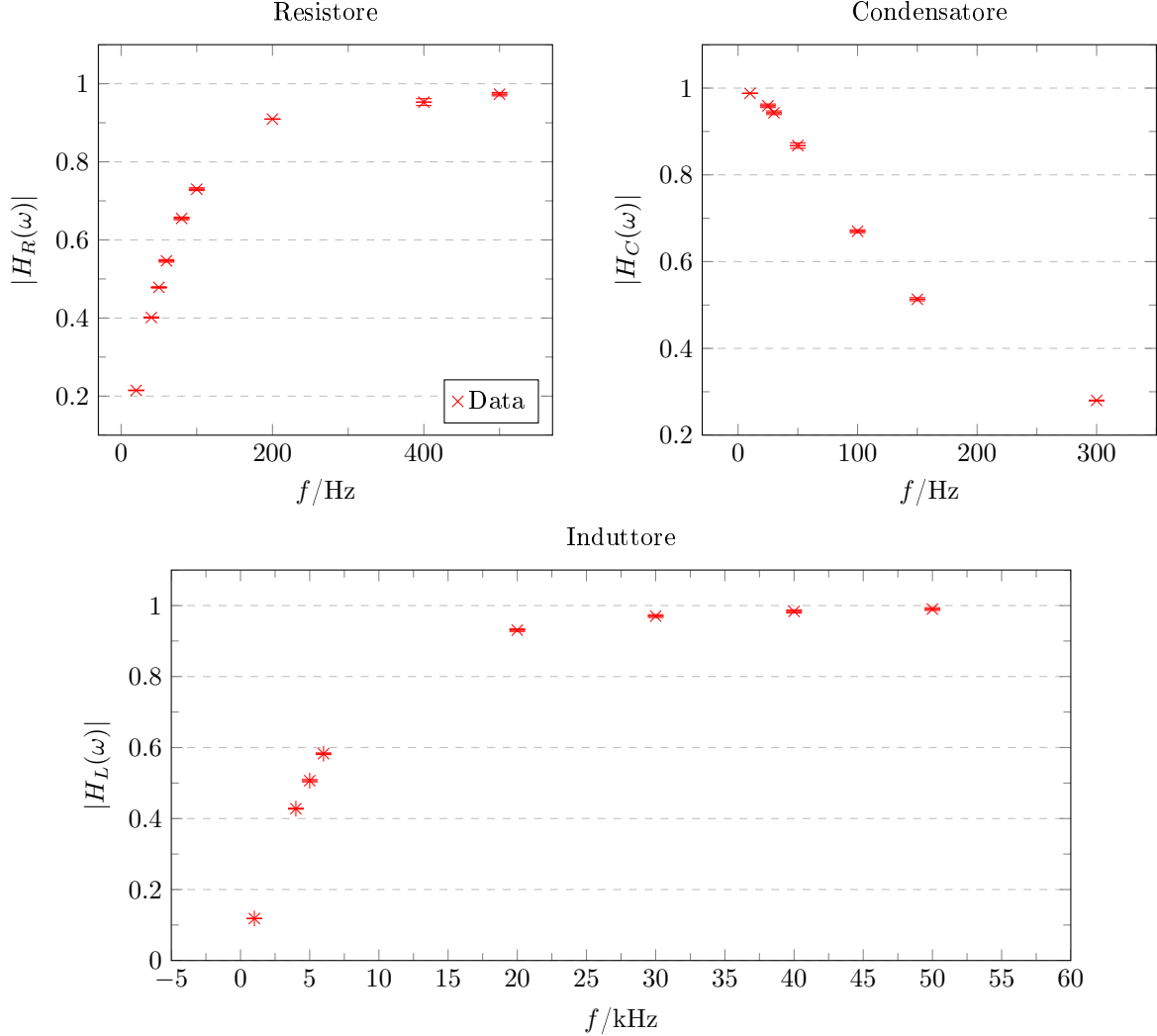


Figure 5: Grafici del modulo della funzione di trasferimento rispetto alla frequenza dei dati raccolti per un resistore, per un condensatore e per un induttore. H_R : $\chi^2 = 8.4$, DoF = 5, p -value = 14%. H_C : $\chi^2 = 0.64$, DoF = 3, p -value = 89%. H_L : $\chi^2 = 5$, DoF = 5, p -value = 41%.

2.4 Conclusioni

Sebbene quasi ogni interpolazione sia accettabile, molti risultati sono in disaccordo tra loro, sia per il condensatore che per l'induttore. Da due sole interpolazioni si ottiene un valore di induttanza in accordo con quanto misurato in precedenza di $L = (85 \pm 3) \text{ mH}$.

I valori di capacità trovati, nonostante non in accordo tra loro, sono comunque vicini a quanto riportato

sull'involucro esterno del condensatore utilizzato.

La funzione di trasferimento misurata su R ha la forma di risonanza di una campana e la sua larghezza dipende dall'osservabile $\gamma = \frac{R}{2L}$. Tuttavia, nello studio qualitativo dell'intervallo di frequenze per la funzione di trasferimento del resistore, si è erroneamente valutato tale intervallo, misurando solamente prima della frequenza di risonanza: non è stato possibile osservare la forma a campana.